

La récurrence

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2}$$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n}$$

Exercice 3

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

c. Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 4 - Démonstration avec deux variables

On note x et y deux réels .

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $x^{n+1} - y^{n+1} = y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.
2. Exprimer $x^k y^{n-k}$ en fonction de x , si $k = n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

Exercice 5 - Raisonnement et démonstration de propriétés

Démontrer les propriétés ci-dessous :

1. Si $a \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $a + x \notin \mathbb{Q}$.
2. Si $a \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $a \times x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6 - Démontrer par récurrence une somme

On note x un réel différent de 1.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Exercice 7 - Calcul d'une somme

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

on a $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.

Exercice 8 - Raisonnement par récurrence et puissance

On note x un réel positif .

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 9 - Raisonnement par contraposée

On note $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de cet exercice est de montrer par contraposée la propriété suivante :

Si l'entier n^2-1 n'est pas divisible par 8 alors l'entier n est pair .

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente .
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1,2,3\}$ (à justifier).Prouver la contraposée .
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 - Somme des cubes

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. En déduire la valeur de $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3$

Multiples

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3 .

Exercice 11 - Montrer que c'est un multiple

1. Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5 .

Exercice 12 - Démonstration par récurrence

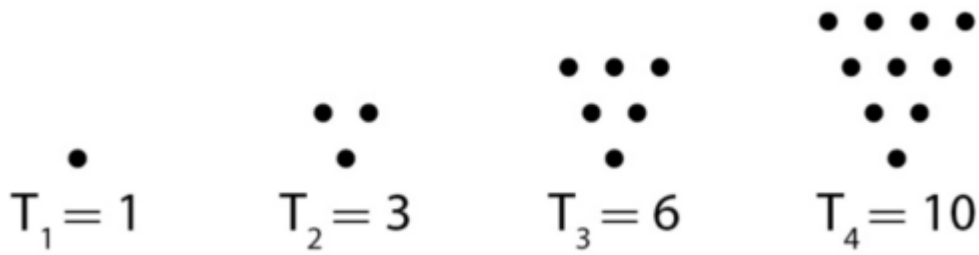
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 .$$

Rappel : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 13 :

Voici les quatre premiers nombres triangulaires :



1. Représenter T_5 et T_6 .

2.a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .

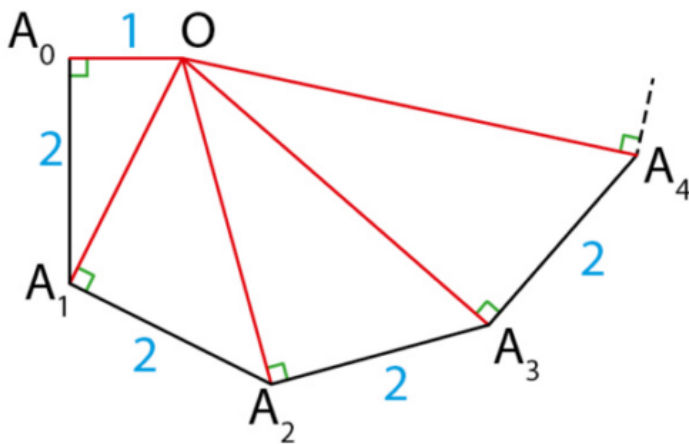
b) Conjecturer l'expression de $2T_n$, puis de T_n en fonction de n .

c) Valider cette conjecture par récurrence.

Exercice 14 :

Sur cette figure :

- $OA_0 = 1$
- $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = 2$;
- les triangles $OA_0A_1, OA_1A_2, \dots$ sont rectangles.



Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

Exercice 15 :

Voici deux fonctions écrites en langage Python par des élèves.

Paul

```
1 def U(n):  
2     u=7  
3     for i in range(1,n+1):  
4         u=10*u-18  
5     return u
```

Pauline

```
1 def V(n):  
2     v=5*10**n+2  
3     return v
```

- a) Décrire les suites (u_n) et (v_n) dont ces fonctions permettent de calculer les termes.
b) Les deux élèves remarquent que les valeurs affichées pour un même entier naturel n saisi sont identiques pour les deux programmes.
Émettre alors une conjecture et la démontrer.

Exercice 16 :

Le programme ci-dessous écrit en langage Python permet de comparer les premiers termes de deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel $n \geq 1$.

```
1 n=int(input("n="))  
2 u=1/2  
3 for i in range(1,n+1):  
4     u=(i+1)/(2*i)*u  
5     v=(i+1)/(2**(i+1))  
6     if u==v:  
7         print("Vrai")  
8     else:  
9         print("Faux")
```

- a) Décrire les deux suites (u_n) et (v_n) .
b) Saisir et exécuter ce programme pour $n = 15$.
c) Émettre alors une conjecture et la démontrer.

d) Comment expliquer les résultats obtenus pour $n = 30$?

Exercice 17:

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4 + 5u_n$.
Manon a réalisé la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	n	u_n	$u_n + 1$
2	0	0	1
3	1	4	5
4	2	24	25
5	3	124	125
6	4	624	625
7	5	3124	3125

- a) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .
b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

