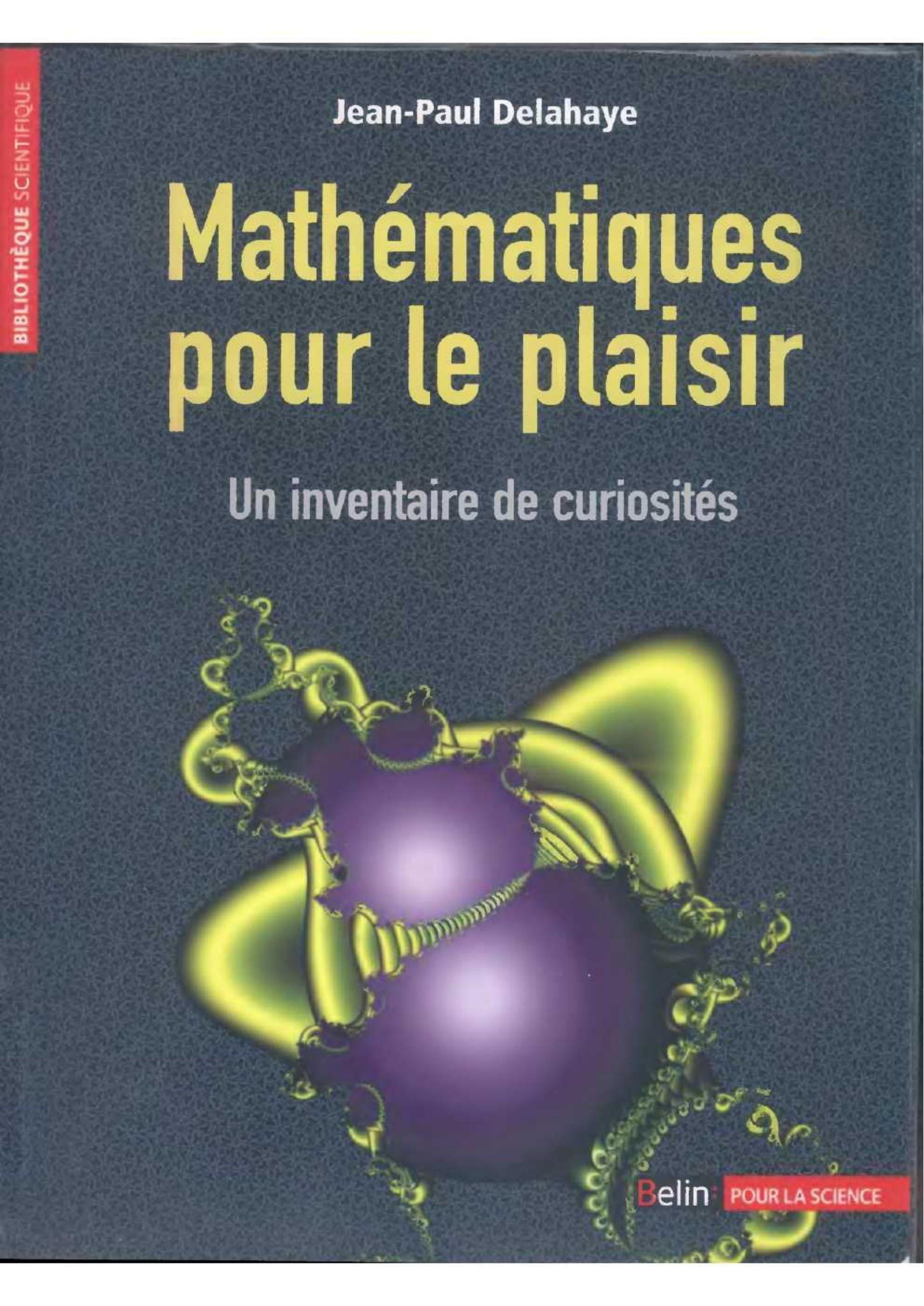
BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE

Jean-Paul Delahaye

Mathématiques pour le plaisir

Un inventaire de curiosités



Belin POUR LA SCIENCE

BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE

Mathématiques pour le plaisir

Un inventaire de curiosités

Jean-Paul Delahaye

BELIN • POUR LA SCIENCE

8, rue Férou - 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.fr – www.pourlascience.fr

SOMMAIRE

Préface 6
Introduction 9
Bibliographie 202



CHAPITRE 1 **Art** **10**

Ambigrammes 12
La musique mathématique de Tom Johnson 20
Jos Leys, un artiste géomètre 30
Apparitions magiques 40



CHAPITRE 2 **Géométrie** **48**

La révolution des œillets 50
Paver des pavés 58
Dominons les dominos 66
La délicate géométrie du carré 74
Le miraculeux « lemme de Burnside » 80



CHAPITRE 3 **Jeux** **88**

Le tsunami du *Sudoku* 90
Loto et loteries 98
Flexagones 108
Calculs et coulissements 116
Coopération et compétition 124



CHAPITRE 4 **Nombres** **132**

Les nombres zébrés 134
Nombres premiers inévitables et pyramidaux 142
Quelles pièces pour faire l'appoint ? 152
Des mots magiques infinis 160



CHAPITRE 5 **Casse-tête** **168**

L'emprise des cavaliers 170
Couleurs des chapeaux et codes correcteurs d'erreurs 178
La traversée du pont 186
Le merveilleux tour des cinq cartes 194

Le paradoxe du mathématicien

L'existence des jeux mathématiques est paradoxale: les mathématiques sont décriées pour leur abstraction et leur difficulté et pourtant c'est la seule discipline scientifique qui engendre une activité ludique, les *Jeux mathématiques*. N'écoutons pas les rares mathématiciens rigoristes qui professent un dédain amusé pour un art qui leur semble incongru: même si les jeux mathématiques n'étaient qu'un amusement comparée à « de vraies mathématiques », la parodie est une consécration.

Il n'est pas de petit défi. Lors d'un dîner où étaient réunies deux médailles Fields, l'un d'entre eux posa à la cantonade un « petit problème amusant ». L'autre médaillé le chercha pendant tout le repas, tout en participant à la conversation générale. Au dessert, il avait la solution et, bien évidemment, il était le seul. Un joyeux sourire éclairait son visage.

Une rubrique de Jeux mathématiques de Jean-Paul Delahaye est une vision d'un toujours surprenant monde de la pensée. Qui imaginerait que les mathématiques aient tant à dire sur les nombres, les formes du monde et sur la vie des hommes? Qui penserait que cette suite de propositions logiques nous entraîne aussi loin dans le plaisir des neurones? Car l'imagination du mathématicien guide sa recherche vers des territoires inexplorés et souvent surprenants. Certaines de ses découvertes, fondées sur des réflexions logiques *a priori* bénignes de nature (pensons au paradoxe du Crétois qui se dit menteur) sont une contestation paradoxale de l'ordre apparent du monde...

Si les jeux mathématiques sont appréciés, c'est qu'ils montrent les mathématiques à l'œuvre dans des situations variées. Ces mathématiques ne sont pas contraintes par des *a priori* sur ce qui est important et sur ce qui l'est moins. Et comme elles n'exigent pas un bagage pesant pour apprécier les résultats obtenus, elles sont d'un abord facile.

Tous les mois Jean-Paul Delahaye dévoile dans *Pour la Science* un nouveau territoire que ses collègues mathématiciens ont défriché ou qu'il a exploré lui-même. Ces chroniques sont reprises ici dans des chapitres qui intègrent les réflexions de lecteurs.

Ainsi, Jean-Paul Delahaye est le continuateur d'une longue tradition de mathématiciens qui nous ont donné des divertissements mathématiques. Le premier de ces guides fut français, Bachet de Meziriac, et il y eut une longue césure de quatre siècles jusqu'à Édouard Lucas qui renouvela le genre et inventa des histoires qui se transmettent de

génération en génération. Ainsi les coulissements, qui figurent dans les recueils anciens de jeux, sont aujourd'hui une illustration frappante de l'explosion combinatoire : il ne suffit pas d'avoir un algorithme pour résoudre un problème, il faut qu'il ne prenne pas trop de temps quand on le met en œuvre. L'analyse exhaustive de toutes les suites de mouvements possibles est hors de la portée des plus puissants ordinateurs.

Le début du XXe siècle vit la concurrence de deux maîtres du genre, l'Anglais Ernest Dudeney et l'Américain Sam Loyd. Martin Gardner enchanta le monde de ses chroniques dans *Scientific American* et contribua notablement au succès du magazine. Puis Ian Stewart prit d'Angleterre le relais avec ses chroniques dans *Pour la Science* et *Scientific American* et Jean-Paul Delahaye, depuis 18 ans, a conquis par ses livres et les colonnes dans *Pour la Science*, une armée d'amateurs éclairés par ses écrits. Chacun de ces auteurs a son style et Jean-Paul Delahaye a intitulé sa rubrique *Logique et calcul* en prolongation de son activité de professeur et de chercheur à l'Université de Lille. Jean-Paul Delahaye est le premier des auteurs mentionnés qui a su intégrer dans ses colonnes les nouveautés informatiques apparues au tournant du siècle. La surprise fut de taille : l'informatique n'est pas seulement utilisée pour démontrer des théorèmes, mais pour en découvrir de nouveau, inventer des mondes fantastiques comme le fait Jos Leys, revisiter les problèmes anciens comme le nombre optimal de billets de banque pour faire l'appoint.

Ainsi les mathématiques se constituent en intégrant et en fécondant de nouvelles disciplines, en se redéfinissant à la mesure de leurs progrès. Jean-Paul Delahaye vous propose un voyage ludique vers ces nouveaux et divers rivages à découvrir *pour le plaisir*…

Philippe Boulanger

INTRODUCTION

C'est une erreur de croire que les mathématiques sont difficiles et que s'y adonner est toujours une épreuve plus ou moins pénible, que personne ne choisit d'affronter sans y être forcé.

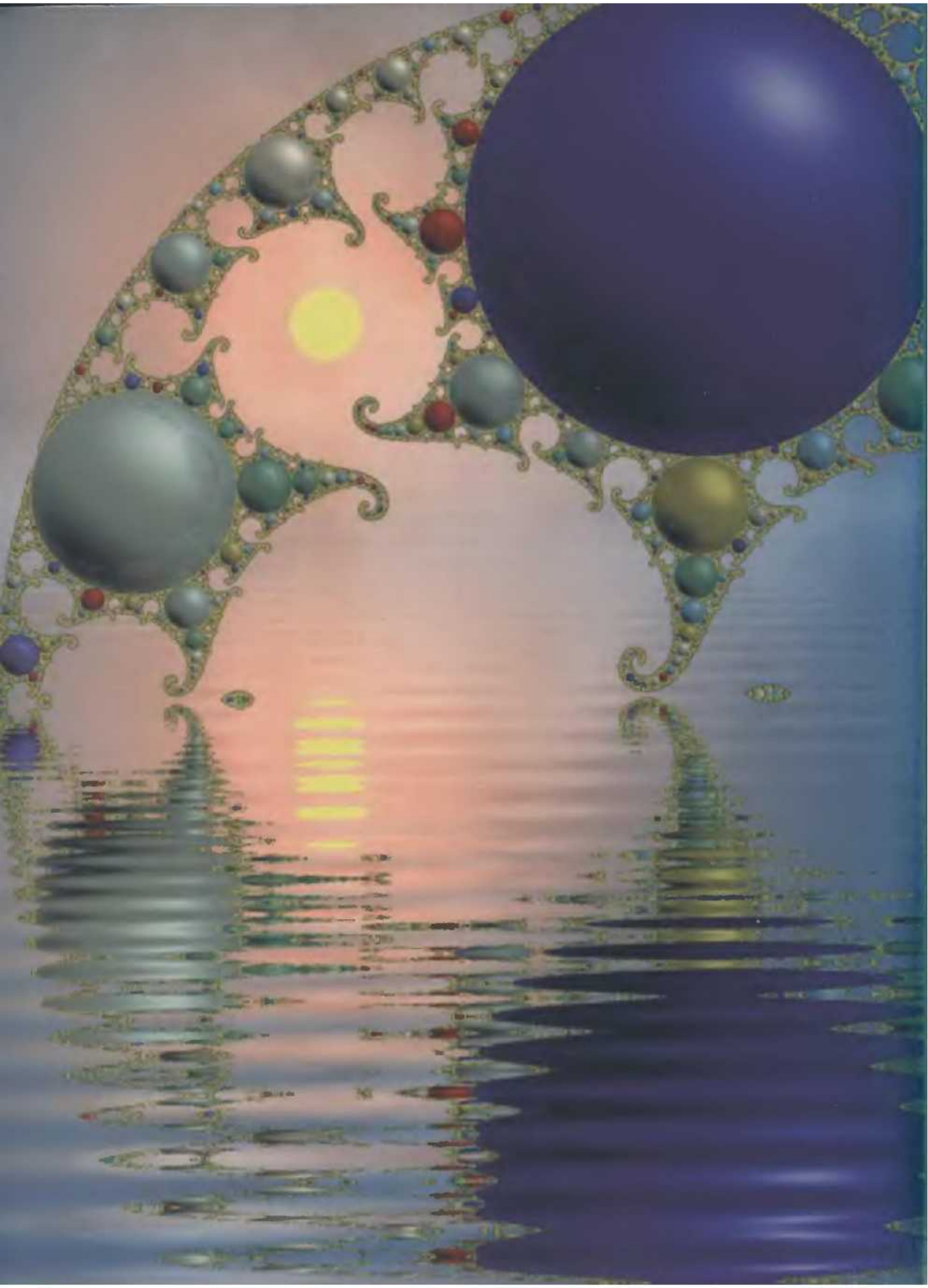
D'abord la musique est toujours d'une façon ou d'une autre un jeu abstrait et gratuit, qui fait ressentir l'infinie beauté des formes pures et immatérielles, formes qui justement sont ce qui préoccupe le mathématicien. Édouard Herriot exprimait d'ailleurs cela tout simplement: « La musique est une mathématique sonore et la mathématique une musique silencieuse ».

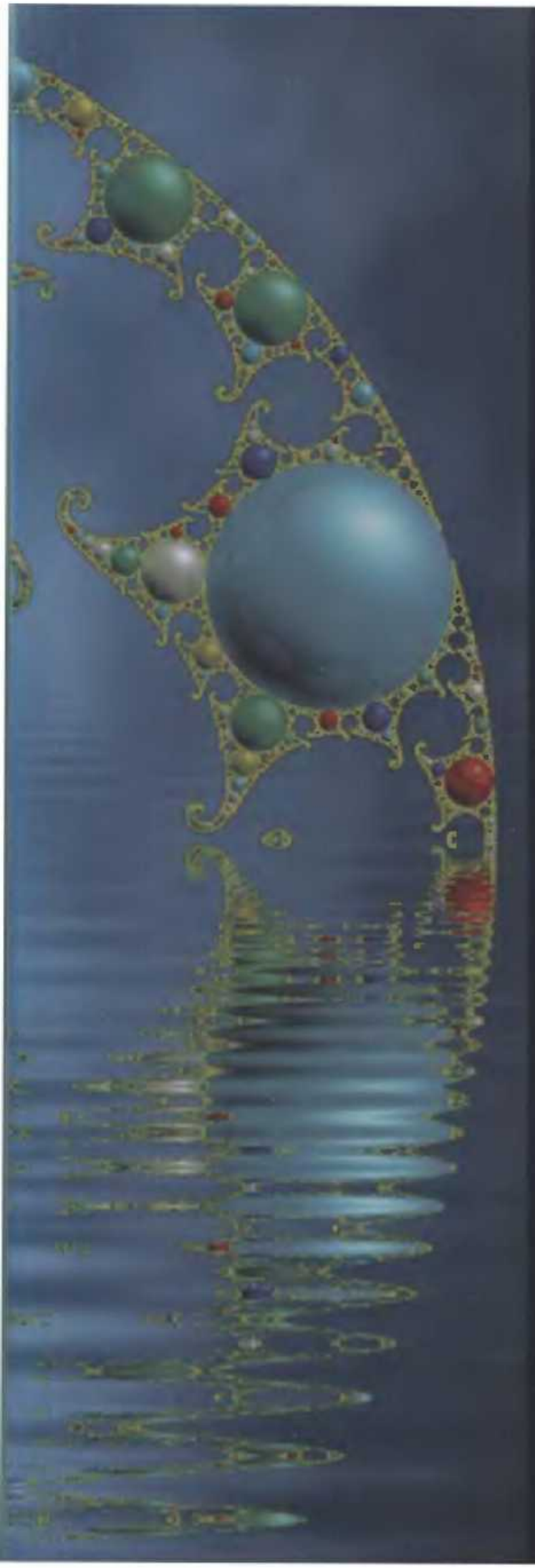
Mais le plaisir que chacun tire – souvent sans le savoir – des mathématiques ne s'arrête pas à la musique. Les arts géométriques et typographiques, les jeux de cartes, avec des dominos ou avec des damiers, la vie sociale et politique et ses subtiles stratégies, le commerce ou au-delà des calculs arithmétiques s'opposent des analyses contradictoires et logiques permettant au plus malin (le plus mathématicien ?) de l'emporter, le pliage du papier, le laçage des chaussures, ... sont aussi des occasions pour chacun de jouir des symétries, relations et structures mathématiques qui nous entourent et embellissent notre vie et nous font nous élever dans un monde parfait et délicieux... qu'il n'est pas sans intérêt d'avoir compris un peu quand on redescend sur terre.

Le but de ce livre est de persuader ceux qui ne le sont pas déjà, que les mathématiques ne se réduisent pas – heureusement – à ce qu'on nous en apprend à l'école, et que partout présentes, elles sont une source de joies et de satisfactions pour qui sait y consacrer un peu d'attention et de temps.

Composés à partir des articles de la rubrique « Logique et calcul » qui paraissent chaque mois dans la revue *Pour la science*, les 22 chapitres de ce livre peuvent être lus dans l'ordre que vous voulez, et même partiellement en ne s'attachant qu'aux figures et encadrés si c'est cela votre plaisir...

Jean-Paul Delahaye





CHAPITRE 1

Art

L'imagination est bien sûr nécessaire à l'artiste,
tout le monde en convient.
Il se trouve qu'elle est aussi la qualité principale
que doit posséder un bon mathématicien.
C'est sans doute la raison qui explique
qu'ils s'entendent si bien, et que leur rencontre
dans les arts graphiques et la musique en particulier
est si féconde. L'ordinateur, comme on va le voir,
permet aussi à cette collaboration de produire
des œuvres nouvelles d'une époustouflante beauté.

Indra 420, par Jos Leys, illustre des travaux mathématiques explorés par Félix Klein.

Ambigrammes

Notre capacité à reconnaître des caractères, même imparfaits, est à l'origine d'un art géométrique remarquablement subtil : les symétries réalisées dans les ambigrammes sont des merveilles.

Certaines lettres de l'alphabet présentent des symétries. Ainsi les lettres majuscules B, C, D, E, H, K, O et X possèdent un axe de symétrie horizontal : si vous placez un miroir au-dessus de l'une d'elles (ou en dessous), vous la voyez inchangée dans le miroir. Du coup, certains mots possèdent aussi cette propriété : BEC, BECHE, BICHE, BOCHE, COCHE, CODE, DECEDE, DECIDE, DECOCHE, DECODE, DEDIE, DIODE, DIOXIDE (anglais), ECHO, etc. (en anglais EXCEEDED atteint 8 lettres).

Deux autres symétries sont intéressantes : la symétrie verticale et la symétrie centrale. Les lettres majuscules invariantes par symétrie verticale sont A, H, I, M, O, T, U, V, W, X et Y. Malheureusement, un mot composé avec de telles lettres n'aura pas nécessairement d'axe de symétrie vertical, car la symétrie verticale inverse l'ordre des lettres : TOUT dans le miroir devient TUOT. En français, seul le nom de la lessive OMO et l'adjectif TÔT sont composés de lettres invariantes par symétrie verticale, en même temps qu'ils possèdent un axe de symétrie vertical (car ce sont des palindromes).



Le premier ambigramme délibéré *(a)*, est la signature de W. H. Hill, qui est aussi l'auteur de la jeune vieille : selon le point de vue on voit une jeune fille ou une vieille femme. LIAR *(b)* de Paul Agule : le menteur *(liar)* a enfin un visage. Deux figures inversables *(c)* et *(d)*. La première est d'un auteur italien inconnu (1870), la seconde est due à l'artiste Redstone et appartient à sa série de boîtes d'allumettes.



Ambiguïté du graphisme des ambigrammes. Présentation d'ambigrammes invariants par symétrie centrale. *(a)* FORMULE : il est exceptionnel qu'une formule n'ait pas de sens ! *(b)* RAPHAËL, comme la précédente, est une virtuosité de Gilles Esposito-Farèse que le grand peintre aurait aimée. *(c)* ART de Burkard Polster (l'art est fait de symétrie). *(d)* FERMAT de Burkard Polster. *(e)* MENU de Gilles Esposito-Farèse. *(f)* SYMÉTRIE de Gilles Esposito-Farèse (autoréférent !). *(g)* JOYEUX-NOËL de Gilles Esposito-Farèse (pour vos prochaines cartes de vœux ?). *(h)* ART ET SCIENCE est le symétrique « sémantique » de PHILOSOPHIE, un mot « janus » qui nous plonge dans la perplexité : est-il vrai que le renversement de la *philosophy* donne, en anglais, l'art et la science ?

Les lettres majuscules invariantes par symétrie centrale (si on retourne la feuille, on voit la même lettre) sont : H, I, O, N, S, X et Z. Là encore, pour obtenir un mot invariant par symétrie centrale, il faut non seulement qu'il soit composé uniquement de ces lettres, mais qu'en plus, le mot soit un palindrome. En français, les seuls mots invariants par symétrie centrale sont le banal NON et SOS. Notons que le mot NOS retourné donne SON. Avec des minuscules et en négligeant les points, *nounou* et *inouï* possèdent aussi une symétrie centrale. En acceptant de voir un « a » lorsqu'on retourne un « e », et un « e » quand on retourne un « a », et en faisant abstraction de l'emplacement des blancs la phrase suivante – due à Georges Perec – est invariante par symétrie centrale : *endin basnoda a une épouse qui pue.*



En anglais, si l'on admet qu'un W retourné est un M, la phrase NOW NO SWIMS ON MON (qui signifie *Maintenant plus de piscine le lundi*) a un centre de symétrie qui respecte même l'emplacement des blancs.

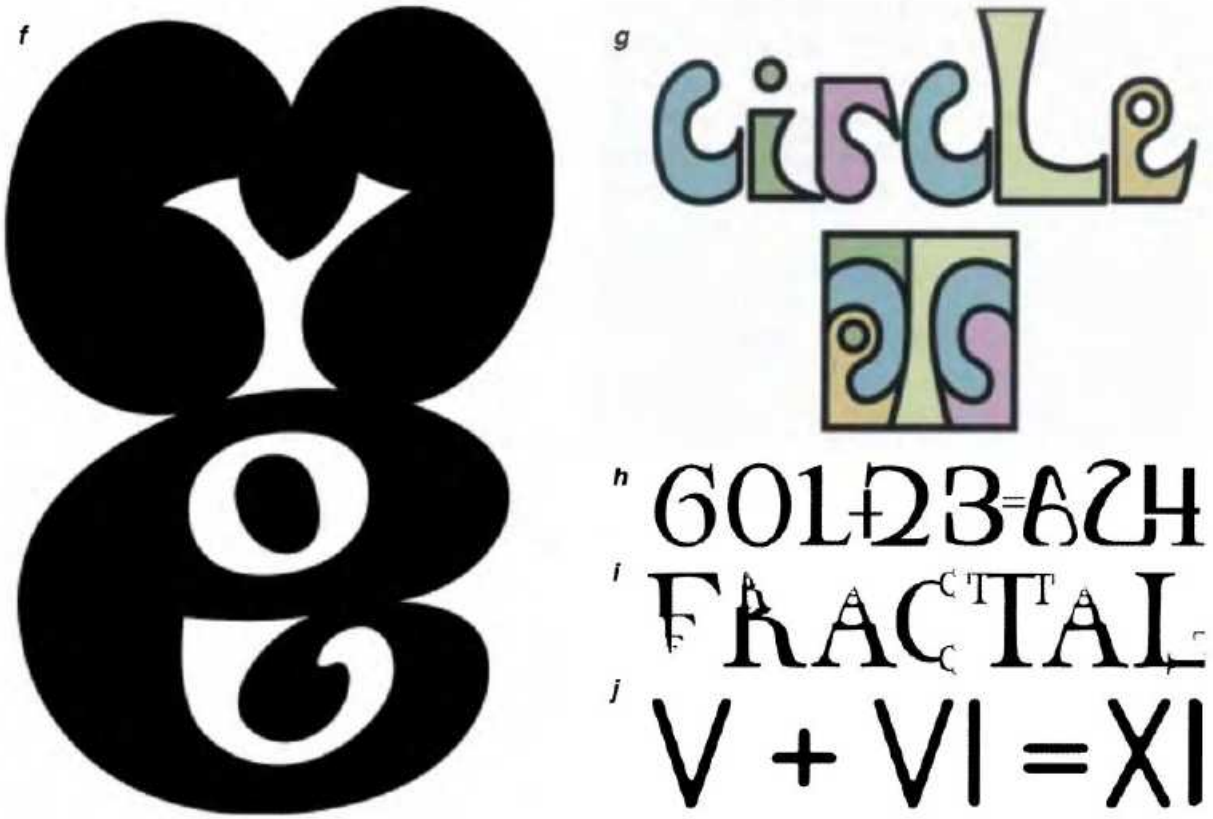
Tout en serait resté là dans la recherche des mots et phrases symétriques si l'art typographique n'avait habitué notre système visuel à reconnaître des lettres sous une grande variété de formes et si les arts graphiques – particulièrement la publicité – n'avaient exploité les formes des lettres, les triturant parfois jusqu'à l'extrême limite de la lisibilité, nous exerçant ainsi à reconnaître partout des symboles et des mots.

Un V lu à l'envers peut être reconnu pour un A, un S symétrisé pour un Z, etc. Le choix d'une typographie et l'association de plusieurs lettres permettent aussi de nouvelles transformations. Admirer le mot ART dû à Burkart Polster *(figure 2c)* : fait à partir de trois lettres dont aucune ne possède de centre de symétrie, le mot possède un centre de symétrie.

Les symétries changent parfois un mot en un autre. Le magnifique exemple du mot *fermé* qui lorsqu'on le retourne devient *ouvert* est parfois utilisé pour faire une petite pancarte qui indique si le magasin est ouvert ou fermé. Il en existe en plusieurs versions, notamment une en langue anglaise *(figures 3d et 3e)*!

De telles figures, dénommées dans un premier temps inversions par Scott Kim – le maître incontesté de cet art –, ont été baptisées ambigrammes par Douglas Hofstadter l'auteur du livre (rempli de symétries en tout genre) *Gödel-Escher-Bach. Les brins d'une guirlande éternelle* (InterEditions, 1985). Le mot ambigramme (ainsi que ses versions anglaises *ambigram*, ou italienne *ambigrami*) semble maintenant avoir été adopté par tout le monde pour désigner ces jeux typographiques et esthétiques.

Puisqu'il existe des ambigrammes naturels, il est difficile d'attribuer leur invention à une personne particulière. Néanmoins le plus ancien ambigramme délibéré pourrait bien



Différents faits d'armes graphiques. *(a)* MUSEUM : magnifique graphie de Gilles Esposito-Farèse. *(b)* VISION de Punya Mishra (http://punya.educ.msu.edu/PunyaWeb/ambigrams/). La contrainte satisfaite est double : symétrie du mot et illustration du sens du mot. *(c)* ORIGAMI de Scott Kim (www.scottkim.com/inversions/index.html), où origami en chinois est écrit avec certaines des lettres du mot origami. *(d)* OUVERT-FERMÉ de Gilles Esposito-Farèse : pour faire des pancartes à épingler sur les portes et ne plus être dérangé par les importuns. *(e)* OPEN-CLOSED de David Holst : miracle, même les ambigrammes sont traduisibles ! *(f)* YOU-ME de John Langdon : encore un profond message philosophique sur l'égoïsme ! *(g)* CIRCLE dessiné par Scott Kim (www.scottkim.com/inversions/index.html) : c'est la quadrature du cercle enfin prouvée : dans un carré, on trouve un cercle ! *(h)* GOLDBACH, un autoglyphe (http:/www.segerman.org/autologlyphs.html ; les lettres peuvent se lire comme des chiffres et illustrent alors la conjecture de Goldbach qui affirme que tout nombre pair supérieur à 2 (ici 624) est somme de deux nombres premiers (ici 601 et 23). *(i)* FRACTAL, un autre autoglyphe : ce mot dit ce qu'il est. *(j)* 5 + 6 = 11 en chiffres romains donne par une symétrie d'axe vertical 9 = 4 + 5.

être la signature de W. H. Hill auteur d'un très célèbre dessin à double lecture : selon votre tempérament ou votre humeur, en regardant le dessin de Hill *(voir la figure 1)* vous voyez une jeune fille ou une vieille femme. Cet ambigramme aurait été créé en 1908.

Les personnes ayant fait les contributions les plus notables à l'art de l'ambigramme sont Douglas Hofstadter, John Langdon et Scott Kim, auteur chacun d'un ouvrage sur le sujet. De nouveaux artistes sont venus aujourd'hui enrichir l'univers de ces formes magiques. Parmi eux, Punya Mishra, Stephan Gustavson, Ualim Ambipur, et Gilles Esposito-Farèse qui a pour nous l'avantage de proposer des ambigrammes avec des noms et des mots français. Si le sujet vous intéresse réjouissez-vous : un ouvrage en français leur est entièrement consacré, le livre de Burkard Polster aux Éditions *Écritextes* sous le titre *Les ambigrammes, l'art de symétriser les mots* (traduit de l'anglais par François Almaleh).

Bien sûr, vous trouverez aussi de nombreuses pages internet dédiées à ces exercices de virtuosité typographique. Demandez « ambigram » à votre moteur de recherche préféré, ou partez de la page de Gilles Esposito-Farèse qui en plus de la très belle collection présentée indique des liens vers les meilleures pages de l'art ambigrammatique : http://www.gef.free.fr/ambigallery.html

L'impossible classification et le programme à ambigrammes

Vouloir classer les ambigrammes est naturel, mais s'il est facile de créer quelques catégories, on découvre vite que l'imagination des artistes géomètres est sans limite.
Les catégories suivantes sont les plus pratiquées.

1- Ambigramme invariant par symétrie centrale : en retournant la feuille, vous retrouvez le même mot.

2- Ambigramme faisant passer d'un mot à un second par symétrie centrale. On peut appeler ces ambigrammes des « janus ».

3- Ambigramme invariant par symétrie verticale : la moitié droite du mot réfléchie dans un miroir vertical vous donne la moitié gauche ou, ce qui revient au même, un miroir placé verticalement à droite ou à gauche du mot le laisse inchangé.

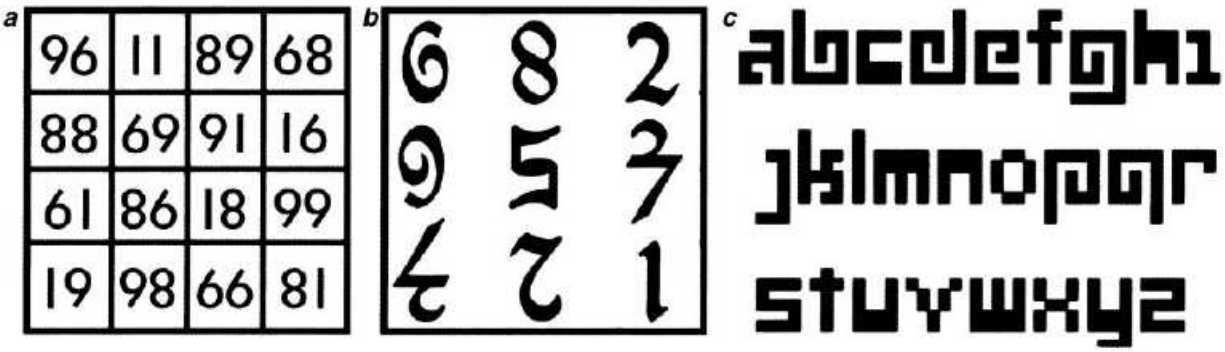
4- Ambigramme faisant passer d'un mot à un autre par symétrie verticale : le mot écrit en dissimule un autre que vous découvrez en lisant le verso de la feuille par transparence ou en utilisant une glace que vous placez verticalement à droite du mot.

Cependant, toutes sortes de jeux parfois très subtils viennent s'ajouter à ces possibilités.

– La lecture de la forme *(en noir)* et du fond donne deux mots différents ou deux fois le même mot. L'exemple le plus frappant est le ME-YOU de John Langdon *(figure 3f)*.

– Les lettres d'un mot se complètent exactement et, comme les pièces d'un puzzle, composent une forme géométrique. Le bel exemple de la transformation d'un carré par découpage en lettres qui composent le mot CIRCLE est dû à Scott Kim *(figure 3g)*.

– Un mot en écriture européenne utilise une curieuse police de caractère où un



Un carré « magique » à symétrie verticale *(a)*. Ce n'est pas un véritable carré magique, car il ne contient pas tous les nombres de 1 à *n*. Toutefois, comme dans un carré magique, la somme des cases selon les lignes, les colonnes et les diagonales est égale à 264, et à l'envers aussi ! Sur la figure *b*, vous pourrez remettre les chiffres dans l'ordre normal sans découper la figure (œuvre de B. Polster). Sur la figure *c*, l'alphabet de Scott Kim : chaque lettre permet de paver le plan (sans recouvrement ni zone non recouverte).

Chinois peut reconnaître les idéogrammes du même mot. Ainsi Scott Kim nous a donné le magnifique exemple du mot *origami* reproduit sur la figure 3*c*.

– Un mot est écrit d'une telle façon qu'il s'évoque lui-même : le nom « autologlyphe » désigne ce type particulier d'ambigrammes. Le mot *Goldbach (figure 3h)* est écrit avec des lettres qu'on peut voir comme des chiffres évoquant la fameuse conjecture de Goldbach (qui affirme que tout nombre pair supérieur à 2 est somme de deux nombres premiers). Le mot *fractal* est écrit en écriture fractale *(figure 3i)*.

Bien sûr, le plus amusant est de composer soi-même ses propres ambigrammes. Pour cela, il existe un tableau *(figure 5)* qui constitue une aide appréciable. Cette matrice de 26 lignes (notées *a*, *b*, *c*,..., *z*) et 26 colonnes (elles aussi notées *a*, *b*, *c*,..., *z*) propose à l'intersection de la ligne *i* et de la colonne *j* un dessin où on lit un *i* dans un sens et un *j* dans l'autre. En l'exploitant, vous composerez automatiquement n'importe quel ambigramme invariant par symétrie centrale, et n'importe quel ambigramme transformant par retournement de la feuille un mot donné en un autre ayant le même nombre de lettres. Bien sûr le résultat est parfois un peu difficile à lire, mais c'est un point de départ : ce tableau vous guidera dans vos premiers pas. Un programme réalise automatiquement l'extraction des lettres du tableau, vous le trouverez à l'adresse : http://ambigramatic.com

Les formules doublement vraies

Les ambigrammes avec des chiffres sont particulièrement plaisants, car il existe une infinité de formules vraies utilisant des chiffres; on peut donc partir à la chasse aux ambigrammes naturels avec de bons espoirs d'en trouver. Comme nous allons le voir maintenant, il existe effectivement de nombreuses familles – certaines infinies – d'ambigrammes naturels composés de chiffres. Les chiffres invariants par symétrie centrale sont le « 0 », le « 8 » et le « 1 » (à peu de chose près). De plus le « 6 » et le « 9 » s'échangent quand on retourne la feuille. Il en résulte que certaines égalités arithmétiques gardent un sens quand elles sont retournées. C'est le cas de l'égalité vraie 88 + 11 = 99 qui devient 66 = 11 + 88, malheureusement fausse.

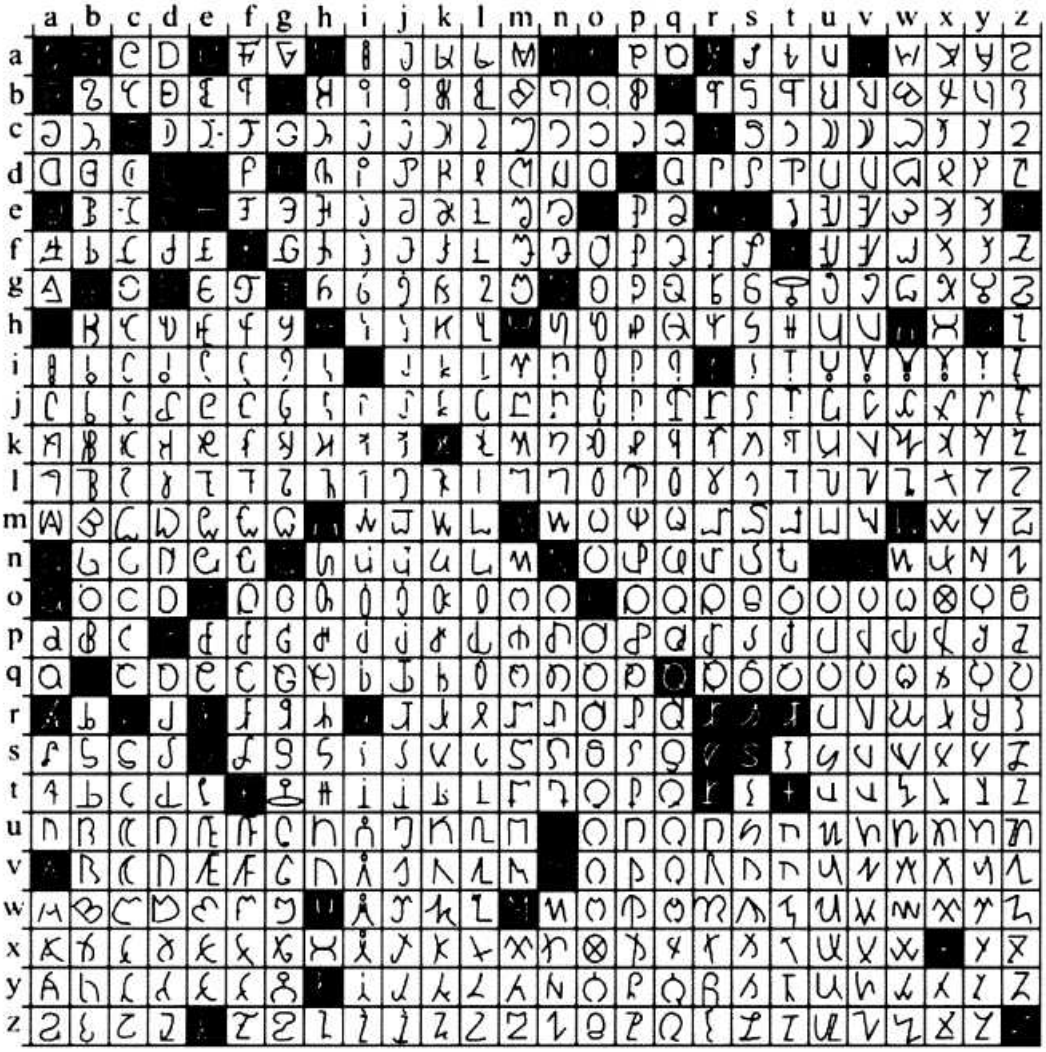
Existe-t-il des égalités vraies gardant un sens quand on les retourne et qui de plus restent vraies? De telles égalités, que nous nommerons *doublement vraies*, sont amusantes à étudier. Nous allons les rechercher dans les systèmes de numération unaire, binaire et décimal, mais libre à vous d'explorer ce monde de petits problèmes en bases 3, 4, 5, etc.

La chasse est fructueuse en base unaire (le nombre n s'écrit en plaçant n chiffres un (« 1 ») côte à côte 111...1), car toute égalité arithmétique n'utilisant que le + et le × est doublement vraie, et cela même si elle comporte des parenthèses : (11+1) × 11 + 11 = 11 × (11 + 11), en retournant la feuille donne (11 + 11) × 11 = 11 + 11 × (11+1).

La démonstration que toute égalité vraie en écriture unaire n'utilisant que les opérations + et × est doublement vraie se fonde sur la commutativité de l'addition et de la multiplication. Il faut aussi noter qu'en n'importe quelle base de numération, toute égalité vraie n'utilisant que des 1, des + et des × (ou n'utilisant que des 8, des + et des ×) est doublement vraie. C'est le cas par exemple de l'égalité : 88 = 8 × 8 + 8 + 8 + 8.

En numération unaire, d'autres égalités utilisant la soustraction peuvent aussi être doublement vraies. Voici une famille infinie de telles égalités doublement vraies :

(11 − 1) × (11 − 1) = 1
(111 − 1) × (111 − 1) = 1111
(1111 − 1) × (1111 − 1) = 11111111, etc.



Faites votre ambigramme : pour chaque lettre que vous désirez transformer, trouvez la graphie à l'intersection de la ligne et de la colonne correspondant à cette lettre et à la lettre symétrique dans le mot, par exemple la première et la dernière. Les cases noires correspondent aux meilleures paires. Vous obtiendrez alors l'ambigramme lettre par lettre. Le même résultat est automatique sur : http://ambigramatic.com

À l'endroit, la première égalité est $(2 - 1) \times (2 - 1) = 1$; à l'envers, elle devient $1 = (1 - 2) \times (1 - 2)$. Il y a vraisemblablement bien d'autres séries infinies d'égalités doublement vraies entre nombres écrits en notation unaire.

En base de numération binaire : 1 s'écrit 1, 2 s'écrit 10, 3 s'écrit 11, 4 s'écrit 100, 5 s'écrit 11, etc. Les égalités doublement vraies sont plus rares, mais il est cependant encore assez facile d'en capturer. Voici une première famille infinie d'égalités doublement vraies en numération binaire :

1 + 11 + 1= 101; 1 + 111 + 1 = 1001 ; 1 + 1111 + 1 = 10001 ; etc.

En fait, une condition suffisante pour qu'une égalité soit doublement vraie en notation binaire est qu'elle soit vraie et que chacun des nombres qui y apparaît soit invariant par symétrie centrale (il faut, dans ce contexte, qu'elle soit un palindrome). Ainsi,

(111 + 1) × 101 = 1001 × 11 + 101 + 101 + 11. C'est (7 + 1) × 5 = 9 × 3 + 5 + 5 + 3 dans un sens et 3 + 5 + 5 + 3 × 9 = 5 × (1 + 7) dans l'autre.

Certaines égalités doublement vraies n'utilisent pas que des nombres palindromes. En voici trois :

1101 + 11 + 1011 = 11011; 10111 + 11001 = 10011 + 11101; 10111 + 11001 + 11 = 110011

Cette dernière égalité traduite en écriture décimale est 23 + 25 + 3 = 51 qui, retournée, devient 51 = 19 + 29 + 3.

Une question se pose : quelle est la proportion d'égalités doublement vraies parmi toutes celles utilisant n symboles. Pour $n = 3$, la réponse est 50 pour cent, car il n'y a que quatre égalités possibles dont deux sont doublement vraies : 1 = 1; 0 = 0 ; 1 = 0 ; 0 = 1. Bien sûr, pour n plus grand, la proportion va diminuer. Un lecteur aura-t-il le courage de traiter le problème ? Le nombre d'égalités augmentant très rapidement en fonction de n, il est sans doute difficile de calculer cette proportion pour n au-delà de 10. Converge-t-elle vers 0 à l'infini ?

Et en écriture décimale ?

Venons-en à présent à l'écriture décimale. Voici quelques familles infinies d'égalités doublement vraies.

(a) Cette série très facile s'adapte sans mal à toute base de numération :

1 = 1; 11 = 1 + 1 +...+ 1 + 1 (11 fois le '1'); 111 = 1 + 1 +...+ 1 (111 fois le '1'); etc.

(b) Toujours assez facile et adaptable aux bases de numération ayant le 6 et le 9 parmi leurs chiffres :

6 = 6 ; 66 = 6 + 6 +...+ 6 (11 fois le '6');

666 = 6 + 6 +...+ 6 (111 fois le '6'); etc.

(c) Un peu plus intéressante est la série suivante :

96 = 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 (6 fois 9 + 6 + 1),

9696 = 9 + 6 + 1 + 9 + 6 + 1 +...+ 9 + 6 + 1 (606 fois 9 + 6 + 1)

969696 = 9+6+1+9+6+1+...+9+6+1 (60606 fois 9+6+1), etc.

(d) Avec la multiplication :

6 = 1 × 6, 66 = 11 × 6, 666 = 111 × 6, etc.

(e) Avec des 8, des multiplications et des soustractions :

(9 − 6) = (9 − 6) × 1,

(99 − 66) = (9 − 6) × (1+ 8 + 1) + (9 − 6)

(999 − 666) = (99 − 66) × (1 + 8 + 1) + (9 − 6)

(9999 − 6666) = (999 − 666) × (1 + 8 + 1) + (9 − 6), etc.

(f) Avec des divisions :

(8 + 1)/(9 − 6) = (1 + 1 + 1)/1

(88 + 11)/(99 − 66) = (1 + 1 + 1)/1

(888 + 111)/(999 − 666) = (1 + 1 + 1)/1 etc.

(g) Un peu plus compliqué :

1/11 = (8 + 88/(8 x 11))/(18 + 81)

1/101 = (8 + 888/(8 x 111))/(108 + 801)

1/1001 = (8 + 8888/(8 × 1111))/(1008 + 8001), etc.

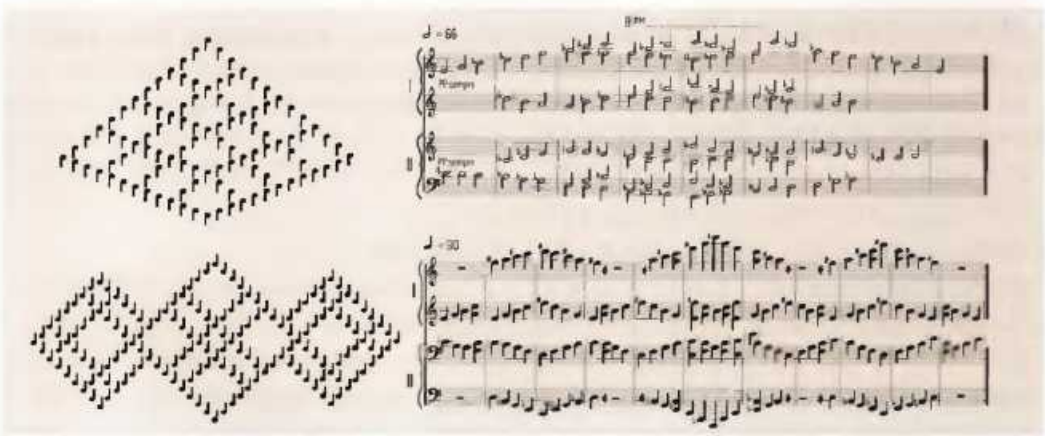
Cherchez-en si vous en avez le loisir et envoyez-les moi, je les collectionne.

La musique mathématique de Tom Johnson

Les dessins de l'art islamique sont de purs objets mathématiques ; Tom Johnson défend une conception analogue pour la musique.

Leibniz soutient que : « La musique est un exercice d'arithmétique secrète où l'esprit ne réalise pas qu'il compte. » Bien longtemps avant, le mythique Pythagore avait reconnu que l'harmonie musicale exploite des rapports simples entre nombres entiers. Une multitude de liens entre mathématiques et musique ont été découverts ou introduits, puis étudiés et utilisés par les concepteurs d'instruments ou les compositeurs.

Les rapports entre les deux disciplines sont multiformes. Haydn, Bach, Mozart, Chopin et bien d'autres compositeurs ont utilisé systématiquement les opérations géométriques que sont la translation (une séquence musicale est recopiée plusieurs fois, décalée dans le temps ou en hauteur) et la symétrie (une séquence est jouée à l'envers ou une séquence est recopiée en échangeant les intervalles montants et intervalles descendants). Plus difficile à confectionner, Haydn pour sa *Symphonie n° 47* a conçu un menuet palindromique : le jouer de la première note à la dernière ou le jouer de la dernière note à la première revient au même. Mozart, son contemporain, a écrit un canon à deux voies ne nécessitant qu'une seule partition : les deux interprètes placent la feuille entre eux et la déchiffrent, l'un à l'endroit, l'autre à l'envers. Mozart, en 1791, a aussi inventé la musique aléatoire : à partir d'une partition et de lancés de dés que vous ferez vous-même,



1 De la symétrie géométrique à la symétrie sonore. Dans son œuvre Symmetries qui comporte 49 petites pièces pour piano à quatre mains, le musicien Tom Johnson dessine sur la partie gauche de la partition un schéma symétrique et sur la partie droite il l'harmonise. Cette mise en musique de formes géométriques est une des méthodes de sculpture mathématique sonore inventée par ce compositeur américain vivant en France, qui depuis plus de 20 ans recherche avec grand soin de nouveaux procédés pour organiser des suites de notes et des accords à partir d'idées logiques, arithmétiques ou géométriques.



Museo Vostell, Malpartida de Caceres, Espagne

Galileo. Pour cette œuvre, Tom Johnson a non seulement écrit la partition, mais créé un instrument nouveau, nommé *Galileo*. Il s'agit d'une série de cinq tiges métalliques sonores accrochées au bout de fils et qui se balancent durant l'exécution du morceau, créant autant de pendules. La longueur des cordes a été choisie de telle façon que les pendules les plus rapides aient une période de 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 de la période du plus lent. La partition que Tom Johnson exécute avec son instrument est une exploration systématique de tous les rythmes créés par l'utilisation de deux pendules quelconques, puis trois, puis quatre, puis cinq.

il propose un procédé – aujourd'hui on dit un algorithme – pour que chacun écrive son propre morceau de musique… qui ressemblera à un morceau du grand Amadeus.

Malgré ces essais et bien d'autres au XXe siècle, rares sont les musiciens qui conçoivent leurs morceaux comme des structures entièrement organisées par un schéma mathématique inaltérable, sans hasard, ni fantaisie. C'est assez récemment qu'a été proposée la construction de pièces musicales comme de purs objets formels fondés sur des principes mathématiques déterminant toute, ou presque toute, la composition.

Le musicien qui a exploré avec le plus de soin et de talent cette conception de l'écriture musicale est Tom Johnson. Certaines de ses œuvres sont d'étonnantes réussites qui proviennent d'un examen approfondi des structures logiques, géométriques ou arithmétiques susceptibles d'agencer des notes ; Tom Johnson fait intervenir dans ses compositions des idées mathématiques inattendues qu'il choisit avec un sens esthétique délicat.

Le catalogue d'accords

Tom Johnson est né dans le Colorado en 1939, il a vécu à New York pendant 15 ans, travaillant comme critique musical pour la revue *The Village Voice*. Depuis 1983, il réside à Paris où il poursuit son travail de compositeur en compagnie de son épouse Esther Ferrer (artiste dont plusieurs œuvres utilisent les nombres premiers). On classe généralement Tom Johnson parmi les artistes minimalistes, car, dans ses compositions, il réduit le plus possible le matériel sonore utilisé ou les règles au cœur de sa musique. Il jouit d'une grande notoriété due en particulier à ses œuvres lyriques dont l'*Opéra de quatre*

notes qui a été monté plus de cent fois depuis sa création à New York en 1972. Cet opéra, bien que n'utilisant que quatre notes – *la, si, ré, mi* – est d'une facture assez classique et n'entre pas dans la classe de ce qu'on peut dénommer ses travaux mathématiques.
Les œuvres à base mathématique auxquelles il consacre maintenant l'essentiel de son temps seront décrites une par une, car malgré la simplicité du résultat final, elles résultent le plus souvent de longs et soigneux processus d'élaboration et de sélections. Évoquons d'abord une œuvre minimaliste par excellence : le catalogue d'accords *(The Chord Catalogue)* conçu en 1986. L'idée est particulièrement simple : partant des 13 notes de la gamme tempérée *do, do#, ré, ré#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do*, Tom Johnson affirme, avec raison, qu'il existe 8178 accords : on associe les notes par deux, puis par trois, etc., soit $2^{13} = 8192$ sous-ensembles possibles d'un ensemble à 13 éléments, mais l'accord vide (aucune note) et les 13 « accords » d'une seule note n'en sont pas vraiment et, en les retirant, on obtient $8192 - 14 = 8178$ accords.

L'écriture de l'œuvre a consisté à ordonner ces 8178 accords. Les accords de deux notes sont joués en premier en partant de ceux utilisant les notes les plus basses. Si on désigne par 1, 2, 3..., 13, les treize notes de la gamme, l'œuvre débute par les 78 accords 1–2, 1–3, 2–3, 1–4, 2–4, 3–4, 1–5, 2–5, 3–5, 4–5, etc., jusqu'à 12–13. Suivent les 286 accords à trois notes qui sont joués selon le même principe : 1–2–3, 1–2–4, 1–3–4, 2–3–4, etc. Le dernier accord du morceau est l'accord assez fortement dissonant constitué des 13 notes jouées simultanément. Tom Johnson précise qu'une pause doit être insérée à chaque fois que la note la plus haute change. Écrire la partition ne consiste pas à recopier sur une portée les 8178 accords, mais à décrire l'algorithme d'énumération comme nous venons de le faire.

Les Vaches de Narayana

Certains problèmes de mathématiques récréatives deviennent des morceaux de musique. C'est le cas du problème des *Vaches de Narayana* que Tom Johnson découvrit dans un livre de Andrej Konforovitch. Le problème qui suit doit son nom au mathématicien indien Pandit Narayana (1340-1400).
Une vache donne naissance à une autre tous les ans en début d'année, qui elle-même donne naissance à une autre chaque année à partir de sa quatrième année. Partant d'une vache qui vient de naître, combien y en a-t-il au bout de 20 ans? La suite du nombre de vache, année après année, est 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, etc. La règle étant donnée par $S(n) = S(n-1) + S(n-3)$.
La représentation des vaches se fait par un chiffre : 1 pour une vache dans sa première année; 2 pour une vache dans sa deuxième année; 3 pour une vache dans sa troisième année et 4 pour une vache à partir de la quatrième année. Partant de 1, on a successivement les troupeaux :
1 ; 2 ; 3 ; 4+1 ; 4+1+2 ; 4+1+2+3 ; 4+1+2+3+4+1; 4+1+2+3+4+1+4+1+2; 4+1+2+3+4+1+4+1+2+4+1+2+3; 4+1+2+3+4+1+4+1+2+4+1+2+3+4+1+2+3+4+1...

L'opération de transformation d'une suite en une autre porte le nom de morphisme itéré avec délais et n'a été étudiée que très récemment. Tom Johnson avec le mathématicien Jean-Paul Allouche spécialiste de ce type de structures mathématiques (il a écrit le livre de référence sur le sujet : J.-P. Allouche et J. Shallit, *Automatic sequences*, Cambridge, University Press, 2003) ont fait de ces suites la base du morceau *Narayana's Cows* que le saxophoniste Kientzy a enregistré en 2004 (Pogus Production, P21033-2).
L'intérêt musical de ces suites réside dans le fait que, sans jamais se répéter périodiquement, chacune possède une unité structurelle propre que l'oreille perçoit.
Plus généralement, toute règle qui engendre des suites possédant des régularités mathématiques est susceptible d'engendrer une musique intéressante. Au-delà des symétries et répétitions diverses que les compositeurs utilisent depuis toujours, d'autres redondances plus subtiles sont musicalement intéressantes et devraient être utilisées systématiquement par les compositeurs. Le travail de Tom Johnson enrichit le catalogue des procédés musicaux d'écritures.

Bien sûr, une telle partition est facile à faire jouer à un ordinateur et le programme qui exécutera la partition n'occupera que quelques lignes. En ce sens, il s'agit d'une musique minimaliste. Cependant l'œuvre est captivante lorsqu'elle est interprétée par un être humain qui lui donne une tension particulière. L'œuvre, qui dure environ une heure, est difficile à jouer. Tom Johnson, qui n'y est arrivé qu'après plusieurs mois d'entraînements assidus, affirme qu'un seul autre musicien, Samuel Vriezen, réussit à jouer cette partition, et l'interprète plus régulièrement et un peu plus rapidement que lui.

Lors de l'interprétation de l'œuvre, toute erreur sera immanquablement perçue par un auditeur attentif. La structure rigoureuse évite toute répétition d'accords et fait entendre des montées de notes imbriquées, là encore, sans jamais que la même situation ne se répète. En un sens, ce catalogue pourrait être qualifié de maximaliste!



3 ***Cosinus pour piano*** **(1994).** Cette partition de 1994 commence par cette page et les parties suivantes exploitent la même idée : utiliser des courbes sinusoïdales (correspondant à un son pur de fréquence donnée) dans le schéma de la partition.

Symétries

Introduisant un peu plus de fantaisie, les 49 morceaux de l'œuvre intitulée *Symmetries* explorent simultanément la symétrie géométrique et sa traduction musicale. Chaque morceau provient d'un dessin réalisé avec une machine à écrire la musique comme on en fabriquait il y a quelques années avant la mise au point de traitements de texte musicaux spécialisés. Chaque dessin est une création géométrique utilisant comme éléments graphiques de base les notes – rondes blanches, noires, croches, etc. – et les symboles musicaux usuels dessinés sans faire apparaître les portées *(figure 1)*, le tout possédant une structure évidente. Cette *musique conceptuelle*, comme la qualifie Tom Johnson, fut d'abord publiée telle quelle en 1981. Le musicien qui achetait la «partition» devait donc soit se contenter de l'admirer comme on le fait d'une série de gravures, soit choisir lui-même les notes précises dessinées dans le vide, s'il voulait l'entendre.

Tom Johnson a plus tard complété son travail en associant à chaque dessin une harmonisation pour piano à quatre mains conforme au schéma géométrique et cette fois-ci dessinée sur des portées. Cette mise en rapports de structures géométriques et de structures sonores est très réussie. Symmetries a été interprétée plusieurs fois en public, souvent les organisateurs y ont associé la projection des schémas géométriques initiaux de la «partition».

Un peu comme les membres de l'*Oulipo (Ouvroir de Littérature Potentielle)* qui s'imposent des règles secrètes contraignant leurs textes (par exemple ne pas utiliser le «e»), Tom Johnson dans sa suite *Musiques pour quatre-vingt-huit* utilise des règles tirées des mathématiques et fondées sur l'exploitation systématique des 88 touches d'un piano moderne.

Le premier morceau est une série de phrases musicales conçues de telle manière que chacune utilise, une fois et une seule, les 88 touches du piano. Divers schémas

arithmétiques commandent ces phrases fondées sur des décompositions numériques de 88 : $88 = 2 \times 44$, $88 = 4 \times 11$, $88 = 4 \times 22$, $88 = 8 \times (8+3)$, $88 = 12 \times 4 + 5 \times 8$, etc.

La partition n'est pas l'écriture note après note des séquences à jouer, mais la présentation du début juste nécessaire pour que l'interprète saisisse la logique de l'ensemble et en devine le reste. Une fois les premières notes écrites, le compositeur fait suivre la partition de «...». La partition est donc présentée comme lorsqu'un mathématicien propose une série : $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$. Pour jouer de tels morceaux, il faut non seulement savoir lire une partition, mais être doté d'une bonne intelligence logique !

Musiques pour quatre-vingt-huit

Dans *Musiques pour quatre vingt-huit*, Tom Johnson propose une pièce intitulée *Les nombres de Mersenne* (les nombres de la forme 2^n-1) qui est une succession de phrases musicales dont le nombre de notes est 1, puis 3, puis 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 255, 127, 63, 31, 15, 7, 3, 1. Bien qu'assez longues, les phrases sont toutes conçues sur une règle dont le schéma tient sur une seule page. Il est préférable de comprendre ce schéma plutôt que de suivre les huit pages de la partition détaillée.

Une autre pièce doit sa structure à la table de multiplication qui produit un rythme envoûtant (plus intéressant que celui du cancre qui lorsqu'on lui demande de réciter les tables de multiplication explique qu'il en a oublié les paroles, mais propose d'en chanter l'air). *Le triangle de Pascal* détermine aussi une pièce rigoureuse composée d'une succession d'accords organisés en fonction du fameux triangle. Toujours dans *Musiques pour quatre vingt-huit*, les nombres abondants (ceux qui sont inférieurs à la somme de leurs diviseurs propres comme $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$) sont l'occasion d'une expérimentation rythmique.

La dernière pièce de la série exploite le crible d'Ératosthène qui est l'objet d'une traduction musicale que je vais décrire entièrement. L'idée consiste à associer un nombre entier à chacune des 88 touches du clavier du piano, puis à jouer :

(a) tous les entiers de 1 à 88 ;

(b) 1 et 2 suivis de tous les nombres impairs ; ce sont les entiers qui restent quand on a criblé (supprimé) les multiples de deux ; dans la partition, les notes supprimées sont remplacées par des silences ;

(c) 1, 2, 3, suivis de ce qui reste quand on a criblé les multiples de 3 ; une régularité rythmique très nette est perceptible ;

(d) 1, 2, 3, 5, suivis de ce qui reste quand on a criblé les multiples de 5 ; la régularité rythmique est devenue plus complexe ;

(e) 1, 2, 3, 5, 7 suivis de ce qui reste quand on a criblé les multiples de 7 ; entre *(d)* et *(e)*, seules les notes 49 et 77 ont disparu ; les notes jouées sont maintenant celles des nombres premiers inférieurs à 88 (le nombre 1, contrairement à la convention classique, est considéré comme premier) ;

(f) Le morceau se poursuit alors en reprenant *(e)*, puis en énumérant les nombres premiers au-delà de 88, en associant cette fois les touches du piano aux nombres entre 89 et 176, puis aux nombres entre 177 et 264, etc., jusqu'à 1987. À chaque fois, bien sûr, des silences remplacent les notes absentes. Notons que Tom Johnson, pour cette pièce dont la définition complète s'explique en quelques phrases, a pris la peine d'écrire la partition note par note. Sans doute craignait-il que l'interprète ait du mal à déduire assez vite, de tête, les notes à jouer.

Ce morceau, au sens propre, fait entendre le crible d'Ératosthène et l'irrégularité de la répartition des nombres premiers qui pourtant naît de la soustraction répétée de séries régulières. Dans la partie finale de la pièce, l'énumération musicale des nombres premiers fait ressentir leur densité décroissante dont le théorème des nombres premiers, démontré par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896, a donné la loi : autour de l'entier n, la densité des nombres premiers est environ $1/\log(n)$.



Musiques auto-similaires. Certaines mélodies ont la propriété qu'en prenant 1 note sur 3, la même mélodie jouée 3 fois plus lentement se retrouve. La pièce *La vie est si courte* (1998) est construite sur une mélodie auto-similaire de ce type.

Musiques auto-similaires

L'utilisation de l'arithmétique produit des résultats dont la structure est parfois trop cachée pour que notre oreille la perçoive clairement et que notre cerveau l'apprécie. D'autres parties des mathématiques se prêtent mieux aux jeux que Tom Johnson pratique avec une passion déterminée et c'est, sans doute avec les mélodies auto-similaires, que le compositeur a le mieux réussi à faire entendre les mathématiques. Ce domaine, à mi-chemin entre la géométrie et l'arithmétique, est une sorte de géométrie de la dimension 1.

Suivons la définition que propose Tom Johnson dans son ouvrage théorique *Self-Similar Melodies* (Éditions 75, 1996) : une mélodie auto-similaire est une boucle mélodique qui s'auto-reproduit sous une certaine forme, à une certaine échelle, à partir d'un certain point.

Un exemple fera comprendre l'idée. Partant des nombres de 1 à 43 et du rapport 2, Tom Johnson se demande comment organiser 43 notes cycliquement de telle façon qu'en prenant une note sur deux de la mélodie initiale on obtienne une mélodie identique. Pour répondre, on dessine le schéma :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...
1 2 3 4 5 6 7 8 ...

La contrainte impose que les notes 2 et 3 soient identiques, ainsi que les notes 3 et 5, les notes 4 et 7 etc. En poussant l'analyse jusqu'à son terme, on arrive à la conclusion que la mélodie ne pourra comporter que 4 notes différentes :

- la note 1, qui n'est soumise à aucune contrainte ;
- la note 2 identique aux notes 3, 5, 9, 12, 17, 22, 23, 28, 33, 36, 40, 42 et 43.
- la note 4 identique aux notes 6, 7, 11, 13, 20, 21, 24, 25, 32, 34, 38, 39 et 41.
- la note 8 identique aux notes 10, 14, 15, 16, 18, 19, 26, 27, 29, 30, 31, 35 et 37.

Pour obtenir une mélodie auto-similaire de 43 notes, le compositeur n'a plus qu'à choisir quatre notes : par exemple, *do* pour 1, *ré* pour 2, *mi* pour 4 et *fa* pour 8. On démontre que si l'on remplace 43 par un autre nombre premier, alors 1 formera toujours un paquet à lui tout seul et que les autres nombres se regrouperont en paquets de tailles

égales. Lorsque, à la place d'un nombre premier, on prend un nombre composé, alors les diverses classes de notes n'ont pas nécessairement le même effectif.

Bien sûr, une partition écrite en respectant une telle structure ne peut qu'être musicalement intéressante puisque la mélodie de base se trouve reproduite en elle-même exécutée à vitesse 1/2, 1/4, 1/8 etc. La présence d'une telle régularité, perceptible à quiconque tend l'oreille, et sans doute repérée inconsciemment. Elle est analogue à l'utilisation de la régularité produite par une séquence de notes répétées par translation ou symétrie, qui est utilisée par de nombreux musiciens. Ce type de répétitions homothétiques (pratiquées avant Tom Johnson de manière occasionnelle par divers compositeurs) méritait d'être étudié et exploité systématiquement.

Johnson l'a utilisé pour concevoir les mélodies de base de la pièce *La vie est si courte* pour huit instruments, composée en 1998. La mélodie centrale est obtenue en prenant le nombre 21 et le rapport 3 (au lieu de 43 et 2 dans l'exemple précédent). En 2004, le saxophoniste Kientzy a enregistré un morceau de 11 minutes basé sur une mélodie de 8 notes et de rapports 3 et 5 (*Kientzy plays Johnson*, Pogus Productions P21033-2, 2004).

Pavages rythmiques parfaits

Aujourd'hui Tom Johnson étudie un type de structures mathématiques qu'il semble avoir découvert et qu'il utilise comme procédé de composition nouveau. Tom Johnson nomme ces structures combinatoires *pavages rythmiques parfaits*.

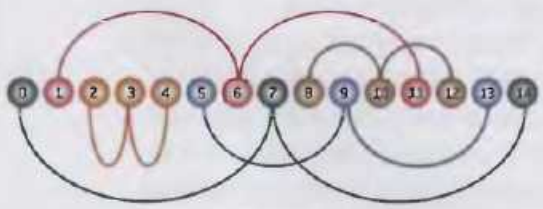
On se donne une série de n emplacements :

0 1 2 3 4 5 ... $n-1$

On nomme *triplet bien espacé* une suite de trois nombres $(a\ b\ c)$ tels que l'écart entre a et b est le même que l'écart entre b et c. Les triplets (4 5 6) et (0 3 6) sont des exemples de triplets bien espacés, l'un d'espacement 1, l'autre d'espacement 3.

Le but que Tom Johnson se fixe est de remplir les n emplacements donnés par des triplets bien espacés sans laisser de vide ni utiliser deux fois le même emplacement et en interdisant de plus la présence de deux triplets avec le même espacement. L'objectif musical est clair : obtenir une combinaison rythmique originale sans aucun silence.

Pour réussir, il faut évidemment que n soit un multiple de 3. Pour n égal à 3, il y a un pavage parfait (0 1 2), mais il n'utilise qu'un seul triplet et est donc sans intérêt. Pour $n = 6$, $n = 9$ et $n = 12$, vous ne trouverez aucun pavage rythmique parfait. En revanche, Tom Johnson en a découvert un pour $n = 15$ qui est (0 7 14) ; (1 6 11) ; (2 3 4) ; (5 9 13) ; (8 10 12). On peut le représenter par un schéma *(en bas, à gauche)*.



Pour $n = 15$, il existe un seul autre pavage rythmique parfait symétrique du premier.

Il n'y a pas de pavage rythmique parfait pour $n = 18$. En revanche, pour $n = 21$, il en existe 9 (auxquels s'ajoutent les 9 qu'on déduit par symétrie). Voici l'un de ses pavages pour $n = 21$:



Bien sûr, Tom Johnson, qui continue l'étude de ce problème combinatoire avec l'aide du mathématicien Erich Neuwirth, a utilisé ces structures pour composer de nouveaux morceaux dont les titres parlent d'eux-mêmes *Tilework for piano* (2003), *Tilework for String Quartet* (2003), *Tilework for Five Conductors and One Drummer* (2004), *Tilework, 14 pieces for solo instruments* (2004).

Le problème des pavages rythmiques parfaits par des quadruplets (au lieu de triplets) semble plus difficile *(voir à la fin du chapitre)*. Il est amusant de constater qu'un musicien a été amené à poser un problème mathématique non trivial en recherchant simplement des combinaisons rythmiques.

Le procédé fascinant des mélodies auto-similaires et ses variantes est aussi utilisé dans plusieurs morceaux du cahier *Rational Melodies* écrit en 1982. Ce cahier contient une série de 21 pièces pour instruments solistes, chacune fondée sur une idée mathématique rigoureusement transcrite en une partition.

Certaines pièces de ce cahier utilisent des algorithmes de pliages de bandes de papier, d'autres reprennent le procédé de l'isorythme déjà utilisé par Guillaume de Machaut (c.1300-1377) : une même phrase musicale est jouée plusieurs fois en décalant la première note, ce qui produit de nouvelles phrases musicales apparentées à la phrase initiale, mais différentes. D'autres pièces exploitent des permutations systématiques de notes.

Ces morceaux dont l'écoute incite à la concentration constituent assurément une musique originale. Les nouveaux procédés géométrico-logiques qui en constituent le cœur et dont on se demande pourquoi ils n'ont pas été utilisés plus tôt en musique serviront sans doute de modèle à d'autres compositions. La suite des *Rational Melodies* a plusieurs fois été enregistrée et elle prouve définitivement qu'un regard mathématicien sur l'activité de composition permet de renouveler les techniques formelles exploitables en musique. Je crois tout à fait possible qu'au-delà de sa musique, les idées de Tom Johnson donneront, avec le temps, naissance à des morceaux destinés à un large public qui seront des succès.

«Je veux trouver la musique, pas la composer»

Ce travail de popularisation des procédés nouveaux que Tom Johnson met au point ne sera sans doute pas opéré par lui-même, car il défend une conception particulière de la musique qu'il qualifie de platonicienne et qui semble peu compatible avec la diffusion musicale à large échelle. Donnons quelques précisions sur cette idée originale du travail de compositeur que soutient Tom Johnson.

Sa musique dit-il est « une réaction contre le romantisme et l'expressionnisme musical du passé. Je cherche quelque chose de plus objectif, quelque chose qui n'exprime pas mes émotions, quelque chose qui ne tente pas de manipuler les émotions des auditeurs, quelque chose hors de moi-même. (...) Je veux trouver la musique, pas la composer. (...) Si je suis un minimaliste cherchant à travailler avec le moins possible de matériels musicaux, c'est pour réduire l'arbitraire expression de moi-même. (...) Les mathématiques sont un moyen pour éviter des décisions subjectives. (...) Je ne suis pas intéressé par l'autobiographie. (...) La vérité est un mot plein de sens pour moi et je le trouve largement plus utile que le mot beauté qu'on utilise le plus souvent pour décrire ce que les artistes recherchent (...) Je crois que de nombreux phénomènes musicaux ont une existence absolue et ne sont pas inventés par les musiciens. C'est bien clair pour les 8178 accords faisables avec les notes présentes dans une octave. Les phrases musicales inversées et les phrases rétrogrades sont d'autres exemples d'absolus musicaux : il ne fut pas nécessaire d'attendre qu'un compositeur génial vienne nous expliquer qu'on peut retourner ou jouer à l'envers une mélodie. (...) Les mélodies auto-similaires, les formules, les automates et d'autres procédés ne sont entrés que récemment dans le langage musical, car ils sont un peu moins évidents, mais je ne crois pas pouvoir dire que nous avons inventé ces choses, nous les avons seulement découvertes. (...) Si un compositeur peut se satisfaire simplement d'interpréter et de découvrir plutôt que de créer et donc qu'il se concentre sur la vérité plutôt que sur la beauté, alors le résultat sera objectif (plutôt que subjectif) et nous éviterons la musique autobiographique ».

Les pavages rythmiques parfaits des lecteurs de *Pour la Science*

Les lecteurs de *Pour la Science* savent tirer parti de l'informatique et ont trouvé des pavages rythmiques parfaits par des quadruplets, ce qui est une découverte.

Rappelons l'énoncé du problème posé par le compositeur Tom Johnson qui utilise des pavages rythmiques parfaits par des triplets dans certaines de ces œuvres et qui souhaitait passer des triplets aux quadruplets.

Pour n donné, on cherche une série de groupes de 4 nombres $(a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4)$, les quadruplets, compris entre 0 et n. Pour qu'une série de quadruplets constitue un pavage rythmique parfait, il faut satisfaire les quatre conditions suivantes :

(a) Chaque quadruplet doit être régulièrement espacé :

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3.$$

(b) Les quadruplets doivent être disjoints deux à deux : aucun nombre ne doit être utilisé dans deux quadruplets différents ;

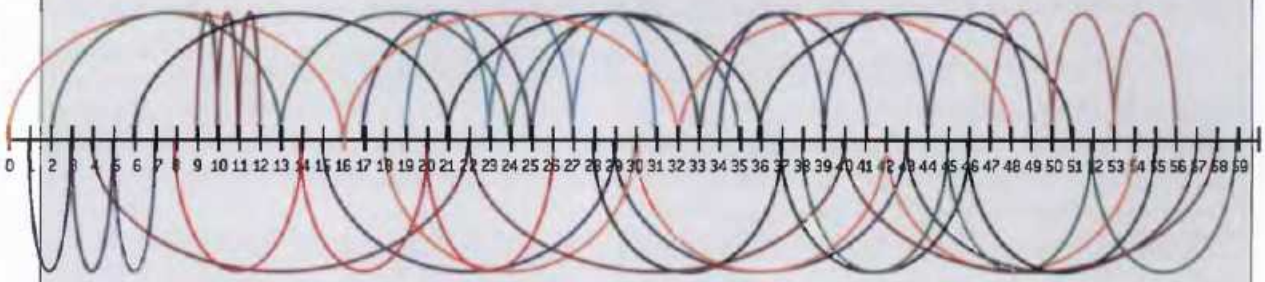
(c) Les quadruplets doivent utiliser des espacements différents : ainsi, pour deux quadruplets donnés $(a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4)$ et $(b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4)$, $a_2 - a_1$ doit être différent de $b_2 - b_1$;

(d) Les quadruplets ne doivent pas laisser d'espace vide : tous les entiers entre 0 et n doivent être utilisés.

Les conditions *(c)* et *(d)* entraînent que $n+1$ est nécessairement un multiple de 4 : $n+1 = 4k$. Bien sûr, le nombre de quadruplets du pavage rythmique parfait est alors k.

Le premier lecteur à avoir proposé une solution est Jean-Paul Davalan qui a découvert que pour $n+1 = 60 = 4 \times 15$ (15 quadruplets dans le pavage), il existait deux pavages rythmiques *parfaits* dont voici le premier :

0-16-32-48 ; 1-3-5-7 ; 2-13-24-35 ; 4-22-40-58 ; 6-21-36-51 ; 8-14-20-26 ; 9-10-11-12 ; 15-29-43-57 ; 17-25-33-41 ; 18-30-42-54 ; 19-23-27-31 ; 28-37-46-55 ; 34-39-44-49 ; 38-45-52-59 ; 47-50-53-56.



La ballade « ressort » des quadruplets de J.-P. Davalan selon la règle de Tom Johnson.

Le second étant obtenu par symétrie : on remplace chaque entier m d'un quadruplet par $59 - m$. J.-P. Davalan a aussi évalué le nombre de pavages rythmiques parfaits par des triplets en fonction de k ($n+1 = 3k$) et aussi le nombre de pavages rythmiques parfaits par des quadruplets ($n + 1 = 4k$).

Nombre r de pavages rythmiques parfaits par des triplets

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r	1	0	0	0	2	0	18	66	382	1104	4138	15324	61644	325456	2320948

Nombre r de pavages rythmiques parfaits par des quadruplets

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	24	38	96	444

Trois autres personnes ont trouvé des pavages rythmiques parfaits par des quadruplets. Ce sont Patrick Rietmaker qui confirme les calculs de J.-P. Davalan (pour $k = 15$, 16, 17 et 18) ainsi que Doron Zeilberger et Lara Pudwell qui ont de leur côté trouvé les deux pavages pour $k = 15$.

Malgré des tentatives assez poussées de J.-P. Davalan, aucun pavage rythmique parfait par des quintuplets n'a été découvert. Qui s'attaquera à ce nouveau défi ?

Cette vision puriste et nouvelle de la musique nous étonne, mais au fond, dans les arts graphiques, elle est banale et très ancienne. Les artistes et artisans qui conçoivent et réalisent les merveilles de l'art islamique (telles qu'on peut les admirer par exemple à l'Alambra de Grenade), ou les informaticiens qui tirent de leur ordinateur de magnifiques fractales et toutes sortes de formes géométriques éblouissantes provenant de formules mathématiques simples pratiquent cet art platonicien que Tom Johnson revendique pour la musique : les œuvres ne sont pas créées, mais découvertes et l'artiste n'est pas un inventeur, mais seulement un être curieux qui, parcourant l'univers des objets mathématiques, en retient certains et nous les montre en dessin ou en musique.

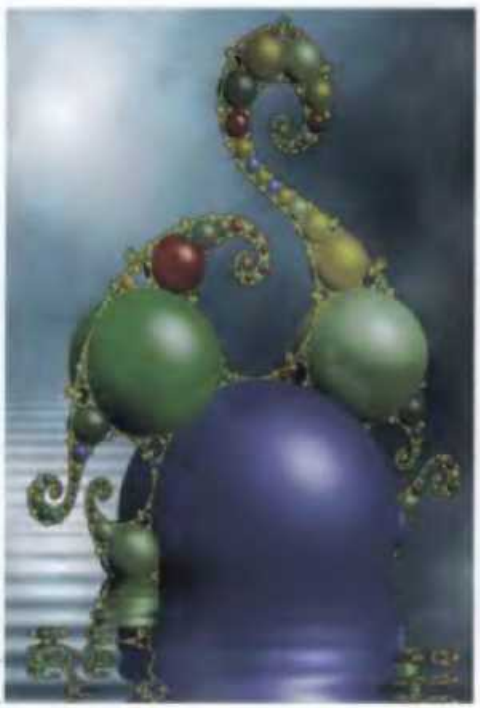
Jos Leys, un artiste géomètre

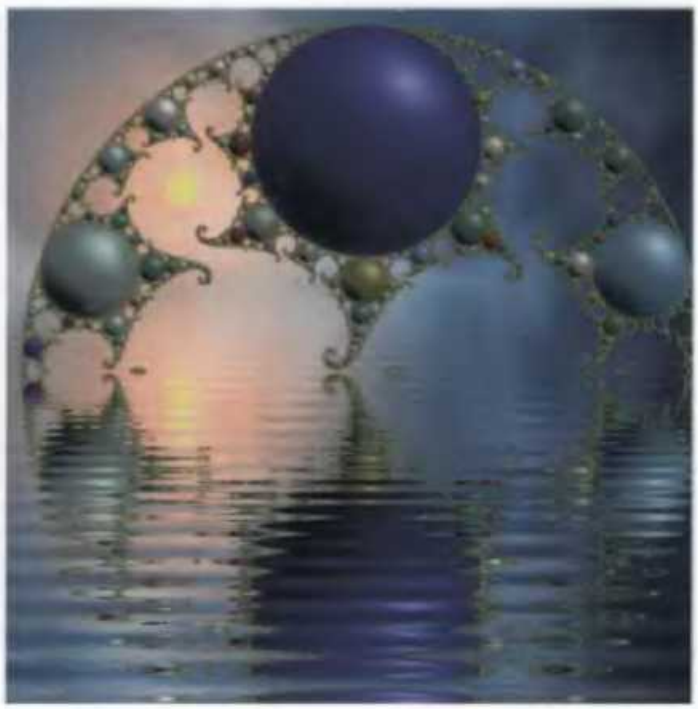
L'ordinateur est une lunette pour observer l'univers mathématique ; les images qu'il nous en donne sont d'une fulgurante beauté

Parfois le chercheur imagine un objet ou une structure, l'étudie, en démontre des propriétés, mais ne réussit pas à s'en faire une représentation précise. Ce fut le cas des fonctions continues sans dérivées imaginées en 1872 par Karl Weierstrass. Puis cette impossibilité est réapparue pour les courbes inscrites dans une surface d'aire bornée et d'une longueur infinie (dont le fameux flocon que Von Koch conçut en 1904) et pour nombre d'autres objets tératologiques que la topologie, l'analyse et la géométrie de cette époque identifièrent sans réussir à les dessiner : les images que les mathématiciens tentaient d'obtenir à la main en simplifiaient trop l'aspect.

L'ordinateur, qui est une lunette pour voir dans l'univers mathématique, a changé tout cela, et aujourd'hui tout le monde connaît les « fractales » (le mot fut créé en 1975 par Benoît Mandelbrot) qui sont justement nées de la volonté de visualiser les objets infiniment découpés dont la topologie avait énoncé l'existence et décrit certaines propriétés.

Nous sommes surpris par l'incroyable esthétique de ces paysages mathématiques que le calcul capture. Un domaine artistique nouveau est né, fonctionnant à l'écart des

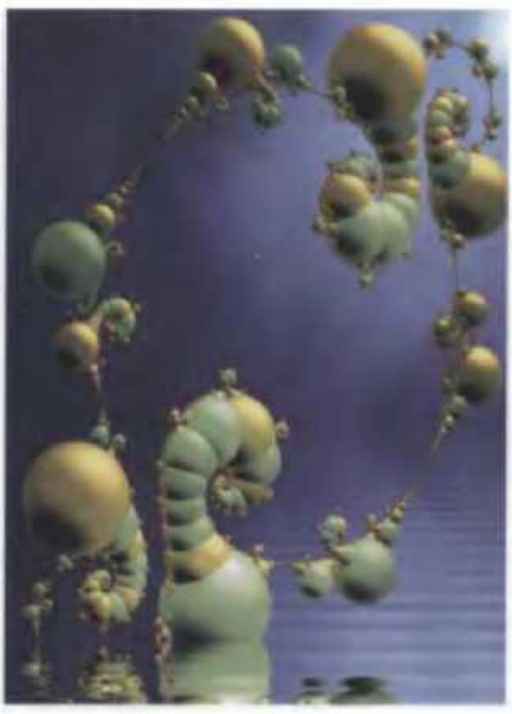




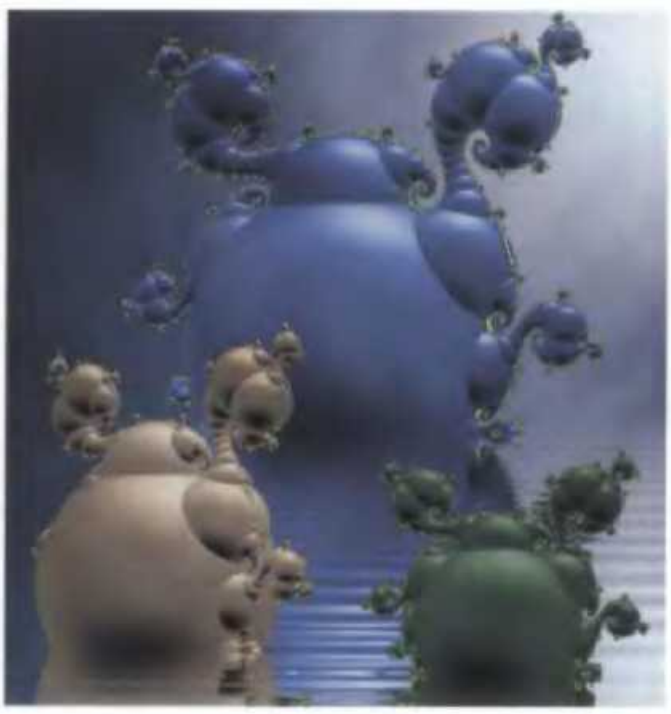


Jos Leys

La théorie de ces figures, abordée il y a plus d'un siècle par Felix Klein, a été approfondie récemment par David Mumford, Caroline Series et David Wright. Elle est exposée dans un livre mathématique d'un genre nouveau où les images d'ordinateurs jouent un rôle central (*Indra's Pearl: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002). Les objets merveilleux que ce livre présente ont été une source d'inspiration pour Jos Leys qui en a tiré de mystérieuses images.



Jos Leys



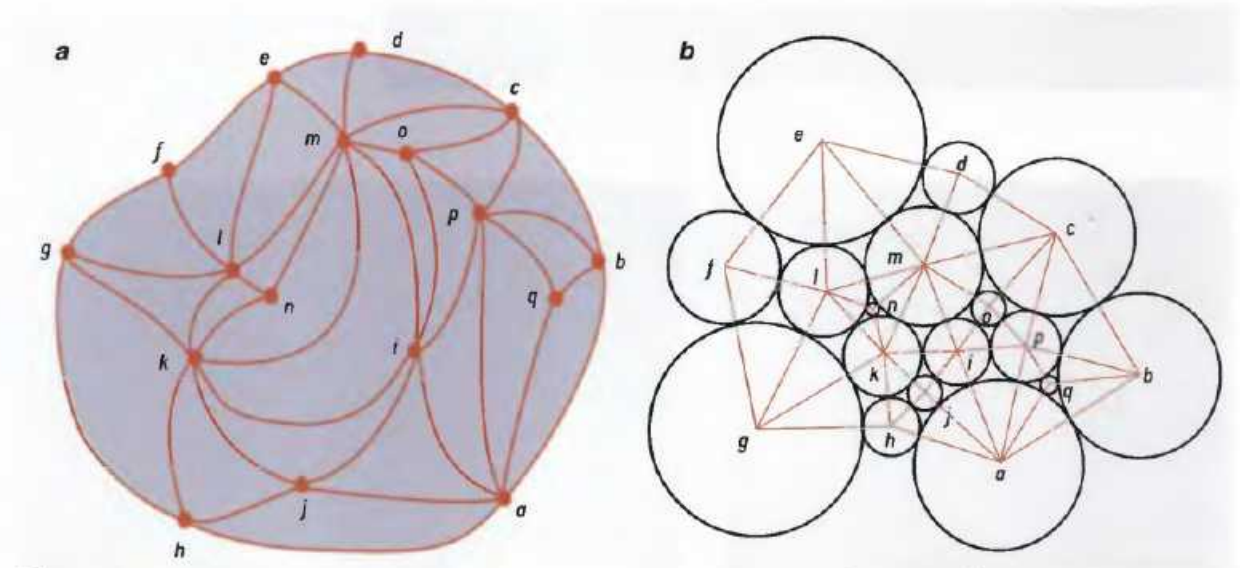
courants commerciaux. Cet art mathématique est considéré comme secondaire bien qu'il soit pratiqué par des milliers de passionnés qui créent de nouveaux algorithmes, se les échangent et exposent leurs résultats sur Internet où leurs œuvres sont offertes à tous.

Anvers, capitale du diamant mathématique

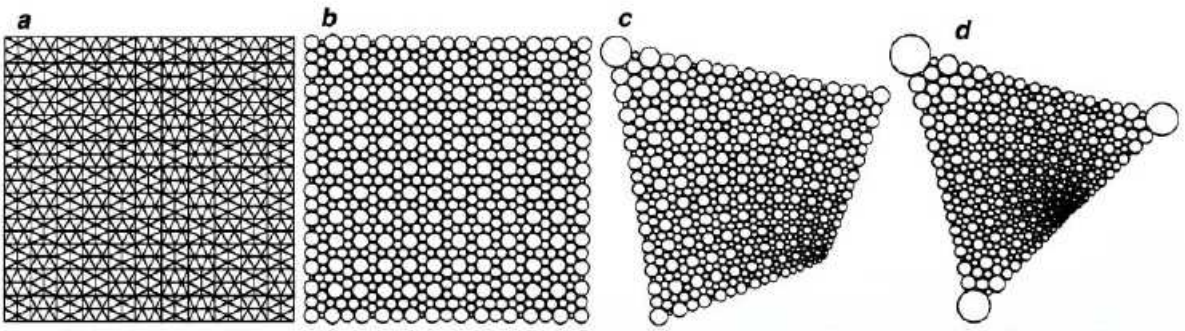
Ce fonctionnement social nouveau est sans doute ce qui gêne les milieux traditionnels de l'art, réticents vis-à-vis de cette création numérique et populaire. Ceux qui la pratiquent n'en tirent aucun profit alors que pourtant ils donnent naissance à bien plus d'œuvres et de magnificences que l'art officiel exposé dans les musées et dont les productions sont achetées à coup de millions d'euros aux frais du contribuable.

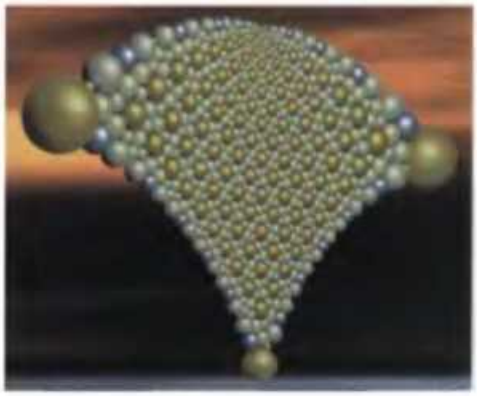
Parmi les artistes utilisant l'ordinateur comme pinceau et les mathématiques comme moteur de l'imagination, l'ingénieur anversois Jos Leys a réussi en quelques années à créer une œuvre originale puisant son énergie dans toutes sortes d'idées récentes empruntées au monde de la recherche. En menant un travail exceptionnel qui reste proche des abstractions théoriques nourrissant sa créativité, Jos Leys, avec une application et une détermination sans égales, nous dévoile les joyaux insoupçonnés cachés dans l'univers mathématique ; il les extrait à coup de calculs informatiques, parfois massifs, et les dépose comme par magie sur l'écran de nos ordinateurs.

Sa méthode algorithmique procède de la recherche de l'exactitude et de la précision, comme les artistes naturalistes ou plus récemment les hyperréalistes. La différence est



2 Empilements de cercles tangents. Si l'on se donne un graphe composé uniquement de triangles (aux côtés éventuellement courbes comme sur l'image a), il est possible, d'après le théorème de Koebe (1936), de construire un empilement de cercles tangents correspondant au graphe : à chaque nœud du graphe est associé un cercle, et deux cercles sont tangents si et seulement s'ils sont reliés dans le graphe par un arc. Une certaine liberté existe dans la disposition des cercles, mais elle est réduite. On peut fixer les angles que font les centres des cercles du pourtour (*a*, *b*, *c*, ..., *h*), en revanche, ces angles étant fixés, les rayons des cercles et la position des centres des autres cercles sont déterminés. Trouver ces rayons et ces centres est délicat. Jos Leys utilise pour cela un algorithme mis au point par Charles Collins et Kenneth Stephenson en 2003. Le résultat de l'application de cet algorithme à un graphe triangulaire complexe est un réseau de cercles tangents souvent intéressant et esthétique. C'est l'une des techniques utilisées par Jos Leys pour concevoir ses images.





Étapes de la construction de Jos Leys d'une image numérique en utilisant le théorème de Koebe. On part d'un graphe triangulaire *(a)*, puis on constitue l'empilement de cercles tangents *(b)* associé par le théorème de Koebe. On déforme l'empilement (*c* et *d*) en jouant sur les angles des quatre coins (l'angle en bas à droite passe de 90 à 180 degrés). Cela entraîne la modification de tous les rayons et positions des cercles tangents qui sont calculés à chaque étape par l'algorithme de Ch. Collins et K. Stephenson. On remplace alors chaque cercle par une sphère, puis on transforme cet empilement par inversion et on le dispose dans un décor *(e)*.

que l'objet de son art vit non pas dans le monde réel, mais dans l'abstrait algébrique et arithmétique. Plusieurs dizaines de familles d'images, chacune fondée sur une idée mathématique traduite en algorithme et déclinée en une multitude d'instances, ont été créées par Jos Leys et ses assistants de silicium. Elles sont exposées sur plus de deux mille images consultables et téléchargeables : http://www.josleys.com/.

L'outil de base de Jos Leys est un logiciel nommé *Ultrafractal*, conçu par Frederik Slijkerman. Il faut cependant mettre en garde les artistes en herbe qui voudraient suivre les traces de Jos Leys. Les logiciels (dont *Ultrafractal*) vous permettent sans peine de produire vos propres images fractales (lesquelles, hélas, ressemblent à celles produites par n'importe quel autre utilisateur du même logiciel), mais pour obtenir des résultats originaux, un travail important est nécessaire.

Jos Leys, pour chaque création, écrit un programme particulier (destiné à *Ultrafractal*) de plusieurs pages qui traduit les idées mathématiques et algorithmiques qu'il veut visualiser. Il y incorpore des modules spécifiques, par exemple pour le calcul des ombres et des reflets, modules qu'il a lui-même soigneusement et longuement mis au point et qui jouent un rôle central pour le rendu final. C'est tout un travail d'apprentissage graphique et informatique de plusieurs années qui a conduit Jos Leys à la perfection technique de ses créations actuelles. Les images de Jos Leys possèdent une allure singulière et inimitable, un «look» qui est sa signature.

Parmi les domaines explorés par Jos Leys, il y a les représentations du plan hyperbolique, les figures impossibles de taille infinie (des jeux originaux avec la perspective), les pavages non périodiques de Penrose (pour lesquels Jos Leys a écrit ses propres algorithmes), les diagrammes de Voronoï (permettant des mosaïques d'un type nouveau), les entrelacs celtiques (poussant cet art traditionnel dans de nouvelles directions), les pavages du plan, les jeux combinatoires à base de spirales et de cercles. Plusieurs catégories nouvelles de fractales (tunnels, plantes, monstres à tentacules, etc.) ont aussi été

découvertes par Jos Leys. L'un de ses dessins a remporté le prix 2002 *Best in show du Museum of Computer Art*. D'autres ont été utilisés pour des couvertures de livres, des affiches et des illustrations diverses (en général liées aux mathématiques).

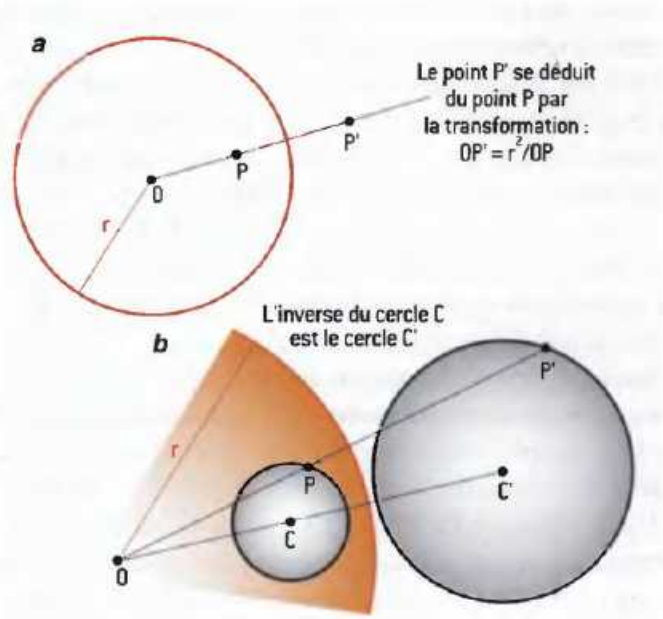
Les cercles tangents du théorème de Koebe

Nous allons décrire quelques créations récentes de Jos Leys en nous attachant particulièrement aux jeux algorithmiques qu'il pratique avec des cercles et des sphères et qu'il perfectionne en dialoguant avec des mathématiciens.

Un problème très simple se pose concernant les familles de cercles tangents : peut-on les disposer selon des schémas complexes (des *graphes* disent les mathématiciens) fixés ? Autrement dit, un ensemble de nœuds étant donné $N_1, N_2 \ldots N_p$, ainsi que des liens entre ces nœuds (par exemple N_1 est relié à N_2, N_3 est relié à N_5, etc.), à quelles conditions sur le graphe initial peut-on construire des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ – un exactement par nœud – de façon que C_i soit tangent à C_j si et seulement si N_i est relié à N_j ? On ne veut que des cercles tangents et on leur impose un schéma de relations mutuelles fixé, sans préciser les rayons des cercles, car c'est en jouant sur eux qu'on espère ajuster l'empilement de cercles.

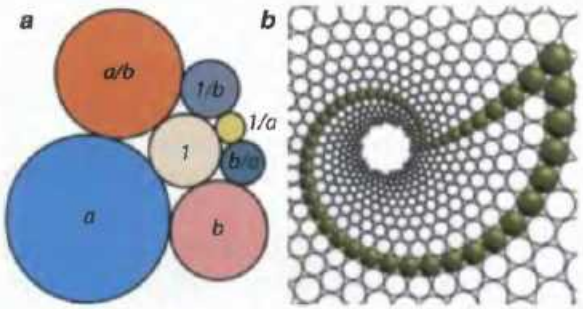
L'intérêt mathématique du problème envisagé dès 1936 par Paul Koebe et redécouvert par le grand mathématicien William Thurston en 1985 est plus profond qu'il n'y paraît. En effet, les réseaux de cercles tangents servent dans les problèmes d'approximation de surfaces mathématiques et ont donné naissance, dans les années 1990, à la théorie des fonctions analytiques discrètes, aujourd'hui en plein essor. (Le livre récent de Kenneth Stephenson, *Introduction to circle packing*, donne une présentation complète de cette théorie.) On peut d'ailleurs utiliser ces empilements de cercles pour dessiner à plat des surfaces complexes, en particulier pour représenter des parties du cerveau humain. Il en résulte de nouvelles méthodes de visualisation des aires corticales qui font progresser l'imagerie cérébrale, discipline clef des neurosciences.

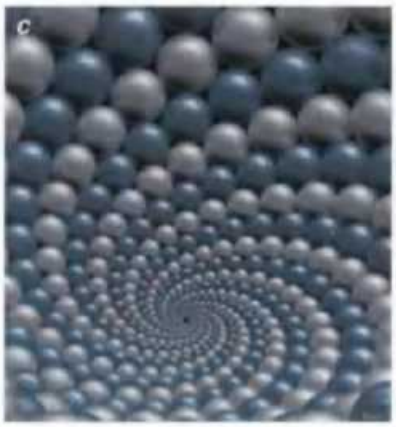
La réponse à la question posée sur les réseaux de cercles tangents est simple : si le graphe est composé uniquement de triangles (le graphe n'est qu'une série de triangles

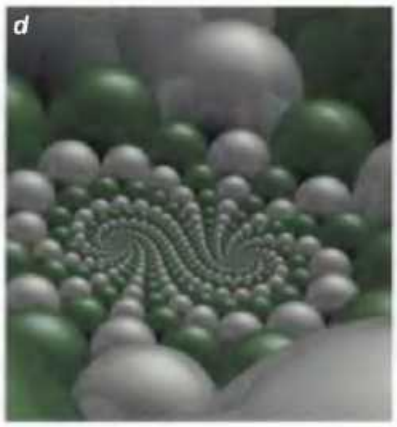


4 L'inversion est la transformation reine des dessins de Jos Leys. Inventée par le géomètre allemand Rudolf Steiner (1796-1863), elle est spécifiée *(a)* par le cercle d'inversion *(en rouge)* de centre *O* et de rayon *r*. L'inversion transforme un cercle *C* en un cercle *C' (b)* et dans l'espace une sphère en une autre sphère. L'inverse du cercle d'inversion est le cercle lui-même. Quand le pôle d'inversion *O* est situé sur un cercle *C*, son inverse est une droite.

Spirales de Doyle. Si on prend un cercle de rayon 1 et qu'on place autour de lui six cercles de rayons a, b, b/a, $1/a$, $1/b$, a/b, ceux-ci s'ajustent parfaitement en créant une fleur à six pétales *(a)*. S'il existe deux entiers n et m tels que $a^n = b^m$, alors on peut créer d'autres cercles selon la même règle (utilisée itérativement), le tout constituant une spirale infinie parfaite de cercles tangents, chaque cercle ayant exactement six voisins. Il s'agit de la spirale de Doyle *(b)*. Jos Leys utilise cette spirale harmonieuse, et – par exemple en remplaçant les cercles par des sphères – produit d'étonnants arrangements de sphères miraculeusement ajustées *(c)*. Partant d'une spirale de Doyle et opérant une inversion dont le cercle d'inversion (invariant) passe par le centre de la spirale, on obtient un autre ensemble de cercles mutuellement tangents (car une inversion transforme les cercles en cercles, et préserve la propriété d'être tangent) qui cette fois est une spirale double *(d)*. En déplaçant cette double spirale sur une sphère, on obtient le magnifique assemblage de l'image *(e)*.









collés par les côtés, un triangle ayant au plus un côté non collé à un autre triangle) et qu'il peut être dessiné sur un plan, alors quelles que soient sa forme et sa taille, il est possible de trouver des cercles associés aux nœuds du graphe et tangents deux à deux exactement selon le schéma fixé par le graphe. La condition est à la fois nécessaire et suffisante.

Les cercles situés sur la frontière du réseau peuvent être disposés angulairement comme on le veut quand on place les cercles, et la solution pour chaque graphe triangulaire et chaque système d'angles du pourtour est alors essentiellement unique, car on passe d'une solution à une autre par des transformations connues d'avance. La difficulté reste cependant de déterminer et de dessiner réellement l'empilement de cercles d'un graphe fixé, car dans un tel système de cercles, les rayons dépendent tous les uns des autres et il faut ajuster soigneusement ces rayons pour que les cercles se disposent correctement: le graphe constitue une contrainte globale qu'on ne peut pas traiter localement nœud par nœud; la solution vient d'un coup ou pas du tout. Il faut maîtriser une subtile chorégraphie pour que l'ensemble des cercles recherchés colle au schéma fixé par le graphe triangulaire.

Un algorithme fonctionnant par approximations successives et traitant efficacement même des empilements de plusieurs centaines de cercles a été décrit par Charles Collins et K. Stephenson en 2003. Jos Leys utilise cet algorithme pour produire d'immenses empilements de cercles parfaitement tangents, globalement solidaires et harmonieusement composés. Ces empilements de cercles peuvent être convertis en empilements de sphères,

qui eux-mêmes peuvent être déformés en de nouveaux empilements de sphères conduisant à des sculptures virtuelles fascinantes et d'une beauté surnaturelle *(voir la figure 3)*.

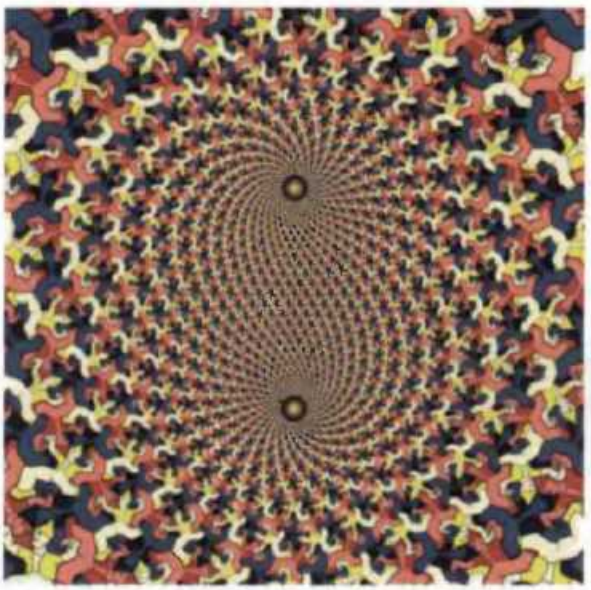
Ces créations récentes de Jos Leys sont remarquables, car elles illustrent le double lien qui réunit ici l'art et les mathématiques: l'artiste produit des images qu'on peut interpréter comme des matérialisations d'idées profondes (celles de la théorie des fonctions analytiques discrètes) et dont la beauté résulte de cette profondeur que notre esprit ressent inconsciemment. De plus, pour produire ces images, l'artiste doit s'appuyer sur les résultats des chercheurs eux-mêmes et donc, en un certain sens, son art est un produit de la recherche mathématique qui, pour une fois, ne reste pas confinée dans les laboratoires universitaires.

Comme dans tous les arts géométriques, une fois la technique bien en main, la créativité prend les commandes. Les combinaisons possibles sont innombrables pour le graphe triangulaire initial, pour l'introduction des sphères et la transformation globale des structures construites. C'est là que l'artiste fait œuvre d'imagination et les sculptures numériques proposées par Jos Leys sont le résultat d'astucieuses et minutieuses mises en place opérées par l'artiste, dont seules les plus abouties sont conservées et présentées au public *(voir la figure 3)*.

Fasciné par les ensembles de cercles tangents, Jos Leys a aussi créé une seconde série d'œuvres *(voir la figure 5)* fondées sur une spirale découverte par le mathématicien Peter Doyle. La question qui a conduit à la découverte des spirales de Doyle est la suivante: existe-t-il une condition simple assurant que 6 cercles tangents entourant un cercle central (supposé de rayon 1) s'ajustent parfaitement et composent une «fleur» de 7 cercles?

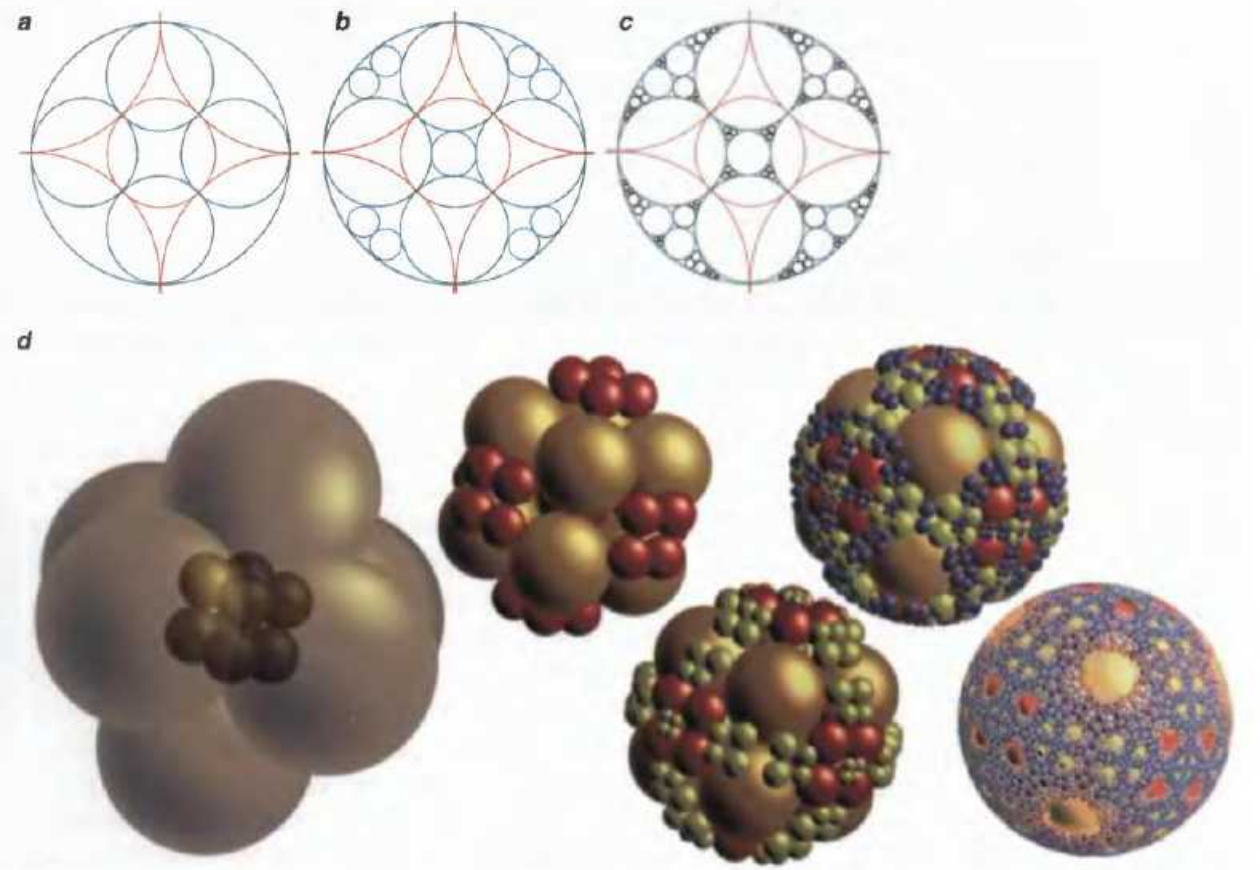
Les spirales de Doyle

La réponse est assez simple (la démonstration l'est moins!): il suffit que les rayons aient pour valeur a, b, b/a, $1/a$, $1/b$, a/b où a et b sont deux nombres positifs quelconques *(voir la figure 5)*. Grâce à cette relation utilisée plusieurs fois de suite, on peut construire des ensembles de cercles tangents, où chaque cercle est entouré de six autres cercles exactement. Certains de ces ensembles de cercles ne sont «cohérents» que localement et produisent des familles de cercles qui finissent par se recouper après plusieurs étapes de construction. D'autres, en revanche, s'enroulent autour d'un point central en une spirale infinie sans jamais que deux cercles de la construction infinie ne se coupent. Pour que cela se produise, il faut qu'il existe deux entiers n et m tels que $a^n = b^m$. Une telle spirale de cercles tangents, magnifique en elle-même, se prolonge à l'extérieur jusqu'à l'infini par des cercles de plus en plus grands, constituant au total un pavage du plan tout entier par des cercles tangents.



Hommage à Escher constitué par une spirale de Doyle.

On peut utiliser la spirale de Doyle pour construire de magnifiques images, mais on peut aussi la transformer en une double spirale encore plus étonnante et harmonieuse. Pour cela, on applique une inversion par rapport à un cercle passant par le centre de la spirale. En se fondant sur cette double spirale uniquement basée sur un réseau infini de cercles tangents – chaque cercle exactement entouré de six autres – Jos Leys s'est



Remplir une bille avec des billes. Pour remplir un cercle avec des cercles, on part du grand cercle vert où l'on place 4 autres cercles verts, tangents entre eux et au cercle de départ. On considère les cinq cercles orthogonaux à ces cercles dessinés en rouge sur l'image *(a)*. Ces cercles déterminent cinq inversions Inv1, Inv2, Inv3, Inv4, Inv5. On applique ces cinq inversions aux cercles verts *(b)*. Cela donne neuf nouveaux cercles bleus (on devrait en obtenir 20, mais certains cercles sont invariants, et d'autres sont obtenus plusieurs fois). Les nouveaux cercles sont tangents aux cercles verts précédents. On recommence, ce qui donne de nouveaux cercles noirs *(c)*. Petit à petit tout l'intérieur du cercle vert initial se remplit par des cercles. Adaptée à l'espace, cette méthode permet de remplir une sphère par des sphères *(d)*. Pour trouver des sphères initiales convenables, cinq solutions sont possibles, chacune associée à un polyèdre régulier. Les images représentent la construction obtenue à partir du cube (la sphère que l'on remplit n'est pas dessinée pour une meilleure lisibilité du schéma).

amusé à rendre hommage à Maurits Cornelis Escher, le célèbre graveur hollandais qui, lui aussi, piochait dans les mathématiques des structures pour la composition de ses œuvres. Jos Leys a repris un des pavages de Escher construit sur un schéma hexagonal : chaque hexagone est entouré par six hexagones qu'Escher a remplacés par un petit personnage s'emboîtant avec les copies de lui-même. Jos Leys a alors glissé le motif du petit personnage d'Escher dans la double spirale infinie déduite de la spirale de Doyle *(voir la figure 6)*.

Le résultat, qui aurait enchanté Escher, fait partie d'une série de 64 images que Jos Leys a engendrées en combinant des idées d'Escher avec ses propres idées et techniques. La série s'intitule modestement *Escher Imitations*.

Aussi étrange que cela puisse paraître, il est possible de remplir complètement une sphère à l'aide de sphères plus petites, sans laisser le moindre espace vide et sans que

deux sphères ne se coupent. Bien sûr, il faut pour cela utiliser une infinité de sphères et disposer d'une méthode systématique de remplissage. Le problème est en fait la traduction en trois dimensions du problème du remplissage d'un cercle par des cercles qui fut étudié dans les années 1980 (il est connu sous le nom du « problème de la baderne d'Apollonius »).

Le remplissage des sphères

En 2003, Reza Mahmoodi Baram et Hans Herrmann ont proposé une famille de méthodes élégantes permettant le remplissage de la sphère. Leur solution est fondée sur l'utilisation des cinq polyèdres réguliers de Platon : le tétraèdre, l'octaèdre, le cube, le dodécaèdre et d'icosaèdre. L'idée est d'utiliser quelques sphères initiales dont les centres sont placés aux sommets d'un de ces polyèdres et d'effectuer une série (finie) d'inversions (en trois dimensions) de ces sphères initiales. Les sphères initiales en donnent de nouvelles qui lorsqu'on applique à nouveau les mêmes inversions, en donnent encore de nouvelles, etc. Petit à petit, une quantité de sphères de plus en plus grande est définie et elles occupent tout l'intérieur de la sphère qu'on cherchait justement à remplir.

Les sphères initiales et les sphères définissant les inversions doivent être soigneusement choisies pour que la méthode fonctionne, mais lorsque c'est le cas on obtient que les sphères ajoutées étape par étape remplissent précisément tout le volume de la sphère de départ sans jamais se couper entre elles et sans laisser le moindre espace vide.

Une découverte étrange a alors été faite. Lorsque l'on part de l'octaèdre et qu'on applique le procédé (à partir des sphères soigneusement calculées pour le remplissage), on obtient un système de sphères qui constituent un roulement à billes infini et bicolore. Les sphères peuvent en effet se regrouper en deux catégories, disons les blanches et les jaunes, d'une façon telle qu'une sphère jaune ne touche que des sphères blanches et qu'une sphère blanche ne touche que des sphères jaunes. Cette séparation bi-chromatique de l'espace qui semblait *a priori* impossible a surpris les chercheurs qui l'ont découverte, mais ils ont été encore plus surpris de s'apercevoir que l'ensemble de toutes les sphères constituait un roulement à billes parfait : si on fait tourner une sphère sur elle-même, son mouvement entraîne celui de toutes les autres sphères dans une multitude de rotations sans glissement. Aucune sphère n'a besoin que les sphères qui lui sont tangentes ne glissent au point de contact qu'elles ont ensemble et toutes les sphères (qui pourtant remplissent l'espace) tournent donc ensemble de façon coordonnée et compatible, sans le moindre frottement.

Ces invraisemblables amoncellements de billes sont bien évidemment difficiles à imaginer. L'aide de l'ordinateur se révèle indispensable et Jos Leys ne pouvait manquer de relever le défi. Les remplissages de sphères par d'autres sphères sont obtenus en dessinant plusieurs centaines de milliers de sphères à chaque fois (et non pas une infinité bien sûr !).

Ces fractales d'un type nouveau – dont la dimension fractale a été calculée – présentent une beauté « mathématique » étrange et déconcertante.

David Mumford médaillé Fields 1974 (la médaille Fields est pour les mathématiciens l'équivalent du Prix Nobel) avec deux de ses collègues Caroline Series et David Wright sont eux aussi des passionnés de cercles et d'ordinateurs.

Persuadés que l'ordinateur est un outil d'exploration et d'aide à la compréhension incomparable dans certains domaines des mathématiques, ils ont entrepris dans les années 1980 l'étude d'une idée sur laquelle le mathématicien Felix Klein avait travaillé

en utilisant les moyens de son époque, mais sans pouvoir l'approfondir vraiment à cause de l'absence d'outils de calcul et de visualisation convenables. Le résultat de cette recherche est un livre mathématique d'un type nouveau *Indra's Pearl. The Vision of Felix Klein*, dont le titre évoque le dieu bouddhiste Indra dont chacune des perles de son collier reflète l'Univers tout entier. Au détour des pages de l'ouvrage, les illustrations produites par l'ordinateur éclairent le texte et y jouent un rôle central pour soutenir l'intuition et aider l'assimilation des concepts. C'est d'ailleurs en dessinant ces images et en les faisant dessiner par l'ordinateur que le travail des chercheurs a longuement mûri et s'est progressivement précisé pendant plus de dix années.

Ce que Felix Klein n'a jamais vu

L'idée de l'utilisation répétée d'inversions (mentionnée à propos du remplissage d'une sphère par une infinité de sphères plus petites) est explorée d'une manière systématique : que donne la composition les unes avec les autres de plusieurs inversions (ou transformations géométriques intéressantes) ? Que devient un point lorsqu'on le fait passer dans une succession infinie de transformations prises dans une famille donnée ? Que devient un ensemble dans la même machine à déformer (problèmes des ensembles limites) ? Quelles sont les configurations invariantes par l'application d'une famille de telles transformations ? Tout ce domaine d'idées et de problèmes géométriques où l'on retrouve la baderne d'Apollonius et bien d'autres formes fractales a été examiné dans le livre avec soin, puis par Jos Leys qui en a tiré une série d'images exceptionnelles qui sont peut-être les plus réussies de ses œuvres *(voir les dessins de la figure 1)*. Remarquons que les images de cette série sont à la fois d'un esthétisme classique, les cercles et les sphères étant les objets géométriques qu'on y rencontre le plus, mais en même temps de type fractal, les empilements infinis étant la règle et l'autosimilarité (la présence dans une figure de parties qui sont la version réduite de la totalité) s'y retrouvant partout.

Jouant par exemple à partir d'une figure en deux dimensions composée de cercles à lui créer une troisième dimension (en plaçant une sphère sur chaque cercle), découpant des parties de ces ensembles limites que Klein avait envisagés sans jamais les voir, Jos Leys compose des paysages inconnus, habités par des êtres aux formes infiniment harmonieuses et totalement nouvelles à nos yeux. Aucun artiste, autre qu'un mathématicien, n'aurait pu produire ces éblouissantes images où la virtuosité formelle, conjuguée avec la rapidité de l'ordinateur crée de l'absolu et de l'éternel : oui, le monde mathématique est magnifique et l'ordinateur est l'œil dont nous avons besoin pour voir et ressentir cette beauté inouïe plus parfaite que toutes les beautés terrestres.

Apparitions magiques

La découverte de la perspective a aussi été celle des jeux optiques. Ceux de l'anamorphose sont d'une infinie subtilité que les peintres illusionnistes explorent encore avec inventivité.

Le mot anamorphose composé de la racine *ana* (« en remontant ») et *morphé* qui signifie « forme » ne semble pas avoir été utilisé avant le milieu du XVII[e] siècle. Il désigne des images brouillées dont on ne découvre le sens qu'en les regardant d'un point particulier ou à travers un miroir courbe, notamment cylindrique ou conique, placé en un endroit adéquat. L'origine de ces jeux géométriques et optiques, rapidement devenus un art, est très ancienne. Vitruve, dans ses livres d'architecture d'il y a deux mille ans, expliquait déjà comment une façade que l'on dessine en remplaçant des droites par des courbes apparaît plus rectiligne ou plus haute. Pline raconte que lors d'un concours pour une Minerve destinée à être hissée en haut d'un pilier, Alcamène sculpta une statue harmonieuse et bien proportionnée, alors que Phidias proposa un monstre à la bouche béante et au nez allongé. Lors de l'exposition, Alcamène fut acclamé et Phidias faillit se faire lapider, mais la situation s'inversa lorsque les œuvres furent mises en place au sommet des colonnes où elles devaient s'établir : la statue de Phidias resplendissait, l'autre fut objet de risée.

L'art de l'anamorphose

Alors qu'en architecture, il ne s'agit que de rectifier la perception pour « remédier à l'erreur de la vue », dans le monde de la décoration, on créera sciemment des illusions. L'art de l'anamorphose à proprement parler, où la figure originale est illisible à moins de la regarder de la bonne façon, apparaît à la fin du XV[e] siècle. Léonard de Vinci lui-même aurait représenté ainsi un dragon combattant un lion dans une œuvre aujourd'hui disparue, mais dont l'existence semble confirmée par la présence dans le *Codex Atlanticus* du dessin anamorphique d'un visage et d'un œil *(ci-dessous)*.

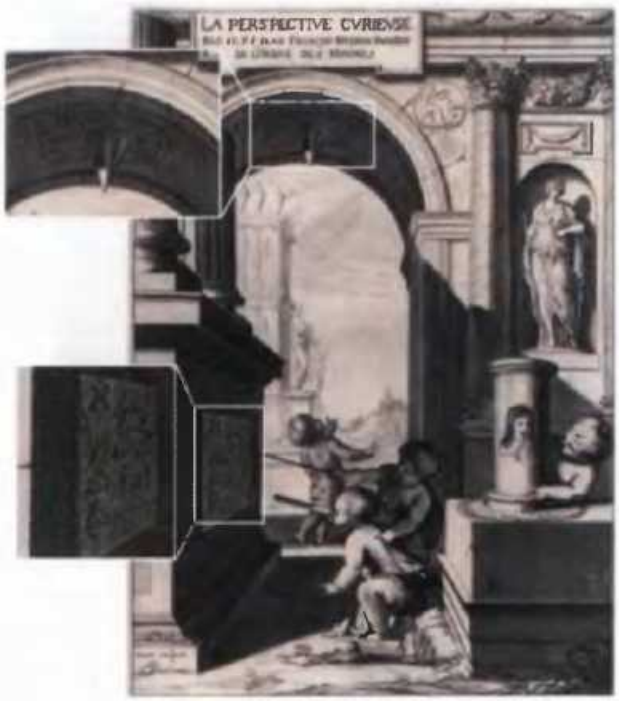


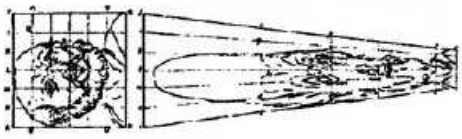
Les premières anamorphoses sont des anamorphoses par dilatation : l'objet représenté est étiré au point d'en devenir indéchiffrable, sauf pour celui qui se place en biais par rapport à la surface du dessin ou s'aide d'un miroir. Ce procédé est assez facile à mettre en œuvre puisqu'il suffit d'allonger la figure selon une direction. À côté de ces anamorphoses géométriques assez simples, les anamorphoses par réflexion sont plus spectaculaires et plus troublantes. Sans le dispositif optique adapté, il est souvent impossible de se faire une idée exacte de ce qui est caché. Le miroir au travers duquel il faut observer l'image pour la

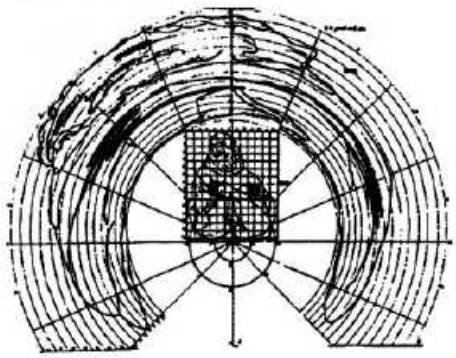




L'artiste hongrois Istvan Orosz est un maître de l'anamorphose cachée où l'on offre au regard du spectateur une image dont on ne soupçonne pas qu'elle en recèle une autre. Cette gravure de Orosz représente un paysage de *L'île mystérieuse* de Jules Verne dominé par une pleine lune. Si vous placez un miroir cylindrique sur la lune et regardez à travers, le paysage déformé devient un portrait de Jules Verne.







La Perspective curieuse du père Nicéron, de l'Ordre des minimes, se présente comme une « œuvre très utile aux Peintres, Architectes, Sculpteurs, Graveurs, et à tous autres qui se mêlent du dessin ». Sur la gravure de la page de couverture de l'ouvrage *(en haut)*, on distingue au plafond de la voûte un dispositif d'anamorphose conique, à gauche des enfants examinant une anamorphose par étirement et à droite un appareil d'anamorphose cylindrique. Nicéron inventa le procédé de la grille ici représentée pour un étirement de la tête de Socrate et pour une anamorphose cylindrique. La grille de transformation connue, on dessine dans la grille en suivant les transformations des carrés du dessin auquel on a superposé un calque transparent. L'image ainsi dessinée redonnera l'objet par la transformation inverse.

déchiffrer est plan, cylindrique, pyramidal, sphérique ou conique. Rien cependant ne limite les formes utilisables et l'on peut imaginer des anamorphoses totalement irrégulières dessinées pour des miroirs révélateurs particuliers, ayant plusieurs bosses ou construits en épousant des formes mathématiques complexes. On peut même envisager des systèmes optiques complexes à plusieurs miroirs.

Scènes édifiantes et érotiques

Fascinant toutes les époques, on trouve, discrètement glissés dans les trésors de l'art occidental et chinois, de nombreux exemples d'anamorphoses témoignant pour chaque siècle de l'existence d'initiés aux merveilles de l'optique qui les utilisent entre autres choses pour y masquer des scènes érotiques. Les anamorphoses sont parfois cachées dans les peintures, les gravures ou sur des murs. C'est le cas dans les bâtiments du cloître de la Trinité-des-Monts à Rome, où l'observateur attentif pourra faire surgir, de la paroi d'un couloir étrangement décoré, une représentation de saint François de Paule assis sous un arbre priant les mains jointes, due à Emmanuel Maignan.

Parfois, les anamorphoses ne cherchent pas à se dissimuler au milieu de sujets normalement représentés, et l'artiste propose son barbouillage savant sur toute la surface de l'œuvre, offrant aux yeux de mystérieuses traînées colorées dont le spectateur sent qu'elles ne sont pas arbitraires, mais qu'il ne réussit pas à déchiffrer par la seule force du regard. Un magnifique livre intitulé *Anamorphoses, les perspectives dépravées* de l'érudit parisien Jurgis Baltrusaitis, plusieurs fois réédité et complété depuis sa parution en 1955, retrace cette quête étrange de la fausse confusion où les artistes produisent volontairement des représentations erronées du monde réel, dont seul un miroir secret ou un regard oblique rétablit la vérité.

Ces dernières années, une multitude d'expositions ont été consacrées aux anamorphoses, dont en particulier celle de 2002 au Musée des Arts et Métiers de Paris et une en 2009 au Grand Palais à Paris intitulée « Une image peut en cacher une autre ». Dans celle de 2002 on a



Le théâtre de Shakespeare de Istvan Orosz, une perspective oblique de Shakespeare en habits élisabéthains. Du temps de Shakespeare, le terme perspective avait un sens différent et se référait à tout procédé pour ouvrir de nouveaux espaces, y compris les perspectives. L'artiste est représenté en train de peindre à droite de l'illustration.

admiré la remarquable collection du musée composée d'œuvres du XVIII[e] siècle provenant du Cabinet de physique de Jacques Alexandre César Charles. Ces merveilles, restaurées pour l'occasion, y étaient accompagnées des instruments optiques autorisant leur lecture. On y voit chats, éléphants, tortues, oiseaux, papillons, chiens et personnages humains que révèlent des miroirs d'époque de forme conique, pyramidale ou cylindrique.

Brouillez-moi cette image

Comment s'y prend-on pour fabriquer l'image brouillée que le miroir redresse? Cinq méthodes au moins sont envisageables: l'exécution de l'œuvre à travers le système optique; l'antique procédé de la grille; le système mécanique de dessin spécialisé (pantographe de Scheiner); l'appareil photo; et aujourd'hui, bien sûr, l'analyse mathématique suivie de son exploitation par l'ordinateur.

La première méthode est la plus traditionnelle. Elle consiste simplement à dessiner ou peindre en se plaçant là où il faudra ensuite regarder, en suivant les mouvements de sa main à travers le miroir au lieu de la regarder directement. Publiée pour la première fois en 1638, *La Perspective curieuse* est l'œuvre majeure du mathématicien français Jean-François Nicéron (1613-1646), religieux de l'Ordre des minimes. En 1652, elle fut rééditée par le mathématicien et physicien Gilles Personne de Roberval (1602-1675), qui y joignit les traités d'optique et de catoptrique du philosophe et savant Marin Mersenne (1588-1648), également minime, qui, mourant, lui en avait confié l'impression. Une version latine du texte original parut en 1646. L'ouvrage, dont les planches furent dessinées par Nicéron, se divise en quatre livres: le premier enseigne les principes de l'optique géométrique et de la perspective; le deuxième, l'art de dessiner en perspective sur des surfaces convexes ou toute surface irrégulière; le troisième, qui est aussi le plus connu, traite des anamorphoses; et le dernier, des déformations engendrées par la réfraction. Nicéron s'est particulièrement occupé dans son travail des applications de la perspective et des effets d'optique et c'est lui qui a construit la première anamorphose cylindrique connue.



Anamorphose par étirement d'Édouard VI (1546).

Nicéron a explicité la méthode de la grille, qui simplifie un peu l'exercice et évite le mal de tête provoqué par l'observation prolongée au travers d'un miroir courbe. Elle est à la portée de tous, car elle ne demande une attention soutenue que pendant un temps raisonnable. En plaçant le miroir là où il est prévu de le fixer et en positionnant le regard à l'endroit convenu, vous tenterez de dessiner ce qui doit vous apparaître à travers le miroir comme une grille carrée régulière : commencez par placer les quatre sommets, puis petit à petit, dessinez des lignes horizontales régulièrement espacées et des lignes verticales. Bien sûr, votre dessin en vue directe n'est pas une grille carrée régulière sur la feuille, c'est seulement à travers le miroir qu'elle apparaît ainsi. Une fois la grille constituée par tâtonnements, vous pourrez en la photocopiant l'utiliser pour autant d'anamorphoses que vous le voudrez sans plus risquer de douleurs ophtalmiques (à condition bien sûr de prendre le même miroir de lecture à chaque fois). Avec la grille courbe, faire un dessin anamorphique est assez facile, puisqu'il suffit d'appliquer sur le modèle une grille rectiligne et de reporter le contenu de chaque case de cette grille sur la case correspondante de la grille déformée, cela en tentant de l'étirer continûment pour qu'elle s'adapte à la case déformée. Certains ouvrages vous dispensent même de l'étape fastidieuse de la mise au point de la grille vide en vous donnant le patron de telles grilles *(voir la figure 2)*.

Un RSA optique ?

Il faut se rendre compte que la méthode de la grille peut s'appliquer au miroir que vous choisirez et qu'elle vous permet donc de faire des anamorphoses personnelles que vous seul déchiffrerez. Contrairement à la construction de la grille à partir du miroir, passer de la grille au miroir n'est pas facile : on a donc un exemple (élémentaire et sans doute assez peu robuste) de code cryptographique à clef publique analogue au fameux RSA (de Rivest, Shamir et Adleman) utilisé massivement sur Internet aujourd'hui. La clef publique que vous communiquerez à vos éventuels correspondants est la grille déformée que vous avez tirée de votre miroir personnel. La clef privée que vous seul possédez est le miroir cabossé que vous avez adopté. Vous n'en communiquerez la forme à personne, et elle vous permettra de déchiffrer les images que vos correspondants vous feront parvenir à chaque fois qu'ils souhaiteront vous transmettre un message sous la forme d'une image brouillée.

La troisième méthode pour réaliser des figures anamorphiques n'est valable que pour certains miroirs dont l'étude mathématique a conduit à un procédé de construction mécanique. C'est le cas pour l'anamorphose à miroir conique dont le pantographe de Scheiner de 1605 – destiné à l'origine à la réalisation de dessins homothétiques – judicieusement adapté permet mécaniquement de composer les anamorphoses pour miroir conique.

La quatrième méthode pour créer des anamorphoses consiste à exploiter le principe de la réversibilité du trajet de la lumière en s'aidant d'un appareil photographique. La technique, assez délicate à cause des problèmes d'exposition inégale des diverses parties de l'image déformée, a été décrite dans *Pour la Science* il y a quelques années (voir Jearl Walker, *Expériences d'amateur*, octobre 1981, pages 112-118). Une application pratique de l'anamorphose conique avec appareil photo a été proposée récemment pour obtenir des vues panoramiques totales – c'est-à-dire photographiant tout dans un champ de 360° autour de soi. Le procédé demande un miroir conique (facile à fabriquer), un appareil photo ordinaire et un petit programme.

La dernière méthode pour créer des anamorphoses associe mathématiques et informatique. L'analyse de la réflexion sur le miroir et de l'image virtuelle que reçoit le spectateur conduit à des formules que l'on peut exploiter pour écrire un programme transformant une photo normale donnée en entrée, en une image anamorphique déchiffrable par le miroir de son choix *(voir la bibliographie à la fin du livre)*.



L'anamorphose par étirement de portraits de Charles V, Ferdinand d'Autriche, du pape Paul III et de François 1er sont cachés dans ce paysage... un peu louche *(en haut)*, peint par Erhard Schon (1535), un élève de Dürer. L'anamorphose dessinée par Sam Loyd (1841-1911) expose un problème mathématique et représente de surcroît la figure de Washington stéganographiée « à la Holbein » dans le tronc de l'arbre *(en bas)*. Sam Loyd a été un des plus grands créateurs d'énigmes mathématiques au monde et son imagination était si fertile qu'il insérait des puzzles dans les illustrations de ses énigmes !

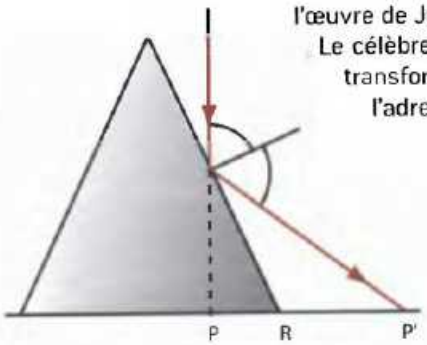
Quintessence de l'anamorphose

Les anamorphoses par appareils photos ou par programmes n'ont pas découragé les artistes contemporains de poursuivre leurs recherches et les ont conduits à des œuvres qu'aucun système informatique sans doute n'égalera jamais. Nous nous contenterons de mentionner deux artistes de l'anamorphose parmi ceux qui poursuivent l'exploration des labyrinthes de l'optique amusante.

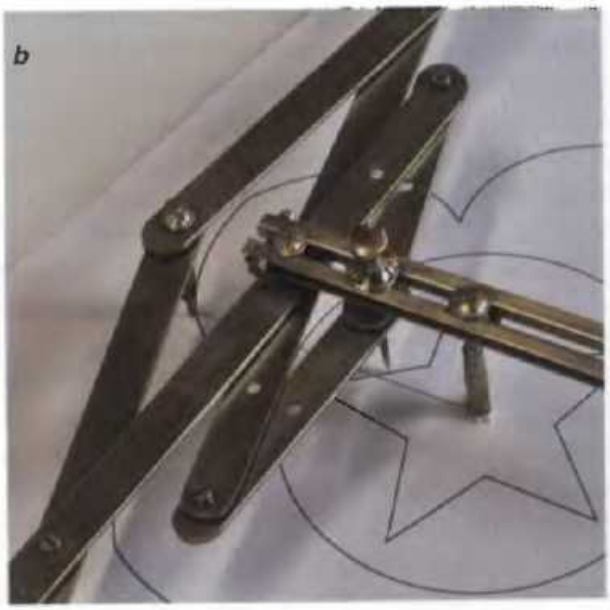
Istvan Orosz, né en Hongrie en 1951, a appris le dessin à l'Université des Arts appliqués de Budapest. Il a travaillé à la réalisation d'affiches pour le théâtre et le cinéma et a participé au mouvement hongrois en faveur de la démocratie en réalisant parfois des dessins politiques. Son goût pour les jeux optiques a fait de lui le maître incontestable de l'anamorphose plane cachée. Celle-ci, pratiquée dès le XVIe siècle, consiste à offrir au regard du spectateur une image qui représente quelque chose et dont on ne soupçonne pas qu'elle cache une autre image.

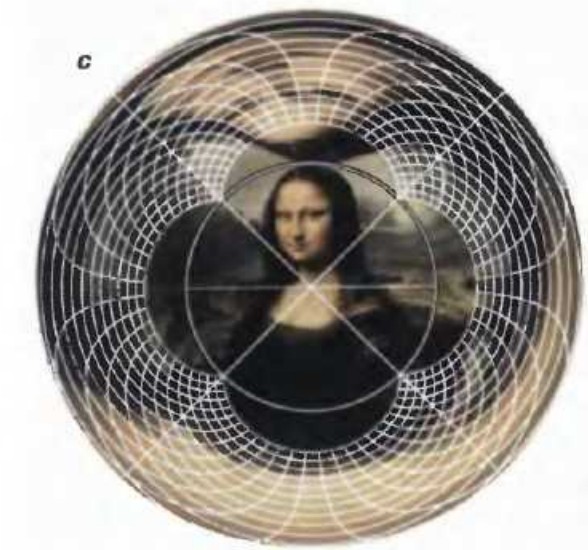
Images de parapluie à travers un miroir conique *(a)*. Pantographe de Scheiner inventé en 1605 *(b)*. À l'origine destiné à tracer mécaniquement des homothéties, cet appareil a été adapté par Michel Paré dans les années 1970 pour réaliser des anamorphoses coniques avec l'œil à l'infini. L'idée du procédé vient de ce que pour un miroir conique les points P et P' vérifient RP = *k* RP' [*k* constante]. Le pantographe représenté sur la figure *b* est l'œuvre de Jean-Jacques Gabriel.

Le célèbre tableau de Léonard de Vinci, *La Joconde*, avec, superposée, la grille de transformation *(c)*, a été obtenu par le programme *Anamorph me* qu'on trouve à l'adresse : http://www.anamorphosis.com











Alors que les anamorphoses cachées des siècles précédents sont soit très partielles (exemple : le tableau *Les ambassadeurs de Holbein*), soit assez peu convaincantes (exemple : le paysage réalisé par Erhard Schon en 1535 où, en oblique, on aperçoit quatre portraits), les anamorphoses cachées de Orosz sont véritablement étonnantes. Sans être prévenu qu'un second dessin est présent dans celui que vous avez sous les yeux, vous ne le devinerez sans doute jamais.

Orosz a ainsi proposé la représentation d'un paysage de *L'île mystérieuse de Jules Verne* dominé par une pleine lune. Si vous placez un miroir cylindrique sur la lune et regardez à travers, le paysage déformé devient un portrait de Jules Verne. D'autres anamorphoses du même type font surgir de manière inopinée le buste d'Homère d'une mer tempétueuse, une tête du graveur hollandais Maurits Escher d'un jardin, un Einstein d'une table de travail couverte de papiers divers, une tête de Minotaure d'un théâtre antique.

Ces œuvres sont des prolongements remarquables des procédés d'anamorphoses utilisés depuis cinq siècles et dont les déclinaisons et variantes semblent n'avoir aucune limite dans l'esprit de quelques artistes géniaux.





CHAPITRE 2

Géométrie

La géométrie des lacets, des pavages, des assemblages de dominos, du découpage d'un carré ou des formes tridimensionnelles est l'occasion de se poser toute une série de questions amusantes. Leur résolution conduit parfois à de très intéressantes énigmes où l'esprit ludique doit s'associer à l'esprit logique pour avancer et accéder à l'infinie satisfaction que donne la résolution d'une question qu'on croyait impossible à résoudre.

Persistance de la symétrie (2009). Sur cette image de Francesco de Comité, les points de convergence des tiges métalliques sont les sommets d'un icosaèdre.

La révolution des œillets

Depuis 1992, une multitude de résultats mathématiques vous aident à choisir, parmi des possibilités dénombrées de laçages, le plus court, le plus long, le plus solide ou le plus beau...

Les mathématiciens aiment argumenter de l'utilité imprévisible de leurs recherches : il est vrai que, par le passé, des applications inattendues de leurs résultats ont été découvertes dans toutes sortes de domaines (souvent bien après leur mise au point). Il est tout aussi patent que les mathématiciens trichent parfois un peu et extraient des problèmes de situations où personne ne se pose la moindre question ; ils développent ensuite des théories élaborées en réponse à ces interrogations qu'eux seuls formulent, mais qui – insistent-ils –, seront disponibles à tous pour l'éternité, ce qui donnera le temps d'en trouver des applications.

L'exemple du laçage des chaussures est à classer dans cette catégorie de recherches mathématiques d'utilité improbable : avant les travaux menés en 1992 par John Halton, très peu d'attention avait été portée aux laçages de chaussures que tout le monde considérait comme triviaux et sans intérêt scientifique. Depuis, plusieurs chercheurs ont tenté d'y voir clair et ont élaboré une théorie des laçages de chaussures qui envisage : *(a)* les différentes contraintes qu'il est raisonnable de s'imposer quand on veut enfiler un lacet



Laçages. Deux paramètres du laçage (1) sont la distance horizontale entre les séries d'œillets (par convention, $l = 1$) et la distance verticale entre deux œillets, h. Sur la figure, le laçage 2*a* est incorrect, car aucun des deux segments qui se rejoignent sur l'œillet rouge ne va dans la série opposée d'œillets. En revanche, le laçage 2*b* est correct. Le laçage en croix (3), nommé sans vergogne par nos amis d'Outre-atlantique laçage américain (alors que les Grecs le pratiquaient déjà et ils n'étaient sans doute pas les premiers) est un laçage dense : les deux bouts qui arrivent à un œillet repartent toujours vers la série d'œillets située en face. C'est aussi un laçage simple : si on suit le lacet, il descend, puis remonte en ne changeant de sens vertical qu'en haut ou en bas. Le laçage en croix n'est pas un laçage droit (par définition il faudrait que tous les segments horizontaux soient présents, or il n'y en a aucun, ni évidemment un laçage super-droit où tous les segments sont horizontaux ou verticaux) et il appartient donc à la catégorie 6 *(voir la figure 2)*. Le laçage en étoile (5) est dense, simple et droit (tous les segments horizontaux sont

de chaussure ; *(b)* le nombre total de façons de réaliser ces laçages, classés en familles mathématiquement définies ; *(c)* les laçages qui dans chaque famille sont les plus courts, les plus longs, les plus solides ou les plus fragiles et le calcul de ce qu'on gagne ou perd à utiliser les uns plutôt que les autres.

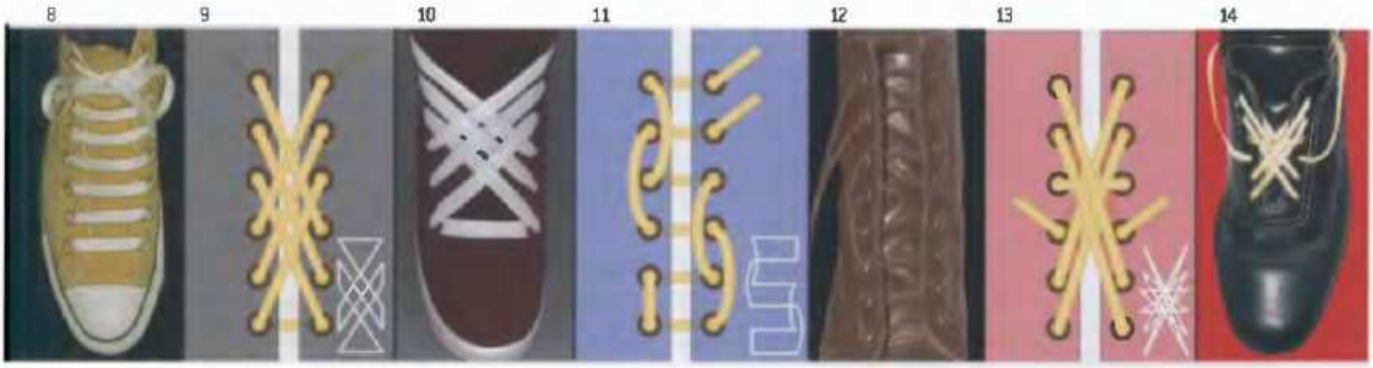
Le remarquable livre *The Shoelace Book* de Burkard Polster paru en 2006 fait le point sur ces questions et c'est lui qui va nous guider dans ce voyage au pays des œillets.

Le mathématicien commence par définir une chaussure mathématique d'ordre n (n entier) : c'est un ensemble de $2n$ points – les œillets – situés sur deux verticales parallèles, n points espacés régulièrement et distants de h sur l'une et n autres placés en vis-à-vis sur l'autre droite, placée par convention à une unité de distance.

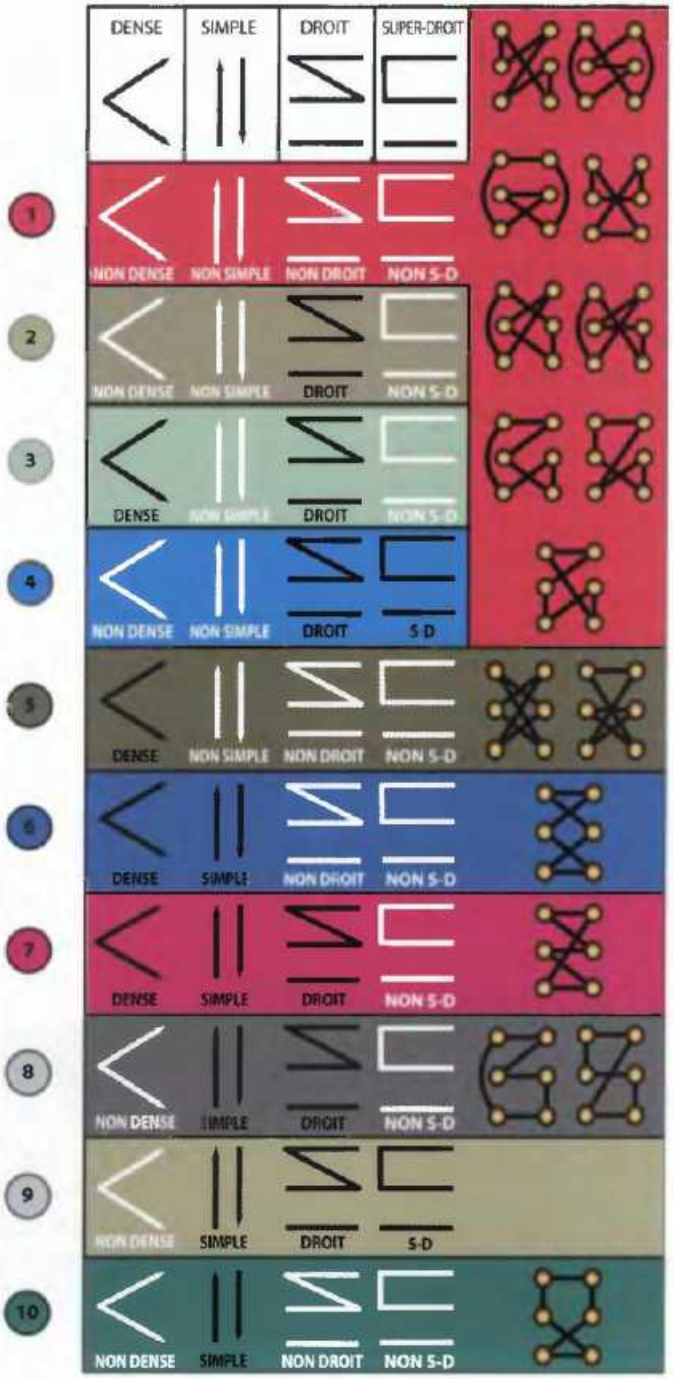
Un laçage d'ordre n est alors un chemin, composé de $2n$ segments de droite, passant une fois et une seule par chacun des $2n$ œillets et revenant à son point de départ. Comme la fonction d'un laçage est de maintenir attachés deux tissus ou deux morceaux de cuir, on impose que chaque œillet soit utile : tous les œillets sont utilisés et chaque œillet d'une série doit être relié à au moins un œillet de l'autre série (au moins un des deux segments qui se rejoignent à un œillet le rattache à la seconde série d'œillets). Ainsi le laçage *2a* est incorrect, le laçage *2b* est correct *(voir la figure 1)*.

Les familles de laçages

On considère plusieurs familles de laçages selon qu'on est plus ou moins exigeant sur l'efficacité du laçage ou l'esthétique de sa chaussure mathématique. Quelques exemples de laçages sont indiqués sur la figure 1. Notons que le laçage en étoile est aussi nommé collet européen et que le laçage zigzag a été aussi nommé gavage. Voici les définitions des familles sur lesquelles nous allons porter notre attention.



présents). C'est donc un laçage de la catégorie 7 tout comme le laçage en zigzag (6) dense, simple et droit, mais pas super-droit. Le laçage en zigsag (avec un s) est simple, droit, mais n'est ni dense ni super-droit (il n'est possible que si le nombre d'œillets de chaque série est impair) : il est de la catégorie 8. Ces trois derniers laçages (5, 6, 7) peuvent être réalisés de façon à produire le même effet en surface. Le laçage en réseau (9) n'est ni dense (certains segments joignent deux œillets de la même série) ni simple, ni droit : il est de la catégorie 1, mais le résultat est attrayant. Le laçage en serpent (11) est bien un laçage correct (car de chaque œillet il y a bien un segment qui part vers la série d'œillets située en face), mais il n'est pas dense. En revanche, il est simple, droit et même super-droit (tous les segments sont horizontaux ou verticaux), soit un laçage de la catégorie 9. Le laçage démoniaque (13) est dense, mais n'est ni simple (le trajet du lacet monte puis descend puis monte un grand nombre de fois) ni droit (tous les segments horizontaux ne sont pas présents) : il appartient à la catégorie 5.



Les dix types de laçages en fonction de leurs propriétés : denses, simples, droits, super-droits tels que définis sur la figure 1. Ici, noir signifie la présence de la propriété, blanc signifie son absence. On obtient ainsi des laçages (1) non denses, non simples, non droits ; (2) non denses, non simples, droits, non super-droits ; (3) denses, non simples, droits, non super droits ; (4) non denses, non simples, droits, super-droits ; (5) denses, non simples, non droits, non super droits ; (6) denses, simples, non droits, non super droits ; (7) denses, simples, droits, non super-droits ; (8) non denses, simples, droits, non super-droits ; (9) non denses, simples, droits, super-droits ; (10) non denses, simples, non droits, super-droits. On a classé tous les laçages d'une chaussure mathématique à 6 œillets selon leur appartenance aux types, quand il y a en un. C'est le type 1 qui a le plus de laçages – 9 – et les types 2, 3, 4, 9 n'en ont pas. Le nombre de laçages différents est 42, mais nous n'avons pas représenté les laçages qui se déduisent de ceux dessinés en effectuant des symétries.

Laçages denses : les deux segments qui se rejoignent à un œillet partent toujours vers des œillets de la série d'en face. Dans ces laçages, chaque œillet est doublement utile au serrage des deux parties de la chaussure.

Laçages simples : en partant d'un œillet en haut de la chaussure et en suivant le chemin du lacet, on va dans un premier temps de haut en bas, puis arrivé en bas, dans un second temps, on remonte sans jamais revenir en arrière lors de ces mouvements verticaux. Autrement dit, le laçage ne fait pas de mouvements verticaux inutiles.

Laçages droits : toutes les lignes horizontales sont présentes, ce qui donne un laçage élégant.

Laçages super-droits : laçages droits dont les segments non horizontaux sont tous verticaux. Il n'y a plus aucun segment oblique de lacet. Pour qu'un laçage super-droit d'ordre n existe, il est nécessaire que n soit un nombre pair.

En se limitant à ces définitions, l'espace de tous les laçages possibles est divisé en dix catégories disjointes de laçages représentées sur la figure 2. Puisqu'il y a quatre propriétés prises en compte, il pouvait a priori exister 16 catégories de laçages ($16 = 2^4$). Le fait que tout laçage super-droit soit par définition un laçage droit et qu'un laçage super-droit ne puisse être dense (cela est évident) réduit le nombre de catégories à 10. Un petit jeu consiste à trouver un exemple de laçages dans chacune de ces dix catégories... et à le réaliser sur une chaussure !

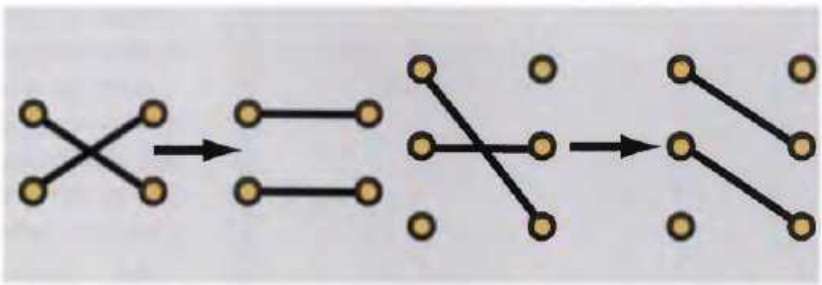
Le problème de la longueur d'un lacet est celui qui a été étudié le plus tôt : il correspond à la question angoissante qu'on se pose, quand pressé le matin un bout de lacet se détache brusquement... et qu'il faut se débrouiller avec la longueur restante. La question est un cas particulier du problème du voyageur de commerce : des villes sont données sur une carte,

quel est le trajet le plus court possible passant par chaque ville, une et une seule fois ? Ce problème est algorithmiquement difficile et on pense qu'il n'en existe pas de solution générale efficace (on dit que le problème du voyageur de commerce est NP-complet). Heureusement, le cas particulier qui nous intéresse le matin dans l'urgence est relativement facile.

Longueur des lacets

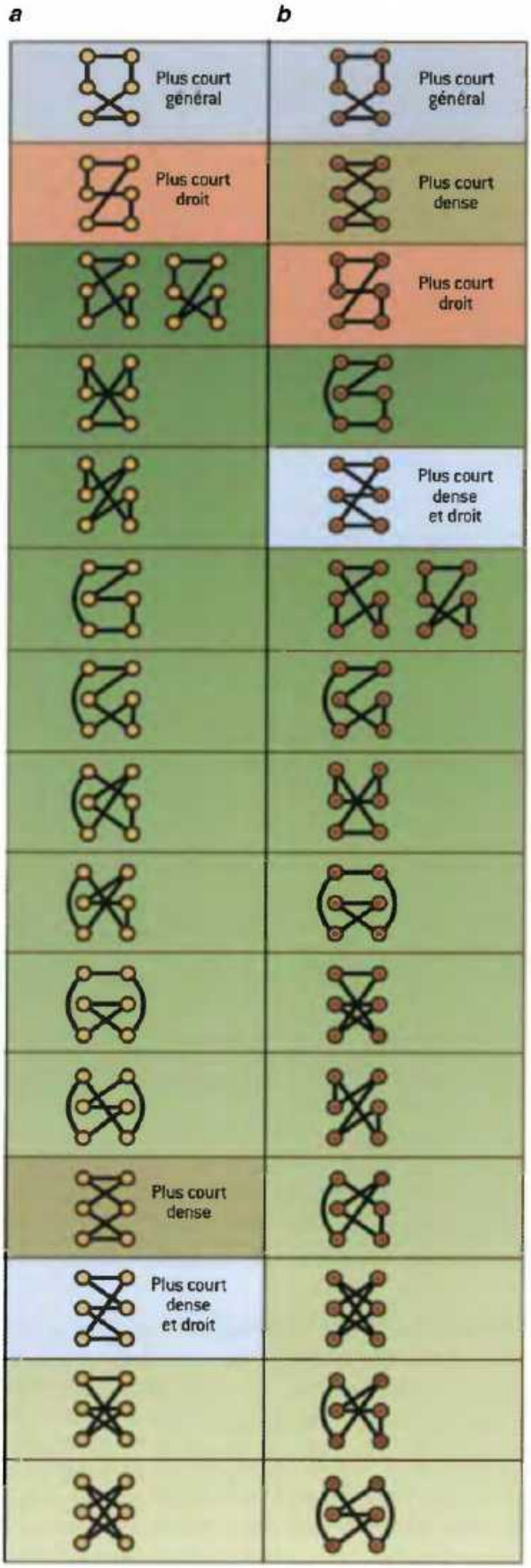
Voici les principaux résultats obtenus. Si vous n'imposez aucune contrainte à vos laçages, en dehors bien sûr de celle d'être des laçages corrects, alors le plus court laçage est le laçage en nœud papillon *(voir la figure 4)*. Si vous ne voulez prendre en considération que les laçages denses – où le lacet va sans cesse de droite à gauche – alors le laçage le plus court est le laçage en croix. Si, par souci d'élégance, vous ne vous intéressez qu'aux laçages droits, tous les segments horizontaux doivent être présents, alors le laçage en zigsag (avec un *s*) sera le plus économique si n est impair, et ce sera le laçage en serpent si n est pair. Le laçage en étoile est celui que vous devez adopter si vous voulez le plus court des laçages à la fois dense et droit (ou dense, droit et simple). Tous ces résultats et quelques autres sont résumés sur la figure 4.

La démonstration de ces résultats occupe une douzaine de pages du livre de B. Polster et ne fait intervenir que des mathématiques connues depuis longtemps, mais qui n'avaient jamais été appliquées à ce problème concret avant 1992. L'une des idées utilisées par ces démonstrations est la définition d'opérations élémentaires transformant un laçage en un autre plus court. Si par exemple vous changez un laçage de façon à remplacer certains éléments du parcours par d'autres éléments moins longs *(voir le schéma ci-contre)*, vous obtenez un laçage dont la longueur totale est plus petite. Par une succession de tels raccourcissements, on obtient les laçages les plus courts. Si, de plus, tous les laçages conduisent à un même laçage par raccourcissements successifs, c'est que ce laçage final commun est le plus court dans sa catégorie.



À la place du laçage le plus court, vous pouvez rechercher le plus long (car votre réserve de lacets courts est épuisée et qu'il ne vous reste plus que ceux destinés aux chaussures hautes). La figure 5 vous indique ce que vous devez faire en fonction de la catégorie de laçages qui vous intéresse.

La force de maintien d'un lacet dépend de la présence de segments obliques. Ceux-ci, pour une tension exercée sur le lacet, serrent moins les deux bouts à rapprocher que les segments horizontaux (la force de serrage est la projection de la tension sur l'horizontale). Un laçage efficace doit donc comporter des segments aussi peu obliques que possible et il n'est donc pas étonnant que le laçage général le plus fort soit le laçage en croix dont les obliques ne sont pas fortes et le laçage en zigzag selon que h (l'écart entre deux œillets d'une même colonne) est plus petit que 1 (l'écart entre les deux séries d'œillets) ou plus grand que 1.



Quelle que soit la catégorie, les contraintes imposées laissent généralement plusieurs choix de laçage, dont le nombre dépend du nombre d'œillets de la chaussure mathématique à laquelle on s'intéresse.

Le décompte des différents laçages peut s'obtenir en opérant une recherche soigneuse « à la main », puis, quand n augmente, en s'aidant de programmes. On trouve :

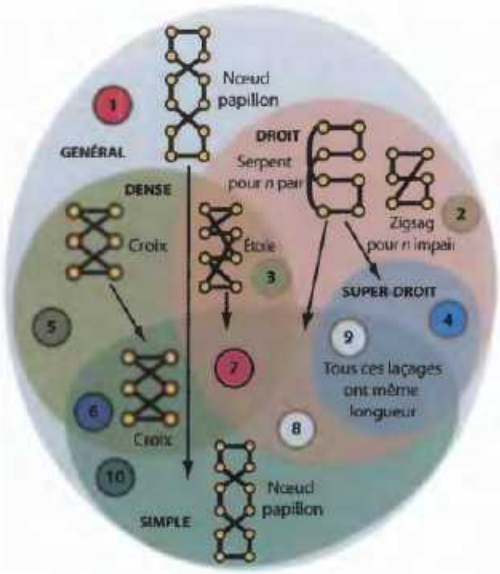
n	2	3	4	5	6	7	8
Dense	1	6	72	1440	43200	1814400	10160400
Simple	2	11	57	302	1605	8521	45250
Droit	2	8	48	384	3840	46080	645120
Général	3	42	1080	51840	3758400	382838400	52733721600

Dans ce tableau, deux laçages qui se déduisent l'un de l'autre par une symétrie sont comptés deux fois. On justifie cette option par le fait que le haut et le bas d'une chaussure ne sont pas équivalents (on doit donc distinguer deux laçages se déduisant l'un de l'autre par une symétrie d'axe horizontal). De plus, une chaussure droite se distingue d'une chaussure gauche, on doit différencier les laçages qui s'obtiennent l'un de l'autre par symétrie verticale.

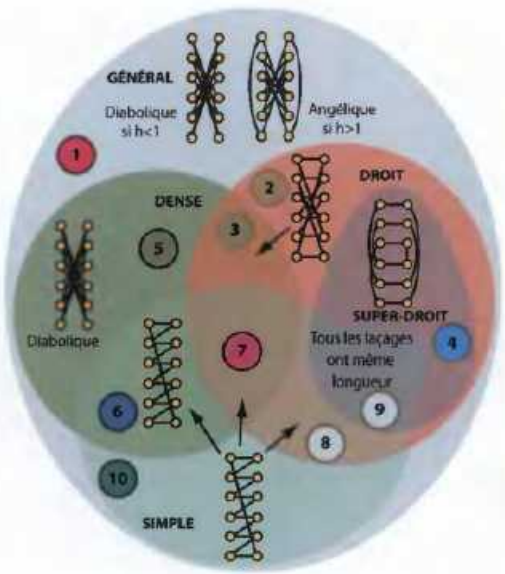
Lorsque l'on élimine les laçages symétriques, on trouve par exemple que les 42 laçages généraux d'une chaussure à 6 œillets n'en donnent que 16 différents et que les 57 laçages simples d'une chaussure à 8 œillets se réduisent à 21.

Le raisonnement évite la pratique de longues énumérations ou l'écriture, parfois fastidieuse, de programmes. Il se trouve que le décompte mathématique des laçages n'est pas un problème très simple et, pour certaines catégories de laçages, il est même franchement difficile. La figure 7 donne les résultats complets obtenus par les mathématiciens et

Longueur des laçages de la chaussure à six œillets, du plus court au plus long. Deux cas sont à distinguer : *(a)* les chaussures où l'écart h entre deux œillets est plus petit que l'écart entre les deux séries d'œillets (par convention égal à 1), et *(b)* les chaussures où h est plus grand que 1.



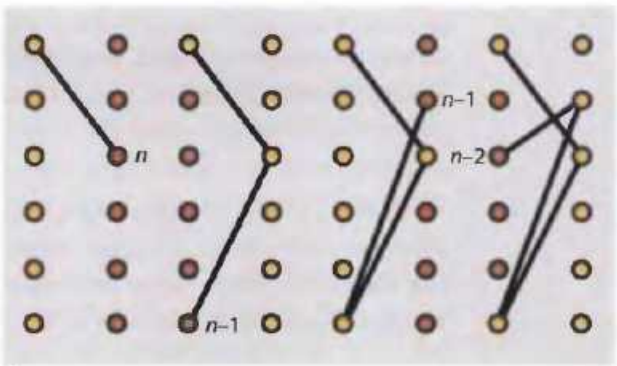
Laçages les plus courts. Avec les conventions sur les dix familles en fonction de quatre qualités (dense, simple, droit et superdroit) indiquées sur la figure 2, voici la solution générale au problème des plus courts laçages. Le plus court laçage droit dépend de la parité du nombre d'œillets sur un côté de la chaussure.



Les laçages les plus longs. Le laçage diabolique est le plus long si l'écart h entre deux œillets de la même colonne vérifie $h<1$, et ce sera le laçage angélique si $h>1$, quoique dans ce cas l'affirmation ne soit qu'une conjecture en attente de démonstration. On remarquera que parmi les laçages simples, le laçage en zigzag est le plus long.

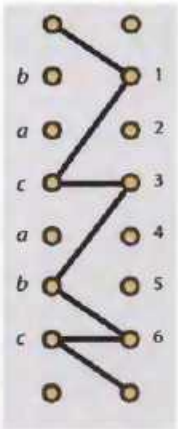
détaillés dans le livre de B. Polster. Bien sûr, l'avantage du raisonnement conduisant à une formule est qu'elle donne d'un coup la réponse pour un nombre d'œillets quelconque.

Indiquons le raisonnement dans deux cas pas trop compliqués et intéressants.

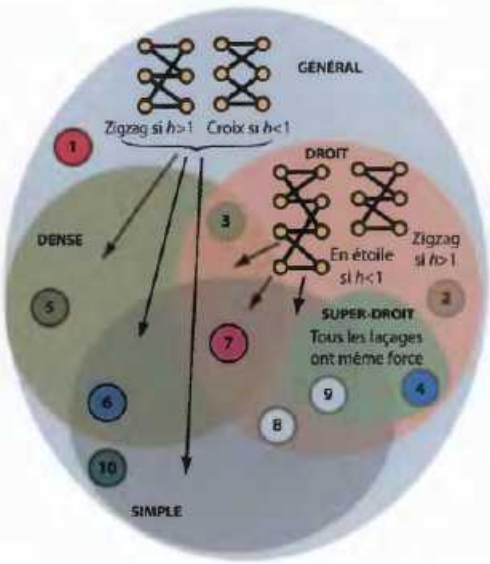


Laçages denses

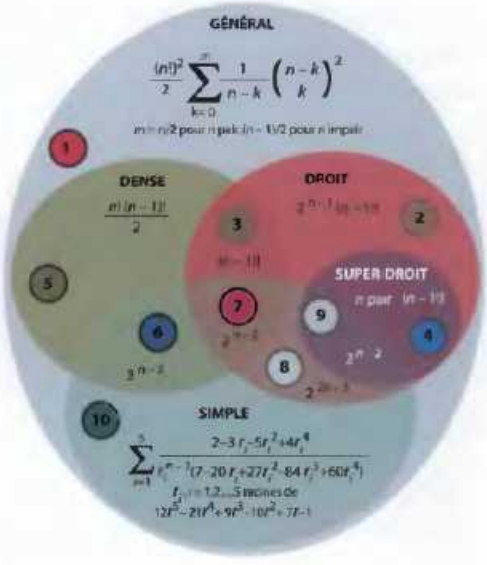
Le nombre de laçages denses d'une chaussure d'ordre n est $n!\,(n-1)!/2$. En effet, partons de l'œillet gauche en haut de la chaussure et notons le nombre de choix possibles à chaque étape de l'opération nécessaire à la réalisation d'un laçage dense (c'est-à-dire qui passe alternativement de droite à gauche et de gauche à droite).



Le second œillet doit être choisi sur la colonne de droite. On dispose pour cela de n choix possibles (car aucun des œillets n'est occupé par le lacet). Le troisième œillet doit être choisi sur la colonne de gauche, mais doit être différent de l'œillet de départ (sinon le laçage serait terminé et ne serait donc pas correct): $n-1$ choix possibles. Le quatrième œillet doit, à nouveau, être choisi sur la colonne de droite, cette fois en évitant celui qui a été choisi à l'étape 2: $n-1$ choix possibles. Le cinquième œillet doit être choisi sur la colonne de gauche, cette fois en évitant les deux œillets déjà occupés de cette colonne: $n-2$ choix possibles, etc.



Les laçages les plus forts. Un laçage maintient serrées les deux parties de la chaussure. Pour mesurer la force de serrage d'un laçage, on considère que la tension le long du lacet est constante et on calcule la force de « rapprochement » qui résulte de la forme du laçage (cette force est la projection de la tension du lacet sur l'horizontale). Quand tous les laçages sont en compétition, le laçage en croix est le plus fort si $h<1$, alors que c'est le laçage en zigzag si $h>1$. Si on ne s'intéresse qu'aux laçages droits, le laçage en étoile est le plus fort si $h<1$, et c'est toujours le laçage en zigzag si $h>1$.



Nombre de laçages. Ce schéma tiré du livre de B. Polster indique pour toutes les catégories de laçages combien exactement il y en a en fonction de n. Le tableau doit être lu de la façon suivante : en dessous du mot dense, il y a le nombre de laçages denses et non pas le nombre de laçages de la catégorie 5 des laçages denses, non simples, non droits. Pour connaître le nombre de laçages de la catégorie 5, il faut procéder par soustractions des sous-ensembles. Catégorie 7 : 2^{n-2}. Catégorie 6 : $3^{n-2} - 2^{n-2}$. Catégorie 3 : $(n-1)! - 2^{n-2}$, donc catégorie 5 : $n!\,(n-1)!/2 - (3^{n-2} - 2^{n-2}) - ((n-1)! - 2^{n-2}) - 2^{n-2}$.

Soit $n\,(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)(n-3)(n-3)\ldots 2.2 = n!\,(n-1)!$ choix différents à effectuer pour réaliser un laçage dense. Cependant, en procédant de cette façon, on obtiendra deux fois chaque laçage dense, car il y a deux sens de parcours pour chaque laçage. Le résultat final est donc: $n!\,(n-1)!/2$.

Laçages denses et simples

Le nombre de laçages à la fois denses et simples est 3^{n-2}. Pour le montrer, remarquons d'abord que pour connaître un laçage dense et simple, il est nécessaire et suffisant de connaître son trajet de l'œillet en haut à gauche vers l'œillet en bas: quand le laçage remonte, il occupe tous les œillets vides en alternant un œillet à gauche, un œillet à droite, ce qui ne laisse aucun choix possible. Il suffit donc de compter le nombre de chemins descendants alternant œillet droit et œillet gauche. Pour faire ce décompte, à chaque chemin descendant alternant, on associe une suite de $n-2$ symboles a, b et c définie de la façon suivante. On numérote les lignes horizontales correspondant aux œillets, sauf la première et la dernière (il y a donc $n-2$ lignes numérotées). Lorsque le lacet franchit la ligne numéro i, trois cas sont possibles qui déterminent la lettre en position i de notre suite:

(a) le lacet ne passe par aucun des deux œillets correspondants (sur la même ligne); *(b)* le lacet passe par un des œillets correspondants; *(c)* le lacet passe par les deux œillets correspondants.
Dans notre exemple, la suite associée au chemin descendant est *b a c a b c*.

À chaque laçage d'ordre n, dense et simple, correspond une suite de a, b et c de longueur $n - 2$, et réciproquement, à chaque suite de longueur $n - 2$ de a, b et c est associé un unique laçage d'ordre n, dense et simple. Il y a donc autant de laçages d'ordre n denses et simples que de suites de a, b et c de longueur $n - 2$, c'est-à-dire 3^{n-2} laçages.



D'autres livres sur les laçages?

Malgré cette conséquente moisson de résultats, le livre de B. Polster pourrait bien ne pas être le dernier sur les laçages de chaussures. En effet, outre certaines conjectures non démontrées que signale le livre (en particulier à propos des laçages les plus longs), de nombreux problèmes de laçages ne sont pour l'instant qu'incomplètement explorés. Par exemple, à chaque œillet, il y a deux façons de placer le lacet selon le bout qui passera dessus et le résultat esthétique d'un laçage dépend beaucoup de ce choix. Une autre source de problèmes provient de la possibilité d'utiliser deux lacets par chaussures, voire plus. On peut aussi tenir compte du croisement des lacets (quand deux lacets se croisent, il faut choisir celui qu'on fait passer au-dessus), et de nouveau cela crée des variantes de laçages. L'étude des chaussures moins régulières (aux œillets inégalement espacés, ou placés sur des courbes) que le livre de B. Polster évoque un peu est très loin d'être complète aujourd'hui.

Les mathématiques sont une discipline où l'imagination pour les nouveaux problèmes est sans limite. L'exemple des laçages le montre: dans un siècle, le livre qui fera la synthèse des résultats concernant la chaussure mathématique au lieu des 124 pages de l'ouvrage de B. Polster en fera peut-être plusieurs milliers!

Paver des pavés

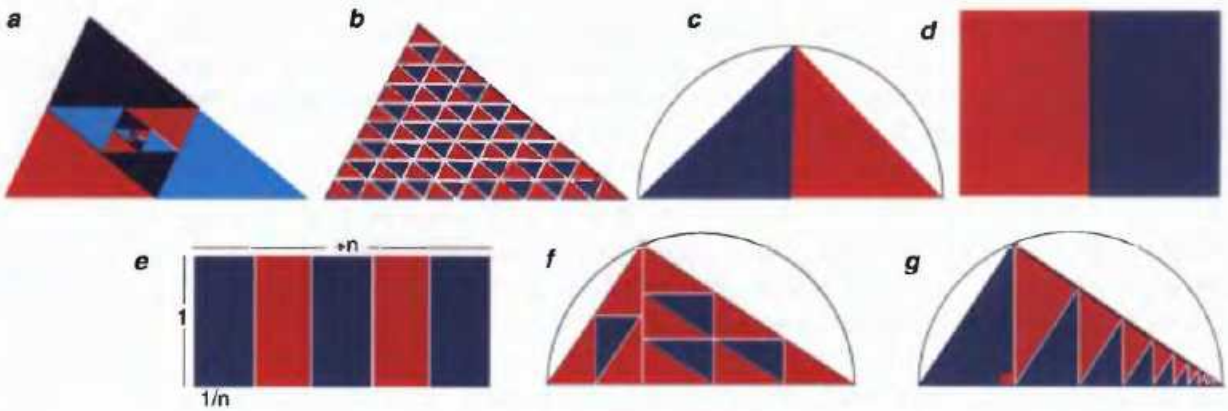
Les fascinants problèmes géométriques posés par les autopavés sont l'objet de recherches assidues.



Demandez à vos amis de partager la figure à gauche ci-contre en quatre figures superposables. Il n'est pas sûr qu'ils trouvent immédiatement La réponse donnée à droite. Et pourtant, elle est facile… après-coup ! Une propriété supplémentaire est que chaque morceau est semblable au tout. Ce genre d'énigme est plaisant, car la géométrie du plan est la plus intuitive et, pour certains, la plus agréable des disciplines mathématiques : on y manipule des objets par la pensée et les résultats expriment des vérités concernant tout être humain.

Le découpage d'une figure en figures semblables plus petites est un domaine de la géométrie du plan où confluent toutes sortes de mathématiques : certains résultats sont énoncés et démontrés à l'aide de petits dessins, d'autres ne peuvent être découverts qu'avec l'aide de l'ordinateur, d'autres encore résultent de techniques mathématiques avancées.

Tout triangle peut être découpé en quatre triangles semblables entre eux qui sont quatre copies à l'échelle 1/2 du triangle de départ : ce découpage s'obtient en joignant les milieux des côtés deux à deux *(figure 1a)*. Plus généralement tout triangle peut être découpé en n^2 triangles semblables au triangle de départ : on dessine 3 réseaux de $n - 1$ lignes régulièrement espacées et parallèles aux côtés *(figure 1b)*. On dira qu'un triangle est un *autopavé* : il peut être pavé par des copies plus petites de lui-même.



1 Autopavage régulier d'un triangle *(a)* quelconque en 4 triangles et continuation du processus. Autopavage régulier en n^2 triangles *(b)* par $n - 1$ parallèles aux côtés. Les jumeaux magiques *(c)* d'un triangle rectangle isocèle et d'un rectangle *(d)* de côtés 1 et $\sqrt{2}$. Autopavage régulier d'un rectangle en n rectangles *(e)*. Autopavage fini *(f)* et infini *(g)* utilisant les propriétés d'un triangle rectangle.



2 Le dragon de Lévy. Sa surface est non nulle et sa frontière (très découpée), de dimension 1,93, est un 2-autopavé.

Les figures du plan susceptibles d'être pavées par des copies plus petites d'elles-mêmes – ces autopavés – sont-elles nombreuses ? Les connaît-on bien ? Sait-on en établir une classification systématique ? En dépit de nombreux travaux, les réponses à ces questions simples et naturelles ne sont pas toutes connues. Le domaine semble d'une richesse inespérée puisqu'en plus des figures de la géométrie classique s'introduisent des fractales (on pouvait y penser car, dans les fractales, la partie est semblable au tout), et que des questions en apparence élémentaires n'y sont pas résolues.

Premières questions

Il y a deux sortes d'autopavés *(a)* ceux pour lesquels les copies utilisées sont de même taille, on les nomme réguliers, et *(b)* ceux où les copies pavantes sont de tailles différentes et qui sont, bien sûr, qualifiés d'irréguliers. Notons que, sauf indication contraire, il est interdit de retourner les pièces des pavages : nous n'acceptons pas les symétries et les pièces doivent se déduire les unes des autres par translation, rotation et homothétie (changement de taille). Pour plus de précision, on désigne parfois le nombre de pavés utilisés dans le découpage : on dira ainsi que tout triangle est un 4-autopavé régulier (et aussi un n^2-autopavé régulier). On envisagera le cas des pavages infinis (des ∞-autopavés) ; ceux-ci – réfléchissez une seconde – sont nécessairement irréguliers. Signalons aussi que les mots *reptile* et *irreptile* sont parfois employés en français et en anglais à la place d'autopavé régulier et d'autopavé irrégulier, et que c'est eux que vous devez utiliser pour faire vos recherches sur Internet.

Pour vous mettre dans le bain, amusez-vous à prouver par le raisonnement ou à l'aide de petits dessins les affirmations suivantes : certaines réponses sont données sur la figure 1.

a. Tout triangle rectangle est un 2-autopavé, un 3-autopavé, un 4-autopavé, etc.

b. Si une figure est un n-autopavé (n entier plus grand que 1) alors c'est aussi un $(2n-1)$- autopavé (un 5-autopavé est donc nécessairement un 9-autopavé).

c. Si une figure est un n-autopavé régulier (n entier plus grand que 1) alors c'est aussi un n^2-autopavé régulier.

d. Pour tout entier n plus grand que 1, il existe une figure qui est un n-autopavé régulier.

e. Tout triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit ont pour longueurs a et b (a et b entiers) est un $(a^2 + b^2)$-autopavé régulier. Le triangle rectangle de côtés 2, 3, $\sqrt{13}$ est, par exemple, un 13-autopavé régulier.

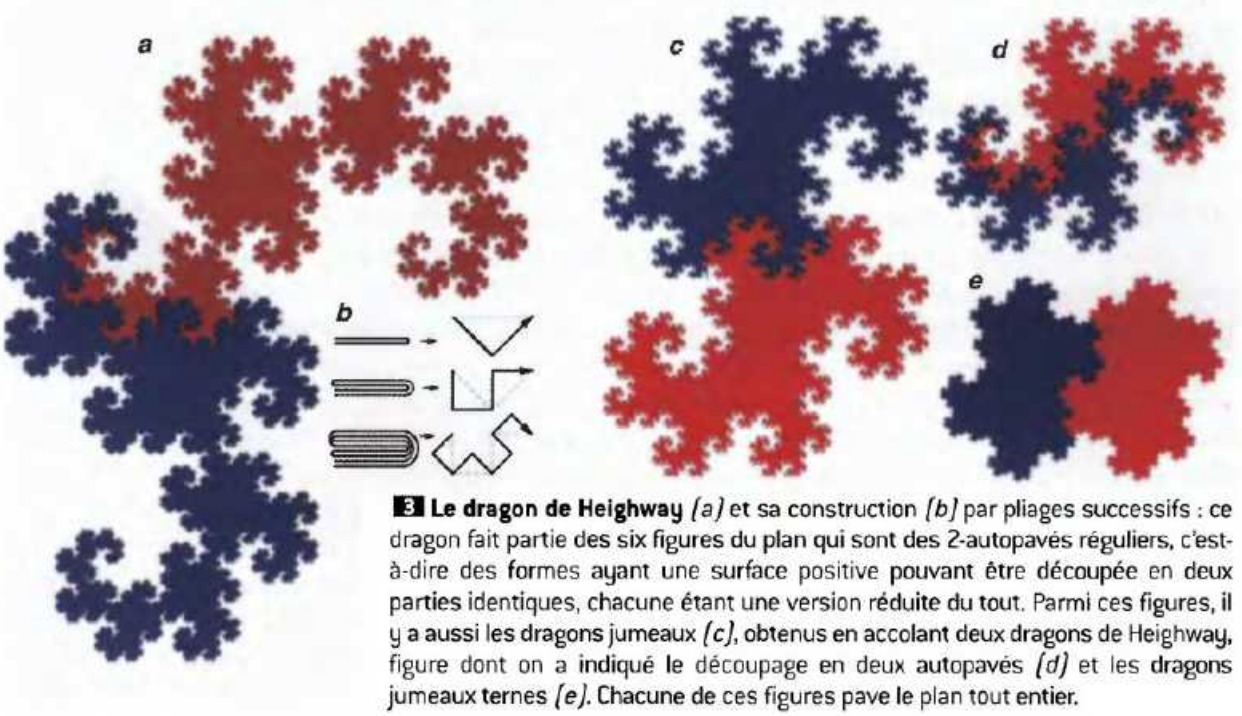
Le problème des autopavés illustre magnifiquement l'idée que l'infini est souvent une facilité que se donne le mathématicien quand il est gêné avec le fini : incapable de rester dans le vrai du fini, le théoricien se console avec l'infini.

En effet, la question de savoir si une forme donnée est un autopavé est très facilement résolue lorsqu'on accepte les autopavages infinis : toute forme raisonnable pouvant servir de pavé *(voir la définition mathématique de pavé dans l'encadré de la page ci-contre)*, même si sa frontière est fractale, et même si elle n'est pas d'un seul tenant, peut être pavée par une infinité de copies d'elle-même. Ces autopavages infinis ne sont d'ailleurs jamais uniques : pour chaque pavé donné, il existe une infinité d'autopavages différents.

Puisque toute forme pouvant servir de pavé est un ∞-autopavé, les choses intéressantes ne commencent que lorsqu'on veut paver une forme avec un nombre fini de copies d'elle-même. Et là, il est clair que tout n'est pas possible : un disque par exemple ne peut pas être pavé par un nombre fini de disques. La première surprise provient du cas le plus simple : les découpages parfaits en deux, c'est-à-dire les 2-autopavés réguliers.

Six, pas un de plus !

Chacun sait qu'il y a cinq solides platoniciens (polyèdres convexes ayant pour faces des polygones réguliers identiques et dont tous les angles sont équivalents) qui sont : *(a)* le tétraèdre régulier (quatre triangles équilatéraux) ; *(b)* le cube (six carrés) ; *(c)* l'octaèdre



3 Le dragon de Heighway *(a)* et sa construction *(b)* par pliages successifs : ce dragon fait partie des six figures du plan qui sont des 2-autopavés réguliers, c'est-à-dire des formes ayant une surface positive pouvant être découpée en deux parties identiques, chacune étant une version réduite du tout. Parmi ces figures, il y a aussi les dragons jumeaux *(c)*, obtenus en accolant deux dragons de Heighway, figure dont on a indiqué le découpage en deux autopavés *(d)* et les dragons jumeaux ternes *(e)*. Chacune de ces figures pave le plan tout entier.

Le théorème du pavage infini : tout pavé est un autopavé

Pour envisager des pavages généraux avec un nombre infini de pavés ou ayant des frontières fractales, nous avons besoin de précision, d'où les définitions suivantes où A désigne un ensemble de points du plan.

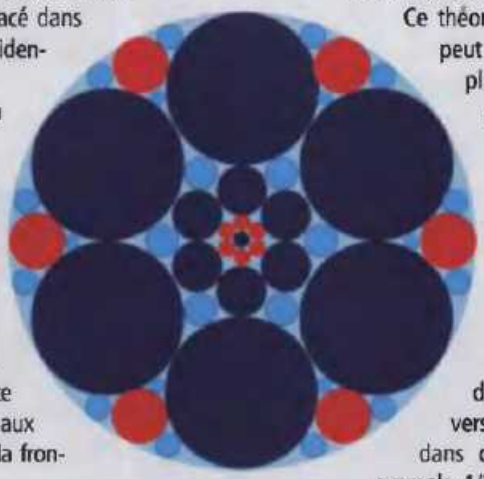
– Un point P du plan est dit sur la frontière de A si tout disque de centre P contient à la fois des points de A et des points n'appartenant pas à A.

– A est dit fermé si tout point de la frontière de A est dans A.

– L'intérieur de A est l'ensemble A auquel on enlève sa frontière.

– On nomme pavé un ensemble A, fermé, de taille bornée (c'est-à-dire pouvant être placé dans un disque) et dont la frontière est identique à la frontière de son intérieur.

Exemples. Une courbe n'est pas un pavé, car d'intérieur vide. Un disque sur lequel on colle un bout de courbe (comme pour dessiner une cerise, voir figure) n'est pas un pavé, car sa frontière est la réunion du périmètre du disque et du segment de courbe, alors que la frontière de son intérieur est le périmètre du disque. C'est pour éviter ce genre d'ensembles qu'on impose aux pavés d'avoir une frontière égale à la frontière de leur intérieur.



Si A et B sont deux pavés, on appelle pavage de A par B une famille (finie ou non) de pavés ayant deux éléments au moins B_0, B_1, B_2,... telle que :

– chaque B_i est semblable à B, c'est-à-dire est obtenu à partir de B par un changement de taille (homothétie), une translation, une rotation ou une composition de ces opérations (parfois on autorisera aussi les symétries, c'est-à-dire les pièces obtenues par retournement de B).

– les B_i recouvrent A, c'est-à-dire : tout point de A est dans l'un des B_i ou sur la frontière de la réunion des B_i ;

– les B_i ne se chevauchent pas : les points communs à deux B_i différents, s'il y en a, sont situés sur leurs frontières.



Théorème du pavage infini : *Si A et B sont deux pavés. Il existe un pavage infini de A par B. En particulier tout pavé A peut être pavé par lui-même, autrement dit tout pavé est un autopavé.*

Ce théorème indique par exemple que l'on peut paver un disque avec des disques plus petits, mais aussi qu'on peut paver un disque avec des flocons de von Koch ou l'inverse. Notons que le théorème reste vrai si on impose aux pavés B_i d'être tous orientés de la même façon (pas de rotation). On peut aussi utiliser plusieurs types de pavés différents en imposant que chacun soit utilisé une infinité de fois dans le pavage de A. On peut imposer que les versions réduites de B ne le soient que dans des rapports fixés à l'avance (par exemple 1/2, 1/4, 1/8,...) pourvu que la suite des rapports de réduction contienne des nombres aussi petits que l'on veut. On démontre que pour chaque couple de pavés donné A et B il y a, non pas un pavage de A par B, mais une infinité de pavages de A par B, et que cette infinité est non dénombrable. La démonstration du théorème consiste à placer une par une les formes réduites de B dans A, en s'arrangeant pour ne jamais oublier aucune partie de surface positive contenue dans A.

régulier (huit triangles équilatéraux) ; *(d)* le dodécaèdre régulier (douze pentagones réguliers) et *(e)* l'icosaèdre régulier (vingt triangles équilatéraux). Il y cinq solides platoniciens, pas un de plus. Même si la démonstration complète qu'aucun autre n'est possible est difficile, chacun perçoit la beauté de ce résultat qui fascinait les Grecs au point qu'ils attribuèrent une importance symbolique à ces 5 formes géométriques parfaites.

Assez étrangement, un résultat d'une beauté équivalente vient d'être découvert par des mathématiciens de la *School of Mathematics* du Georgia Institute of Technology à Atlanta aux États-Unis. Sze-Man Ngai, Victor Sirvent, J. J. P. Veerman et Yang Wang ont établi (à un détail près comme nous allons le voir) qu'il n'existe que six formes géométriques qui soient des 2-autopavés réguliers. Essayez de découvrir vous-même quelques-unes de ces six formes sécables en deux parties identiques semblables au tout.

Le travail des mathématiciens d'Atlanta est assez technique et utilise la théorie des corps de nombres qui trouve là une belle application en géométrie plane. À vrai dire, leur démonstration n'est pas tout à fait complète, car elle s'appuie sur une conjecture dont personne ne

doute de la validité, mais qui pour l'instant n'a pas été prouvée. Cette conjecture affirme que : *Tout n-autopavé régulier est rationnel*, c'est-à-dire est tel que les angles mutuels entre les pavés du découpage sont de la forme $p\pi/q$, où p et q sont des nombres entiers.

Le fait que tous les n-autopavés réguliers (n entier plus grand que 1) connus aujourd'hui soient des autopavés rationnels, suggère fortement que la conjecture soit vraie et donc que la liste des six 2-autopavés réguliers proposée par les chercheurs d'Atlanta est exhaustive. Nous sommes dans la même situation que Platon, qui connaissait les 5 polyèdres réguliers et qui n'avait pas prouvé qu'il n'en existait pas de sixième, mais en était sans doute intimement persuadé.

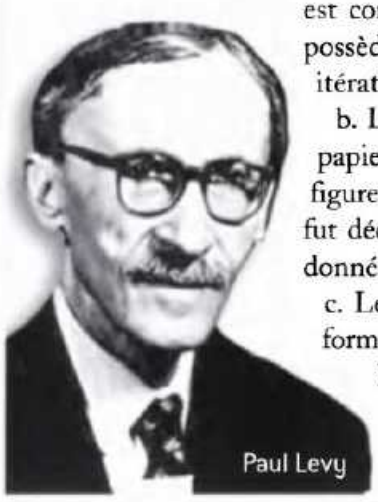
Étant donné la beauté et la simplicité du concept de 2-autopavé régulier, je propose de nommer ces figures des *jumeaux magiques*. Il y a donc 5 solides platoniciens et 6 jumeaux magiques.

Les jumeaux magiques

Par définition, les jumeaux magiques peuvent être découpés en deux parties identiques et semblables toutes deux à la figure de départ. La surface de chaque moitié est donc la moitié de la surface du tout, et la taille des pièces est donc dans un rapport de $\sqrt{2}/2$ avec le tout.

Dans le résultat de Ngai-Sirvent-Veerman-Wang, ce qui étonne le plus c'est l'étrangeté de certains des 6 jumeaux magiques. Parmi les six, deux seulement sont connus de la géométrie classique : le triangle rectangle isocèle, et le rectangle de côtés 1 et $\sqrt{2}$. Notons que ce rectangle est celui qui définit les formats de papier A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. et que c'est justement parce que, coupé en deux, il garde la même forme. Contrairement à ce qu'on croit souvent, il semble que le rectangle esthétiquement le plus intéressant n'est pas celui construit sur le nombre d'or, mais celui-là. Les quatre autres jumeaux magiques sont plus découpés, au point même que leurs frontières sont fractales : la frontière de chacun a une longueur infinie et possède une dimension comprise entre 1 (la dimension habituelle d'une courbe) et 2 (la dimension d'un objet ayant une surface non nulle). Ces 4 formes étaient inconnues il y a un siècle et ont été découvertes progressivement depuis 1938. Elles portent des noms de dragon. En voici la liste.

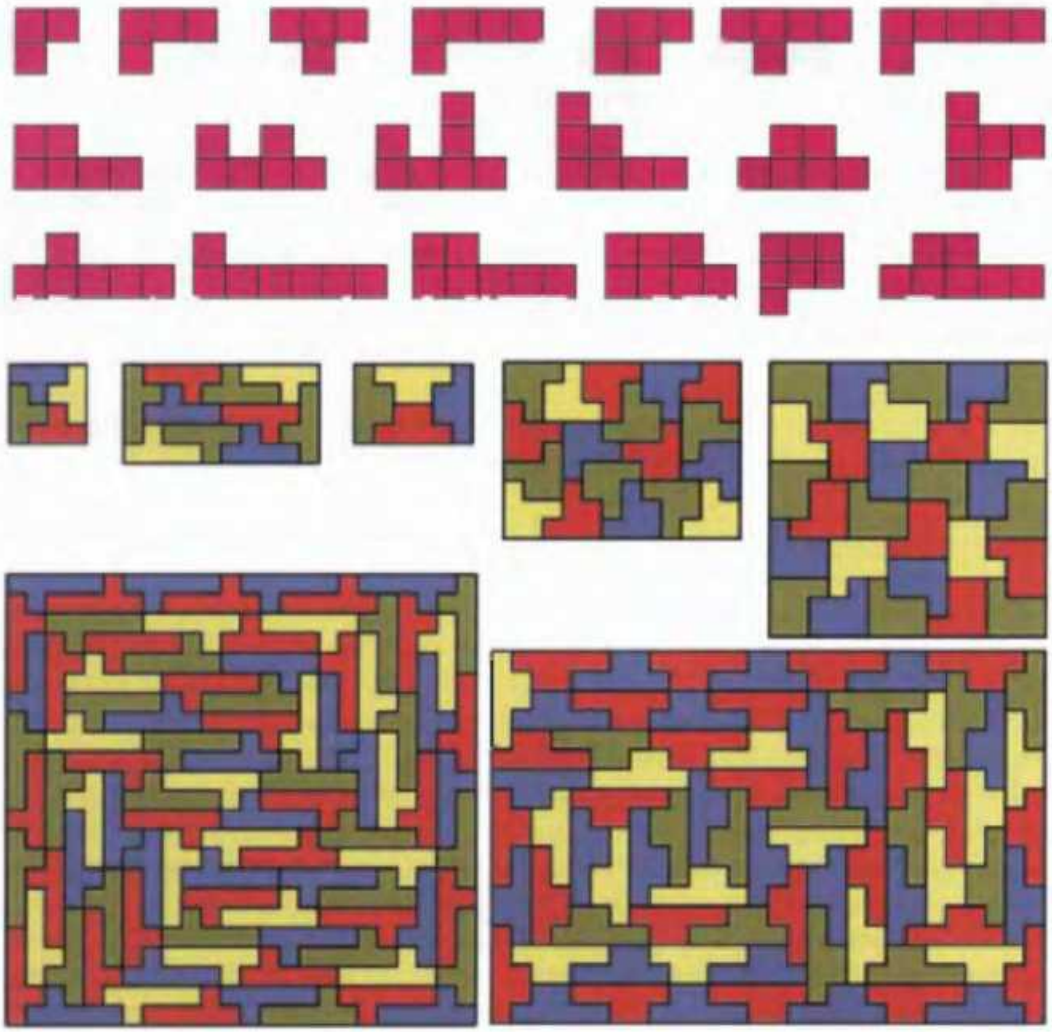
a. Le dragon de Lévy. Découvert et étudié en 1938 par le mathématicien français Paul Lévy (1886-1971), la dimension de sa frontière fractale est 1,9340071... ce qui signifie que cette frontière est très fortement découpée (1,9340071 est proche de 2). Cet objet est composé de petits morceaux complexes et troués, collés les uns aux autres, mais possède une surface positive (c'est une condition pour être un pavé). Une méthode itérative très simple permet de le construire : elle est indiquée figure 2.


Paul Levy

b. Le dragon de Heighway (aussi appelé : la fractale de Jurassic Park, ou dragon de papier plié). La dimension de sa frontière fractale est 1,5236270... On obtient cette figure par un procédé très simple à partir d'un pliage de papier *(voir la figure 3b)*. Elle fut découverte dans les années 1960 par John Heighway un ingénieur de la NASA et a donné lieu a de nombreux travaux depuis.

c. Les dragons jumeaux (Twindragon). La dimension de la frontière fractale de cette forme est 1,5236270... On la construit en collant l'un contre l'autre deux dragons de Heighway. C'est pourquoi sa frontière a la même dimension fractale que celle du dragon de Heighway.

d. Les dragons jumeaux ternes (Tame twindragon). La dimension de la frontière de cette forme est 1,2107605... J'ignore quand et par qui cette figure fut

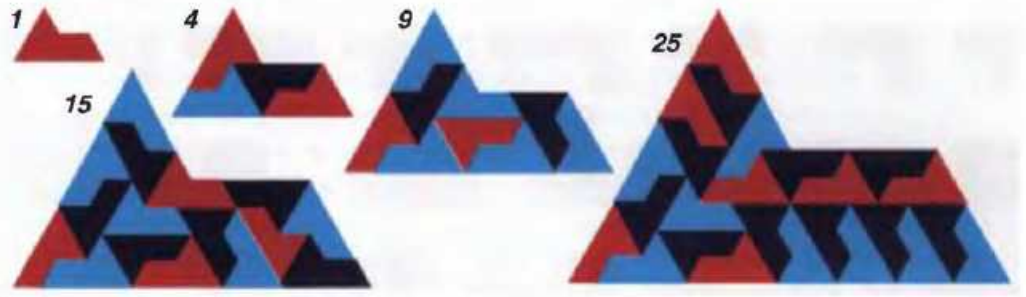


Voici les polyminos les plus simples (comportant 7 carrés ou moins) qui sont des autopavés réguliers. Pour chacun d'eux, on prouve qu'il s'agit d'un autopavé en construisant un rectangle avec des copies du polymino (avec des copies du rectangle, on construit un carré et donc finalement le polymino lui-même). Pour chaque polymino présenté, trouvez le rectangle de taille minimale qu'on peut composer avec des copies de même taille du polymino : nous avons indiqué ici les solutions les plus difficiles.

découverte. Elle est moins belle que les autres, mais elle fait aussi partie de la famille de six jumeaux magiques et, à ce titre, elle mérite une attention particulière : l'angle formé entre la figure entière et les deux parties parallèles entre elles qui la recomposent est arctan $\sqrt{7}$.

Chacun des jumeaux magiques est une figure qui peut paver le plan tout entier. Cela n'est pas facile à voir quand il s'agit du dragon de Lévy.

Les 6 jumeaux magiques offrent une occasion de réfléchir à la notion de simplicité géométrique : le cercle est certainement simple, de même que le carré ou le triangle équilatéral. Chacun se définit en quelques mots et se rencontre dans la nature et, plus souvent encore, dans les objets conçus par l'homme. Il s'agit des figures s'imposant à l'esprit. Elles sont pour la géométrie l'équivalent des constantes mathématiques fondamentales :



5 Cette forme, parfois nommée Sphinx, est un 4-autopavé régulier et même un n^2-autopavé régulier pour tout entier n plus grand que 2.

π, $\sqrt{2}$, e, etc. Elles sont partout parce qu'elles sont simples au sens mathématique. De même, bien sûr, les solides platoniciens sont mathématiquement simples.

Les jumeaux, des êtres naturels ?

Ce que montre le merveilleux résultat des chercheurs d'Atlanta est que les six jumeaux magiques (fractals ou pas) sont aussi des objets géométriques simples. On peut les définir en quelques mots. Je ne serais pas étonné si comme cela s'est produit pour les pavages de Penrose (dont la symétrie est d'ordre 5) et les quasicristaux, on découvrait que tous les jumeaux magiques (et pas seulement le rectangle des formats de papiers) sont présents dans la nature et que c'est seulement parce que nous étions ignorants de leur existence que nous ne les avons pas encore repérés. Même si des édifices réalisés en utilisant les jumeaux magiques sont délicats à concevoir et à bâtir, ces formes devraient intéresser les architectes et leur permettre de produire des œuvres originales.

Chacun devrait savoir maintenant qu'à côté des cinq solides platoniciens, il y a les six jumeaux magiques. La réalisation de ces figures par des méthodes itératives peut être enseignée dans les collèges et sans doute même dans les écoles primaires. Cela serait, me semble-t-il, une source de renouvellement de la géométrie que les enseignants pourraient exploiter.

Les mathématiques comme la physique progressent et fournissent du monde une vision sans cesse renouvelée, nous faisant découvrir de nouvelles formes simples. Nous pensons connaître tout ce qui est simple, pourtant le résultat des chercheurs d'Atlanta montre qu'il s'agit d'une illusion.

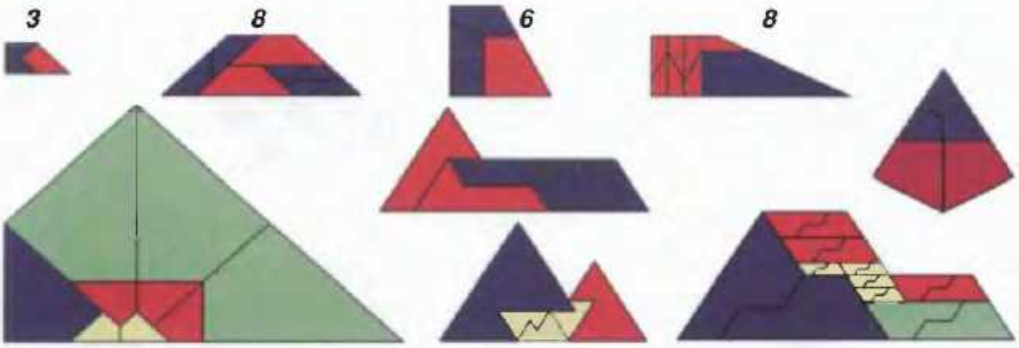
Les autopavés sont innombrables et sauf dans des cas très spéciaux leur énumération et leur classification restent à faire. Un domaine particulier est intensément exploré : celui des polyminos, ces formes géométriques composées de carrés collés les uns aux autres par une arête. Un polymino s'obtient en suivant les lignes d'une feuille quadrillée et c'est pourquoi en étudier les propriétés est plaisant et facile.

Certains polyminos sont des autopavés réguliers, d'autres non. Par exemple le trimino L (trois carrés collés formant un L majuscule) est un 4-autopavé régulier (et même un n^2-autopavé régulier pour tout entier n. La connaissance des polyminos autopavés réguliers est aujourd'hui assez avancée quoiqu'on soit loin de répondre à toutes les questions qui se posent.

Un double résultat relie le problème des polyminos autopavés à celui des polyminos pouvant paver un rectangle :

– si des copies d'un polymino permettent de paver un rectangle, alors c'est un autopavé ;

– de plus, si toutes les copies du polymino utilisé ont la même taille (pavage régulier du rectangle) alors le polymino considéré est un autopavé régulier.



6 De beaux autopavés irréguliers de Scherer. Les formes ci-dessus ne sont pas des autopavés réguliers, mais le mathématicien Karl Scherer montre avec ces figures que ce sont des autopavés irréguliers (on autorise le retournement des pièces).

La démonstration est facile. À partir du pavage d'un rectangle par le polymino, on obtient d'abord le pavage d'un carré : le rectangle a pour dimensions n et m, deux entiers. Donc en plaçant côte à côte n copies du rectangle et en prenant m lignes de ce type, on obtient un carré de côté nm. En plaçant ensuite des copies de ce carré côte à côte, on reconstitue le polymino qui se trouve donc pavé avec des copies de lui-même.

Si tout polymino qui pave un rectangle est un autopavé, en revanche on ignore si tout polymino qui est un autopavé (régulier ou irrégulier) pave nécessairement un rectangle (par copies identiques ou de tailles différentes de lui-même). On ne connaît pas d'exceptions, mais rien ne prouve qu'il n'y en a pas. N'est-il pas étonnant qu'une question aussi élémentaire soit aujourd'hui irrésolue ? Si vous trouvez un polymino qui est un autopavé, mais qui ne pave aucun rectangle vous ferez avancer ce domaine de recherche.

Autopavé ou pas?

Récemment Michael Reid *(voir ses pages Internet en recherchant: «Michael Reid» geometry)* a découvert une série de pavages irréguliers du rectangle par des polyminos intéressants. Ces pavages prouvent que les polyminos utilisés sont des autopavés. Certaines de ces figures sont loin d'être évidentes et peuvent servir de base à la création de puzzles géométriques d'une grande élégance. Dans ces recherches, Michael Reid autorise parfois le retournement des pièces. Lorsque c'est le cas, il prouve donc l'existence d'autopavés irréguliers avec retournement.

Ces figures ont été découvertes par tâtonnement et Michael Reid lance le défi d'écrire un programme d'ordinateur qui lorsqu'on lui demandera de travailler à partir d'un polymino donné explorera systématiquement tous les cas pour conclure avec certitude, soit que le polymino donné n'est pas un autopavé, soit au contraire qu'il en est un et dans ce cas proposera un pavage convenable. La difficulté provient principalement de l'utilisation de copies de tailles différentes du polymino : comment s'y prendre pour être certain qu'on a exploré toutes les possibilités ? De l'astuce et peut-être des résultats mathématiques préliminaires seront nécessaires pour écrire ces programmes.

Passionnés d'énigmes géométriques élémentaires dont l'outil principal est la feuille de papier, algorithmiciens cherchant à relever un défi, amateurs d'images fractales et mathématiciens de haute volée, tous se retrouvent sur le territoire encore largement mystérieux des autopavés.

Dominons les dominos

Quels assemblages obtient-on avec des dominos ? Au détour de ces questions posées par les amateurs de divertissements géométriques et qui intéressent aujourd'hui les professionnels, on rencontre les nombres de Fibonacci, d'étonnants résultats et des questions non résolues.

Tout juste un peu plus compliqué que le carré, l'anodin double carré, ou domino, est une source inattendue de questions géométriques et combinatoires qui plaisent à tous, car les astuces utilisées dans les démonstrations sont remarquables d'ingéniosité. Ainsi lorsque l'on a devant soi un *polygone orthogonal* (polygone obtenu en accolant par les côtés des carrés égaux) et une pile de dominos, la question que l'on se pose est celle du pavage : le polygone orthogonal peut-il être pavé par des dominos sans recouvrement, ni espace vide ? Nous emploierons l'adjectif *dominable* pour qualifier ces figures « pavables » avec des dominos.



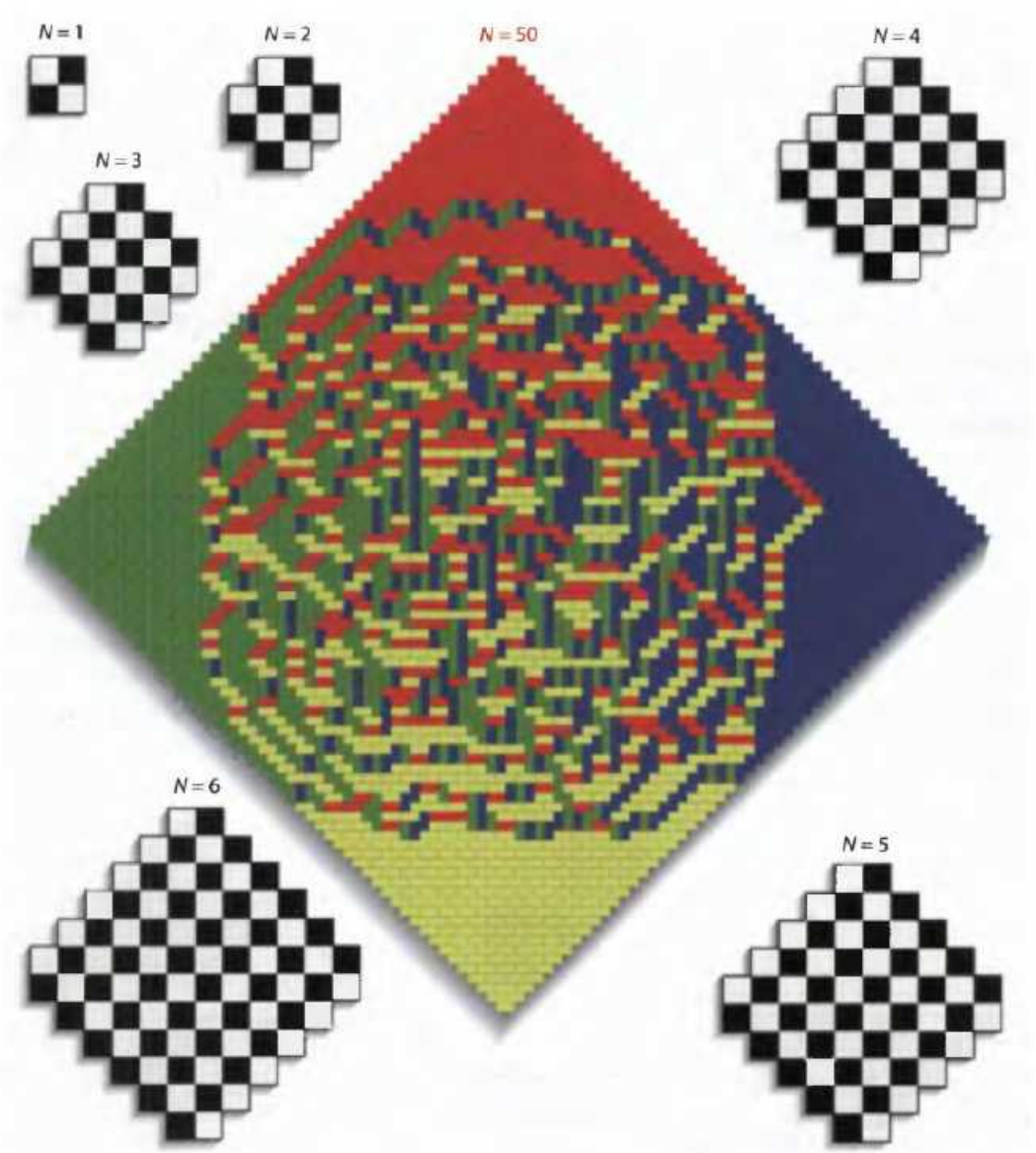
Bien sûr, pour qu'un polygone orthogonal soit dominable, il faut que le nombre de carrés qui le composent soit un nombre pair, car chaque domino recouvre deux carrés d'un coup. Cette condition est-elle suffisante ? La figure en forme de T (une barre horizontale et une barre verticale de trois carrés) montre que non. Un T composé de six carrés *(voir la figure ci-contre)*, trois pour la barre horizontale, trois pour le pied, n'est pas dominable.

Déterminer quels sont les rectangles dominables est facile. Un rectangle $n \times m$ est dominable si et seulement si n ou m est pair : si n est pair, on pave chacune des m lignes de longueur n qui compose le rectangle en plaçant $n/2$ dominos ; si m est pair, on procède de la même façon en décomposant la figure en lignes de longueur m ; si n et m sont tous les deux impairs, leur produit l'est aussi et le pavage d'un nombre impair de cases avec des dominos est impossible.

L'aide du coloriage en damier

Des raisonnements très astucieux, fondés sur le coloriage en damier, permettent de déterminer la « dominabilité » pour les figures obtenues en enlevant deux carrés à un rectangle $n \times m$ *(voir la figure 2a où l'on raisonne sur un carré $n \times n$, mais la méthode est générale)*. Nous allons examiner trois autres résultats généraux obtenus avec cette technique du coloriage en damier que le physicien Georges Gamov présentait comme un « miracle d'ingéniosité mathématique ».

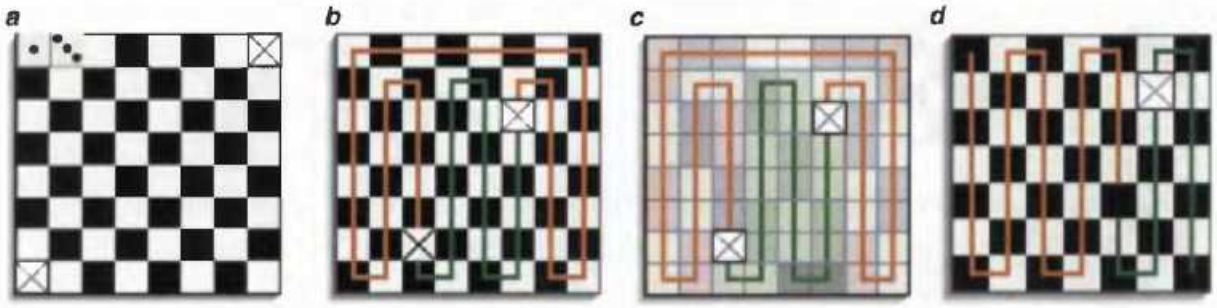
Le premier est le théorème des côtés pairs. Il affirme que si un polygone orthogonal n'a que des côtés de longueur paire, alors il est dominable. La démonstration est facile si on ajoute l'hypothèse que la figure est sans trou, elle l'est un peu moins si on considère des figures avec trous *(voir la figure 3)*. Le second résultat dû à Philip Hall a été découvert en 1935. Il indique que si un polygone orthogonal n'est pas dominable, alors un raisonnement simple par damier le prouvera. La figure 5 donne les explications concernant ce beau résultat.



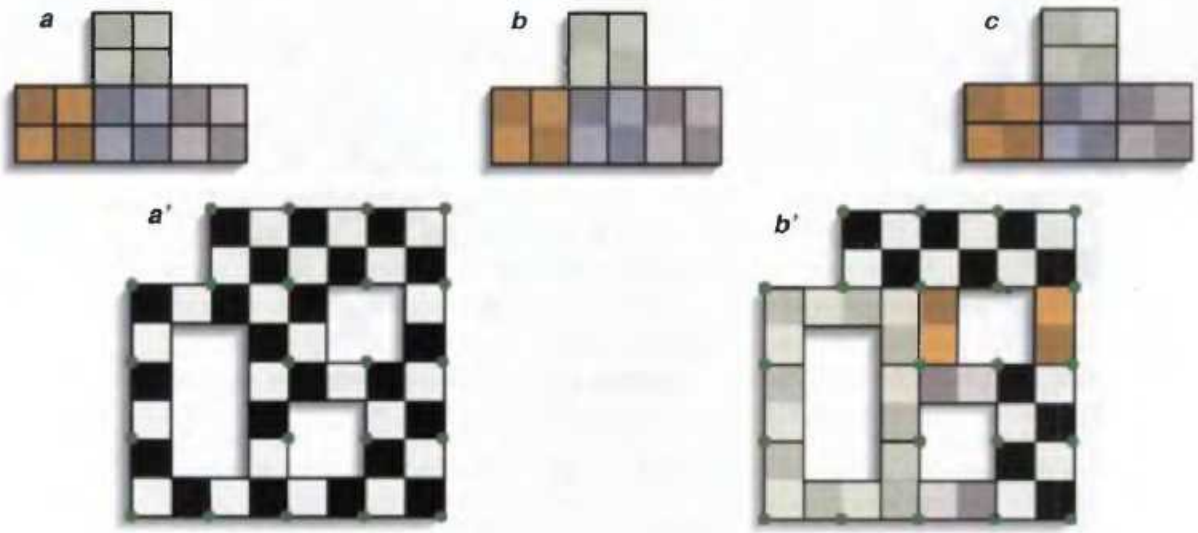
Le diamant aztèque d'ordre *n* est l'empilement de lignes centrées de carrés de longueur 2, 4, 6, ... , $2N-2$, $2N$, $2N$, $2N-2$,..., 6, 4, 2. La figure centrale dominable est étrange : presque tous les pavages par dominos d'un grand diamant aztèque possèdent une zone centrale circulaire désordonnée à l'intérieur d'un cercle « polaire », alors qu'à l'extérieur de cette zone tout est gelé en réseaux de dominos parallèles (http://arxiv.org/abs/math/0111034).

En 1999, György Csizmadia, Jurek Czyzowicz, Lezek Gasieniec, Evangeos Kranakis et Jorge Urrutia ont proposé un troisième résultat général : le théorème des côtés impairs *(voir la figure 6)*. À l'inverse du théorème des côtés pairs, il donne un critère permettant de savoir qu'un polygone orthogonal n'est pas dominable : si un polygone orthogonal sans trou n'a que des côtés de longueur impaire, alors il n'est pas dominable. N'est-il pas étonnant qu'il ait fallu attendre la fin du XXe siècle pour découvrir un théorème aussi simple ?

Ainsi, le T composé de 3 carrés pour la barre horizontale et ayant un pied de longueur 3 n'a que des côtés de longueur impaire : 1 ou 3. D'après le nouveau critère et sans aucun raisonnement supplémentaire, nous savons qu'il n'est pas dominable. De même, un double escalier composé de lignes de 1, 3, 5, 7 carrés n'est pas dominable, car ses côtés ont pour longueur 1 ou 7.



Les miraculeux raisonnements par damier. *(a)* Si on enlève deux coins opposés à un carré $(2n) \times (2n)$ dominable, la figure obtenue n'est plus « dominable » (plus recouvrable exactement par des dominos). Pour le montrer, colorions les cases comme celles d'un damier. Tout domino, constitué de deux cases, posé sur le damier, couvre toujours une case blanche et une case noire. Une figure dominable a donc autant de cases noires que de blanches et la figure obtenue quand on enlève deux coins opposés d'un carré $(2n) \times (2n)$ possède deux cases blanches de plus que de cases noires (ou l'inverse selon les coins que l'on prend), car les coins enlevés sont de la même couleur : elle n'est donc pas dominable. *(b)* Si on enlève deux carrés de couleurs différentes à un carré colorié en damier, la figure obtenue est toujours dominable. Dessinons un chemin passant par tous les carrés du rectangle. Les deux cases enlevées (marquées d'une croix) coupent ce chemin en deux parties ayant chacune une longueur paire (car les cases enlevées sont de couleurs différentes et que les cases du chemin alternent blanche-noire-blanche-noire-...). Chacun de ces deux morceaux de chemin est dominable, donc la figure trouée *(c)* est dominable. *(d)* Si on enlève un carré de la couleur des coins (tous les quatre de la même couleur) à un rectangle non dominable $(2n + 1) \times (2m + 1)$ colorié en damier, la figure obtenue devient dominable : il suffit de dessiner un chemin en zigzag sur le damier et de raisonner comme précédemment.



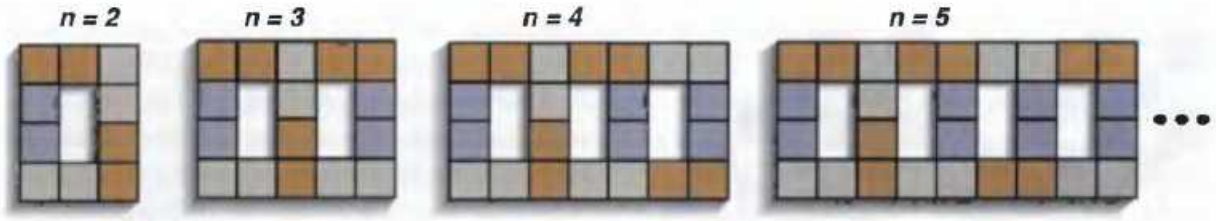
Le théorème des côtés pairs indique que si un polygone orthogonal n'a que des côtés de longueur paire, alors il est dominable. Si la figure est sans trou, on peut la diviser en carrés de côté 2, chacun pouvant alors être pavé par 2 dominos *(a)*. Dans ce cas, d'ailleurs, tous les dominos peuvent être placés horizontalement *(b)*, ou tous verticalement *(c)*. Si la figure possède des trous *(a')* cela se complique. La méthode pour paver la figure se décompose en trois étapes.

1- On place la figure sur le plan de façon que les coordonnées des points du pourtour soient toutes paires (points verts) : on obtient un tel positionnement en plaçant l'un des coins extérieurs de la figure au point de coordonnées (0, 0).

La difficulté provient de ce que les sommets internes délimitant les trous n'ont pas de raison d'avoir des coordonnées paires, ce qui empêche de raisonner comme dans le cas où il n'y a pas de trou.

2- On pave les bords de chaque trou (soit tous les bords, soit les bords horizontaux, soit les bords verticaux) de façon que la partie restant à paver n'ait plus que des sommets de coordonnées paires *(b')*.

3- Pour la partie restante, on est ramené à une situation équivalente à celle de la configuration sans trou (une figure décomposable en carrés de côté 2), car cette partie est délimitée par des sommets – extérieurs et intérieurs – ayant à chaque fois deux coordonnées paires.



Problème inverse. Pour tout entier n, peut-on trouver une figure possédant exactement n pavages différents par dominos ? Les rectangles troués ci-dessus donnent la réponse : le rectangle ayant $n - 1$ trous possède exactement n pavages par dominos.

Le résultat est vrai plus généralement pour les doubles escaliers 1, 3, 5, ..., $2n + 1$. La démonstration, assez longue et délicate, de ce nouveau résultat se fonde sur la technique du damier et consiste à montrer que, dans le cas indiqué, le nombre de cases blanches n'est pas égal au nombre de cases noires, ce qui bien sûr entraîne l'impossibilité d'un pavage par des dominos.

Si une figure possède un ou plusieurs trous, le théorème des côtés impairs n'est plus vrai comme le montre l'anneau carré le plus simple *(voir la figure 6)*. Lorsqu'un polygone orthogonal possède à la fois des côtés de longueur paire et des côtés de longueur impaire, on ne peut rien dire : parfois il est dominable, parfois non !

Pour beaucoup de figures particulières (comme les figures en forme de L, d'anneaux, de U, de croix, etc.), on sait déterminer si elles sont dominables ou pas et c'est une source inépuisable d'exercices géométriques simples et amusants. Notons que le problème de savoir si un polygone orthogonal est dominable ou non appartient à la classe des problèmes polynomiaux : il peut être traité en un temps inférieur à $C \times n^{3/2}$ (où C est une constante, et n le nombre de carrés de la figure).

Nombre de pavages possibles

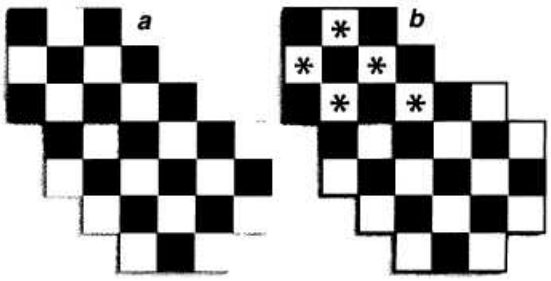
Très naturellement, lorsqu'un polygone est dominable se pose la question du nombre de façons différentes de le paver par des dominos (lors de ces décomptes, si un pavage se déduit d'un autre par une symétrie ou une rotation, on le compte quand même).
Pour les rectangles $1 \times N$ (N évidemment pair), la réponse est immédiate : il n'y a qu'une façon de paver le rectangle. Pour les rectangles $2 \times N$, la réponse est intéressante puisqu'elle permet de retrouver la plus célèbre des suites de nombres entiers : la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... où chaque terme $f(N)$ est la somme des deux précédents.

Voici le raisonnement par récurrence montrant que le nombre de façons différentes de paver un rectangle de taille $2 \times N$ par des dominos est $f(N + 1)$. Pour paver le rectangle 2×1, il n'y a évidemment qu'une façon, $1 = f(2)$. Pour le rectangle 2 x 2, il y en a 2, soit $f(3)$: deux dominos horizontaux ou deux dominos verticaux. Examinons la récurrence : supposons que pour paver par des dominos les rectangles de taille 2 x 1, 2 x 2, ..., $2 \times N$, il y a respectivement $f(2)$, ..., $f(N + 1)$ façons de le faire et montrons que pour paver le rectangle $2 \times (N + 1)$, il y en a $f(N + 2)$.

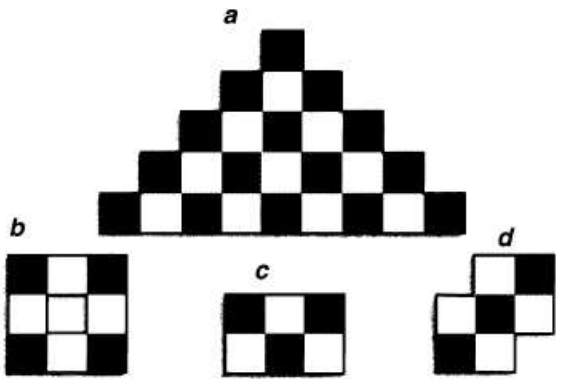
Il y a deux façons de placer les dominos remplissant l'extrémité droite du rectangle.

(a) Soit nous plaçons un domino verticalement, et alors il reste un rectangle de taille $2 \times N$ à couvrir, ce qui par hypothèse peut se faire de $f(N + 1)$ façons différentes.

(b) Soit on place un domino horizontalement, mais alors il faut en placer un autre horizontalement sur le premier, et alors il reste un rectangle de taille $2 \times (N - 1)$ à recouvrir, ce qui, par hypothèse, peut se faire de $f(N)$ façons différentes. Au total, le nombre de façons



Le théorème de Philip Hall. Quand une figure coloriée en damier a le même nombre de cases de chaque couleur, il existe un argument standard qui montre (si c'est le cas) que la figure n'est pas dominable. La figure *a* trouée comporte 32 carrés, 16 de chaque sorte, mais elle n'est pas dominable. Considérons sur la figure *b* les cases marquées par des ronds. Les cases avec lesquelles elles peuvent s'apparier (quand on y pose un domino) sont marquées par des étoiles. Il y a 6 ronds et seulement 5 étoiles: il sera donc impossible de poser des dominos sur les 6 ronds sans qu'ils se chevauchent: la figure n'est pas dominable. Le théorème de Philip Hall indique que si une figure n'est pas dominable, il est toujours possible de le démontrer avec un raisonnement de ce type.



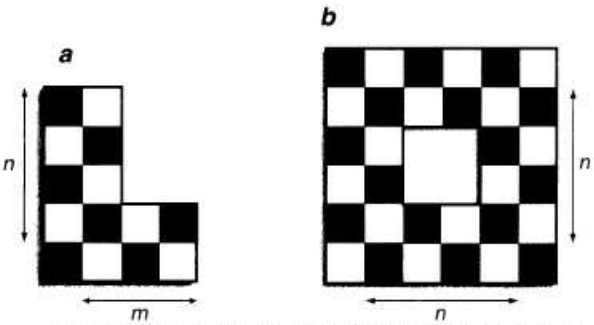
Le théorème des côtés impairs, découvert et démontré récemment, indique que si un polygone orthogonal sans trou n'a que des côtés de longueur impaire alors il n'est pas dominable. Le double escalier à 16 carrés *(a)* qui n'a que des côtés de longueur 1 ou 7 n'est donc pas dominable (colorié en damier, il comporte 15 cases noires et 10 cases blanches). Si la figure a des trous, le critère n'est plus valable, comme le montre la figure *(b)* que l'on pave facilement avec 4 dominos. Lorsqu'une figure possède à la fois des côtés de longueurs paires et impaires, rien de général ne peut être affirmé : la figure *(c)* est dominable, la figure *(d)* ne l'est pas.

différentes de couvrir le rectangle de taille $2 \times (N+1)$ est donc bien $f(N+1) + f(N) = f(N+2)$.

Pour les rectangles de forme $3 \times (2N)$, il existe un résultat analogue. Le nombre de façons différentes de paver le rectangle est donné par la suite : $g(0) = 1$, $g(1) = 3, g(2) = 11, g(N+1) = 4\,g(N) - g(N-1)$. Les premiers termes de cette suite sont 3, 11, 41, 153, 571, 2131, 7953, 29681, 110771, 413403, 1542841, 5757961, 21489003, 80198051, 299303201... Il s'agit de la suite numérotée A001835 de l'*Encyclopédie des suites d'entiers du mathématicien* Neil Sloane que vous trouverez en : www.research.att.com/~njas/sequences/

Pour un rectangle quelconque $(2n) \times (2m)$, une formule générale donnant le nombre de façons de le paver par des dominos a été découverte en 1961 simultanément et indépendamment par trois personnes, M. Fisher, H. Temperley et P. Kasteleyn. Nous l'indiquons car, bien que complexe et difficile à démontrer, elle est étrange et belle. Elle montre que la résolution d'un problème simple oblige parfois à recourir à des outils inattendus, ici les fonctions trigonométriques (bien sûr on ne sait pas simplifier cette formule). Le nombre de façons différentes de paver un rectangle $(2n) \times (2m)$ par des dominos est exactement :

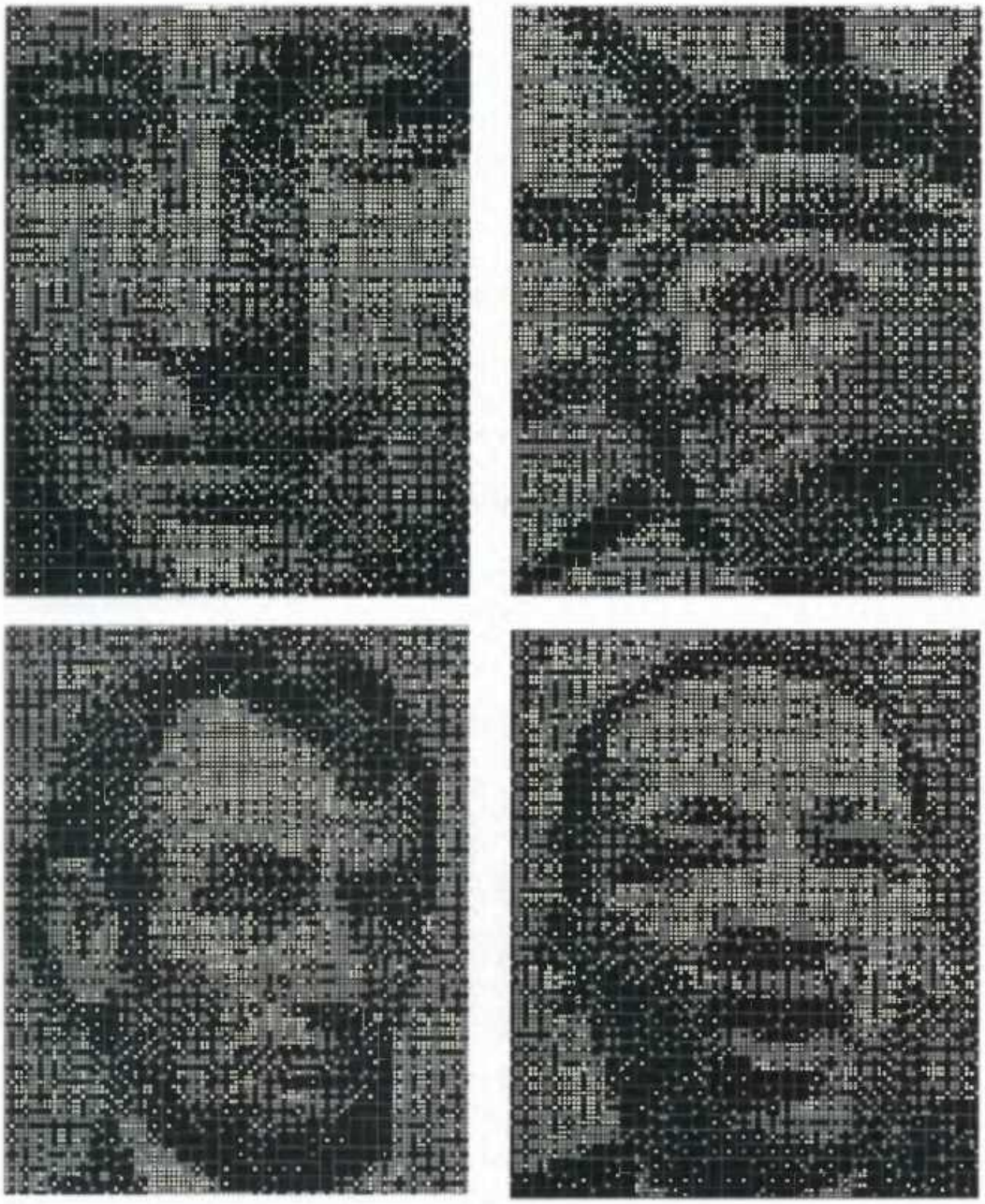
$$4^{mn} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$



Roberto Toraso de l'Université Tor Vergata de Rome a démontré en 2004 deux intéressants résultats. *(a)* Le nombre de pavages par des dominos d'un L dont l'axe central est composé de deux segments de longueurs n et m est donné par l'expression $f(n+1)\,f(m) + f(n)\,f(m+1)$ où $f(n)$ est la suite de Fibonacci. *(b)* Le nombre de pavages par des dominos d'un anneau carré de largeur 2 et dont le côté de l'axe central a pour longueur n est donné par l'expression $4(f(n+1)f(n-1) + f(n)^2)^2$.

Par exemple, pour $m = 2$ et $n = 3$, la formule donne : $46\ (\cos^2 36° + \cos^2 25{,}71...°)\ (\cos^2 36° + \cos^2 51{,}43...°)\ (\cos^2 36° + \cos^2 77{,}14...°)\ (\cos^2 72° + \cos^2 25{,}71...°)\ (\cos^2 72° + \cos^2 51{,}43...°)\ (\cos^2 72° + \cos^2 77{,}14...°) = 4^6\ (1{,}4662...)\ (1{,}0432...)\ (0{,}7040...)\ (0{,}9072...)\ (0{,}4842...)\ (0{,}1450...) = 281$. On obtient un nombre entier à l'issue du calcul, bien que les facteurs soient tous des nombres réels non entiers ! Vous pouvez vérifier, avec un programme d'ordinateur, qu'il y a bien 281 façons de paver un carré 4 × 6 par des dominos. Avec cette formule, les problèmes de dominos quittent le domaine des récréations mathématiques élémentaires !

Plus récemment, N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen et J. Propp ont montré que le nombre de pavages par des dominos du diamant aztèque d'ordre N – la figure symétrique composée de lignes de carrés ayant respectivement pour longueur 2, 4, 6, ..., $2N$, $2N$,...,



6, 4, 2 *(voir la figure 1)* – est $2^{N(N+1)/2}$, ce qui est tout de même plus sympathique que la formule pour le rectangle! On connaît aujourd'hui 12 démonstrations de ce résultat. Malheureusement, aucune n'est simple.

Les diamants aztèques

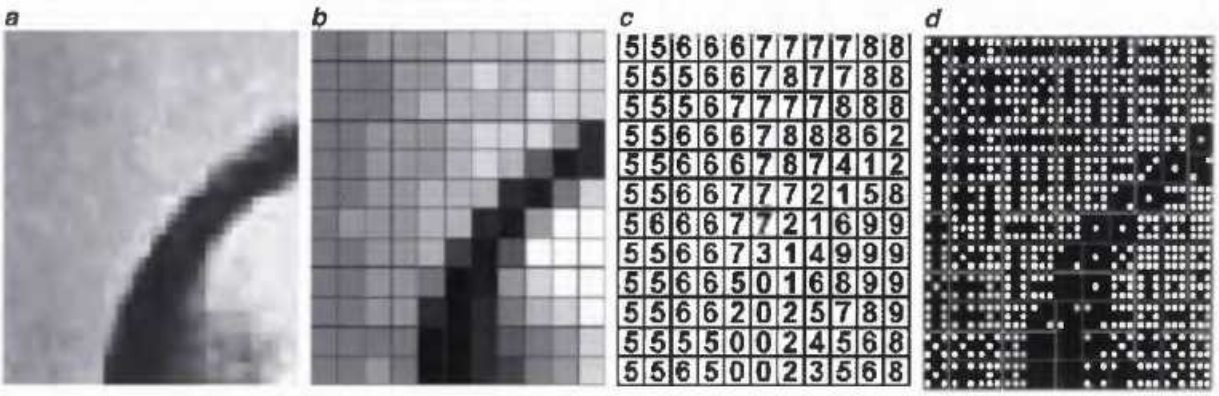
Le degré de liberté pour paver une figure est le nombre de façons de paver la figure par dominos. Le degré de liberté par carré est la racine n-ième de ce degré, où n est le nombre de carrés de la figure. Plus ce nombre est petit plus il est difficile de paver la figure.

Un diamant aztèque d'ordre N possède $2N(N+1)$ carrés et donc le degré de liberté par carré de cette figure est exactement : $(2^{N(N+1)/2})^{1/2N(N+1)} = 2^{1/4} = 1{,}189207115...$

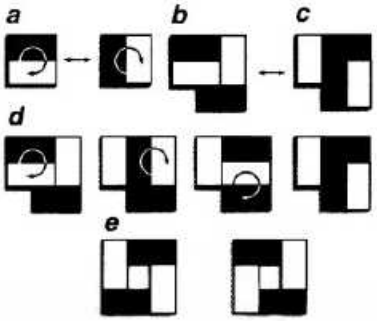
Pour un carré $N \times N$, on évalue le degré de liberté par carré à partir de la formule avec des cosinus. On trouve que ce nombre est 1,338515152... ce qui est sensiblement plus que pour le diamant aztèque. Cela n'est pas surprenant puisqu'on sent bien, en tentant de remplir un diamant aztèque par des dominos, que les côtés en escalier créent de nombreuses contraintes qui limitent les choix possibles, alors qu'on a beaucoup plus de liberté quand on remplit un carré $N \times N$.

D'autres propriétés fascinantes du diamant aztèque sont aujourd'hui étudiées par J. Propp et un groupe de chercheurs autour de lui. En particulier, ils ont démontré que lorsqu'on prend au hasard un pavage par dominos du diamant aztèque, il existe une zone circulaire centrale à l'intérieur d'un cercle dénommé cercle polaire, où les dominos sont placés de façon assez désordonnée dans les deux sens, alors que les parties autour sont très bien rangées (dominos bien parallèles). L'existence de ce cercle inattendu reste mystérieuse *(voir la figure 1)*. Indiquons, d'autre part, pour les pavages par dominos, deux résultats plus faciles démontrés par Roberto Toraso et décrits sur la figure 7.

Un étrange, délicat et merveilleux théorème a été formulé et démontré par William Thurston de l'Université de Princeton. Que ce lauréat de la médaille Fields 1982 (l'équivalent pour les mathématiques du prix Nobel) ait trouvé bon de s'occuper de dominos montre que tous les sujets mathématiques, y compris ceux qu'on classe parfois avec condescendance



Portraits de dominos. Pour les construire, Robert Bosch utilise des jeux complets de dominos [DominoArtwork.com]. Ces portraits utilisent 48 jeux complets de dominos jusqu'au double neuf alors que les dominos habituels ne vont que jusqu'au double six. Pour trouver les emplacements optimaux des dominos, R. Bosch divise l'image *(a)* en carrés *(b)* et mesure de 0 à 9 les intensités de gris *(0 correspondant au noir et 9 au blanc)* de chaque carré. Puis son programme calcule quel arrangement de dominos [pris au complet] réalise au mieux ces intensités *(d)*.



Le théorème de Thurston. En faisant tourner de 90° un couple de dominos formant un carré, on transforme une paire horizontale en paire verticale et réciproquement *(a)*. Considérons deux pavages *(b)* et *(c)* différents par dominos. En répétant l'opération de rotation de couples de dominos accolés *(d)*, on passe du pavage *(b)* au pavage *(c)*. D'après le théorème de Thurston, si le polygone orthogonal dont on part est sans trou, le passage d'un pavage à un autre par de telles rotations de couples de dominos accolés est toujours possible. L'anneau simple *(e)* montre que la condition « sans trou » est essentielle.

dans la catégorie des récréations mathématiques, sont susceptibles d'intéresser les meilleurs mathématiciens qui y découvrent parfois de véritables petits bijoux *(voir la figure 9)*.

Le décompte des pavages par dominos suggère une question simple : est-ce que pour tout entier N, il existe une figure dominable possédant exactement N pavages différents par dominos ? La réponse, positive, a été donnée par plusieurs amateurs dont B. Harris, Brendam Owen, Alexandre Muniz, Trevor Green et Timothy Luffingham qui ont proposé des constructions générales *(voir la figure 4)*. Une autre question est moins bien résolue : pour un N donné, quel est le nombre minimal $D(N)$ de carrés que doit posséder une figure pour qu'elle admette exactement N pavages différents par des dominos ?

Pour $N = 7$, par exemple, on connaît une figure à 10 carrés possédant 7 pavages différents par dominos et on n'en connaît aucune ayant moins de 10 carrés. On pense donc que $D(7) = 10$. Pour $N = 2000$, la question a été étudiée avec un soin particulier par de nombreux amateurs de récréation mathématique, car en l'an 2000 – année mondiale des mathématiques – elle avait été soumise comme défi. De nombreuses solutions à 38 carrés furent proposées, mais finalement le Japonais Yoshiyuki Kotani en trouva une à 34 carrés par une méthode de recherche systématique. Nous ignorons si 34 est le minimum possible, voir : http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0500.html. Les lecteurs feront-ils progresser notre connaissance de ce problème de minimalité ?

Si vous trouvez ces questions de pavages trop abstraites, un jeu artistique vous réconciliera avec les dominos : le dessin avec des jeux complets de dominos. On se donne plusieurs jeux complets de dominos (avec des points allant de 0 à 6 ou de 0 à 9) ; on se donne aussi une image, par exemple la Joconde, et le but est de placer au mieux tous les dominos dont on dispose pour reproduire l'image choisie.

Les portraits de Robert Bosch

Robert Bosch a ainsi réalisé des dizaines d'images assez étonnantes (voir http://www.dominoartwork.com/). La méthode qu'il utilise est expliquée sur la figure 8. Sauf hasard extraordinaire, un recouvrement exact n'est pas possible, et donc il faut mener une recherche parmi tous les pavages utilisant les jeux complets de dominos pour trouver celui qui s'éloigne le moins de la grille des niveaux de gris. Pour ce faire, R. Bosch utilise des algorithmes, nommés algorithmes d'optimisation en nombres entiers, développés depuis longtemps pour traiter des problèmes d'emplois du temps ou de conception de circuits.

Les innocents dominos occupent ainsi les artistes mathématiciens, les amateurs de récréations géométriques et informatiques, et les plus brillants des chercheurs, chacun faisant avancer notre maîtrise et notre compréhension du démoniaque petit rectangle.

La délicate géométrie du carré

Un nouvel art géométrique à base de carrés produit d'innombrables tableaux géométriques coloriés, à la frontière de l'ordre et du désordre, sur la base d'un problème ancien : paver un carré avec des carrés.

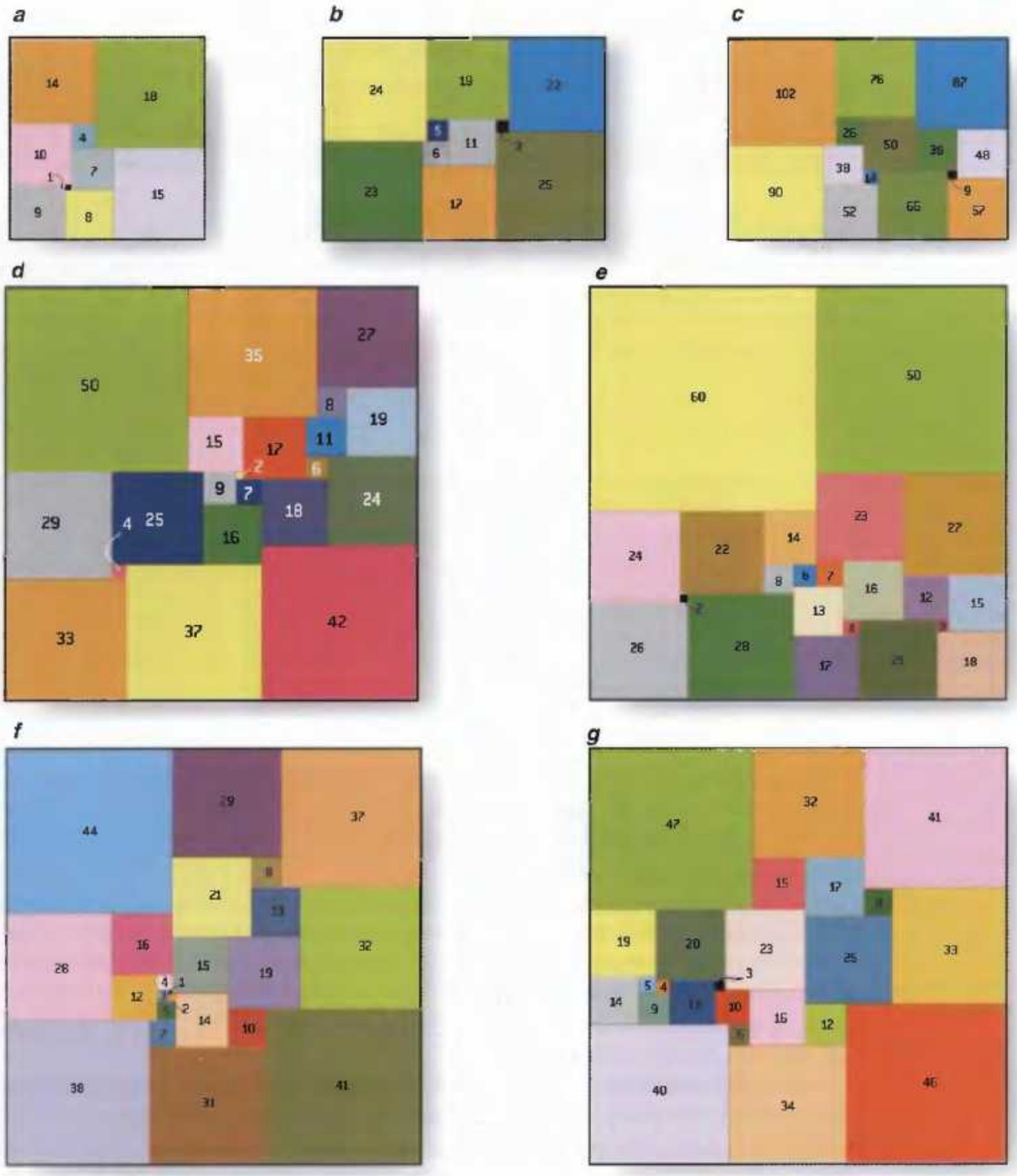
Bien sûr, tout carré se découpe en quatre carrés identiques, et pour tout entier n, en n^2 carrés identiques. Personne n'accorde de valeur esthétique à ces découpages évidents à l'exception de certains artistes minimalistes dont François Morellet. En 1953, celui-ci a peint une toile intitulée *16 carrés*, représentant, en noir sur blanc, la décomposition d'un carré en 16 carrés égaux et cette toile, présentée comme une œuvre majeure de l'artiste, était exposée au Musée du Jeu de Paume à Paris lors de l'exposition Morellet de 2001.

Un véritable art minimaliste non trivial produisant des œuvres agréables est pratiqué par les amateurs d'énigmes géométriques, qui, à l'occasion de travaux sans prétention, découvrent des figures remarquables de simplicité et d'élégance (qu'on pourra préférer à celles des artistes de galeries) et démontrent des théorèmes qui permettent d'en énumérer des familles infinies.

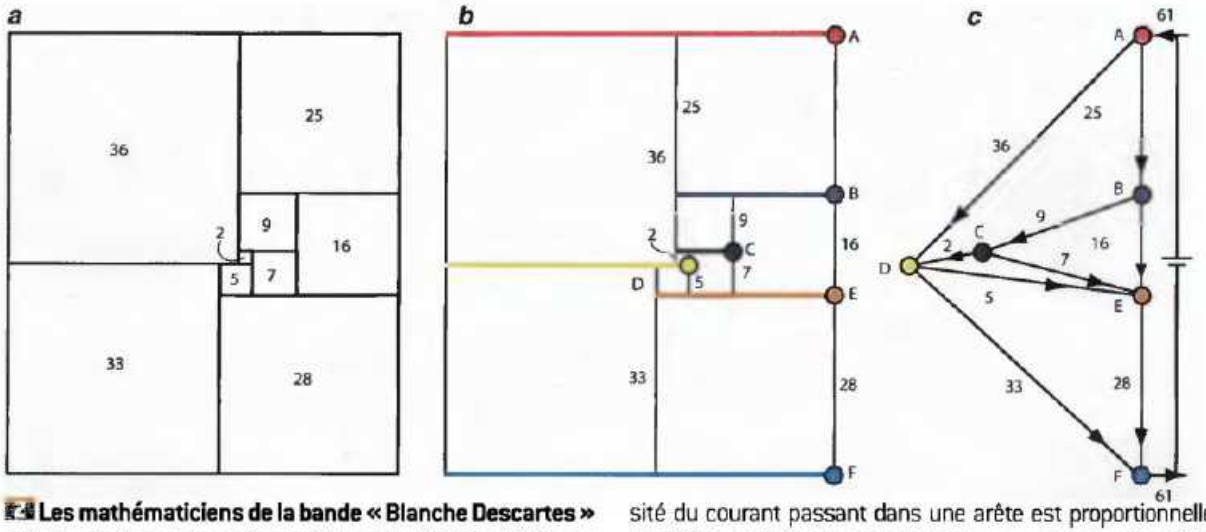
Découpages *parfaits* du carré

Avant de présenter les résultats de Karl Scherer, revenons sur quelques dissections classiques en carrés. La première recherche sur le découpage en carrés fut proposée en 1925 par Z. Moron qui découvrit une décomposition du rectangle 33 × 32 (presque un carré !) en carrés plus petits, tous de tailles différentes *(voir la figure 1a)*. De tels découpages sont qualifiés de *parfaits*. Le problème de trouver un découpage *parfait* de carré (et non plus d'un rectangle) resta ouvert pendant un bon moment et on affirma même qu'il était impossible à résoudre. En 1939, R. Sprague mit fin à l'incertitude en proposant un découpage du carré en 55 carrés de tailles différentes. Un découpage *parfait* du carré en 24 fut ensuite découvert par Willcocks en 1948. Enfin, en 1978, A. Duijvestijn mit un terme à cette progression en exhibant un découpage *parfait* du carré en 21 carrés, dont on démontra qu'il ne pouvait être amélioré : il n'existe aucun découpage parfait en 20, ou moins de 20, carrés.

Bien que les découpages *parfaits* du carré soient assez difficiles à trouver, lorsque n augmente, leur nombre croît rapidement : s'il n'y a qu'un seul découpage *parfait* en 21 carrés, il y en a 8 en 22, 12 en 23, 26 en 24, 160 en 25, 441 en 26, 1 152 en 27, etc. (8, 12, 26, 160... est la suite numérique n° A006983 dans l'*Encyclopédie des suites* de N. Sloane). À la vue de cette croissance rapide du nombre de solutions, il semble très vraisemblable que pour tout n plus grand que 21, il existe au moins un découpage *parfait* en n carrés. À ma connaissance, aucune preuve de ce résultat n'a été proposée. Un raisonnement très simple permet cependant de montrer qu'il existe une infinité de découpages *parfaits* du carré. La solution est donnée à la fin de ce texte.



Découpages parfaits de rectangles et de carrés. *(a)* Le premier découpage d'un rectangle 32×33 en 9 carrés de tailles différentes, proposé en 1925 par Z. Moron. *(b)* Un autre découpage de rectangle cette fois en 10 carrés et en *(c)* un découpage d'un rectangle en 14 carrés. H. Reichert et H. Toepkin démontrèrent en 1940 qu'un rectangle ne pouvait être découpé en carrés de tailles différentes qu'à l'aide de 9 carrés au moins. Le découpage *parfait* d'un rectangle par Moron en 9 carrés est donc la plus petite solution au problème du découpage *parfait* d'un rectangle. Pour découper un carré en carrés plus petits et tous de tailles différentes – problème des découpages *parfaits* d'un carré – on sait depuis 1978 qu'il faut au moins 21 carrés. Il y a une seule solution en 21 carrés et les carrés utilisés sont de tailles 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42, 50. On a représenté en *(e)*, *(f)* et *(g)* les découpages en 22, 23 et 24 carrés différents.



Les mathématiciens de la bande « Blanche Descartes » qui cherchaient des carrés parfaits entre 1936 et 1938 ont associé un graphe « électrique » à chaque pavage par des carrés, reliant ainsi le domaine à celui des réseaux électriques étudiés par Gustav Kirchhoff (1824-1887). L'exemple montre la décomposition en carrés *(a)* du rectangle parfait 61×67 et le graphe électrique construit à partir de cette décomposition *(c)*. Chaque segment horizontal *(voir b)* du découpage donne un nœud du graphe. Chaque carré du découpage donne une arête qui joint le nœud correspondant au segment horizontal dans lequel est contenu son côté supérieur, au nœud correspondant au segment horizontal dans lequel est contenu son côté inférieur. Chaque arête du graphe électrique possède une résistance d'un Ohm. L'intensité du courant passant dans une arête est proportionnelle au côté du carré correspondant. Un examen de la géométrie des figures *b* et *c* montre que les deux lois de Kirchhoff sont satisfaites : la somme des intensités des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités des courants sortant de ce nœud et, dans tout circuit, la somme algébrique des courants est nulle. Avec cette traduction électrique du problème géométrique, les mathématiciens de la bande « Blanche Descartes » ont pu trouver, à la main, des carrés parfaits. Pour la petite histoire des mathématiques, Blanche Descartes est un pseudonyme utilisé vers 1940 par quatre mathématiciens de Cambridge : William Tutte, Leonard Brooks, Cedric Smith et Arthur Stone, spécialistes de théorie des graphes et de cryptographie.

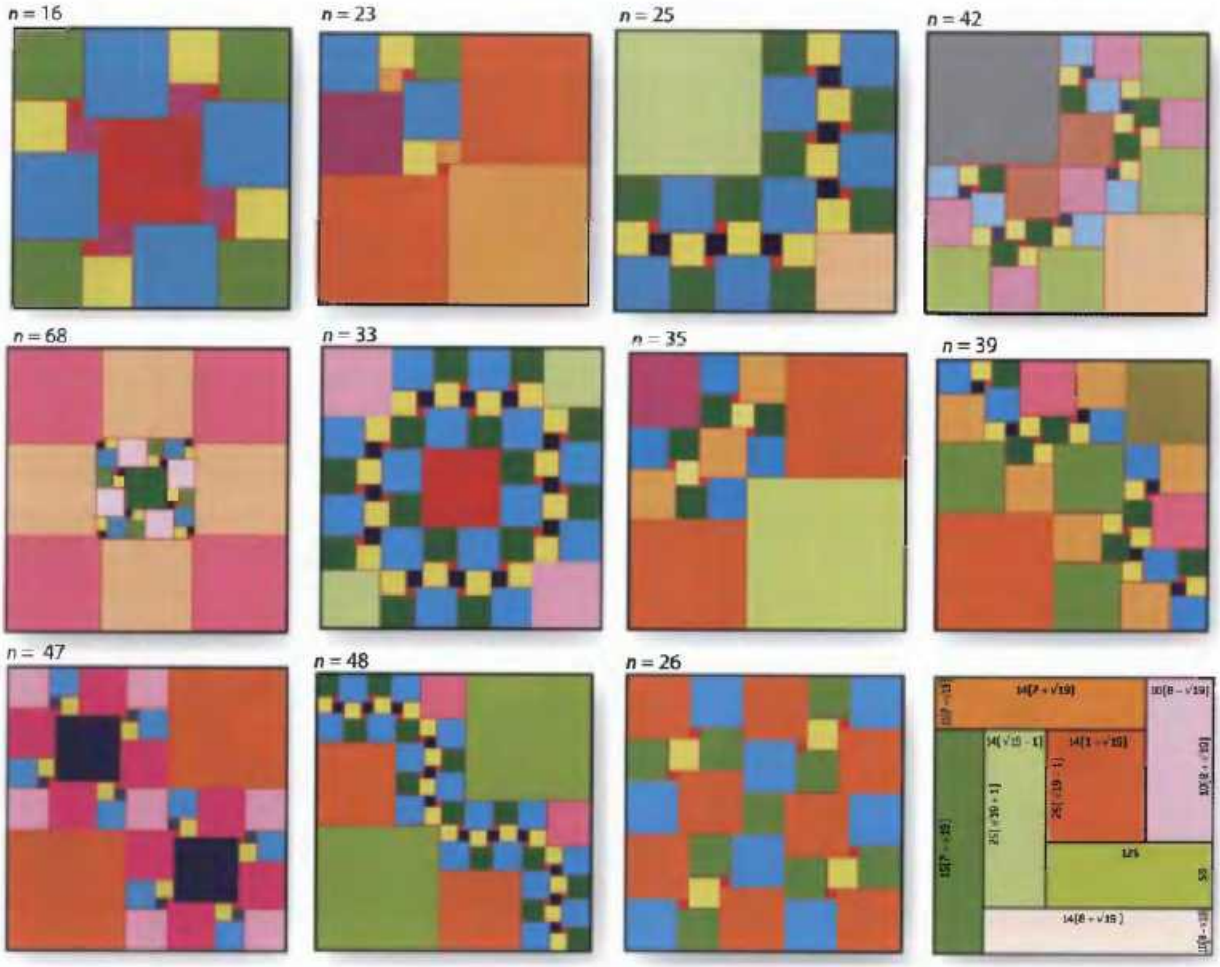
Imposer aux carrés utilisés dans un découpage d'avoir des tailles différentes est ce qui rend difficile le problème des pavages *parfaits*, mais cela a aussi pour conséquence que les solutions ne possèdent pas de symétrie et pour tout dire apparaissent complexes et même incompréhensibles. La beauté provenant souvent d'un mélange judicieux d'ordre et de désordre, il est tentant de rechercher des découpages du carré en carrés plus petits fondés sur des définitions moins exigeantes, et qui autorisent, si possible, certaines symétries agréables à l'œil.

K. Scherer, un passionné de problème de découpages, auteur de plusieurs livres de divertissement géométrique, a atteint ce but en proposant, d'une part, la définition des découpages sans *coïncidence (no-touch tiling)* et, d'autre part, la définition des découpages *nulle part nets (nowhere neat tiling)*.

Pour K. Scherer, un pavage *sans coïncidence* du carré est un pavage du carré tel que les côtés de deux carrés plus petits de même taille (qui, ici, ne sont pas interdits) n'ont aucun segment en commun. Autrement dit, lorsque l'on cherche un découpage *sans coïncidence*, on peut utiliser plusieurs carrés de même taille, mais alors il faut s'arranger pour qu'ils ne se touchent pas, ou alors uniquement en un sommet.

Découpages *sans coïncidence*

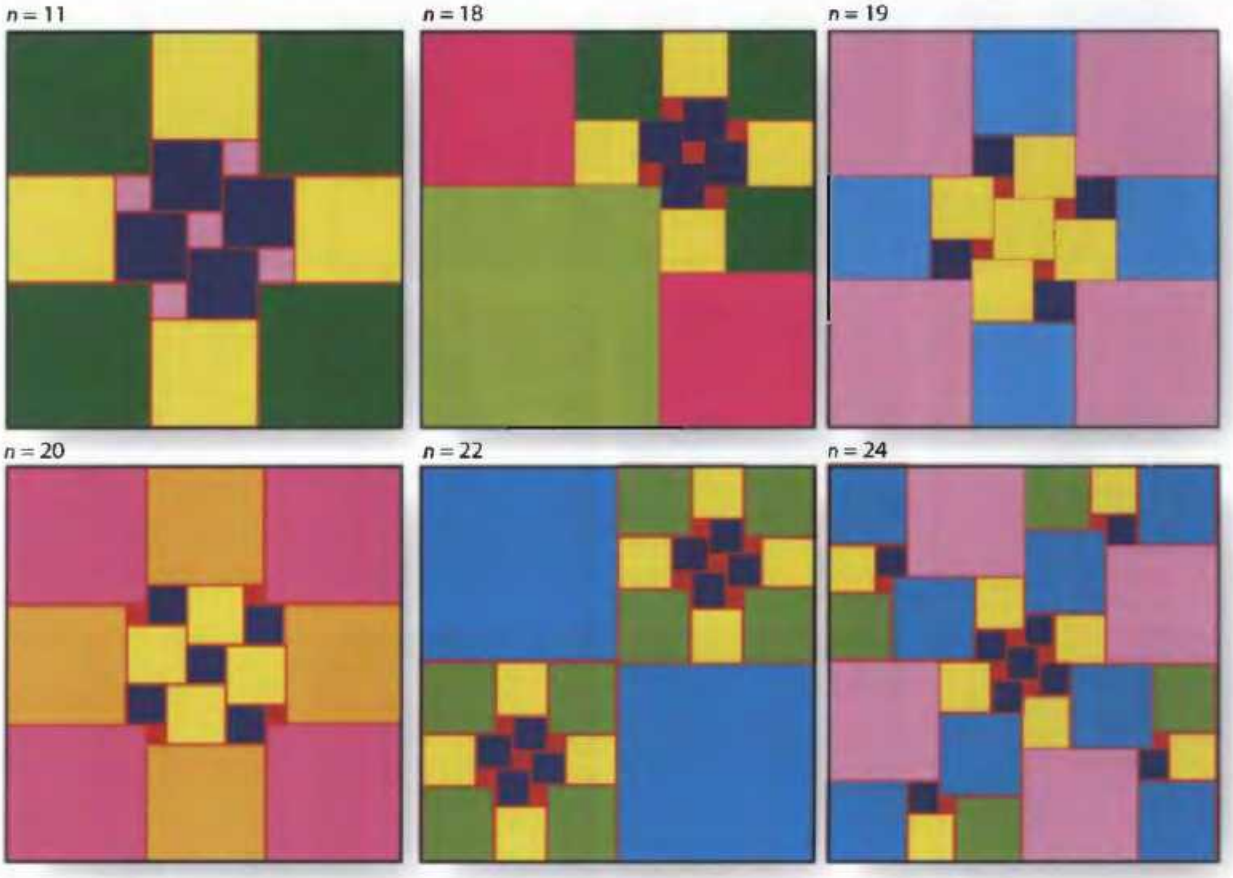
Les découpages du carré en n^2 carrés de même taille, bien sûr, ne satisfont pas la propriété d'être *sans coïncidence*. De même, les découpages trop réguliers sont exclus par la définition de K. Scherer. À l'opposé, les pavages *parfaits* sont *sans coïncidence* puisqu'ils n'utilisent pas de carrés de taille identique. La définition proposée par K. Scherer est



Découpages *sans coïncidence* du carré. Un découpage du carré en carrés plus petits est *sans coïncidence* si les côtés de deux petits carrés de même taille (ils ne sont pas interdits) n'ont pas de segments communs : les carrés de taille identique ne se touchent pas, ou seulement en un point. De tels pavages, contrairement aux pavages *parfaits*, ont parfois des symétries. La complication minimum de ces pavages et les coloriages des carrés de même dimension donnent de beaux tableaux. Par définition, le plus petit carré du découpage est de côté 1 ; Karl Scherer a démontré qu'il existe des découpages *sans coïncidence* uniquement pour les carrés de côtés 16, 23 et plus grand que 24. Quand il existe un découpage *sans coïncidence* pour le carré de côté n, il en existe aussi un à la fois *sans coïncidence* et *sans cassure* (ne faisant apparaître aucune ligne horizontale ou verticale traversant tout le carré). En bas à droite, le découpage de Blanche Descartes. Blanche Descartes a démontré qu'un carré ne peut être divisé en rectangles de même aire et de formes différentes que si on utilise au moins sept rectangles, et que c'est possible avec sept rectangles différents.

tolérante, mais pas trop et les résultats sont esthétiquement intéressants, chaque pavage *sans coïncidence* possédant une sorte d'harmonie interne globale qui n'exclut pas les symétries. Des exemples de découpages *sans coïncidence* sont présentés sur la figure 3. Le problème de leur dénombrement semble pour l'instant ne pas avoir été abordé et c'est donc un défi pour tous les amateurs de divertissements combinatoires et géométriques. Le mathématicien ne saurait se contenter de l'attrait esthétique des figures qu'il produit, il veut aussi comprendre plus en profondeur, et énoncer des lois générales pour les objets et familles d'objets qu'il définit. K. Scherer, en examinant de près les pavages *sans coïncidence*, a démontré les résultats remarquables suivants :

– Les carrés de côté entier qu'on peut décomposer en pavages *sans coïncidence* par des carrés de côté entier sont les carrés de côté 16, 23 ou de côté plus grand que 24. En particulier, pour tout entier plus grand que 24, il existe un découpage *sans coïncidence* du carré de côté n.



Découpages *nulle part nets* du carré. Les découpages *nulle part nets* sont par définition ceux qu'on obtient en découpant un carré en carrés plus petits de telle façon que deux carrés de même taille ne soient jamais regroupés en un rectangle (de type 1x2). Tout découpage *sans coïncidence* est *nulle part net*, mais l'inverse est faux. Là aussi, la longueur du côté du plus petit carré définit l'unité. Pour les entiers 11, 18, 19, 20, 22 et 24, il n'existe pas de découpage *sans coïncidence* du carré de côté *n* (entier), mais il en existe qui sont *nulle part nets*. Pour les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17 et 21, il n'existe ni découpage *sans coïncidence* ni découpage *nulle part net*. Pour l'entier 22, et c'est le seul entier dans ce cas, tous les découpages *nulle part nets* possèdent des cassures (en bas, au milieu).

– Si on nomme découpage *sans cassure* un découpage ne faisant apparaître aucune ligne horizontale ou verticale traversant le carré d'un côté à l'autre, alors tout carré de côté entier qui peut être découpé *sans coïncidence* peut aussi être découpé *sans coïncidence* et *sans cassure*. De plus, dans chacun de ces découpages, on peut imposer qu'un carré de côté 1 soit présent (ce qui assure que le découpage n'est pas le résultat du grossissement d'un découpage plus petit).

La démonstration de ces théorèmes est assez longue et comporte deux parties de nature très distincte. La première établit qu'on ne peut pas trouver de découpages *sans coïncidence* pour les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24 et a été menée à l'aide de programmes informatiques explorant systématiquement les combinaisons. L'échec du programme dans sa recherche constitue la démonstration qu'il n'existe pas de solution. La seconde partie de la démonstration repose sur une série de constructions élémentaires qui sont ensuite associées soigneusement et qui montrent comment obtenir les découpages dont l'énoncé affirme l'existence. Cette seconde partie, assez longue et minutieuse, est donc constructive : elle ne se contente pas d'affirmer que les décompositions existent, elle en explicite les constructions.

Les carrés dont le côté est trop petit ne peuvent avoir de découpages *sans coïncidence*. Dans le but de limiter les cas sans solution et toujours avec l'idée d'obtenir une intéressante définition excluant les découpages trop réguliers sans interdire systématiquement symétries et régularités, K. Scherer a proposé la notion de découpage *nulle part net* qui réduit encore les exigences sur le découpage et permet d'obtenir une plus grande variété de découpages harmonieux.

Découpages *nulle part nets*

Par définition, un découpage du carré en carrés plus petits est *nulle part net* si deux carrés de même taille du découpage ne partagent jamais entièrement un côté. Autrement dit, selon cette définition, les carrés de même taille peuvent se toucher et même posséder un segment en commun, pourvu que les côtés en contact ne soient jamais exactement superposés. Grâce à ce qu'on sait déjà concernant les découpages sans coïncidence, on peut affirmer que tout carré de côté supérieur à 24 possède un découpage *nulle part net*. Mais qu'en est-il pour les entiers entre 1 et 24 ?

Karl Scherer a résolu entièrement la question : pour les entiers 11, 16, 18, 19, 20 et pour tous ceux au-delà de 21, il existe un découpage *nulle part net*. De plus, sauf pour 22, le découpage *nulle part net* peut être choisi sans cassure. Pourquoi cette singularité de 22 ? Nul ne l'a expliquée.

La démonstration du résultat sur les pavages *nulle part nets* est obtenue en menant une recherche systématique par ordinateur pour chaque entier n inférieur à 25, recherche qui, soit produit une solution, soit établit qu'il n'y en a pas pour cette valeur de n. L'utilisation de l'ordinateur pour démontrer les résultats négatifs (pas de pavages sans coïncidence pour $n = 24$ par exemple) est-elle évitable, par l'utilisation de raisonnements astucieux ? Je l'ignore, mais la situation est remarquable et prouve que l'ordinateur ne doit pas être considéré en mathématiques comme un concurrent de l'homme, mais bien plus comme un allié qui le décharge de la nécessité de produire des raisonnements longs et répétitifs pour résoudre des questions de cette nature.

Depuis longtemps, on a accepté l'idée que pour calculer les constantes numériques (π, e, etc.) s'interdire d'utiliser des ordinateurs était absurde : on les fait calculer et, sans état d'âme, on accepte les résultats qu'ils produisent. Dans de nombreux problèmes combinatoires, il en va de même : un programme donnera la réponse sans plus de risque d'erreur qu'un raisonnement contourné ou énumératif (lui aussi sujet à l'erreur) et sera donc préférable, pourvu qu'un soin suffisant ait été apporté à la mise au point du programme et au contrôle de son bon fonctionnement.

L'infinité de découpages parfaits

Répondons à la question posée en début d'article. Prenons un découpage *parfait* du carré, par exemple le découpage en 21 carrés. En découpant le plus petit carré de ce découpage selon le même schéma, on obtient un nouveau découpage du carré en 41 carrés (les 20 carrés laissés intacts du premier découpage, auxquels s'ajoutent les 21 obtenus en découpant le plus petit carré). Ce découpage est *parfait* car tous les carrés découpant le petit carré sont plus petits que les 20 plus gros. En recommençant l'opération, on obtient un découpage parfait en $20 + 20 + 21 = 61$ carrés et, après n étapes, en $n \times 20 + 21$ carrés. Nous disposons bien d'une infinité de découpages parfaits du carré. La méthode s'applique bien sûr au découpage sans *coïncidence*, aux découpages sans cassure et aux découpages *nulle part nets*.

Le miraculeux «lemme de Burnside»

Pour réussir de délicats décomptes, amateurs et inventeurs de casse-tête, n'oubliez pas un théorème magique qui, en fait, n'est pas de Burnside !

Les mathématiciens ont un légitime souci de précision et s'attachent à donner une forme générale et abstraite à leurs résultats, forme qui garantit auprès de leurs collègues compréhension, respect et diffusion. Cependant ce sérieux fait qu'un résultat simple et qui serait utile à de nombreux autres scientifiques ou amateurs est parfois rendu opaque, voire inaccessible. Trop de précisions techniques rendent absconses des vérités élémentaires et en interdisent l'usage à un plus grand nombre.
Le lemme de Burnside est l'exemple même d'une telle situation. Énoncé comme un résultat de la « théorie des groupes opérant sur un ensemble », il risque de vous faire fuir, alors que ce théorème, maîtrisable rapidement, autorise des dénombrements remarquables, parfois impossibles sans lui. Notre but sera de vous initier à ce résultat magique dont le graveur Maurits Escher aurait pu profiter lors de ses recherches sur les pavages du plan.

Ce résultat est dénommé *lemme de Burnside* en référence au mathématicien William Burnside qui le mentionna dans son livre de 1887 sur les groupes finis. Cependant le lemme (en fait un théorème) semble avoir été connu bien avant, par Augustin-Louis Cauchy et Ferdinand Frobenius, ce qui fait qu'on lui donne parfois le nom de Lemme de Cauchy-Frobenius. George Polya en fit aussi un grand usage et le généralisa, d'où encore des dénominations incluant Polya. En définitive, personne ne sait qui l'a découvert et énoncé pour la première fois. Pour éviter une attribution inexacte et disposer quand même d'un nom commode, certains mathématiciens ont décidé de le nommer « lemme qui n'est pas de Burnside ».



Le lemme de Burnside, comme un tour de prestidigitation, donne le nombre de configurations d'un objet, ici les treize configurations d'un ballon partagé en six secteurs (problème équivalent à celui des hexagones transparents expliqué plus loin).

Le décompte des dominos

Prenons un problème de décompte facile, pour nous entraîner : nous le résoudrons d'abord sans le lemme de Burnside, puis nous montrerons qu'il nous facilite la tâche. Nous souhaitons savoir combien il y a de dominos différents (au

sens du jeu de dominos où l'on peut retourner de 180 degrés un domino) quand on dispose de 7 symboles pour chaque case (rien, un, deux, trois, quatre, cinq et six points). On sait, en comptant dans la boîte, qu'il y a 28 dominos différents.

Notons 0, 1, ..., 6 les symboles dénotant le nombre de points. Il y a les dominos qui comportent le symbole 0 (la case vide). Ce sont: [0,0], [0,1], [0,2], [0,3], [0,4], [0,5], [0,6].

Il y a ceux avec une case comportant un point, noté 1. Nous éliminons le domino [1,0] qui a déjà été compté. Ce sont donc: [1,1] [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6].

Il y a ceux avec 2. On élimine [2, 0] et [2, 1] que nous avons déjà comptés. Ce sont: [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6]. Nous continuons jusqu'aux dominos avec 5 qui sont [5,5] et [5,6], et enfin jusqu'au seul domino avec 6 et non déjà compté, le double six, [6,6]. Cela fait en tout 7+6+5+4+3+2+1, soit 28 dominos différents. Cela n'est pas très ardu. Or, déjà là, le lemme de Burnside nous facilitera l'obtention de la solution. Énonçons-le:


William Burnside (1852-1927)


Augustin Cauchy (1789-1857)


Ferdinand Frobenius (1849-1917)


George Polya (1887-1985)



Quand on dispose d'objets pouvant se transformer les uns en les autres par l'application d'opérations $t_1, t_2, \ldots t_n$, le nombre d'objets réellement différents est donné par la moyenne des nombres d'objets qui restent invariants lorsqu'on applique les opérations $t_1, t_2, \ldots t_n$.

Les objets que nous considérons ici sont les dominos. Si nous ne pouvions pas les bouger, ils seraient au nombre de 49 (7 choix pour la case de droite, 7 choix pour la case de gauche). Nous les nommerons dominos immobilisés pour les distinguer des dominos véritables (dans les dominos du jeu, on peut tourner un domino de 180 degrés sans changer sa nature). Ici, il y a seulement deux opérations à considérer.

1) L'identité *I*, qui ne change pas la position d'un domino. Dans toutes les applications du lemme de Burnside, nous aurons à considérer l'opération identité qui ne change rien. Ici, l'identité *I* laisse les 49 dominos immobilisés invariants.

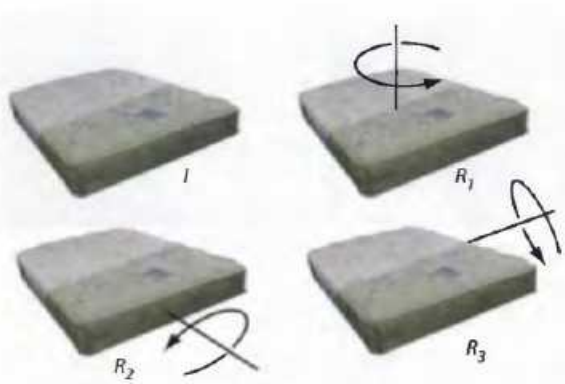
2) La rotation *R* de 180 degrés: le domino *[a, b]* devient *[b, a]*. La rotation *R* laisse 7 dominos invariants, car, quand on l'applique à un domino de la forme *[i, i]*, celui-ci est transformé en lui-même, et ce sont les seuls qui restent identiques quand nous appliquons *R*.

La moyenne de deux nombres, 49 et 7, est 56/2 = 28. D'après le lemme de Burnside, c'est le nombre de dominos véritables. Nous avions aussi trouvé 28 par l'autre raisonnement: tout va bien. Notons que le dénombrement avec Burnside a été légèrement plus simple.

Traitons maintenant un deuxième exemple où le lemme de Burnside va, cette fois, nous faciliter grandement la tâche.

Le matelas à k couleurs

Nous considérons un matelas dont la longueur est double de la largeur et dont l'épaisseur est sans importance. Chaque face du matelas est divisée en deux carrés et chacun des quatre carrés du matelas est colorié par une couleur prise dans un ensemble de k couleurs (ce matelas est un domino à double face). De combien de façons vraiment différentes pouvons-nous colorier ce type de matelas avec ces k couleurs ? Nous utiliserons directement le lemme de Burnside, puis nous vérifierons notre résultat sur un cas particulier.



Si nous ne pouvions pas bouger les matelas (matelas immobilisés), il y aurait k^4 façons différentes de les colorier, car chaque carré peut être colorié avec une couleur choisie parmi k. Cependant, on peut bouger les matelas et ce qu'on veut, c'est connaître le nombre de matelas vraiment différents (le nombre de matelas véritables). Cette fois il y a quatre opérations.

1) L'identité I.

2) La rotation R_1 de 180 degrés par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du matelas et passant par son centre.

3) La rotation R_2 de 180 degrés par rapport au grand axe du matelas.

4) La rotation R_3 de 180 degrés par rapport à l'axe horizontal qui coupe en deux carrés le plan du matelas.

Pour chacune de ces quatre opérations, comptons le nombre de matelas qui restent identiques à eux-mêmes quand on leur applique l'opération. La moyenne de ces quatre nombres sera le nombre de matelas réellement différents.

Bien sûr, pour l'identité I, les k^4 matelas sont invariants.

Pour R_1, il y a k^2 matelas invariants, car pour qu'un matelas soit invariant quand nous appliquons R_1, il faut que les deux couleurs utilisées pour le dessus soient identiques, ainsi que les deux couleurs utilisées pour le dessous. Il y a k façons de choisir la couleur du dessus, et k pour celle du dessous, et donc cela fait k^2 matelas invariants par R_1. Pour R_2, il y a de même k^2 matelas invariants. Cette fois, il faut que chaque carré du dessus soit colorié comme celui situé juste en dessous, ce qui à nouveau amène à choisir deux couleurs pour chaque matelas invariant par R_2. Pour R_3, il y a encore k^2 matelas invariants : le coloriage du dessous doit être le même que celui du dessus en intervertissant les couleurs des deux carrés. La moyenne des 4 nombres que l'on vient de trouver est :

$$M = (k^4 + k^2 + k^2 + k^2)/4 = (k^4 + 3k^2)/4$$

D'après le lemme de Burnside, il s'agit du nombre de matelas véritablement distincts. Pour s'assurer que le résultat est juste, nous ne ferons pas un raisonnement direct – c'est possible, mais assez long et délicat – nous nous contenterons d'un contrôle dans le cas particulier de deux couleurs ($k = 2$). Le lemme donne : $M = (16+12)/4 = 7$.

Le décompte se fait directement et on constate qu'il y a effectivement 7 matelas vraiment différents qui sont (avec une notation évidente) :

$$\begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & b \\ b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & b \\ n & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & n \\ b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & b \\ b & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & n \\ b & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}$$

Groupes

Donnons quelques précisions sur les conditions d'utilisation du lemme de Burnside, car notre premier énoncé du lemme est trop vague. L'ensemble des opérations permettant de transformer les objets les uns en les autres doit être ce qu'on appelle un groupe, ce qui signifie trois conditions.

(a) Il faut que parmi les opérations, il y ait l'opération identité (celle qui ne change rien).

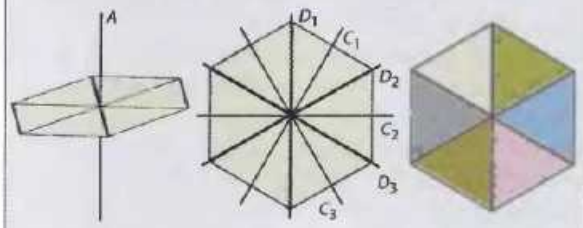
(b) Il faut que la liste des opérations soit complète : si r et s sont des opérations, l'opération consistant à appliquer r après s (notée rs) doit aussi être dans la liste des opérations envisagées.

(c) Il faut que chaque opération r ait son inverse s: si r est une opération, il faut qu'il existe une opération s qui inverse le travail de r, c'est-à-dire telle que l'application de r, puis de s, (ainsi que l'opération consistant à appliquer s, puis r) soit l'identité.

À chaque fois que nous dénombrerons des objets concrets solides (dominos, matelas, jetons, cubes, etc.), ces conditions seront automatiquement

2. Les jetons transparents

Déterminons le nombre de jetons hexagonaux (chacun composé des six triangles équilatéraux) vraiment différents quand on dispose de k couleurs différentes (pour les triangles équilatéraux) et qu'on impose aussi que chaque jeton soit composé de 6 couleurs exactement.



Il y a 12 opérations à considérer *(voir le texte principal)* qui chacune laisse un certain nombre de jetons invariants. 1) L'identité : $k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)$ jetons invariants. 2) La rotation de 60 degrés autour de l'axe A passant par le centre et perpendiculaire au plan du jeton et les rotations de 120, 180, 240, 300 degrés laissent 0 jeton invariant. 3) Les rotations de 180 degrés par rapport aux droites D_1, D_2, D_3, C_1, C_2, C_3 laissent 0 jeton invariant. 4) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_2 : 0 jeton invariant. D'après le lemme de Burnside, cela fait donc en tout $M = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)/12$ jetons différents.

3. La bande de chiffres

Écrivons n chiffres sur une bande de papier. Par exemple : 5 0 1 2 3 6 7 9. Nous voulons déterminer combien il existe de bandes vraiment différentes.

La difficulté vient des bandes du type 0 1 9 6 1 0, car, d'une part, 0 1 8 sont invariants quand on les retourne de 180 degrés et, d'autre part, 6 et 9 s'échangent. Ainsi 1 9 6 et 9 6 1 représentent la même bande.

Nous définissons deux opérations (l'astuce mathématique est due à C. L. Liu) qui sont :

1) L'identité I.

2) L'opération R de retournement conditionnel qui retourne la bande quand elle ne comporte que des chiffres parmi les symétriques, soit 0, 1, 6, 8, 9, et qui, sinon, ne fait rien.

I, R constituent bien un groupe.

Pour I il y a 10^n bandes invariantes, chaque chiffre étant pris dans la liste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour R il y a deux types de bandes invariantes.

Premier type : $(10^n - 5^n)$. Il y a 10^n bandes dont 5^n ne comportent que les chiffres 0, 1, 6, 8 et 9, donc il y en a $10^n - 5^n$ comportant au moins un chiffre autre que 0, 1, 6, 8 et 9.

Deuxième type : $5^{n/2}$ bandes invariantes avec 0, 1, 6, 8 et 9 si n est pair (la connaissance d'une moitié de la bande impose l'autre moitié).

$3 \times 5^{(n-1)/2}$ bandes invariantes avec 0, 1, 6, 8 et 9 si n est impair (le chiffre central doit être l'un des trois chiffres 0, 1, 8 car seuls 0, 1 et 8 sont invariants (le 6 et le 9 s'échangent) quand on retourne la bande et pour les $n-1$ autres, la connaissance de la moitié d'entre eux détermine les autres).

La réponse est donc :

$M = (10^n + 10^n - 5^n + 5^{n/2})/2$, si n est pair.

$M = (10^n + 10^n - 5^n + 3 \times 5^{(n-1)/2})/2$, si n est impair.

vérifiées si nous n'avons rien oublié, car les opérations que nous envisagerons seront celles qui transforment l'objet (rigide non colorié) en lui-même sans le déformer, ensemble qui est automatiquement un groupe (c'est un sous-groupe du groupe des déplacements). Dans certaines applications plus subtiles du lemme de Burnside où les opérations n'ont pas une interprétation géométrique de ce type, il faudra contrôler qu'on a affaire à un groupe *(voir l'exemple d'un tel cas à la figure 3)*.

Nous en savons assez maintenant pour aborder des dénombrements vraiment intéressants. Ceux qui veulent connaître les détails de la théorie et voir la démonstration du lemme trouveront facilement tout ce qu'ils souhaitent dans les livres d'algèbre ou sur Internet.

On souhaite créer une série de jetons hexagonaux, chacun composé de 6 triangles équilatéraux accolés et transparents que l'on colorie en choisissant dans une palette de k couleurs. On souhaite éviter qu'il y ait des jetons en double. Combien notre jeu comportera-t-il de jetons? Notons bien que, pour chaque jeton, il y a 6 couleurs à placer, car comme le jeton est transparent une couleur placée sur une face se voit des deux côtés. Le nombre de jetons *immobilisés* est donc k^6 et le nombre de jetons *véritables* que nous cherchons à connaître sera un nombre plus petit, obtenu comme la moyenne des nombres de jetons invariants des opérations géométriques qu'on peut faire sur un jeton et qui le laisse en place (rotations, retournements, autour des axes indiqués sur la figure 2).

4. Le coloriage du tétraèdre

Le tétraèdre régulier est l'un des cinq polyèdres platoniciens. Interrogeons-nous sur les différentes façons de colorier ses faces, toujours en utilisant des couleurs prises parmi k. Il y a cette fois 12 rotations différentes à prendre en compte. On les classe en trois catégories.
L'identité I: elle laisse invariants les k^4 tétraèdres possibles. Les 8 rotations de 120 degrés ou – 120 degrés ayant leur axe passant par un sommet et le centre d'une face : chacune laisse k^2 tétraèdres invariants. Les 3 rotations de 180 degrés dont les axes passent par le milieu de deux arêtes opposées : chacune laisse k^2 tétraèdres invariants.



Le lemme de Burnside nous indique immédiatement qu'il y a $M = (k^4 + 11k^2)/12$ façons différentes de colorier le tétraèdre. Pour $k = 2$, on obtient donc $M = (16 + 44)/12$ soit $60/12 = 5$, ce que l'on contrôle en faisant les dessins suivants avec leur patron :



5. Le coloriage du cube

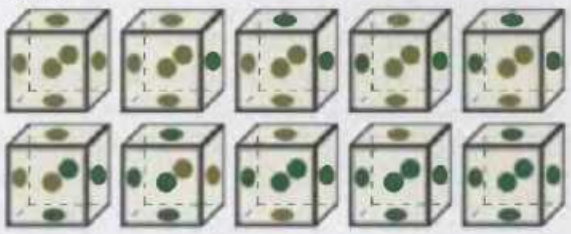
Nous voulons colorier les 6 faces d'un cube avec k couleurs. De combien de façons vraiment différentes est-ce possible?



24 opérations laissent invariant un cube non colorié.
1) L'identité laisse k^6 cubes invariants. 2) Six rotations de 90 degrés autour des axes passant par le centre de deux faces opposées. Chacune laisse k^3 cubes invariants. 3) Trois rotations de 180 degrés autour des axes passant par le centre des deux faces opposées. Chacune laisse k^4 cubes invariants. 4) Huit rotations de 120 degrés autour des axes passant par deux sommets diamétralement opposés. Chacune laisse k^2 cubes invariants. 6) Six rotations de 180 degrés autour des axes passant par le centre de deux arêtes diamétralement opposées. Chacune laisse k^3 cubes invariants.
Le lemme de Burnside donne :

$$M = (k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)/24$$

cubes vraiment différents, et l'on obtient, pour deux couleurs, $M = (2^6 + 3 \times 2^4 + 12 \times 2^3 + 8 \times 2^2)/24 = 10$, ce que l'on vérifie.



Pour 3 couleurs, on obtient $M = 57$. À vos scies et pinceaux!

Cette fois, il y a 12 opérations géométriques laissant en place un jeton (sans couleur). En même temps que nous en faisons la liste, nous comptons pour chacune le nombre de jetons coloriés invariants (tous les détails ne sont pas donnés).

1) L'identité : k^6 jetons invariants. 2) La rotation de 60 degrés autour de l'axe A passant par le centre et perpendiculaire au plan du jeton : k jetons invariants (les jetons invariants sont les jetons unicolores). 3) La rotation de 120 degrés autour de l'axe A : k^2 jetons invariants (les jetons invariants sont les jetons unicolores ou bicolores alternés). 4) La rotation de 180 degrés autour de l'axe A : k^3 jetons invariants. 5) La rotation de 240 degrés (ou – 120 degrés) autour de l'axe A : k^2 jetons invariants. 6) La rotation de 300 degrés (ou – 60 degrés) autour de l'axe A : k jetons invariants. 7) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_1 : k^3 jetons invariants. 8) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_2 : k^3 jetons invariants. 9) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_3 : k^3 jetons invariants. 10) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_1 : k^4 jetons invariants. 11) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_2 : k^4 jetons invariants. 12) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_3 : k^4 jetons invariants.

Soit une moyenne $M = (k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k)/12$.

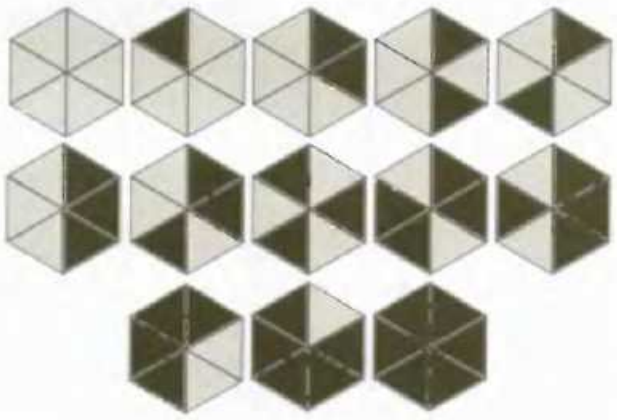
Contrôlons pour deux couleurs ($k = 2$). Le lemme de Burnside donne :

$M = (26 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 2 \times 4 + 2 \times 2) / 12 = (64 + 48 + 32 + 8 + 4)/12 = 156/12 = 13.$

Le fait que la fraction se simplifie en un entier n'est pas la preuve que notre décompte est bon, cependant c'est un bon signe ; car lorsqu'on se trompe en appliquant le lemme de Burnside, il est peu probable que la fraction finale se simplifie. On s'assure que 13 est la bonne réponse pour deux couleurs, car un peu d'attention nous fournit la liste suivante de jetons véritablement différents, qui sont bien au nombre de 13.

On peut aussi exiger que toutes les couleurs des triangles des jetons hexagonaux soient différentes *(voir la figure 2)* et appliquer là aussi le lemme de Burnside.

Les pavages de Maurits Escher



Venons-en à un cas amusant, car lié aux explorations combinatoires d'un artiste curieux de mathématiques. Au cours des années 1938-1943, le graveur hollandais Escher développa une série de techniques pour découper un plan en pavés superposables et emboîtables, qui le conduisirent à réaliser des œuvres universellement connues aujourd'hui. Il s'intéressa aussi à plusieurs problèmes d'énumération de pavages dont il envisagea un moment de vendre les solutions à des fabricants de carreaux de céramique, accompagnées de motifs adaptés. Voici un problème qui le préoccupa et qui lui fit remplir des dizaines de pages de ses carnets de croquis.

On se donne un motif géométrique ne possédant aucune symétrie (par exemple une main, ou la lettre k) et peint sur un carré. On considère les quatre façons de placer le carré quand on le fait tourner de 0, 90, 180 et 270 degrés. Désignons-les par A, B, C, D. Par symétrie, on obtient 4 autres motifs notés a, b, c, d, puis on construit des carrés 2×2 en prenant 4 motifs (éventuellement plusieurs fois le même) qu'on assemble côté à

6. Un pavage du plan

Maurits Escher dénombra de manière empirique les pavages avec seulement quatre carrés du type *A B C D* en éliminant les configurations de carrés qui conduisaient à des pavages déjà obtenus *(voir ci-contre)*. Il obtint 23 pavages différents de ce type. L'utilisation du lemme de Burnside – qu'il ne connaissait pas – confirme ce résultat.

En effet le nombre d'opérations possibles sur un pavage est 16, dont voici la liste avec le nombre de pavages invariants pour chacune.

1) L'identité I: 4^4 pavages invariants (4 choix pour chaque lettre). 2) La rotation R_1 d'un quart de tour: 4 pavages invariants (les quatre lettres du carré se déduisent d'une seule). 3) Rotation R_2 d'un demi-tour ($R_2 = R_1 \times R_1$): 4^2 pavages invariants (*A* et *B* imposent *C* et *D*). 4) R_3 rotation de trois quarts de tour ($R_3 = R_1 \times R_1 \times R_1 = R_2 \times R_1$): 4 pavages invariants (les quatre lettres du carré se déduisent d'une seule). 5) La translation vers la droite d'une case T_1: 4^2 pavages invariants (il s'agit de ceux de la forme XXYY). 6) La translation vers le haut d'une case T_2: 4^2 pavages invariants (ceux où les carrés sont de la forme XYYX). 7) La translation en diagonale d'une case $T_3 = T_1 \times T_2$: 4^2 pavages invariants (ceux où les carrés sont de la forme XYXY). 8) $R_1 \times T_1$: 0 pavage invariant. 9) $R_1 \times T_2$: 0 pavage invariant. 10) $R_1 \times T_3$: 4 pavages invariants. 11) $R_2 \times T_1$: 4^2 pavages invariants. 12) $R_2 \times T_2$: 4^2 pavages invariants. 13) $R_2 \times T_3$: 0 pavage invariant. 14) $R_3 \times T_1$: 0 pavage invariant. 15) $R_3 \times T_2$: 0 pavage invariant. 16) $R_3 \times T_3$: 4 pavages invariants.

Le lemme de Burnside nous donne donc un total de $M = (4^4 + 6 \times 4^2 + 4^2)/16 = 23$ pavages vraiment différents, ce qui confirme que la liste proposée par Escher est bonne.

côte comme représenté en haut à gauche de la figure ci-contre.

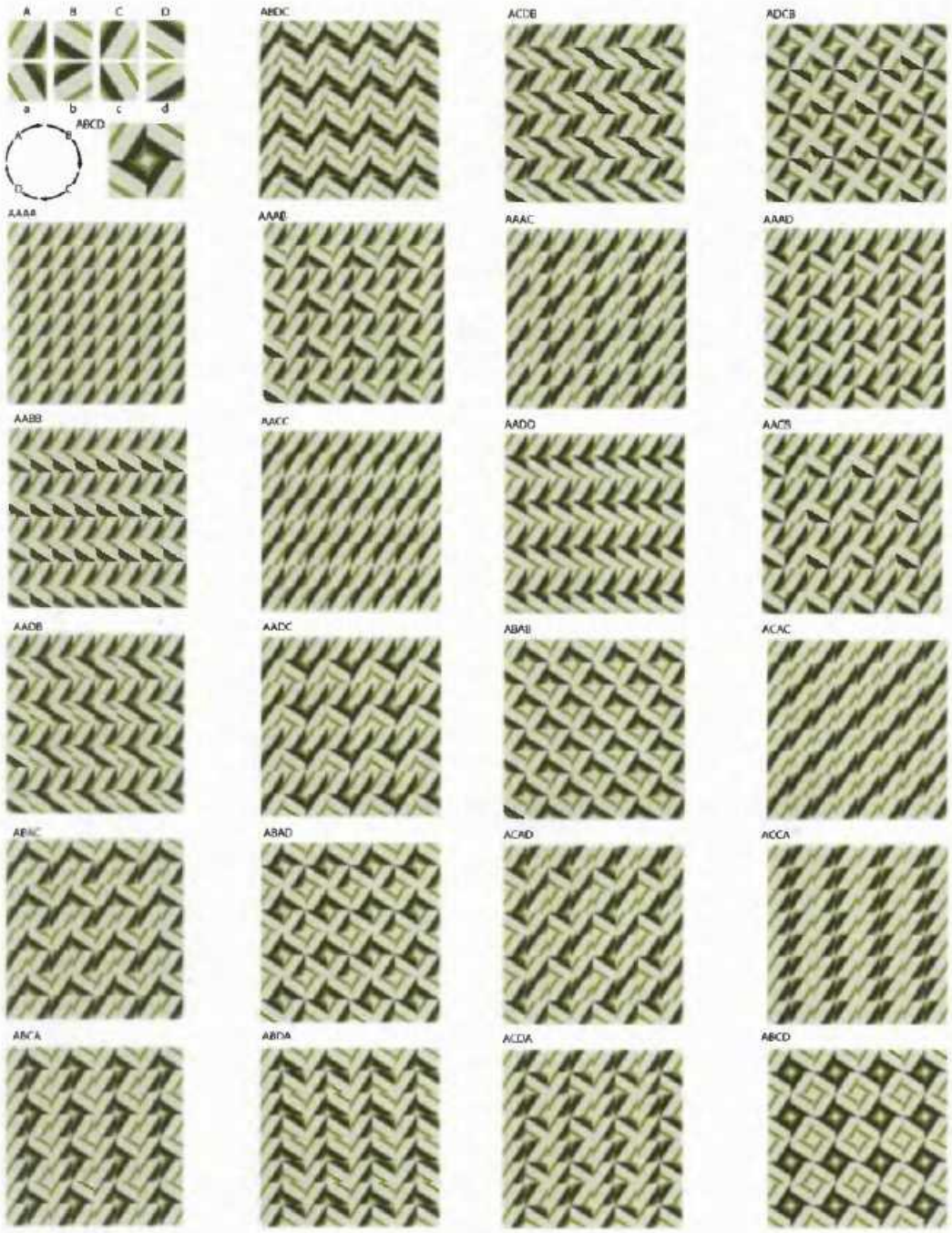
Utilisant ce carré de 4 motifs, on pave alors le plan par translations horizontales et verticales répétées du motif. Escher se demande: combien de pavages vraiment différents peut-on obtenir? La question n'est pas facile, car le carré *A B C D* donne le même pavage que les carrés *B A C D* ou *D C B A*. De plus, les pavages qui se déduisent l'un de l'autre par rotation compliquent encore la tâche. Escher se limita dans un premier temps à l'utilisation de *A, B, C, D*. Il aboutit à 23 pavages vraiment différents de ce type. L'usage du lemme de Burnside – qu'il ne connaissait pas – confirme ce résultat.

Escher se posa d'autres problèmes du même type et finit par buter sur une explosion de combinaisons impossibles à maîtriser, même pour l'artiste méticuleux qu'il était. Il réussit à trouver que si on compose le motif carré 2 × 2 en prenant 2 fois le même motif de base (parmi *A, B, C* et *D*) et deux fois un motif obtenu par symétrie (donc parmi *a, b, c* et *d*), par exemple *A c c A*, on peut réaliser 10 pavages différents. En revanche, il échoua en voulant compter combien il y a de pavages obtenus en composant le carré 2 × 2 avec deux carrés différents parmi *A, B, C* et *D* et deux carrés différents pris parmi leurs symétriques *a, b, c, d*. Au lieu du bon résultat qui est 39, il n'en trouva que 37 (et même 36, car deux des pavages de sa liste sont identiques). Depuis, le problème des pavages de Escher a été repris et traité complètement. C'est ainsi que, récemment, Dan Davis a pu énumérer à l'aide d'un programme les 154 pavages différents qu'on obtient avec un motif carré 2 × 2 composé sans restriction de quatre carrés pris parmi *A, B, C, D, a, b, c, d*.

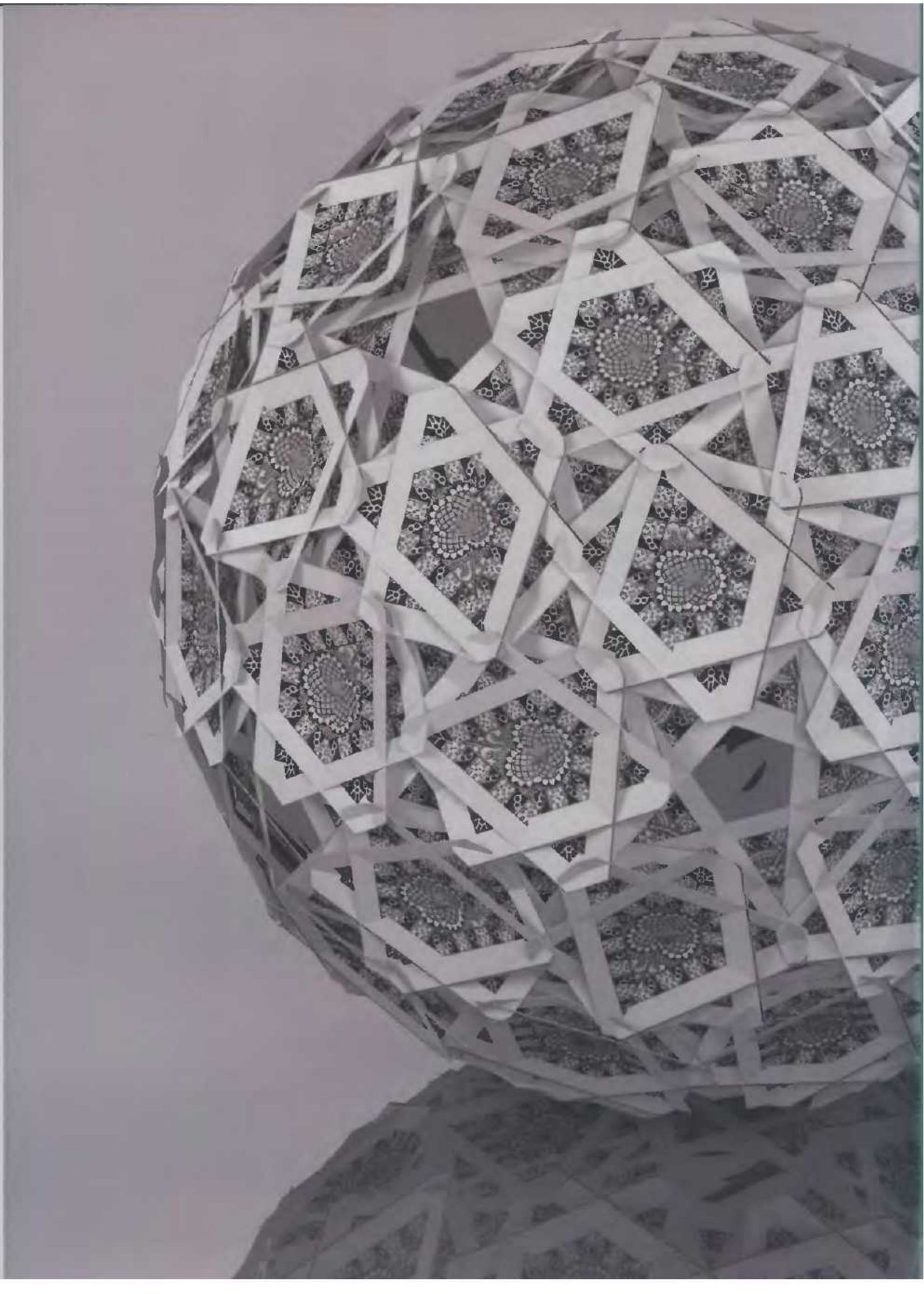
Burnside pour les jeux, la chimie et la musique

Dans le domaine des applications ludiques, indiquons que le lemme de Burnside a été utilisé pour compter combien de configurations vraiment différentes possède le fameux cube de Rubik. Il y en a: $(8! \times 12! \times 3^8 \times 2^{12})/(2 \times 3 \times 2) = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$ si l'on compte plusieurs fois les cubes qui, par rotation (de tout le cube), se ramènent les uns aux autres (résultat de E. Turner et K. Gold). Le nombre véritable de configurations différentes, calculé par Dan Hoey en utilisant le lemme de Burnside, est sensiblement plus petit: 901 083 404 981 813 616.

Le lemme est très apprécié des théoriciens de la musique qui, grâce à lui, comptent combien de structures différentes sont possibles (canons, rythmes cycliques, etc.) et des chimistes qui s'en servent pour dénombrer les isomères.



Le lemme de Burnside illustre la magie des mathématiques: grâce à lui, l'impossible devient simple. L'expliquer aux élèves leur montre que le passage par l'abstrait – même s'il est fait par des théoriciens dont on n'arrive pas à comprendre parfaitement les subtils raisonnements – donne des outils (lemmes, théorèmes, etc.) que chacun peut maîtriser et qui simplifient le monde.





CHAPITRE 3

Jeux

Les *Sudoku*, les lotos et loteries, les pliages de papier, les jeux avec des pièces en bois, et les jeux sociaux ont la propriété commune qu'on peut y jouer sans rien connaître aux mathématiques. Chacun en pratiquant ces activités y découvre seul des raisonnements qui le font avancer et améliorent sa réussite... et chacun finit aussi par se dire qu'une petite aide mathématique permettrait peut-être d'aller encore plus loin dans la compréhension et le succès.

Enchevètrement, image de Francesco De Comité (2009). Il s'agit d'un solide engendré par des cartes à jouer s'imbriquant les unes dans les autres. Chaque carte est sur l'arête d'un dodécaèdre adouci.

Le tsunami du *Sudoku*

J'aime les chiffres, je les adore, j'en suis malade :
il me faut au moins cinq grilles par jour. Est-ce grave docteur ?

Un jeu de pure logique, susceptible de vous fâcher avec vos proches quand vous refusez d'interrompre vos parties, ne peut séduire, croit-on, qu'un nombre très réduit de gens : mathématiciens, informaticiens ou ludomanes maniaques. Or son extravagant succès prouve qu'il n'en est rien : le *Sudoku* est partout ! Cet étrange et improbable phénomène social, un jeu de raisonnement qui a submergé tous les continents en quelques mois, rappelle le succès du cube de Rubik : au début des années 1980, il devint une passion pour des centaines de millions de personnes. Dédié à ceux qui ont encore échappé à l'engouement du *Sudoku* et aux aficionados qui souhaitent en apprendre plus sur ce jeu, voici un texte sur le sujet dont nous contribuons ainsi à « étendre les ravages ».

Japon ou États-Unis ?

Le nom *Sudoku* utilisé en occident provient des mots japonais *Su* = nombre et *Doku* = seul. Or ce jeu est nommé le plus souvent *Number Place* au Japon : il a ainsi, en Orient comme en Occident, le charme des curiosités exotiques !

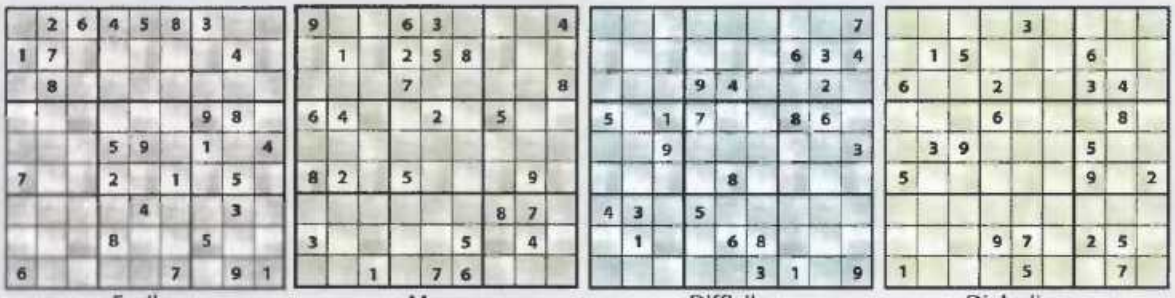


	9	8						
				7				
				1	5			
1								
			2					9
			9		6		8	2
							3	
5		1						
			4				2	

7	9	8	6	2	4	3	1	5
3	1	5	8	7	9	2	4	6
2	6	4	3	1	5	9	7	8
1	2	9	5	8	7	4	6	3
6	8	3	2	4	1	7	5	9
4	5	7	9	3	6	1	8	2
9	4	2	1	5	8	6	3	7
5	3	1	7	6	2	8	9	4
8	7	6	4	9	3	5	2	1

Rosa Bonheur (1822-1899) dans son atelier : sur le faux tableau et aussi à gauche, un des *Sudokus* comportant le moins de chiffres (17), donc difficile, avec sa solution.

2. Quatre grilles pour se faire la main



Facile Moyen Difficile Diabolique

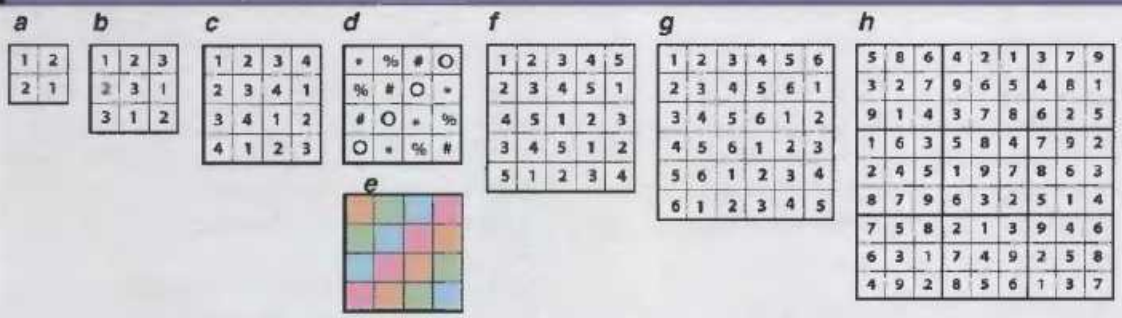
Voici quatre grilles de niveaux progressifs pour que vous puissiez prendre goût à la résolution de *Sudokus*. Le jeu consiste à remplir les grilles avec les chiffres de 1 à 9, sans qu'un même chiffre se trouve plus d'une fois dans une même colonne, une même ligne ou un même sous-carré. Les solutions des quatre grilles sont données sur la figure 7.

Les règles en sont simplissimes. Une grille carrée de 81 cases est divisée en 9 carrés plus petits de 9 cases chacun ; nous les nommerons les sous-carrés. Dans certaines des 81 cases, des chiffres sont inscrits au début de la partie. Il faut remplir les cases vides, en utilisant les chiffres de 1 à 9, de façon qu'aucun chiffre n'apparaisse deux fois dans la même ligne, ou deux fois dans la même colonne, ou deux fois dans le même sous-carré.

Selon les canons du *Sudoku*, la solution doit être unique. La figure 2 propose quatre *Sudokus* : l'un de niveau facile, le second de niveau moyen, le troisième de niveau difficile, et le dernier... diabolique. Remarquez qu'aucune opération (addition, multiplication ou autre) n'est utile à la résolution d'un *Sudoku*. On pourrait remplir les grilles avec neuf symboles différents autres que des chiffres (lettres, couleurs, petits dessins, etc.). Plus qu'un jeu de chiffres, c'est un jeu de combinaisons et pour y réussir il ne faut qu'une logique implacable et obstinée (certaines techniques de résolution sont explicitées figure 4).

Les premiers *Sudokus* furent publiés en mai 1979 à la page 6 du numéro 16 de la revue américaine *Dell Pencil Puzzles and Word Games* (Norwalk, Connecticut). Leur auteur est sans doute Howard Garns un architecte à la retraite, mort en 1989 à Indianapolis, sans avoir pu assister au succès planétaire, de son invention. Garns, ainsi que les premiers auteurs de grilles de *Sudoku*, composaient leurs énoncés à la main.

3. Carrés latins et *Sudokus*



Les carrés latins sont des dispositions en carré des permutations de *n* symboles. Chaque colonne et chaque ligne doit contenir les *n* symboles. (*a*, *b* et *c*) carrés latins d'ordre 2, 3 et 4. (*d* et *e*) carré latin d'ordre 4 avec des symboles et des couleurs. (*f* et *g*) carrés latins d'ordre 5 et 6. (*h*) Grille de *Sudoku*, un carré latin d'ordre 9 où les permutations sont telles que chacun des neuf sous-carrés contient les nombres de 1 à 9.

4. Les méthodes de résolution

Nous examinerons ici quatre méthodes pour avancer dans la résolution d'une grille de *Sudoku*.

a

5		1					9	6
				9			5	
				●	5	2		7
4	9		1				7	
	●				7			
1	3	●					2	
3	●	4	●	5	9	●		●
●	2	8		7	1		4	
7	6	5	8	2				

Les méthodes 1 et 2 gagnent à être employées en même temps (un peu de l'une un peu de l'autre, etc.) et sont les plus rapides. Malheureusement, elles deviennent parfois impuissantes pour que nous puissions progresser dans une grille. Nous passerons alors à la méthode 3, et, si elle se révèle encore insuffisante, à la méthode 4 qui marche à tous les coups, mais est plus délicate. D'autres méthodes sont possibles que vous inventerez vous-même où que vous trouverez décrites sur les sites Internet spécialisés.

Méthode 1 : la case forcée

Vous considérez une case fixe. En observant les autres chiffres présents dans la même colonne, la même ligne ou le même sous-carré, vous découvrez qu'il ne reste qu'une seule possibilité. Vous remplissez donc la case. Bien sûr s'il reste plusieurs possibilités, vous ne pouvez pas remplir la case considérée.

Exemples : les cases marquées en rouge sur la figure *a* sont les cases forcées de la grille.

Méthode 2 : le chiffre forcé

Vous considérez un chiffre fixé. Par exemple le 5. Dans les colonnes 1 et 3, il y a déjà des 5, mais il n'y en pas dans la colonne 2 qui doit en contenir un. Où peut-il être ? Pas dans les 3 premières cases de la colonne 2, car le sous-carré en haut à gauche contient déjà un 5. Pas dans les trois dernières cases de la colonne 2, car le sous-carré en bas à gauche contient déjà un 5. Donc le 5 de la colonne 2 est dans l'une des cases 4, 5 ou 6 de cette colonne. Une seule est libre : un 5 est donc dans la cinquième case.

Exemples : les cases marquées par des points noirs de la figure *a* sont des chiffres forcés par des raisonnements de ce type.

En alternant l'utilisation de la méthode de la case forcée et celle du chiffre forcé qui sont complémentaires, vous réussirez déjà à résoudre certains *Sudokus*, et en tout cas vous avancerez assez rapidement pour les *Sudokus* de niveau facile et moyen.

Méthode 3 : Simplification des séries de possibilités

La méthode suivante est extrêmement puissante, mais demande de se munir d'un crayon et d'une gomme. Dans chaque case, vous écrivez en petit, ou en couleur, les chiffres encore possibles *(voir la figure b)*. Certains joueurs préfèrent utiliser des petits points dans les cases, qui selon leur emplacement représentent les chiffres de 1 à 9 : le 1 est représenté par un point en haut à droite, le 2 est représenté par un point en haut au milieu, etc.

Maintenant, toutes sortes de raisonnements sont à portée de main dont vous allez comprendre le principe sur un exemple :

Exemple. Dans la troisième colonne, la série des possibilités est {2,3,6,7}, {3,6,9}, {2,6}, {2,6} et {6,7} correspondant respectivement aux possibilités des cases 2, 3, 4, 5 et 6. La colonne doit contenir un 2 et un 6, ils sont donc nécessairement dans les deux cases dont les possibilités sont {2,6}. En conséquence, le 2 et le 6 ne sont nulle part ailleurs (dans cette colonne) et donc, peuvent être supprimés des autres cases : ce ne sont plus des possibilités pour les autres cases. La série des possibilités de la colonne se simplifie en : {3,7}, {3,9}, {2,6}, {2,6}, {7}. Mais ce n'est pas tout. L'emplacement du 7 étant imposé, celui du 3 aussi et donc celui du 9. Les possibilités sont donc finalement : {3}, {9}, {2,6}, {2,6}, {7}. Une seule incertitude persiste : celle de l'emplacement du 2 et du 6.

Quand vous utilisez la méthode de simplification des possibilités n'oubliez pas que la série dont vous partez peut être, soit la série des possibilités des cases d'une même colonne, soit celle des cases d'une même ligne, soit celle des cases d'un même sous-carré. Cela fait 27 séries de possibilités simplifiables potentielles. Bien sûr les simplifications interagissent.

La formulation de la règle générale de simplification d'une série de possibilités est la suivante : si dans la série des possibilités (d'une ligne, d'une colonne, ou d'un sous-carré), on peut trouver m chiffres et m ensembles de possibilités correspondant à m cases et n'utilisant que ces m chiffres, alors ces m chiffres peuvent être supprimés des ensembles de possibilités des autres cases.

À titre d'entraînement exercez-vous à simplifier le plus possible ces suites de possibilités :

{1}, {1,2}, {2,3,4}, {1,2,3,4,5}, {1,2,4} (solution : {1}, {2}, {3}, {5}, {4})

{2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5,7,8,9}, {7,9}, {2,5,7} (solution : {2,3}, {2,5}, {3,5}, {8}, {9}, {7})

Muni des trois premières méthodes et des interactions que vous pourrez mettre en œuvre, une bonne proportion des grilles de *Sudoku* pourra être résolue, y compris certains *Sudokus* classés difficiles ou diaboliques.

Méthode 4 : Les tentatives (essai et erreur)

Parfois, il faut procéder par la méthode des tentatives, assez malcommode et demandant soit *(a)* une très forte concentration, soit *(b)* des crayons de plusieurs couleurs différentes, soit *(c)* la mise en œuvre de papiers calques,

b

5	478	1	2347	348	2348	348	9	6
268	478	2367	23467	9	23468	1348	5	1348
689	48	369	346	13468	5	2	138	7
4	9	26	1	368	2368	3568	7	358
268	58	26	23456 9	3468	7	13456 89	1368	13456 89
1	3	67	4569	468	468	456 89	2	4589
3	1	4	6	5	9	1678	168	128
9	2	8	36	7	1	3569	4	359
7	6	5	8	2	34	139	13	139

soit enfin *(d)* l'utilisation d'un logiciel d'aide à la résolution des *Sudokus*, qui vous permettra de placer des marques dans les cases et de les effacer. Les *Sudokus* de niveau diabolique exigeront assez fréquemment une telle phase d'exploration par tentatives. Lorsqu'une incertitude persiste, par exemple entre deux cases d'une même ligne dont les possibilités sont {2,6}, {2,6}, on teste ce que donne le placement du 6 dans la première case. On fait donc l'hypothèse que le 6 est dans la première des deux cases où il peut se trouver. On en tire toutes les conséquences possibles par application des autres méthodes ou même de la méthode par tentative, utilisée à l'intérieur d'elle-même. Si on tombe sur une impossibilité, c'est que le 6 n'est pas où l'on a essayé de le placer : il faut donc mettre le 2 qui est la seule alternative possible.

Si on ne découvre pas d'impossibilité ce qu'on trouve est la solution (car celle-ci est unique). La méthode des tentatives se fonde sur le principe du raisonnement par l'absurde.

La difficulté pratique de mise en œuvre de cette méthode provient du fait qu'il faut parfois faire plusieurs tentatives de suite, et être capable de revenir en arrière en cas d'impossibilités.

L'idée de la méthode des tentatives est la même que celle employée par les algorithmes de retour en arrière systématique *(backtracking)* que les programmes peuvent facilement mettre en œuvre, mais que notre mémoire, peu performante, a beaucoup de mal à appliquer.

Il est remarquable que ce qui est la méthode numéro un pour une machine est la dernière méthode pour un esprit humain.

Avant son entrée dans le cercle étroit des jeux que les quotidiens publient régulièrement dans leurs colonnes, le *Sudoku* fut pratiqué au Japon où il prit le nom qui lui est resté... dans les pays occidentaux. Son succès est l'œuvre de Wayne Gould, un juge néo-zélandais, lui aussi à la retraite et résidant à Hongkong. Il mit au point un programme permettant d'engendrer automatiquement des grilles d'énoncés. Fin 2004, le *Times* accepte sa proposition de publier des problèmes de *Sudoku*, puis, en janvier 2005, le *Daily Telegraph* en insère aussi. Depuis, des centaines de quotidiens dans tous les pays du monde ont publié des grilles, certains les plaçant même en première page et les utilisant comme argument publicitaire. Journaux spécialisés et livres de problèmes ont suivi.

Accoutumance et dépendance

Ceux qui essaient ce jeu y prennent vite goût et parfois en deviennent obsédés ne pouvant plus se retenir d'y jouer (attention à votre gestion du temps : sur Internet vous trouverez plus de grilles que vous ne pourrez jamais en résoudre !). L'auteur, voulant savoir de quoi il parlait, s'est essayé au jeu. Pris par le désir de progresser, il a éprouvé accoutumance et dépendance, jusqu'à abandonner à regret (et temporairement) les parties... de façon à finir ce texte. L'attrait obsessionnel engendré par ce jeu provient sans doute de la façon dont se déroule une partie.

Les premiers chiffres sont les plus délicats à poser, ainsi chaque nouvelle case remplie rend la solution plus proche et apparemment plus facile. À mesure du déroulement de la partie, le jeu s'accélère. Parfois cependant, on se retrouve bloqué malgré un petit nombre de cases vides ; on s'en veut de ne pas réussir à liquider la grille ; cela provoque une frustration et donc une concentration accrue et un désir plus intense de triompher du carré maudit ; à ce stade, il devient dangereux d'interrompre le joueur. La fin du remplissage de la grille procure au joueur une satisfaction et un soulagement, qui, bien sûr, l'incite à rechercher une nouvelle grille pour recommencer. Les progrès qu'on fait sont un autre encouragement à s'essayer à d'autres grilles de *Sudoku*... jusqu'à en rêver la nuit.

5. Le meilleur *Sudoku* imparfait !

En *(a)*, la plus grande grille ayant deux solutions différentes indiquées en *(b)*.

a

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

b

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Les ancêtres

Le jeu est un bon entraînement au raisonnement abstrait et, à ce titre, il peut être utilisé dans les classes de mathématiques où il pourrait convaincre de l'attrait de la logique pure. Les professeurs ne seront pas gênés par les élèves qu'ils auront contaminés par le virus du *Sudoku*, car il est difficile d'imaginer un jeu plus calme.

Certains affirment que le *Sudoku* ralentit la progression de la maladie d'Alzheimer; je ne sais si cette affirmation doit être prise au sérieux, mais c'est à toute vitesse que le cerveau du joueur expérimenté examine les combinaisons de chiffres. Cela fait certainement travailler un bon nombre de neurones et constitue un véritable exercice pour la machine cérébrale.

L'ancêtre du *Sudoku* n'est pas comme on le dit parfois le carré magique avec lequel il n'a pas grand-chose à voir (sinon des chiffres et une grille), mais le carré latin. Un carré latin de côté n est un carré de n^2 cases, remplies à l'aide de n symboles de façon qu'un même symbole n'apparaisse jamais deux fois dans la même ligne, ou deux fois dans la même colonne (chacun des n symboles est donc utilisé n fois exactement). Leur origine remonte au Moyen Âge, et le mathématicien Euler (1707-1783), les baptisa carrés latins et les étudia. Il n'y a que 12 carrés latins de côté 3, mais 576 de côté 4 et 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600 de côté 9. Si on décide que des carrés latins déductibles les uns des autres par des opérations élémentaires (permutation des lignes et des colonnes) ne doivent être comptés qu'une seule fois, le nombre de carrés latins de côté 9 est 377 597 570 964 258 816 (résultat établi par S. Bammel et J. Rothstein en 1975).

Une formule générale assez compliquée a été trouvée en 1981 par J. R. Nechvatal qui indique le nombre $L(n)$ de carrés latins à n cases de côté. Cependant, cette formule pour $L(n)$ et d'autres similaires ne permettent pas de déduire la valeur asymptotique (ordre de grandeur quand n devient très grand) de cette quantité qui reste inconnue aujourd'hui.

Autant de *Sudokus* que d'humains

Par définition, une grille de *Sudoku* complète est un carré latin satisfaisant la condition supplémentaire que chacun des neuf sous-carrés de 9 cases contient tous les chiffres de 1 à 9: ces grilles sont donc moins nombreuses que les carrés latins d'ordre 9. Leur dénombrement précis est assez difficile. Aujourd'hui seule l'utilisation du raisonnement – pour simplifier le problème – et de l'ordinateur – pour examiner systématiquement les cas – a permis de compter le nombre de grilles complètes de *Sudoku*: 6 670 903 752 021 072 936 960 si l'on compte plusieurs fois les grilles se déduisant les unes des autres par des opérations élémentaires (rotations, symétries, permutations des 3 premières colonnes, des 3 premières lignes, etc.). Ce résultat récent de Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis a été vérifié par Ed Russell (ce qui importe pour un résultat obtenu de cette façon).

Quand on ne compte qu'une seule fois les grilles se déduisant les unes des autres par des opérations simples, le nombre de grilles complètes est légèrement inférieur au nombre d'humains sur la Terre (précisément: 5 472 730 538). Ce décompte devrait cependant rassurer les amateurs de *Sudoku* qui n'ont pas à craindre la pénurie de problèmes: même à raison d'une grille résolue par minute, une vie de cent ans n'en épuisera à peine qu'un pour cent.

Il faut noter qu'une grille complète de *Sudoku* peut donner lieu à plusieurs grilles d'énoncés. Aujourd'hui d'ailleurs personne n'a réussi à compter combien il existe de grilles d'énoncés différentes. On peut considérer qu'une grille d'énoncé n'est intéressante que si elle ne peut pas être rendue « plus petite » – c'est une *grille minimale* –, c'est-à-dire que si elle possède la propriété suivante : dès qu'on enlève un chiffre de la grille d'énoncé, la solution n'est plus unique. Bien sûr, personne n'a évalué le nombre de grilles d'énoncés minimales. Ce nombre constitue l'ultime dénombrement des problèmes différents de *Sudoku* et gageons qu'on finira par le résoudre.

Un autre problème de grille minimale est irrésolu aujourd'hui à propos du *Sudoku* : quel est le plus petit nombre de chiffres à placer dans une grille pour que la solution soit unique. On connaît des grilles satisfaisantes avec 17 chiffres au départ ; on n'en connaît pas avec 16, mais personne n'a prouvé pour l'instant qu'il n'en existait pas. Nous connaissons la solution (77) du problème opposé : « Quel est le nombre maximum de chiffres qu'on peut donner sans qu'il y ait unicité de la solution ? ». Il est très facile de voir qu'avec 80, 79 ou 78 données, s'il y a une solution, elle est unique. D'autre part la grille de la figure 5*b* montre que 77 données ne garantissent pas l'unicité.

On peut envisager des grilles de *Sudoku* de taille 4×4, 9×9 (*Sudoku* classique), 16×16, 25×25, et plus généralement de taille $n^2 \times n^2$: le carré de côté n^2 est divisé en n^2 sous-carrés égaux $n \times n$; on se donne n^2 symboles différents et l'on exige que sur une même ligne, une même colonne ou dans un même sous-carré, le même symbole n'apparaisse jamais en double.

Takayuki Yato et Takahiro Seta ont montré que le problème de la résolution des grilles de *Sudoku* de taille $n^2 \times n^2$ est NP-complet. Cela signifie qu'il sera sans doute impossible d'écrire un programme de résolution efficace des *Sudokus* généralisés : pour tout programme le temps de résolution augmente si vite en fonction de n, que le programme devient incapable de traiter en temps raisonnable les problèmes qu'on lui soumet. On s'en doutait un peu, mais savoir qu'une démonstration en bonne et due forme a été obtenue est satisfaisant... et sert de consolation quand on sèche sur une grille particulière !

Programmes

Pour les *Sudokus* standards (9x9), il est relativement aisé d'écrire des programmes informatiques qui viennent à bout de toutes les grilles d'énoncés (ces programmes sont d'ailleurs, comme on va le voir plus loin, au cœur des générateurs automatiques de grilles d'énoncé de *Sudoku*).

Plusieurs méthodes sont envisageables, mais la plus courante est celle du « retour arrière systématique » *(backtracking)*. L'idée est la suivante : le programme place le chiffre 1 dans la première case vide. Si ce choix est compatible avec les règles de base, il continue avec la seconde case vide où il place un 1, puis avec la troisième, etc. Lorsqu'il rencontre une incompatibilité (ce qui se produit très rapidement), il augmente le dernier chiffre placé d'une unité et repart en avant.

Si, en voulant monter d'une unité le dernier chiffre placé, il découvre que c'est un 9 (qu'on ne peut pas remplacer par un 10 !), alors il revient en arrière et augmente d'une unité l'avant-dernier chiffre placé, puis repart en avant, etc. (le programme revient parfois en arrière à plusieurs reprises avant de repartir en avant). Bien programmée, cette méthode explore toutes les hypothèses possibles sans en oublier une seule, et donc, finit par trouver la solution lorsqu'elle existe. En poursuivant son déroulement le programme trouve toutes les solutions s'il y en a plusieurs (cas d'un *Sudoku* imparfait).

Bien sûr, des perfectionnements sont possibles accélérant la découverte de la solution unique ou des multiples solutions. En particulier, il y a le perfectionnement dit de la « propagation des contraintes » : après chaque chiffre nouvellement placé le programme met à jour le tableau des possibilités restantes de chaque case vide *(voir la figure 4, méthode 3)* et n'envisage de nouveaux chiffres que conformément à ce tableau.

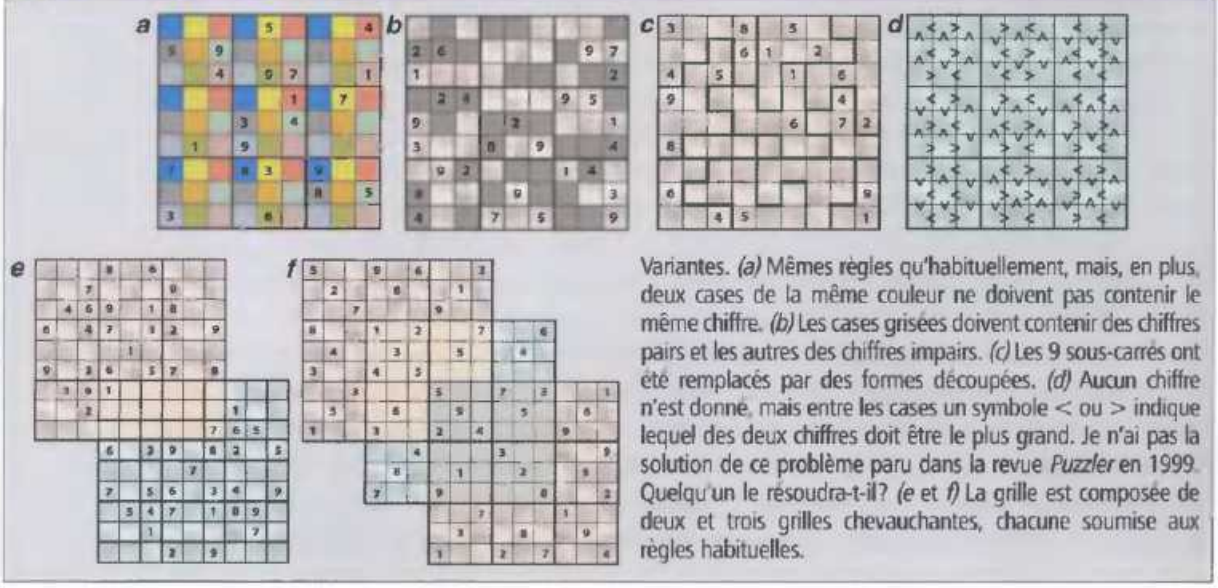
Les techniques de retour en arrière systématique conduisent à des programmes de résolution assez courts. Le langage *Prolog*, langage inventé en France par Alain Colmerauer et Philippe Roussel dans les années 1970, est particulièrement adapté à l'écriture de programmes de résolution des grilles de *Sudoku*, car il contient dans ses mécanismes de base un algorithme de « retour arrière systématique ». En *Prolog*, il existe des programmes d'une centaine de lignes qui résolvent assez efficacement tous les *Sudokus* 9x9.

Les techniques de retour en arrière systématique ne sont pas applicables par les joueurs humains (ou alors il leur faut vraiment une patience hors du commun). Les joueurs humains utilisent donc des règles plus variées et plus astucieuses *(voir la figure 4)* et ne mettent en marche les méthodes par tentatives (équivalentes au *backtracking*) qu'en dernier recours.

Certains programmes ont aussi été écrits qui tentent de suivre de près les méthodes humaines : ils sont plus longs que les autres, mais aussi efficaces. Ces programmes, simulant le raisonnement humain, sont utiles pour mesurer la difficulté des grilles d'énoncés : selon les principes de raisonnement qu'il faut mettre en œuvre pour venir à bout d'une grille, elle est classée facile, moyenne, difficile ou diabolique.

Alors qu'à la naissance du jeu, les grilles étaient fabriquées à la main, elles le sont maintenant presque toutes par des programmes qui fonctionnent selon l'idée suivante : on place des chiffres au hasard sur une grille et l'on applique un algorithme de résolution (de type backtracking par exemple). Si la grille possède une solution unique, c'est terminé. Si la grille partielle aléatoire ne possède pas de solution, on lui enlève un chiffre et l'on recommence. Si elle en possède plusieurs, on en choisit une et l'on ajoute (en appliquant l'algorithme) à la grille partielle autant de chiffres nouveaux nécessaires pour que la solution choisie devienne unique.

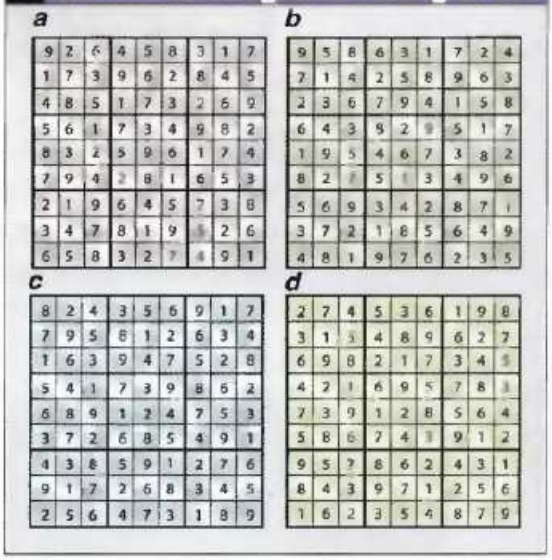
6. Variantes de *Sudokus*



Variantes. *(a)* Mêmes règles qu'habituellement, mais, en plus, deux cases de la même couleur ne doivent pas contenir le même chiffre. *(b)* Les cases grisées doivent contenir des chiffres pairs et les autres des chiffres impairs. *(c)* Les 9 sous-carrés ont été remplacés par des formes découpées. *(d)* Aucun chiffre n'est donné, mais entre les cases un symbole < ou > indique lequel des deux chiffres doit être le plus grand. Je n'ai pas la solution de ce problème paru dans la revue *Puzzler* en 1999. Quelqu'un le résoudra-t-il? *(e* et *f)* La grille est composée de deux et trois grilles chevauchantes, chacune soumise aux règles habituelles.

Notons que le problème de la résolution d'une grille de *Sudoku* est équivalent à celui du coloriage d'un graphe où deux nœuds reliés par une arête ne portent jamais la même couleur. Il y neuf couleurs disponibles. Le graphe comporte 81 nœuds (chacun correspondant à une case) dont certains sont coloriés au départ. Il y a 810 arêtes car chaque case est reliée aux 8 de la même colonne, aux 8 de la même ligne et aux 8 du même sous-carré (dont 4 ont déjà été comptés), ce qui fait donc un total de [(8+8+4)x81]/2 = 810.

7. Solutions des grilles de la figure 2



Venons-en maintenant à l'art de la résolution des *Sudokus* à la main, art devenu l'obsession de millions de passionnés aujourd'hui. Il est souhaitable de le découvrir soi-même et de ne s'informer des recettes qu'après avoir expérimenté le jeu un moment. On peut d'ailleurs se fixer le principe de n'utiliser que des méthodes qu'on aura mises au point soi-même.

Cependant pour ceux qui ne savent pas comment débuter voici deux principes élémentaires. Le premier consiste à rechercher les cases vides les plus contraintes: celles qui appartiennent à une ligne déjà bien remplie, ou à une colonne bien remplie ou à un sous-carré bien rempli. Avec un peu de chance les impossibilités cumulées (du type: la case ne peut pas contenir un 1, un 3 ou un 7, car il y a déjà un 1, un 3 et un 7 dans la même colonne) forceront sa valeur *(voir des exemples à la figure 4; méthode de la case forcée)*.

Le second principe consiste à chercher où peut se trouver un chiffre donné dans une colonne, une ligne ou une case donnée (par exemple le 3 dans la ligne 4). La question n'aura parfois qu'une réponse possible et donc vous poserez le chiffre choisi *(voir la figure 4, méthode du chiffre forcé)*.

Méthodes de résolution et variantes

Toutes sortes de raisonnements qu'on découvre soi-même en pratiquant le jeu s'offrent au joueur et le plaisir est à la fois de les découvrir et d'apprendre à les maîtriser à toute vitesse pour faire avancer rapidement les grilles.

Certains logiciels (faciles à trouver sur Internet) engendrent des grilles du niveau de difficulté que vous voulez et vous assistent dans la recherche des solutions (sans bien sûr résoudre la grille!). Par exemple, certains permettent d'inscrire des marques temporaires dans les cases, et de les effacer, dispensant ainsi de l'utilisation de crayon et de la gomme. Certains permettent même de faire apparaître des liens entre cases. Il ne faut pas s'interdire ces logiciels qui, en vous libérant des certaines tâches pénibles (le gommage par exemple), vous incitent au contraire à plus de subtilité et de virtuosité dans les raisonnements combinatoires que vous mettrez en œuvre.

Lorsque vous serez lassé des grilles traditionnelles, vous pourrez partir à la recherche des variantes du *Sudoku*, qui sont innombrables: certaines font se chevaucher plusieurs grilles, d'autres proposent de remplacer les sous-carrés par d'autres structures, d'autres introduisent des couleurs. La figure 6 en présente quelques-unes. L'intérêt de ces variantes est qu'elles obligent sans cesse à découvrir de nouveaux raisonnements. De plus, un passionné qu'une grille traditionnelle n'occupe qu'un quart d'heure, pourra avec les versions géantes du *Sudoku* s'immerger une journée entière dans les délices des combinaisons de cases et de chiffres. Mais, assez bavardé, retournons voir si la prochaine grille résistera...

Loto et loteries

Plus vous jouez, plus vous êtes civique puisque, par goût du gain, vous diminuez les impôts de tous. Pourtant, n'est-il pas immoral que l'État vous tonde la laine sur le dos en profitant de votre faiblesse ? Nous allons examiner les divers paradoxes du Loto.

Tout dans les loteries, et particulièrement dans le *Loto* de la *Française des jeux*, est paradoxal. Pour y voir clair, nous utiliserons des raisonnements logiques, psychologiques, économiques, commerciaux, combinatoires, probabilistes et statistiques que présente l'excellent livre, *Lotomania : une approche scientifique du jeu et du comportement des joueurs*, de Patrick Roger (*Éd. Village Mondial, Pearson Éd. France*, 2005). Le tout se résumera en sept paradoxes.

La connaissance scientifique, une fois de plus, est indispensable pour démêler le vrai du faux dans ce monde où complication des règles, conceptions erronées du hasard et intérêts particuliers s'allient pour brouiller le bon sens des joueurs au profit de l'État…

Un vol organisé par l'État

Le premier paradoxe des loteries est que leur mise en place et leur exploitation ont toujours été considérées comme une activité immorale, et que l'État, chargé aussi de veiller à la bonne moralité, se réserve généralement le droit d'en tirer profit.

Les loteries avec billets sont nées au XVe siècle où elles servirent à financer des projets d'églises et d'hôpitaux. Le *Loto*, une loterie particulière, fut inventé à Gênes au XVIe siècle, dans le contexte politique de la désignation des conseillers du Doge. On tirait 5 numéros parmi 90, correspondant aux 5 conseillers pris au hasard parmi les 90 sénateurs. On pariait sur le résultat de ce tirage au sort, mais on se passa vite du prétexte politique et des tirages furent organisés avec des numéros.

En France, François 1er, en 1539, institue une loterie, la *Blanque*, destinée à renflouer le Trésor royal ; pourtant, à l'époque, les jeux de hasard sont considérés comme sataniques par l'Église. Le prix excessif des billets fait que les ventes sont décevantes. La première loterie française réussie est celle de l'École militaire et elle conduit, en 1776, à l'institution du monopole de la Loterie royale fondée à nouveau sur le choix de 5 numéros parmi 90.

Ces jeux n'en contrarient pas moins les moralistes. Talleyrand dans son essai *Des loteries* les accuse d'être injustes, à cause du gain moyen très faible qui parfois descend à 3 pour cent des sommes engagées, et immorales, par les troubles qu'elles engendrent chez les joueurs dont certains se ruinent et, dit-on, se suicideraient. Talleyrand nous enjoint de combattre « l'homme avide et paresseux » qui veut « consommer sans se donner la peine de produire ».

En 1790, Mirabeau déclare à l'Assemblée nationale : « Quel impôt que celui qui fonde son plus grand produit sur le délire ou le désespoir : on propose un million pour

vingt sous au malheureux qui ne sait pas compter et qui manque du nécessaire.». Le 25 brumaire de l'an II, la Loterie royale est supprimée au grand dam des buralistes chargés de la vente des billets; ils exigent de pouvoir poursuivre leur commerce. Le député Chaumette réplique à l'Assemblée: «C'est à peu près comme si deux cents filous disaient «Mais laissez-nous voler, car autrement vous nous enlevez les moyens de subsister».»
La loterie sera recréée sous le nom de *Loterie nationale de France* le 17 vendémiaire de l'an IV, puis resupprimée en 1836 par les défenseurs de la morale publique qui imposeront leurs vues pendant 97 ans. C'est seulement en 1933 que la *Loterie nationale* voit le jour sous le prétexte d'alimenter le budget des pensions des anciens combattants et de former un fonds de solidarité pour les agriculteurs victimes de calamités.

Initialement, 60 pour cent du total du prix des billets sont reversés aux heureux gagnants, cela même si tous les billets ne sont pas vendus, ce qui engendre une incertitude pour l'organisateur. Toutefois les billets, comportant cinq chiffres plus une lettre, sont trop chers (100 F), ce qui conduit à la création des fameux *dixièmes* de la *Loterie nationale*: ils coûtent un dixième









1 **Le premier tirage** de la *Loterie nationale* se déroule le 7 novembre 1933. Dans la salle, la curiosité grandit jusqu'à ce que sorte le numéro de l'heureux gagnant. À Tarascon, le percepteur qui a vendu les billets locaux écoute les résultats sur sa TSF et réalise que le gagnant est de Tarascon; après vérification de la liste des acheteurs, il se précipite chez son ami coiffeur. Il tambourine aux volets: «Lève-toi, Bonhoure!» Ébouriffé et en pantoufles, le coiffeur vient ouvrir: «Ques aco?» demande-t-il en provençal. «Tu as gagné cinq millions.» C'est ainsi que Paul Bonhoure est entré dans l'histoire de la *Loterie nationale*. Il acquit un domaine de 60 hectares près de Beaucaire et y vécut jusqu'à sa mort, en 1961. Le record du plus gros gain en Europe est détenu depuis le 22 août 2009 par un homme de 47 ans qui, à Bagnone, en Toscane, a empoché 147 807 299 euros à la loterie italienne *Superenalotto*.

2. Grilles à éviter

Dans une étude menée auprès des étudiants de l'Université McGill de Montréal, une série de 16 grilles était soumise à chaque étudiant à qui l'on demandait de choisir parmi ces grilles d'abord celle qu'il jouerait en premier pour gagner un gros lot fixé à l'avance, puis on lui demandait son second, son troisième et son quatrième choix de grilles, éventuellement prises dans la même série. Les grilles présentées (toujours les mêmes) étaient :

A1 : 10-20-25-30-40-44	A2 : 6-12-18-24-30-36
A3 : 5-10-15-20-25-30	A4 : 16-21-26-31-36-41
B1 : 2-3-4-5-6-7	B2 : 30-31-32-33-34-35
B3 : 13-14-15-16-17-18	B4 : 23-24-25-26-27-2
C1 : 11-14-20-29-37-43	C2 : 1-9-16-28-35-46
C3 : 7-8-23-34-36-42	C4 : 13-17-24-33-40-45
D1 : 3-5-9-12-15-17	D2 : 35-37-40-43-44-49
D3 : 34-36-39-41-45-48	D4 : 5-8-10-11-16-19

Les choix faits par les étudiants sont répertoriés dans le tableau, indiquant dans quelle série les grilles étaient choisies :

Choix	A	B	C	D
1	21,7	8,3	53,3	16,7
2	20	13,3	50	16,7
3	15	20	51,7	13,3
4	21,7	13,3	55	10

Les grilles selon les séries A, B, C ou D sont clairement de quatre types :

A : séries régulières (suite arithmétique ou presque).

B : séries de nombres consécutifs.

C : séries d'apparences aléatoires.

D : séries mal équilibrées entre petits et grands numéros.

Les choix des étudiants révèlent une aversion marquée envers les grilles de numéros successifs qui sont donc considérées comme ayant moins de chances d'être tirées. Les grilles déséquilibrées sont aussi largement évitées et une préférence claire pour les grilles d'apparence aléatoire se retrouve dans les quatre choix.

On le voit, les choix des étudiants qui avaient tous suivi des cours de probabilités et de statistiques ne sont pas conformes à ce qu'ils ont appris. Qu'une grille soit régulière ou d'apparence aléatoire ou autre ne change pas sa probabilité de gagner : aucune des grilles ne devait être préférée ou évitée. L'équiprobabilité des grilles est une conséquence simple de la propriété de l'indépendance des tirages successifs des boules : si la boule 12 a été tirée en premier, cela n'influe pas sur le tirage de la seconde boule et toutes les boules restantes ont exactement la même probabilité d'être tirées en second, etc., ce qui fait qu'au final toutes les grilles ont exactement la même probabilité d'être tirées.

La conclusion est claire : même lorsqu'on a suivi un cours de probabilités, la tentation de croire qu'une grille d'apparence aléatoire a plus de chances d'être tirée persiste. La notion d'indépendance semble tellement étrangère à l'intuition qu'il faut toujours se forcer pour en admettre toutes les conséquences : dès qu'un piège est tendu qui la concerne, une majorité de gens tombent dedans. D'ailleurs, les étudiants interrogés pour expliquer leur choix n'ont éprouvé aucune difficulté à justifier les grilles auxquelles ils attribuaient des probabilités supérieures !

du prix, et ne rapportent qu'un dixième des lots. Le 7 novembre 1933, Paul Bonhoure, coiffeur à Tarascon, empoche le gros lot de cinq millions de francs et la publicité autour de son enrichissement incite des millions de Français à participer au jeu. L'attrait de cette loterie finira par décliner, conduisant en 1976 à l'introduction par la *Française des jeux* d'une nouvelle loterie, un retour au modèle génois : le *Loto*. Son succès amènera l'arrêt de la Loterie nationale en 1990.

L'immoralité de l'État ne semble plus émouvoir personne. Cette insensibilité croissante a une conséquence concrète : d'un prélèvement de 40 pour cent pour la *Loterie nationale*, on est passé à 46 pour cent pour le *Loto* de 1976, puis progressivement à 49,515 pour cent en 2006 (ce chiffre est fixé par arrêté chaque année). Il est revenu à 45 pour cent en 2008. La barre des 50 pour cent a été atteinte pour l'*Euromillion*. Ainsi que le remarque Patrick Roger, comment ne pas être étonné ? Des épargnants engagent des procès contre leur banque parce que leur portefeuille d'actions a perdu 50 pour cent de sa valeur alors que les joueurs du *Loto* se précipitent sur un jeu où collectivement la perte de la moitié de leur argent est garantie par l'État !

Le second paradoxe du *Loto* est sa complexité : combien de joueurs connaissent le système de répartition des enjeux ? N'est-il pas absurde de concocter des règles d'une telle

complication qui pourraient décourager les joueurs ? La psychologie des parieurs répond que ceux-ci ne s'attachent qu'aux plus gros lots et sont insensibles aux autres aspects du jeu, dont la probabilité de gagner et l'espérance mathématique de gain.

Le premier tirage du *Loto* a lieu le mercredi 19 mai 1976. À cette époque, il n'y a qu'un tirage par semaine et la grille ne coûte qu'un franc (15 centimes d'euro). On coche 6 numéros sur un tableau qui en comporte 49 (les entiers de 1 à 49), les jeux multiples ne sont qu'un procédé permettant de jouer plusieurs grilles à la fois. Contrairement au *Loto* de Gênes ou à la *Loterie nationale*, les sommes versées aux gagnants sont déterminées par le nombre de grilles vendues : plus ce nombre est grand, plus les sommes gagnées sont importantes. Ainsi l'organisateur ne prend aucun risque et, quand il y a peu de gagnants, les très gros lots ont un fort impact publicitaire.

De plus en plus de tirages

On passe à deux tirages hebdomadaires en 1984, puis à quatre tirages en 1990 : deux le mercredi et deux le samedi. Pour inciter les joueurs à participer aux deux tirages d'une même journée, une partie des sommes jouées sur le premier tirage est redistribuée au second tirage. Bien sûr, on ne peut participer au second tirage que si l'on a participé au premier (à partir de 1996, tous les joueurs doivent participer aux deux tirages). Pour le *Loto* dans sa version de 2007, un joueur peut gagner de sept façons différentes appelées rang 1, rang 2, rang 3, jusqu'au rang 7.

Lors d'un tirage, six numéros gagnants sont déterminés par un mécanisme de boules extraites d'une urne, plus un septième numéro, dénommé complémentaire. Les gagnants de rang 1 sont ceux qui ont coché sur leur grille les six numéros gagnants (pour eux, le numéro complémentaire ne joue donc aucun rôle). Les gagnants de rang 2 sont ceux qui ont choisi cinq des six numéros gagnants et dont le sixième numéro choisi est le numéro complémentaire. Pour le rang 3, il faut avoir choisi 5 des 6 numéros gagnants. Pour le rang 4, il faut avoir choisi 4 numéros gagnants et le numéro complémentaire, pour le rang 5, 4 numéros gagnants, pour le rang 6, 3 numéros gagnants et le complémentaire, pour le rang 7, trois numéros gagnants.

La probabilité de gagner augmente avec le rang, le calcul de ces valeurs est indiqué sur la figure 3. Logiquement, les joueurs devraient se partager l'argent en proportion inverse de la probabilité qu'il y a de gagner : puisqu'il y a six fois plus de chances de gagner au rang 2 qu'au rang 1, on s'attendrait à ce qu'un gagnant de rang 2 empoche un sixième de ce qu'obtient un gagnant de rang 1. Il n'en est pas ainsi. Cet argent est séparé en paquets *(voir ci-dessous)* et chaque paquet est distribué à parts égales entre les gagnants d'un même rang.

	Premier tirage	Deuxième tirage	SuperLoto
Rang 1	29,1 %	45,4 %	56,0 %
Rang 2	3,1 %	3,1 %	3,85 %
Rang 3	10,3 %	10,3 %	8,9 %
Rang 4&5	13,6 %	13,6 %	13,75 %
Rang 6&7	27,6 %	27,6 %	17,5 %
	Reporté 2e tirage 16,3 %		

Les gagnants de rang 2 seront en moyenne six fois plus nombreux que ceux de rang 1 et pourtant se partageront une somme environ dix fois plus petites (pour le premier tirage). Ils empocheront donc environ 60 fois moins que les gagnants de rang 1 alors qu'il aurait été naturel que leurs gains soient seulement 6 fois moindres. Les 16,3 pour cent du premier tirage reporté sur le second font que ce qui est redistribué au premier tirage est environ 42 pour cent de ce qui est joué. La somme reportée sur le second tirage le rend plus intéressant (58 pour cent des mises reversées).

Pour les rangs 4 et 5, la somme est répartie de façon qu'un gagnant de rang 4 gagne deux fois plus qu'un gagnant de rang 5. Cette règle, une fois encore, semble peu logique puisqu'il est 20 fois plus facile de gagner au rang 5 qu'au rang 4. Pour les rangs 6 et 7, la règle est de donner deux fois plus à un gagnant de rang 6 qu'on ne donne à un gagnant de rang 7 qui a pourtant 13 fois plus de chances de gagner.

Les règles du *Loto* ont été modifiées en 2008, cependant les remarques faites au-dessus restent toutes valables: la distribution des gains se fait selon des principes très peu logiques!

L'étude des numéros sortis depuis la création du *Loto* a été menée par les statisticiens pour vérifier que la répartition des numéros tombés était conforme à ce qu'elle doit être pour des tirages honnêtes. Les conclusions sont claires: il n'y a aucune raison de soupçonner une tricherie dans les numéros tirés. Si certains numéros apparaissent un peu plus que d'autres, c'est conforme aux fluctuations attendues pour de telles situations qui suivent des lois connues des mathématiciens.



3. Les probabilités de gagner au *Loto* de 2007

Le nombre total de grilles de *Loto*, 6 chiffres choisis parmi 49, est de 13 983 816. Le raisonnement est le suivant: pour choisir le premier numéro, 49 possibilités sont offertes, pour le second 48, pour le troisième 47 etc., jusqu'à 44. Il y aurait donc 49x48x47x46x45x44 grilles possibles si les 6 choix faits étaient classés, mais ils ne le sont pas (la suite de choix 2-4-6-18-23-45 donne la même grille que la suite de choix 23-45-18-6-4-2). Il faut donc diviser le résultat précédent par le nombre de façons qu'il y a de classer 6 nombres, c'est-à-dire par 6! = 6x5x4x3x2.

Si les tirages sont honnêtes, toutes les grilles ont la même chance de sortir et donc la probabilité qu'une grille a de sortir est 1/13 983 816. C'est la probabilité qu'une grille gagne au rang 1.

Calculons maintenant, à titre d'exemple, le nombre de grilles gagnantes au rang 6: la grille doit comporter *(a)* trois des six numéros gagnants, *(b)* le numéro complémentaire, et bien sûr *(c)* deux autres numéros.

Il y a C(6,3), combinaisons de 6 objets pris 3 à 3, soit 6x5x4/(3x2x1), donc 20 façons de déterminer 3 numéros parmi les 6 numéros gagnants du tirage. Le quatrième numéro doit être le numéro complémentaire (qui est unique) et les deux autres numéros cochés de la grille doivent être pris parmi les autres numéros, c'est-à-dire parmi ceux qui ne sont ni gagnants ni le numéro complémentaire (ils sont 42): il y a ainsi C(42,2) = 42x41/2 = 861 façons de fixer ces deux derniers numéros. En tout, il y a donc 20x861 = 17 220 grilles gagnantes au rang 6. Le nombre de grilles possibles étant 13 983 816 et chacune d'elles ayant la même probabilité, la probabilité de gagner au rang 6 est: 17 220/13 983 816 = $1{,}23\ 10^{-3}$.

Une seule grille est gagnante au rang 1, et donc la probabilité qu'une grille possède de gagner au rang 1 est 1/13 983 816 = $7{,}15\ 10^{-8}$, soit 71 milliardièmes environ.

Il y a six grilles gagnantes au rang 2, et donc la probabilité qu'une grille gagne au rang 2 est 6 / 13 983 816 = $4{,}29\ 10^{-7}$ (un demi-millionième environ).

Rang 3: 252 grilles gagnantes; probabilité $1{,}8\ 10^{-5}$
Rang 4: 630 grilles gagnantes; probabilité $4{,}5\ 10^{-5}$
Rang 5 : 12 915 grilles gagnantes; probabilité $9{,}23\ 10^{-4}$
Rang 6 : 17 220 grilles gagnantes; probabilité $1{,}23\ 10^{-3}$
Rang 7: 229 600 grilles gagnantes; probabilité $1{,}64\ 10^{-2}$

De nombreux tirages ne donnent pas de gagnants de rang 1. En revanche, depuis 1978, seuls deux tirages n'ont pas eu de gagnants de rang 2. La probabilité qu'une grille soit gagnante à un rang quelconque est légèrement inférieure à deux pour cent. Les calculs présentés ici correspondent aux règles du *Loto* de 2007. Avec les nouvelles règles en vigueur depuis 2008, la probabilité pour une grille de gagner est passée de $1/14.10^6$ à $1/19.10^6$



Française des Jeux

L'inacceptable indépendance

Sur les 4 332 tirages effectués depuis le 1er juin 1976, tous les numéros sont sortis entre 668 fois (pour le 45) et 572 fois (pour le 17) et les tests montrent qu'il n'y a pas de biais détectable : pour gagner de l'argent, les organisateurs n'ont pas besoin de tricher, la redistribution fait que les joueurs seront dépouillés de 45 pour cent de ce qu'ils engagent quel que soit le tirage.

Les tirages sont indépendants et, en conséquence, qu'un numéro soit fréquemment sorti ou pas, sa probabilité de sortie est invariable. Aucun numéro ne peut être « à l'écart » ou « en forme » comme le disent les pronostiqueurs du *Loto*. Il est inutile donc de noter les numéros déjà sortis dans le passé récent ou éloigné ou d'aller les chercher sur les sites Internet spécialisés. Les tirages passés n'ont aucune influence sur les numéros qui sortiront dans l'avenir, les prendre en compte pour composer une grille de jeu est une superstition aussi stupide que de croire que la position de Mars le jour de votre naissance détermine votre chance en affaires, en amour ou... au jeu.

Pourtant, les tests menés par des psychologues montrent que la croyance en des tirages liés et dans la non-équivalence de toutes les séries de nombres est puissante ! Les résultats étonnants de la figure 2 éclairent le troisième paradoxe des loteries : même quand on sait que les tirages passés n'influent pas les tirages futurs, on se comporte comme si c'était le cas.

D'autres illusions de ce type ont été identifiées. C'est ainsi que la psychologue Ellen Langer a prouvé que lorsque les joueurs choisissent eux-mêmes leurs numéros dans une loterie, ils ont la conviction que leur gain moyen est plus élevé que lorsque les numéros

4. Un petit test

Voici quelques conseils donnés aux joueurs de *Loto*. Ils ont été trouvés sur Internet; rien n'a été inventé. Saurez-vous reconnaître ceux qui sont fondés de ceux qui sont erronés et assimilables à des superstitions?

1. Jouez toujours les mêmes numéros. La probabilité que votre bulletin soit gagnant augmente chaque fois.
2. Si vous changez un numéro, vous repartez avec la probabilité 1 sur 19 millions.
3. Si vous changez de temps en temps vos numéros, sélectionnez systématiquement un numéro qui n'a pas été tiré depuis un certain temps. Ce numéro a une bonne chance d'être affiché lors d'un prochain tirage.
4. Ne copiez pas certaines combinaisons. Il y a quelques années, les 6 bons numéros du *Loto* français correspondaient exactement aux 6 bons numéros du *Loto* belge de la semaine précédente. Résultat: plusieurs milliers de joueurs ont trouvé les 6 bons numéros, mais en consultant les rapports leur déception a dû être grande: ils ne touchaient que quelques dizaines de milliers de francs pour 6 bons numéros!
5. Les croix en diagonale et les suites de nombres consécutifs comme (1-2-3-4-5-6) sont à déconseiller.
6. Ne jouez pas le 7 et le 13 ensemble.
7. Si vous jouez des dates de naissance, cochez, outre les dates de naissance, au moins un numéro au-dessus de 31.

Réponses:

1. Absurde: qu'on change de grille ou pas, la probabilité qu'une grille gagne est constante; jouer plusieurs fois la même grille n'augmente ni sa probabilité de gagner ni même son espérance de gain (qui ne dépend que des numéros qui la composent).
2. Absurde: le mot «repartez» n'a pas de sens, car la probabilité pour une grille de gagner est constante ainsi que son espérance de gain (on peut en effet supposer que la distribution de grilles jouées est sensiblement la même d'un tirage à l'autre, et en l'absence d'information sur l'évolution de cette distribution, on ne peut pas savoir dans quel sens varie l'espérance de gain d'une même grille d'un tirage à l'autre).
3. Absurde: les tirages sont indépendants.
4. Oui, car il faut éviter de jouer les numéros ou les combinaisons souvent jouées qui font baisser l'espérance de gain, or il est vraisemblable que certains joueurs copient les grilles gagnantes des autres pays, ces grilles se trouvent donc beaucoup jouées et moins rentables.
5. Oui: mêmes raisons.
6. Oui: le 7 et le 13 sont des numéros très joués, ils font donc baisser l'espérance de gain des grilles qui les contiennent.
7. Oui: d'une manière générale les petits numéros font baisser l'espérance de gain des grilles.

leur sont imposés; c'est une des raisons du succès du *Loto* qui éclipsa la *Loterie nationale*. De la même façon, les joueurs de dés, lorsqu'ils veulent obtenir un petit total, lancent doucement les dés! D'autres chercheurs ont montré que les investisseurs en ligne, qui peuvent agir plus rapidement et plus souvent et sont donc victimes de l'illusion du contrôle, dégagent des rentabilités moindres que les autres (les nombreuses transactions qu'ils opèrent sont taxées). Dernière observation amusante concernant les illusions des joueurs: Diane Savoie et Robert Ladouceur ont montré que les joueurs qui jouent régulièrement évaluent plus mal que les autres les probabilités de gain: l'expérience qu'acquiert un joueur renforce ses illusions et ses erreurs!

Espérance de gain

Le quatrième paradoxe du *Loto* concerne l'espérance de gain (le gain moyen attendu d'une grille) et s'énonce: toutes les grilles ont la même probabilité de gagner, mais toutes les grilles n'ont pas la même espérance de gain.

L'explication est que les joueurs ne jouent pas au hasard et choisissent les numéros qu'ils cochent. Certains numéros sont plus souvent joués, les grilles jouées qui les utilisent sont plus nombreuses et elles rapportent moins quand elles sortent. Ainsi les grilles les plus jouées rapportent le moins!

Que sait-on des numéros préférés des joueurs, numéros qu'il est rationnel d'éviter? Malheureusement, la *Française des jeux* ne publie pas d'informations sur les numéros

joués sur l'ensemble des grilles. Cette opacité sur une donnée essentielle est scandaleuse puisqu'elle réserve à quelques cadres et employés de *La Française des jeux* une information qu'ils pourraient détourner s'ils n'étaient pas tenus par des règles strictes... Il serait beaucoup plus sain de publier ces statistiques; cela ne pourrait qu'accroître l'intérêt du jeu et inciter les joueurs à appliquer des stratégies moins absurdes que celles fondées sur les tirages passés. L'État publie les inutiles statistiques des tirages et ne publie pas les données qui pourraient donner lieu à des stratégies rationnelles (et qui ne diminueraient pourtant pas ses gains).

Pour connaître les numéros joués, on peut se fier au bon sens psychologique: les joueurs composent assez souvent leurs grilles à partir de dates (ce qui favorise les nombres entre 1 et 12, entre 1 et 31, le 19 et le 20) ou de numéros pris dans le monde réel qui sont alors soumis à la loi de Benford (selon laquelle on rencontre plus de nombres commençant par 1 que par 2, par 2 que par 3 etc.). Seuls les joueurs, peu nombreux, qui utilisent le système de remplissage automatique aléatoire des grilles – système *Flash* – jouent sans biais.

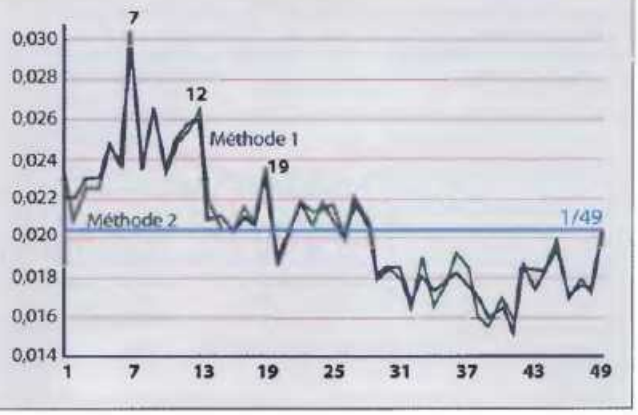
L'hypothèse que les petits numéros sont plus joués que les autres est vérifiée: les grilles composées de petits numéros ont plus de gagnants que les autres. Ainsi: *(a)* la moyenne des numéros des grilles pour lesquelles il n'y a eu aucun gagnant de rang 1 est 26,91; *(b)* la moyenne des numéros des grilles ayant eu 8 gagnants de rang 1 est 23,68; *(c)* la moyenne des numéros des grilles ayant 16 gagnants de rang 1 est 21,66. Plus la moyenne des numéros d'une grille est faible, plus elle a de gagnants... et moins elle rapporte. Dernière confirmation: le plus petit gain obtenu par des gagnants de rang 1 l'a été le 27 août 1994 pour la grille 4-5-7-14-15-17 qui ne comporte aucun numéro au-delà de 17.

Statistique secrète et connue!

Le cinquième paradoxe est que, malgré le mutisme de la *Française des jeux* concernant les fréquences des numéros joués, les statisticiens réussissent à les connaître. Deux études concordantes fondées sur les nombres de gagnants aux divers rangs et utilisant des techniques d'estimations statistiques indirectes ont conduit à proposer une loi de préférence des numéros par les joueurs *(pour des détails voir le livre de Patrick Roger et la figure 5)*. La science statistique réussit à tirer des informations qui semblaient inaccessibles!

5. Les nombres joués

Courbe indiquant les numéros les plus joués par les joueurs du *Loto* de la *Française des jeux*. Chaque numéro *a priori* devrait être joué avec une probabilité de 1/49. Comme les joueurs choisissent des dates ou des numéros provenant de données réelles ou parce que certains numéros ne plaisent pas (le 2 par exemple), les probabilités se trouvent le plus souvent au-dessus de 1/49 ou en dessous. Ces données ont été calculées par deux méthodes d'estimation statistiques indirectes qui coïncident presque en tout point. Le numéro 7 est le plus populaire et une tendance générale est que plus un numéro est grand, moins il est joué.



Sans surprise, le numéro 7 est le numéro favori des joueurs et il est joué 1,7 fois plus qu'il ne le serait si les joueurs choisissaient au hasard. Les cinq numéros préférés sont, dans l'ordre, 7, 9, 11, 12, 13. Les numéros les moins joués sont 32, 38, 39, 40 et 41. Il ne semble pas exclu que la grille utilisant les numéros les moins joués, même en tenant compte des 45 pour cent pris par l'État, ait une espérance de gain supérieure à son coût. Malheureusement, depuis la parution du livre de Patrick Roger, de nombreux joueurs doivent la jouer et donc cette grille n'est plus la plus rentable !

Les joueurs face aux risques

Le sixième paradoxe du *Loto* est lié à l'attitude que nous avons vis-à-vis de la prise de risque. Deux caractéristiques de notre attitude sont paradoxales.

Comment est-il possible qu'une même personne accepte, en souscrivant à diverses assurances, de payer pour se protéger des aléas auxquels elle est soumise, alors qu'en même temps, en jouant au *Loto*, elle accepte de payer pour se soumettre à des aléas (dans chacun des cas, elle perd en moyenne de 30 à 50 pour cent de son argent) ? Ensuite, comment un sujet sachant qu'il perd en moyenne la moitié de ses mises au *Loto* accepte-t-il quand même d'y jouer ?

Pour répondre à la première question, les psychologues ont mené diverses expériences qui établissent que nous ne percevons pas les aléas sur les gains comme symétriques des aléas sur les pertes : par exemple, nous négligeons le risque de périr en traversant la rue et accordons beaucoup d'importance (bien que de probabilité inférieure) à celui de gagner une grosse somme au *Loto*.

Cependant, c'est sur le second point que les progrès récents ont été les plus inattendus. La seconde version de la *Théorie des perspectives* élaborée en 1992 par Amos Tverky et Daniel Kahneman montre que nous avons tendance à considérer comme bien plus grandes qu'elles ne le sont les probabilités des événements rares. Une fonction $w(p)$ calculée par des expériences transforme les probabilités p réelles en probabilités subjectives humaines $w(p) = 1- (1 - p)^r / [p^r + (1 - p)^r]^{1/r}$, où le paramètre r vaut environ 0,65 (mais varie un peu d'un individu à l'autre).



Française des Jeux

Imaginons ainsi une loterie dont les deux millions de billets sont vendus un euro chacun et qui propose un gros lot unique d'un million d'euros. Le joueur parfaitement rationnel évalue que son espérance de gain est de 1/2 euro (l'espérance de gain est le produit de la probabilité de gagner par la somme gagnée), ce qui est moins que le prix du billet : il ne joue pas. En revanche, le joueur humain, selon la théorie des perspectives, tend à surévaluer la probabilité de gagner égale à $p = 1/2\,000\,000$. La probabilité subjective w est 246 fois supérieure. Pour lui, jouer semble intéressant car il

perçoit une espérance subjective de gain d'environ 123 euros pour le prix d'un billet à un euro. Donc il joue.

Un calcul analogue effectué avec les données du *Loto* conduit à la conclusion que, subjectivement, il est intéressant de jouer au *Loto*. Cette théorie de l'illusion probabiliste explique aussi pourquoi les organisateurs de loteries ont intérêt à augmenter les valeurs des gros lots même si, pour cela, ils doivent diminuer les probabilités de gagner : pour un joueur, la distorsion subjective modélisée par $w(p)$ est d'autant plus forte, et donc lui donne l'illusion que le jeu est d'autant plus intéressant, que les probabilités de gain sont faibles. La course aux gros lots à laquelle nous assistons depuis quelques années s'explique. Il est assez remarquable que les véritables raisons du succès économique de *La Française des jeux*, qui fait deux milliards d'euros de chiffres d'affaires par an avec le *Loto* et est l'une des 50 plus grosses entreprises de France, n'aient été vraiment comprises que bien après sa création !

Enfin, quiconque écrit un article ou un livre prétendant indiquer comment gagner au *Loto* (ou aux courses, ou à la bourse) doit être considéré avec défiance car, en faisant cela, il se met dans une position absurde : s'il disposait vraiment d'une méthode pour gagner, il ne la publierait pas, ayant plus à gagner de son utilisation (raisonnement valable aussi pour les livres de conseils boursiers). Il est donc inutile d'examiner les conseils donnés par les revues, livres ou sites internet concernant la façon de bien jouer au *Loto*, ces conseils sont d'ailleurs en grande partie fondés sur l'erreur de croire que les tirages sont dépendants.

Notons que le comble de la naïveté et de la bêtise est atteint par des gens qui croient qu'en payant très chers des conseils, ils en auront de bons. Un ouvrage sur les jeux de hasard et intitulé *Le gain scientifique d'une seule unité* est proposé au prix extraordinaire de 1500 euros. Un autre *Les rythmes de la fatalité périodique* présenté comme rare est proposé pour l'aimable somme de 2000 euros. Les lecteurs m'excuseront de ne pas avoir mené d'étude critique sur ces ouvrages que je n'ai pas souhaité acheter...

Hélas, en écrivant ce texte qui découragera, je l'espère, quelques joueurs, je diminuerai les sommes récoltées par l'État grâce à ce jeu et j'augmenterai la part que l'État doit aller chercher autrement, ce qui me concernera certainement.

Flexagones

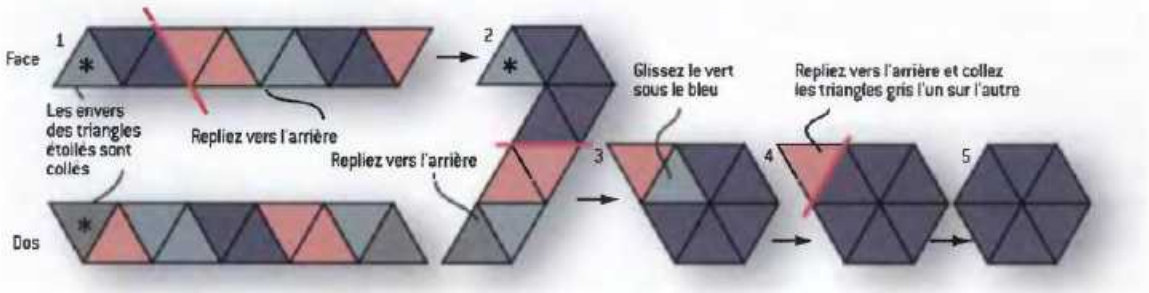
Pour vous distraire, oubliez votre ordinateur et munissez-vous de petites bandes de papier. Puis, modernes magiciens, « flexez » vos pliages.

Le premier article de Martin Gardner, en décembre 1956, dans la revue *Scientific American*, et le premier chapitre de son premier livre de récréations mathématiques traitent d'un jeu qu'on se fabrique en quelques minutes avec des bandes de papier pliées : les flexagones. Le succès de ce jeu – partout dans Manhattan les promeneurs manipulaient des flexagones – conduisit les éditeurs de *Scientific American* à demander à Martin Gardner de tenir une chronique de jeux mathématiques ; elle se prolongea pendant un quart de siècle.

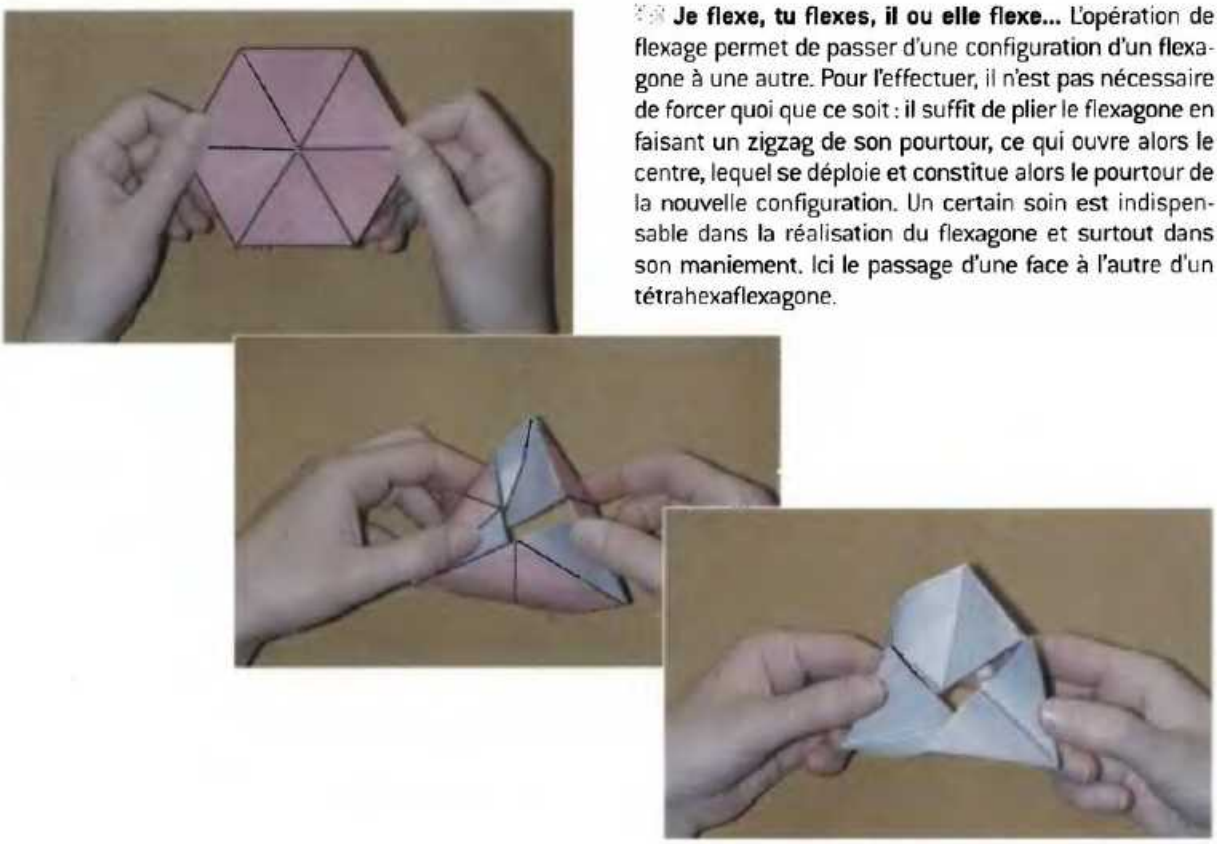
Les flexagones sont des pliages étranges et fascinants dont aucune théorie complète n'a été formulée. Malgré des dizaines d'articles et plusieurs ouvrages sur le sujet, les aficionados découvrent encore de nouveaux modèles de flexagones et les mathématiciens amateurs réfléchissent encore aux graphes qu'ils engendrent et à leurs diverses généralisations. Le livre récent de Les Pook, *Flexagons Inside Out* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003), présente quelques-uns des plus beaux spécimens de flexagones et en énumère toutes sortes de propriétés ; il contient une mine d'idées pour se distraire. Les enseignants qui veulent faire aimer les mathématiques y trouveront de nombreuses activités pour intéresser et amuser leurs élèves.

La déchirure inspiratrice

La légende veut que l'histoire des flexagones commence en 1939 quand Arthur Stone, étudiant britannique de 23 ans en séjour à l'Université de Princeton, découpant les feuilles de papier au format américain pour les ramener au format européen – plus étroit –, se



Le trihexaflexagone. Pour construire le trihexaflexagone découpez une bande de papier après y avoir dessiné 10 triangles colorés selon le schéma. Pliez ensuite la bande en suivant très attentivement le dessin : le trait rouge indique la place du pli à opérer dans l'étape suivante de pliage. À la fin du pliage, collez l'un contre l'autre les deux triangles gris. La bande de papier obtenue est un ruban de Möbius (une seule face, un seul bord) trop étroite pour se déployer dans l'espace. Malgré sa rigidité apparente, la bande peut changer de forme.



Je flexe, tu flexes, il ou elle flexe... L'opération de flexage permet de passer d'une configuration d'un flexagone à une autre. Pour l'effectuer, il n'est pas nécessaire de forcer quoi que ce soit : il suffit de plier le flexagone en faisant un zigzag de son pourtour, ce qui ouvre alors le centre, lequel se déploie et constitue alors le pourtour de la nouvelle configuration. Un certain soin est indispensable dans la réalisation du flexagone et surtout dans son maniement. Ici le passage d'une face à l'autre d'un tétrahexaflexagone.

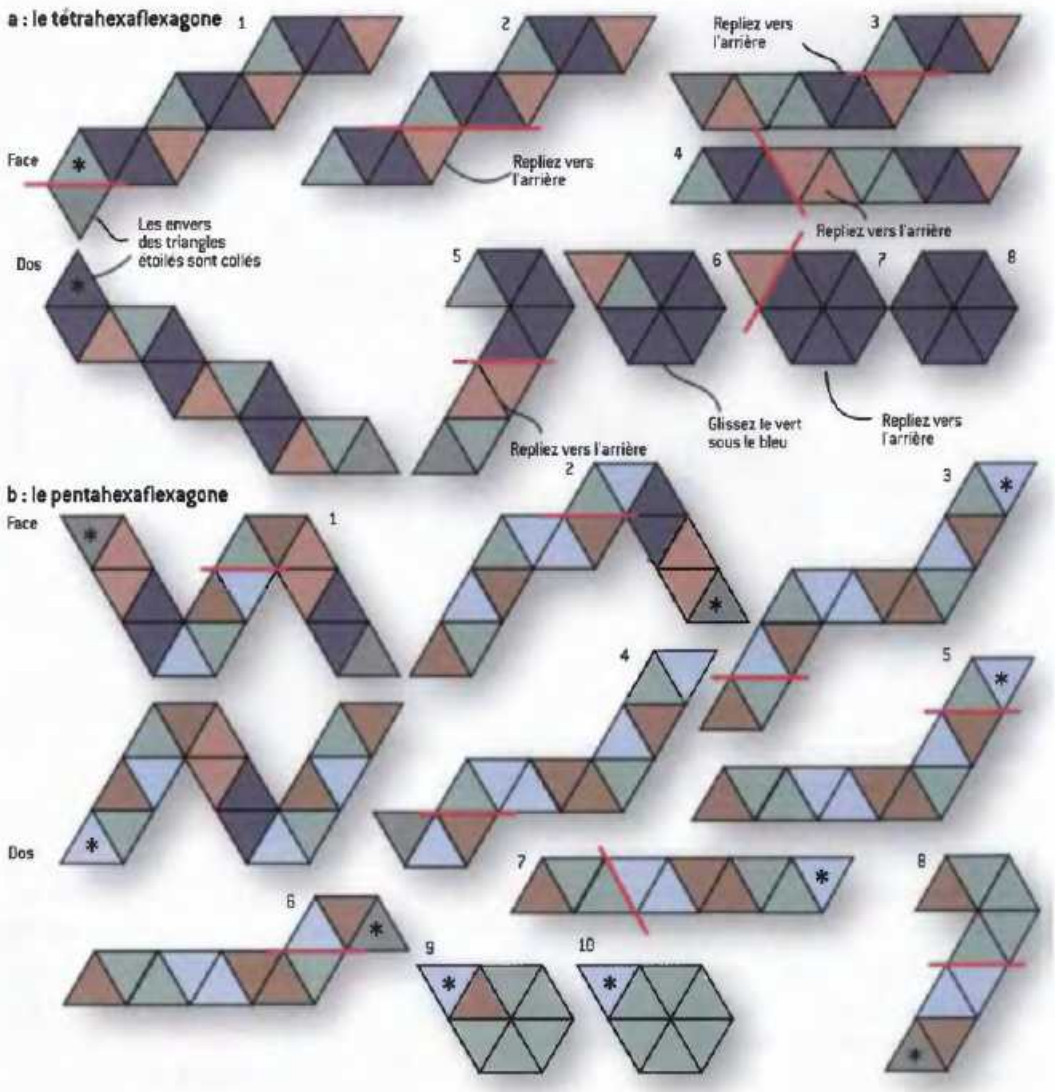
retrouva en possession d'une série de fines bandes. Il commença à les replier obtenant des formes géométriques dont certaines se révélèrent *flexibles*.

Le premier flexagone qu'il découvrit s'obtient en considérant 9 triangles équilatéraux liés et pliés pour former un hexagone selon le schéma de la figure 1. Pour faciliter la jonction des deux triangles extrêmes qui doivent être reliés, on part de dix triangles et on colle l'un sur l'autre les deux triangles situés aux bouts de la bande.

En coloriant les triangles comme la figure 1 le suggère et en suivant soigneusement la procédure de pliage, on obtient un hexagone plat dont la face vers soi montre six triangles d'une même couleur. Il en va de même de la face en dessous (le dos)! Ce pliage qui semble rigide, en réalité peut changer de forme, si vous savez le « flexer ». Le schéma de la figure 2 décrit cette opération qui procure, à tous ceux qui s'y essayent, le plaisir étrange d'apprivoiser un pliage qui a sa volonté propre.

Le flexagone « flexé », vous avez entre les mains un nouvel hexagone dont les deux faces visibles ont changé de couleur. Vous pouvez à nouveau le flexer, ce qui vous conduit à une troisième configuration du flexagone. Une dernière manipulation vous ramène à l'état initial. Une telle promenade dans l'espace des configurations du flexagone se représente par un petit graphe :

bleu/rose
/ \
vert/bleu — rose/vert

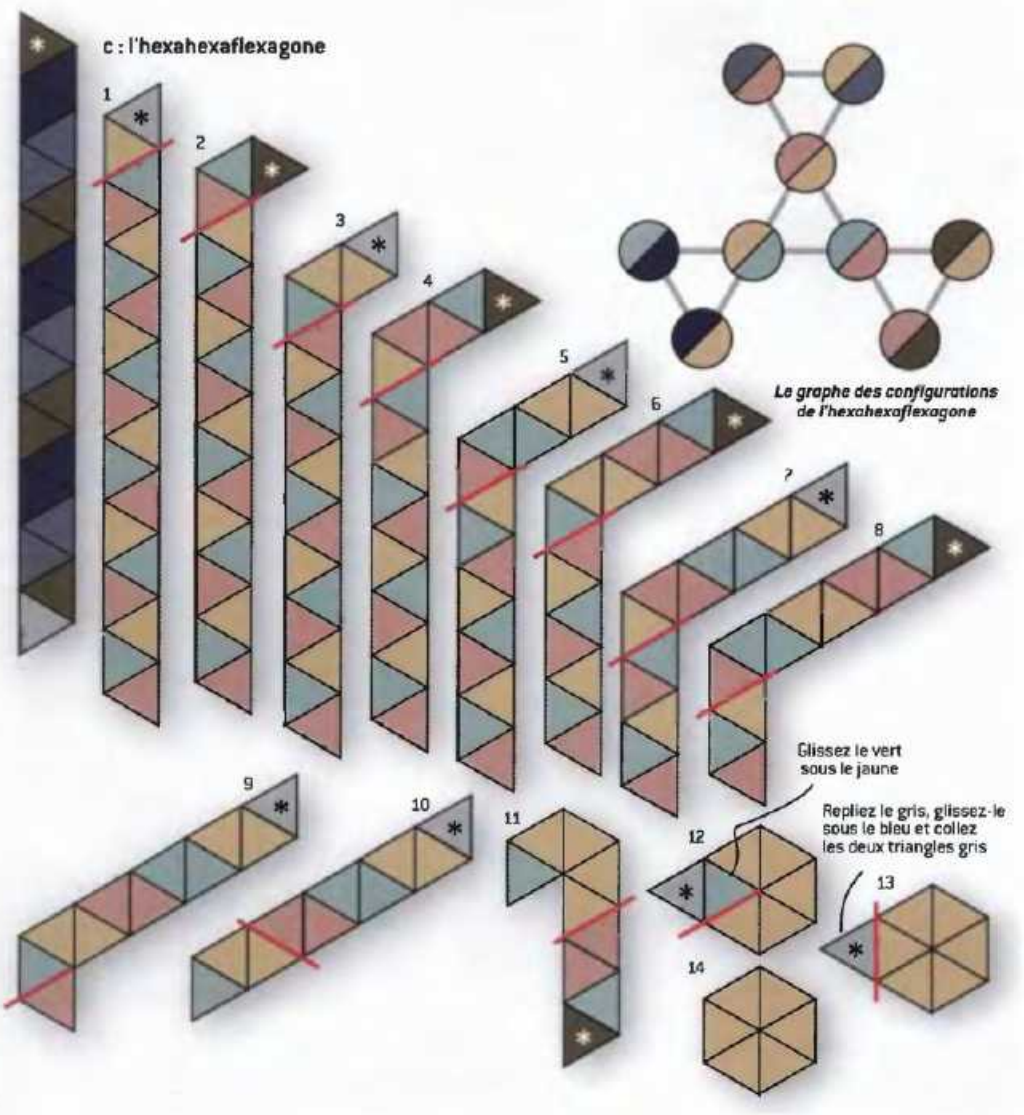


3 Trois flexagones : le tétrahexaflexagone *(a)*, le pentahexaflexagone *(b)* et l'hexahexaflexagone *(c)*. Fabriquez-les et explorez l'espace de leurs configurations. Le haut de la figure C donne le détail de l'espace des configurations dans le cas de l'hexahexaflexagone. En flexant l'hexahexaflexagone vous en changez la configuration, ce que vous voyez, car les couleurs des faces se modifient. À chaque flexage, la face qui disparaît est remplacée par une nouvelle face : les triangles qui la composent changent d'orientation.

Ce premier flexagone possède trois faces (trois couleurs qui apparaissent successivement par flexage) correspondant à trois configurations. D'où son nom de trihexaflexagone : trois faces hexagonales, chacune composée de 6 triangles.

Stone forma autour de lui un groupe de travail sur les flexagones qui réunissait Bruant Tukerman, John Tukey, tous deux mathématiciens, et Richard Feynman alors étudiant en physique et qui en 1965 se verra décerner le prix Nobel… pour des travaux en électrodynamique quantique.

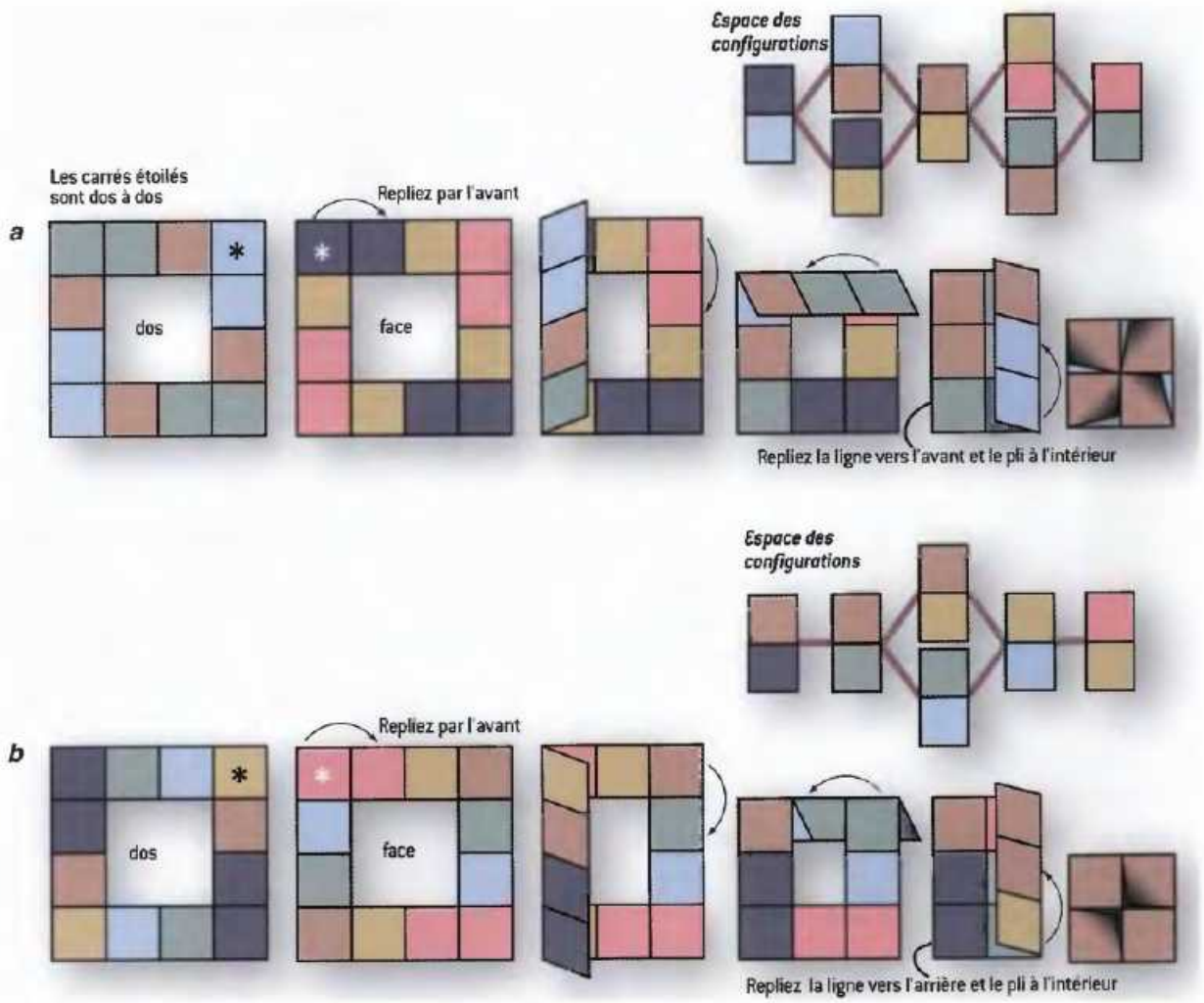
Malgré de nombreuses découvertes concernant les pliages flexibles, assez étrangement, aucune publication ne résulta des travaux du groupe réuni autour de Stone (peut-être parce que la Seconde Guerre mondiale les dispersa trop rapidement). C'est l'intérêt



suscité par l'article de Martin Gardner qui relança la recherche sur cet étrange domaine des mathématiques récréatives. En partant d'un nombre un peu plus grand de triangles, on obtient d'autres flexagones de forme hexagonale possédant un nombre de faces supérieur à trois. La figure 3 indique comment construire le tétrahexaflexagone, le pentahexaflexagone et le hexahexaflexagone possédant respectivement 4, 5 et 6 faces.

Quelques remarques concernant l'hexahexaflexagone illustreront l'étrange richesse combinatoire de ces assemblages de triangles repliés.

L'hexahexaflexagone possède 6 faces, ce qui signifie qu'en le manipulant vous ferez apparaître les six couleurs différentes utilisées dans le coloriage de la bande initiale. Jamais aucun mélange de couleur ne se produit. Chaque configuration est caractérisée par deux couleurs: celle visible au-dessus et celle visible en dessous. L'opération de «flexage» fait passer d'une configuration à une autre, ce qui définit un graphe *(voir la figure 3)*. Son examen montre que:
– Il y a 9 configurations différentes, qu'on parcourt en flexant de toutes les façons possibles. Jamais aucune autre manipulation n'est possible (sans déchirer l'assemblage) et on garde donc toujours en main un hexagone bicolore;



Vous pouvez aussi faire des flexagones sans colle ! En voici un premier exemple : *(a)* le pliage symétrique de la feuille trouée. La dernière des quatre opérations de pliage nécessite une très délicate manipulation pour que la face en bas à gauche, qui se place naturellement sur le dessous (lorsqu'on replie les quatre derniers carrés), se retrouve au-dessus. Le résultat final est une forme rigide (elle ne se déplie pas d'elle-même) qui reste identique quand vous faites tourner le pliage d'un quart de tour (elle est invariante par rotation de 90 degrés). Cette forme est un des tétraflexagones sans colle de R. Neale : il possède six faces et peut se trouver dans sept configurations différentes. Autre exemple, *(b)* : le pliage asymétrique de la feuille trouée. Comme précédemment, il faut, lors de la dernière étape, permuter les carrés en bas à gauche pour que celui qui se place naturellement au-dessus se retrouve en dessous. Si vous utilisez le coloriage destiné au pliage asymétrique et que vous faites le pliage symétrique, vous observerez une disposition intéressante...

– Sur les 9 configurations, 3 configurations, dites « centrales », donnent accès chacune à quatre autres (dont à chaque fois les deux autres configurations centrales) ;
– Les 6 autres configurations, dites « périphériques », donnent chacune accès à une configuration périphérique et une configuration centrale.

On distingue sans mal (et sans regarder le diagramme) une configuration périphérique d'une configuration centrale en observant combien de triangles sont empilés pour chaque élément de l'hexagone. Dans le cas des configurations centrales, la répartition des épaisseurs est 2-4-2-4-2-4 ; pour les configurations périphériques, elle est 1-5-1-5-1-5.

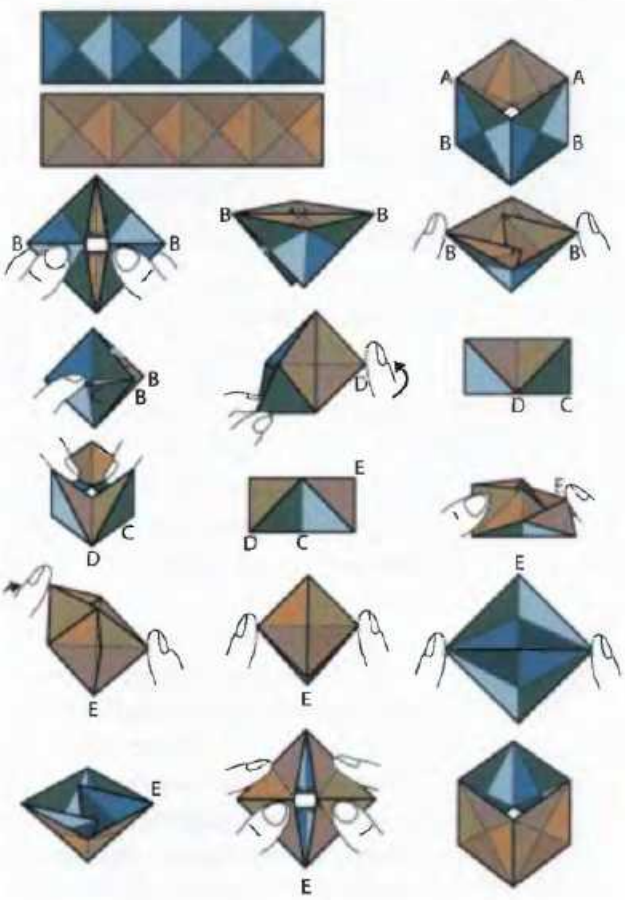
Si vous réalisez des dessins sur les triangles, vous remarquerez que d'une configuration à l'autre les éléments d'une face donnée tournent; autrement dit, les six triangles qui composent la face – violette par exemple – ne se disposent pas de la même façon selon la configuration que vous observez et qui exhibe une face violette. Parmi toutes les faces possibles (en tenant compte à la fois de la couleur et de la position relative des triangles), seules 15 faces différentes sont accessibles avec un hexahexaflexagone.

Nous vous laissons le soin de découvrir le graphe des configurations des tétra- et pentahexaflexagones. Continuez votre exploration en construisant d'autres flexagones. Les plus simples partent, comme pour les hexahexaflexagones, d'une simple bande de papier composée de triangles équilatéraux côte à côte: il y en a de ce type à 9 faces, 12 faces, 18 faces etc., avec, à chaque fois, des graphes de configurations de plus en plus complexes et intéressants à identifier.

Pour un nombre donné de faces, plusieurs hexaflexagones différents sont possibles. Leur dénombrement est indiqué dans la suite A000207 de l'encyclopédie des suites de Sloane (http://www.research.att.com/~njas/sequences/). Cette suite est aussi celle que l'on obtient en comptant le nombre de façons différentes de découper un polygone régulier à $n + 2$ côtés en n triangles par des diagonales ne se coupant pas.

En collant des dessins sur les faces, vous créerez des casse-tête. Ils peuvent être du type « faites apparaître tel dessin », leur difficulté étant liée à la structure du graphe des configurations.

Un flexagone étant choisi, un autre casse-tête consiste à trouver la suite de manipulations la plus simple faisant passer par toutes les faces du flexagone, ou – plus long – par toutes les configurations possibles du flexagone. Vous pouvez aussi vous fabriquer un petit album photos original en collant des photos sur les faces d'un flexagone dont vous tournerez les pages en flexant le pliage.



Le flexatube. Bien que découvert en 1939 par Arthur Stone l'inventeur des flexagones, le flexatube n'est pas très connu. C'est pourtant un magnifique casse-tête facile à fabriquer soi-même. On marque des plis comme le dessin l'indique dans une bande rectangulaire 4 × 1. On referme la bande, ce qui donne un anneau. Le problème est de retourner l'anneau (l'intérieur doit devenir l'extérieur et réciproquement) en utilisant uniquement les plis marqués, c'est-à-dire en faisant comme si chaque triangle rectangle dessiné était en carton rigide. L'étonnant est que c'est possible comme le montre la suite de dessins. Avec un tube plus long (quelle que soit sa longueur), le retournement reste possible, mais bien sûr nécessite une mosaïque plus fine de triangles.

Vous obtiendrez de beaux flexagones en découpant des cartons triangulaires (ou des plaques de bois) que vous relierez par des bandes de papier ou mieux des bandes de tissu.

La construction des flexagones ayant un très grand nombre de faces est délicate; toutefois, à condition de prendre des feuilles assez grandes et de mener les découpages et assemblages avec soin, des flexagones à 30 ou même 50 faces ne semblent pas impossibles. Qui ira le plus loin? Envoyez-moi vos constructions (avec le graphe des configurations).

Si à la place de triangles vous utilisez des carrés, une nouvelle sorte de flexagones peut être obtenue qui, elle aussi, a été largement étudiée. On les dénomme des tétra-flexagones. En fait des flexagones utilisant des carrés, des pentagones et toutes sortes de figures de bases ont été imaginés, créés et analysés. Pour approfondir cet art géométrique et combinatoire vivant, en plus du livre de Pook déjà cité vous devez consulter l'adresse internet: http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html. Vous y trouverez des articles sur le sujet et même le texte inédit d'un projet de livre de 1962 consacré aux flexagones.

Sans utiliser la colle!

Malgré l'ancienneté du sujet et les nombreux travaux menés, une nouvelle famille de flexagones a récemment été découverte. L'élégance de ces nouveaux pliages montre que, même après des dizaines d'années d'étude, certaines questions simples et leurs solutions échappent à toute une communauté de passionnés. Robert Neale s'est demandé si on ne pouvait pas créer des flexagones sans collages. Il a trouvé plusieurs objets répondant à cette condition.

Partant d'une feuille de papier carrée (ou rectangulaire) à la surface de laquelle on a fait apparaître un quadrillage régulier de 16 carrés (ou rectangles), on découpe les 4 carrés (ou rectangles) centraux. Avec cette feuille trouée en main, deux pliages astucieux produisent deux flexagones très commodes pour faire de micro-albums photos (il faut coller les photos après avoir plié le support à cause de la manipulation spéciale décrite plus bas).

Le premier pliage que nous dénommerons «pliage symétrique» consiste à replier les quatre carrés situés à gauche – vers l'avant – , puis les quatre carrés du haut – vers l'avant – , puis les quatre carrés de droite – vers l'avant – , puis enfin les quatre carrés du bas – toujours vers l'avant *(voir la figure 5a)*. Attention cependant, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation un peu délicate permettant au résultat final d'être invariant par rotation d'un quart de tour: il faut lors du dernier pliage faire passer le carré de papier, qui sans manipulation particulière se serait trouvé tout en dessous en bas à gauche, par-dessus les deux autres de la même pile.

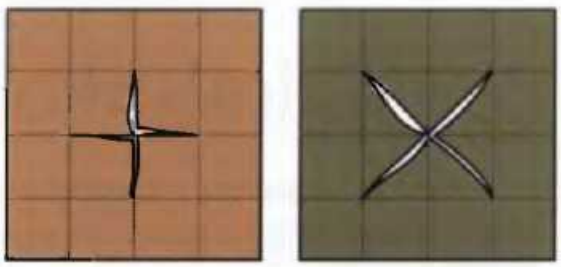
Cette opération serait impossible si les 12 carrés étaient rigides, mais grâce à la souplesse du papier on peut y arriver... sans rien déchirer. Le résultat est une configuration stable: si vous jetez votre flexagone sans colle correctement plié, il ne se défait pas et pour revenir à la feuille trouée dépliée, il faut nécessairement à un moment ou un autre forcer le pliage.

Si vous avez réussi le pliage, le flexagone peut s'ouvrir de quatre façons différentes – c'est l'opération de flexage pour ce type de flexagones – vous amenant dans quatre configurations nouvelles. Une sixième et une septième configurations existent aussi. La forme du graphe des sept configurations est une double boucle *(voir la figure 4A)*.

Le second pliage du carré troué, que nous dénommerons «pliage asymétrique», consiste à replier alternativement les quatre carrés de la colonne de gauche – vers l'avant – , puis les quatre carrés du haut – vers l'arrière – , puis les quatre carrés de droite – vers l'avant – , puis enfin les quatre carrés du bas – vers l'avant. Attention, comme précédemment, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation (assez délicate à faire, mais il faut se laisser guider par le résultat à obtenir) faisant passer sur le dessus, le carré de papier qui sans manipulation particulière se serait trouvé en dessous dans le coin en bas à gauche. Le graphe des configurations cette fois ne comporte que 6 nœuds et c'est un carré muni de

tiges conduisant à des configurations isolées (un peu plus difficiles à découvrir que les autres).

Les deux pliages particuliers que vous venez d'apprendre vous seront utiles pour quatre autres flexagones sans colle inventés par R. Neale. Partant cette fois d'une feuille de papier carrée avec quadrillage à 16 carrés (ou rectangles) mais sans trou, faites une entaille en forme de + et faites le pliage symétrique ou le pliage asymétrique *(voir la figure 6)*. Nous vous laissons le plaisir de trouver vous-même les graphes des configurations de ces deux flexagones. En partant d'une entaille en forme de x, vous obtiendrez encore deux flexagones nouveaux, l'un avec le pliage symétrique, l'autre avec le pliage asymétrique. Amusez-vous bien. Y a-t-il d'autres flexagones sans colle à découvrir ?



6 Feuilles à entailles. En utilisant des feuilles entaillées par un + ou un x comme l'indique le dessin et en opérant des pliages symétriques ou asymétriques (décrits sur les figures 4A et 4B), vous obtiendrez quatre nouveaux flexagones «sans colle» dont nous vous laissons le plaisir de découvrir l'espace des configurations.

Le flexatube

Pour ceux qui aiment les casse-tête et les pliages, une des découvertes qu'Arthur Stone fit en manipulant ses flexagones mérite d'être plus connue, car elle est à la fois troublante et très belle. Il s'agit de ce qu'on appelle le *flexatube*. Partant d'une feuille de papier de taille 4 × 1 (4 carrés côte à côte) colorée en noir d'un côté et en blanc de l'autre, vous marquez quatre plis sur chaque carré, d'abord en suivant les deux diagonales, puis en suivant la verticale et l'horizontale passant par le centre. Vous joignez ensuite les deux extrémités de la bande que vous fixez avec du papier adhésif *(voir la figure 5)*. Cela vous conduit à une sorte de cylindre à section carrée, autrement dit à une boîte cubique sans fond ni couvercle.

Le but du casse-tête est d'inverser l'intérieur et l'extérieur, en n'utilisant que les plis marqués avant le collage. L'opération est possible, mais n'est pas évidente. En fait, il y a deux solutions très différentes, mais aucune n'est facile *(la figure 5 en propose une)*. Ce retournement d'un tube aussi large que haut en n'utilisant qu'un nombre fini de plis rectilignes se généralise à des tubes aussi longs que l'on veut à condition bien sûr de faire un plus grand nombre de plis initiaux. À ma connaissance, le même problème avec non plus un tube, mais un sac (l'une des extrémités de la boîte est fermée) n'est pas résolu : peut-on retourner une boîte dont la surface est faite de polygones rigides reliés ? Si c'est possible, quels polygones faut-il choisir pour réussir le retournement de la boîte et quel est le détail des manipulations ? Toujours si c'est possible, quel est le nombre minimum de polygones que délimiteront les plis permettant le retournement d'une boîte à faces carrées ? La corne d'abondance des flexagones est encore pleine.

Calculs et coulissements

Les casse-tête à pièces coulissantes, étudiés depuis des décennies, sont mieux compris : on sait pourquoi il est difficile de les résoudre.

En 1878, Sam Loyd, grand amateur et créateur d'énigmes mathématiques, proposa une récompense de mille dollars à la première personne qui réussirait à remettre en ordre une série de 15 pièces coulissantes de forme carrée disposées dans un cadre carré de 16 places. L'espace vide permet de faire coulisser les pièces et la solution semblait assurée. Le casse-tête, qui connut un succès phénoménal dans le monde entier, porte aujourd'hui le nom de *Taquin* dans les pays francophones. La position de départ est reproduite au centre et la position visée pour le défi proposé par Sam Loyd est à droite :



Le but consistait à remettre le 14 et le 15 en bon ordre d'où le nom anglophone du jeu : 14-15 *puzzle* ou 15-*puzzle* (nom à utiliser pour vos recherches sur Internet). Le défi, inspiré d'un jeu analogue vendu une dizaine d'années auparavant par la Société *Embossing Company* de New York, était sans risque pour Sam Loyd, car il est impossible de remettre en ordre les pièces sans démonter le casse-tête, ce qui, bien sûr, n'est pas permis. Cette impossibilité est démontrée figure 2.

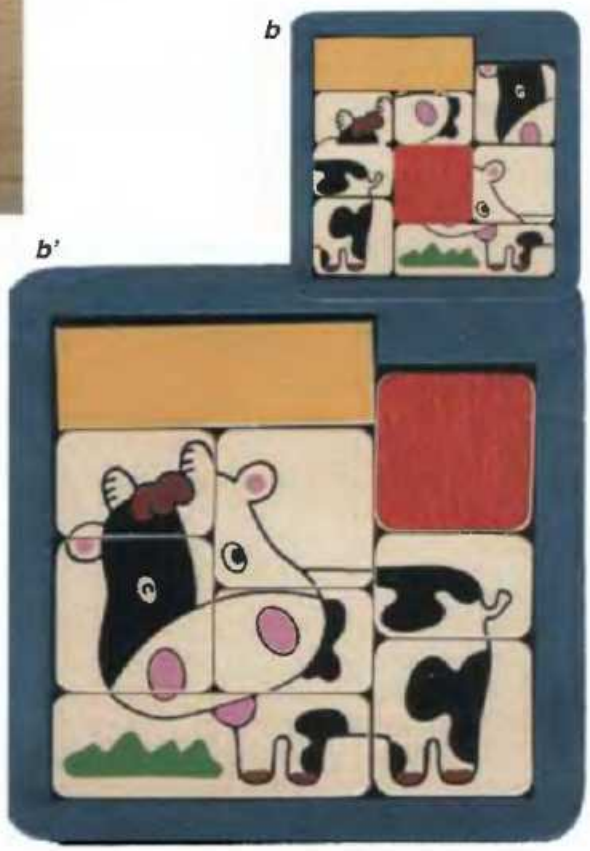
Le succès du jeu suggéra une série d'autres casse-tête où le même principe est adopté, mais où l'on utilise des pièces de tailles et de formes différentes et souvent un espace vide de plusieurs carrés. Ces casse-tête à pièces coulissantes sont difficiles : on peut tourner en rond des heures avant d'arriver à la solution. Parfois même, on se persuade à tort qu'aucune solution n'existe. La figure 1 ci-contre en propose une série.

Martin Gardner présenta ces jeux en février 1964 dans sa rubrique de *Scientific American*. Il s'étonnait qu'aucune théorie n'en soit connue : « À moins de procéder par essais et erreurs, personne ne sait déterminer si, partant d'une position donnée, une configuration fixée comme but peut être atteinte ou non, et lorsque la réponse est oui, comment trouver le nombre minimum de déplacements permettant d'opérer le passage de l'une à l'autre. »

Besoin d'espace ?

La raison de cette absence de méthode générale vient enfin d'être identifiée par Robert Hearn et Erik Demaine, qui ont montré que cette catégorie de casse-tête appartient à la classe des problèmes PSPACE-complets. Nous présenterons cette classe qui joue









Casse-tête à pièces coulissantes. *(a)* Le casse-tête « 123 » : après avoir enlevé la pièce centrale rouge, vous devez permuter le 1 et le 3 (26 mouvements). *(b)* Un casse-tête de Minoru Abe : après avoir enlevé la pièce jaune, la vache doit être reformée en 39 mouvements *(b')*. *(c)* Le casse-tête « Ange et Satan » : après avoir enlevé la pièce verte, vous devez échanger les deux personnages (74 mouvements). *(d)* Le casse-tête Kuroko : après avoir enlevé la pièce brune centrale, vous devez permuter seulement les deux pièces vertes (85 mouvements). Pour jouer avec ces puzzles, vous pouvez les confectionner en contreplaqué ou aller sur le site :
http://www.puzzleworld.org/SlidingBlockPuzzles/abe.htm

un rôle central en théorie de la complexité où, avec la classe des problèmes NP-complets (les problèmes les plus difficiles de la classe NP des problèmes qu'on résout en temps polynomial à l'aide de tirages aléatoires chanceux) et la classe des problèmes P (problèmes qu'on peut résoudre en temps polynomial), elles constituent trois barreaux d'une échelle de mesure de la difficulté des jeux et des casse-tête et, plus généralement, de tous les problèmes algorithmiques.

2. Les 1 000 dollars que Sam Loyd ne pouvait pas perdre !



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On colorie les 16 cases en damier noir et blanc, avec une case noire en haut à gauche (donc celle en bas à droite est aussi en noir). On considère que la case vide est numérotée 16. Pour démontrer que le défi de Sam Loyd est impossible, on commence par une remarque astucieuse : dans une liste de nombres entiers tous différents, par exemple 1-3-6-5-8, quand on échange les positions de deux nombres par exemple le 3 et le 8, ce qui donne 1-8-6-5-3, le nombre d'inversions (le nombre total de couples *(a, b)* où *a* est placé avant *b* dans la liste et *a* est supérieur à *b*) change de parité. Dans l'exemple, il passe de 1 [au départ il n'y a que l'inversion (6,5)] à 6 [après l'échange il y a (8,6), (8,5), (8,3), (6,5), (6,3), (5,3)], donc de impair à pair.

Voici la démonstration de la remarque astucieuse. Quand on échange *a* et *b* (présents dans la liste ... *a* ... *b* ...), il y a une inversion nouvelle due au couple *(a, b)* si $a < b$ et une de moins si $a > b$, donc la parité du nombre d'inversions change à cause de ce couple. Nous allons voir que les autres nombres *x* de la liste ne créent aucun changement de parité du nombre d'inversions ; la remarque astucieuse sera donc établie. Soit *x* un nombre de la liste, trois cas sont possibles :

(1) *x* est placé en dehors de l'espace entre *a* et *b* (...*x*...*a*...*b*... ou ...*a*...*b*...*x*...) : lorsque l'on échange *a* et *b*, le nombre d'inversions quand on compare *x* avec *a* ou avec *b* reste le même.

(2) x est placé entre *a* et *b* (...*a*...*x*...*b*...) et est plus petit que *a* et *b* ou plus grand que *a* et *b* : le nombre d'inversions entre *x* et les deux nombres *a* et *b* est 1 et reste égal à 1, il ne change donc pas de parité ;

(3) *x* est placé entre *a* et *b* et *a* une valeur comprise entre celle de *a* et celle de *b* : alors le nombre d'inversions créées par *x* en le comparant à *a* et *b* augmente de 2 si $a < b$ et diminue de 2 si $a > b$, et, là encore, ne change donc pas de parité.

Définissons maintenant la parité P d'une configuration du *Taquin* :

Cas N : la case vide est noire. Nous notons P la parité du nombre d'inversions de la suite des cases (lues ligne à ligne, de haut en bas).

Cas B : la case vide est blanche. P est l'opposé de la parité du nombre d'inversions (paire si elle est impaire, impaire si elle est paire).

Quand on fait un mouvement élémentaire (déplacement d'un pion du jeu en utilisant l'espace vide), la case vide est échangée avec une autre case et change de couleur : on passe de N à B ou de B à N, et le nombre d'inversions aussi change de parité (car on a échangé deux nombres de la liste), donc la parité P de la configuration reste identique. Donc, en partant d'une configuration paire, on ne peut atteindre que des configurations paires, et en partant d'une configuration impaire, on ne peut atteindre que des configurations impaires. En particulier, partant de la position initiale donnée par Sam Loyd, qui est impaire, on ne peut jamais arriver à celle qu'il demandait, qui est paire.

Un raisonnement complémentaire montre que la condition «avoir la même parité» entre deux configurations est non seulement nécessaire pour qu'on puisse passer de l'une à l'autre, mais est aussi suffisante. Du coup, savoir si l'on peut passer de telle configuration à telle autre avec un Taquin (même très grand) ne demande que peu de calculs (on évalue leur parité en comptant le nombre d'inversions des deux configurations et en regardant la couleur de la case vide).

Un problème est dit PSPACE (ces lettres proviennent des mots *espace* et *polynomial*) si, pour le résoudre, la quantité de mémoire qu'utilisera l'ordinateur n'est pas trop importante. Plus précisément un problème est PSPACE si :
1) il est possible de trouver un algorithme déterministe (c'est-à-dire n'utilisant pas de tirages au hasard) qui résout chaque cas du problème ;
2) et que cet algorithme utilisant des données de taille n n'emploie, pour stocker ses données intermédiaires, qu'une mémoire d'au plus $p(n)$ bits, où $p(n)$ est un polynôme en n, comme $7n$, $n^3 + 3n^2 + 5$ ou $n^{10} + 50n$.

Par exemple, pour savoir si l'écriture en base 10 du carré d'un nombre entier a de n chiffres utilise le chiffre 7 (la réponse est OUI ou NON), vous pouvez suivre l'algorithme de multiplication appris à l'école pour calculer a^2, puis regarder si le résultat comporte un 7. Par cette méthode, l'espace de mémoire que l'algorithme utilise est d'environ n^2 chiffres (un chiffre = un caractère = 8 bits), car pour disposer la multiplication de a par a, il faut écrire n lignes de calculs intermédiaires ayant chacune n ou $n + 1$ chiffres (chaque ligne correspond au produit de a par un chiffre), lignes qui sont ensuite additionnées. Le problème de savoir si l'écriture de a^2 utilise le 7 peut donc être résolu avec un espace de travail de taille d'environ n^2 (donc inférieur au polynôme $2n^2$), le problème est donc PSPACE.

Les formules booléennes quantifiées

Certains problèmes PSPACE sont généraux dans le sens suivant : si on savait les résoudre efficacement alors on saurait résoudre efficacement tous les problèmes PSPACE. Ces problèmes PSPACE de difficulté maximale et auxquels tous les autres peuvent se ramener sont nommés PSPACE-complets.

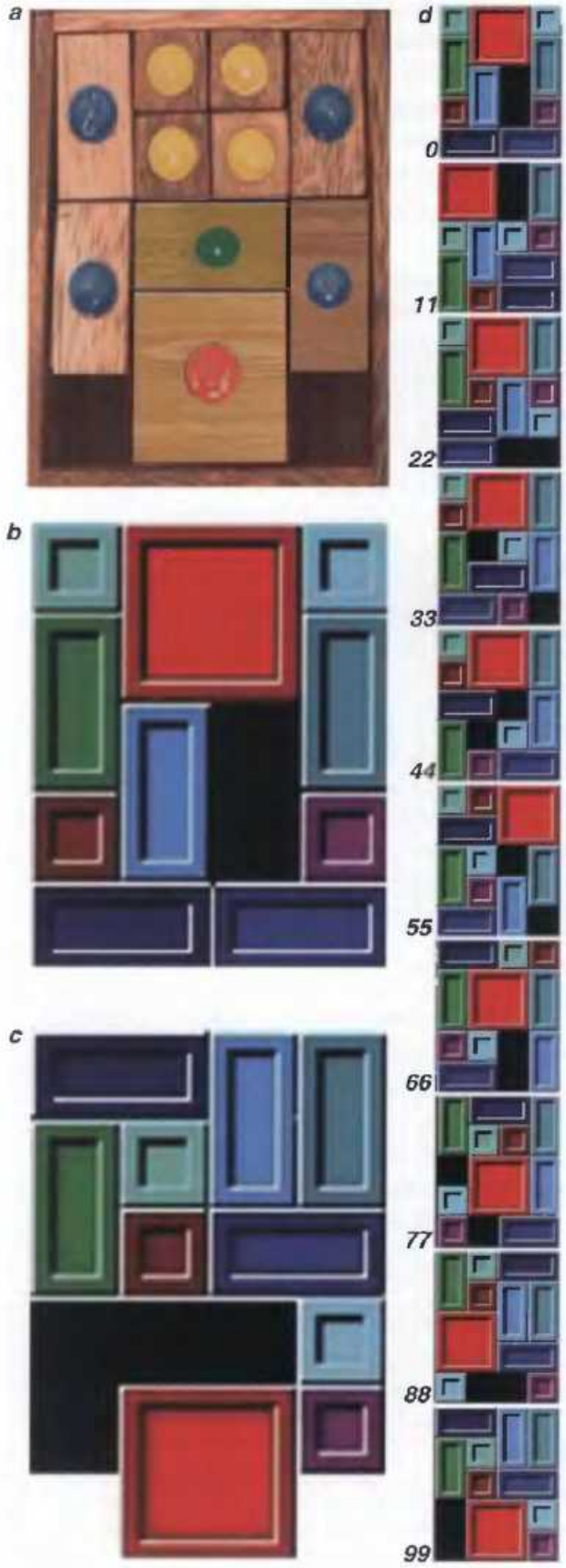
L'exemple le plus simple et le plus important de problème PSPACE-complet a un nom barbare et intimidant : c'est celui des *formules booléennes quantifiées*. Ces formules sont la clef de la démonstration établissant que les casse-tête à pièces coulissantes sont PSPACE-complets. Voici deux exemples de formules booléennes quantifiées. La première est : (1) Il existe A, tel que pour tout B et pour tout C : (A ou B) et (A ou C). La seconde est : (2) Pour tout A et pour tout B : (A ou B).

Les lettres A, B, C désignent des propositions logiques vraies ou fausses et les formules auxquelles on s'intéresse ont toutes la même structure : des quantificateurs (« pour tout » et « il existe »), puis une formule de logique booléenne, c'est-à-dire avec des *et*, des *ou*, des *non*, des *implique*, etc.

La formule booléenne quantifiée (1) est une formule vraie, car si A est une proposition vraie alors, que B le soit ou non, et que C le soit ou non, la formule (A ou B) et (A ou C) est vraie. En revanche, la formule booléenne quantifiée (2) est une formule fausse, car si A est faux et que B est faux, alors (A ou B) est faux, et donc il n'est pas vrai en général que : pour tout A et pour tout B : (A ou B).

Certaines formules booléennes quantifiées ne peuvent être résolues qu'en menant des calculs assez longs et le type de difficultés qu'on rencontre pour résoudre les formules booléennes quantifiées est très général au point que tous les problèmes PSPACE s'y ramènent : si l'on sait traiter efficacement le problème des formules booléennes quantifiées, on résout efficacement tous les problèmes de la classe PSPACE.

De ce fait, on pense qu'il n'y a pas d'algorithme efficace (c'est-à-dire fonctionnant en temps polynomial) pour résoudre les problèmes PSPACE-complets. Démontrer qu'un problème est PSPACE-complet est donc considéré comme la preuve qu'il est impossible



à résoudre rapidement. On sait que tout problème P (polynomial) est dans NP et que tout problème NP est dans PSPACE. Autrement dit, l'ensemble des problèmes P est inclus dans l'ensemble des problèmes NP, lui-même compris dans l'ensemble PSPACE.

On conjecture par ailleurs que ces trois classes de complexité sont toutes différentes et constituent trois barreaux dans l'échelle de la difficulté algorithmique. Retenons simplement de cela que :

(a) si on vous dit qu'un problème est dans la classe P, c'est qu'on peut le traiter rapidement et donc qu'il est envisageable de résoudre des cas particuliers de ce problème, même lorsque la taille des données est grande ;

(b) si on vous dit qu'un problème est NP-complet, c'est que, sans doute, il ne peut pas être résolu de manière rapide, et en conséquence, dès que les données sont volumineuses, aucun ordinateur ne peut le résoudre en un temps raisonnable ;

(c) si on vous dit qu'un problème est PSPACE-complet, c'est encore plus inquiétant : il faut sans aucun doute disposer d'un temps énorme pour faire fonctionner les algorithmes qui le résolvent et cela même quand la taille des données est petite.

Passer des pièces carrées aux dominos 1 × 2

Les casse-tête à pièces coulissantes, selon qu'on autorise des formes de pièces carrées ou quelconques, définissent de beaux exemples pour illustrer ces trois barreaux de la complexité. Si

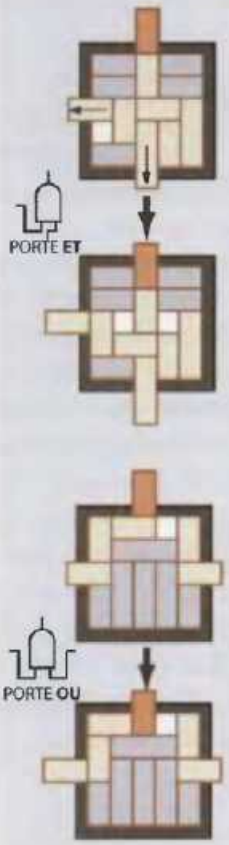
L'âne rouge, un des plus anciens casse-tête et un des plus récents de John Conway. L'âne rouge *(a)* est d'origine thaïlandaise : le but est de déplacer la pièce au bouton rouge afin de la mettre à la place des 4 pièces aux boutons jaunes : il faut 81 mouvements. Le casse-tête à pièces coulissantes de John Conway où il faut passer de la configuration *(b)* à la configuration *(c)* est assez difficile (100 mouvements) ; pourtant le nombre de pièces est faible. Les étapes de la solution *(d)* sont indiquées tous les 11 mouvements.

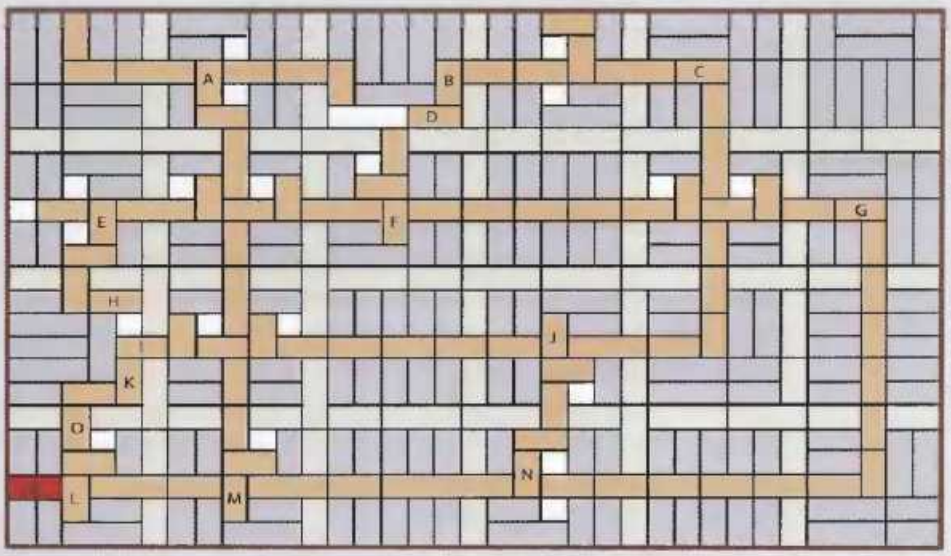
vous considérez des jeux de *Taquin* composés de n lignes et m colonnes de pièces carrées coulissantes (toujours avec une seule case vide et des pièces carrées identiques), alors savoir si, partant d'une configuration donnée, on peut arriver à une autre configuration fixée comme but est un problème facile. On peut le résoudre en temps polynomial, c'est un problème de la classe P. Il suffit en effet de calculer la parité des configurations initiale et finale *(voir la figure 2)*.

Cependant, trouver la meilleure solution est difficile. En effet, en 1990, D. Ratner et M. Warmuth ont démontré que trouver le plus court chemin entre deux configurations du *Taquin* est NP-complet. De même qu'en arithmétique savoir qu'un nombre est composé est un problème plus facile que savoir le décomposer en produit de facteurs premiers, dans le domaine du *Taquin* savoir si l'on peut joindre deux positions est facile alors que les joindre de manière optimale ne l'est pas du tout.

Le récent résultat de R. Hearn et E. Demaine montre que si l'on accepte que les formes des pièces soient plus variées (ne soient pas simplement des carrés), on accroît considérablement la difficulté du *Taquin*. Le problème de savoir si l'on peut passer d'une configuration donnée à une autre avec les casse-tête à pièces coulissantes est

4. Les portes logiques à pièces coulissantes





En utilisant des pièces coulissantes, on crée des portes logiques. Par exemple le petit casse-tête en haut à gauche est une porte logique *et*: la pièce en haut ne peut entrer d'un carreau dans le cadre que lorsque la pièce à gauche et la pièce en bas sont sorties d'un carreau du cadre. De la même façon, il existe une porte logique *ou*: si l'une des pièces de droite ou de gauche entre dans le cadre d'un carreau alors nécessairement la pièce du haut est en position sortie. La juxtaposition de ces portes (et d'autres) engendre des casse-tête complexes. Cela permet de «programmer» des casse-tête dont la résolution est équivalente à la recherche de la valeur *vraie* ou *fausse* d'une formule booléenne quantifiée et d'en déduire que le problème est PSPACE-complet. Ci-dessus, un exemple de casse-tête composé à partir de portes logiques où il faut déplacer la pièce X d'une case vers la droite. (Réponse. Déplacer aussitôt que possible E vers la gauche, D vers la gauche, F vers le haut, D vers la gauche, N vers la droite, J vers le bas, C vers la gauche, I vers la droite, H vers la gauche, K vers le haut, J vers la gauche, B vers le haut, N vers le haut, F vers la droite, D vers la droite, A vers la droite, F vers le haut, G vers la gauche, M vers le haut, L vers le haut, X vers la droite.)

5. Complexité des casse-tête et des jeux



A) Résoudre les **Cryptarithmes** est un problème NP-complet: dans un cryptarithme, il faut remplacer chaque lettre par un chiffre spécifique de manière à avoir une égalité exacte.
ARGENT + ARGENT = MALHEUR (Eric Angelini)
DEUX + NEUF = ONZE (Nicolas Graner)
QUART + QUART + QUART + QUART = ENTIER (Eric Angelini)
TOI + LUI + ELLE = VOUS (Philippe Deschamp)
NOIR + NOIR = BLANC (Michel Clavel)
Emprunté à: http://www.graner.net/nicolas/nombres/crypt.php
Précisons que le problème des cryptarithmes n'est NP-complet que dans sa forme généralisée où la base de numération à utiliser peut être imposée différente de 10. En effet lorsque la base est fixée à 10, quelle que soit la taille du problème, il n'y a que 10! tentatives à faire et donc un temps fini suffit (et donc le problème ne pourrait pas être NP-complet).



Pour classer les jeux classiques comme les échecs, ou les dames, il faut d'abord en proposer des généralisations sur des damiers de tailles quelconques. Selon la façon dont on s'y prend (et qui est toujours un peu arbitraire: nouvelles pièces à inventer?), la position de ces jeux sur l'échelle des classes de complexité varie. Notons cependant qu'elle se situe toujours au niveau de NP-complet ou au-dessus.



B) Le jeu du **Sudoku** sur un tableau de taille $n^2 \times n^2$ a été démontré NP-complet par Takayuki Yato et Takahiro Seta.

C) Le jeu des **petits carreaux** est NP-difficile (ce qui veut dire qu'il est au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet, mais qu'il l'est peut-être plus):



D) La recherche d'une solution au **Master-Mind** est NP-complet.
E) La recherche du coup gagnant dans le jeu d'**Othello** (ou **Réversi**) est PSPACE-complet.
F) **Sokoban** (jeu où un personnage doit déplacer des obstacles qui encombrent un labyrinthe et les ranger dans les endroits indiqués: le personnage ne peut pousser qu'un seul obstacle à la fois et doit se placer derrière pour pousser). Il s'agit d'un problème PSPACE-complet:

PSPACE-complet, de même d'ailleurs que le problème du plus court chemin, dès que les pièces sont des dominos 1 × 2. Le passage des pièces carrées aux pièces 1 × 2 fait basculer de P à PSPACE-complet!

La méthode utilisée par R. Hearn et E. Demaine pour établir le résultat que résoudre les casse-tête à pièces coulissantes est PSPACE-complet a consisté à montrer qu'avec des casse-tête à pièces coulissantes on pouvait simuler un algorithme de résolution des formules booléennes quantifiées.

La figure 4 représente des portes logiques en forme de casse-tête. Ces portes combinées en grand nombre créent des casse-tête à pièces coulissantes assimilables à des ordinateurs qui, si on les programme bien, traitent des formules booléennes quantifiées. Plus précisément: une formule booléenne quantifiée étant donnée, on déduit de sa forme un casse-tête à pièces coulissantes qui a la propriété qu'une pièce particulière, par exemple coloriée en rouge, peut être déplacée si et seulement si la formule initiale est vraie.

Portes logiques et casse-tête

Le principe général du raisonnement est alors simple: si l'on disposait d'une méthode efficace pour résoudre les casse-tête à pièces coulissantes, on associerait un casse-tête particulier à chaque formule booléenne quantifiée et on saurait rapidement si elle est vraie ou fausse. Par cette méthode, toutes les équations booléennes quantifiées seraient résolues

rapidement et donc (puisque tout problème PSPACE peut se ramener à un problème de formules booléennes quantifiées) tous les problèmes PSPACE. Le problème des casse-tête à pièces coulissantes est donc PSPACE-complet.
Ces trois dernières décennies, une multitude de jeux ont été étudiés avec l'œil de la complexité et, dans de nombreux cas, on a réussi à indiquer avec précision leur degré de difficulté sur l'échelle des classes de complexité. Parmi les jeux élucidés citons les énigmes arithmétiques appelées cryptarithmes, le fameux *Sudoku*, le jeu des petits carreaux le *master-mind* et le *sokoban*. La figure 5 donne des précisions.

Pour le mathématicien David Eppstein, expert en problèmes de théorie des jeux et de complexité, les jeux les plus amusants ne sont pas les plus difficiles. Il distingue deux cas: les casse-tête (on y joue seul) et les jeux à deux joueurs (http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html): « Il y a une relation curieuse entre la difficulté computationnelle et la qualité d'un casse-tête. Pour moi les meilleurs casse-tête sont NP-complets, à l'exception de quelques bons casse-tête qui appartiennent à P, mais qui exploitent les faiblesses de l'intuition humaine plutôt que la difficulté calculatoire. Certaines catégories de casse-tête sont parfois plus difficiles que NP (par exemple les casse-tête à pièces coulissantes et le *Sokoban* qui sont PSPACE-complets), mais, pour moi, cela signifie seulement que leur résolution oblige à des longues suites ennuyeuses de mouvements.

Dans le cas des jeux à deux joueurs, la situation est analogue, mais avec un décalage des niveaux de complexité. L'arbre des interactions potentielles dans ces jeux donne lieu en général à des résultats du genre PSPACE-complet. Cependant, ici, cela correspond à des situations bien plus intéressantes que celles rencontrées avec les casse-tête PSPACE-complets. Certains jeux à deux joueurs sont plus difficiles encore – par exemple EXPTIME-complet (un niveau de complexité au-dessus du niveau PSPACE-complet) – mais cela signifie pour moi qu'il est alors inévitable pour bien jouer de parcourir de longues et ennuyeuses séries de coups. »

Ainsi, les passionnés de jeux et de casse-tête ne s'occupent pas seulement à résoudre des problèmes plus ou moins classiques. Ils ne se contentent pas non plus d'en inventer de nouveaux en tentant de les rendre intéressants et difficiles, mais ils s'adonnent aussi aux joies de la théorie qui leur permet de classer les jeux et casse-tête en catégories dont le niveau est identifié avec précision et ramené à des énigmes mathématiques servant d'étalon, comme le mètre en platine iridié du Pavillon de Breteuil. Entre le jeu et les mathématiques, nulle frontière ne peut être tracée.

Coopération et compétition

Texte écrit en collaboration avec Rémi Dorat

Dans un univers où certains groupes adoptent une attitude agressive systématique, une communauté coopératrice peut-elle survivre et s'imposer ?

L'intérêt collectif est souvent opposé à l'intérêt individuel. Ce type de situation est magnifiquement illustré par le *dilemme du prisonnier* dont les règles sont explicitées sur la figure 1 et qui semble condamner les participants à l'égoïsme agressif. À long terme toutefois, l'intérêt collectif peut l'emporter. En effet, si les mêmes situations se répètent *(dilemme itéré du prisonnier)*, la rationalité peut consister à faire confiance à autrui, même si nous ne sommes pas certains qu'il ne profitera pas de notre main tendue : la perspective de futures rencontres fructueuses rend acceptable le risque de se faire temporairement exploiter. Les expérimentations, menées par Robert Axelrod et ses continuateurs, l'ont établi : même sans contrainte policière, même sans motivation morale, les individus choisissent majoritairement de s'entendre et de coopérer à long terme.

Qu'en est-il cependant des situations où la tactique de chacun est immuable, soit par volonté pacificatrice, soit par ignorance du statut du partenaire ? Nous verrons par des

1. Le dilemme du prisonnier

Deux malfaiteurs *A* (représenté par la moitié de visage de gauche) et *B* (représenté par la moitié de visage de droite) sont arrêtés et placés dans deux cellules différentes. Le juge leur propose un marché : « Si aucun de vous n'avoue *(a)*, vous ferez deux ans de prison chacun ; si l'un avoue que vous prépariez une attaque de banque et que l'autre ne dit rien *(b et c)*, celui qui avoue sera libéré, celui qui n'a rien dit fera 5 ans de prison. Si vous avouez tous les deux *(d)*, vous ferez 4 ans de prison chacun. »



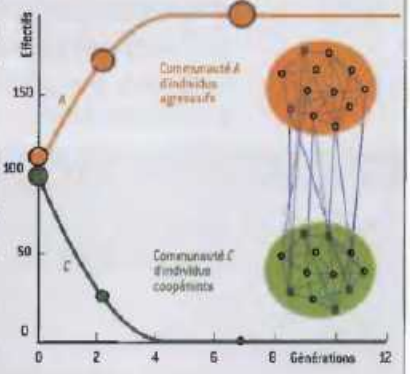
Nous utiliserons ces coefficients dans nos modèles. L'aveu est assimilé à l'attitude agressive (on trahit la confiance de son compère) et la coopération est assimilée au refus d'avouer (on reste solidaire).

Ce jeu est le prototype des relations où l'intérêt personnel s'oppose à l'intérêt collectif : chacun est tenté de trahir, mais pourtant l'intérêt collectif est que chacun se taise. Dans des expériences menées par Robert Axelrod, on propose plusieurs fois de suite à deux individus de jouer à ce jeu (dilemme itéré du prisonnier). Les joueurs ne connaissent que les choix passés de l'autre joueur et ils peuvent en tenir compte.

La stratégie de jeu *donnant-donnant* est : « Je coopère la première fois, puis les autres fois, je joue au coup n ce que l'autre joueur a joué au coup $n-1$ ». C'est une très bonne méthode de jeu et lors d'un tournoi où de nombreuses stratégies sont confrontées elle obtiendra souvent le meilleur résultat total. La présence de ces stratégies réactives et coopérantes (*donnant-donnant* n'est agressive qu'en réaction à une agression) conduit presque toujours à l'élimination des stratégies agressives.

2. Quand l'agressivité l'emporte

Deux communautés *A* et *C* sont liées. La communauté (ou le «nœud») *A* est composée de 100 individus agressifs, la communauté (ou le «nœud») *C* de 100 individus coopérants. Chaque individu rencontre tous les individus de sa communauté et tous les individus des nœuds voisins.
À chaque rencontre, des points sont distribués (attitudes coopérante contre coopérante donne 3 points à chacune, coopérante contre agressive donne 0 à coopérante et 5 à agressive, agressive contre agressive donne 1 point à chacune). Le nombre de descendants d'un individu à la génération suivante (après toutes les rencontres) est proportionnel à la moyenne de ses gains. Le nombre total d'individus (ici 200) est constant d'une génération à la suivante.
La simulation numérique montre une évolution inéluctable: la communauté agressive l'emporte détruisant l'autre (sur les graphes de cette figure et des figures suivantes, les cercles ont des surfaces proportionnelles aux effectifs des communautés représentées).



simulations informatiques que dans certaines configurations géométriques d'interaction entre communautés, l'intérêt collectif peut être préservé et que des attitudes de coopération peuvent dominer.

Miraculeuse coopération

Le *dilemme du prisonnier* nous fait mieux comprendre les mécanismes coopératifs en général, notamment de nombreux phénomènes observés par les psychologues, les sociologues, les spécialistes de stratégie politique et militaire, les économistes et les théoriciens de l'évolution. Le mécanisme qui amende ou élimine les individus agressifs est la réactivité des stratégies de type donnant-donnant qui coopèrent si vous coopérez, qui punissent votre agressivité si vous tentez de les exploiter. En revanche, si personne n'a le temps de nouer de relation suivie avec ses vis-à-vis et d'en tirer des leçons, le *donnant-donnant* et les stratégies réactives du même type n'ont aucun effet dissuasif. Ne devient-il pas alors évident que ne survivront que ceux qui saisissent toute occasion de bénéfice, aussi durs et intransigeants que soient leurs comportements?

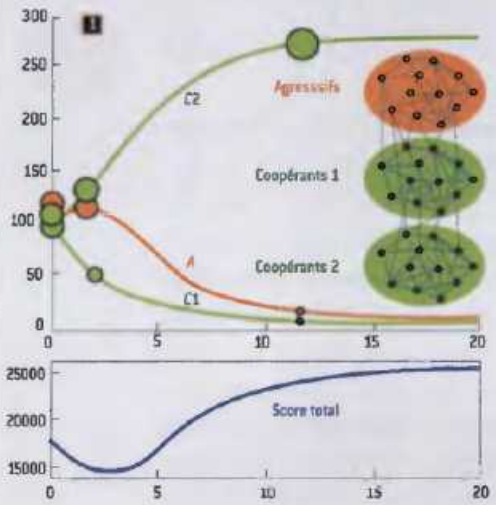
Nous observerons, en analysant les effets des «réseaux de communautés», qu'il existe d'autres mécanismes de mise en place de la coopération, différents de ceux résultant des comportements réactifs. Ces réseaux modélisent des mondes biologiques, sociaux ou économiques habités par des entités n'ayant pas la possibilité de réagir; et pourtant, des régimes stables de coopération y sont possibles, fondés sur d'autres mécanismes dont il faudra tenir compte pour analyser la mise en place et le maintien de systèmes biologiques, sociaux ou économiques coopératifs. Nos simulations ont été menées à l'aide d'un logiciel développé par Jérémy Briffaut au sein de l'équipe *Systèmes Multi-agents et Comportements* du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

Dans le *modèle des réseaux de communautés*, l'espace social est un graphe dont les nœuds sont occupés par des ensembles d'individus, les communautés. Chaque nœud est assimilé à un groupe (un village, un pays, une entreprise, une catégorie professionnelle, etc.), possédant une «culture» qui définit le comportement de ses membres.

Chaque individu interagit avec les individus de sa communauté (présents sur le même nœud) et avec tous les individus placés sur les nœuds reliés au sien. Lors de ces interactions, des points sont distribués selon des règles équivalentes à celles du *dilemme du*

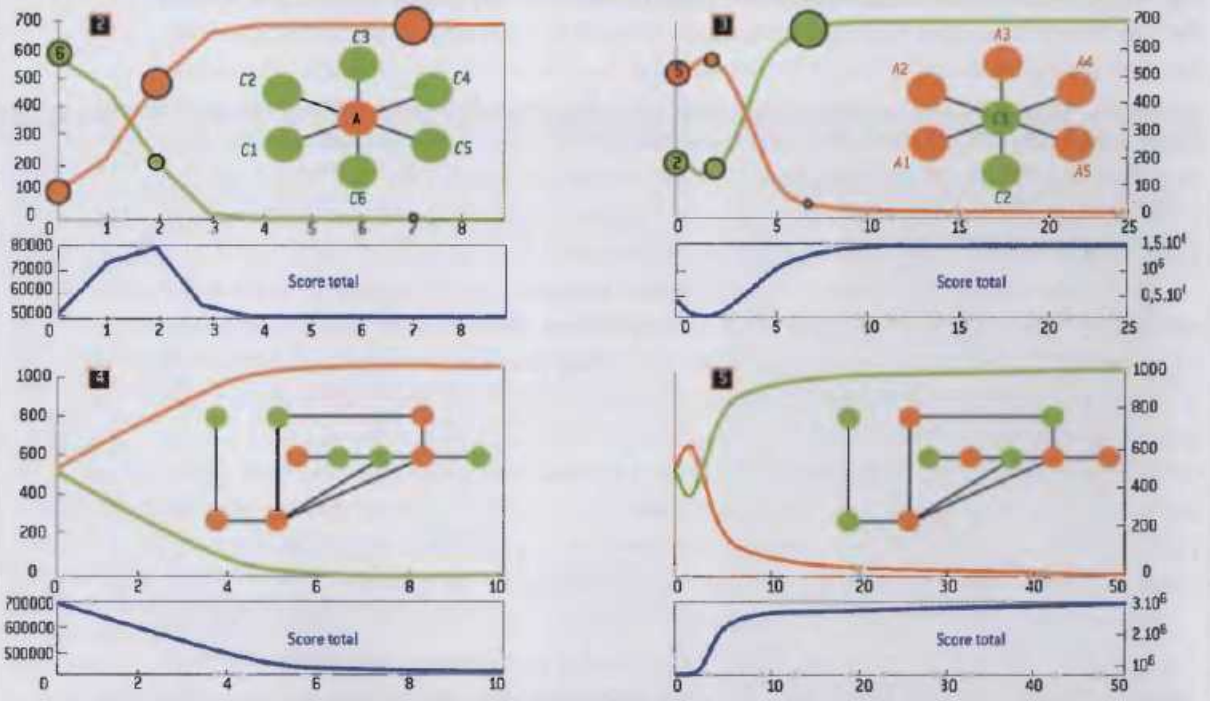
prisonnier: (1) Quand deux individus coopérants entrent en contact, ils tirent chacun 3 points de leur rencontre; (2) Quand deux individus agressifs entrent en contact, ils obtiennent chacun 1 point; (3) Quand un individu agressif rencontre un individu coopérant, l'agressif gagne 5 points et l'autre, qui se fait exploiter, ne gagne rien. Le coefficient 5 est parfois remplacé par un coefficient plus élevé qui favorise les individus agressifs.

3. Les communautés coopératives font écran



On considère un graphe à trois nœuds *A*, *C1* et *C2*. Le nœud *A* est habité par 100 individus agressifs, *C1* et *C2* sont occupés chacun par 100 individus coopérants. Les règles d'évolution sont les mêmes que sur la figure 2. Dans un premier temps, les individus de *C1* sont exploités par ceux de *A* et leur effectif décroît, alors que le nombre de *C2* augmente. Lorsque les *C1* exploités sont moins nombreux, les gains de *A* en population diminuent et son effectif baisse. Le nœud *C2* grâce aux bons rapports internes de ses membres poursuit sa progression finissant par s'imposer presque totalement puisque les *A* s'entre-déchirent et en paient les conséquences. À la fin, ne restent que quelques individus sur *A* et *C1*, et le nœud *C2* domine. La courbe des scores montre que lors de la première phase, le total des gains (qu'on peut voir comme une mesure de l'efficacité globale du réseau des communautés) baisse, mais qu'ensuite il remonte pour arriver un peu en dessous de ce qu'obtiendrait une communauté de 300 individus coopérants placés sur *C2*.

Si les effectifs des communautés étaient mesurés par des nombres réels, le nœud *C2* atteindrait asymptotiquement un effectif de 300, et les deux autres se videraient entièrement.



Occuper la position centrale est déterminant dans les réseaux en étoile. Quand une communauté agressive occupe le centre, elle détruit les autres (2). Quand une communauté coopérante est au centre et qu'au moins une autre se trouve sur une branche (3), celle-ci prospère et domine. Lors de la stabilisation, les coopérants prennent le dessus. On a représenté dix communautés, cinq agressives, cinq coopératives à des emplacements aléatoires. La nature de l'équilibre (4 et 5) dépend de la géométrie.

Ce système de rétribution du *dilemme du prisonnier* justifie l'utilisation des adjectifs coopérant et agressif. Il n'incite pas à la coopération, et bien pire, avec ces règles, l'individu agressif gagne plus de points, quel que soit l'individu rencontré: *(a)* si l'individu rencontré est agressif, être agressif donne 1 point au lieu de 0; *(b)* si l'individu rencontré est coopérant, être agressif donne 5 points au lieu de 3.

Cependant le problème est plus délicat qu'il n'y paraît, car gagner individuellement à chaque rencontre en adoptant un comportement agressif coûte globalement à la communauté dont on fait partie: en effet, une communauté isolée d'individus coopérants gagne 3 points par individu à chaque rencontre, alors qu'une communauté isolée d'individus agressifs n'obtient qu'un point par individu et par rencontre. L'agressivité est rentable à la condition qu'elle ne se généralise pas et que subsistent toujours de bonnes poires. Dans notre modèle, cet antagonisme entre intérêt personnel et intérêt collectif existe dès que deux individus se rencontrent: chacun a intérêt à être agressif, pourtant si les deux individus coopèrent, ils gagnent collectivement 3 + 3 = 6 points, ce qui est mieux que s'ils sont tous deux agressifs (1 + 1 = 2 points), et même mieux que si l'un se laisse exploiter par l'autre (0 + 5 = 5 points).

Les générations successives

Pour évaluer les conséquences des comportements, nous envisagerons une évolution dynamique des communautés: chaque individu totalise le nombre de points qu'il gagne lors de ses rencontres avec les membres de sa communauté et ceux des communautés liées. Ses points comptés, chaque individu se reproduit et a un nombre de descendants proportionnel à la moyenne des points qu'il a tirés de ses échanges (intracommunautaires et extra-communautaires). Si un individu coopérant en rencontre 10 autres et rencontre 20 individus agressifs, il gagne $(10 \times 3 + 20 \times 0) / 30 = 1$ point en moyenne. Cela correspond, par exemple, à un seul descendant.

Les descendants de chaque individu sont placés sur le même nœud du graphe et constituent la seconde génération. Nous supposons, pour faire les calculs, que le nombre total d'individus sur l'ensemble des nœuds du graphe reste constant d'une génération à la suivante, mais cette hypothèse est sans importance, car ce qui importe est la proportion de coopérants et d'agressifs, proportion qui ne dépend pas du nombre total d'individus présents.

Envisageons quelques variantes. *(a)* Contrairement aux règles de notre modèle, les individus pourraient savoir à qui ils ont affaire avant une rencontre et ajuster leurs réactions en conséquence. *(b)* Des mutations lors du passage d'un individu à ses descendants pourraient se produire aléatoirement. *(c)* Des erreurs dans la communication au moment des rencontres pourraient être prises en compte. *(d)* D'autres «caractères» moins tranchés que «coopérant» et «agressif» méritent aussi l'étude. *(e)* D'autres règles plus complexes pour le calcul du nombre de descendants seraient intéressantes à étudier. Etc. La compréhension du modèle simple est cependant un premier pas indispensable avant de mener des expérimentations fondées sur des versions plus complexes.

La première génération disparaît donc, remplacée par la deuxième. La deuxième génération engage alors à nouveau un cycle d'interactions – chaque individu rencontrant tous ceux du même nœud et tous ceux des nœuds voisins – ce qui détermine, après bilan comptable des interactions, les effectifs d'une troisième génération se substituant à la deuxième, etc.

Les questions sont: qui des agressives ou des coopérantes va l'emporter, de quelle façon et dans quelles circonstances? Arrive-t-on toujours à une situation stable? Quelles seront les propriétés de l'équilibre obtenu quand il y a en un?

Le conflit à deux

Dans un premier exemple *(voir la figure 2)*, deux communautés *A* et *B* sont liées (un graphe à deux nœuds *A* et *B* attachés), l'une composée d'individus agressifs, l'autre d'individus coopérants. Pensez à deux pays voisins isolés, le premier possédant une culture telle que ses membres sont agressifs, alors que l'autre inculque à ses membres une vision confiante qui se traduit par une attitude de coopération systématique et indéfectible.

La simulation numérique dans un tel cas montre une évolution inéluctable: la communauté agressive l'emporte rapidement et détruit l'autre, la «culture agressive» absorbe la «culture coopérante». Le monde résultant fonctionne plutôt médiocrement puisque les interactions entre survivants sont toutes de type agressive contre agressive, ce qui donne un revenu moyen de 1 point par interaction, alors qu'un équilibre coopératif donne un revenu moyen de 3 points par individu et par rencontre.

L'évolution de ce monde, en l'absence d'autorité régulatrice ou de motivations morales obligeant à faire passer l'intérêt collectif devant l'intérêt personnel, conduit au dépérissement général. L'avidité incontrôlée d'une partie des individus fait disparaître les tempéraments généreux, ce qui finit par nuire à tous et conduit à une société dure et inefficace, théâtre d'une lutte violente continue.

Un deuxième schéma va nous rassurer *(voir la figure 3-1)*. Nous considérons un graphe où trois nœuds *A*, *C*1, *C*2 sont en ligne: *A* lié à *C*1, lui-même lié à *C*2. Le nœud *A* n'est habité que par des individus agressifs alors que *C*1 et *C*2 sont occupés par des individus coopérants. Les membres de *C*1 sont exploités par ceux de *A*, mais pas ceux de *C*2 qui n'ont aucun contact avec ceux de *A* et sont «protégés» par ceux de *C*1.
L'évolution se déroule en deux temps: d'abord le nœud *A*, profitant des individus de *C*1, prospère. Puis, lorsque les individus de *C*1 (exploités par ceux de *A*) ont perdu la moitié de leur effectif, ceux de *A* en pâtissent. La communauté *C*2 profite de la situation et au bout de 20 générations, seuls les individus de *C*2 persistent: les habitants de *C*2 continuent à tirer de bons revenus moyens de leurs interactions, qui leur permettent de prospérer, alors que des individus de *A*, isolés, s'entre-déchirent et disparaissent.

Examinons comment d'autres configurations de communautés déterminent le destin de leurs habitants. Pour une configuration en étoile où une communauté centrale est entourée d'une série de communautés n'ayant de lien qu'avec la communauté centrale *(voir les figures 3-2 et 3-3)*, quand la communauté centrale est agressive *(a)*, elle élimine les communautés coopérantes; quand la communauté centrale est coopérante *(b)* et qu'au moins une autre communauté est coopérante sur une branche de l'étoile, alors celle-ci, protégée, s'impose et, à la stabilisation, est bien plus grosse que les autres (qui dans certains cas persistent à l'état d'embryons).

Graphe aléatoire

Le monde n'est cependant jamais structuré d'une manière aussi régulière; aussi avons-nous étudié ce qui se passe lorsque l'on part d'un graphe aléatoire et qu'on place au hasard sur ses nœuds des communautés agressives ou coopérantes.

La figure 3-4 présente l'exemple d'un graphe aléatoire de dix nœuds et son évolution. Chaque nœud est occupé au départ soit par une communauté de 100 individus coopérants *(en vert)*, soit par 100 individus agressifs *(en orange)*. Au total, 1 000 individus sont répartis en 5 communautés coopérantes et 5 communautés agressives.

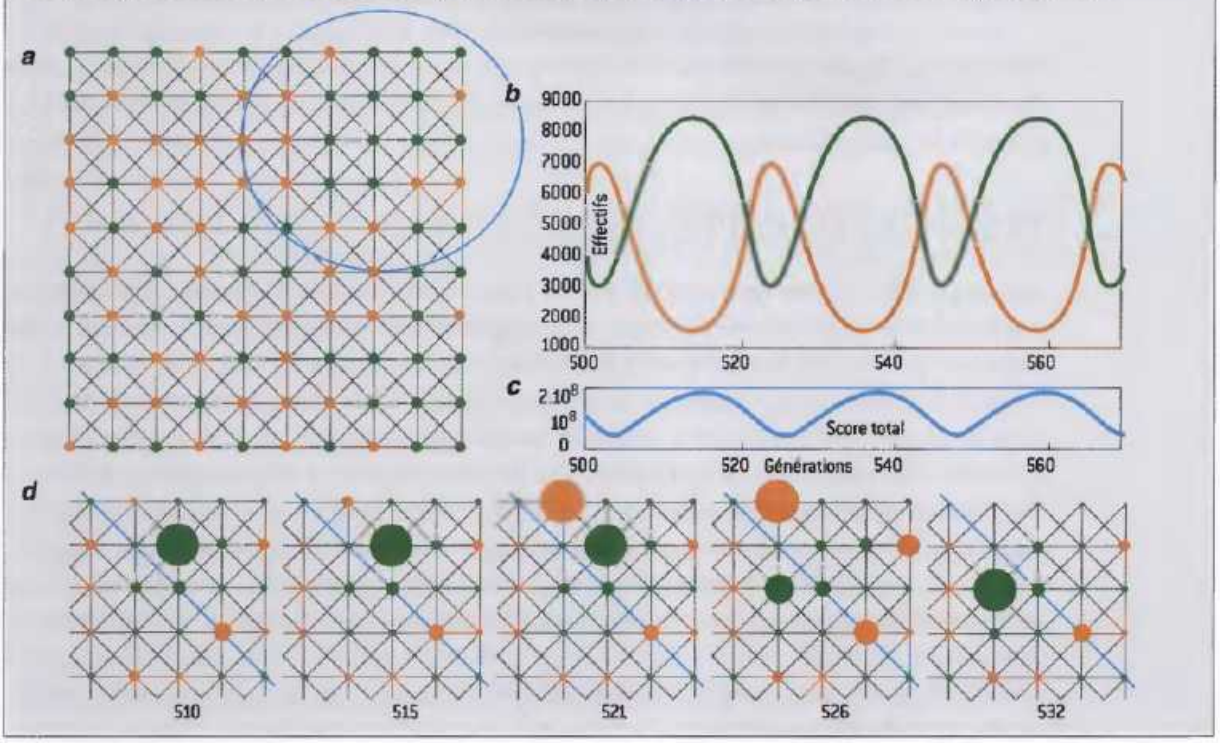
Les individus agressifs tirent peu de points de leurs interactions internes; en revanche, ils obtiennent de nombreux points de leurs voisins coopérants qu'ils exploitent de manière éhontée. À la deuxième génération les effectifs des communautés coopérantes ont diminué. Au bout de sept générations, il ne reste plus aucun individu coopérant, certaines communautés agressives qui ont mieux profité de leurs voisins sont plus grosses et le resteront puisque tout est stabilisé. Encore une fois, le monde a évolué vers un système de guerre généralisée entre des individus qui tous se combattent sans merci. La figure 3-5 montre que l'évolution précédente n'est pas inéluctable. Cette fois, ce sont les coopérants qui l'emportent. Comme dans le cas de l'alignement de trois communautés

4. Une dynamique périodique

La convergence n'a pas systématiquement lieu vers un état général de coopération ou d'agressivité: dans certaines évolutions les deux types de communautés coexistent. Un autre type de situation se produit parfois: l'évolution vers un état à évolution périodique. Un exemple est décrit ici avec une grille 10 × 10, initialisée comme indiqué en *(a)*. Nous obtenons, après 510 générations, une situation périodique dont la période semble de 22 étapes. Le total des individus coopérants oscille sur 22 générations *(b)* comme celui, complémentaire, des individus agressifs. Une variation des gains totaux en résulte, elle aussi périodique sur 22 générations.

La partie du graphe où se produit l'oscillation (entourée sur le schéma a) est le théâtre d'un subtil phénomène de battement. Au bout de 22 étapes, la situation n'est pas reproduite exactement, mais symétriquement par rapport à une droite oblique *(en bleu)*. Il faut donc, en réalité, 44 étapes pour revenir à la situation de départ. On remarque que le sous-graphe des communautés non vides qui donnent le cycle possède une structure particulière: chaque communauté coopérante est en contact avec plusieurs communautés coopérantes, mais n'est en contact qu'avec une seule communauté agressive. De plus, chaque communauté agressive n'a qu'un seul contact, bien sûr avec une communauté coopérante qu'elle exploite.

Pendant la première moitié de la période, le deuxième nœud de la première ligne grossit au détriment du gros nœud vert de la génération 510. Celui-ci disparaît presque, ce qui fait fondre le gros nœud rouge. Le groupe central des trois communautés vertes bénéficie alors d'une certaine tranquillité amenant l'expansion d'un nouveau gros nœud vert (symétrique du précédent). Tous les autres nœuds ont évolué symétriquement conduisant à une génération 532 quasiment symétrique de la génération 510 par rapport à la droite bleue. Cette configuration ramènera, 22 étapes plus loin, au schéma de la génération 510.



ou de certaines étoiles, l'existence d'une communauté coopérante isolée, et donc protégée, détermine la quasi-disparition de toutes les communautés agressives. Pour comprendre ces évolutions, d'autres expérimentations étaient nécessaires.

Nous avons mené une étude statistique de ce type de « monde » sur un graphe en grille de 100 nœuds : chaque nœud est relié à ses huit voisins (horizontaux, verticaux, en diagonal), les bords se rejoignant (grille en forme de tore). On place au hasard des communautés sur les nœuds en faisant varier la proportion p de nœuds occupés par des communautés coopérantes.

Si la proportion initiale p de communautés coopérantes est supérieure à 80 pour cent, alors, dans plus de 95 pour cent des cas, il ne restera au final pratiquement que des coopérants : le monde converge en quelques générations vers un univers de coopération généralisée. Au-dessous de 20 pour cent de communautés coopérantes initiales, l'évolution conduit presque certainement à un monde agressif. Dans un pour cent des essais (p entre 0,4 et 0,7), nous observons des équilibres mixtes où coexistent communautés coopérantes et agressives.

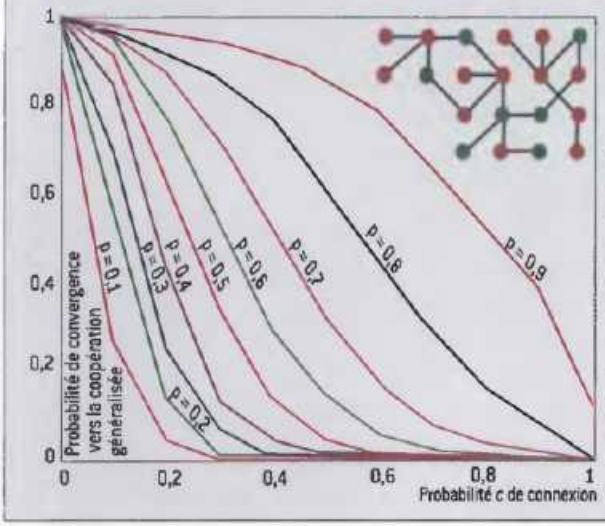
À l'exception de ces équilibres mixtes, la dynamique générale d'évolution est claire : *(a)* les zones où seuls des individus agressifs sont en contact dépérissent ou ne réussissent pas à croître ; *(b)* dans les zones où les deux types d'individus se rencontrent, les coopérants disparaissent au profit des agressifs ; *(c)* les zones où des coopérants ne rencontrent que des coopérants prospèrent. La première phase de l'évolution est une course entre agressifs des zones *(b)* et coopérants des zones *(c)* s'il y en a. Cependant, quel que soit l'avantage obtenu par les premiers, s'il y a des individus dans les zones *(c)*, ils finissent par s'imposer et la population finale est composée essentiellement d'individus coopérants localisés dans les zones *(c)*. Bien sûr, en l'absence de zones de type (c), le monde converge vers une guerre généralisée. Un critère permet ainsi de prévoir l'évolution avec un risque d'erreur limité : s'il existe un nœud coopérant protégé (c'est-à-dire en contact seulement avec des nœuds coopérants) alors le monde convergera vers un état de coopération généralisé ; sinon, le monde s'orientera vers un état désastreux d'agressivité tous azimuts.

Les cas d'évolution vers des configurations mixtes échappent à ce schéma. L'un d'eux, décrit sur la figure 4, révèle une complexité inattendue permettant la coexistence dans des conditions subtiles d'équilibre périodique des deux types de communautés dont les effectifs ne se stabilisent jamais.

Erdös-Renyi ou Petit monde ?

Sur une grille, chaque nœud est lié à huit voisins (connectivité 8) et il est probable que cette valeur de la connectivité joue un rôle important. Aussi avons-nous engendré systématiquement des graphes aléatoires dont un exemple et ses conclusions sont indiqués sur la figure 5. Récemment, de nombreux travaux ont montré que les graphes qu'on rencontre dans le monde réel ressemblent rarement aux graphes aléatoires de Erdös-Renyi (classiquement étudiées en mathématiques). Les graphes du monde réel, graphes des liaisons ferroviaires, graphes décrivant les liens entre pages Web, graphes des réseaux sociaux, sont en général beaucoup plus contrastés : le nombre de connexions d'un nœud aux autres varie fortement, conduisant en particulier à des nœuds, nommés « hub », qui centralisent un nombre de liens très supérieur à la connectivité moyenne du graphe. Ces graphes réels, nommés *Petit monde*, ont certaines bonnes propriétés : faible distance moyenne entre nœuds, résistance aux pannes, etc. Il est naturel de s'interroger sur leurs capacités à susciter des équilibres coopératifs.

5. Résultats des graphes aléatoires



Nous engendrons des graphes aléatoires de 20 nœuds. Pour cela nous plaçons sur chaque nœud une communauté coopérante ou agressive en tirant au hasard : on place une communauté coopérante avec une probabilité p ou une communauté agressive avec une probabilité complémentaire $1 - p$. Les liens entre nœuds du graphe sont aussi choisis au hasard : deux nœuds sont connectés avec une probabilité c : si c est petit, la connectivité du graphe est faible, si c est grand, le graphe comporte de nombreux liens. Nous mesurons alors la probabilité d'évoluer vers un état de coopération généralisée. Pour une valeur de p (indiquée sur les courbes), plus la connectivité c est grande, plus faible est la probabilité que le graphe évolue vers un état de coopération généralisée. Lorsque p augmente, la probabilité d'évoluer vers un état de coopération généralisée augmente (d'où la succession de courbes de plus en plus hautes).

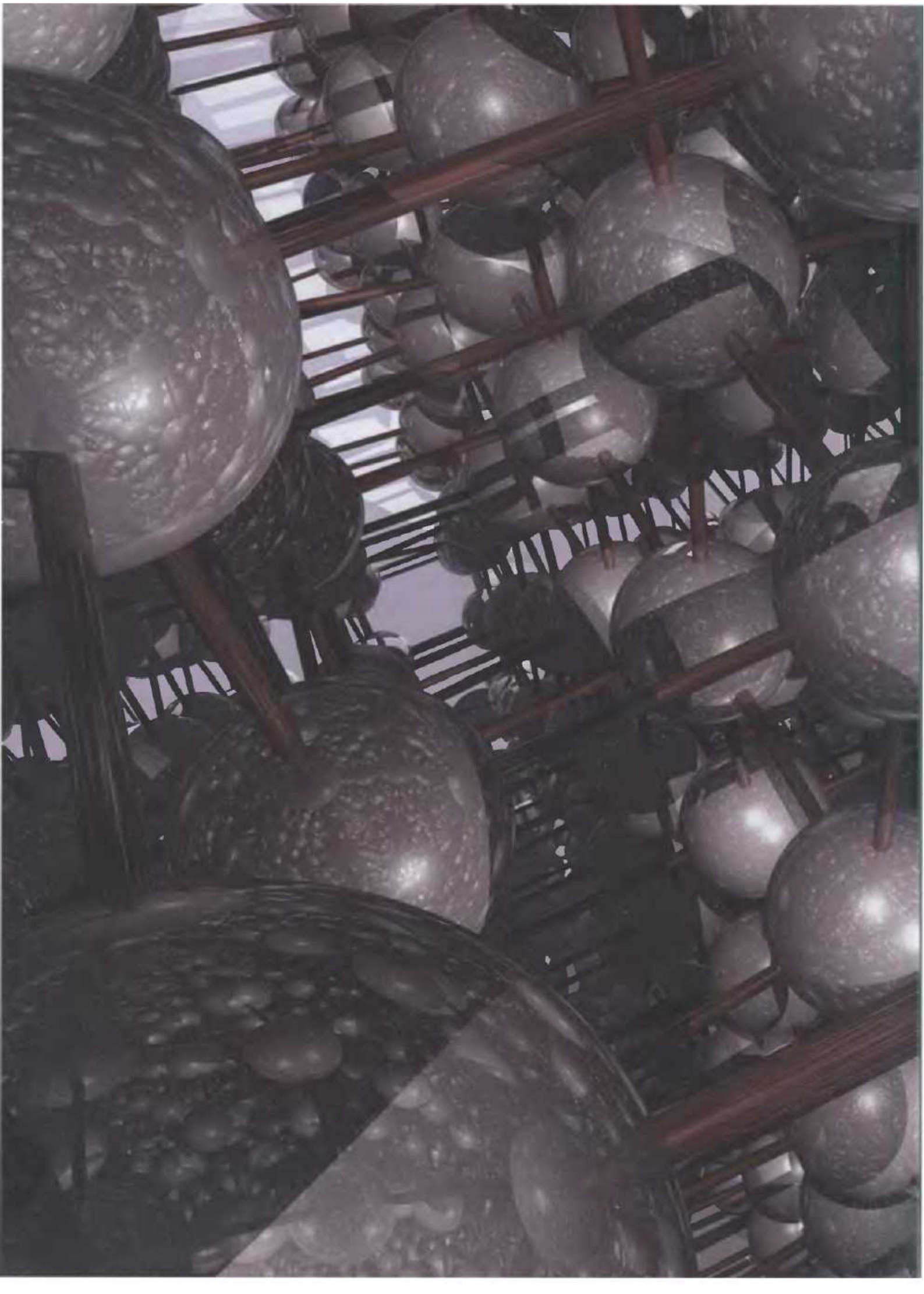
Les expériences donnent un résultat sans appel : pour un nombre donné de nœuds et de liens entre les nœuds et une même proportion initiale de communautés coopérantes, l'évolution sur un graphe de type *Petit monde* conduit plus fréquemment à une situation d'agressivité généralisée que sur un graphe de type Erdös-Renyi. La raison en est sans doute que la structure de *Petit monde* facilite la domination des communautés agressives et nuit à l'existence de nœuds coopérants protégés : des phénomènes sociaux (comme la diffusion rapide d'informations) sont facilités par l'existence des centres dominateurs, mais ils empêchent l'apparition et le maintien d'équilibres efficaces qui ne naissent et ne prospèrent que si certains nœuds se trouvent dans un certain isolement.

Les réseaux de communautés envisagés ici, du fait de leurs simplicités, ne permettent pas de modéliser la formation de groupes fermés et hostiles entre eux (espèces animales, sectes, pays ennemis, etc.) qui sont importants aussi bien dans le monde vivant que social.

Pour modéliser les dynamiques de ces groupes, une méthode consiste à définir deux sortes (ou plus) d'individus capables de se reconnaître : les *A* et les *B*. Les *A* coopèrent avec les *A* et agressent systématiquement les *B*. Les *B* coopèrent avec les *B* et agressent les *A*. Partant d'une configuration aléatoire de *A* et de *B* placée sur une grille, on assiste à la formation de groupes coopérants composés uniquement de *A* et de groupes coopérants composés uniquement de *B*. Ces groupes, bien sûr, se combattent farouchement à leurs frontières, créant des zones désertifiées.

Cette émergence de la coopération « par solidarité de groupes » (récemment étudiée par D. Hruschka et J. Henrich) s'ajoute à l'émergence de la coopération résultant des stratégies réactives du type donnant-donnant, et à l'émergence de la coopération du fait des phénomènes que le modèle des réseaux de communautés met en évidence.

Ainsi l'expérimentation informatique aide à découvrir et à comprendre les nombreuses mécaniques collectives dont les groupes d'individus des mondes vivants, sociaux et économiques sont le théâtre et dont l'élucidation détaillée ne peut se passer des simulations réalisées grâce aux calculs massifs que les ordinateurs d'aujourd'hui autorisent.





CHAPITRE 4

Nombres

Les nombres sont un terrain de jeu particulièrement riche. Il n'est pas réservé au mathématicien, car un ordinateur dispense des fastidieux calculs dans lesquels on se trouve entraîné lors de ces visites ludiques du monde numérique. La suite infinie des chiffres de certains nombres réserve des surprises, de même que les nombres premiers, les calculs qu'on fait pour rendre la monnaie, ou la recherche des suites qui ne se répètent pas.

Pavage de l'espace, image de Francesco De Comité (2009). De petites variations dans l'angle des barres de cuivre rendent l'ensemble moins monotone.

Les nombres zébrés

Aussi fascinantes que le mouvement des vagues ou que la danse des flammes, les décimales des nombres zébrés émerveillent

En remarquant qu'entre les positions 762 et 767 des décimales du nombre π surgit une série de six 9 consécutifs, certains se sont étonnés. Il est vrai que l'apparition, dans une suite de 1000 chiffres décimaux tirés au hasard d'une série, de six 9 côte à côte est un phénomène qui n'a environ qu'une chance sur mille de se produire. Rien ne semble expliquer cette étrangeté des décimales de π, mais comme rien n'a été trouvé ailleurs dans π qui fasse écho à cette singularité (on aurait pu par exemple trouver dix 9 consécutifs dans le premier million de décimales, ce qui ne s'est pas produit), les mathématiciens pensent qu'elle résulte du hasard. Aucune explication mathématique n'a donc à en être donnée: parmi les régularités possibles ayant une chance sur mille de se produire, six 0 consécutifs, six 1 consécutifs, présence de la séquence 123456, présence de la séquence 024680, etc., il n'y a pas à s'étonner que l'une au moins soit présente dans les mille premières décimales de π.

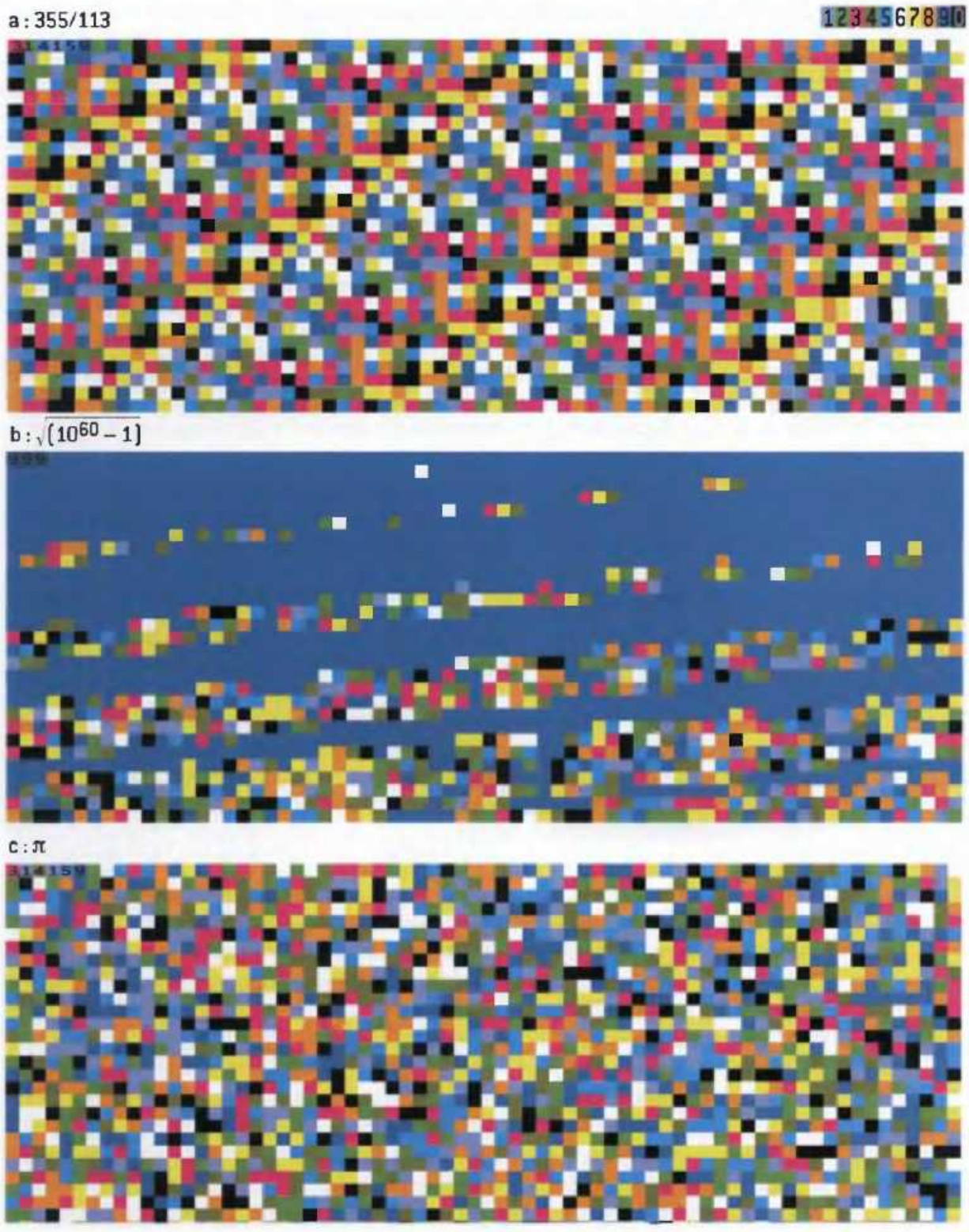
Cependant, d'autres phénomènes numériques concernant les suites de décimales des nombres réels sont bien plus frappants et exigent des explications, car ils ne peuvent survenir fortuitement. Nous présenterons plusieurs exemples de telles curiosités. Les *nombres zébrés* découverts récemment sont à la fois étonnants et subtils; leur étude mi-sérieuse, mi-ludique intéresse de plus en plus d'amoureux des nombres. Ils sont intermédiaires entre les nombres rationnels, dont les décimales sont périodiques, et les nombres irrationnels, comme $\sqrt{2}$ et π, dont les décimales semblent en parfait désordre.

Régularités et triangle de Pascal

Commençons par un phénomène numérique facile à comprendre qui concerne le triangle de Pascal (appelé ainsi à tort puisqu'il était connu dans les pays de l'Islam dès le XI[e] siècle). Si vous calculez le nombre $1{,}000001^7$ vous obtiendrez 1,000007000021000035000035000021000007000001.
Entre les zéros apparaissent (en rouge) les nombres de la septième ligne du triangle de Pascal: 1,7,21,35,21,7,1.

```
1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
```

Une façon de construire ce triangle consiste à créer les lignes les unes après les autres. La ligne numéro $n + 1$ est obtenue en additionnant terme à terme la ligne numéro n avec



Les nombres zébrés, comme $\sqrt{(10^{60}-1)}$ *(b)*, dont les premières décimales ont une pseudo-périodicité, sont intermédiaires entre les fractions rationnelles, comme 355/113 à la périodicité parfaite *(a)*, et les nombres irrationnels comme π, sans aucune régularité identifiable *(c)*. Chaque couleur représente un chiffre selon le code indiqué en haut à droite.

une version d'elle-même décalée vers la droite. Calculons selon cette méthode la ligne 7 à partir de la ligne 6

	1	6	15	20	15	6	1	
+		1	6	15	20	15	6	1
=	1	7	21	35	35	21	7	1

Bien sûr, l'apparition des coefficients du triangle de Pascal dans le développement de $1{,}000001^7$ n'est pas un hasard. La propriété que « le nombre $1{,}000001^n$ découpé en tranches de six chiffres donne la ligne n du triangle de Pascal » est vraie pour la ligne numéro 1; supposons qu'elle soit vraie pour n et montrons qu'elle l'est alors pour $n + 1$ (nous faisons un raisonnement par récurrence). On opère le calcul de $1{,}000001^{n+1}$ en remarquant que c'est $1{,}000001^n \times 1{,}000001$ et en utilisant la disposition apprise à l'école pour effectuer cette multiplication. On est donc amené à additionner le développement de $1{,}000001^n$ (supposé donné par la ligne numéro n du triangle de Pascal) avec lui-même décalé de six positions (à cause du deuxième facteur de la multiplication, 1,000001). Cette addition correspond à la définition du triangle de Pascal rappelée plus haut, et donc $1{,}000001^{n+1}$ découpé en tranches de six chiffres donne bien la ligne $n + 1$ du triangle de Pascal.

Ce raisonnement n'est valable que lorsque le nombre de zéros entre deux coefficients du triangle est assez grand pour que ne se produise aucune interaction entre les différentes tranches. Ici $1{,}000001^n$ donne les bons coefficients jusqu'à la ligne 24. Pour avoir une ligne plus profonde du triangle de Pascal il faut remplacer 1,000001 par 1,00...001 avec un nombre supérieur de zéros entre les deux 1. Remarquons aussi que l'utilisation de la formule du binôme de Newton donne une démonstration directe de la propriété des chiffres de $1{,}000001^n$.

Une division donne les puissances

Voici un autre phénomène numérique du même type. Observons les décimales de 1/9999999997, qui sont:

0,000000000100000000030000000009000000002700000000810000000243000000072900000002187000000065610000019683000005904900001771470000531441000159432300047829690014348907004304672 1...

Entre les séries de zéro apparaissent les puissances de 3 : $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; etc. L'explication de l'apparition des puissances de 3 dans le développement décimal de 1/9999999997 est fondée sur l'égalité suivante:

$1/9999999997 = 1/(10^{10} - 3) = 1/10^{10}\,[1 / (1 - 3/10^{10})]$

Le crochet peut se développer en utilisant la formule classique:

$1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ avec $x = 3/10^{10}$.

Les différentes puissances de x sont bien sûr:

$x = 0{,}0000000003$

$x^2 = 0{,}0000000000000000009$

$x^3 = 0{,}000000000000000000000000027$ etc.

En prenant en compte le 1 et après décalage de 10 chiffres (dû au facteur $1/10^{10}$ placé devant le crochet) on voit apparaître la forme constatée du développement décimal de 1/9999999997.

Quand vous aurez analysé cette curiosité, vous pourrez la généraliser et obtenir à l'aide d'une simple division la suite des chiffres des puissances de n'importe quel entier, ce qui, vous l'avouerez, est remarquable.

Solution: pour avoir les puissances de l'entier k séparées par des 0 dans le développement d'un nombre réel y, il suffit de choisir $y = 1/(10^{10} - k)$, en remplaçant si nécessaire

2. Nombres zébrés de Roland Yéléhada

Les nombres zébrés de Yéléhada sont définis par la formule $(10^N - 1)^{1/K}$. Nous avons vu les zébrures obtenues pour $N = 60$ et $K = 2$, soit $\sqrt{(10^{60}-1)}$, sans en détailler les justifications mathématiques. Nous aborderons ici le cas $N = 10$, $K = 2$. Le nombre $\sqrt{(10^{10} - 1)}$ est:

99999,99999499999999987499999999374999999960937499997265624999794921874983886718748690795898328399 65...

Les zébrures de ce nombre sont composées d'une part de zones uniformes de 9 *(en bleu)* et d'autre part de zones où les chiffres semblent quelconques *(en rouge)*.

Le développement $\sqrt{(10^{10} - 1)}$ en série donne, avec $x = 10^{-10}$:

$\sqrt{(10^{10} - 1)} = 10^{-5}\sqrt{(1-x)} = 10^{-5}\,[1 - (1/2)x + (1/2)(1/2-1)x^2/2\,! - (1/2)(1/2-1)(1/2-2)\,x^3/3\,! + (1/2)(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)\,x^4/4\,! - ...]$

Les différents termes dans le crochet sont:

1

– 0,00000000005

– 0.00000000000000000125

– 0,0000000000000000000000000000625

– 0,000000000000000000000000000000000000000390625

– 0,00000000000000000000000000000000000000000000002734375

Les sommes partielles des termes dans le crochet sont donc:

1

0,99999999995

0,99999999994999999999875

0,99999999994999999999874999999999375

0,99999999994999999999874999999993749999999609375

0,99999999994999999999874999999993749999996093749999 7265625

etc.

L'apparition des zébrures se comprend: chaque nouveau terme, où l'on soustrait une quantité positive à un nombre se terminant par des zéros, fait apparaître, à cause des retenues de 1, une série de 9 qui ne s'interrompt que lorsque les chiffres significatifs du terme soustrait entrent en jeu. Chaque terme fait donc apparaître une zébrure de 9 dont la taille diminue à mesure que le nombre de chiffres significatifs du terme ajouté augmente.

10^{10} par une plus grande puissance de 10 si on désire éviter le télescopage des séries de chiffres de k^n entre les séquences de zéros.

Irrationnels artificiels et spontanés

Les deux phénomènes numériques précédents concernent les nombres rationnels (c'est-à-dire qui sont des quotients de deux nombres entiers), dont on sait d'ailleurs que tous ont des décimales qui se répètent périodiquement à partir d'un certain chiffre. Les irrationnels (par exemple 2) sont beaucoup plus rebelles – en particulier parce que leurs décimales ne se répètent pas périodiquement –, et jusqu'à maintenant la situation était la suivante.

– Ou bien, on avait affaire à un nombre irrationnel possédant par définition des motifs réguliers dans ses décimales et alors s'en étonner aurait été stupide puisque la régularité des décimales provenait du choix fait par le mathématicien lors de la définition du nombre. Le nombre de Champernowne, par exemple, est défini comme étant le nombre dont les décimales sont les chiffres des entiers placés les uns derrière les autres Ch = 0,12345678910111213 14... C'est un nombre irrationnel (et même transcendant: il n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers), mais les motifs réguliers de ses décimales ne demandent aucune explication, c'est Champernowne qui les a choisis! Bien sûr dans ces nombres – que nous nommerons *irrationnels artificiels* – on peut trouver tous les motifs imaginables: vous pouvez même y placer le portrait de vos enfants codé en dix niveaux de gris sur mille lignes de mille pixels.

– Ou bien, deuxième cas, on prenait un nombre irrationnel défini sans faire référence à ses décimales, par exemple π, e, $\sqrt{2}$, $\sin(1)$, etc. – nous nommerons ces nombres *les irrationnels spontanés* –, et alors on constatait à chaque fois qu'aucune régularité convaincante ne se présentait. Même les recherches systématiques ne repéraient rien de notable. À force de ne jamais trouver de régularité dans les décimales des nombres irrationnels spontanés, la situation en était devenue un peu ridicule. Certaines grandes vedettes du zoo des nombres sont très bien connues et pourtant, même dans la séquence des 2 576 milliards de décimales de π (calculée en août 2009), on n'a rien trouvé d'étonnant (pour une séquence de cette longueur). Les décimales connues de π possèdent les propriétés statistiques qu'on est en droit d'attendre d'une séquence tirée au hasard (par exemple tous les chiffres apparaissent avec la même fréquence), même si on ne sait pas prouver que les décimales posséderont jusqu'à l'infini les propriétés statistiques constatées pour le début.

Premiers zèbres

Récemment les choses ont changé car l'utilisation des ordinateurs et des logiciels de calcul formel permettent de nombreuses expérimentations. Grâce à elles ont été découverts certains nombres irrationnels spontanés possédant des motifs réguliers remarquables dans leurs décimales.

3. Nombres de Kevin Brown

On pose $f(0) = 0$ et pour tout n positif : $f(n) = 10 \times f(n-1) + n$.
$f(1)=1$; $f(2)=12$; $f(3)=123$; $f(4)=1234$; $f(9)=123456789$; $f(10)=1234567900$; $f(20)=12345679012345679010\ldots$
Les nombres de Brown sont les racines carrées des nombres $f(n)$ lorsque n est impair.

(a) 200 chiffres du nombre de Brown pour $n = 11$

$\sqrt{12345679011} =$

111111,111105055555555390541666657673409721609556592835198056921959732820021998204251880812806439290512177992519002482201481973827173976556526766291784603265807483042577509804689155128222419995219745 36

(b) 200 chiffres du nombre de Brown pour $n = 19$

$\sqrt{1234567901234567899} =$

1111111111,11111111010555555555555555510054166666666666625487909722222222175638753428819444385423189483203124919878646390114908740222655925751511876701922537474983814022687153746989467415157169980715 51

(c) 200 chiffres du nombre de Brown pour $n = 25$

$\sqrt{1234567901234567901234565} =$

1111111111111,11111111110980555555555555555555555478854166666666666666666657654253472222222222222208985240342881944444444422669609252929687499999961621852974955240885416595804159481137593587239448030234

(d) 200 chiffres du nombre de Brown pour $n = 31$

$\sqrt{12345679012345679012345679012 31} =$

1111111111111111,11111111111109505555555555555555555555555543955416666666666666666666499044659722222222222222222219194549721788194444444444444438319462976066406249999999999986724102667290602213 5

(e) 400 chiffres du nombre de Brown pour $n = 49$

$\sqrt{1234567901234567901234567901234567901234567901229} =$

11111111111111111111111111,11111111111111111111108605555555555555555555555555555555555555555555555555273054166666666666666666666666666666666666666666666666666029626034722222222222222222222222222222222042656394092881944444444444444444444444444444438775551250401171874999999999999999999999998082496877114863053385416666666666666666666666659871857386214406386555989583333333333333333333308434604076276082069402770996093749999999999999906

Le premier exemple sera un peu monotone, mais il explique pourquoi on a dénommé *nombres zébrés* ces étranges irrationnels, qu'on appelle aussi *nombres schizophrènes*. Le calcul par la machine de $\sqrt{(10^{60} - 1)}$ donne le nombre zébré de la figure 1*b*. La suite des décimales de ce nombre irrationnel est constituée de séquences uniformes de 9 entrecoupées de séquences désordonnées de chiffres se terminant par 24 ou 74. Les séquences de 9 diminuent de longueur et finissent par disparaître vers le deux millième chiffre. On peut expliquer cette remarquable zébrure en étudiant soigneusement, comme dans le cas de 1/9999999997, le développement en série associé à ce nombre. On s'aide cette fois de la formule :

$\sqrt{(1-x)} = 1-1/2\ x + 1/2(1/2-1)\ x^2/2! -1/2(1/2-1)(1/2-2)\ x^3/3! + \ldots$

La même étude rend compte aussi de la présence du 24 et du 74 (qui proviennent du fait que les deux derniers chiffres décimaux du quotient d'un entier impair par une grande puissance de 2 se termine toujours par 25 ou 75).

4. Le zèbre fou de Robert Israël,
$k(n) = \sqrt{(9\text{x}121 \text{ x } 100^{95} + (112 - 44 \text{ x } 95)/121)}$



Même si l'explication mathématique n'est pas mystérieuse, on est surpris qu'une régularité présente dans la définition sur 60 chiffres (le nombre $10^{60} - 1$ est une suite de soixante 9 consécutifs) engendre une structure zébrée dans la racine carrée sur près de 2000 chiffres !

En utilisant votre logiciel de calcul préféré, vous constaterez qu'en remplaçant 10^{60} par une puissance de 10 plus grande vous prolongerez les zébrures : par exemple, pour $\sqrt{(10^{200} - 1)}$, les zébrures ne s'évanouissent qu'après 20 000 décimales. Pourtant jamais vous ne réussirez à empêcher les séquences désordonnées de gagner du terrain et de noyer les séquences de 9 qui semblent s'épuiser petit à petit : le désordre grignote progressivement l'ordre !

Si, en gardant l'exposant 60, vous remplacez la racine carrée par une racine quatrième ou une racine cinquième un phénomène analogue de zébrure persiste : des séries de 9 séparées par des zones de plus en plus longues de chiffres quelconques. En revanche, pour la racine troisième et la racine sixième, le phénomène est différent : une première séquence de 9 est suivie d'une séquence de 6, puis d'une séquence de 5, puis alors des décimales sans régularité apparente. Avec la racine septième aucune zébrure n'est apparente. La famille de tous les nombres zébrés de la forme $(10^n - 1)^{1/k}$ est nommée famille de Roland Yéléhada en l'honneur de son découvreur, mais aucune étude générale, à ma connaissance, ne permet de prédire, sans faire le calcul explicite, comment se présenteront les décimales en fonction des valeurs des paramètres n et k.

Les nombres zébrés de Brown

Passons à une famille de nombres zébrés plus étrange encore découverte et étudiée par Kevin Brown. On définit d'abord une suite numérique par récurrence par les formules : $f(0) = 0$; pour tout $n > 0$: $f(n) = 10 \times f(n-1) + n$.
On a ainsi : $f(1) = 1$; $f(2) = 12$; $f(3) = 123$; $f(4) = 1234$; $f(9) = 123456789$; $f(10) = 1234567900$; $f(20) = 12345679012345679010$; $f(30) = 123456790123456790123456790120$

Les nombres de Brown sont les racines carrées des nombres $f(n)$ pour n impair ; quelques-uns sont donnés dans la figure 3. Tous présentent les mêmes caractéristiques, qui sont de plus en plus accentuées quand on augmente la valeur de n.

– Il s'agit de nombres zébrés, les zones stables des zébrures (un même chiffre répété consécutivement) étant cette fois composées de chiffres autres que le chiffre 9. Entre les zones stables, on trouve, comme dans les décimales des nombres de Yéléhada, des suites de chiffres sans structure apparente.

– Plus on s'avance dans la suite des décimales, plus petite est la place occupée par les zones stables, et à partir d'un certain endroit, plus aucune régularité n'est visible.

– Dans tous les nombres de Brown, les zones stables sont constituées d'abord de 1, puis de 5, puis de 6, puis de 2 et l'ordre 1-5-6-2-… semble résulter d'une loi commune à tous les nombres.

Kevin Brown, qui a mené l'étude de ces nombres (en utilisant encore une technique de développement en série accompagnée de considérations arithmétiques), a réussi à découvrir la loi qui régit l'ordre des chiffres dans les tranches uniformes de ses nombres et l'a exprimée sous la forme d'un algorithme qui lui a donné le tableau suivant :
1562496392137599996393699992134893697862499999999999996393699993696399
9999999999921348936942651999936963999978651963921375999999999999999999
9999999999999999999996393699993696399999999999993696399996393699999999
9999999999999999999999999999999213489369426519999369639999426879639 5
7348999999999999936963999963936999999999999997865196395734899996393699 9
9213489369786249999999999999999999999999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999996393
699993696399…(voir http://www.mathpages.com/home/kmath404.htm).

Chose amusante et bizarre – pour l'instant inexpliquée – cette suite présente aussi des zébrures dues à des séquences de 9 consécutifs : des zébrures dans la structure des zébrures !

Les nombres zébrés peuvent présenter des régularités plus complexes et qui fascinent ceux qui les étudient. Le plus étrange des zèbres numériques irrationnel appartient à une famille trouvée par Robert Israël du Département de mathématiques de l'Université de Colombie-Britannique à Vancouver au Canada. Il est défini par la formule :
$k(n) = \sqrt{(9/121 \times 100^n + (112 - 44n)/121)}$

Pour $n = 95$ on découvre une étonnante suite des décimales zébrées dont l'étude est en cours *(voir la figure 3)*. Les motifs ordonnés complexes se prolongent sur plus de 14 000 chiffres alors que le nombre dont on prend la racine carrée n'a aucune régularité évidente. Nous avons disposé les décimales pour en faire apparaître le mieux possible la structure complexe et étrange dont l'explication détaillée, à n'en pas douter, sera encore plus subtile et délicate que celle proposée pour les nombres zébrés précédents.

D'autres nombres zébrés sont encore à découvrir, qui conduiront peut-être à un nombre irrationnel spontané infiniment zébré, car jusqu'à présent tous les nombres zébrés découverts, aussi merveilleux soient-ils, ne le sont que sur une partie finie de

leurs décimales. On sait qu'un nombre irrationnel n'est jamais périodique, mais rien en théorie n'interdit qu'une racine carrée irrationnelle possède des zébrures jusqu'à l'infini. Pourquoi n'en trouverions nous jamais ?
Bien que personne aujourd'hui n'en sache la raison, les nombres de la forme $\sqrt{n}$, lorsque n n'est pas un carré parfait, ont des décimales qui, à partir d'un certain point, satisfont à tous les tests statistiques usuels. En particulier la fréquence d'apparition de chacun des dix chiffres vaut 1/10, comme si les chiffres étaient tirés au hasard par une loterie équitable. Ce n'est évidemment pas le cas puisque le calcul des chiffres de $\sqrt{2}$, par exemple, ne laisse rien au hasard et est fixé à l'avance par la définition de $\sqrt{2}$.

Zébrures infinies ?

Dans son roman *Contact*, publié en 1985, l'astronome et collaborateur de la NASA Carl Sagan (1934-1996) imaginait qu'un jour, explorant les décimales du nombre π, des chercheurs découvraient une structure bien trop régulière pour qu'elle puisse être attribuée au hasard (il s'agissait du dessin codé d'un cercle), et il proposait d'en interpréter la présence comme une preuve de l'existence de Dieu. On peut penser qu'il avait tort : pour les zébrures découvertes récemment dans des irrationnels simples, la recherche d'explications mathématiques, menée avec insistance, conduit à des explications parfois complexes, mais en tout point rationnelles. On peut donc croire que la découverte d'une structure dans les décimales de π, si elle se produisait, serait, elle aussi, expliquée mathématiquement. Le mystère aujourd'hui est plutôt qu'on ne comprend pas pourquoi aucune zébrure n'est infinie, ni pourquoi aucune régularité indéfiniment étendue n'apparaît jamais dans les décimales des irrationnels spontanés.
Chaque nombre irrationnel spontané est un océan de chiffres liant d'une façon mystérieuse l'ordre d'une définition précise et déterministe et l'apparent aléa parfait d'un tirage au sort illimité. Les zébrures découvertes récemment ne viennent troubler ce mystère inouï que sur le rivage.

5. *Contact*



Dans son roman *Contact* (Éditions Mazarine, Paris, 1986, traduit de l'ouvrage *Contact*, Simon and Schuster, New York, 1985) Carl Sagan *(ci-contre)* oppose deux personnages, Eleanor Arroway et Joss Palmer. Eleanor explore les décimales du nombre π à la recherche d'un motif régulier qui sera découvert dans les dernières pages du livre. Cette partie du roman n'a pas été retenue pour le film qui en a été tiré. Elle illustre une étrange conception de ce que pourrait être une réconciliation de toutes les religions grâce aux mathématiques.
« Vous voyez que Dieu est mathématicien.
– Dans une certaine mesure, oui [...].
– Vous cherchez la révélation par l'arithmétique [...]
– Ceci est le seul moyen, l'unique moyen, Palmer. Il n'y a que cela qui puisse convaincre un sceptique. Imaginez que nous trouvions quelque chose. Quelque chose qui n'a d'ailleurs pas besoin d'être d'une effroyable complexité. Simplement significatif d'un ordre qui ne puisse rien devoir au hasard dans les chiffres de π. C'est tout ce dont nous avons besoin. Tous les mathématiciens pourront retrouver le même motif, ou quoi que ce soit que cet ordre s'avère être. C'est la fin du sectarisme ; tout le monde commencera à lire dans les mêmes Écritures. Plus personne ne pourra objecter que tel miracle essentiel, pour telle religion, n'était en fait qu'un tour de prestidigitation, ou que les historiens ont falsifié les documents, ou qu'il s'agit d'hystérie collective, d'illusions, d'un substitut aux parents une fois que nous sommes grands. Tout le monde pourra être croyant. »
Malheureusement pour ceux qui recherchent une preuve de l'existence de Dieu dans les mathématiques, même si l'on découvrait une régularité significative dans les décimales du nombre π, on ne pourrait rien en déduire. Comme dans le cas des irrationnels zébrés dont les structures peuvent être élucidées, une explication de nature purement mathématique pourrait finalement être donnée de la régularité ; en tout cas, elle n'aurait aucune raison d'être exclue comme a l'air de le penser Sagan. Ainsi, l'unification de l'humanité autour d'une même croyance ne se fera sans doute pas grâce au nombre π, contrairement au rêve mathématique de Sagan.

Nombres premiers inévitables et pyramidaux

Nouveautés et divertissements à propos des toujours étonnants nombres premiers.

Les êtres humains ont pris conscience de l'existence de nombres particuliers il y a plus de deux mille ans, nombres qui sont à la fois très simples et infiniment complexes et c'est pourquoi les passionnés les étudient avec assiduité et obstination, tentant d'en percer les mystères, ou parfois uniquement pour se divertir. Ces nombres, ce sont, bien sûr, les nombres premiers qui, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ne sont divisibles – c'est leur définition – que par 1 et eux-mêmes. Leur magie va, une fois encore, nous étonner, car plusieurs résultats, récemment découverts, concernent des propriétés remarquables de ces nombres.

Les nombres premiers inévitables

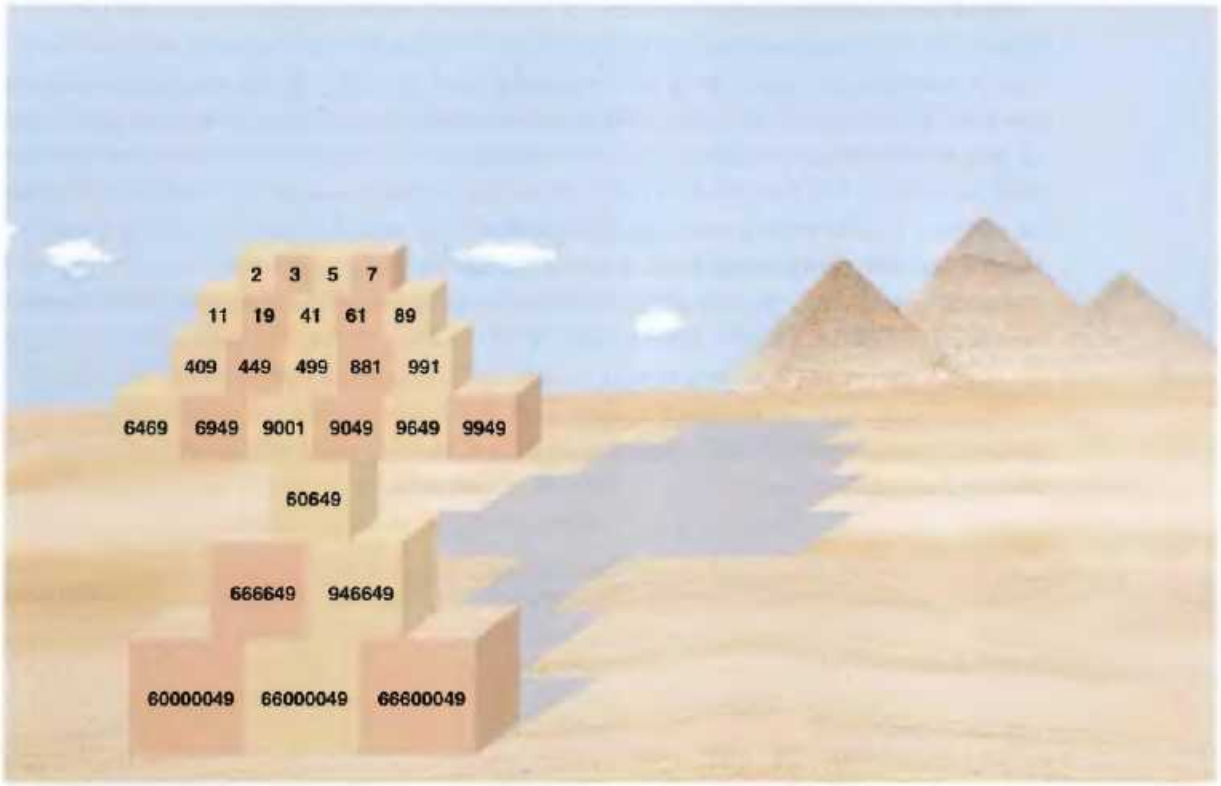
Jeffrey Shallit de l'Université canadienne de Waterloo, a introduit une notion simple et naturelle qui l'a conduit à un théorème étrange et à une multitude de questions dont certaines sont, sans doute, difficiles.

Le mot MATHÉMATIQUE contient le mot AMIE (en parcourant les lettres de MATHÉMATIQUE on trouve dans l'ordre les lettres de AMIE). De même, un nombre premier peut en contenir un autre : le nombre premier 150 967 contient le nombre premier 1597, qui lui-même contient les nombres premiers 17, 19, 59 et 97.

La question que s'est posée J. Shallit est : « Peut-on trouver une famille de nombres premiers $q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots$ telle que tout nombre premier contienne (au moins) l'un des q_i ? » Une telle famille serait en quelque sorte « inévitable ». Pour qu'elle soit intéressante, il faudrait qu'on ne puisse pas la simplifier, c'est-à-dire il faudrait que, dès que l'on enlève un des q_i , alors la famille ne soit plus inévitable. C'est ce qu'on appellera une *famille inévitable minimale* de nombres premiers.

La famille 17 et 19 n'est pas une famille inévitable, car le nombre premier 13 ne contient aucun d'eux. Il semblerait qu'une famille inévitable soit difficile à construire. Il n'en est rien : un petit moment de réflexion vous fera découvrir une méthode infaillible pour construire une telle famille inévitable minimale de nombres premiers.

En effet, partons de la suite infinie complète des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61... Cette famille est inévitable (tous les nombres premiers sont dans la liste et donc chaque nombre premier considéré est contenu dans un élément de la liste...), mais elle n'est pas minimale, car on peut lui enlever 13 (au moins). En effet, si un nombre contient 13, il contient 3, donc en gardant 3 dans la liste et en enlevant 13, il est certain qu'on ne change pas le caractère inévitable de la famille. En revanche, on ne peut pas enlever 3 ni aucun des nombres précédents 13.



Si on enlevait 3 ou 7 par exemple, la famille ne serait plus inévitable, car 3 et 7, ne contiendraient aucun nombre de la liste restante.

Ces considérations montrent que pour trouver une famille inévitable minimale de nombres premiers, il suffit d'envisager les nombres premiers les uns après les autres dans l'ordre et pour chacun d'eux de décider de le garder ou non selon qu'il contient un nombre déjà sélectionné.

Parcourons les nombres premiers à partir du début : 2 est sélectionné ; puis 3, puis 5, puis 7, puis 11 ; 13 est supprimé, car il contient 3 ; 17 est supprimé, car il contient 7 ; 23 est supprimé, car il contient 2 et 3 ; 29 est supprimé, car il contient 2 ; 31 et 37 sont supprimés, car ils contiennent 3 ; 41 est sélectionné (aucun des nombres premiers retenus avant lui n'est contenu dans 41) ; 43, 47, 53, 59 sont supprimés ; 61 est sélectionné, etc.

Très bien, mais cette histoire nous fait entrer dans un calcul infini, puisque nous n'obtiendrons notre famille inévitable minimale qu'après avoir parcouru toute la suite des nombres premiers (dont on sait, merci Euclide, qu'elle est infinie). Nous n'aurons donc la réponse à notre question qu'au bout d'un temps infini. Si nous utilisions un ordinateur cela ne changerait rien : au bout de 1000 heures de calcul, il proposerait une liste de nombres premiers sélectionnés, mais nous ne saurions pas s'il lui manque des éléments.

Heureusement la théorie des langages (un domaine de l'informatique théorique) va nous aider. On sait, grâce à un résultat de M. Lothaire, que pour tout ensemble E d'entiers donnés (pas nécessairement des nombres premiers) écrits en base 10 (le résultat se généralise à toute base), il existe un ensemble inévitable minimal fini d'éléments de E. Autrement dit l'algorithme de sélection décrit précédemment appliqué à n'importe quel ensemble E ne retient plus rien à partir d'un certain moment.

Pour des ensembles E particuliers, ce résultat est facile à vérifier. Par exemple, pour l'ensemble des nombres pairs, voyons quel est l'ensemble inévitable minimal, c'est-à-dire l'ensemble des nombres pairs contenus dans tous les nombres pairs. Pour cet ensemble {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,...}, la procédure infinie décrite au-dessus ne garde que {0, 2, 4, 6, 8} et ensuite enlève tout, conduisant donc à l'ensemble inévitable minimal de nombres pairs {0, 2, 4, 6, 8}. Le raisonnement montrant qu'on ne retiendra rien de plus est évident, tout nombre pair se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 donc à partir de 8 plus aucun nombre pair supplémentaire n'est retenu.

Pour l'ensemble E des nombres multiples de 4, on trouve l'ensemble inévitable minimal: {0, 4, 8, 12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92, 96}. Là encore un raisonnement simple assure qu'aucun nombre ne sera retenu au-delà de 96 et permet donc d'arrêter la recherche.

Pour l'ensemble des nombres multiples de 3, il est bien moins facile de trouver l'ensemble inévitable minimal. Cherchez-le si vous en avez le loisir et le goût, la solution est donnée à la fin de ce texte.

1. Les ensembles inévitables minimaux de nombres premiers en différentes bases

La notion d'ensemble inévitable minimal de nombres premiers dépend de la base de numération avec laquelle on écrit les nombres. En base 10, Jeffrey Shallit a montré que l'ensemble inévitable minimal est : {2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991, 6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60649, 666649, 946649, 60000049, 66000049, 66600049}.

Cela signifie que tout nombre premier comporte dans ses chiffres au moins un de ces nombres premiers (l'ensemble est inévitable) et qu'on ne peut pas faire plus petit (l'ensemble inévitable est minimal). Exemples : le nombre premier 4606669 contient 409 ; le nombre premier 906601 contient 9001; le nombre premier 6000004000000009 contient 60000049.

Base 2. En base 2, le résultat prend une forme plus simple. La suite des nombres premiers s'écrit : 10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, 10011, 10111, 11101, ... et il est évident donc que tout nombre premier contient 10 ou 11. L'ensemble des deux nombres premiers {10, 11} (en écriture décimale {2, 3}) est donc l'ensemble inévitable minimal des nombres premiers écrits en base 2.

Base 3. En base 3, le résultat reste assez simple. La suite des nombres premiers s'écrit : 2, 10, 12, 21, 102, 111, 122, 201, 212, 1002, 1011, 1101, 1112, 1121, 1202, 1222, 2012, 2021, 2111, 2122... On trouve l'ensemble inévitable minimal {2, 10, 111} (en écriture décimale {2, 3,13}).

Base 4. En base 4, le résultat reste une dernière fois assez simple. La suite des nombres premiers est : 2, 3, 11, 13, 23, 31, 101, 103, 113, 131, 133, 211, 221, 223, 233, 311, 323, 331, 1003, 1013... On trouve l'ensemble inévitable minimal {2, 3, 11} (en écriture décimale {2, 3, 5}).

Base 5. En base 5, tout se complique. La suite des nombres premiers est : 2, 3, 10, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 104, 111, 122, 131, 133, 142, 203, 214, 221, 232, 241, 243, 304, 313, 324, 342, 401, 403, 412, 414, 423...

En appliquant la méthode de sélection jusqu'à 10000, on trouve : {2, 3, 10, 111, 401, 414, 14444, 44441} (soit en écriture décimale : {2, 3, 5, 31, 101, 109, 1249, 3121}). Reste à démontrer que l'on n'a rien oublié.

Base 6. En base 6, le même genre de problème se pose. La suite des nombres premiers est : 2, 3, 5, 11, 15, 21, 25, 31, 35, 45, 51, 101, 105, 111, 115, 125, 135,141, 151, 155, 201, 211, 215, 225, 241, 245, 251, 255, 301, 305, ... En appliquant la méthode de sélection jusqu'à 10000, on trouve : {2, 3, 5, 11, 4401, 4441, 40041} (soit en écriture décimale {2, 3, 5, 7, 1009, 1033, 5209}).

Base 7. La suite des nombres premiers en base 7 est : 2, 3, 5, 10, 14, 16, 23, 25, 32, 41, 43, 52, 56, 61, 65, 104, 113,115, 124, 131, 133, 142, 146, 155, 166, 203, 205, 212, 214, 221, ... En appliquant la méthode de sélection jusqu'à 10000, on trouve : {2, 3, 5, 10, 14,16, 41, 61, 11111} (soit en écriture décimale {2, 3, 5, 7, 11, 13,29, 43, 2801}).

Base 8. La suite des nombres premiers est : 2, 3, 5, 7, 13, 15, 21, 23, 27, 35, 37, 45,51, 53, 57, 65, 73, 75, 103, 107, 111, 117, 123, 131, 141, 145, 147, 153, 155, 161... La méthode de sélection donne {2, 3, 5, 7, 111, 141, 161, 401, 661, 4611, 6101, 6441,60411}, soit en écriture décimale, {2, 3, 5, 7, 73, 97, 113, 257, 433, 2441, 3137, 3361, 24841}.

Base 9. La suite des nombres premiers est : 2, 3, 5, 7, 12, 14, 18, 21, 25, 32, 34, 41,45, 47, 52, 58, 65, 67, 74, 78, 81, 87, 102, 108, 117, 122, 124, 128, 131, 135... La sélection donne {2, 3, 5, 7, 14, 18, 41, 81, 601, 661, 1011, 1101}, soit en décimal, {2, 3, 5, 7, 13, 17, 37, 73, 487, 541, 739, 811}. Les résultats pour les bases 5, 6, 7, 8, 9 sont expérimentaux et n'ont pas été démontrés.

Revenons aux nombres premiers. Au bout d'un certain temps, en appliquant l'algorithme d'élimination décrit au-dessus, vous enlèverez tout, car vous aurez obtenu l'ensemble inévitable minimal des nombres premiers. Le résultat de M. Lothaire vous indique que cela va se produire, mais malheureusement ne vous dit pas quand! Vous êtes certain d'arriver au bon résultat, mais quand cela se produira vous ne le saurez pas, à moins de découvrir un raisonnement comme pour les multiples de 2, 3 ou 4. Pour les nombres premiers, le raisonnement est assez difficile, pourtant Jeffrey Shallit a réussi à le formuler – il occupe deux pages de son article – et établit que l'ensemble minimal inévitable des nombres premiers écrits en base 10 est : {2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991,6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60649, 666649, 946649, 60000049, 66000049, 66600049}.

Tout nombre premier écrit en base 10 contient donc l'un de ces 26 nombres premiers, et cet ensemble de nombres premiers est le plus petit qui soit inévitable en base 10. Pourquoi ces nombres premiers-là ? Qu'ont-ils de particulier qui les désigne ainsi ? Mystère. Le résultat de Jeffrey Shallit n'est-il pas un étrange et beau résultat !

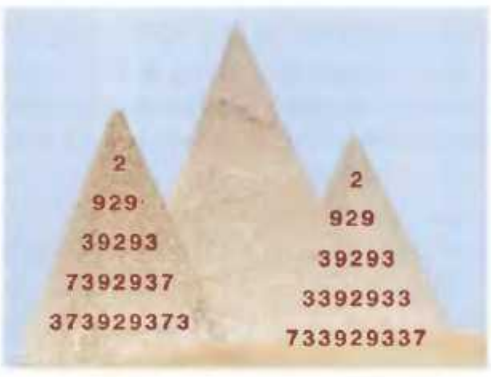
Si on utilise une autre base que la base décimale, on obtient d'autres ensembles inévitables minimaux de nombres premiers *(voir la figure 1)*. Signalons que J. Shallit a aussi démontré que l'ensemble inévitable minimal des nombres composés écrits en base 10 est : {4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 27, 30, 32, 33, 35, 50, 51, 52, 55, 57, 70, 72, 75, 77, 111, 117, 171, 371, 711, 713, 731}.
Il conjecture aussi sans avoir réussi à en trouver de démonstration que {1, 2, 4, 8, 65 536} est l'ensemble inévitable minimal des puissances de 2 écrites en base 10.

Un fait remarquable et intéressant dans le calcul des ensembles inévitables minimaux est que l'ordinateur propose un résultat qui, si vous l'avez fait tourner assez longtemps, a de bonnes chances d'être celui que vous cherchez, mais la seule façon de savoir si l'ensemble qu'il vous propose est vraiment complet (c'est-à-dire si aucun autre nombre ne sera retenu quand vous prolongerez le calcul une heure, une journée, une semaine etc.) est de raisonner. L'ordinateur propose, le mathématicien – s'il y arrive – dispose et c'est de leur association que naissent les résultats sur les ensembles inévitables minimaux.

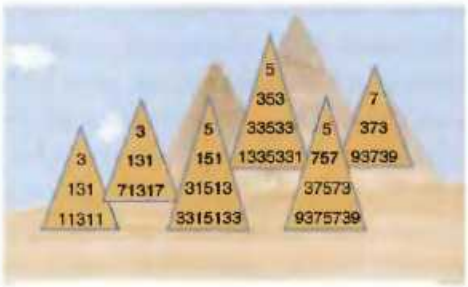
Les pyramides de nombres premiers palindromes

Les amateurs de nombres premiers sont aussi des collectionneurs et leurs recherches regorgent de défis. Les pyramides de nombres premiers sont un de leurs sujets favoris, dont G.L. Honaker et Chris Caldwell sont des spécialistes. Examinons certaines découvertes récentes.

Partant d'un nombre premier, 2 par exemple, on cherche un nombre premier palindrome (c'est-à-dire qui est le même quand on le lit à l'envers) contenant 2 en son centre, 929 par exemple. On recherche alors un autre nombre premier palindrome de 5 chiffres contenant 929 en son milieu 39293 convient, etc. Partant de 2, les plus hautes pyramides qu'on peut construire ont pour hauteur 5. Il y en a exactement 2 que voici :



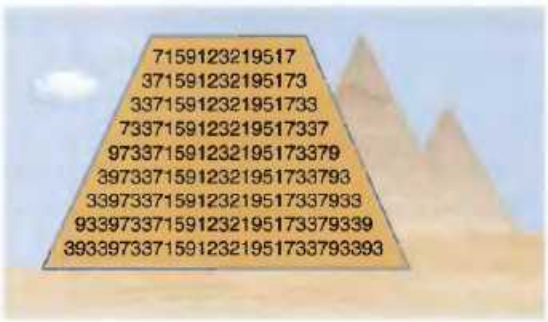
Si au lieu de placer un 2 au sommet on place un autre chiffre premier (3, 5 ou 7), les plus hautes pyramides qu'on obtient sont les suivantes



Ces résultats sont définitifs, car les programmes utilisés pour trouver ces records ont exploré toutes les alternatives possibles : par exemple placer 727, qui est premier, sous le 2 à la place de 929, oblige à placer ensuite 37273, mais aucune suite n'est alors possible, car 1372731, 2372732, 3372733, 4372734, 5372735, 6372736, 7372737, 8372738, 9372739 sont tous des nombres composés.

Peut-on trouver de plus hautes pyramides en plaçant au sommet des nombres premiers de plusieurs chiffres (qui conduisent donc à des pyramides tronquées), ou en allongeant les lignes de plusieurs chiffres à la fois au lieu d'un seul (toujours en exigeant bien sûr d'avoir des nombres premiers palindromes à chaque niveau) ?

La plus haute pyramide tronquée avec des marches de largeur 1, trouvée à l'heure actuelle est due à Felice Russo la voici :



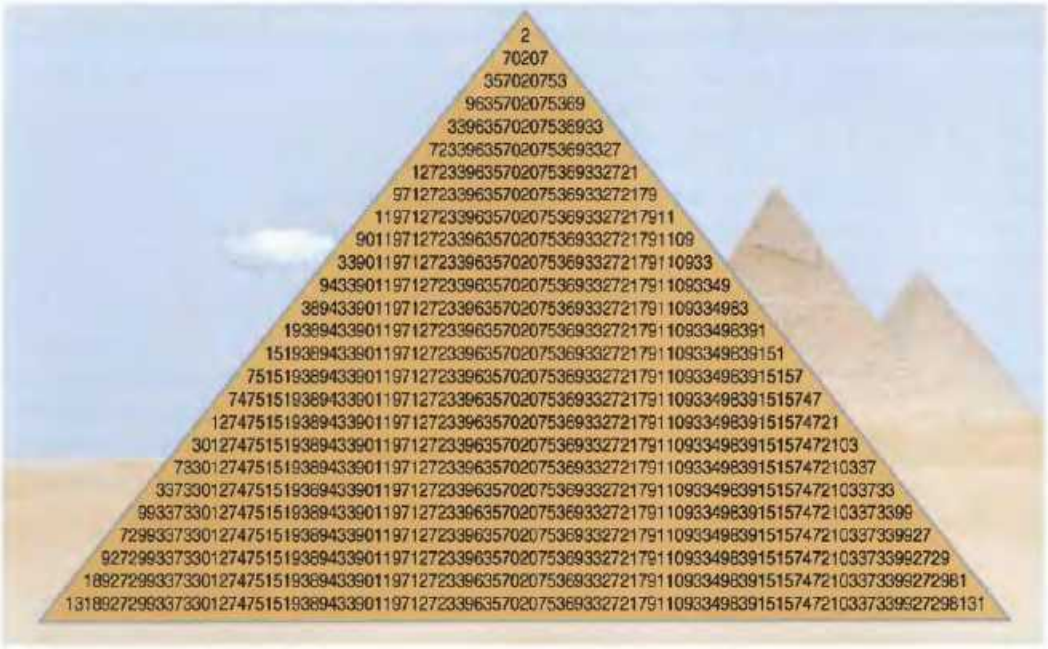
Comme il y a une infinité de points de départ possibles, il est vraisemblable que ce record sera amélioré. Un lecteur essaiera-t-il ?

Si maintenant nous recherchons des pyramides de sommet 2 ayant des marches de largeur 2 (chaque nouveau nombre allonge le précédent de deux chiffres en avant et de deux chiffres en arrière) le record de hauteur est alors 26. Il y a deux pyramides record dont la première est représentée ci-contre à droite.

Si à la place du sommet 2, nous choisissons 3, la hauteur maximale est 28 (trois pyramides différentes ont cette hauteur). Avec 5 et 7, la hauteur maximale est 29 et dans chaque cas une seule pyramide a été trouvée.

Comme pour les pyramides aux marches de largeur 1 partant de 2, 3, 5 ou 7, les calculs ont été menés de façon systématique et on est donc certain que l'on ne pourra pas améliorer ces records qui sont donc définitifs.

Pour construire ces pyramides, il faut que l'on sache déterminer si un nombre est premier ou non. Pour cela, la méthode la plus simple consiste à rechercher des diviseurs de n : on fait la division de n par tous les nombres jusqu'à la racine carrée de n (car si n



possède un diviseur autre que 1 et lui-même, il en possède un inférieur ou égal à sa racine carrée), et si aucune division ne tombe juste on sait que n est premier. Cette méthode des divisions ne marche pas pour des nombres longs : par cette méthode, au-delà de 40 chiffres, même le plus puissant ordinateur (ou réseaux d'ordinateurs) ne peut tester la primalité d'un nombre. On doit donc utiliser d'autres techniques dont les plus faciles à programmer sont

2. Algorithmes probabilistes pour la primalité

Pour trouver des nombres premiers de plusieurs dizaines ou plusieurs centaines de chiffres, la méthode des divisions n'est pas utilisable. On peut cependant procéder de la manière suivante qui conduira non pas à une certitude, mais à une forte présomption (ce sont des algorithmes probabilistes).

Pour savoir si n est premier :

– on choisit un nombre a entre 2 et $n-1$ et on calcule par une série de multiplications et divisions a^2 mod n (c'est-à-dire le reste de la division de a^2 par n), puis a^4 mod n, a^8 mod n, a^{16} mod n, etc.

– en multipliant entre eux certains des résultats de l'étape précédente, on calcule : a^{n-1} mod n. Par exemple, si $n = 13$, on doit calculer a^{12} mod 13 qu'on obtient en multipliant (a^4 mod 13) par (a^8 mod 13).

– si le résultat obtenu est différent de 1, d'après le petit théorème de Fermat, cela signifie que n n'est pas premier (dans ce cas, il n'y a pas d'incertitude) ;

– sinon, on a un indice que n pourrait être premier, et essayant une autre valeur de a et en arrivant à nouveau au résultat 1, on diminuera le risque de se tromper.

Su Hee Kim et Carl Pomerance ont calculé les probabilités d'erreur de cette méthode. On sait par exemple que si vous choisissez au hasard un nombre n de cent chiffres ou moins, que vous choisissez au hasard un nombre a entre 2 et $n-1$, et que vous trouvez que $a^{n-1} = 1$ mod n, alors la probabilité pour que n soit premier est supérieure à 99,9999972%. Voici quelques autres majorations du risque d'erreur r de cette méthode :

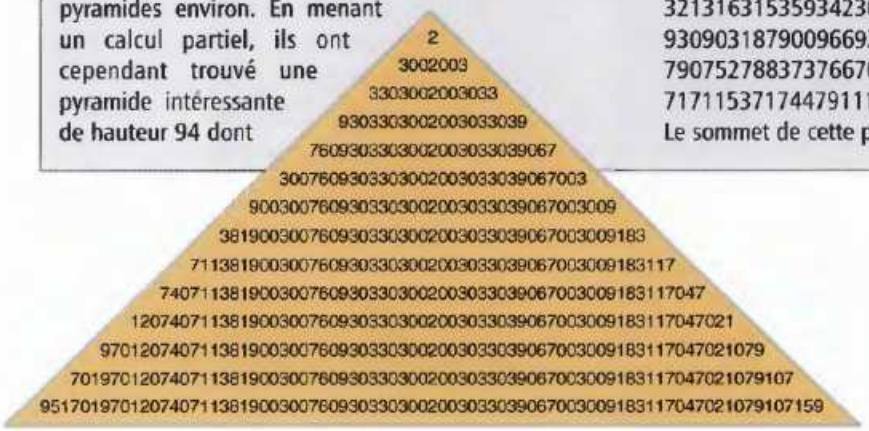
– pour 60 chiffres, risque d'erreur $r < 7{,}2 \times 10^{-2}$,
– pour 80 chiffres, risque d'erreur $r < 8{,}5 \times 10^{-5}$,
– pour 100 chiffres, risque d'erreur $r < 2{,}8 \times 10^{-8}$,
– pour 200 chiffres, risque d'erreur $r < 3{,}9 \times 10^{-27}$,
– pour 1000 chiffres, risque d'erreur $r < 1{,}2 \times 10^{-123}$,
– pour 10000 chiffres, risque d'erreur $r < 1{,}6 \times 10^{-1331}$.

3. Avec des marches de largeur 3 on bute sur l'impossible calculatoire

Si, partant du sommet 2, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes ayant des marches de largeur 3 (à chaque étape, on prolonge les nombres précédents de 3 chiffres en avant et de trois chiffres en arrière), Honaker et Caldwell ont évalué qu'on devrait pouvoir trouver une pyramide de hauteur 193 environ (ayant donc une base constituée d'un nombre de 1153 chiffres). Malheureusement la recherche de cette pyramide record est impossible à mener systématiquement (même en utilisant des tests de primalité probabilistes), car il faudrait envisager 10^{30} pyramides environ. En menant un calcul partiel, ils ont cependant trouvé une pyramide intéressante de hauteur 94 dont le dernier nombre est le nombre premier palindrome suivant de 559 chiffres :

36111974471735117172375698479939699398670294872076673738872570975933036936694591471136170275296690097813090393814299595293030317076035718632439535136131237879832196339678074474010296492097573093813312017933390112092138018139630234276013533095170197012074071138190030076093233030076093033003020030330390670030091831170470210790703300200303303906700300918311704702107910715903353106724320369318108312902110933397102133183903757902946920104744708769336912389787321316315359342368175306707130303925959241839309031879009669257207163117419549663963033957907527883737667027849207689399693997489657327171153717447911163.

Le sommet de cette pyramide est :



probabilistes, ce qui veut dire qu'elles produisent leur conclusion avec un certain risque d'erreur *(voir la figure 2)*. Cependant en s'y prenant bien, le risque peut être minimisé (inférieur à 10^{-6} ou même inférieur à 10^{-12}) et donc en pratique tous les résultats obtenus, même quand on utilise des tests de primalité probabilistes, sont corrects. Les chercheurs de pyramides de nombres premiers utilisent ces méthodes probabilistes.

En s'autorisant des marches de largeur constante plus grande (par exemple 3), on découvre des pyramides plus hautes (c'est logique, car à chaque étape un plus grand nombre de possibilités est offert). Mais peut-on trouver une pyramide de hauteur infinie? G. L.Honaker et C. Caldwell pensent que non et c'est pourquoi ils ont formulé la conjecture suivante : *Quel que soit le nombre premier palindrome choisi comme sommet et quel que soit le nombre fixé pour la largeur des marches, une pyramide de palindromes premiers a une hauteur finie*. Bien sûr cette conjecture attend une démonstration.

Mais que se passe-t-il si on autorise la largeur des marches à être variable comme pour la pyramide suivante?



La possibilité d'utiliser des marches de toute largeur conduit vraisemblablement à des pyramides infinies. Personne néanmoins n'a su le démontrer aujourd'hui!

En s'imposant d'utiliser à chaque fois le plus petit nombre palindrome qui convienne pour obtenir l'étage suivant et partant de 2, une pyramide de hauteur 58 a été calculée par F. Russo. Son sommet est la pyramide précédente. Nous la décrivons en ne donnant que l'extension nécessaire pour passer d'un étage à celui juste au-dessous : 2, 7, 3, 33, 9, 30, 18, 92, 3, 133, 18, 117, 17, 15, 346, 93, 33, 180, 120,194, 126, 336, 331, 330, 95, 12, 118, 369, 39, 32, 165, 313, 165, 134, 13,149, 195, 145, 158, 720, 18, 396, 193, 102, 737, 964, 722, 156, 106, 395,945, 303, 310, 113, 150, 303, 715, 123. Il semble assez clair qu'on doit pouvoir la poursuivre indéfiniment, mais cela reste à prouver. Il faudra démontrer aussi, par des méthodes non probabilistes, que chacun des étages est bien un nombre premier.

4 Nombres premiers jumeaux

Voici la liste des 100 premières paires de nombres premiers jumeaux : [3, 5], [5, 7], [11, 13], [17, 19], [29, 31], [41, 43], [59, 61], [71, 73], [101, 103], [107, 109], [137,139], [149, 151], [179, 181], [191, 193], [197, 199], [227, 229], [239, 241], [269, 271], [281, 283], [311, 313], [347, 349], [419, 421], [431, 433], [461, 463], [521, 523], [569, 571], [599, 601], [617, 619], [641, 643], [659, 661], [809, 811], [821, 823], [827, 829], [857, 859], [881, 883], [1019, 1021], [1031, 1033],[1049, 1051], [1061, 1063], [1091, 1093], [1151, 1153], [1229, 1231], [1277, 1279], [1289, 1291], [1301, 1303], [1319, 1321], [1427, 1429], [1451, 1453], [1481, 1483], [1487, 1489], [1607,1609], [1619, 1621], [1667, 1669], [1697, 1699], [1721, 1723], [1787,1789], [1871, 1873], [1877, 1879], [1931, 1933], [1949, 1951], [1997,1999], [2027, 2029], [2081, 2083], [2087, 2089], [2111, 2113], [2129, 2131], [2141, 2143], [2237, 2239], [2267, 2269], [2309, 2311], [2339, 2341], [2381, 2383], [2549, 2551], [2591, 2593], [2657, 2659], [2687, 2689], [2711, 2713], [2729, 2731], [2789, 2791], [2801, 2803], [2969, 2971], [2999, 3001], [3119, 3121], [3167, 3169], [3251, 3253], [3257, 3259], [3299, 3301], [3329, 3331], [3359, 3361], [3371, 3373], [3389, 3391], [3461, 3463], [3467, 3469], [3527, 3529], [3539, 3541], [3557, 3559], [3581, 3583], [3671, 3673], [3767, 3769], [3821, 3823]

Tout nombre pair, sauf ceux de l'ensemble {94, 96, 98, 400, 402, 404, 514, 516, 518, 784, 786, 788, 904, 906, 908, 1114, 1116, 1118, 1144, 1146, 1148, 1264, 1266, 1268, 1354, 1356, 1358, 3244, 3246, 3248, 4204, 4206, 4208}, s'écrit comme somme de deux nombres premiers jumeaux. Du moins c'est ce que l'on vérifie quand on essaye tous les nombres pairs jusqu'à 20 000 000000.

Voici par exemple la décomposition des nombres pairs entre 1000 et 1110 sous forme d'une somme de deux nombres premiers jumeaux.

1000 = 821+179	1002 = 823+179
1004 = 823+181	1006 = 857+149
1008 = 859+149	1010 = 859+151
1012 = 821+191	1014 = 823+191
1016 = 823+193	1018 = 881+137
1020 = 883+137	1022 = 1019+ 3
1024 = 1021+3	1026 = 1021+5
1028 = 1021+7	1030 = 1019+11
1032 = 1021+11	1034 = 1031+3
1036 = 1033+3	1038 = 1033+5
1040 = 1033+7	1042 = 1031+11
1044 = 1033+11	1046 = 1033+13
1048=1031+17	1050 = 1033+17
1052 = 1049+3	1054 = 1051+3
1056 = 1051+5	1058=1051+7
1060 = 1049+11	1062=1051+11
1064 = 1061+3	1066 = 1063+3
1068 = 1063+5	1070 = 1063+7
1072 = 1061+11	1074 = 1063+11
1076 = 1063+13	1078 = 1061+7
1080 = 1063+17	1082 = 1063+19
1084 = 857+227	1086 = 859+227
1088 = 859+229	1090 = 1061+29
1092 = 1063+29	1094 = 1091+3
1096 = 1093+3	1098 = 1093+5
1100 = 1093+7	

D'où la nouvelle conjecture de Dubner :

Tout nombre pair plus grand que 4208 est la somme de deux nombres premiers jumeaux.

Cette conjecture entraîne à la fois la conjecture de Goldbach (tout nombre pair plus grand que 2 est somme de deux nombres premiers) et la conjecture des nombres premiers jumeaux (il existe une infinité de nombres premiers jumeaux).

Terminons ce petit voyage par une nouvelle conjecture proposée par Harvey Dubner et qui fait joliment la synthèse de deux conjectures anciennes.

Jumeaux + Goldbach

Depuis 250 ans, on pense que tout nombre pair plus grand que 2 est somme de deux nombres premiers (4 = 2+2, 6 = 3+3, 8 = 5+3, 10 = 5+5, etc.). Il s'agit de la conjecture de Christian Goldbach pour laquelle un prix de un million de dollars avait été proposé en 2000. L'offre n'était valable que pour les années 2000 et 2001 et personne ne l'a emportée. La conjecture a été vérifiée jusqu'à 400 000 000 000 000.

On pense aussi depuis bien longtemps qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire espacés de 2 unités comme 11 et 13, ou comme 17 et 19, ou comme 2027 et 2029 (les plus proches années à venir qui seront des nombres premiers jumeaux). Le début de la suite des nombres premiers jumeaux est :

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73),(101, 103), (107,109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227,229), (239, 241)...

La proportion de nombres premiers jumeaux parmi les nombres premiers diminue quand on progresse vers l'infini : les nombres premiers jumeaux sont de plus en plus rares et beaucoup plus rares que les nombres premiers. Plus précisément, alors que la densité des nombres premiers autour de n est environ $1/ln(n)$ (c'est le fameux résultat prouvé simultanément par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896), on conjecture que la densité des nombres premiers jumeaux vaut $2{,}64/[ln(n)]^2$, ce qui – si la conjecture est vraie – signifie que les nombres premiers jumeaux sont de plus en plus rares parmi les nombres premiers, leur proportion tendant vers 0 à l'infini.

Écrire un nombre pair sous la forme d'une somme de deux nombres premiers jumeaux est donc plus difficile que de l'écrire sous la forme d'une somme de deux nombres premiers. Pourtant 6 = 3+3, 8 = 3+5, 10 = 5+5, 12 = 5+7, 14 = 7+7, 16 = 13+3, 18 = 13+5, 20 = 13+7, 22 = 19+3, 24 = 19+5, 26 = 13+13. Il semble bien qu'on puisse toujours écrire un nombre pair comme la somme de deux nombres premiers jumeaux. Une recherche systématique montre en réalité qu'il existe des exceptions : 94 par exemple ne peut pas s'écrire comme somme de deux nombres premiers jumeaux. Un calcul par ordinateur conduit à la liste d'exceptions suivantes : 94, 96, 98, 400, 402, 404, 514, 516, 518, 784, 786, 788, 904, 906, 908, 1114, 1116, 1118, 1144, 1146, 1148, 1264, 1266, 1268, 1354, 1356, 1358, 3244, 3246, 3248, 4204, 4206, 4208.

Plus intéressant, aucune autre exception n'a été trouvée en explorant tous les nombres pairs jusqu'à 20 000 000 000, d'où la conjecture de Harvey Dubner : *Tout nombre pair plus grand que 4208 est la somme de deux nombres premiers jumeaux.*

La démonstration de cette conjecture établirait à la fois la conjecture de Goldbach (car on a vérifié que tous les nombres pairs inférieurs à 4208 s'écrivent comme somme de deux nombres premiers) et la conjecture sur l'infinité des nombres premiers jumeaux (car une quantité finie de nombres premiers jumeaux ne peut suffire à exprimer tous les nombres pairs au-delà de 4208 comme somme de nombres premiers jumeaux). La conjecture de Dubner est plus difficile que les deux conjectures anciennes réunies et donc... elle est sans doute très loin d'être démontrée!

En même temps que notre connaissance des nombres premiers s'accroît, la quantité de questions non résolues qu'ils posent augmente. Pas d'inquiétude donc pour l'amateur de nombres premiers, il gardera de quoi s'occuper pour longtemps encore.

Solution au problème de la recherche de l'ensemble inévitable minimal des multiples de 3.

Cet ensemble M possède 280 éléments : M= {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 111, 114, 117, 141, 144, 147, 171, 174, 177, 222, 225, 228, 252, 255, 258, 282, 285, 288, 411, 414, 417, 441, 444, 447, 471,474, 477, 522, 525, 528, 552, 555, 558, 582, 585, 588, 711, 714, 717, 741, 744, 747, 771, 774, 777, 822, 825, 828, 852, 855, 858, 882, 885, 888}.

On vérifie à la main (ou avec son ordinateur) qu'en appliquant la méthode générale de sélection jusqu'à 1 000, on arrive bien à M. Il faut alors raisonner pour prouver qu'on ne retient rien au-delà de 1 000. Soit un nombre de 4 chiffres ou plus retenu au-delà de 1 000 (on suppose qu'il en existe et on cherche une contradiction). Il s'écrit *abcd*... Aucun de ses chiffres n'est multiple de 3 (car sinon il ne serait pas retenu puisque 0, 3, 6 et 9 sont déjà retenus). Supposons que *a* soit congru à 1 *modulo* 3 (c'est-à-dire de la forme $3p + 1$), alors *b* aussi (sinon *b* serait congru à 2 *modulo* 3, et donc *ab* serait multiple de 3, or par construction tout multiple de 3 de deux chiffres contient un nombre de l'ensemble M). De même *c* serait congru à 1 *modulo* 3 (sinon *bc* serait multiple de 3). Donc *abc* serait multiple de 3, ce qui est impossible, car tout nombre de trois chiffres multiple de 3 contient un nombre de M (car M a été construit en appliquant la procédure de sélection jusqu'à 1 000). L'hypothèse que *a* est congru à 1 *modulo* 3 conduit donc à une impossibilité. De même l'hypothèse que *a* est congru à 2 *modulo* 3, implique que *b* est congru à 2 *modulo* 3 et que *c* est aussi congru à 2 *modulo* 3, donc que *abc* est multiple de 3 ce qui est impossible. Le chiffre *a* ne peut donc être ni multiple de 3, ni congru à 1 *modulo* 3, ni congru à 2 *modulo* 3. Donc aucun nombre au-delà de 1 000 ne sera retenu.

Quelles pièces pour faire l'appoint?

En remplaçant nos pièces par des pièces de 1 centime, 6 centimes, 14 centimes, 62 centimes, 99 centimes et 1,40 euro, nous gagnerions sensiblement en efficacité !

Le voyageur qui se rendait en Roumanie durant l'époque Ceausescu était surpris par bien des choses de ce pays à la fois très proche (le roumain est une langue latine) et bien lointain (car sous le joug d'une étrange dictature communiste). L'amateur de nombres était interloqué par une pièce de monnaie qu'il regardait d'abord avec incrédulité : la pièce de 3 *lei*. La monnaie roumaine est le *leu* et il existait bel et bien une pièce de 3 *lei*, aujourd'hui retirée de la circulation pour cause d'inflation fulgurante. Pourquoi cet étonnement ? La pièce de 3 *lei* était-elle absurde ? Ou est-ce nous qui nous trompons en préférant des pièces de 2 *euros* à d'éventuelles pièces de 3 *euros* ?

a



b



c



d



e



f



Dans la majorité de pays, on n'utilise que des pièces de 1 unité, 2, 5, 10, 20, 50, 100 unités, etc. Parfois on voit des pièces de 25 unités comme aux États-Unis où la pièce de 25 *cents*, dénommée *quarter*, est l'une des quatre pièces disponibles (1 *cent*, 5 *cents*, 10 *cents*, 25 *cents* ; il n'y a pas de pièces de 20 *cents*, ni de 50 *cents*). La pièce de 3 *lei* nous force à réfléchir, d'autant qu'elle n'est pas unique dans l'histoire des monnaies : aux États-Unis, deux modèles différents de pièces de 3 *cents* furent émis – dont un en argent – qui circulèrent entre 1851 et 1873. Des pièces de 3 *roubles* et 3 *kopecks* (russes) et 3 *banis* (roumains) ont aussi existé.

Faire toutes les sommes?

Pour définir un jeu de pièces de monnaie, nous devons impérativement avoir une pièce unité (de la plus basse dénomination). Considérons deux cas extrêmes. Dans le premier cas, la Banque centrale n'a émis que des pièces d'une unité et il faut utiliser x pièces pour payer la somme x. C'est encombrant. Dans le second cas, il existe une dénomination pour chaque valeur de x. Pour payer une somme quelconque, l'on n'utilise qu'une pièce de monnaie, mais elles sont toutes différentes. C'est peu pratique.

Bien sûr, il faut trouver un compromis qui limite à la fois le nombre de dénominations différentes et le nombre de pièces nécessaires pour faire l'appoint. Notons déjà que si l'on met à disposition des consommateurs des pièces de valeur 2 unités, il faudra $x/2$ pièces si la valeur à payer est paire, et $x/2 + 1$ pièces si la valeur est impaire. L'utilisation de deux dénominations a déjà diminué de moitié le nombre de pièces nécessaires pour faire l'appoint.

Un jeu de pièces de monnaie sera efficace si, en moyenne, nous n'avons à utiliser qu'un petit nombre de pièces pour rendre la monnaie. Précisons cette notion en introduisant une notation.

Notons *Eff* (47, [1, 2, 5, 10, 20]) le nombre minimum de pièces nécessaires pour faire la somme 47 avec des pièces de 1, 2, 5, 10, 20. Ce nombre est 4, car la façon la plus efficace de faire 47 unités avec les pièces disponibles est 20 + 20 + 5 + 2. Nous noterons : *Eff* (47, [1, 2, 5, 10, 20]) = 4. De même *Eff* (18, [1, 2, 5,10]) = 4, *Eff* (18, [1, 3, 5, 10]) = 3,

Eff (18, [1, 8, 10]) = 2. Ainsi, pour la somme de 18 unités, notre système européen [1, 2, 5, 10] n'est pas optimal. Un cas particulier n'est toutefois pas concluant et le système [1, 2, 5, 10] est le meilleur des trois quand nous examinons la somme de 12 unités: *Eff* (12, [1, 2, 5, 10]) = 2, *Eff* (12, [1, 3, 5, 10]) = 3, *Eff* (12, [1, 8, 10]) = 3.

L'important, en définitive, est l'efficacité moyenne d'un système lorsque nous envisageons toutes les sommes possibles jusqu'à une certaine valeur X (celle du plus petit billet est un choix naturel). Nous noterons donc *Eff-moy* (X, [a_1, a_2,..., a_n]) le nombre moyen de pièces qu'il faut pour composer les sommes de 0 unité, 1 unité, 2 unités, 3 unités, etc., jusqu'à la valeur $X-1$ unités. Avec cette définition la valeur de *Eff-moy* (X, [a_1, a_2,..., a_n]) est égale à {*Eff* (0, [a_1, a_2,..., a_n]) + *Eff* (1, [a_1, a_2,..., a_n]) + ... + *Eff* ($X-1$, [a_1, a_2,..., a_n])}/X. Le fait d'envisager la somme de 0 unité est une astuce de calcul: elle permet de diviser par X qui sera souvent un nombre rond et, de plus, la prise en compte de la somme 0 ne change rien aux classements des résultats. Ainsi, *Eff-moy* (10, [1, 2, 5]) = {*Eff* (0, [1, 2, 5]) + *Eff* (1, [1, 2, 5]) + ... + *Eff* (9, [0, 2,5])} / 10 = {0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3} / 10 = 1,7. Pour faire toutes les sommes possibles entre 0 et 9, si vous disposez des trois pièces de valeurs faciales 1, 2 et 5, il vous faut en moyenne 1,7 pièce pour chaque somme. Notons – nous y reviendrons – que ce système est moins bon que le système [1, 3, 4] où *Eff-moy* (10, [1 , 3, 4]) = {*Eff* (0,[1, 3, 4]) + *Eff* (1, [1, 3, 4]) + ... + *Eff* (9, [0, 3, 4])}/10 = {0 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3}/10 = 1,6.

Pour l'euro, dans sa version actuelle complète, le calcul est un peu plus long, car, le plus petit billet est de 5 euros, soit 500 centimes d'euro et que les pièces disponibles sont 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 200 centimes. Tous calculs faits, nous obtenons : *Eff-moy* (500 [1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200]) = 4,6.

En moyenne, pour rendre la monnaie un commerçant européen utilise 4,6 pièces. Nous avons implicitement supposé que chacune des sommes entre 1 centime et 499 centimes a la même probabilité de se présenter, ce qui est évidemment simplificateur. De plus, le consommateur donnera souvent une dénomination supérieure au marchand, qui lui rendra la monnaie. Nous pourrions en tenir compte assez facilement, mais nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir l'exposé.

Ce nombre de 4,6 pièces en moyenne est élevé. Ne pourrions-nous pas améliorer notre système en ajoutant une pièce bien choisie? Jeffrey Shallit s'est posé la question et a mené le calcul à l'aide de programmes informatiques. Il a essayé tous les ajouts possibles d'une pièce et a repéré celui qui améliorait le mieux le système européen.

Quelle pièce ajouter?

Son diagnostic est formel: en ajoutant une pièce de 1,33 *euro* ou de 1,37 *euro*, nous améliorerions très sensiblement notre système dont l'efficacité moyenne passerait de 4,6 à 3,92 pièces. Cette importante information guidera, nous l'espérons, la



Dénominations inhabituelles. *(a)* pièce russe de 3 roubles de 1843, *(b)* pièce soviétique de 15 kopecks de 1983, *(c)* pièce russe de 3 kopecks de 1841, *(d)* pièce russe de 3 kopecks de 1908, *(e)* pièce roumaine de 3 lei de 1963, *(f)* pièce russe de 6 roubles de 1834, *(g)* pièce de 8 doubles de Guernesey de 1858, *(h)* pièce mongole de 15 unités frappée en 1981, *(i)* pièce de 12 deniers de 1792, *(j)* pièce de 15 sols sous Louis XIV (1670), *(k)* pièce sicilienne de 4 taris de 1649, *(l)* pièce polonaise de 3 groshens de 1622, *(m)* pièce soviétique de 3 kopecks de 1982, *(n)* pièce roumaine de 3 banis de 1953, *(o)* billet de 3 roubles soviétiques de 1938. La plus commune des dénominations inhabituelles est le 3.



Banque centrale européenne et la conduira à une salutaire réforme de notre système !

Le même calcul a été opéré pour le système en vigueur aux États-Unis où le plus petit billet a pour valeur 1 *dollar* égal à 100 *cents* et où les pièces existantes sont 1 *cent*, 5 *cents*, 10 *cents* et 25 *cents*. L'efficacité moyenne de ces pièces est *Eff-moy* (100, [1, 5, 10, 25]) = 4,7, ce qui est légèrement moins bien que le système européen. J. Shallit a déterminé la pièce la plus utile à ajouter à ce système qui n'en comporte que 4. Cette pièce serait une pièce de 32 *cents* qui conduirait le système à une efficacité moyenne de 3,46 et le placerait alors devant le système européen (même si celui-ci a été complété par l'indispensable pièce de 1,33 *euro* ou 133 *cents*).

Systèmes optimaux

D'autres intéressants calculs ont été envisagés. Un réformateur décidé ne chercherait pas seulement à améliorer le système de pièces en usage dans son pays, mais en construirait un totalement nouveau et le plus efficace possible. Si l'on se fixe la base de 100 unités (base plus universelle que celle de 500 du système européen), voici les résultats du calcul de J. Shallit. Le meilleur système ayant 2 pièces serait le système [1, 10], dont l'efficacité moyenne est *Eff-moy* (100, [1, 10]) = 9 et qui arrive à égalité avec le système [1, 11].

Le meilleur système à 3 pièces serait le système [1, 12, 19], dont l'efficacité moyenne est 5,15. Avec quatre pièces, les deux systèmes [1, 5, 18, 25] et [1, 5, 18, 29] se valent et ont pour efficacité moyenne 3,89. Le système [1, 5, 18, 25] est particulièrement séduisant puisqu'il ne demanderait pour sa mise en place aux États-Unis que

2. Rendre la monnaie de la meilleure façon possible

Lorsque l'on dispose de diverses pièces de monnaie (supposées en quantité illimitée) et qu'on doit composer une somme fixée, deux méthodes peuvent être utilisées : l'algorithme général et l'algorithme glouton.
Exemple : On dispose de pièces de 1 unité, 3 unités, 4 unités et on veut faire une somme de 6 unités.

Algorithme général

On envisage toutes les sommes utilisant 6 pièces ou moins (il est inutile d'utiliser plus de 6 pièces, car nous pouvons faire la somme avec 6 unités), on conserve les sommes dont le total est 6. Il y en a 4 : 1+1+1+1+1+1, 1+1+1+3, 1+1+4, 3+3. On retient la somme utilisant le moins de pièces : 3 + 3.

Algorithme glouton

On prend la pièce la plus élevée ayant une valeur inférieure à 6 : la pièce 4. On calcule 6 – 4 = 2, puis on prend la pièce la plus élevée ayant une valeur inférieure à 2 : c'est la pièce 1. On calcule 2 – 1 = 1, puis on prend la pièce la plus élevée ayant une valeur inférieure à 1 : 1. On calcule 1 – 1 = 1, on propose donc 4 + 1 + 1.

L'algorithme glouton donne un résultat directement et rapidement, cependant il ne donne pas toujours le meilleur résultat. Dans notre exemple, il propose 4 + 1 + 1 qui est moins bon que 3 + 3.

Diverses améliorations et variantes sont possibles pour l'algorithme général, et en garantissent le résultat optimal. Cependant aucune méthode rapide n'est connue qui obtienne à coup sûr le calcul de la meilleure somme, et aucune n'existe sans doute. En effet, s'il existait une telle méthode fonctionnant en temps polynomial (en fonction de la taille n des données supposées écrites en base 10) alors on saurait résoudre rapidement tous les problèmes NP-complets ce qu'on ne réussit pas à faire malgré plus de 30 années de recherche sur cette question !



le retrait de toutes les pièces de 10 *cents* qui seraient remplacées par des pièces de 18 *cents*. Ce magnifique système a été découvert indépendamment par Tom Young en 1995 qui intitulait son article *Change the Dime not the Dollar (Changeons la pièce de 10 cents, pas le dollar)* et plus récemment par J. Shallit qui, lui, annonçait la grande nouvelle, par le titre *What This Country Needs Is a 18 cents Piece (Ce dont notre pays a besoin, c'est d'une pièce de 18 cents)*.

Avec cinq pièces, il y a un seul gagnant [1, 5, 16, 23, 33] dont l'efficacité moyenne est 3,29. Pour six pièces, les deux systèmes [1, 4, 6, 21, 30, 37] et [1, 5, 8, 20, 31, 33] conduisent tous les deux à 2,92 pièces en moyenne. Pour sept pièces, on atteint 2,65 avec le meilleur système de dénominations qui est [1, 4, 9, 11, 26, 38, 44].

Tous ces calculs ont été faits avec l'hypothèse que le billet de 100 unités était la limite des opérations de change envisageables. Avec la limite 500, les systèmes optimaux ne sont plus les mêmes. En voici, quelques-uns :
4 pièces : [1, 7, 57, 80] ; efficacité moyenne : 6,804,
5 pièces : [1, 6, 20, 85, 121] ; efficacité moyenne : 5,44,
6 pièces : [1, 6, 14, 62, 99, 140] et [1, 8, 13, 69, 110, 160] ; efficacité moyenne de 4,67.

Ces deux derniers systèmes à six pièces, on le remarquera, ont une efficacité moyenne presque égale aux 4,6 de notre bon vieux système européen à 8 pièces [1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200] : celui-ci semble décidément indéfendable.

Il n'est pas sérieux cependant d'envisager des systèmes aussi complexes et dont le maniement est lui-même complexe : d'autres considérations doivent être prises en compte avant d'organiser la grande réforme. L'algorithme le plus simple et le plus naturel pour composer une somme S quand nous disposons de pièces de valeurs $[a_1, a_2, ..., a_n]$ est le suivant : nous rechercherons d'abord la plus grosse pièce inférieure à S parmi $a_1, a_2, ..., a_n$; puis nous chercherons la plus grosse pièce permettant de compléter ce qui manque, etc.

Les gloutons font l'appoint

Cette méthode s'appelle l'*algorithme glouton*, sans doute parce qu'il dévore les pièces rapidement en retenant en priorité les pièces les plus grosses. Appliqué à n'importe quelle somme, il donnera une solution – un jeu de pièces dont le total est S –, mais ce ne sera pas toujours le meilleur : la gloutonnerie n'est pas intelligente. En effet, prenons le système [1, 6, 14, 62, 99, 140] (c'est un des deux systèmes optimaux à six pièces quand on prend la limite 500). Cherchons à composer la somme de 18 unités par l'algorithme glouton : on choisit d'abord la pièce de 14 unités, puis 4 fois de suite celle de 1 unité, ce qui amène donc à la décomposition 18 = 14 + 1 + 1 + 1 + 1 qui utilise 5 pièces. L'utilisation de 3 pièces de 6 unités aurait été meilleure, car 18 = 6 + 6 + 6.

L'algorithme glouton est le plus naturel, et surtout, il permet de ne jamais revenir en arrière, alors que les méthodes pour trouver les décompositions optimales sont obligées de procéder plus lentement, soit par énumération complète, soit à l'aide de remises en cause des choix déjà faits dans l'espoir d'améliorations. Aussi reprendrons-nous la question du système optimal en supposant que les utilisateurs se servent toujours de cet algorithme.

Notons donc *Eff-gl* (47, [1, 2, 5, 10, 20]) le nombre de pièces qu'il faut pour obtenir la somme 47 lorsqu'on utilise des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et qu'on pratique l'algorithme glouton. Ce nombre est 4, car l'algorithme glouton conduit à la

3. Efficacité moyenne d'un système

L'efficacité moyenne d'un système de pièces de monnaie (par exemple celui utilisé aujourd'hui en Europe avec ses pièces de 1 centime, 2 centimes, 5, 10, 20, 50, 100, 200) se mesure en calculant le nombre moyen de pièces nécessaires pour faire les sommes de 0, 1, 2, ..., 499 (500 est la valeur du plus petit billet : billet de 5 euros).

L'efficacité moyenne du système européen est de 4,6 : il faut en moyenne utiliser 4,6 pièces de monnaie pour composer une somme entre 0 et 499.

Le système [1, 8, 13, 69, 110, 160], toujours en considérant toutes les sommes possibles de 0 à 499, possède une efficacité moyenne de 4,67. Bien qu'il ne comporte que 6 pièces, il est pratiquement aussi efficace (à 2 % près). Doit-on changer notre système ? Si une telle réforme apparaît trop radicale, on peut se contenter d'ajouter juste une pièce pour améliorer notre système. Une pièce de 1,33 euro (ou de 1,37 euro) serait le meilleur choix possible. Son ajout amènerait l'efficacité du système européen de 4,6 à 3,92 pièces, ce qui est sensiblement mieux.



décomposition 47 = 20 + 20 + 5 + 2 (qui, ici, est la meilleure possible). Notons, et c'est bien sûr une qualité intéressante du jeu de pièces [1, 2, 5, 10, 20] que l'algorithme glouton donne toujours la solution optimale (ce qui n'est pas le cas quand on utilise le jeu de pièces [1, 6, 14, 62, 99, 140] comme nous venons de le voir). De tels systèmes qui, avec l'algorithme glouton, donnent la meilleure décomposition possible seront nommés *parfaits*.

À partir de *Eff-gl*, nous définissons maintenant l'efficacité moyenne gloutonne, notée *Eff-moy-gl* (X, [a_1, a_2,..., a_n]) : c'est le nombre moyen de pièces pour composer les sommes de 0 unité, 1 unité, 2 unités, 3 unités, etc. jusqu'à la valeur de $X-1$ unités, quand on utilise l'algorithme glouton. Autrement dit : *Eff-moy-gl* (X, [a_1, a_2,..., a_n]) = {*Eff-gl* (0, [a_1, a_2,..., a_n]) + ... + *Eff-gl* (X-1, [a_1, a_2,..., a_n])}/X.

La figure 4 indique avec la limite X = 100 les systèmes les plus efficaces pour les utilisateurs de l'algorithme glouton. Si, par exemple, vous souhaitez un système à 5 pièces, vous devez choisir un des six systèmes : [1, 3, 7, 16, 40] ; [1, 3, 7, 16, 41] ; [1, 3, 7, 18, 44] ; [1, 3, 7, 18, 45] ; [1, 3, 8, 20, 44] ; [1, 3, 8, 20, 45]. Parmi eux, deux seulement sont parfaits [1, 3, 7, 18, 44] et [1, 3, 8, 20, 44]. Ils sont désignés par des * dans le tableau.

Lorsque la limite n'est plus 100, mais 500, les systèmes les plus efficaces avec l'algorithme glouton sont :

4 pièces : [1, 5, 23, 109] et [1, 5, 23, 110] avec efficacité moyenne de l'algorithme glouton : 7,1. Ces deux systèmes sont parfaits.

5 pièces : [1, 4, 13, 44, 147] (qui est imparfait à cause de 176), [1, 4, 13, 44, 150] (parfait), [1, 4, 14, 47, 160] (parfait) et enfin [1, 4, 14, 48, 160] (parfait). L'efficacité moyenne de l'algorithme glouton est pour tous ces systèmes de 5,8.

6 pièces : [1, 3, 8, 26, 64, 202], [1, 3, 8, 26, 64, 203], [1, 3, 8, 26, 64, 204], [1, 3, 10, 25, 79, 195], [1, 3, 10, 25, 79, 196], [1, 3, 10, 25, 79, 197] . Aucun n'est parfait et l'efficacité moyenne de l'algorithme glouton y est de 5,4.

Admettons-le, aucun de ces systèmes, malgré les preuves mathématiques de leurs avantages, n'a vraiment de chances d'être adopté un jour : ils apparaissent difficiles à utiliser, même avec l'algorithme glouton, et obligent à une gymnastique arithmétique dont les bons vieux systèmes dispensent. Nous allons comprendre pourquoi en examinant une proposition de réforme – citée par J. Shallit – qui semble devoir être étudiée avec soin, car beaucoup plus raisonnable que celles des paragraphes précédents.

Elle concerne les pays comme l'Europe ou la Chine, où le système des pièces et des billets est fondé sur le schéma répétitif : 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ... Ne serait-il pas intéressant de lui substituer le système : 1, 3, 4, 10, 30, 40, 100, 300, 400 ... ?

Le nouveau jeu de pièces (et éventuellement de billets) qu'on obtiendrait possède des propriétés globalement intéressantes et constitue un compromis assez séduisant à première vue. En effet :

(a) Composer une somme peut toujours se faire en traitant le problème chiffre par chiffre : pour composer la somme 7 853, vous vous occupez successivement de composer 3 unités (en prenant la pièce de 3), puis 50 (en prenant les pièces de 40 et 10), puis 800 (en prenant 400 et 400), puis 7 000 (en prenant 4 000 et 3 000). L'examen des chiffres en ordre inverse ne change pas le résultat. Le défaut principal des systèmes envisagés auparavant était qu'on devait traiter les sommes globalement sans réduire le calcul à une série de sous-calculs, chiffre par chiffre, comme c'est possible ici.

(b) L'algorithme glouton marche toujours, sauf pour 6 = 3 + 3 qui est meilleur que 6 = 4 + 1 + 1, mais tout le monde peut apprendre cette exception : en définitive, elle n'est pas gênante.

(c) Si la distribution des sommes à rendre est supposée uniforme, on gagne 6 pour cent par rapport au système actuel.

Et la loi de Benford ?

Oui, mais il y a Benford ! Racontons l'histoire de cette bizarrerie encore mal expliquée aujourd'hui. Un jour de 1881, un astronome américain, Simon Newcomb, s'aperçut que les premières pages d'une table de logarithmes étaient plus usées que les autres. Les données recherchées dans cette table commençaient-elles plus souvent par 1 que par 2, par 2 que par 3, etc. ? Il résuma les résultats de son observation dans une formule donnant la fréquence f d'apparition du premier chiffre C, celui situé le plus à gauche, dans un ensemble de données $f = log_{10}\ (1 + 1/C)$. À l'époque, la formule ne convainquit personne.

Cinquante ans plus tard, vers 1938, un physicien américain, Frank Benford, redécouvrit les mêmes fréquences que celles résultant de l'application de la formule de Newcomb, en répertoriant plus de 20 000 données sélectionnées dans des domaines aussi divers que les longueurs de plus de 300 fleuves, les recensements démographiques de plus de 3 000 régions, les masses atomiques des éléments chimiques, les cours de la bourse, les constantes de la physique, les couvertures de journaux, etc.

Il constata, donc, que le 1 est le chiffre le plus fréquent (30,1 pour cent), suivi par le 2 (17,6 pour cent), suivi par le 3 (12,5 pour cent) ! Il en fit une loi qui porte aujourd'hui son nom : la loi de Benford. En supposant que les chiffres utilisés dans les prix suivent la loi de Benford, le système avec 1 3 4 est 6 pour cent plus efficace que le système actuel fondé sur 1 2 5.

4. Les meilleurs jeux de pièces

Jeffrey Shallit a calculé les systèmes optimaux quand on rend la monnaie en utilisant l'algorithme glouton et que l'on considère que toutes les sommes comprises entre 0 et 99 unités sont équiprobables. Certains jeux de pièces donnent toujours la solution optimale lorsque l'on utilise l'algorithme glouton (qui n'est pas censé la calculer) : on les appelle *systèmes parfaits* et ils sont indiqués par une étoile. On a représenté sur la figure ci-dessous le nombre de pièces à utiliser en fonction de la somme à payer avec l'algorithme glouton et deux systèmes de pièces.

Jeux à une seule pièce. La meilleure efficacité moyenne possible pour un utilisateur de l'algorithme glouton est 49,5 et elle est obtenue avec le jeu de pièces : [1]*.

Jeux à deux pièces. La meilleure efficacité moyenne possible avec l'algorithme glouton est 9, obtenue avec les deux jeux de pièces : [1, 10]* et [1, 11]*.

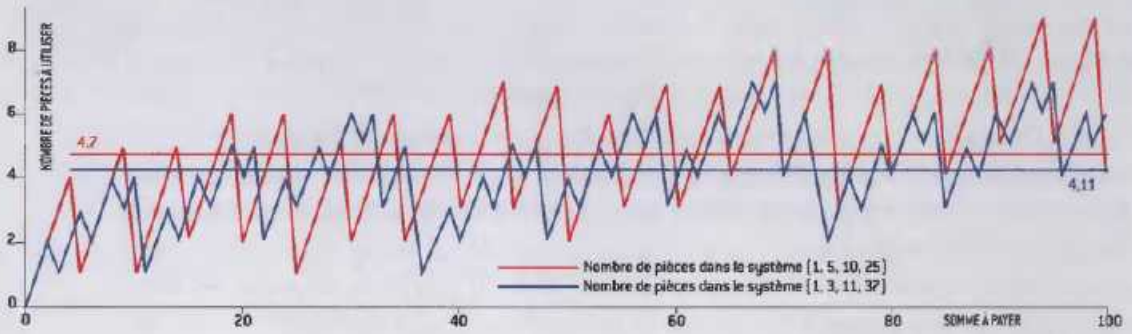
Jeux à trois pièces. La meilleure efficacité moyenne possible avec l'algorithme glouton est 5,26 est obtenue avec les deux jeux de pièces : [1, 5, 22]* et [1, 5, 23]*.

Jeux à quatre pièces. La meilleure efficacité moyenne possible avec l'algorithme glouton est 4,1, obtenue avec les deux jeux de pièces : [1, 3,11, 37]* et [1, 3,11, 38]*.

Jeux à cinq pièces. La meilleure efficacité moyenne possible pour un utilisateur de l'algorithme glouton est 3,46 et elle est obtenue avec les six jeux de pièces : [1, 3, 7, 16, 40] (non parfait à cause de 21), [1, 3, 7, 16, 41] (non parfait à cause de 21), [1, 3, 7, 18, 44]*, [1, 3, 7, 18, 45] (non parfait à cause de 54), [1, 3, 8, 20, 44]*, [1, 3, 8, 20, 45] (non parfait à cause de 60).

Jeux à six pièces. La meilleure efficacité moyenne possible avec l'algorithme glouton est 3,13, obtenue avec les quatre jeux de pièces : [1, 2, 5, 11, 25, 62] (non parfait à cause de 33), [1, 2, 5, 11, 25, 63] (non parfait à cause de 33), [1, 2, 5, 13, 29, 64], [1, 2, 5, 13, 29, 65].

Jeux à sept pièces. La meilleure efficacité moyenne possible avec l'algorithme glouton est 2,86, obtenue avec 32 jeux de pièces dont les deux suivants : [1, 2, 5, 8, 17, 27, 63] et [1, 2, 5, 8, 19, 30, 63]*.



La pièce roumaine de 3 *lei* serait donc justifiée (à la condition de l'associer à la pièce de 4 *lei*, mais il faut alors supprimer les pièces de 2 et 5 *lei*). Devons-nous vraiment suivre cette voie avec [1, 3, 4, 10, 30, 40, 100, 300, 400, ...] ?

Retour à la tradition

Répondre oui serait, là encore, précipité, car le système [1, 3, 4, 10, 30, 40, ...] est l'objet d'une critique formulée récemment par Roland Yéléhada. La distribution des chiffres selon la loi uniforme ou selon la loi de Benford est une hypothèse sensée pour les données naturelles (par exemple des tirages au hasard ou la longueur des fleuves). En revanche, les prix et donc les sommes que l'on compose avec des pièces de monnaie sont décidés par les commerçants et ceux-ci, habitués au système décimal, choisissent de préférence des prix ronds, donc qui se terminent assez fréquemment par 5 ou 0 (ou alors par 9 ou 95, quand il s'agit de prix publicitaires, nous allons y revenir). Le goût pour les nombres ronds ne changerait-il pas l'ordre de préférence entre les deux systèmes les plus raisonnables pour l'Europe [1, 2, 5, 10, 20, 50, ...] et [1, 3, 4, 10, 30, 40, ...] ?

En admettant que la moitié des chiffres utilisés pour former des prix sont des 5 ou des 0 et que les autres chiffres sont utilisés de manière équivalente (c'est-à-dire se partagent les 50 pour cent restants), cela donne la répartition de probabilité suivante pour les chiffres: 0:25 %; 1 : 6,25 % ; 2 : 6,25 % ; 3 : 6,25 % ; 4 : 6,25 % ; 5 : 25 % ; 6 : 6,25 % ; 7 : 6,25 %; 8 : 6,25 % ; 9 : 6,25 %. Avec cette répartition et le système européen [1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ...], composer une somme demande en moyenne: 0,0625 × (1+1+2+2) + 0,25 + 0,0625 × (2+2+3+3) = 1,25 pièce par chiffre. Avec [1, 3, 4, 10, 30, 40, 100, 300, 400 ...], il faut: 0,0625 × (1+2+1+1)+0,25 ×2 + 0,0625 × (2 + 2 + 2 + 3) = 1,375 pièce par chiffre. Le nouveau système serait donc 10 % moins efficace que l'ancien!

Le nouveau système est meilleur pour la répartition uniforme et la loi de Benford, mais moins bon pour une répartition où les 0 et les 5 sont plus probables, répartition qui correspond à la pratique commerciale réelle. Nous pouvons préciser un peu cette remarque. Si nous examinons les répartitions de probabilités pour les chiffres où p % des chiffres sont des 0 et des 5 (à parts égales entre 0 et 5) et où les huit autres chiffres se partagent le reste des probabilités (à parts égales entre les huit chiffres), alors nous constatons que jusqu'à p = 33,33 % le nouveau système est préférable à l'ancien, mais dès que p dépasse 33,33 % (et donc pour la valeur p = 50 % de notre calcul précédent) l'ancien système est meilleur.

Un ordinateur à 999 euros, une auto à 9999 euros?

Avant de formuler une conclusion définitive, il faut toutefois étudier un dernier point: la sur-utilisation du 9 dans les prix publicitaires. Si celle-ci allait trop loin, deux systèmes nouveaux seraient à envisager. Il s'agit des deux systèmes suivants qui tous les deux fonctionnent chiffre par chiffre utilisant trois pièces pour chaque ordre de grandeur (1, 4, 5 et leurs multiples par 10): [1, 4, 5, 10, 40, 50, 100, 400, 500, ...] et [1, 5, 9, 10, 50, 90, 100, 500, 900, ...].

En envisageant une répartition des chiffres où le 9 est considéré comme très probable: 0:25 % ; 1 : 5 % ; 2 : 5 % ; 3 : 5 % ; 4 : 5 % ; 5 : 10 % ; 6 : 5 % ; 7 : 5 % ; 8 : 5 %; 9 : 30 %, on a le classement suivant des quatre systèmes:
[1, 5, 9, 10, 50, 90, 100, 500, 900, ...] 1,35 pièce par chiffre,
[1, 4, 5, 10, 40, 50, 100, 400, 500, ...] 1,40 pièce par chiffre,
[1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ...] 1,65 pièce par chiffre,
[1, 3, 4, 10, 30, 40, 100, 300, 400, ...] 1,65 pièce par chiffre.

Lorsque la proportion de 9 est un peu moins forte, il y a inversion du classement entre les deux premiers. En résumé, tant que la proportion de 0 et de 5 est assez forte et qu'on n'abuse pas du 9, aucune réforme n'est nécessaire, mais si les prix publicitaires favorisent excessivement le 9, alors il faut remplacer les pièces de 2 unités par des pièces de 4 unités, ou même de 9 unités.

Au bout du compte, il semble bien que contrairement à ce qu'un examen un peu trop abstrait semblait montrer, le système européen dispose de bons arguments pour se défendre. L'analyse mathématique du meilleur système est amusante (avec l'hypothèse de l'algorithme glouton ou non) et semblait appeler une réforme, mais en prenant en compte le calculateur humain – qui veut traiter les chiffres les uns après les autres – et la psychologie de ceux qui choisissent les prix et qui les aiment ronds, aucune réforme ne sera nécessaire... tant qu'on n'abusera pas du 9. Sauvé! Remarquons enfin que le choix du jeu de pièces et de l'algorithme glouton permet de calculer les fréquences relatives d'utilisation de chaque dénomination et indique donc aux banques émettrices combien elles doivent en émettre de chaque type...

Des mots magiques infinis

La suite de Thue-Morse et ses sœurs sont des structures ubiquitaires : pour les échecs, le dessin et la musique, essayez les mots sans carré et sans cube.

Pour intéresser un auditoire, ou pour écrire un texte en style soutenu, il faut éviter de se répéter. Cette consigne de non-répétition est plus complexe à respecter qu'on ne l'imagine et elle conduit à une série de résultats mathématiques qui décrivent la façon de s'y prendre... même dans le cas de textes infinis! Lorsqu'il y a trop peu de lettres disponibles, on découvre des impossibilités absolues. Nées de considérations élémentaires, nous allons voir que ces questions constituent un riche domaine de recherche mathématique toujours en progrès.

Mots, sous-mots, carrés, cubes

Les répétitions que nous envisagerons sont uniquement les répétitions côte à côte. Les langages que nous utiliserons seront construits sur des alphabets de symboles distincts dont le nombre d'éléments sera précisé, car ce nombre détermine la difficulté des problèmes.

Le mot *cocorico* – construit avec le langage à quatre symboles *c*, *o*, *r*, *i* – contient la répétition de *co*. Le mot *abracadabra* ne contient pas de répétition: *abra*, présent deux fois, ne compte pas pour nous, car entre les deux occurrences de *abra* il y a une séparation. Le mot *cocorico* contient le carré de *co* et *abracadabra* est sans carré.

En français, les mots *ouistiti*, *taratata*, *rififi*, *barbare*, *rococo*, *piripiri*, *roudoudou*, *acacia*, *béribéri*, *nounours*, *toutou*, *nounou*, *tonton*, *poupoule*, *cacatoès*, *pom-pom-girl* et quelques autres (appréciés des jeunes enfants) sont des mots contenant des carrés. Je ne sais pas quel est le plus long carré qu'on trouve dans un mot du dictionnaire.

Boutros Boutros Gali, ancien secrétaire général des Nations unies, possède un nom qui contient un carré de 8 symboles (avec le blanc). Cela constitue-t-il le record pour les noms propres? Le nom du lac péruvien *Titicaca* contient deux carrés, comme le titre de la chanson *Ploum Ploum tralala*.

Les mots avec cubes contiennent trois fois de suite le même sous-mot comme *Hahaha* (ce mot obtient le score de 935 000 chez Google), *chachacha* (505 000 sur Google), *booou* (956 chez Google), *beeeu* (907 chez Google). Le mot créée comporte un cube (si on néglige les accents). J'ignore quel est le plus long cube dans un nom, commun ou propre.

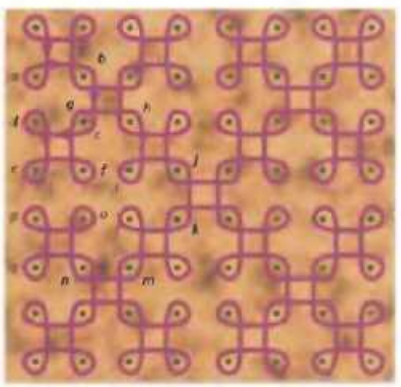
Si l'on utilise un alphabet infini, ne pas se répéter est plus que facile: il suffit d'utiliser les uns derrière les autres tous les symboles à sa disposition. À l'opposé, si on n'a que deux symboles (par exemple «0» et «1»), ne pas se répéter est très difficile puisque les seuls mots sans carré qu'on peut écrire avec 0 et 1 sont les six mots: 0, 1, 01, 10, 101, 010.

Réfléchissez quelques secondes, vous verrez qu'il n'existe aucun mot binaire sans carré de longueur 4 ou plus.

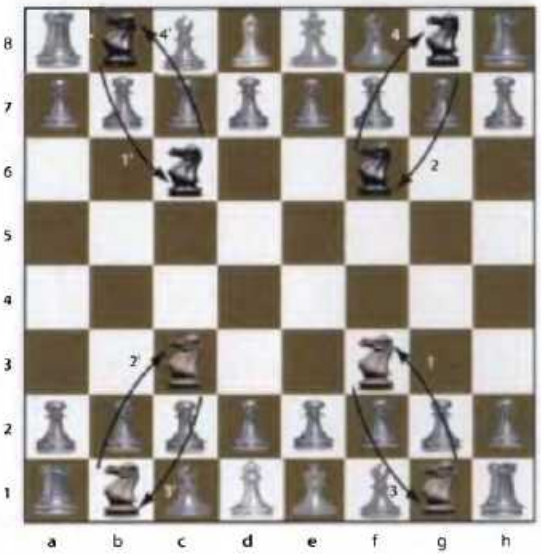
Le problème des mots à deux symboles sans cube est bien moins facile: il va nous plonger dans un tourbillon mathématique. Avant cela, je vous invite à rechercher un instant, un mot sans cube le plus long possible composé uniquement de 0 et de 1.



La suite de Thue-Morse et les Kolam indiens. Dans l'État du Tamil Nadu (Sud-Est de l'Inde), les mères enseignent à leurs filles le dessin, avec de la poudre de riz, des figures de Kolam. G. Allouche, J.-P. Allouche et J. Shallit ont récemment étudié une catégorie de dessins Kolam où un tracé *(à droite)* entoure un réseau de points disposés en carré. À chaque point rencontré, le tracé tourne tout autour du point (effectuant un angle de 270°) ou simplement le contourne (angle de 90°). Ce dessin entoure ici un réseau 8 × 8, mais on peut en faire pour tout réseau carré de côté une puissance de 2. Ces parcours sont secrètement déterminés par le mot de Thue-Morse. En effet, commençons par écrire 0, au point *a*. Ensuite, à chaque fois que nous avançons écrivons 00 ou 11 si nous arrivons à un point où le parcours fait une boucle de 270°, ou écrivons 0 ou 1 si nous arrivons à un point où le parcours fait un angle de 90°, tout cela en prenant soin d'alterner l'utilisation des 0 et des 1. 0. *a*: on rencontre une boucle : 11. *b*: on rencontre un angle de 90° : 0. *c*: on rencontre un angle de 90° : 1. *d*: on rencontre une boucle : 00. *e*: on rencontre une boucle : 11. *f*: on rencontre une boucle : 00. *g*: on rencontre un angle de 90° : 1. *h*: on rencontre un angle de 90° : 0. *i*: on rencontre une boucle : 11. *j*: on rencontre un angle de 90° : 0. *k*: on rencontre un angle de 90° : 1. *l*: on rencontre une boucle : 00. *m*: on rencontre un angle de 90° : 1. *n*: on rencontre un angle de 90° : 0. *o*: on rencontre une boucle : 11. *p*: on rencontre une boucle : 00. *q*: on rencontre une boucle : 11. Etc. La suite ainsi construite est celle de Thue-Morse (jusqu'à ce qu'on arrive en bas à droite) : 0110100110010110 10010110011.



Max Euwe démontra que la règle du jeu d'échecs qui impose de « ne jamais jouer trois fois de suite la même séquence de coups » autorisait des parties infinies (ce qui est « théoriquement » catastrophique). À chaque « 0 » de la suite de Thue-Morse, on associe la séquence de coups Cg1-Cf3, Cg8-Cf6, Cf3-Cg1, Cf6-Cg8 (les Blancs puis les Noirs sortent leur Cavalier gauche, puis le rentrent) et à chaque « 1 » de la suite, on associe la séquence de coups Cb1-Cc3, Cb8-Cc6, Cc3-b1, Cc6-b8 (les Blancs puis les Noirs sortent leur Cavalier droit, puis le rentrent). En suivant la suite de Thue-Morse 0110100110010110... on ne rejouera jamais trois fois de suite les mêmes coups et donc la partie durera indéfiniment.



Voici un mot binaire sans cube de longueur 64 :
0110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110

Un regard attentif en livre le secret. Ce mot est construit sur le principe suivant : partir de 0, puis, six fois de suite, faire l'opération de remplacement r définie par $r(0) = 01$, $r(1) = 10$. On obtient ainsi : $0 \mapsto 01 \mapsto 0110 \mapsto 01101001 \mapsto 0110100110010110 \mapsto 0110100110010110100101100110100 1...$

Une autre méthode conduisant au même résultat (mais ce n'est pas la même méthode !) consiste à partir de 0, puis, six fois de suite, à accoler ce que l'on a déjà en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0, ce qui donne la suite $0 \mapsto 01 \mapsto 0110 \mapsto 01101001 \mapsto 0110100110010110 \mapsto 0110100110010110100101100110100 1$

On montre assez facilement *(voir par exemple* Logique, informatique et paradoxes, *éditions Belin/Pour la Science, 1995, page 35)* qu'un mot sans cube auquel on applique l'opération de remplacement r donne toujours un mot sans cube. Comme 0 est évidemment sans cube, il en est de même de 01, 0110, 01101001, etc.

À chaque répétition de l'opération de remplacement r, on obtient un nouveau mot qui prolonge le précédent. Cela résulte de la remarque suivante : $r(0) = 01$ prolonge 0, donc $r(01)$ prolonge $r(0)$, c'est-à-dire 0110 prolonge 01. On en déduit que $r(0110)$ prolonge $r(01)$, etc. De proche en proche, on obtient que le $(n+1)$-ième élément de la suite de mots considérée prolonge le n-ième. Il en résulte qu'on peut prolonger à l'infini cette suite de 0 et de 1, et obtenir ainsi une suite illimitée de 0 et 1 qui ne comportera jamais aucun cube.

Thue-Morse, les échecs et Prouhet

Cette suite remarquable est aujourd'hui bien connue des mathématiciens. Elle s'appelle la suite de Thue-Morse (ou mot de Thue-Morse). Elle a été présentée et étudiée en 1906 par Axel Thue (1863-1922) dans un obscur journal norvégien. Elle ne retint l'attention de la communauté scientifique que lorsque le mathématicien américain Marston Morse (1892-1977) la redécouvrit... en 1921. Elle fut retrouvée aussi par le grand maître d'échecs Max Euwe (1901-1981, champion du monde de 1935 à 1937)

qui montra que la règle du jeu d'échecs autorisait des parties infinies, et cela dès le départ, sans qu'aucune pièce ne soit prise *(voir la figure 2)*.

La suite de Thue-Morse avait été remarquée avant l'article de Thue. Le mathématicien français E. Prouhet, dans un article de 1851 (*Mémoire sur quelques relations entre puissances d'un nombre*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris, série I, 33, 1851, p. 225), prouvait une jolie propriété arithmétique. Si l'on met à gauche d'une égalité les 8 entiers correspondant aux numéros des 8 premiers emplacements des « 0 » de la suite – ce sont les entiers 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15 – et à droite les 8 entiers correspondant aux 8 premiers emplacements des « 1 » – ce sont 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 – alors on obtient trois égalités remarquables simultanées :

$$0 + 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 = 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14$$
$$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2=1^2+2^2+4^2+7^2+ 8^2+ 11^2+13^2+14^2$$
$$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3=1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3$$

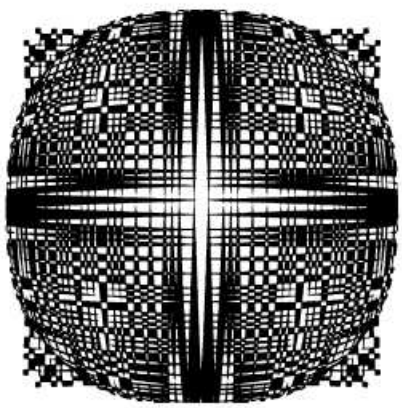
En exploitant la suite de Thue-Morse un peu plus loin, ce résultat se généralise et donne 4 égalités entre deux paquets de 16 nombres, 5 égalités entre deux paquets de 32 nombres, etc. et conduit donc à l'affirmation très surprenante que : pour tout nombre n, on peut trouver deux ensembles de nombres entiers distincts A et B, tels que la somme des nombres de A est la même que la somme des nombres de B, de même pour les carrés, les cubes, ..., les puissances n-ièmes.

La suite de Thue-Morse (ou Prouhet-Thue-Morse comme on propose de la dénommer en France...) est un exemple remarquable de la rencontre de propriétés presque contradictoires dans un même objet mathématique : une totale simplicité et une grande complexité.

Nul doute, la suite de Thue-Morse est d'une grande simplicité : les trois égalités $t(0) = 0$, $t(2n) = t(n)$, $t(2n+1) = 1 - t(n)$ la déterminent totalement. Pourtant la suite de Thue-Morse produit un nombre transcendant : le nombre réel qui en base 2 s'écrit 0,11010011001011010011011001101001... est transcendant, c'est-à-dire n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers (les nombres π et e dont les écritures sont, elles, totalement désordonnées en apparence sont aussi transcendants). La transcendance du nombre associé à la suite de Thue-Morse est un résultat difficile et remarquable, il a été démontré par Kurt Mahler (1903-1988) en 1929 et a récemment été complété par un autre beau résultat de Martine Queffélec de l'Université de Lille qui indique que la fraction continue :

$$\cfrac{1}{u_0+\cfrac{1}{u_1+\cfrac{1}{u_2+\ldots}}}$$

où les u_i sont les termes de la suite de Thue-Morse augmentés de 1 (1221211221121221...), est aussi un nombre transcendant.



3 Dessin géométrique obtenu à partir de la suite de Thue-Morse. On part d'un carré de 64 sur 64 suivant la suite de Thue-Morse (0 = noir, 1 = blanc). On le fait pivoter de deux degrés et on le superpose à son image symétrique en appliquant la règle : noir + noir = blanc. On applique ensuite au résultat obtenu précédemment une transformation qui fait gonfler le centre.

Le caractère paradoxal de la suite de Thue-Morse se manifeste aussi à propos des répétitions. Cette suite n'est pas répétitive puisqu'elle ne comporte aucun cube (ni de longueur 1, ni de longueur 2, etc.), mais en même temps, elle est très répétitive, car elle possède la propriété suivante : si un mot – par exemple 011 – apparaît une fois dans la suite de Thue-Morse alors il apparaît une infinité de fois, et les endroits où on le trouve ne sont pas de plus en plus éloignés : la séquence 011 apparaît par exemple au moins une fois dans toute séquence de 14 symboles consécutifs de la suite.

Comme le nombre π ou la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., la suite de Thue-Morse est un objet ubiquitaire : on le rencontre dans de nombreux contextes mathématiques différents sans que l'on sache précisément pourquoi.

La figure 4 présente des propriétés étonnantes de la suite de Thue-Morse et indique des domaines où le mathématicien l'a rencontrée. G. Allouche, J.-P. Allouche et J. Shallit ont récemment montré qu'elle est cachée dans la structure de certains dessins Kolam de l'Inde du Sud qu'on retrouve par ailleurs dans la tradition des figures dessinées sur le sable des peuples des îles Vanuatu *(voir la figure 1)*.

4. Les propriétés de la suite de Thue-Morse

La suite infinie possède un aspect fractal : certains de ses morceaux la contiennent entièrement. Ainsi, en ne retenant qu'un élément sur deux de la suite, on retombe sur cette même suite (et donc aussi en n'en retenant qu'un élément sur quatre, ou en ne prenant qu'un élément sur huit, etc.). Pour obtenir un schéma régulier comme ci-contre à droite, on place sur chaque ligne $2n$ éléments de la suite ; il y a alors deux types de lignes *A* et *B* qui se suivent selon *ABBA BAAB*... c'est-à-dire selon : 01101001100101101001011001101001100101100110100101.

Le mot de Thue-Morse est un mot sans cube : on ne rencontre jamais trois fois consécutivement la même séquence (jamais on n'y rencontre donc 000, 111, 101010, 101010, etc.). Ce mot est même sans chevauchement, ce qui veut dire que jamais on n'y voit la structure amama avec a un symbole 0 ou 1, m un mot composé de 0 et de 1 (être « sans chevauchement » implique être « sans cube »).

Les apparitions de la suite de Thue

La suite de Thue-Morse apparaît dans des situations mathématiques variées sans rapports apparents. Voici un exemple d'une telle rencontre dans le domaine des partitions d'entiers.

Si on recherche un ensemble E d'entiers ayant la propriété « si n est dans E alors $2n$ n'y est pas », et qu'on mette le plus possible d'entiers dans E, on trouve que E est composé des entiers : 0, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23 ... On place 0, on place 1 (qui interdit 2), on place 3 (qui interdit 6), on place 4 (qui interdit 8), etc. Le complémentaire de E s'obtient en doublant les éléments de E (sauf 0) : 2, 6, 10, 14, 18, 22, 24, 26, 30, 34, 38, ...

Étrangement, comme l'ont découvert et démontré les mathématiciens J.-P. Allouche, A. Arnold, J. Berstel, S. Brlek, W. Jockush, S. Plouffe et B. Sagan, l'ensemble E des entiers ainsi retenus cache la suite de Thue-Morse. Considérons en effet les écarts entre les éléments successifs de E en notant cet écart alternativement : 0 pour un écart de une unité et 00 pour un écart de deux unités, 1 pour un écart de une unité et 11 pour un écart de deux unités, la suite obtenue est alors exactement celle de Thue-Morse :

Sans ou peu de carrés ?

Revenons à notre question initiale. Puisque deux symboles ne suffisent pas pour obtenir des mots très longs sans carré, essayons avec trois. Existe-t-il des mots infinis construits avec les trois symboles 0, 1 et 2 et ne comportant aucun carré ?

Assez étrangement, la réponse – positive – est à nouveau donnée par la suite de Thue-Morse. En effet, si on considère la suite des nombres 0, 1 ou 2 indiquant combien il y a de « 1 » entre deux « 0 » de la suite de Thue-Morse, on obtient une suite infinie sans carré :

0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 ...
2 1 0 2 0 1 2 1 0 1 2 0 2 1 0 ...

Cette suite ternaire est obtenue par un remplacement analogue à celui utilisé pour la suite binaire de Thue-Morse. On part de 2, puis on effectue itérativement les remplacements $s(2) = 210$, $s(1) = 20$ et $s(0) = 1$, soit : 2, ↦ 210, ↦ 210201, ↦ 210201210120, ↦ 210201210120210201202101...

0 1 3 4 5 7 9 11 12 13 15 17 19 20 21 23 ...
0 11 0 1 00 11 00 1 0 11 00 11 0 1 00...
= 01101001100101100110100...

On rencontre la suite de Thue-Morse dans de nombreux domaines mathématiques : des figures géométriques décoratives et fractales, des systèmes dynamiques réels, en passant par la géométrie différentielle, les produits infinis, les séries formelles algébriques, l'arithmétique et la théorie des groupes (voir dans la bibliographie l'article de J.-P. Allouche et J. Shallit, *The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence*).

La suite de Thue-Morse n'est pas répétitive puisqu'elle ne comporte aucun cube. En même temps, elle est très répétitive, car elle possède la propriété suivante :

– si un mot, par exemple 011, apparaît une fois dans la suite de Thue-Morse alors il apparaît une infinité de fois et les endroits où on le trouve ne sont pas de plus en plus éloignés : la séquence 011 apparaît par exemple au moins une fois dans toute séquence de 14 lettres consécutives de la suite.

Ce curieux compromis en ordre et désordre a attiré l'attention de plusieurs musiciens qui ont utilisé la suite de Thue-Morse comme élément structurel pour concevoir des morceaux de musique. Vous pourrez écouter un morceau de musique construit sur la suite de Thue-Morse en : http://www.geocities.com/SiliconValley/Haven/4386/algorith.html. Ci-dessous une composition de Tom Johnson.



Voir aussi :

- Jean-Paul Allouche et Tom Johnson, *Finite Automata and morphisms in assisted music composition*, in *Journal of New Music Research*, vol. 24, pp. 97-108, 1995.
- Roland Assous, *Deux ou trois remarques sur l'utilisation des mots de Thue-Morse en informatique musicale*, in *Musique et mathématiques*, Grame, Lyon, 1997.
- http://kalvos.org/johness1.html
- http://reglos.de/musinum/

Le compromis subtil entre ordre et désordre que constitue le mot de Thue-Morse peut-être utilisé pour obtenir des dessins géométriques décoratifs *(voir la figure 3)*.

Un mot sans aucun cube et presque sans carré

Pour construire un mot sans cube et sans carré de longueur supérieure à 3, Narad Rampersad, Jeffrey Shallit et Ming-Wei Wang procèdent en deux étapes :

(a) Ils construisent d'abord un mot à quatre symboles qui ne contient aucun des sous-mots 12, 13, 32, 231 et 10302 en appliquant itérativement à partir de 0 la transformation de remplacement $t(0) = 0310201023$, $t(1) = 0310230102$, $t(2) = 0201031023$, $t(3) = 0203010201$, ce qui leur donne un mot infini.

0→0310201023→030201023020301020103102301020310201023020103102303102010230310230102031020102302010310230203010201...

(b) Dans un second temps, partant du mot infini précédent, ils remplacent 0 par 010011, 1 par 010110, 2 par 011001 et 3 par 011010, ce qui donne :

0100110110100101100100110110010100110101100100110110010110100001101011001001101101001001101011001001101101001100110110010100110101100.

Le mot obtenu ne contient aucun cube et ne contient aucun carré *mm* pour un mot *m* de longueur supérieure à 3. C'est donc un mot sans cube et presque sans carré.



La démonstration que ces mots finis et le mot infini ternaire qui en résulte sont sans carré consiste à établir que si on applique les remplacements donnés par s à une suite sans carré, nécessairement la suite déduite n'a pas de carré non plus. Bien que les contraintes semblent fortes, il existe une infinité non dénombrable (comportant autant d'éléments qu'il y a de points sur une droite) de mots de 2 lettres sans cube et de mots de 3 lettres sans carré. Pour en savoir plus, on a étudié le nombre $c(n)$ de mots ternaires sans cube de longueur n.

Une longue série de théorèmes de plus en plus précis – et difficiles à démontrer – a conduit au résultat que le nombre $c(n)$ est asymptotiquement supérieur à $110^{n/42}$, soit $1{,}118419132^n$. D'autres travaux se poursuivent comme ceux de Christoph Richard et

Uwe Grimm qui ont prouvé qu'il existait des mots infinis ternaires sans carré dont la fréquence limite de chacune des trois lettres est exactement 1/3, et que d'autres fréquences limites (inégales entre les lettres) sont possibles. Une autre direction de recherche a récemment donné des résultats qui ont complété les découvertes d'Axel Thue. L'idée de ces travaux est naturelle : si on ne peut pas éviter tout carré dans un mot binaire, ne peut-on pas en éviter le plus possible et par exemple n'accepter que les carrés 00 et les carrés 11 ou que les carrés des mots de une ou deux lettres ?

Qu'un mot binaire infini n'ait que les carrés 00 et 11 est impossible. Pire encore, n'avoir que les carrés 00, 11 et 1111 est aussi impossible : le plus long mot n'ayant comme carré que 00, 11 et 1111 comporte 24 lettres :

101100111000111100111011

Au-delà de 24 lettres, une recherche exhaustive par ordinateur montre que tout mot binaire comporte les carrés 00, 11 et un autre carré qui ne sera ni 0000 ni 1111. Le mieux que l'on puisse espérer d'un mot infini binaire est qu'il n'ait que les carrés 00, 11 et 0101 (ou 00, 11 et 1010, mais cela revient au même en échangeant les rôles de 0 et de 1). Un tel mot binaire infini avec pour seuls carrés 00, 11 et 0101 existe-t-il ?

Oui, et voici la description de celui proposé en 2006 par T. Harju et D. Nowotka dans le *Bulletin de la Société Européenne d'Informatique Théorique*. À partir d'un mot à trois lettres *A*, *B*, *C* sans carré (nous savons les obtenir) on remplace : chaque *A* par 11100011001011000111 0010 ; chaque *B* par 11100010110001110010110 0010 ; chaque *C* par 11100011001011000101110010110 0. Chacun des trois mots binaires considérés n'a que les carrés 00, 11 et 0101. De plus, on a démontré que leur substitution à *A*, *B* et *C* dans un mot sans carré n'introduit aucun nouveau carré.

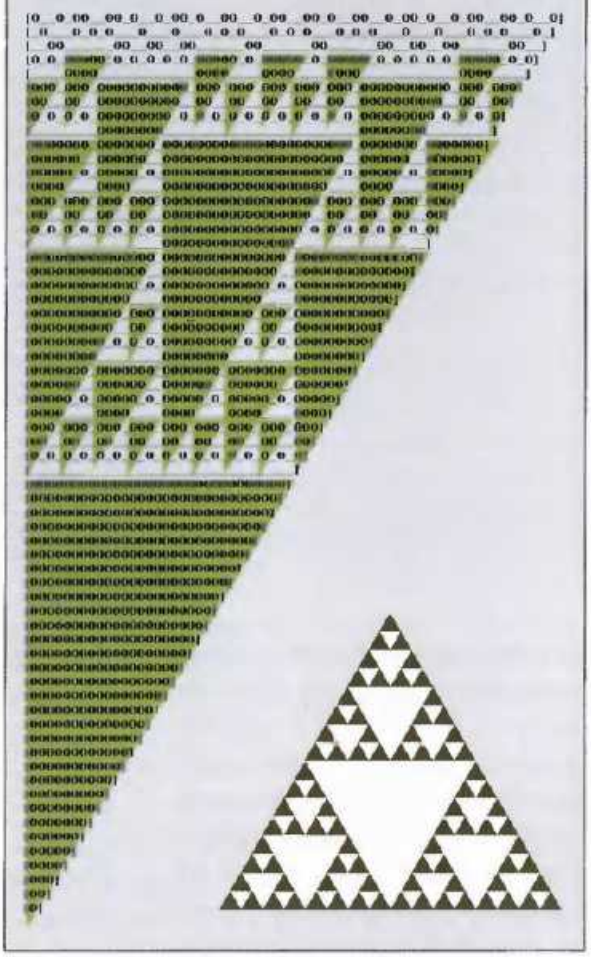
Toujours dans le cadre de la recherche d'améliorations des résultats de Thue, un théorème remarquable montre que l'on peut dans un mot binaire infini éviter à la fois tous les cubes (ce n'est pas le cas de l'exemple précédent qui comporte les cubes 000 et 111) et presque tous les carrés.

N. Rampersad, J. Shallit et Ming-Wei Wang, de l'Université de Waterloo au Canada, ont proposé tout récemment un mot binaire infini qui ne contient aucun cube et qui ne comporte aucun carré *mm* pour un mot *m* de longueur supérieure à 3. Les seuls carrés présents dans ce mot sont ceux des mots 0, 1, 01, 10, 001, 010, 011, 100, 101, 110.

Une question a été posée il y a 30 ans : en mélangeant parfaitement (le nouveau mot est

5. Les différences et Serpinski

Les différences successives des éléments de la suite de Thue-Morse (où les 1 sont remplacés par des tirets-) donnent une structure de triangles en vert « à la Serpinski », un objet fractal dont la structure est obtenue par l'opération consistant à évider un triangle de manière répétée.



6. Les suites sans inverse

Cinq résultats ont été démontrés récemment par N. Rampersad et J. Shallit sur les suites de symboles ne contenant jamais – ou presque jamais – l'inverse de leurs sous-mots (l'inverse de *abcd* est *dcba*).

(a) Le mot 012012012... est le seul mot infini ternaire (au nom des symboles près) qui ne contient l'inverse d'aucun de ses sous-mots de longueur 2 ou plus.

Ce mot infini est périodique. Et si nous voulions un mot non périodique?

(b) Il existe un mot ternaire infini *R* non périodique, qui ne contient l'inverse d'aucun de ses sous-mots de longueur 3 ou plus. Autrement dit, si *R* contient en même temps un mot et son inverse, celui-ci a pour longueur 1 ou 2. On obtient *R* en partant d'un mot binaire non périodique – par exemple 01001000100001000001... – et en remplaçant chaque 0 par 0012 et chaque 1 par 0112, ce qui donne: 001201120012001201120012001200120112001200120012001201120...

(c) Il n'existe pas de mot binaire infini qui ne contienne pas l'inverse d'un de ses sous-mots de longueur 4 ou plus.

Même si l'on autorise les inverses des sous-mots de longueur 1, 2 ou 3, aucun binaire infini ne convient. Il faut être plus tolérant et accepter que certains mots de longueur 4 soient présents avec leur inverse.

(d) Il existe des mots binaires infinis tels que les seuls inverses de leurs sous-mots ont pour longueur 1, 2, 3, ou 4. De tels sous-mots sont tous périodiques à partir d'un certain point.

Si en plus d'éviter (autant que possible) les inverses, on exige que le mot cherché ne soit pas périodique à partir d'un certain point, alors il faut tolérer des inverses de longueur 1, 2, 3, 4, 5.

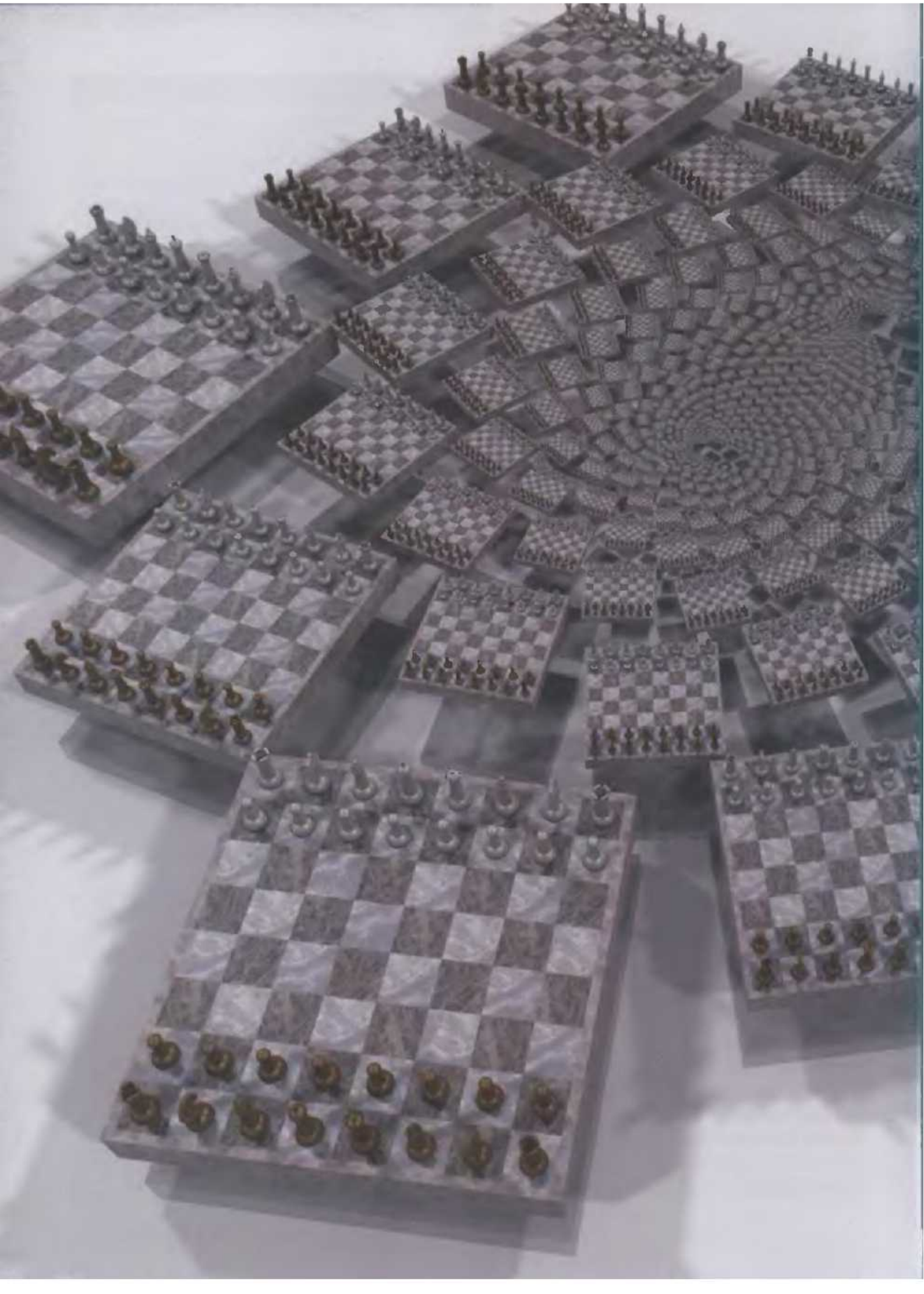
(e) Il existe un mot binaire infini *J* qui n'est pas périodique à partir d'un certain point et qui ne contient jamais l'inverse d'un de ses sous-mots de longueur 6 ou plus. Autrement dit *J* ne contient que des inverses de mots de longueur 1, 2, 3, 4 ou 5. On construit un tel mot en partant d'un mot non périodique et en remplaçant 0 par 0001011 et 1 par 0010111.

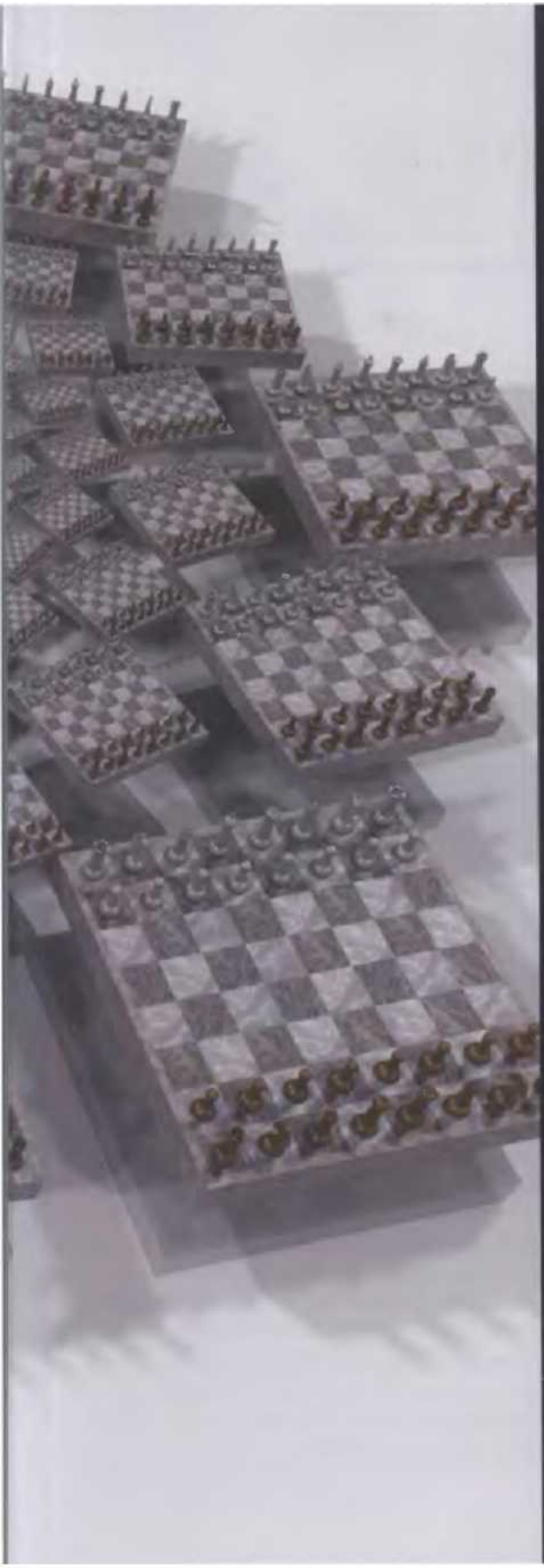
obtenu en prenant ses lettres alternativement dans les deux mots constituants) deux mots n'ayant que des petits carrés, peut-on obtenir un mot ayant des carrés de grandes tailles? N. Rampersad, J. Shallit et Ming-Wei Wang ont résolu l'énigme: il existe deux mots binaires infinis M et N n'ayant aucun carré mm avec m de longueur supérieure à 3, et tels pourtant qu'en insérant M dans N on obtient un nouveau mot infini P qui possède des carrés aussi grands qu'on veut. La propriété «ne pas posséder de carré» ne se conserve pas dans le mélange.

Mots sans inversion

Indiquons enfin la résolution récente d'une autre jolie question concernant l'existence de suites infinies qui ne contiennent jamais en même temps un mot m et son inverse m' (sauf éventuellement pour les mots très petits). Les résultats obtenus par N. Rampersad et J. Shallit indiquent: (1) qu'il existe un mot ternaire infini unique (à une permutation près des trois lettres) qui pour tout mot m de longueur 2 ou plus ne contient pas m ou ne contient pas son inverse m' (essayez de deviner ce mot, c'est facile) ; (2) qu'il existe un mot ternaire infini non périodique, qui pour tout mot m de longueur 3 ou plus ne contient pas m ou ne contient pas son inverse *(voir la figure 6 pour d'autres résultats)*.

Le monde mathématique est riche et varié, et à propos de problèmes parfois très simples – qu'on avait oublié de se poser –, les chercheurs y découvrent de nouveaux objets – finis ou infinis – aux propriétés subtiles et déconcertantes. Certains de ces objets, comme la suite binaire de Thue-Morse, interviennent à propos de problèmes en apparence sans lien... ce qui épaissit le mystère qui les entoure. Le comble de l'étrange est atteint quand on s'aperçoit – ce qui vient de se produire pour la suite de Thue-Morse – que de manière indirecte des artistes en avaient fait usage dans les figures géométriques qu'ils dessinaient sur le sable bien des siècles avant que les mathématiciens la redécouvrent et en démontrent les propriétés.





CHAPITRE 5

Casse-tête

Les casse-tête suggérés par le jeu d'échecs, de simples défis avec des chapeaux colorés, des énigmes posées à propos de la traversée des ponts, où même la compréhension précise de certains tours de cartes nous entraînent bien loin dans le monde mathématique, au point de nous faire toucher des questions qui appartiennent encore au domaine de la recherche. Mais justement, quel plaisir que d'entrer là, par cette porte du jeu et du divertissement.

Vortex, image de Francesco de Comité (2009). Il s'agit d'échiquiers disposés en spirales de Doyle.

L'emprise des cavaliers

La marche des cavaliers du jeu d'échecs suggère des problèmes que seule l'expérimentation informatique permet de traiter.

Certains mathématiciens sont bons joueurs d'échecs et éprouvent un profond plaisir à jouer à ce jeu qu'ils jugent passionnant et considèrent comme une utile gymnastique de l'esprit. D'autres pensent que les règles sont trop particulières, ce qui est vrai, car un infime changement de l'une d'entre elles modifierait totalement le jeu et rendrait caducs les milliers de traités d'échecs publiés. Ces mathématiciens jugent qu'il est dans la nature des mathématiques de s'intéresser aux problèmes généraux, seuls dignes de retenir leur attention.

Combien de cavaliers?

Il n'est aucun compromis entre ces deux perceptions du jeu, mais certains problèmes inspirés des pièces et des échiquiers sont si simples à formuler et si difficiles à résoudre qu'ils constituent des défis qui ne peuvent laisser indifférents ni les amateurs d'énigmes combinatoires… ni les théoriciens. Nous allons traiter ici un de ces problèmes, le recouvrement de l'échiquier par des cavaliers : étant donné un échiquier carré de n cases de côté, quel est le nombre minimum de cavaliers dont il faut disposer pour couvrir chacune des n^2 cases, c'est-à-dire pour que chacune se trouve occupée par un cavalier ou sous la prise d'un cavalier. Aux échecs, un cavalier avance de 2 cases dans une des 4 directions « vers le haut », « vers le bas », « vers la droite », « vers la gauche » et ensuite d'une case dans une direction perpendiculaire : en un coup, un cavalier attaque 8 cases différentes dans les meilleurs cas.

Pour $n = 2$, le recouvrement nécessite 4 cavaliers, et 4 sont suffisants aussi pour $n = 3$ et $n = 4$. Pour $n = 5$, il suffit de 5 cavaliers et il est impossible d'en employer moins. Pour $n = 6$, il en faut 8 et pour $n = 7$, il en faut 10. Pour trouver les configurations recouvrantes, un crayon et un papier – ou mieux du sable et des cailloux – sont le seul matériel nécessaire.

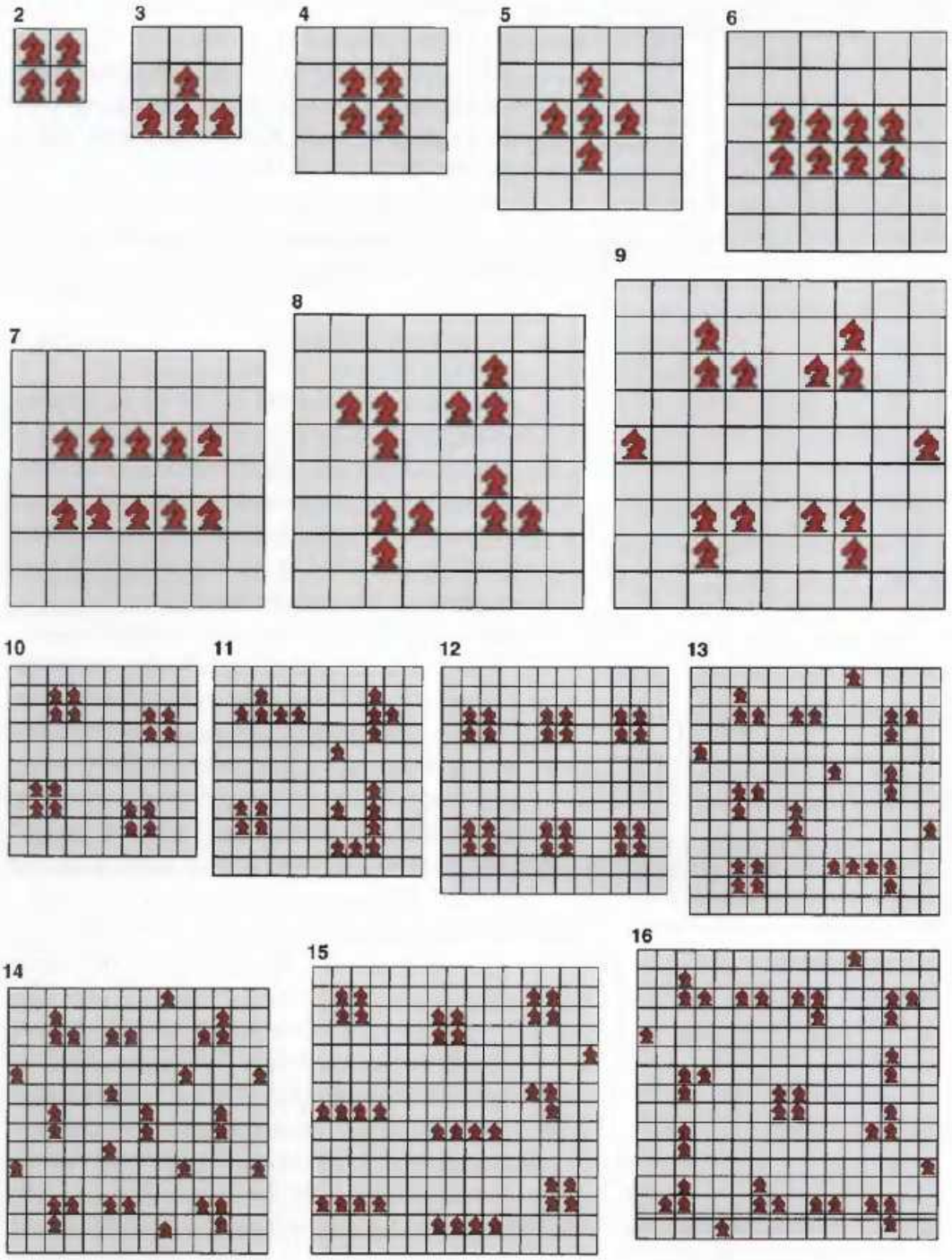
Certains résultats viennent immédiatement à l'esprit :

(a) Puisqu'un cavalier couvre 9 cases au mieux (celle sur laquelle il est posé et 8 autres), on ne pourra jamais recouvrir l'échiquier de taille n avec moins de $n^2/9$ cavaliers.

(b) Si n est plus grand que 3, en plaçant des cavaliers sur toutes les cases noires de l'échiquier, on recouvre tout, donc on n'aura jamais besoin de plus de $n^2/2$ cavaliers (en fait, si n est impair et en s'y prenant bien, les cases noires sont au nombre de $n^2/2 - 1$).

Le nombre minimum de cavaliers pour contrôler un échiquier de côté n supérieur à 3 est compris entre $n^2/9$ et $n^2/2$.

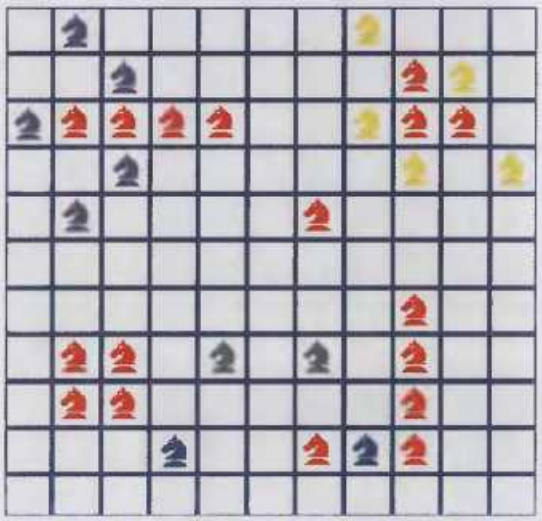
L'étude de ce problème a intéressé les amateurs de divertissements mathématiques depuis le XIX[e] siècle, mais c'est surtout depuis 1967 que l'on y a travaillé ; à cette date, Martin Gardner aborda la question dans *Scientific American* (traduit par *Belin/Pour la Science* dans le livre *Math'Festival* en 1981). Cela suscita la mise au point de programmes informatiques qui produisirent des résultats nouveaux. Les amateurs ont amélioré les records cités dans l'article de M. Gardner et les succès sont remarquables, même si les avancées sont lentes.



Configurations couvrantes pour les échiquiers de côtés 2 à 16. Elles sont optimales pour les échiquiers de côtés 2 à 15. Certaines solutions équivalentes existent : pour le côté 6, il y a 22 façons différentes de couvrir l'échiquier avec 8 cavaliers. Amusez-vous à les trouver ! Les configurations couvrantes optimales pour les échiquiers de côtés 10 à 16 sont difficiles à découvrir. Pour *n* égal à 10, il y en a 2 dont une seule est représentée ici : trouverez-vous l'autre ? Pour *n* égal à 13, on ne sait pas combien de recouvrements à 28 cavaliers existent. Pour les échiquiers de côté plus grand que 15, on n'est pas certain que les recouvrements connus sont optimaux (ne peuvent être obtenus avec un nombre plus petit de cavaliers). D'autres configurations sont présentées sur le site de F. Rubin. (http://www.contestcen.com/knight.htm)

2. Solution modulaire pour $n = 11$

Cette figure due à Bernard Lemaire représente les 100 solutions permettant de couvrir l'échiquier de côté 11 avec 21 cavaliers. Chaque solution est obtenue en prenant les 17 cavaliers rouges, 1 seul des 5 cavaliers violets, 1 seul des 5 cavaliers jaunes, 1 seul des 2 cavaliers bleus et 1 seul des 2 cavaliers verts. Puisqu'il y a 5 possibilités pour le cavalier violet, 5 pour le jaune, 2 pour le bleu et 2 pour le vert, cela donne $5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100$ solutions différentes dont De Baker et Furnon ont démontré en 1997 qu'elles étaient les seules.



Quatre types de recherches sur les recouvrements par cavaliers sont menés.

(P1) Les énumérations avec décompte complet des solutions. Aujourd'hui on a réussi à traiter les cas $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$. On sait ainsi qu'il y a 22 solutions pour $n = 6$, chacune utilisant 8 cavaliers, mais une seule solution pour $n = 2$.

(P2) Les mises au point de recouvrements optimaux, c'est-à-dire accompagnés de preuves qu'on ne peut diminuer le nombre de cavaliers utilisés. Le cas des échiquiers dont le côté est compris entre 1 et 15 sont résolus.

(P3) Les recouvrements record : on propose une configuration de cavaliers couvrant l'échiquier de côté n, meilleure que toutes celles connues auparavant pour n, mais sans proposer de preuve qu'on ne peut réussir le recouvrement en utilisant moins de cavaliers. Ces records évoluent de mois en mois et tout passionné de programmation peut prétendre participer à cette quête illimitée.

(P4) Les recouvrements infinis. On propose des dispositions générales pour un échiquier infini (comme celle évoquée sur les cases noires qui permet de dire que $n^2/2$ cavaliers suffisent si n est supérieur à 3). De tels recouvrements, avec ajout de cavaliers sur les bords, s'adaptent à tous les échiquiers finis et fournissent alors des solutions pour tout n aussi grand soit-il (sans bien sûr garantir l'optimalité).

La difficulté des problèmes P1 et P2 provient de la croissance exponentielle des cas à envisager quand on procède systématiquement sans chercher à réduire le problème. Pour un échiquier de taille n, le nombre de façons de placer des cavaliers est égal à 2^{n^2}. En effet, on peut placer un cavalier ou non sur la première case, de même pour la seconde et toutes les autres, ce qui donne $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ possibilités avec un nombre de facteurs 2 égal au nombre de cases, c'est-à-dire n^2. Pour n égal à 9, on atteint déjà $2^{81} = 2{,}4 \times 10^{24}$ configurations possibles. Aujourd'hui la taille des calculs les plus importants jamais menés (par exemple pour résoudre des défis cryptographiques) est d'environ 10^{23} opérations élémentaires et ces calculs mobilisent des centaines d'ordinateurs pendant des mois. Cela signifie que $n = 9$ est tout juste envisageable et que $n = 10$ ne le sera pas avant un moment si l'on s'y prend naïvement. Aller plus loin exige une réflexion approfondie pour réduire l'espace des configurations à explorer.

Qualité des recouvrements

Évaluer la qualité d'une configuration de cavaliers peut se faire en indiquant le nombre de cavaliers utilisés N, mais aussi – et c'est plus parlant – en calculant le *pouvoir couvrant* n^2/N que nous noterons p et qui est le nombre moyen de cases couvertes par un cavalier de la configuration.

La meilleure solution pour n égal à 2 a un pouvoir couvrant de $p = 1$ (on ne peut pas faire pire !). Pour $n = 3$, le pouvoir des meilleurs recouvrements est $p = 9/4 = 2{,}25$. Pour $n = 10$, la solution record (et prouvée imbattable) a un pouvoir couvrant de $p = 6{,}25$. Le pouvoir couvrant maximum qu'on peut espérer est bien sûr $p = 9$, mais il n'est jamais atteint. Un résultat publié en l'an 2000 par David Fisher (étrangement, ce nom est homonyme du champion hors norme du jeu d'échecs) établit que le pouvoir couvrant ne dépassera jamais 8,8. Pourtant aucune configuration connue aujourd'hui et quel que soit l'échiquier envisagé n'atteint $p = 8$.

La preuve qu'aucune amélioration ne peut être obtenue a été faite à la main pour toutes les valeurs de 1 à 10. La figure 4 donne ces preuves d'optimalité qui sont d'excellents exercices d'initiation au raisonnement.

Pour les nombres n entre 11 et 15, une démonstration d'optimalité par ordinateur a été réalisée par Bruno De Baker et Vincent Furnon de la Société *ILOG* en 1997. Cela signifie qu'ils ont écrit un programme énumérant les cas envisageables et qu'aucun n'a permis de faire mieux que les solutions record connues. De telles démonstrations par ordinateur sont susceptibles de contenir des erreurs, car les programmes utilisés ne sont pas des programmes élémentaires procédant par énumérations exhaustives (de tels programmes, nous l'avons vu, ne dépassent pas un échiquier à 9 cases de côté). Les programmes utilisés exploitent donc des idées pour écourter l'exploration et ces idées, si elles sont bonnes, ne doivent faire perdre aucune solution. Cependant la justesse des principes utilisés pour raccourcir l'exploration, la certitude que les idées sont correctement traduites dans les programmes, l'affirmation que l'exécution des programmes se déroule normalement (pas d'erreurs engendrées par le système d'exploitation, ni provenant du microprocesseur) sont impossibles à établir dans l'absolu et donc personne ne peut avoir une confiance totale dans ces démonstrations informatiques invérifiables à la main. Seule la mise au point d'autres programmes indépendants et conduisant aux mêmes résultats fournira l'assurance définitive que les solutions connues entre 11 et 15 sont optimales.

La solution pour $n = 11$ (trouvée en 1973 par Bernard Lemaire du CNAM de Paris) est intéressante, car elle possède plusieurs degrés de liberté qui font qu'on en déduit un total de 100 solutions différentes qui sont d'ailleurs les seules possibles. Ce cas est étonnant dans un autre sens. Pourquoi pour $n = 11$ y a-t-il tant de solutions alors que, pour $n = 10$, il n'y en a que 2 et que pour $n = 12$, une seule ? Aucune théorie aujourd'hui n'est en mesure d'expliquer ces variations brusques du nombre de configurations optimales. La solution unique pour n = 12 est particulièrement simple, elle utilise 6 carrés de cavaliers régulièrement disposés. Pour n = 13, plusieurs solutions à 28 cavaliers sont connues et on sait qu'on ne peut pas

3. Le livre des records

Taille échiquier	Nb de cavaliers	Pouvoir couvrant	Nb de solutions	Preuve d'optimalité
2	4	1	1	à la main
3	4	2,25	2	à la main
4	4	4	3	à la main
5	5	5	8	à la main
6	8	4,5	22	à la main
7	10	4,9	3	à la main
8	12	5,33	1	à la main
9	14	5,75	1	à la main
10	16	6,25	2	à la main
11	21	5,761	100	ordinateur
12	24	6	1	ordinateur
13	28	6,035	?	ordinateur
14	32	6,125	?	ordinateur
15	36	6,25	?	ordinateur
16	40	6,4	?	aucune
17	46	6,282	?	aucune
18	52	6,231	?	aucune
19	57	6,333	?	aucune
20	62	6,45	?	aucune
21	68	6,485	?	aucune
22	75	6,453	?	aucune
23	82	6,451	?	aucune
24	88	6,545	?	aucune
25	96	6,51	?	aucune
26	102	6,627	?	aucune

4. Preuves d'optimalité pour $n = 3, 4$, etc.

Montrer qu'on ne peut diminuer le nombre de cavaliers utilisés est un intéressant et amusant exercice de raisonnement. Nous allons d'abord établir le résultat suivant qui sera utile.

1



Principe du carré de côté 3 : pour couvrir un carré de côté 3, quel que soit l'endroit où il est placé dans un échiquier plus grand, il faut au moins 4 cavaliers. Remarquons d'abord deux faits :

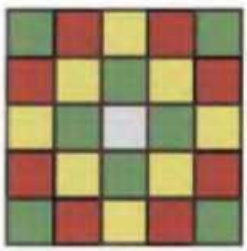
(a) un cavalier ne peut jamais couvrir à lui seul plus de 3 cases d'un carré de côté 3 ; *(b)* si un cavalier couvre 3 cases d'un carré de côté 3, alors il ne couvre pas la case centrale de ce carré.

Les affirmations *(a)* et *(b)* résultent de l'observation de toutes les façons de placer un carré de côté 3 sur le schéma (I) des 9 cases couvertes par un cavalier.

À partir de *(a)* et *(b)*, on raisonne par l'absurde : si 3 cavaliers permettaient de couvrir les 9 cases d'un carré de côté 3, alors d'après *(a)* chacun couvrirait exactement trois cases de ce carré, mais, d'après *(b)*, ces trois cavaliers ne couvriraient pas la case centrale. On ne peut donc pas couvrir un carré de côté 3 avec 3 cavaliers. Quatre sont nécessaires, le principe du carré de côté 3 est démontré.

Démonstration que 4 cavaliers sont nécessaires pour $n = 3$ et 4 :
du principe du carré de côté 3, il résulte que pour $n = 4$, 4 cavaliers sont nécessaires, or comme 4 sont suffisants, 4 est la valeur optimale pour $n = 4$.

2



Démonstration que 5 cavaliers sont nécessaires pour $n = 5$:
c'est la plus délicate des démonstrations. Supposons qu'on dispose d'une configuration à 4 cavaliers couvrant l'échiquier de côté 5 *(voir la figure 2)*.

Point 1 : la case centrale porte un cavalier. Cela résulte de la remarque suivante : si on s'interdit le centre, alors les 8 cases rouges de la figure 2 ne peuvent être couvertes qu'en occupant des cases de couleur jaune à raison de 2 par cavalier au mieux. Les 4 cavaliers doivent donc occuper des cases jaunes, mais cela laisse la case centrale non couverte. Un cavalier occupe donc le centre.

Point 2 : 2 cavaliers ne peuvent pas à eux seuls couvrir toutes les cases jaunes. Évident en faisant quelques essais.

Point 3 : aucun cavalier n'est dans un coin. Si un cavalier était dans un coin, alors ce cavalier et celui de la case centrale ne couvriraient aucune case jaune, laissant donc aux 2 derniers cavaliers la charge de couvrir toutes les cases jaunes, ce qui est impossible d'après le point 2.

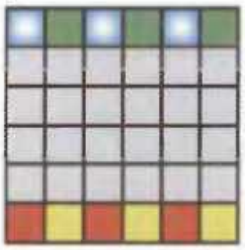
Point 4 : pour couvrir les cases vertes, 2 cavaliers ne suffisent pas. En effet, un cavalier, où qu'on le place, ne couvre jamais plus de 3 cases vertes et donc 2 cavaliers ne peuvent couvrir les 8 cases vertes.

Point 5 : 2 cavaliers au moins occupent des cases vertes centrales. En effet, les cases vertes sont les seules cases qui couvrent 3 cases vertes et il y a 8 cases vertes à couvrir avec 3 cavaliers. Comme les coins sont interdits (point 3) 2 cavaliers au moins occupent des cases vertes centrales.

Point 6 : 4 cavaliers ne suffisent pas. En effet, le cavalier sur la case centrale et les 2 cavaliers sur les cases vertes centrales (inévitables d'après les points 1 et 5) laissent des cases non couvertes qui ne peuvent l'être par le seul cavalier restant (2 essais à faire).

Démonstration que 8 cavaliers sont nécessaires pour $n = 6$:

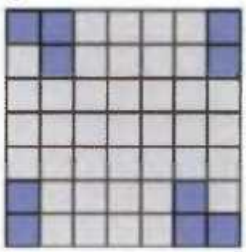
3



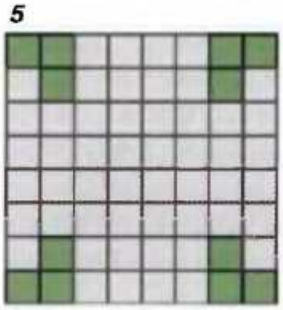
pour couvrir les 3 cases bleues, 2 cavaliers sont nécessaires au moins et ces cavaliers ne couvriront aucune case verte. Deux autres cavaliers sont donc nécessaires pour couvrir les cases vertes *(voir la figure 3)*. Ces 4 premiers cavaliers ne couvrent aucune case rouge ou jaune (car placés trop haut). Quatre autres cavaliers sont nécessaires pour couvrir les cases rouges ou jaunes. Au total, 8 cavaliers sont donc nécessaires pour couvrir l'échiquier de côté 6.

Démonstration que 10 cavaliers sont nécessaires pour $n = 7$:
aucun cavalier ne peut couvrir plus d'une case bleue, aussi dix cavaliers sont nécessaires pour couvrir l'échiquier de côté 7 *(voir la figure 4)*.

4



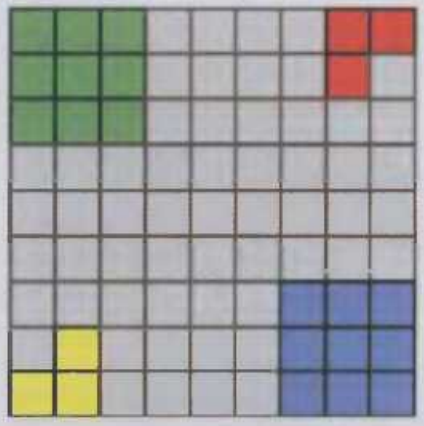
5



Démonstration que 12 cavaliers sont nécessaires pour $n = 8$:
aucun cavalier ne peut couvrir plus d'une case verte. Douze cavaliers sont donc nécessaires pour couvrir l'échiquier de côté 8 *(voir la figure 5)*.

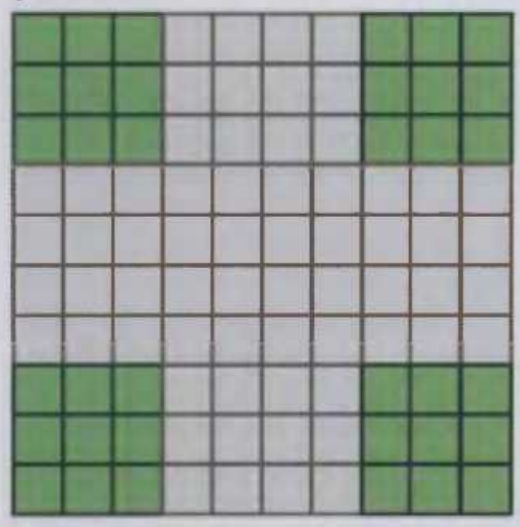
Démonstration que 14 cavaliers sont nécessaires pour $n = 9$:
le carré des 9 cases vertes demande au moins 4 cavaliers (d'après le Principe du carré de côté 3), de même le carré de 9 cases bleues. Les cases jaunes demandent au moins 3 cavaliers, de même que les cases rouges. Les cavaliers qui servent à couvrir l'un de ces groupes sont trop éloignés des autres pour y être utiles, donc au moins 14 cavaliers sont nécessaires pour couvrir l'échiquier de côté 9 *(voir la figure 6)*.

6



Démonstration que 16 cavaliers sont nécessaires pour $n = 10$:
chaque carré vert demande 4 cavaliers au moins. Les carrés sont trop éloignés les uns des autres pour qu'un cavalier soit utile en même temps à couvrir plusieurs carrés, donc 16 cavaliers au moins sont nécessaires pour couvrir le carré de côté 10 *(voir la figure 7)*.

7



utiliser moins de 28 cavaliers. Cependant le nombre exact de solutions à 28 cavaliers pour $n = 13$ reste inconnu. C'est sans doute un problème à la portée d'un programmeur décidé. Un lecteur relèvera-t-il le défi?

Pour $n = 14$, une seule solution – symétrique – est connue et est conjecturée unique. Là encore, il semble que la preuve d'unicité devrait tomber prochainement.

Pour $n = 15$, pendant longtemps on ne connaissait que des solutions utilisant 37 cavaliers. Aujourd'hui trois solutions sont connues utilisant 36 cavaliers. La première fut découverte en 1991 par Jackson et Pargas, la seconde par De Baker et Furnon en 1997 et la troisième, qui est symétrique, tout récemment par Bernard Lemaire. Ces solutions sont très différentes et font soupçonner qu'il existerait un assez grand nombre de solutions à 36 cavaliers. Des progrès concernant le cas $n = 15$ sont attendus.

Pour des valeurs au-delà de 15, les meilleures solutions connues ne sont peut-être pas optimales et d'ailleurs de nouvelles solutions record sont régulièrement proposées. Par exemple, pour $n = 20$, l'article paru en 2003 de Bernard Lemaire ne mentionne qu'une solution évidente utilisant 64 cavaliers (obtenue en collant côte à côte quatre fois une solution à 16 cavaliers pour $n = 10$). Une solution avec 62 cavaliers vient d'être publiée sur Internet par Frank Rubin. Là encore de nombreux progrès sont à portée d'ordinateurs.

Le pouvoir recouvrant des configurations connues aujourd'hui est toujours assez faible comparé au maximum théorique qui est de 8,8: toutes les valeurs mentionnées dans notre tableau *(voir la figure 3)* sont inférieures à 7. Cela semble étonnant, car l'étude des configurations infinies montre en raisonnant asymptotiquement que le pouvoir couvrant peut approcher 8 d'aussi près qu'on le souhaite.

Configurations infinies

Les trois configurations générales (c'est-à-dire couvrant un échiquier infini) les plus intéressantes sont la configuration des «carrés en quinconce», celle de «la ruche d'abeilles», et «la configura-

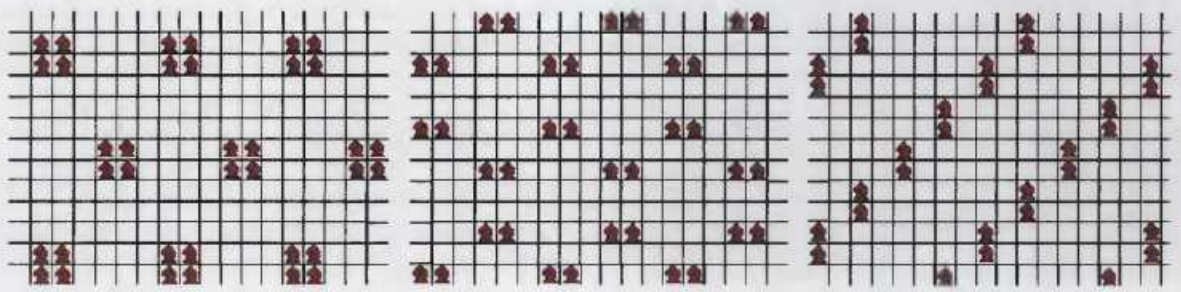
tion de Jean-Michel Mounier» (un amateur marseillais) qui ont respectivement des pouvoirs couvrant de $p = 7{,}5$; $p = 7{,}5$; $p = 8$ *(voir la figure 5)*.
La configuration de Mounier montre que, quand n augmente, le pouvoir couvrant des configurations optimales des échiquiers finis approche $p = 8$ et peut-être le dépasse. L'idée du raisonnement est la suivante: si on a un très grand carré (disons de côté $n = 1\,000$) à recouvrir, on commence par placer dessus des cavaliers selon la configuration de Mounier (pour $n = 1\,000$, 125 000 cavaliers conviennent). Ces cavaliers recouvrent correctement le centre, mais sur les bords laissent quelques cases non couvertes. En plaçant systématiquement des cavaliers sur le bord ce qui en demande moins de 4000, on est certain de boucher les trous et on a donc une configuration solution au pouvoir couvrant $p = 1\,000\,000/129\,000 = 7{,}752$. Plus n est grand, plus on s'approche de $p = 8$, ce qui n'interdit pas que d'autres configurations puissent faire encore mieux et dépasser cette valeur.

Le résultat asymptotique est étrange, car lorsque n est petit, il n'est pas facile d'atteindre $p = 7$. Aujourd'hui le plus petit n pour lequel on a une configuration dépassant 7 est $n = 54$ (résultat de B. Lemaire). La configuration générale de Mounier est sans doute la configuration générale asymptotiquement la meilleure, mais cela n'a pas été prouvé et il suffirait qu'on découvre un recouvrement par des cavaliers pour un rectangle possédant un pouvoir couvrant supérieur à 8 pour que la configuration de Mounier perde sa première place: en pavant l'espace par ce rectangle, on en déduirait une configuration générale de pouvoir couvrant asymptotique supérieur à 8.

Bernard Lemaire pense qu'on ne peut pas battre la configuration de Mounier et conjecture même que pour tous les échiquiers de taille n supérieure à 130, en l'utilisant on obtiendra un recouvrement de pouvoir couvrant maximal pour la taille n. Si on réussit à prouver la conjecture de Lemaire et une fois résolu le cas des échiquiers de taille n inférieure à 130 (ce qui n'est qu'une question de temps), le problème (P2) sera définitivement traité.

5. Les trois meilleures configurations infinies

Voici les trois configurations infinies les plus intéressantes, les «carrés en quinconce», «la ruche d'abeilles», et «la configuration de Mounier». Leur pouvoir couvrant est $p = 7{,}5$ pour les deux premières et de $p = 8$ pour la dernière dont on pense qu'elle ne peut pas être améliorée.
Grâce à ces configurations infinies, on construit des configurations finies dont le pouvoir couvrant approche 8. Ainsi, pour $n = 1\,000$, on place 125 000 cavaliers selon la configuration de Mounier. La partie centrale est couverte, mais certaines cases proches des bords ne le sont pas. On ajoute soigneusement les cavaliers nécessaires. Il en faut précisément 1374 (pour tout n multiple de 8, il en faut $11n/8 - 1$). On a donc au total 126 374 cavaliers, ce qui correspond à un pouvoir couvrant de 7,913. Pour $n = 1\,000\,000$ avec la même méthode, on arrive à 125 001 374 999 cavaliers et un pouvoir couvrant de 7,999912. Aucune configuration pour un échiquier fini connue actuellement n'a un pouvoir couvrant égal ou supérieur à 8. Pourtant personne n'a montré que c'était impossible.



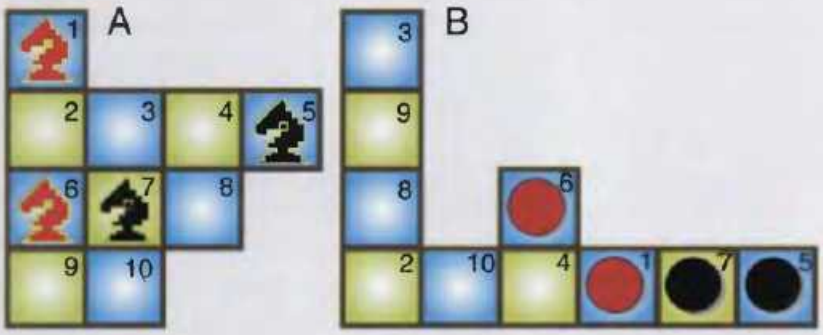
6. Le problème d'échange de cavaliers

Comment échanger les 2 cavaliers rouges et les 2 noirs sans sortir du petit échiquier biscornu A et en respectant les règles de déplacement d'un cavalier aux échecs?

Résoudre le problème tel quel est peut-être possible, mais une méthode donne rapidement la solution et permet de répondre à toutes les questions posées: on transforme le problème de cavaliers en un problème équivalent de pions, c'est-à-dire qu'on représente un échiquier où les cases liées par un saut de cavalier dans le problème initial sont maintenant disposées côte à côte. Une minute de réflexion vous conduit au schéma B. Le problème sur l'échiquier des pions est équivalent au problème initial, car à chaque mouvement d'un pion sur l'échiquier des pions correspond un mouvement sur l'échiquier des cavaliers et réciproquement. Les pions ici se déplacent d'une case à la fois et ne peuvent pas sauter les uns par-dessus les autres.

Tout ce que vous voyez sur l'échiquier des pions a sa traduction sur l'échiquier des cavaliers; comme on y perçoit clairement les possibilités et les contraintes, la solution est devenue facile. Le rôle central de la case 6 et les culs-de-sac des cases 5 et 3 imposent sans mystère les manœuvres à opérer. Quelques minutes de manipulation vous persuaderont que:

(a) 40 mouvements sont nécessaires au moins pour effectuer l'échange; *(b)* les cases 3 et 9 sont inutiles; *(c)* en plaçant les 2 cavaliers rouges en 3 et 9 et les deux cavaliers noirs en 7 et 5, l'échange ne peut pas s'opérer en moins de 44 mouvements.





Puisqu'on sait d'après le résultat de David Fisher mentionné au début qu'asymptotiquement 8,8 ne peut être dépassé, nos connaissances sur le pouvoir couvrant asymptotique sont qu'il est compris entre 8 et 8,8. Cela laisse une bonne marge pour des progrès théoriques.

Un problème pour la plage

Voici un casse-tête étonnant qui pourra vous occuper un moment sur la plage, car quelques cailloux et un dessin sur le sable suffisent pour y jouer. Vous recopiez l'échiquier non rectangulaire de la figure 6 et vous placez les deux cavaliers noirs et les deux cavaliers rouges comme c'est indiqué. Le problème est d'inverser les positions des cavaliers rouges et noirs en respectant les règles de déplacements du cavalier (et bien sûr sans sortir de l'échiquier). Vu la simplicité du problème vous pensez qu'un quart d'heure vous suffira pour maîtriser cette petite énigme. Peut-être pas...

Cependant si vous avez réussi voici quelques questions complémentaires pour vous occuper encore un moment.

(a) Quel est le nombre minimum de coups pour cet échange?

(b) Toutes les cases sont-elles utiles?

(c) Toujours avec le même échiquier, inventez un problème analogue d'échange de deux cavaliers rouges et deux cavaliers noirs dont la solution minimale soit plus longue.

Couleurs des chapeaux et codes correcteurs d'erreurs

Morale d'équipe : perdre tous ensemble ou laisser gagner le mieux placé ?

Un étrange jeu est proposé à trois personnes formant une équipe ; si l'équipe gagne, elle emportera un million d'euros. La règle du jeu est simple : des chapeaux rouges ou blancs sont disposés sur la tête des trois joueurs. L'organisateur du jeu a choisi la couleur de chaque chapeau à pile ou face. Il se peut que tous les joueurs portent un chapeau rouge, tous un chapeau blanc ou que deux chapeaux n'aient pas la même couleur (notons, qu'à chaque tirage, il y a toujours au moins deux chapeaux de la même couleur). Chaque joueur voit le chapeau des deux autres, mais pas le sien.

On interroge chaque joueur sur la couleur du chapeau qu'il a sur la tête et il répond, soit « Blanc », soit « Rouge », soit « Je passe ». Pour que l'équipe gagne, il faut que l'un au moins des joueurs donne une bonne réponse, mais si l'un des joueurs se trompe, l'équipe perd. Les joueurs d'une équipe peuvent convenir d'une stratégie de jeu avant le choix des couleurs des chapeaux, mais, quand celles-ci sont fixées, ils n'ont plus le droit de communiquer : aussi ne connaissent-ils pas le vote des autres membres de l'équipe.

Si chaque joueur répond au hasard « Rouge » ou « Blanc », la probabilité de gagner pour l'équipe sera 1/8. Une meilleure stratégie assure de gagner avec une probabilité de 1/2 : l'équipe convient que seul l'un d'entre eux – fixé une fois pour toutes – répondra « Rouge » et que les deux autres répondront « Je passe ». Une fois sur deux, celui qui répond a raison et donc avec cette stratégie l'équipe gagne dans la moitié des cas.

Il semble qu'on ne puisse faire mieux que 50 pour cent. Le raisonnement suivant apparaît même le démontrer :

(a) Pour gagner, il faut au moins qu'un joueur se prononce et donne la bonne couleur de son chapeau.

(b) N'ayant aucune information sur cette couleur qui est tirée à pile ou face et qui est indépendante des autres couleurs, il se trompera une fois sur deux.

(c) L'équipe perdra donc au moins une fois sur deux.

Ce raisonnement est faux et l'équipe des trois joueurs peut convenir d'une stratégie de jeu qui lui fera gagner le million d'euros avec une probabilité de 75 pour cent.

La méthode est la suivante. Les joueurs conviennent que chacun d'eux adoptera la règle : répondre « Je passe » si les couleurs des deux chapeaux qu'il voit sont différentes, et nommer la couleur opposée à la couleur des deux chapeaux qu'il voit s'ils sont de couleur identique.

Examinons les différents cas. Si les couleurs tirées sont blanc-blanc-blanc (BBB) chaque joueur voit deux chapeaux blancs et donc répond « Rouge » : l'équipe a perdu. De même, lorsque le tirage des chapeaux est rouge-rouge-rouge (RRR), l'équipe perd. Les autres cas sont tous gagnants. Par exemple, si le tirage est rouge-rouge-blanc (RRB) alors



Quelle est la couleur de mon chapeau ? L'équipe gagne si l'un au moins des joueurs devine la couleur de son chapeau et qu'aucun ne se trompe (passer est permis). Pour trois participantes, la stratégie optimale, donnant 3/4 de réussites, est la suivante : chaque participante passe si elle voit deux chapeaux de couleurs différentes et quand elle voit deux chapeaux de la même couleur, elle annonce la couleur opposée. Ici la participante 1 qui voit un chapeau blanc et un rouge passe, la participante 2 qui voit deux chapeaux rouges annonce correctement le chapeau blanc qu'elle porte, et la participante 3, qui voit un chapeau blanc et un rouge, passe : l'équipe a gagné.

les deux joueurs aux chapeaux rouges – qui voient chacun deux chapeaux de couleurs différentes – passent, alors que celui au chapeau blanc – qui voit deux chapeaux rouges – répond « Blanc », ce qui fait gagner son équipe. Au total, sur les huit cas possibles – BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR –, dans 2 cas, l'équipe perd, et dans six cas, elle gagne. La probabilité de gain est 75 pour cent.

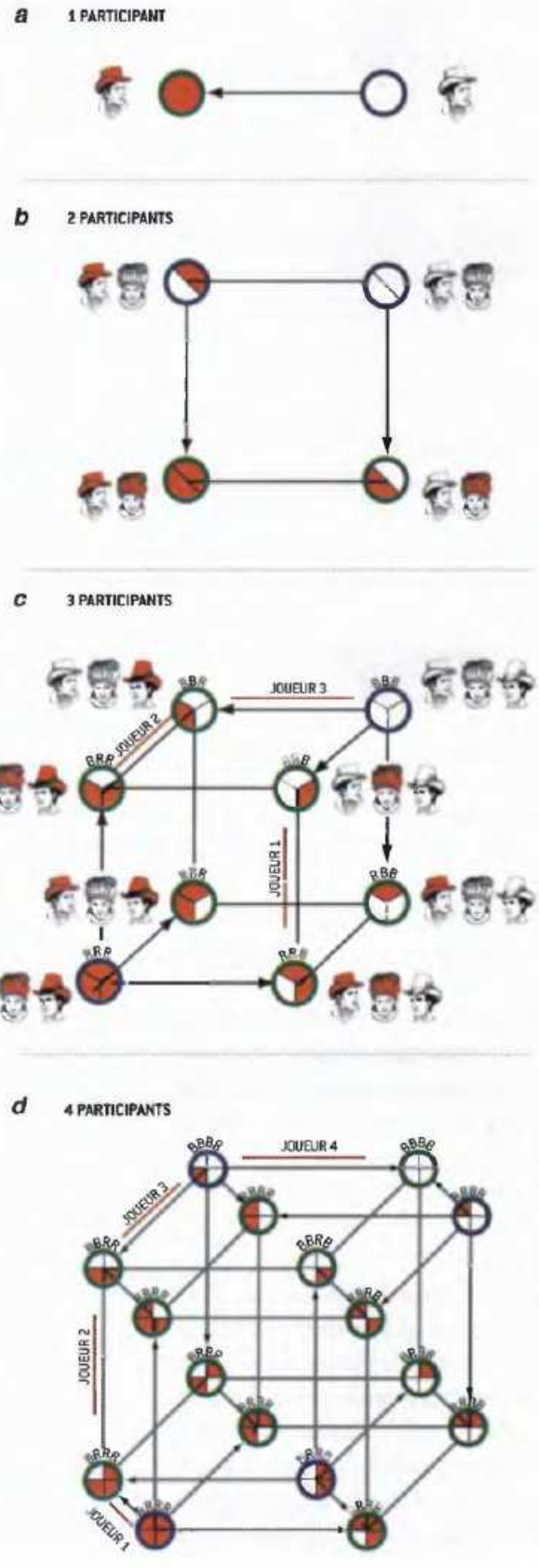
Ébullition dans les cerveaux

En quoi le raisonnement proposé précédemment est-il faux et quelle est l'astuce de la stratégie qui donne 75 pour cent ? Regardons de près la stratégie qui donne cette valeur. Il y a 8 cas possibles BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR. Les joueurs « passent » dans les cas indiqués en bleu (où ils voient des chapeaux de couleurs différentes) et s'expriment dans ceux désignés en vert : BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR, ce qui fait, en tout, 12 votes bleus. Sur les 12 votes exprimés (verts), 6 sont erronés BBB et RRR et 6 sont bons BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB. Comme prévu, chaque joueur se trompe une fois sur deux, cependant les six votes exprimés erronés font seulement perdre deux parties, celles où les trois chapeaux sont de la même couleur, alors

que les six votes exprimés justes en font gagner 6 *(voir, sur la figure 1, un cas gagnant)*.

Le raisonnement *(a-b-c)* est faux: à cause du regroupement des erreurs, il n'est pas vrai que *(c)* soit conséquence de *(a)* et *(b)*, lesquelles sont vraies.

La morale pour gagner à ce jeu est: « Commettons nos erreurs ensemble lorsque la situation est exceptionnelle (BBB ou RRR), mais dans les autres situations, plus nombreuses, laissons s'exprimer



2 La stratégie optimale pour deviner la couleur de son chapeau dépend du nombre de participants. S'il n'y a qu'un seul participant *(a)*, il énonce « Rouge », et sa probabilité de réussite est 1/2. Pour 2 participants *(b)*, la meilleure stratégie est que l'un passe et que l'autre annonce une couleur: la probabilité est encore 1/2. Ces deux premiers cas ne sont pas intéressants car il n'y a pas de stratégie tenant compte de ce que les joueurs voient. Avec 3 participants *(c)*, la probabilité de réussite est de 3/4 si chaque participant, qui voit deux couleurs de chapeau différentes, passe, et que celui qui voit deux couleurs identiques annonce la couleur opposée à celle qu'il voit. On a indiqué par des flèches les déclarations sur la couleur de son chapeau à faire (autres que « Je passe ») ; dans les configurations RRB et RRR, le troisième joueur qui voit deux chapeaux rouges doit dire « Blanc » ce qu'indique la flèche orientant l'arête RRR-RRB du sommet RRR vers le sommet RRB. Les stratégies sont indiquées pour 4 et 5 participants *(d* et *e)*. Les configurations perdantes sont cerclées de bleu, les configurations gagnantes à l'extrémité d'une flèche partant d'une perdante, cerclées de vert. À droite *(f)*, la stratégie pour 5 joueurs ne comporte que 7 configurations perdantes cerclées de bleu. La probabilité de réussite avec la stratégie qui découle du cube à 5 dimensions est de 25/32.

celui d'entre nous qui est en meilleure position pour le faire». Une telle leçon est applicable à de nombreuses tâches collectives.

Ce jeu de chapeaux a été inventé en 1998 par Todd Ebert qui le présenta dans une thèse soutenue à l'Université de Californie. Le problème circule depuis sur Internet, provoquant un intérêt considérable et conduisant à la publication d'articles mathématiques et même d'un article dans le *New York Times*! Pourquoi cette excitation? La raison est que si la stratégie pour le jeu avec trois joueurs est assez facile, avec un plus grand nombre de joueurs, l'analyse, difficile, est liée à des questions d'arithmétique qui appartiennent au domaine de la recherche. Le cas général, nous allons le voir, conduit à des questions combinatoires reliées à la théorie de la correction automatique d'erreurs.

Généralisation rebelle

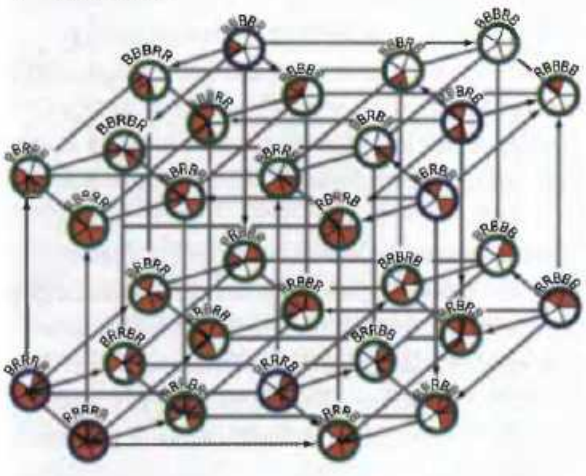
Avec n joueurs, comme il existe deux possibilités de couleur de chapeau (rouge ou blanc), il y a 2^n configurations possibles de chapeaux. Quelles sont les stratégies de jeu? Une stratégie est une série de règles indiquant à chaque joueur ce qu'il doit faire lorsqu'il a devant lui une configuration précise de chapeaux. Supposons par exemple qu'il y ait 5 joueurs (n = 5). Si une stratégie est fixée, le troisième joueur doit savoir comment réagir face à la configuration RR * RB (il voit trois chapeaux rouges et un chapeau blanc), l'étoile représentant l'information qui lui manque sur la couleur de son propre chapeau. La stratégie doit donc comporter une consigne lui indiquant que face à cette configuration, il doit voter R, B ou P (pour «Je passe»). Imaginons que la stratégie lui indique dans ce cas de voter «Je passe»: parmi une multitude d'autres consignes de vote, la stratégie contiendra la règle: [RR * RB → P].

Pour n joueurs, il y a n façons de placer l'étoile correspondant à ce joueur et 2^{n-1} façons de choisir les R et les B des autres joueurs: aussi une stratégie contiendra en tout $n \times 2^{n-1}$ règles de ce type. Comme il y a trois possibilités pour chaque conclusion de règle, au total, pour n fixé, le nombre de stratégies différentes est $3^{n2^{n-1}}$. Pour n = 3, ce nombre vaut 531441. Pour n = 4, il existe 1,853 10^{15} stratégies différentes. On comprend que le problème soit ardu.

La stratégie décrite pour n = 3 et donnant un gain dans 3/4 des cas est composée des 12 consignes suivantes:

Joueur 1: [*RR→B] [*BB→R] [*RB→P] [*BR→P]

f 5 PARTICIPANTS



Joueur 2: [R*R→B] [B*B→R] [R*B→P] [B*R→P]

Joueur 3: [RR*→B] [BB*→R] [RB*→P] [BR*→P]

On pourrait envisager des règles faisant intervenir le hasard, du type «Si la configuration vue est R*B alors choisir une fois sur deux B et une fois sur deux R en tirant à pile ou face». Cependant, il a été démontré que ce type de stratégies aléatoires ne pouvait pas faire mieux que les stratégies normales. C'est pourquoi nous envisagerons uniquement ces dernières... déjà bien assez nombreuses!

Il existe une représentation graphique intéressante des stratégies qui facilite le raisonnement et la recherche de solutions. On dessine un cube en dimension n ; ses 2^n sommets sont les configurations possibles des chapeaux. Chaque arête du cube relie deux sommets qui ne diffèrent que par un élément; par exemple RRB et RRR. On notera une telle arête RR*. Pour représenter une stratégie, on indique sur chaque arête du cube quel vote doit faire le joueur concerné (ici le troisième). On convient d'indiquer cela en dessinant une flèche sur l'arête, flèche dirigée vers le sommet correspondant au vote: si la stratégie comporte la règle [RR*→B] la flèche orientera l'arête RRR-RRB du sommet RRR vers le sommet RRB. Lorsque la consigne est «Je passe», l'arête ne comporte pas de flèche. La figure 2 *c* indique la stratégie qui donne 75 pour cent de gains avec trois joueurs. Il existe trois autres stratégies (non représentées) donnant aussi un gain dans 75 pour cent des cas avec trois joueurs. La meilleure stratégie avec quatre joueurs gagne dans 12 cas sur 16, conduisant donc encore à un gain de 75 pour cent des cas. Avec cinq joueurs, certaines stratégies font mieux que 75 pour cent.

Le cube stratégique

Si l'on considère une stratégie fixée et qu'on envisage tous les cas possibles pour les couleurs des chapeaux, à chaque vote exact correspond un vote erroné: on ne peut pas éviter les votes erronés, mais on peut les regrouper, et essayer en même temps de faire que les votes justes se retrouvent isolés (comme cela se produit pour la stratégie 75 pour cent).

Au mieux, on peut regrouper les votes erronés par paquets de n (pour $n = 3$ et la stratégie 75 pour cent, les votes erronés sont ainsi groupés) et faire que les votes justes soient exprimés un à la fois. Donc, au mieux, il y aura n fois plus de configurations gagnantes que de configurations perdantes: dans chaque configuration perdante, les n joueurs se trompent tous, et dans chaque configuration gagnante un seul joueur vote juste, les autres passant. En termes de probabilité, cela signifie qu'au mieux la probabilité de gagner avec une stratégie sera $n/(n+1)$. En effet, dans les meilleurs cas, si p est le nombre de configurations perdantes, le nombre de configurations gagnantes est np. Le nombre total de configurations est donc $np+p$ et la probabilité de gagner, $np/(np+p) = n/(n+1)$.

Dans le cas $n = 3$, la probabilité de gagner d'une stratégie est donc au mieux 75 pour cent: la stratégie décrite plus haut ne peut être améliorée. Sur une représentation des stratégies par des cubes, la recherche d'une bonne stratégie est alors un jeu de fléchage et de coloriage.

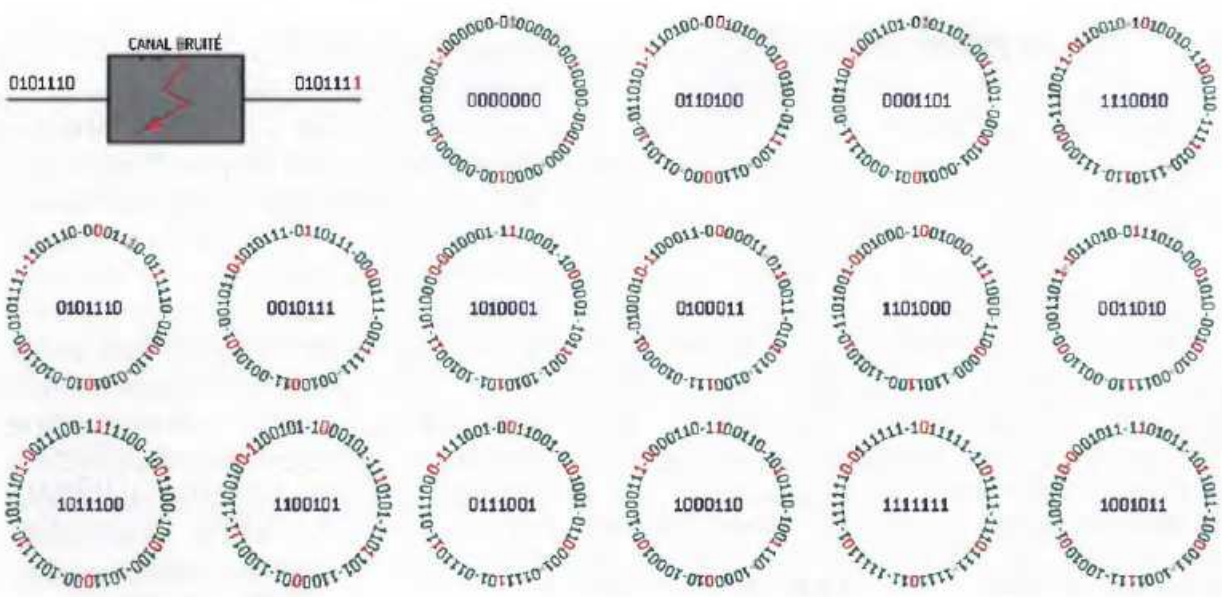
(I) On choisit les configurations perdantes qu'on marque par des cercles bleus.

(II) Pour chaque cercle bleu, on oriente avec une flèche les arêtes ayant le cercle bleu à l'une de leur extrémité vers le sommet qui n'est pas cerclé de bleu. Cela a pour effet que la stratégie représentée fera perdre les joueurs tous ensemble pour chaque configuration marquée d'un cercle bleu : c'est ce que l'on veut!

(III) Les extrémités non cerclées de bleu des arêtes fléchées sont marquées d'un cercle vert. À chacun des sommets verts correspond une configuration de chapeaux qui fait gagner l'équipe.

(IV) Les configurations non marquées après les étapes (I-II-III) sont les configurations qui provoquent l'abstention de tous les joueurs et donc elles sont perdantes; on les marque par des cercles orange (on tentera d'éviter de tels cas). La probabilité de gain de la stratégie dessinée se lit alors sur le dessin: c'est le quotient du nombre de cercles verts par 2^n.

Dessiner une bonne stratégie consiste à placer les points bleus de façon que les points verts qui s'en déduisent soient les plus nombreux et, si possible, recouvrent tout le cube sans qu'il y ait de points orange et sans qu'un sommet vert soit atteint par plus d'une flèche.



3 Un code correcteur d'une erreur est un ensemble de suites composées de 0 et de 1 qui possède la propriété suivante : toutes les suites de n bits sont différentes et si l'on modifie un bit d'une des suites, on pourra deviner la suite initiale, car une seule suite de l'ensemble ne différera que par un seul bit. Ce bit peut avoir été modifié lors du passage dans un canal bruité. Lorsque n est de la forme $2^k - 1$ Richard Hamming a démontré qu'il existait un code correcteur d'une erreur ayant 2^{n-k} mots. Pour k=3 on a n=7, et le nombre de mots du code est 16. L'ensemble des 16 mots du code *(bleus)* et l'ensemble des mots *(verts)* obtenus en modifiant un bit d'un de ces mots donnent exactement les 128 mots de longueur 7 et il n'y a pas de répétition : on dit que le code est parfait.

Lorsqu'un tel coloriage existe, on aura une stratégie parfaite où la probabilité de gagner est $n/(n+1)$. On constate qu'on ne trouve pas toujours de stratégies parfaites. Essayez pour $n = 4$ et pour $n = 5$.

Voici un raisonnement qui permet de savoir dans quels cas on peut espérer avoir une stratégie parfaite. On suppose qu'une stratégie parfaite existe. Notons g le nombre de configurations gagnantes et p le nombre de configurations perdantes. On a vu que $g/2^n = n/(n + 1)$. Donc $p/2^n = 1/(n + 1)$, donc $2^n/(n + 1)$ est un entier et $n + 1$ est une puissance de 2. Autrement dit, n est de la forme $2^k - 1$. Les stratégies parfaites ne peuvent exister que lorsque n est de la forme $2^k - 1$. Mais en existe-t-il toujours ? La valeur $k = 2$ donne $n = 3$ et on a vu qu'alors il existe une stratégie parfaite. Pour $k = 3$ on a $n = 7$. Existe-t-il une stratégie parfaite pour $n = 7$? Le problème semble difficile !

Codes correcteurs d'erreurs

Ce problème de la recherche des stratégies parfaites lorsqu'elles peuvent exister a été résolu par Richard Hamming dans les années 1940 quand il a défini et construit ce que l'on nomme les *codes correcteurs d'erreurs*.

Le problème du code correcteur est le suivant : pour une valeur de n donnée, on cherche à construire p suites de n bits de façon que lorsque l'on communiquera l'une de ces suites, si une erreur d'un bit se produit dans la transmission, on puisse la repérer et la corriger.

Pour $n = 7$ on peut, par exemple, ne retenir que les quatre suites 0000000, 1111111, 0101010 et 1010101. Il est clair qu'une modification quelconque d'un bit de l'une des quatre suites n'empêche pas de savoir laquelle des suites a été utilisée. Si la suite modifiée

est 0000001 et qu'il y a au plus une erreur, la suite avant modification ne peut être que 0000000 ; si la suite modifiée est 0111010 la suite de départ est 0101010, etc.

Les quatre suites 0000000, 1111111, 0101010 et 1010101 sont donc utilisables pour transmettre des lettres d'un alphabet à quatre symboles *A*, *B*, *C*, *D* ; on conviendra que *A* = 0000000, *B* = 1111111, *C* = 0101010 et *D* = 1010101. Si, lors de la transmission, il y a au plus une erreur pour chaque lettre transmise, cela ne gênera pas la lecture du message et par exemple la suite de 28 bits 1101010101110110000000111111, malgré quatre erreurs, se déchiffrera en *CDAB*.

Ce code avec des suites de 7 bits peut-il être amélioré pour coder plus de quatre lettres sans risque d'erreur ? Ne peut-on pas trouver un plus grand nombre de suites de 7 bits, chacune représentant une lettre, avec lesquelles toutes les erreurs d'un bit seront encore corrigées ? La réponse est oui et les 16 suites suivantes conviennent : 0000000 / 0110100 /0001101 / 1110010 / 0101110 / 0010111 /1010001 / 0100011 / 1101000 / 0011010 / 1011100 / 1100101 /0111001 /1000110 / 1111111 / 1001011. On peut donc coder 16 lettres.

Les codes de Hamming au secours des chapeaux

Un peu de patience permet de vérifier que, pour toute suite de 7 bits, ou bien elle est elle-même l'une des 16 suites de la liste, ou bien il existe une possibilité unique d'en modifier un bit pour qu'elle coïncide avec l'une de ces 16 suites. Les codes correcteurs sont très utilisés dans le monde des télécommunications et de l'informatique. Par exemple, un code correcteur utilisant des paquets de 32 bits et capable de repérer et de corriger deux erreurs quelconques, est utilisé pour les CD-rom.

Le lien entre les codes correcteurs et le problème du jeu des chapeaux est assez direct. Si l'on choisit de cercler de bleu les 16 suites précédentes (en substituant les 0 par des *R* et les 1 par des *B*) dans le cube servant à représenter des stratégies pour $n = 7$, alors une fois qu'on aura placé les flèches et les cercles verts, tous les sommets du cube seront coloriés. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, toute suite possible est l'une des 16 (donc est coloriée en bleu) ou le devient en modifiant un de ses éléments (donc est coloriée en vert).

Cela signifie qu'on a obtenu une stratégie pour $n = 7$ permettant de gagner dans exactement $128 - 16 = 112$ cas sur 128, soit pour 7/8 des cas. Pour $n = 7$ on a vu qu'on ne peut pas avoir mieux : il s'agit donc d'une stratégie parfaite.

Si vraiment vous voulez l'essayer, la stratégie parfaite tirée du code correcteur d'erreur est la suivante :

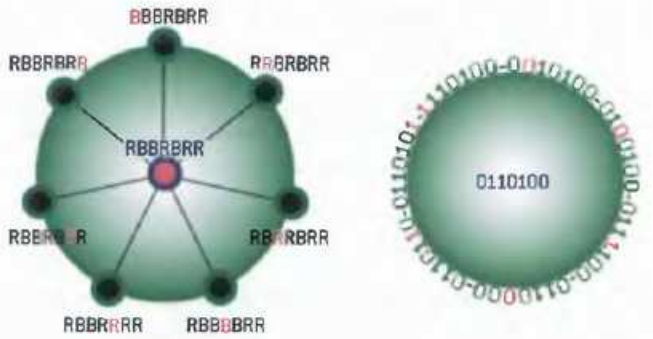
– pour jouer je compare la configuration que je vois avec la liste des codes de Hamming réécrite avec des R et de B ; RRRRRRR / RBBRBRR / RRRBBRB / BBBRRBR / RBRBBBR / RRBRBBB / BRBRRRB / RBRRRBB / BBRBRRR / RRBBRBR / BRBBBRR / BBRRBRB / RBBBRRB / BRRRBBR / BBBBBBB / BRRBRBB ;

– si je trouve un code possible, cela signifie que je suis sur une arête fléchée du cube et donc je choisis la couleur opposée à celle donnée par le code de Hamming (ce qui revient à suivre le sens de la flèche dans le cube en dimension 7), sinon c'est que je suis sur une arête non fléchée et donc je passe.

Si, par exemple, je suis le joueur 4 et que je vois BBB*RRR, je constate que ni BBBBRRR, ni BBBRRRR ne sont des codes de Hamming, donc je passe. Pour RBB*BRR, je trouve le code RBBRBRR (c'est le deuxième) donc je vote « Blanc », etc.

Pour tout n de la forme 2^k-1, on sait construire un code de Hamming donnant une stratégie parfaite pour le jeu des chapeaux à n joueurs. Dans tous les cas où une stratégie parfaite pouvait exister, les codes de Hamming en donnent une.

Grâce à ces stratégies parfaites on construit des stratégies pour tout n (même s'il n'est pas de la forme $2^k - 1$) en utilisant l'idée simple suivante. Pour n donné on recherche le plus grand entier k tel que $2^k - 1 < n$. Les $2^k - 1$ premiers joueurs conviennent de jouer la stratégie de Hamming pour k comme s'ils étaient seuls et les autres s'abstiennent toujours. Cette «stratégie brutale» n'est pas nécessairement la meilleure possible, mais elle est quand même suffisamment bonne pour conduire au résultat suivant: la probabilité de perdre en appliquant la stratégie brutale tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Au jeu des chapeaux, plus l'équipe est grande plus ses chances de gagner approchent 100 pour cent.



La stratégie du choix de la couleur de son chapeau est déterminée par le code de Hamming. Dans cet exemple à 7 joueurs, chaque sommet cerclé de vert est associé à un sommet cerclé de bleu. Un sommet bleu et un sommet vert ne diffèrent que par la couleur du chapeau d'un joueur: la stratégie pour le porteur du chapeau dont la couleur diffère dans ces deux configurations est de choisir la couleur opposée à celle de même position de la configuration bleue ; les autres joueurs passent. Dans le code de Hamming, des 0 et des 1 remplacent les R et les B. Les signaux verts entourant le signal bleu ont un chiffre binaire faux et sont remplacés par le signal bleu central.

Il a été aussi démontré que lorsque $n = 2^k$, alors la stratégie brutale ne peut être améliorée, mais aujourd'hui (sauf pour les petites valeurs de n), lorsque n n'est ni de la forme $2^k - 1$, ni de la forme 2^k, on ne sait pas construire les stratégies optimales. Pour $n = 5$ il existe une stratégie meilleure que la stratégie brutale *(voir la figure 2 f)*, conduisant à une probabilité de gagner de 25/32 = 78,125 pour cent (ce qui est meilleur que les 75 pour cent de la stratégie brutale).

Variantes

Voici quelques variantes du jeu des chapeaux qui montrent que le filon des problèmes inspirés par cette énigme est loin d'être épuisé. La stratégie décrite au début du texte qui, pour $n = 3$, donne 75 pour cent de gains, était symétrique dans le sens suivant: les joueurs, pour l'appliquer, n'ont pas besoin d'être classés, il leur suffit juste de compter le nombre de chapeaux blancs et rouges qu'ils ont devant eux. Les stratégies tirées des codes de Hamming pour n supérieur à 3 n'ont pas cette propriété. Que se passe-t-il si l'on exige que les stratégies soient symétriques? Il a été démontré que les meilleures stratégies symétriques ont une probabilité de gain qui tend vers 2/3 lorsque n augmente.

Si maintenant on imagine qu'il y a c couleurs différentes possibles pour les chapeaux au lieu de deux, le problème devient vraiment délicat et les codes de Hamming ne suffisent plus à le résoudre. Cependant, Hendrix Lenstra et Gadiel Seroussi ont démontré que lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini la probabilité de gagner d'une équipe qui «joue bien» tend encore vers 100 pour cent.

D'un problème de divertissement mathématique qu'on peut poser à ses amis autour d'une tasse de café, on en est arrivé à une série de questions réellement difficiles de recherche mathématique.

La traversée du pont

Les problèmes d'organisation sont parfois de vrais casse-tête. La résolution de la traversée du pont, à l'apparence très simple, a exigé plusieurs années de recherche.

Il suffit de passer le pont
C'est tout de suite l'aventure.
Georges Brassens

La traversée des ponts est source de légende au Moyen Âge, qu'il s'agisse du Pont du Diable ou du Pont de l'Épée : Lancelot traverse la rivière sur son glaive effilé. Les ponts sont lieux de maléfices et il faut parfois un anneau magique pour les franchir impunément. Dans notre franchissement de pont, le talisman sera mathématique.

La formulation du problème initial est simple : quatre voyageurs V_1, V_2, V_3 et V_4 sont sur la rive gauche d'une rivière à côté d'un pont fragile qui ne peut pas supporter le poids de plus de deux voyageurs à la fois. Ils souhaitent se rendre sur la rive droite de la rivière. Il fait nuit et ils ne disposent que d'une torche lumineuse indispensable à la traversée du pont. Il n'est pas possible de lancer la torche et donc celle-ci doit faire des allers et retours pour permettre le passage des voyageurs en plusieurs fois, des voyageurs traversant la rivière de droite à gauche pour ramener la torche.

Les voyageurs ont des capacités physiques différentes : le premier traverse en une minute ($t_1 = 1$), le second a besoin de deux minutes ($t_2 = 2$), le troisième de cinq minutes ($t_3 = 5$) et le quatrième de dix minutes ($t_4 = 10$). Bien sûr, quand deux voyageurs traversent ensemble, le plus lent impose sa vitesse. Comment les voyageurs doivent-ils organiser leurs traversées pour faire au plus vite et ainsi économiser l'énergie de leur torche ?

On ignore l'inventeur de cette énigme, dont on trouve la première mention dans le livre de Saul Levmore et Elizabeth Cook, *Super Strategies For Puzzles and Games*, publié en 1981. Ce problème fut utilisé, raconte-t-on, par Bill Gates pour choisir de nouvelles recrues chez *Microsoft* : il fallait répondre en moins de cinq minutes. On raconte aussi que posé à un groupe de 50 candidats chez *Motorola*, aucun ne sut trouver la bonne réponse dans le temps imparti.

Un ingénieur à qui l'on avait soumis cette colle et qui craignait de se faire piéger trouva la bonne solution en écrivant un programme en langage C... mais cela lui prit plus d'une demi-heure ! Ce problème n'est en effet pas aussi simple qu'il en a l'air et si vous ne prenez pas la peine d'y réfléchir, vous risquez de passer à côté de la solution qui autorise une traversée de tous les voyageurs en 17 minutes au total.

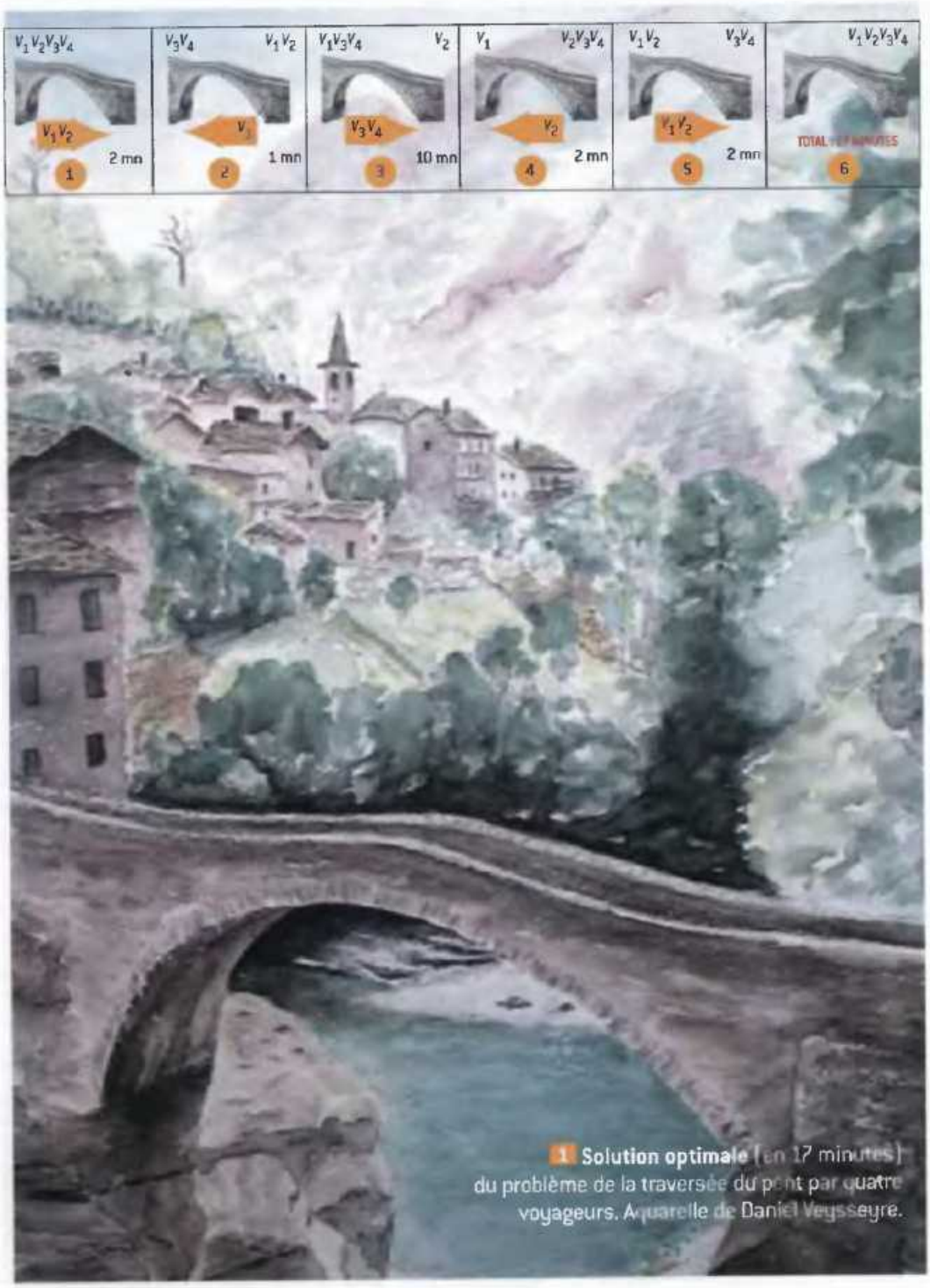
Faire ramener la torche par le plus rapide des porteurs ?

Il est tentant de croire que le plus rapide des voyageurs doit accompagner chacun des autres et revenir seul pour ramener la torche : V_1 accompagne V_2, puis revient, puis accompagne V_3, puis revient, puis accompagne V_4. Cette organisation de la traversée se représente de manière symbolique par :

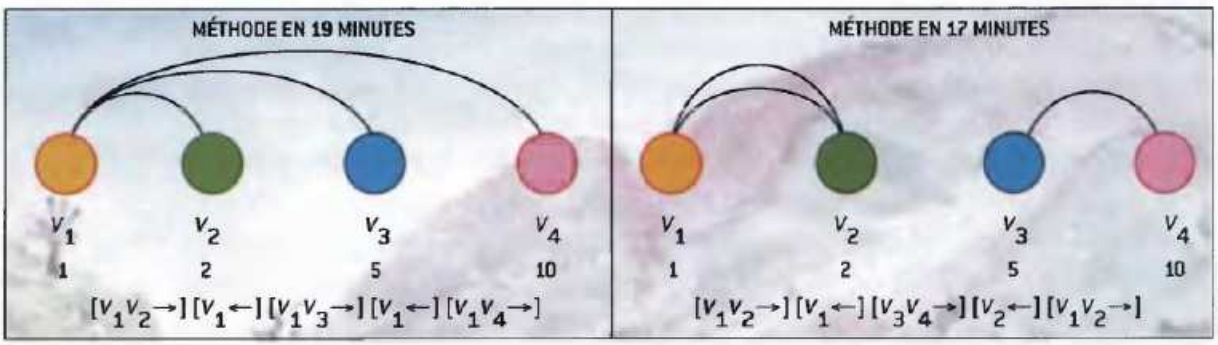
$$[V_1\ V_2 \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]\ [V_1\ V_3 \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]\ [V_1\ V_4 \rightarrow]$$

La durée totale des traversées est $t_2 + t_1 + t_3 + t_1 + t_4$, soit 2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19 minutes. Bien que fondée sur ce qui semble une évidence – on y utilise toujours le voyageur le plus rapide pour rapporter la torche –, cette organisation des traversées n'est pas la meilleure.

Peut-être faut-il faire traverser deux personnes lentes ensemble et donc commencer les traversées par [V_3 V_4 →] ? Mais alors, l'une d'elles devra revenir, ce qui fera perdre du



1 Solution optimale (en 17 minutes) du problème de la traversée du pont par quatre voyageurs. Aquarelle de Daniel Veysseyre.



À chaque organisation des traversées, on associe un graphe dont les nœuds sont les voyageurs et dont les arcs relient deux voyageurs qui traversent ensemble dans le sens direct (de la rive gauche vers la rive droite). À gauche, le graphe associé à une mauvaise organisation où, V_1, le voyageur le plus rapide, va et vient. À droite, le graphe associé à la bonne solution illustrée sur la figure 1.

temps. L'astuce en fait consiste à faire voyager ensemble les deux personnes les plus lentes, mais pas au début. Cela conduit à l'organisation des traversées :

$$[V_1\ V_2\rightarrow]\ [V_1\leftarrow]\ [V_3\ V_4\rightarrow]\ [V_2\leftarrow]\ [V_1\ V_2\rightarrow]$$

Cette fois, le temps total est égal à $t_2 + t_1 + t_4 + t_2 + t_2$, soit $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minutes. Remarquez, caractéristique inattendue, que deux fois les voyageurs V_1 et V_2 ont traversé ensemble de la rive gauche à la rive droite. Est-ce la meilleure façon de s'y prendre ? Oui, et en voici la démonstration en quatre étapes.

(a) Il y a au moins cinq traversées pour que chaque voyageur passe, car, au mieux, on fait passer deux voyageurs de gauche à droite, puis un seul de droite à gauche, jusqu'à ce qu'il ne reste plus personne sur la rive gauche, et donc pour que les quatre voyageurs passent, il faut au moins cinq traversées. Dans le cas de n voyageurs, il faudra au moins $n - 1$ voyages aller avec deux personnes et $n - 2$ retours pour ramener la torche, soit, au mieux, $2n - 3$ traversées.

(b) Le voyageur V_4 doit traverser au moins une fois. Comme il est le plus lent, une traversée au moins exigera 10 minutes.

(c) Si le voyageur V_3 ne traverse pas avec V_4, la durée totale des traversées sera $10 + 5$ (pour les traversées de V_4 et V_3) + 3 (au moins, pour les trois autres traversées). Cela dépasse 17. Donc les voyageurs V_3 et V_4, dans la meilleure organisation des traversées, passent ensemble.

(d) Si V_3 et V_4 voyagent ensemble, – ce qui est nécessaire d'après *(c)* –, seules quatre possibilités d'organisation en cinq traversées donnent un temps total inférieur ou égal à 17 :

1) $10 + 1 + 1 + 1 + 1$ 2) $10 + 1 + 1 + 1 + 2$
3) $10 + 2 + 2 + 1 + 1$ 4) $10 + 2 + 2 + 2 + 1$

La première somme n'est pas possible, car V_2 ne traverserait pas. La deuxième ne l'est pas non plus, car elle signifierait que V_1 traverse seul trois fois, le nombre de voyageurs passant de l'autre côté du pont serait alors de trois et donc l'un resterait du mauvais côté. La troisième somme n'est pas possible à nouveau, car le voyageur V_2 traverserait deux fois et donc se retrouverait du mauvais côté à la fin des opérations. La meilleure somme n'est pas inférieure à $10 + 2 + 2 + 2 + 1 = 17$; en toute rigueur, des solutions composées de 7 traversées ou 9 traversées, etc. devraient être envisagées, mais on s'aperçoit vite qu'aucune ne dure moins de 17 minutes. La solution proposée plus haut est donc optimale.

Puisque vous maîtrisez bien le problème, vous pouvez traiter les cas suivants, soumis par divers auteurs :

Version européenne : $t_1 = 5, t_2 = 10, t_3 = 20, t_4 = 25$.
La durée minimale des traversées est 60 minutes.
Version de Torsten Sillke : $t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 5, t_4 = 8$.
La durée minimale des traversées est 19 minutes.
Version de Plastilina : $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 12$.
La durée minimale des traversées est 29 minutes.
Version de Dick Hess : $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 4, t_4 = 6, t_5 = 8, t_6 = 9$.
La durée minimale des traversées est 31 minutes.

Ces deux derniers problèmes vous demanderont sans doute un petit moment et nous allons étudier le problème général de l'organisation optimale des traversées.

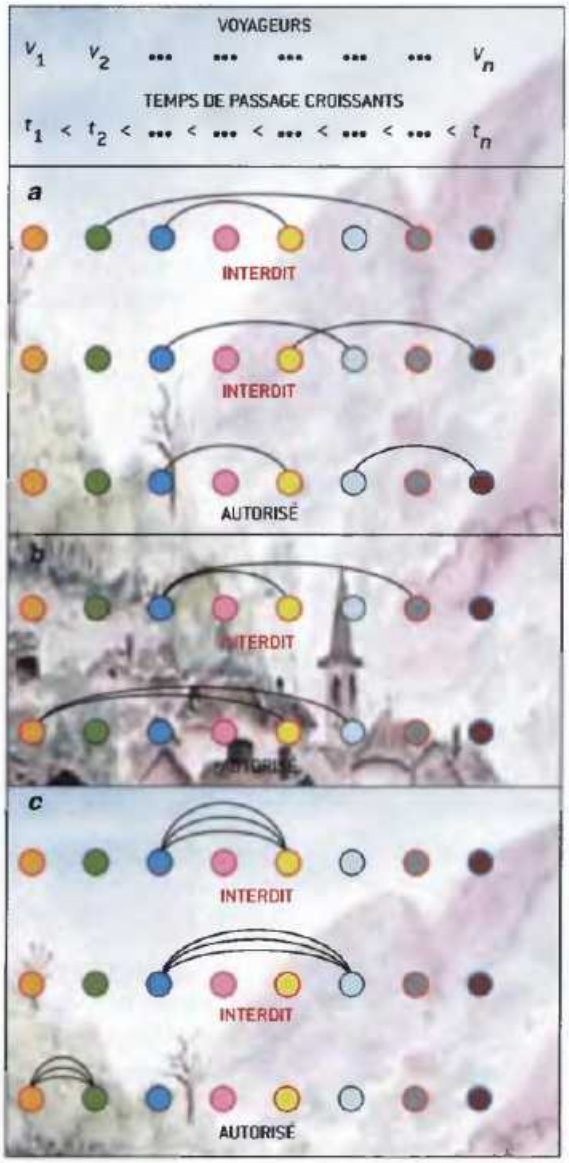
Dans toutes ces versions, le nombre de voyageurs étant petit, avec un peu de patience et d'attention, nous sommes certains de trouver la solution optimale. Lorsque le nombre de voyageurs augmente, il ne peut pas être envisagé de travailler par tâtonnements. La solution générale, difficile à découvrir, ne l'a été que récemment par Günter Rote, de l'Institut d'informatique de l'Université de Berlin, après la publication de plusieurs articles incomplets ou même gravement erronés par d'autres auteurs.

Nous allons décrire cette solution qui est exemplaire, car elle montre comment, en transformant le problème d'organisation initial en un problème de graphe, tout se simplifie jusqu'à se ramener à un simple petit calcul qu'on peut traiter à la main, même s'il y a 1000 voyageurs. La démonstration exige un effort, si vous ne voulez pas vous y coller immédiatement, vous pouvez consulter la recette en fin d'article.

Avec plus de voyageurs

Considérons donc le problème général de la traversée avec torche pour n voyageurs. Les données du problème sont simplement le nombre n et la liste des durées des traversées de chacun des voyageurs t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n, durées que nous classons de la plus courte à la plus longue.

L'utilisation de programmes informatiques est envisageable : en nous y prenant bien, nous pourrons résoudre chaque cas particulier. En effet, le problème appartient à la classe P des problèmes



Conditions nécessaires pour un graphe optimal. On montre que les graphes des solutions optimales d'un problème de traversée (défini par les données t_1, t_2, t_3,..., t_n rangés par ordre croissant) comportent $n-1$ arcs, chaque nœud étant relié à un arc au moins (pas de nœuds isolés) et qu'en plus ils vérifient les propriétés a, b et c suivantes.
(a) Si deux arcs d'un graphe optimal relient quatre nœuds de numéro i, j, k, l vérifiant $i < j < k < l$, alors les arcs sont nécessairement V_i–V_j et V_k–V_l.
(b) Si deux arcs différents d'un graphe optimal ont une extrémité commune (V_i–V_j et V_i–V_k, $j \neq k$), alors nécessairement cette extrémité est V_1 ($i = 1$).
(c) Si deux arcs d'un graphe optimal ont les mêmes deux extrémités, alors nécessairement ces extrémités sont V_1 et V_2 (autrement dit, le seul arc qui peut être présent plusieurs fois dans un graphe optimal est l'arc V_1–V_2).

qu'on sait traiter en temps polynomial : le problème de la traversée avec torche est d'ailleurs utilisé dans certains cours d'informatique pour illustrer les techniques de programmation dynamique (une méthode de programmation qui construit progressivement les solutions recherchées). Cependant, l'utilisation brutale d'une méthode de recherche de la meilleure organisation des traversées par un calcul informatique ne permet pas d'en comprendre le schéma général. En revanche, l'analyse menée par G. Rote nous conduit à un résultat simple et à une programmation aisée.

On peut programmer directement, ou réfléchir, puis programmer; ici la seconde méthode est bien meilleure. Mieux, une fois en possession de la bonne analyse, le problème peut être résolu sans programme!

Un premier résultat – sans surprise – est que la solution optimale à un problème de traversée pour n voyageurs comporte toujours $n - 1$ traversées de deux voyageurs de la rive gauche vers la rive droite, et $n - 2$ traversées d'un voyageur seul avec la torche dans le sens opposé. Il est clair qu'on ne peut pas faire moins (c'est le point *(a)* du raisonnement précédent), il faut cependant mener un autre raisonnement pour être certain qu'une organisation optimale des traversées ne pourrait pas se faire avec plus de traversées. Ce raisonnement, dont nous passerons les détails, montre que si une organisation des traversées ne respecte pas le principe de l'alternance « 2 voyageurs de gauche à droite », puis « 1 voyageur de droite à gauche », etc., alors cette organisation peut être transformée en une autre organisation d'une durée totale plus courte. Le raisonnement est soigneusement rédigé dans l'article de G. Rote téléchargeable sur Internet (demander à votre moteur de recherche *Crossing the bridge at night*).

Avec des graphes

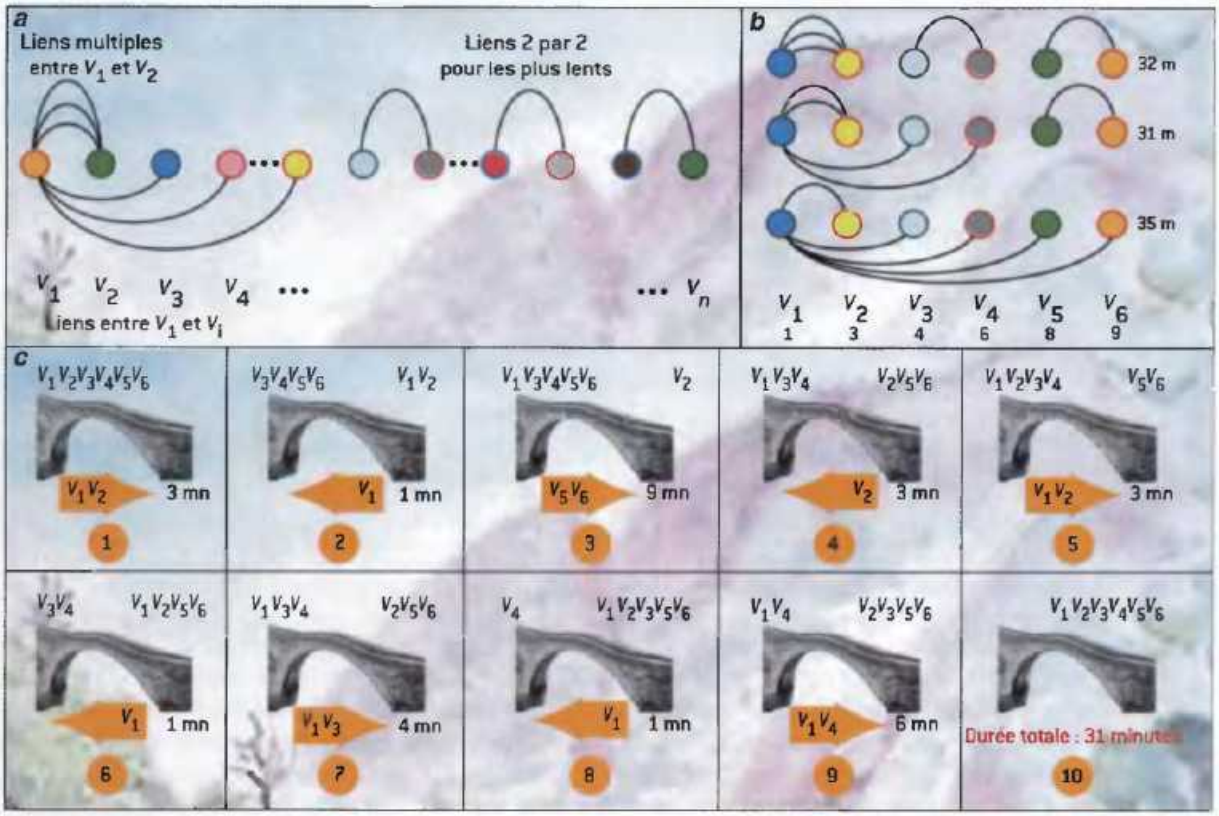
Pour trouver la solution dans le cas général, la méthode de G. Rote consiste à associer un graphe à chaque organisation des traversées.

Le graphe a pour nœuds les voyageurs V_1, V_2,..., V_n. Pour chaque traversée $[V_i\, V_j \rightarrow]$, qui apparaît dans l'organisation, on dessine un arc reliant V_i et V_j. (on le note $V_i - V_j$). Puisque certaines traversées identiques peuvent avoir lieu plusieurs fois (c'était le cas de la traversée $[V_1 V_2 \rightarrow]$ dans l'organisation optimale des traversées du problème des quatre voyageurs), notre graphe comportera éventuellement plusieurs fois le même arc $V_i - V_j$.

On sait que le nombre de traversées directes est nécessairement $n - 1$. Donc dans le graphe de la meilleure organisation des traversées, le nombre d'arcs est $n - 1$ (condition 1).

Le degré D_i d'un nœud V_i (c'est-à-dire le nombre d'arcs qui partent du nœud V_i) est le nombre de voyages directs effectués par le voyageur V_i. Si D_i est égal à 3, cela signifie que V_i fait 3 fois le voyage de la gauche vers la droite, donc il fait deux fois le voyage de la rive droite vers la rive gauche pour revenir (la durée totale de ces retours est ici $2 \times t_i$, $(D_i - 1) \times t_i$ dans le cas général). Puisque chaque voyageur traverse, de chaque sommet du graphe de la meilleure organisation des traversées part au moins un arc : pour tout nœud i, le degré D_i est supérieur ou égal à 1 (condition 2).

Notre but maintenant est de trouver parmi tous les graphes ayant n nœuds $V_1 V_2 V_3 \ldots V_n$ comportant $n - 1$ arcs et tel que de chaque nœud parte au moins un arc, ceux dont la durée totale des traversées est la plus courte. Nous les appellerons graphes optimaux. Il n'est pas évident *a priori* que tous les graphes vérifiant ces conditions donnent une organisation satisfaisante des traversées (c'est-à-dire respectant absolument toutes les contraintes du problème), mais si les graphes optimaux que nous trouvons peuvent donner lieu à des



Seuls graphes possibles. À partir des propriétés décrites sur la figure 3, on s'aperçoit par tâtonnements – et on démontre rigoureusement ensuite – que les graphes des solutions optimales sont de la forme *(a)*. Considérons le problème de Dick Hess où $n = 6$; t_1=1, t_2=3, t_3=4, t_4=6, t_5=8, t_6=9. Les trois graphes candidats sont indiqués à droite *(b)*. Les durées totales sont 32 minutes, 31 minutes et 35 minutes. La traversée optimale est donc donnée par le deuxième graphe qui conduit à l'organisation *(c)* des traversées.

organisations de traversées (et ce sera le cas), alors ces graphes optimaux représenteront les solutions optimales de notre problème.

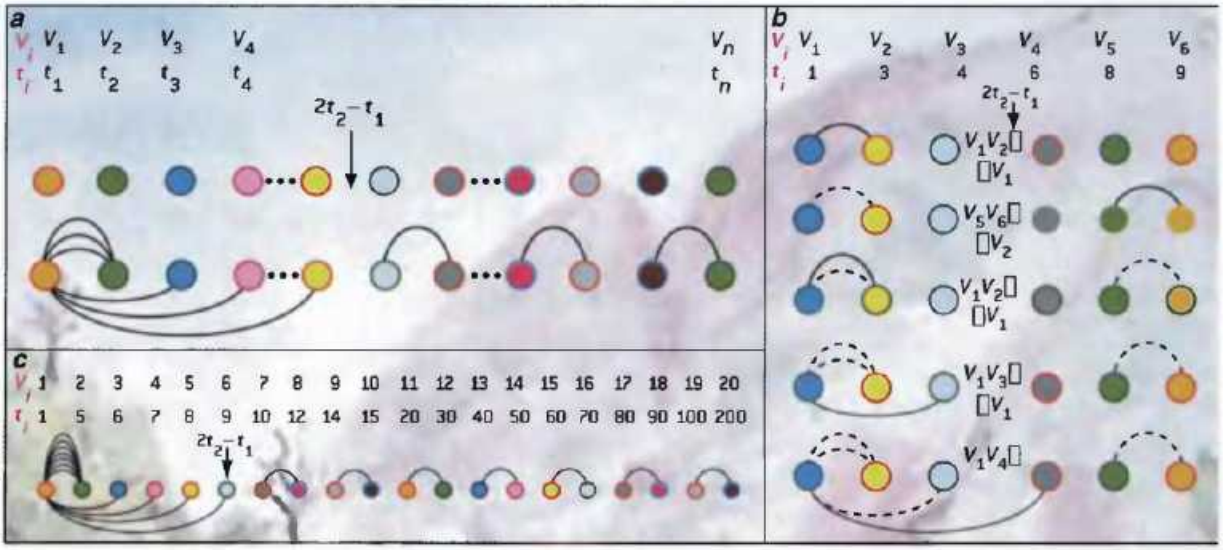
Nous verrons que la durée totale des traversées associée à un graphe possible peut se lire sur le graphe : c'est la somme de deux coefficients A et B que nous allons examiner.

A : Pour chaque arc $V_i - V_j$ du graphe, nous prenons le plus grand des deux nombres t_i et t_j (nous le notons $max(t_i, t_j)$). C'est la durée de la traversée du couple (i, j). La somme A de tous ces nombres $max(t_i, t_j)$ correspond à la durée totale des voyages de gauche à droite.

B : Il faut maintenant considérer les voyages retours. La somme des durées des voyages retours de tous les voyageurs est obtenue en considérant qu'un voyageur V_i qui fait D_i voyages allers, fait nécessairement $D_i - 1$ voyages retours. Le second coefficient B est donc la somme des $(D_i - 1) \times t_i$.

Le problème est maintenant de dessiner un graphe à n nœuds vérifiant les conditions 1 et 2 et qui, en même temps, minimise la somme $A + B$.

L'astuce de G. Rote est de remarquer que $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ est une constante et donc que minimiser $A + B$ est équivalent à minimiser $A + B + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Or nous allons voir que la somme $S = A + B + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ est simplement la somme prise pour tous les arcs $V_i - V_j$ de $t_i + t_j + max(t_i, t_j)$.



Plus aucun programme n'est nécessaire ! Une dernière astuce permet de repérer parmi les graphes candidats, lequel est le bon : on sépare *(a)* les voyageurs qui ont un temps de traversée supérieur à $2t_2 - t_1$. Puis on les regroupe par deux (si le nombre des voyageurs lents est impair, on en laisse un à gauche). Le voyage des paires de voyageurs lents est précédé, à chaque fois, d'une traversée du couple V_1– V_2 qui rapportera la torche. Les autres voyageurs voyagent accompagnés de V_1 qui rapporte à chaque fois la torche. Exemple *(b)* : on reprend le problème de Dick Hess : t_1=1, t_2=3, t_3=4, t_4=6, t_5=8, t_6=9. On a $2t_2 - t_1$=5, donc les voyageurs V_5 et V_6 qui ont un temps de traversée plus grand que 5 traverseront ensemble. Le voyageur V_4 a bien un temps de traversée plus grand que 5, mais il ne peut s'apparier avec aucun autre, il traversera donc accompagné de V_1, comme les voyageurs V_2 et V_3. On retrouve directement la solution de la figure 4*c*. Autre exemple avec 20 voyageurs *(c)* : t_1=1, t_2=5, t_3=6, t_4=7, t_5=8, t_6=9, t_7=10, t_8=12, t_9=14, t_{10}=15, t_{11}=20, t_{12}=30, t_{13}=40, t_{14}=50, t_{15}=60, t_{16}=70, t_{17}=80, t_{18}=90, t_{19}=100, t_{20}=200. Cette fois $2t_2 - t_1$ =9 donc les voyageurs V_{20} et V_{19} voyageront ensemble ainsi que V_{18} et V_{17}, V_{16} et V_{15}, V_{14} et V_{13}, V_{12} et V_{11}, V_{10} et V_9, V_8 et V_7 (chaque traversée des paires lentes aura été précédée de V_1 et V_2 qui rapportent la torche). Les autres voyageurs traversent avec V_1 qui accompagnera à chaque fois la torche.

En effet, le coefficient B est réécrit, car $(D_i - 1) \times t_i + t_i$ est égal à $D_i \times t_i$. À chaque arc du graphe correspond, dans la somme S, le coût de l'aller des deux voyageurs, $max(t_i, t_j)$, et le coût du retour individuel des deux voyageurs V_i et V_j. Le problème est maintenant ramené à celui d'envisager tous les graphes possibles vérifiant les conditions 1 et 2 et de repérer ceux qui rendent la somme des $t_i + t_j + max(t_i, t_j)$ la plus petite possible. Formuler de cette façon simplifiée, le problème de la traversée avec torche se prête à des raisonnements élémentaires qui établissent les trois propriétés suivantes.

a) Si deux arcs d'un graphe optimal relient quatre nœuds de numéro i, j, k, l vérifiant $i < j < k < l$, alors nécessairement, les arcs sont $V_i - V_j$ et $V_k - V_l$.

b) Si deux arcs différents d'un graphe optimal ont une extrémité commune ($V_i - V_j, V_i - V_k, j \neq k$), alors nécessairement cette extrémité est V_1 ($i = 1$).

c) Si deux arcs d'un graphe optimal ont les mêmes deux extrémités, alors nécessairement ces extrémités sont V_1 et V_2 (autrement dit, le seul arc qui peut être présent plusieurs fois dans un graphe optimal est l'arc $V_1 - V_2$). Ces propriétés sont illustrées sur la figure 3.

Chacune de ces propriétés se démontre très facilement grâce à l'astuce de G. Rote. Considérons par exemple la propriété *c)*. Imaginons que l'arc $V_3 - V_4$ soit présent plusieurs fois dans un graphe optimal. En enlevant un des arcs $V_3 - V_4$ et en le

remplaçant par l'arc $V_1 - V_2$, les conditions 1 et 2 restent vraies (on ne change pas le nombre d'arcs, et on n'isole pas de nœud), mais en revanche on diminue la quantité S où le terme $t_3 + t_4 + max(t_3, t_4)$ a été remplacé par $t_1 + t_2 + max(t_1, t_2)$ qui est plus petit (n'oublions pas que les t_i sont classés par ordre croissant). Le graphe comportant plusieurs arcs $V_3 - V_4$ n'est donc pas optimal. Autrement dit, dans un graphe optimal, seul l'arc $V_1 - V_2$ peut être présent plusieurs fois, CQFD.

Si maintenant vous dessinez des graphes vérifiant à la fois les conditions 1 et 2 et les propriétés *a)-b)-c)*, vous découvrirez que votre graphe est d'une forme très spéciale représentée sur la figure 4*a*. Ces graphes candidats sont peu nombreux, au nombre de $n/2$ au pire. Là encore, un raisonnement établit rigoureusement ce que nous constatons et qui devient évident pour qui essaye un moment de construire des graphes vérifiant les conditions 1 et 2 et les propriétés *a)-b)-c)*.

La solution optimale du problème général de la traversée avec torche est alors à portée de main. Elle s'obtient simplement en examinant le coût des graphes candidats qui sont en petit nombre. On retient le moins coûteux : ce travail demande un temps de calcul proportionnel à $n/2$ *(voir l'exemple traité en figure 4)*. On constate (ce qui n'était pas évident d'avance) que ce graphe donne bien une organisation des traversées *(figure 4c)*. Celle-ci s'obtient en combinant le principe utilisé dans le problème à quatre voyageurs (les voyageurs les moins rapides voyagent par 2 après avoir été précédés de la traversée groupée de V_1 et V_2 qui permet de ramener la torche), et celui, naturel, de faire ramener la torche par le voyageur le plus rapide qui accompagne les autres voyageurs.
Une dernière astuce permet même d'éviter le court examen des graphes candidats : le graphe optimal s'obtient en regardant où se place $2t_2 - t_1$ dans la liste ordonnée des t_i. Le graphe optimal est celui où se regroupent par 2 (autant que c'est possible) tous les voyageurs dont le temps t_i dépasse $2t_2 - t_1$.

La solution générale se résume donc en quelques lignes : tous les voyageurs qui, pour traverser, ont besoin d'un temps t_i supérieur à $2t_2 - t_1$ doivent traverser par deux après que V_1 et V_2 se sont rendus sur la rive droite selon le schéma $[V_1\ V_2 \rightarrow]\ [V_2 \leftarrow]\ [V_i\ V_j \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]$. Les regroupements par deux doivent se faire en respectant l'ordre : les deux voyageurs les plus lents ensemble, puis les deux plus lents restants, et ainsi de suite tant qu'il reste deux voyageurs lents (t_i supérieur à $2t_2 - t_1$). Les autres voyageurs doivent ensuite traverser accompagnés de V_1 qui ramène la torche selon le schéma $[V_1\ V_j \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]$.

Notons pour conclure que la meilleure organisation des traversées est obtenue uniquement par une combinaison judicieuse de deux idées (et pas trois). Il y a, d'une part, l'idée intuitive qui tend un piège dans le problème initial, et qui cependant n'est pas toujours mauvaise : utiliser le plus rapide pour ramener la torche; et, d'autre part, il y a l'idée utilisée dans la meilleure solution du problème initial (faire voyager les lents deux par deux) qui, seule, n'est pas toujours bonne.

Le merveilleux tour des cinq cartes

Les mathématiques ressemblent parfois à de la magie : on sait faire des tours de cartes en transmettant plus d'information que cela ne semble possible.



Un message électronique de votre ami Jacques le magicien vous demande de choisir cinq cartes d'un jeu de 52 et d'en transmettre la liste à Alice. Vous choisissez l'As de pique, le Cinq de carreau, le Roi de carreau, le Quatre de cœur et le Valet de trèfle. Par courrier électronique, vous faites parvenir cette liste à Alice. Aussitôt Alice envoie un message à Jacques et à vous dans lequel elle écrit simplement : « Roi de carreau, Valet de trèfle, As de pique, Quatre de cœur » (ce sont quatre des cinq cartes que vous avez choisies). Cinq secondes plus tard, Jacques vous envoie un message qui dit : « La cinquième carte est le Cinq de carreau. »

Comment a-t-il fait pour deviner que le Cinq de carreau était la carte manquante parmi celles que vous aviez choisies ? La divination semble impossible même si Alice est sa complice, ce qu'ils ne cachent pas. Alice a pu utiliser l'ordre des 4 cartes de son message – ordre qu'elle a fixé elle-même – pour transmettre de manière cachée de l'information à Jacques. Cela ne suffit cependant pas à expliquer que Jacques ait réussi à deviner la carte manquante, car il y a $4! = 24$ façons de classer 4 cartes alors qu'il y a 48 éventualités différentes pour la carte manquante.

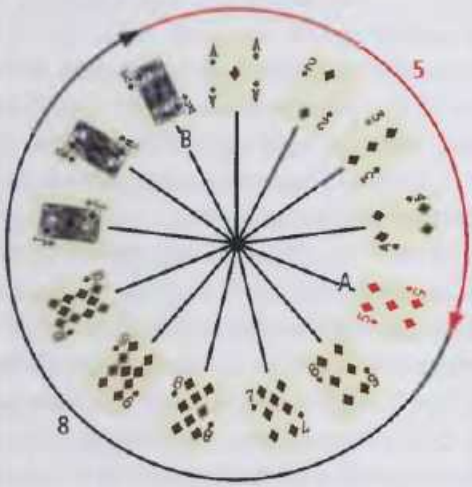
Jacques et Alice ont recommencé le tour plusieurs fois. Ils ont réussi à chaque essai. Leur réussite n'est donc pas fondée sur la chance. Vous avez soigneusement examiné le message d'Alice, il ne cachait aucune information supplémentaire ; de plus Jacques et Alice affirment qu'aucune autre information ne parvient à Jacques. Le mystère s'épaissit.

1. Le tour des cinq cartes d'Alice

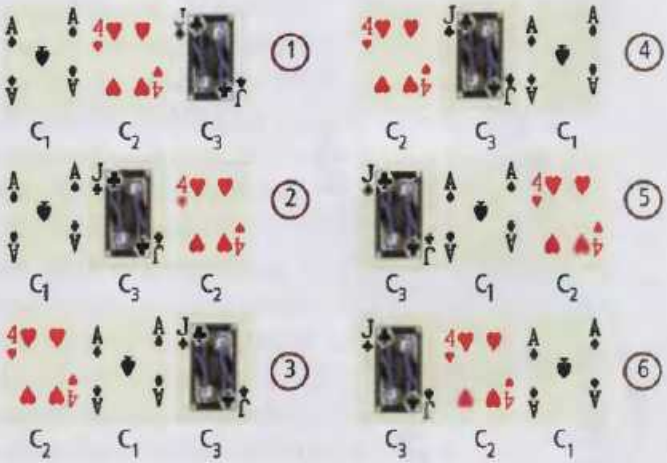
a) Cinq cartes ont été choisies librement par un spectateur. Alice en montrant 4 cartes doit faire deviner la cinquième à Jacques. Pour cela, Alice sélectionne deux cartes de même couleur parmi les cinq, ici le Roi et le Cinq de carreau.



CARTES TIRÉES



2. ROUE DU DÉCOMPTE



CODAGE

b) Alice choisit (selon une procédure que nous allons expliciter) une de ces deux cartes et la place en premier: elle indique ainsi à Jacques la couleur de la carte qu'il doit deviner. Le choix d'Alice est déterminé par le plus petit nombre sur la « roue » entre les deux cartes en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, ici 5. Alice choisit le Roi de carreau qui sera, pour Jacques, le point de départ du décompte sur la roue.



CARTES INDICATRICES

c) Les trois dernières cartes indiquent à Jacques la hauteur de la carte qu'il doit deviner, c'est-à-dire le décompte dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la carte de départ sur la « roue », ici 5. Alice a convenu d'un classement général des 52 cartes (par exemple As de trèfle, As de carreau, As de cœur, As de pique, Deux de trèfle, Deux de carreau, Deux de cœur, Deux de pique, Trois de trèfle, Trois de carreau, Trois de cœur, Trois de pique, etc.).
Selon cet ordre, les trois cartes disponibles se classent C_1, C_2, C_3. Pour coder 1 ou 2, elle place C_1 en premier, pour coder 3 ou 4, elle place C_2 en premier, pour coder 5 ou 6, elle place C_3 en premier. Les deux dernières cartes seront classées dans le bon ordre pour coder un nombre impair (1, 3, 5) et en ordre inverse sinon. Dans notre exemple, les trois cartes disponibles sont l'As de pique, le Quatre de cœur et le Valet de trèfle et nous codons 5 par Valet de trèfle, As de pique, Quatre de cœur. Alice envoie donc le message Roi de carreau, Valet de trèfle, As de pique, Quatre de cœur.



CARTE DÉTERMINÉE



Avant de donner la solution (que vous aurez plus de plaisir à découvrir dans la suite de l'article si vous y réfléchissez un peu), racontons l'histoire de cet extraordinaire tour de magie. Dans sa version initiale, le tour n'utilisait pas Internet qui garantit qu'aucune communication ne se déroule entre Jacques et Alice à l'exception du message envoyé par Alice : pas de clin d'œil, de mains sur le cœur ou de lunettes qu'on remet en place discrètement.

Équations à deux mains

Vous pouvez faire ce tour chez vous devant vos amis, à condition bien sûr d'avoir compris le truc et d'avoir préparé la séance avec un complice qui jouera Alice. Pour éviter qu'on imagine que le complice utilise d'autres sources d'informations que le choix de l'ordre des 4 cartes retenues, vous demanderez qu'on vous bande les yeux et ce n'est pas le complice qui lira la liste des 4 cartes retenues, mais une personne prise au hasard dans l'assemblée. C'est sans doute sous cette forme que William Fitch Cheney, son inventeur, le présentait.

William Fitch Cheney est né à San Francisco en 1894. Il était mathématicien et fut même le premier à obtenir le grade de Ph. D. (Docteur) en mathématiques du MIT (*Massachusetts Institute of Technology* de Cambridge). Cheney était gaucher et il avait appris à écrire des deux mains. Devenu professeur, il épatait ses étudiants en couvrant le tableau de grandes équations qu'il écrivait d'une manière singulière : il utilisait simultanément la main droite et la main gauche qui se rejoignaient au milieu du tableau et il terminait la formule en déposant le signe égal en dernier. Il s'intéressait à la magie et illustrait ses cours en faisant des petits tours de prestidigitation. Il est mort en 1974 et son tour des cinq cartes a refait surface, il y a peu, à la suite d'une série d'articles le présentant et le généralisant. Ce tour a aussi été utilisé par certains professeurs pour faire réfléchir les élèves aux subtilités de la transmission d'informations et à l'utilisation des ordinateurs dans la résolution de problèmes mathématiques.

Voici maintenant la solution du tour. Il y a bien 24 façons de classer les 4 cartes que retient Alice, mais avant de les classer Alice a choisi une carte (celle qu'elle va faire deviner) et ce choix est porteur d'informations. Elle avait 5 choix possibles pour cette carte et donc, en théorie, l'information qu'elle peut transmettre est équivalente à celle d'un nombre entre 1 et $5 \times 24 = 120$, ce qui est largement suffisant pour indiquer la carte manquante (une des 48 qui ne sont pas sur la liste des quatre cartes qu'elle envoie à Jacques). Nous retrouverons ce nombre 120 dans la généralisation du problème.

Donc le tour n'est pas impossible, mais une telle constatation ne nous indique pas concrètement comment nous y prendre ! Voici la procédure. Elle ne semble compliquée qu'au premier abord : une fois comprise, son utilisation est quasi instantanée et ne demande qu'un petit entraînement.

Lorsqu'Alice prend connaissance des cinq cartes, elle voit que deux au moins sont de la même couleur (deux cœurs, ou deux carreaux, ou deux piques, ou deux trèfles), car il y a quatre couleurs et cinq cartes. Elle choisit la carte à enlever dans une couleur répétée et place l'autre carte de la même couleur en premier parmi les quatre cartes de sa liste. En regardant la première des quatre cartes, Jacques connaît donc la couleur

de la carte manquante. En recommençant un grand nombre de fois le tour, les spectateurs pourraient s'apercevoir de cette particularité : pour éviter ce risque, on peut convenir que la carte indiquant la couleur sera placée en premier la première fois, en second la seconde fois, etc.

Alice va maintenant devoir indiquer la hauteur (As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi) de la carte manquante. Il y a six façons de classer trois cartes (trois choix pour la première, deux pour la deuxième et évidemment un pour la troisième). Toutefois, la carte manquante est une carte parmi 12. À nouveau, il semble qu'il manque un bit d'information à Alice !

L'astuce pour pallier l'information manquante

Afin de résoudre le problème Alice, utilise une astuce : elle considère les deux cartes *A* et *B* de la même couleur et leur emplacement sur une roue comportant les 13 hauteurs possibles : As, 2, 3,... , Roi. Sur cette roue, nous nous déplacerons toujours dans le sens des aiguilles d'une montre. Il y a un certain écart quand on va de *A* vers *B* dans le sens des aiguilles d'une montre et un certain écart quand on va de *B* vers *A*. Par exemple, si les deux cartes de la même couleur sont *A* = Cinq de carreau et *B* = Roi de carreau, il y a un écart de 8 de *A* vers *B* et de 5 de *B* vers *A*. Alice retient l'écart le plus petit (donc de *B* vers *A*). Elle enlève la carte *A* et place la carte *B* comme première carte du paquet de 4 cartes qu'elle est en train de constituer. Il lui reste maintenant à transmettre l'information « 5 » à Jacques, ce qui est possible en jouant sur l'ordre des trois cartes qui restent à poser puisqu'elles peuvent se classer de 6 façons différentes. Remarquez que cette méthode marchera toujours : l'un des deux écarts de *A* vers *B* ou de *B* vers *A* est inférieur ou égal à 6.

Pour coder le nombre de 1 à 6 restant, avec les trois dernières cartes Alice a convenu d'un classement général des 52 cartes (par exemple As de trèfle, As de carreau, As de cœur, As de pique, Deux de trèfle, Deux de carreau, Deux de cœur, Deux de pique, Trois de trèfle, Trois de carreau, Trois de cœur, Trois de pique, etc.). Selon cet ordre, les trois cartes disponibles se classent C_1 C_2 C_3. Pour coder 1 ou 2, elle place C_1 en premier, pour coder 3 ou 4, elle place C_2 en premier, pour coder 5 ou 6, elle place C_3 en premier. Les deux dernières cartes seront classées dans le bon ordre pour coder un nombre impair (1, 3, 5) et en ordre inverse sinon *(voir la figure 1)*. Résumons notre exemple :

- Cartes de départ : As de pique, Cinq de carreau, Roi de carreau, Quatre de cœur, Valet de trèfle.
- Couleur retenue : carreau (à cause de la présence du Cinq de carreau et du Roi de carreau).
- Écart du Cinq de carreau vers le Roi de carreau = 8.
- Écart du Roi de carreau vers le Cinq de carreau = 5.
- On retire donc le Cinq de carreau (qui sera la carte que devra deviner Jacques) et l'on place en premier le Roi de carreau dans le paquet de quatre cartes à montrer à Jacques.
- Les trois autres cartes se classent : C1 = As de pique, C2 = Quatre de cœur, C3 = Valet de trèfle. Comme on veut coder le chiffre 5, on les classe selon l'ordre C3 C1 C2. Alice envoie donc le message Roi de carreau, Valet de trèfle, As de pique, Quatre de cœur.



Généralisation

Ce tour, facile à exécuter et assez impressionnant, pourrait-il se faire avec un paquet de cartes plus important? La question n'est pas stupide, car le codage utilisé n'est pas optimal: dans certains cas, une même carte peut être codée de plusieurs façons. Par exemple avec les cartes: As de trèfle, Trois de trèfle, Cinq de trèfle, Roi de carreau, Dame de pique. Si on enlève le Cinq de trèfle, on peut alors le coder par: As de trèfle, Dame de pique, Roi de carreau, Trois de trèfle (4 cartes après l'As de trèfle) ou par: Trois de trèfle, As de trèfle, Roi de carreau, Dame de pique (2 cartes après le Trois de trèfle).

On peut donc espérer faire un tour de magie équivalent avec un paquet de cartes plus important où l'on demandera au spectateur de choisir cinq cartes. Un petit raisonnement nous donnera une condition nécessaire sur la taille du paquet de cartes en fonction du nombre de cartes extraites.

Si le paquet comporte d cartes et qu'on fait le tour de magie en demandant de choisir n cartes au spectateur, Alice transmettra un message de $n-1$ cartes différentes prises dans un paquet de d cartes et classées dans un ordre précis: le nombre de messages différents qu'elle peut transmettre est donc de $d(d-1)(d-2)...(d-n+2)$ (d choix possibles pour la première carte, puis $d-1$ pour la seconde, et cela jusqu'à la $n-1$ ième qui sera choisie parmi $d-n+2$). Ce qu'elle doit désigner est un certain paquet de n cartes prises parmi d, or le nombre de paquets de n cartes prises parmi d est $d!/[(d-n)!\,n!]$ (c'est ce qu'on appelle les «combinaisons», ou «coefficients du binôme»; on les trouve dans le triangle de Pascal).

Pour que le tour soit possible, il faut que le nombre de messages possibles d'Alice soit supérieur au nombre de cas qu'elle a à représenter. Il faut donc que:

$$d(d-1)(d-2)...(d-n+2) \geq d!/[(d-n)!\,n!].$$

Après simplification, cela donne: $d \leq n! + n - 1$.

Dans le cas du choix de 5 cartes par le spectateur, cela signifie que l'on ne pourra pas faire le tour si le paquet de cartes comporte plus de 124 cartes. La question est maintenant: est-il possible de faire le tour de magie avec 5 cartes et un paquet de 124 cartes? (et plus généralement avec un paquet de $n! + n - 1$ cartes si l'on demande au spectateur de choisir n cartes au lieu de 5).

La réponse est oui et elle est valable pour tous les couples de nombres (d, n) qui satisfont l'inégalité obtenue plus haut. Michael Klebert a trouvé une très élégante démonstration de ce résultat fondée sur un raisonnement d'algèbre matricielle, mais sa démonstration a le défaut de ne pas être constructive: elle indique qu'une certaine stratégie de codage existe, mais ne la définit pas explicitement. Une autre démonstration, cette fois constructive, a été proposée par plusieurs mathématiciens dont Elwyn Berlekamp, Stein Kulseth et Gadiel Seroussi. On ne sait pas si Cheney, l'inventeur du tour des cinq cartes, avait connaissance de la généralisation de son tour et de l'astucieux codage que nous allons maintenant décrire dans le cas de $d = 5$ cartes prises dans un paquet de 124 cartes.

On convient de numéroter les cartes de 0 jusqu'à 123. Quand Alice découvre les 5 cartes choisies par le spectateur, elle les classe par ordre croissant c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, et calcule $(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ *modulo* 5 (ce qui veut dire qu'elle calcule le reste de la division par 5 de $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$). Soit i le nombre obtenu: $i = 0$ ou 1 ou 2 ou 3 ou 4. Elle choisit de retirer la carte c_i (par exemple la carte c_2 si elle a trouvé que $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2$ *modulo* 5). Un petit calcul montre que la somme des valeurs des

quatre cartes restantes calculée *modulo* 5 est le nombre (parmi 0, 1, 2, 3 ou 4) complément à 5 du numéro de la carte enlevée, à condition de compter ce numéro sans tenir compte des quatre cartes qui composent le message (il faut relire cette phrase deux fois au moins...).

Calcul pour ceux qui veulent

Voici le petit calcul que vous pouvez passer si vous ne voulez connaître que la méthode sans sa justification (reprendre la lecture après le CQFD).

Notons $i = (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ *modulo* 5, et notons q la valeur *modulo* 5 de la somme des quatre cartes autres que c_i: $q = (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4) - c_i$.

On a bien sûr:

(*) $q = i - c_i$ *modulo* 5.

La carte c_i, si on change la numérotation pour ne tenir compte que des 120 cartes restantes a pour numéro:

(**) $c'_i = c_i - i$.

Cela car il y a i cartes plus petites que c_i parmi les quatre cartes retenues, ces i cartes créant i fois un décalage d'une unité dans la nouvelle numérotation.

En comparant (*) et (**), on obtient que: $q = -c'_i$ *modulo* 5, ce qui signifie bien que la somme *modulo* 5 des numéros des 4 cartes retenues par Alice est le complément à 5 du numéro de la carte enlevée quand on numérote le paquet sans les 4 cartes retenues par Alice. CQFD.

Si i est un nombre entre 0 et 4, il y exactement une carte sur 5 dont le numéro *modulo* 5 dans la nouvelle numérotation vaut i. Pour tout i entre 0 et 4, il y a donc 24 cartes ayant un numéro qui vaut i *modulo* 5.

Jacques en voyant les quatre cartes qu'Alice lui montre sait donc que la carte cachée est une des 24 cartes dont le numéro (dans l'ordre obtenu sans les

2. Le tour d'Alice avec cinq cartes et un paquet de 124 cartes

Avec un paquet de 124 cartes voici, sous forme de recette, comment effectuer le tour des cinq cartes. Les cartes sont numérotées de 0 à 123. Cette numérotation s'appellera la numérotation standard (une seconde numérotation sera utilisée dans le codage). Le spectateur choisit les cartes numérotées 24, 12, 37, 0, 109.



Phase A. Le codage d'Alice.

Alice classe les cartes dans l'ordre de leur numérotation $c_0=0$, $c_1=12$, $c_2=24$, $c_3=37$, $c_4=109$ et calcule la somme $24+12+37+0+109 = 182$.

Comme $182 = 2$ modulo 5, elle enlève la carte $c_2 = 24$ (si la somme avait été $159 = 4$ modulo 5, elle aurait enlevé la carte $c_4 = 109$). C'est la carte que Jacques doit deviner.

Elle doit classer les quatre autres. Elle évalue quelle est la position de c_2 dans le paquet des 120 cartes qui restent lorsqu'on a enlevé c_0, c_1, c_3, c_4. Cette place est la place 22 (la carte 24 a gagné deux places, car c_0 et c_1 ont été enlevées). La carte 24 est la cinquième dont le numéro, dans le paquet sans les quatre cartes, est de la forme $5n+2$, car elle est précédée des cartes en positions 2, 7, 12 et 17. Alice doit donc coder 5 (à cette étape, le nombre qu'on pouvait trouver était compris entre 1 et 24, car il y a 120 cartes et que $120 : 5 = 24$). Pour faire le codage de 5, elle considère les quatre cartes c_0, c_1, c_3, c_4 qui peuvent être classées de 24 façons différentes. À chaque ordre, elle a associé un entier entre 1 et 24. Jacques bien sûr connaît ce codage (voir dans le texte un exemple de tel codage). L'ordre associé à 5 est : $c_0 = 0$, $c_4 = 109$, $c_1 = 12$, $c_3 = 37$. C'est donc dans cet ordre qu'elle montre les 4 cartes à Jacques.



Phase B. Le décodage de Jacques.

Jacques calcule la somme S des numéros des quatre cartes qu'Alice lui présente $c_0 = 0$, $c_4 = 109$, $c_3 = 37$, $c_1 = 12$, $S = 158$. Il calcule alors 158 modulo 5. C'est le nombre 3. Il prend le complément à 5 de 3. C'est 2. Il sait maintenant que dans la numérotation des cartes sans les 4 cartes qu'il voit, la carte manquante a un numéro qui vaut 2 modulo 5 (la justification que le passage au complément fournit bien cette information est donnée dans le texte de l'article). C'est donc dans cette numérotation modifiée une carte dont le numéro est 2, 7, 12, 17, 22, ..., 107, 112 ou 117.

L'ordre c_0, c_4, c_3, c_1 dans lequel Alice a classé les quatre cartes apprend à Jacques que la carte cherchée est la 5ème de la liste précédente. C'est donc la carte 22 (pour la numérotation modifiée). Les cartes 0 et 12 étant placées devant cette carte 22, le numéro de cette carte dans la numérotation standard est donc 24, ce que Jacques annonce.

quatre cartes) a pour valeur le complément à 5 de la somme des numéros de quatre cartes qu'Alice lui présente. Reste à classer les 4 cartes selon un certain schéma convenu pour indiquer laquelle des 24 cartes candidates est la bonne.

C'est possible puisqu'il y a 24 façons de classer 4 cartes : 4! = 24. Si on nomme *a*, *b*, *c*, *d*, les quatre cartes dans l'ordre, une manière d'associer ordre et nombre de 1 à 24 consiste à utiliser le classement du dictionnaire :



abcd → 1 ; *abdc* → 2 ; *acbd* → 3 ; *acdb* → 4 ; *adbc* → 5 ; *adcb* → 6 ; *bacd* → 7 ; *badc* → 8 ; *bcad* → 9 ; *bcda* → 10 ; *bdac* → 11 ; *bdca* → 12 ; *cabd* → 13 ; *cadb* → 14 ; *cbad* → 15 ; *cbda* → 16 ; *cdab* → 17 ; *cdba* → 18 ; *dabc* → 19 ; *dacb* → 20 ; *dbac* → 21 ; *dbca* → 22 ; *dcab* → 23 ; *dcba* → 24.

Concrètement !

Un exemple va clarifier tout cela. Imaginons que les 5 cartes choisies par vous dans le paquet de 124 cartes numérotées de 0 à 123 sont les cartes : 24, 12, 37, 0, 109. Alice les classe par ordre croissant : $c_0 = 0$, $c_1 = 12$, $c_2 = 24$, $c_3 = 37$, $c_4 = 109$, puis elle calcule : 0 + 12 + 24 + 37 + 109 = 182.



Le reste de la division de 182 par 5 vaut 2. Elle retire donc la carte $c_2 = 24$ et doit trouver la façon de classer $c_0 = 0$, $c_1 = 12$, $c_3 = 37$, $c_4 = 109$ pour indiquer à Jacques que la carte manquante est la carte 24.

La carte retirée dans le paquet renuméroté pour ne plus prendre en compte les cartes enlevées est la carte numéro 22 (son numéro s'est décalé de 2 unités, car elle est précédée de c_0 et de c_1). On a 22 = 2 *modulo* 5. La phrase compliquée plus haut indique que 2 est le complément de la somme des 4 numéros calculés *modulo* 5. Vérifions-le. Les quatre numéros donnent 0 + 12 + 37 + 109 = 158 = 3 *modulo* 5. Comme prévu, on a trouvé 3 qui est le complément de 2 par rapport à 5.

La carte enlevée est la cinquième carte qui porte un numéro dont la valeur est 2 *modulo* 5 ; en effet, elle est précédée des cartes 2, 7, 12, 17. Alice doit donc transmettre le chiffre 5 en classant les 4 cartes qu'elle va montrer à Jacques : selon le codage convenu, elle doit les classer dans l'ordre *adbc*. Elle montre donc les quatre cartes dans l'ordre : $c_0 = 0$, $c_4 = 109$, $c_1 = 12$, $c_3 = 37$.

Jacques, quand il voit ces quatre cartes, procède de la manière inverse (facile à dire !). Il fait la somme *modulo* 5 de 0 + 109 + 37 + 12 = 158 = 3 *modulo* 5, dont il prend le complément à 5. Il obtient 2. Il décode l'ordre des quatre cartes *adbc*. Il trouve 5. Il sait maintenant que la carte cachée est la 5 ième carte ayant un numéro n de la forme $5k+2$, dans l'ordre des 120 cartes restantes. La première carte ayant un tel numéro est la carte 3 (la carte 0 a créé un décalage), la seconde est la carte 8, la troisième la carte 14 (il y a eu un second décalage à cause de 12), la quatrième est la carte 19, la cinquième est la carte 24. Jacques annonce 24.

Cette version généralisée s'applique à n'importe quel nombre de cartes. Si, à la place de demander 5 cartes, vous en demandez 6, vous pouvez faire le tour avec un

paquet initial de 6! + 5 cartes = 725 cartes. Avec 7 cartes, vous pouvez utiliser un paquet de 7! + 6 cartes = 5046 cartes. L'exercice de calcul mental devient plus délicat! Il est remarquable que finalement ces tours soient fondés sur un résultat mathématique non trivial: celui qui affirme que dès que $d \leq n! + n - 1$, il existe un codage pour toute main de n cartes prises dans un paquet de d cartes, obtenu en retenant $n - 1$ cartes et en les classant d'une certaine façon pour indiquer sans ambiguïté la carte manquante. La démonstration se ramène à la description de la procédure proposée pour 124 cartes accompagnée du calcul détaillé plus haut et terminé par CQFD. Cette démonstration se généralise sans peine et montre comment en voulant faire des tours de cartes, on est conduit à de jolis petits raisonnements d'arithmétique modulaire.



Bibliographie

Cette bibliographie-webographie a été mise à jour en octobre 2009 (date à laquelle les liens internet ont été vérifiés). Les éléments sont classés par date (les plus récents sont placés devant).

CHAPITRE I - ART

Ambigrammes

Gilles Esposito-Farèse, *Gef's Ambigram Gallery*, 2009 : http://www.gef.free.fr/ambigallery.html
Burkard Polster, *Les ambigrammes, l'art de symétriser les mots*, Éd. Ecritextes, 2004.
Martin Gardner, *The Amazing Creations of Scott Kim*, in *The Colossal Book of Mathematics*, chap. 16, W.W. Norton & Company, New York, 2001.
Scott Kim, *Inversions: A Catalogue of Calligraphic Cartwhells*, Key Curriculum Press, USA, 1996.
John Langdon, *Wordplay: Ambigrams and Reflexions on the Art of Ambigrams*, Harcourt, 1996.
Douglas Hofstadter, *Ma thémagie: en quête de l'essence de l'esprit et du sens*, InterEditions, Paris, 1988.

La musique mathématique de Tom Johnson

Tom Johnson, *Rational Melodies*, Éditions 75, 2009 : www.tom.johnson.org
Tom Johnson, *Perfect Rythmic Tilings*, MaMuX Meeting, IRCAM, 2004.
Tom Johnson, *Symmetries*, Éditions 75, www.tom.johnson.org, 2003.
Tom Johnson, *Music and Combinations*, 2003.
Maths et musique, Hors-série n° 11 de la revue *Tangente*, Éditions Pole, Paris, 2002.
Tom Johnson, *Found Mathematical Objects*, Séminaire Entretemps, *Musique, mathématiques et philosophie*, IRCAM, 2001 : www. entretemps.asso.fr/Johnson.index.html
Jean-Paul Allouche, Tom Johnson, *Narayana's Cows and Delayed Morphisms*, 2000.
Tom Johnson, *Self-Similar Melodies*, Éditions 75, www.tom.johnson.org, 75 rue de la Roquette, 75011 Paris, 1996.

Jos Leys, un artiste géomètre

Jos Leys, *Mathematical Imagery*, 2009 : http://www.josleys.com/
The infinite fractal loop (pour accéder rapidement aux meilleures productions de l'art fractal) 2009 : http://www.fractalus.com/cgi-bin/glist
Jos Leys, *Sphere Inversion Fractals*, in *Computer and Graphics*, 2005.
Kenneth Stephenson, *Introduction to Circle Packing: The Theory of Discrete Analytic Functions*, Cambridge University Press, 2005.
Kenneth Stephenson, *Circle Packing: A Mathematical Tale*, in *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 50, 11, pp. 1376-1388, 2003.
Charles Collins et Kenneth Stephenson, *A Circle Packing Algorithm, Computational Geometry: Theory and Applications*, 25, pp. 233-256, 2003. www.math.utk.edu/~kens/
David Mumford, Caroline Series, David Wright, *Indra's Pearl: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.

Apparitions magiques

Philippe Kent, *Anamorph Me*. Guide pour l'utilisateur d'un logiciel pour réaliser ses propres anamorphoses, 2009 : www.anamorphosis.com
Elber Gershon, *Escher for Real*, 2009 (comment rendre vraies des figures qui semblent impossibles ?)
http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/
Robert Ferreol, *Anamorphose*, 2009 :
http://www.mathcurve.com/courbes2d/anamorphose/anamorphose.shtml
Al Seckel, *Master of Deception : Escher, Dali, and the Artists of Optical Illusion*, préface de D. R. Hofstadter, Sterling Publications Co. Inc. New York, 2004 (comporte un chapitre sur Shigeo Fukuda, et un autre sur Istvan Orosz).
Pour la science, dossier : *Les illusions des sens*, 2003.
Marie-Sophie Corcy, *Anamorphose*, Revue du Musée des Arts et Métiers, n° 35, pp. 47-54, juin 2002.
Nigel Rodgers, *Illusions d'optique*, Éditions Solar, Paris, 1999.
Walter Wick's, *Optical Trick. Scholastic Inc*, Cartwheel Books, 1998. (Contient une magnifique série de photos d'objets impossibles... et pourtant vrais.)
Jacques Ninio, *La science des illusions*, Éditions Odile Jacob, Paris, 1998.
Pierre Marchand, *Secrets des anamorphoses*, Gallimard jeunesse, Paris, 1995.
Bruno Ernst, *Le monde des illusions d'optique*, Éditions Benedikt Taschen, 1994.
Martin Gardner, *Times Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman and Company, 1988 (voir chapitre 8).
Jurgis Baltrusaitis, *Anamorphoses, les perspectives dépravées*, Flammarion, Paris, 1984 (nouvelle version complétée de l'ouvrage paru en 1955, puis 1969).
Jearl Walker, *Les anamorphoses : des images déformées qui peuvent retrouver leur aspect original*, Pour la science, octobre 1981, pp. 112-118,.
McLoughin Bros, *The Magic Mirror, An Antique Optical Toy*, Dover Publication, Inc, New York, 1979.

CHAPITRE II - GÉOMÉTRIE

La révolution des œillets

Ian Fieggen, *Ian's Shoelace Site*, 2009 : http://www.fieggen.com/shoelace/
Burkard Polster, *The shoelace book*, in *American Mathematical Society, Mathematical World*, 2006.
Ian Stewart. *Mathématiques sans se lacer ?, Pour la Science*, n° 228, pp. 96-97, octobre 1996.
John Halton, *The shoelace problem*. Departement of Computer Science. *Mathematical Intelligencer*, 17-4, pp. 36-41, 1995.

Paver des pavés

Steven Dutch, *Rep-tiles*, 2009 : http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/reptile1.htm
Stewart R. Hinsley, excellentes pages sur les autopavés fractals, 2009 :
http://www.meden.demon.co.uk/Fractals/reptiles.html
Michael Reid, *Tiling with Similar Polyominoes* in *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 31-1, pp. 15-24, 2003.
Sze-Man Ngai, Victor Sirvent, J. J. P. Veerman, Yang Wang, *On 2-Reptiles in the Plane* in *Geometriae Dedicata*, 82, pp. 325-344, 2000.
Karl Scherer, *A Puzzling Journey to the Reptiles and Related Animals*, Auckland, New Zealand, 1987.

Dominons les dominos

Erich Friedman, *Le problème inverse et quelques autres questions de pavage par dominos*, Math Magic, 2009 : www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0500.html

Jean-Paul Delahaye, *Les inattendus mathématiques*, Belin-Pour la science, Paris, 2004.
Frederico Ardila, Richard Stanley, *Tilings*, 2004 : http://www.claymath.org/fas/senior_scholars/Stanley/
G. Csizmadia, J. Czyzowicz, L. Gasieniec, E. Kranakis, J. Urrutia, *Domino Tilings of Orthogonal Polygons*, in *International Journal of Pure and applied Mathematics*, 13-4, pp. 443-459, 2004.
Robert Bosch, R. *Constructing Domino Portraits*, in *Tribute to a Mathemagician* (Edité par B. Cipra, E. Demaine, M. Demaine, T. Rodgers), A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, pp. 251-256, 2004.

La délicate géométrie du carré

Sur les découpages du carré, 2009 :
http://karl.kiwi.gen.nz/prosqtsq.html
http://members.bellatlantic.net/~devjoe/sqsq/
http://mathworld.wolfram.com/BlanchesDissection.html
http://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html
http://www.squaring.net/
Karl Scherer, *A General Theorem on Non-Touch Tilings of Squares and a General Theorem on Nowhere-Neat Tilings of Squares* in *Journal of Recreational Mathematics*, pp. 1-13, 2003.
D. Wells, *The Penguins Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, Londres, 1991

Le miraculeux « lemme de Burnside »

Rachel W. Hall, Paul Klingsberg, *Asymmetric Rhythms and Tiling Canons* in *American Mathematical Monthly*, décembre 2006.
Nick Baxter, *The Burnside Di-Lemma: Combinatorics and Puzzle Symmetry*, in *Tribute to a Mathematician*, Edited by Barry Cipra, Erik Demaine, Martin Demaine and Tom Rodgers, A.K. Peters, Wellesley Massachusetts, pp. 199-210, 2005.
Doris Schattschneider, *Escher's Combinatorial Patterns*, Electr. J. Comb., vol. 4, p. 2, 1997.
Peter M. Neumann, *A Lemma That is Not Burnside's*, Math. Scientist, vol. 4, pp. 133-141, 1979.
C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New-York, 1968.
Willian Burnside, *Theory of groups of finite order*, Cambridge University Press, 1897.

CHAPITRE III - JEUX

Le tsunami du *Sudoku*

Encyclopédie Wikipedia, Sudoku, 2009 :
http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku
http://en.wikipedia.org/wiki/Algorithmics_of_sudoku
A Variety of Sudoku Variants, 2009 :
http://www.sudoku.com/forums/viewtopic.php?t=995
Sourendu Gupta, *Exploring the Mathematics of Su Doku*, 2009 : http://theory.tifr.res.in/~sgupta/sudoku/

Loto et loteries

Patrick Roger Lotomania, *Une approche scientifique du jeu et du comportement des joueurs*, Éditions Village Mondial, Pearson Education France, 2005.
Patrick Roger, Marie-Hélène Broihanne, *Efficency of Betting Markets and Rationality of Players: Evidence from the French 6/49 Lotto*, septembre 2003 :
http://www.institut-europlace.com/files/pdf/doc176670.pdf
K. Hardoon, H. Baboushkin, J. Derevensky, R. Gupta, *Underlying Cognitions in the Selection of Lottery Tickets* in *Journal of Clinical Psychology* 57(6), pp. 749-763, 2001.
Amos Tversky, Daniel Kahneman, *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncer-*

tainty. Journal of Risk and Uncertainty, 12, pp. 297-323, 1992.

Flexagones

Les Pook, *Flexagons Inside Out*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
Harold V. McIntosh, *A Quick Flexagon Survey*, 2003 :
http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html
Robert E. Neale, *Self-Designing Tetraflexagons*, in *The Mathemagician and Pied Puzzler. A Collection in Tribute to Martin Gardner*, Edited by Elwyn Berlekamps and Tom Rodgers, A. K. Peter, Ltd, Natick, MA, 1999.
David Mitchell, *The Magic of Flexagons*, Norfolk England, 1998
Anthony S. Conrad, *The theory of the flexagon*, 1962 :
http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html
Antony S. Conrad, Daniel K. Hartline, *Flexagon* (livre gratuit en ligne), 1962 :
http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html
Martin Gardner, *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, chapter 2 : *Tetraflexagons*, Simon and Schuster, New York, 1961.
Martin Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, chapter 1 : *Hexaflexagons*, Simon and Schuster, New York, 1959.
Martin Gardner, *About tetraflexagons and tetraflexigation*, in *Scientific American*, mai 1958, pp. 122-126.
Martin Gardner, *Flexagons*, in *Scientific American*, décembre 1956, pp.162-166.

Calculs et coulissements

Gérard Villemin, *Le jeu de Taquin*, 2009 : http://villemin.gerard.free.fr/Puzzle/Taquin.htm
The Sliding Block Puzzle Pages 2009 (pour jouer aux casse-tête à pièces coulissantes) :
http://www.puzzleworld.org/SlidingBlockPuzzles/default.htm
Sliding Block Puzzles, *The Mathematics Association of America*, Math Games, 2009 :
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_13_04.html
David Eppstein, *Computational Complexity of Games and Puzzles*, 2009 :
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html
Robert Hearn, Erik Demaine, *PSPACE-Completeness of Sliding-Block Puzzles and Other Problems through the Nondeterministic Constraint Logic Model of Computation*, 2005 :
http://arxiv.org/abs/cs.CC/0205005
Robert A. Hearn, Erik D. Demaine, *The Nondeterministic Constraint Logic Model of Computation: Reductions and applications*, in *Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, vol. 2380 de *Lecture Notes* in *Computer Science*, pp. 401–413, 2002 :
http://groups.csail.mit.edu/mac/users/bob/ncl.pdf
Martin Gardner, *The Hypnotic Fascination of Sliding-block Puzzles* in *Scientific American*, n° 210, pp. 122–130, 1964.

Coopération et compétitions

R. Dorat, J.-P. Delahaye, *Networks of Communities and Evolution of Cooperation* in *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18-7, pp. 2123-2131, 2008 :
http://www.worldscinet.com/ijbc/18/1807/S0218127408021610.html
D. Hruschka, J. Henrich. Fiendship, *Cliquiness and the Emergence of Cooperation*, *Journal of Theoretical Biology*, 239, pp. 1-15, 2006.
J. Briffaut, Mémoire de DEA, Laboratoire d'Informatique fondamentale de Lille, 2004.
Samuel Bowles, Herbert Gintis, *Optimal Parochialism: The Dynamics of Trust and Exclusion in Network*, 2000 :
http://www.santafe.edu/research/publications/wpabstract/200003017

M. Nowak, R. May, *Evolutionary Games and Spacial Chaos* in *Nature*, 359, 29, pp. 826-829, octobre 1992.
R. Axelrod, *The Evolution of Coopertion*, Basic Book, New York, 1984.

CHAPITRE IV - NOMBRES

Les nombres zébrés

Kevin Brown *Schizophrenic Numbers*, 2009 :
http://www.mathpages.com/home/kmath404.htm
Richard Homes *Schizophrenic Numbers*, Zebra Irrationals, 2004.
Roland Yéléhada, *Communication personnelle*, mai 2004.
David H. Bailey, Richard E. Crandall, *Random Generators and Normal Numbers*, 2003 (progrès récents sur le problème de l'aspect aléatoire des irrationnels spontanés):
http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/860344-3JuGpd/860344.pdf
Clifford Pickover, *Magiques mathématiques*, Dunod, 2003 (voir pp. 74-76 et 277-287).
Jean-Paul Delahaye, *Le fascinant nombre Pi*, Belin-Pour la Science, 1997 (Le chapitre 10 traite du problème de l'aspect aléatoire des décimales du nombre Pi).
Carl Sagan, *Contact Edition Mazarine*, Paris, 1986, traduit de l'ouvrage américain *Contact Editions Simon and Schuster*, New York, 1985.

Nombres premiers inévitables et pyramidaux

G.L. Honaker, Ch. Caldwell, *Palindromic Prime Pyramids* in *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30.3 pp. 169-176, 2009 :
http://www.utm.edu/~caldwell/supplements
Richard Crandal, C. Pomerance, *Primes Numbers: A Computational Perspective*, Springer, New York, 2001.
Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Éditions Belin-Pour la science, 2000.
H. Dubner, *Twin Prime Conjectures* in *Recreational Mathematics*, vol. 30.3, pp. 199-205, 2000.
Jeffrey Shallit, *Minimal Primes*, in *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30.2, pp. 113-117, 2000.

Quelles pièces pour faire l'appoint

Roland Yéléhada, *La tradition avait raison: le problème de la meilleure échelle de valeur pour les pièces de monnaie*, Lettre à l'auteur, juin 2005.
Jeffrey Shallit, *What This Country Needs is an 18 Cents Piece* in *The Mathematical Intelligencer*, 25-2, pp. 20-23, 2003.
Tom Young, *Change the Dime, not the Dollar!*, 1995.
Dexter Kosen, Shmuel Zacks, *Optimal Bounds for the Change Making Problem* in *Theoretical Computer Science*, n° 123, pp. 377-388, 1994.

Des mots magiques infinis

G. Allouche, J.-P. Allouche, J. Shallit, *Kolam indiens, dessins sur le sable aux îles Vanuatu, courbe de Sierpinski et morphismes de monoïde*, 2006 : http://www.lri.fr/~allouche/kolam.pdf
Tero Harju, Dirk Nowotka, *Binary Words With Few Squares*, in *Bulletin of the European Association of Theoretical Computer Science*, 89, pp. 163-166, 2006.
Narad Rampersad, Jeffrey Shallit, *Words Avoiding Reversed Subwords*, in *Combin. Math. Combin. Comput.*, 54, pp. 157-164, 2005.
Narad Rampersad, Jeffrey Shallit, Ming.-Wei Wang, *Avoiding Large Squares in Infinite Binary Words* in *Theoretical Computer Science*, n° 339, pp. 19-34, 2005.
Christoph Richard, Uwe Grimm, *On the Entropy and Letter Frequencies of Ternary Square-Free Words*, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 11, 2004 : http://arxiv.org/abs/math.CO/0302302
Jean-Paul Allouche, Jeffrey Shallit, *Automatic Sequences, Theory, Applications, Generalizations.*

Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
Jean-Paul Allouche, Jeffrey Shallit, *The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence*, in C. Ding. T. Helleseth, and H. Niederreiter, eds., *Sequences and Their Applications*: Proceedings of SETA '98, Springer-Verlag, 1-16, 1999.
Jean-Paul Delahaye, *Logique, informatique et paradoxe*, Éditions Belin-Pour la science, 1995.

CHAPITRE V - CASSE-TÊTE

L'emprise des cavaliers

Frank Rubin, *Knight Coverings For Large Chessboard*, 2009 : http://www.contestcen.com/knight.htm
Noam D. Elkies, Richard P. Stanley, *The Mathematical Knight, The Mathematical Intelligencer*, 25-1, pp. 22-33, 2003.
Bernard Lemaire, *Knights Covers on NxN Chessboards, J. Recreational Mathematics*, 31-2, pp. 87-99, 2003.
David Fisher, *Fractional Domatic Number and Asymptotic Knight Density*, 2000.
Edward Hordern, *Wath's up ?: Crazy Knights Puzzle*, in *Cubisme for Fun*, n° 45, 1998.
Martin Gardner Mathematical Magic Show, 1979. (traduction française *Math'Festival*, Belin-Pour la science, 1981).

Couleurs des chapeaux et codes correcteurs d'erreurs

J. P. Buhler, *Hat Tricks* in *The Mathematical Intelligencer*, n° 4, pp. 44-49, 2002.
Hendrick Lenstra, Gadiel Seroussi, *On Hats and Other Covers* in *International Symposium on Information Theory*, Lausanne, 2002.
Megan Breit, Didier Deshommes, Andrea Falden, *Hats Required*, 2002.
Sara Robinson, *Why Mathematician Now Care About Their Hat Color* in *The New York Times*, 10 avril 2001.
Jean-Paul Delahaye, *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, Pour la science-Belin, 1998 (le chapitre 12 présente une variante ancienne du problème des chapeaux où l'équipe gagne par un vote majoritaire).

La traversée du pont

Moshe Sniedovich, *The Bridge and Torch Problem*, 2009 :
http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/bridge/
Torsten Sillke, *Crossing the Bridge*, 2009:
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/
Günter Rote, *Crossing the Bridge at Night*, Bulletin de l'EATCS (*European Association for Theoretical Computer Science*) n° 78, pp. 241-246, 2002.

Le merveilleux tour des cinq cartes

Shai Simonson, Tara Holm, *Using a Card Trick to Teach Discrete Mathematics*, 2009 :
www.stonehill.edu/compsci/cardTrick.pdf
Michael Kleber, *The Best Card Trick* in *Mathematical Intelligencer* 24-1, pp. 9-11, 2002.
Colm Mulcahy, Fitch Cheney, *Five Card Trick*, MAA Horizons, 2, 2003.
Shai Simonson, Tara Holm, *A Combinatorial Card Trick*, 2003.
W. Lee, *Math Miracles*, Seeman Printery, Inc., Durham, NC, pp. 49–51, 1950.