

Suites numériques

Exercice 1 - suites arithmétiques et géométriques

1. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison $r=-2$ et telle que $U_{10} = 25$.
 - a. Calculer U_{50} .
 - b. Calculer $S_{10} = U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$.
2. Soit la suite géométrique (V_n) de raison $q =$ et telle que $V_8 =$.
 - a. Calculer V_{20} .
 - b. Calculer $S_9 =$.

Exercice 2 - suites du type $U_n=f(n)$

Calculer les limites des suites suivantes :

- a. $U_n =$
- b. $U_n =$
- c. $U_n =$
- d. $U_n =$
- e. $U_n =$

Exercice 3 - théorème de comparaison

Calculer les limites des suites suivantes :

- a. $U_n =$
- b. $U_n =$

Exercice 4 - croissances comparées

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant le théorème des croissances comparées.

- a. $U_n =$
- b. $U_n =$
- c. $U_n =$

Exercice 5 - croissances comparées

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

- a. $U_n =$
- b. $U_n =$

c. $U_n =$

Exercice 6 - récurrence

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 2}$$

Exercice 7 - récurrence

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n}$$

Exercice 8 - récurrence

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

c. Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 9 - Limite de suite numériques

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite proposée.

$$a_n = \frac{5n^3 + 2n - 4}{n^3 + n^2 + 1}$$

$$b_n = \frac{2\sin n + 3}{n+1}$$

$$c_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$$

Exercice 10 - Extrait du baccalauréat

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$U_0 =$$

1.a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique à termes positifs .

b. Calculer la somme $S_n =$ en fonction de n et en déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^n U_k$ en fonction de n .

c. déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

2. On définit la suite (W_n) par $W_n =$ pour tout entier n .

Montrer que la suite (W_n) est une suite arithmétique .

Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^n W_k$ en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$

3. Calculer le produit $P_n =$ en fonction de n .

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 11 - Quelques résultats historiques (R.O.C)

Démontrer que :

1. Toute suite convergente est bornée.

2. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

3. Si une suite converge, alors sa limite est unique.

4. La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.

5. Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

6. Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.

7. Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée.

Exercice 12 - Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_0 = a; b_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} .$$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Divergence des suite $(\cos n)$ et $(\sin n)$

Démontrer que les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ divergent.

Exercice 13 - Comportement asymptotique des suites géométriques

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

pour tout réel x positif et tout entier naturel n , on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Démontrer que :

- Si $a \in]1; +\infty[$ alors (u_n) est divergente vers $+\infty$.
- Si $a=1$ alors (u_n) est constante donc converge vers 1.
- Si $a \in]-1; 1[$ alors (u_n) est convergente vers 0.
- Si $a \in]-\infty; -1[$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 14 - Somme des cubes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$$

Par exemple $S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier positif non nul $S_n = 2n^4 - n^2$.

2. Déterminer n tel que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 913\,276$.

Exercice 15 - Notion de suite

Soient (U_n) une suite croissante et majorée

et (V_n) une suite décroissante et minorée.

Les suites (U_n) et (V_n) ont-elles nécessairement la même limite ?

Exercice 16 - Restitution organisée des connaissances (sujet type Bac)

On suppose connu le résultat suivant :

La suite (U_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout

intervalle de la forme $]A; +\infty[$ **contient toutes les valeurs de** U_n

à partir d'un certain rang.

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que :

* U_n est inférieur ou égal à V_n à partir d'un certain rang ;

* U_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démontrer que la suite (V_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 - Utilisation d'une suite auxiliaire arithmétique

Soit (U_n) telle que $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$.

Soit (V_n) telle que, pour tout entier naturel n , $V_n = \frac{1}{2+U_n}$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \frac{2}{n+1} - 2.$$

3. Calculer la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (V_n) .

Exercice 18 - Etude de la convergence d'une suite

Soit (U_n) la suite définie par son premier terme $U_0 = 0$

et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-2 < U_n \leq 0$.

2. Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

3. Etudier la convergence de la suite (U_n) .

Exercice 19 - Représentation graphique

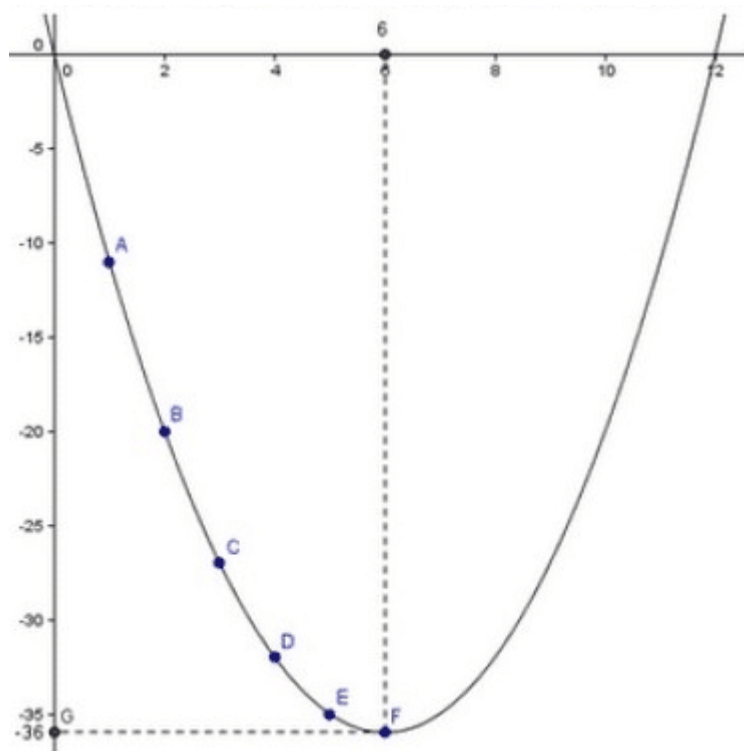
On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. Calculer les six premiers termes de cette suite.

2. On a représenté ci-dessous les termes de la suite dans un repère et tracé une courbe qui passe par ces points.

Faire une conjecture sur l'expression de la fonction représentée par cette courbe puis sur l'expression de u_n en fonction de n .

3. Démontrer la conjecture de la question précédente sur l'expression de u_n en fonction de n .



Exercice 20 - étude d'une suite récurrente à l'aide d'une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ pour tout entier n .

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Étudier la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 : étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$.

Démontrer que pour tout entier n : $u_n = 2^n$.

Exercice 22 - série harmonique alternée

Soit (S_n) la suite définie pour tout n non nul par : $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p}$.

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (S_n) converge vers $\ln 2$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4 .
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.
Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

