

Cahier de Mathématiques (activités et synthèses) Tome 1

Prénom :

Nom :

Classe : Terminales Sciences exactes

Année Scolaire : 2022 – 2023

Auteur: Issa Malle / 76 14 60 91

email : issamalle584@gmail.com

Adresse : Kalabancoro / Kabala-Est (Niamacoro courani)

Programme de mathématiques (UA₁)
Terminales Sciences Exacte : TSE (6 heures par semaine) coefficient : 5

Chapitre I : NOMBRES COMPLEXES

Le corps des nombres complexes.

Bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C} : (a, b) \mapsto a+bi$ (forme algébrique). Représentation géométrique d'un nombre complexe; affixe d'un point, d'un vecteur. Nombres complexes conjugués. Module; inégalité triangulaire. Module d'un produit, d'un quotient. Nombres complexes de module 1. Argument d'un nombre complexe non nul. Notation: Arg . Propriétés. Forme trigonométrique, Forme exponentielle d'un complexe: $e^{i\varphi} \times e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$.

– Complément de trigonométrie. Formule de Moivre. Exemple de linéarisation de polynômes trigonométriques. Conversion de produit en somme et de somme en produit. Réduction de $a \cos x + b \sin x$.

– Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe ; interprétation géométrique. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré. Exemple de factorisation de polynômes dans $\mathbb{C}$. Application à la résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations de degré supérieur à 2

Chapitre II : ARITHMÉTIQUE

– Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs; multiple d'un entier relatif, notation $n\mathbb{Z}$.

– Sous – groupe de $\mathbb{Z}$.

– Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Numération décimale et binaire.

– Congruence modulo n . Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

– Nombres premiers; si n est premier alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps (admis)

– Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers; existence et unicité.

– Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Application à des problèmes pratiques.

Chapitre III : FONCTIONS NUMÉRIQUES

*** Propriétés des fonctions numériques d'une variable réelle**

– Fonction continue sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues. Composé d'une fonction de limite l et d'une fonction continue en l .

– Si une fonction f est croissante sur $]a; b[$ et si elle est majorée alors elle admet une limite à gauche en b (admis).

– Fonction tendant vers $+\infty$ (resp vers $-\infty$). comportement d'une fonction somme d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers $+\infty$ (resp $-\infty$). Comportement d'une fonction produit d'une fonction admettant un minorant strictement positif et d'une fonction divergente vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

– Propriétés globales des fonctions continues sur un intervalle (fermé ou non). Théorème des valeurs intermédiaires (admis).

– L'image d'un segment par une fonction continue est un segment (admis).

Une application continue et strictement monotone sur un intervalle admet une application réciproque continue et strictement monotone sur l'intervalle image (la continuité de la réciproque est admise)

Exemple $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ où $n \in \mathbb{N}$ est la réciproque de $x \mapsto x^n$

– Complément sur la dérivation: nombre dérivé et fonction dérivée d'une fonction composée (admis).

– Théorème des accroissements finis (admis). Inégalité des accroissements finis.

– Existence de la dérivée de la réciproque (admis). Formule et notation des dérivées première et seconde: $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

*** APPLICATIONS**

Programme de mathématiques (UA₁)

Terminales Sciences Exacte : TSE (6 heures par semaine) coefficient : 5

– Complément sur l'étude des variations d'une fonction numérique : représentation graphique, applications à la résolution d'équations et d'inéquations : signe de la dérivée et sens de variations ; extrema ; recherche des directions asymptotiques, des asymptotes ; position de la courbe par rapport aux asymptotes pour les grandes valeurs de x .

* POSITON D'UNE COURBE PAR RAPPORT Á UNE AUTRE :

Position d'une courbe représentant les variations d'une fonction par rapport à sa tangente : point d'inflexion (on se bornera au cas $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$.)

* ETUDE LOCALE D'UNE FONCTION :

Exemple de développement limité en 0 (on se bornera à en donner la définition) :

Développement limité à l'ordre 3, en 0 des fonctions :

– $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$,

– $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \ln(1+x)$,

– $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Chapitre IV : Primitives d'une fonction - Intégrale

– Primitives usuelles (Définir à partir de la dérivée d'une fonction)

– Ensemble des primitives d'une fonction

– Complément sur les primitives de fonctions de types :

$(g \circ f)' \times f'$; $f' \times f^m$: $m \in \mathbb{Q} - \{-1\}$

– Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point fixé

– **Intégration d'une fonction continue.** Il est recommandé d'adopter la définition suivante: soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; on admet que f possède des primitives sur I et que deux quelconques d'entre elles diffèrent d'une constante. Il en résulte que, pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; on le note

$\int_a^b f(t)dt$ et on l'appelle " intégrale ", de a à b , de la fonction continue f . En d'autres termes : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est donc

l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en a . On traitera les questions suivantes :

– Relation de Chasles ; – Linéarité par rapport aux fonctions;

– Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;

– L'inégalité de la moyenne, valeur de la moyenne;

– Changement de variable affine; – Intégration par parties;

– Exemple d'étude d'une fonction de la forme : $x \mapsto \int_a^b f(t)dt$ où f n'a pas de primitive explicite;

– Application de l'intégrale au calcul d'aire d'une partie du plan définie par : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ où f est une fonction continue positive sur $[a ; b]$; généralisation à une fonction continue de signe quelconque ;

– Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Chapitre V : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

– Définition ; – Propriétés ; – limites usuelles (admisses) ; – représentation graphique.

– Définition de la fonction logarithme de base a (avec a un réel strictement positif et différent de 1). Cas particulier du logarithme décimal : Définition et utilisation en calcul numérique

Chapitre VI : FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE- FONCTIONS PUISSANCES

– Définition ; – Propriétés ; – limites usuelles (admisses) ; – représentation graphique

– croissance comparée des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^a$ ($a \in \mathbb{R}$) et $x \mapsto e^x$.

Vos critiques et suggestions sont les bienvenues pour une future amélioration de ce document.

Synthèse partielle :**1) Définition : Nombre complexe**

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

2) Notation et vocabulaire :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = \dots\dots\dots$

- L'écriture $\dots\dots\dots$ est appelée forme algébrique de z .
- Le nombre réel $\dots\dots$ est appelé partie réelle de z et noté $Re(z)$
- Le nombre réel $\dots\dots$ est appelé partie imaginaire de z et noté $Im(z)$
- Si $Re(z) \neq 0$; $Im(z) = 0$. On dit que z est un $\dots\dots\dots$
- Si $Re(z) = 0$; $Im(z) \neq 0$. On dit que le nombre z est $\dots\dots\dots$

Remarque :

Tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

3) Propriété :

Soit z et z' deux nombres complexes, on a :

- $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
- $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$

Activité 1 : Bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{P}$

Trouver tous les couple $(a ; b)$ des solutions des équations vues en situation problème.

Bilan :

Synthèse partielle :**1) Définition :**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$

L'application qui, à tout nombre complexe $a + bi$, associe le point $M(a ; b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$ et réciproquement.

Activité 2 : Interprétation géométrique

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$. Au point M de coordonnées $(a ; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

a) Placer dans le plan complexe, les points M_i associés aux nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2 + 3i \quad ; \quad z_2 = 5 - i \quad ; \quad z_3 = 4 + 5i \quad ; \quad z_4 = 3 - 4i \quad ; \quad z_5 = -4$$

b) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$; $\overrightarrow{M_1M_2}$; $\overrightarrow{M_5M_4}$ notés respectivement $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ Puis calculer leurs coordonnées.

c) quelle est la nature du quadrilatère $M_1M_2M_4M_5$ obtenue ? Justifie ta réponse

Bilan :

Synthèse partielle :**a) Théorème**

On admet que pour tout complexe $z = a + bi$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on associe un unique point M du plan de coordonnées $(a ; b)$ dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ du plan.

- Le point M est appelé image du nombre complexe z et notée $M(z)$
- Le nombre complexe z est appelé affixe du point M noté z_M .
- Au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a ; b)$, on peut associer le nombre complexe $z_{\vec{u}} = a + bi$. l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Ainsi, on a la représentation graphique du point M comme suite :



- ### Activité 3 : Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ ($a ; b$) $\in \mathbb{R}^2$ et $z_3 = a' + b'i$, ($a' ; b'$) $\in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes.

1) Ecris sous forme algébrique $z_1 + z_2$; et $z_1 \times z_2$; $z_1 \times z_3$

2) Calcule :

$$i^2 \quad ; \quad i^3 \quad ; \quad i^4 \quad ; \quad i^{4k} \quad ; \quad i^{4k+1} \quad ; \quad i^{4k+2} \quad ; \quad i^{4k+3} \quad ; \quad i^{2022}$$

3) Ecrire $(2 - 3i)^5$ sous forme algébrique

Bilan :

[illegible]

L'addition, et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies de la façon suivante :

Soit a, a', b, b' des nombres réels.

- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + i(b + b')$

- $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Activité 3-2 : Soustraction et division dans $\mathbb{C}$

Soient $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$ ($a ; b$) $\in \mathbb{R}^2$ et $z_3 = a' + b'i$, ($a' ; b'$) $\in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes.

1) Mets sous forme algébrique : $z_1 - z_2$; $z_1 - z_3$; $z_2 - z_3$

2) Mets sous forme algébrique : $\frac{1}{z_1}$; $\frac{z_2}{z_1}$

Bilan :

Synthèse partielle :

Soit z et z' deux nombres complexes

- La différence de z et z' est le nombre complexe $z - z' = z + (-z')$.
- Si $z' \neq 0$, le quotient de z par z' est le nombre complexe : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Soit a, a', b, b' des nombres réels.

- L'inverse de $a + bi$ s'obtient par la formule $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
- Le quotient : $\frac{a'+b'i}{a+bi} = (a' + b'i) \frac{1}{a+bi} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2}$
- Deux nombres complexes $Z = a + bi$ et $Z' = a' + b'i$ sont égaux si et seulement si $Z = Z'$ équivaut à :
 $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$.

Evaluation formative :

Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $Z = (2 - 3i)(-2 + i)$; b) $Z = (1 - i)(3 + 2i)$; c) $Z = \frac{(3+2i)(2+i)}{2-i}$

d) $Z = \frac{1}{4-3i}$; e) $Z = \frac{4+3i}{4-3i}$; f) $Z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{2}}$

Bilan :

Activité 4 : Nombres complexes conjugués

1) Soit $z = a + bi$; $z' = -a + bi$ et $z'' = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) trois nombres complexes

a) Calculer $z.z'$; $z.z''$ et $z'.z''$

b) Lequel des produits est un nombre réel positif ?

2) Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + bi$.

On appelle conjugué de z , le nombre noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - bi$.

On donne les nombres complexes suivants : $z = -2 + 3i$; $z' = -3i - 24$; $z_1 = -5$ et $z_1 = -2i$

a) Détermine $\bar{z}$ dans chaque cas où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z

b) Calculer $\bar{z} + \bar{z}'$; $\bar{z} - \bar{z}'$; $\bar{z} \times \bar{z}'$; $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

c) Calculer $\overline{z + z'}$; $\overline{z \times z'}$; $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

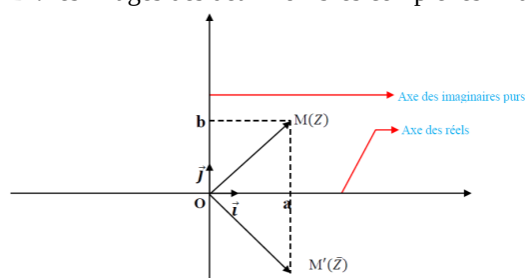
d) Quelles égalités obtiens tu ?

Bilan :

Synthèse partielle :

Soit $Z = a + bi$ l'expression algébrique d'un nombre complexe. On appelle conjugué de Z , le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = a - bi$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

- $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z$ est un réel
- $Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow Z$ est un imaginaire pur
- $\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$
- $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z}'$
- $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'}$ avec $Z' \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}}$ avec $Z \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$
- $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$
- $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z)$
- $Z - \bar{Z} = 2i \times \text{Im}(Z)$
- $Z \times \bar{Z} = a^2 + b^2$ est un réel positif

Evaluation formative :

Soit A un nombre complexe tel que : $A = \frac{2+\bar{Z}}{1-\bar{Z}}$ (avec $\bar{Z} \neq 1$).

1) Ecrire A sous forme algébrique

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tel que :

a) A soit un réel ;

b) A soit un imaginaire pur.

Bilan :

Activité 5 : Module et argument d'un nombre complexe**Activité 5-1 : Module d'un nombre complexe**

Soient $z = 2 + 2i$ et $z' = 3 - 4i$

Placer les points M et M' d'affixe respectives z et z' .

Calculer la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$ et $\|\overrightarrow{OM'}\|$

Bilan :

Activité 5-3 : Argument d'un nombre complexe - propriétés

- a) Placer le point M et M' d'affixe respective $z = 2 + 2i$ et $z' = 1 - \sqrt{3}$ dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
Unité 3 cm
- b) Calculer la distance OM et OM' (c'est-à-dire $|z|$ et $|z'|$)
- c) Soit θ la mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ et θ' celle de $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM'})$ Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ puis $\cos \theta'$ et $\sin \theta'$
- d) En déduire la mesure en degré de θ et θ' puis en radian.

Bilan :

Synthèse partielle :

Le nombre $\theta = \dots$ est appelé argument de z .

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (avec $|Z| \neq 0$). On appelle argument de Z le nombre réel noté θ ou $\arg Z$ tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases} \text{ avec } \theta = \arg Z \text{ modulo } 2\pi$$

Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π .

2) Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

- * $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \text{ modulo } 2\pi$
- * $\arg(z^n) = n \arg(z) \text{ modulo } 2\pi$
- * $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ modulo } 2\pi$
- * $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \text{ modulo } 2\pi$
- * $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \text{ modulo } 2\pi$
- * $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \text{ modulo } 2\pi$

NB :

Si $z = a$ alors $\begin{cases} \arg(z) = 0 \text{ si } a > 0 \\ \arg(z) = \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$

▪ Si $z = ib$ alors $\begin{cases} \arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$

Evaluation formative 1 :

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

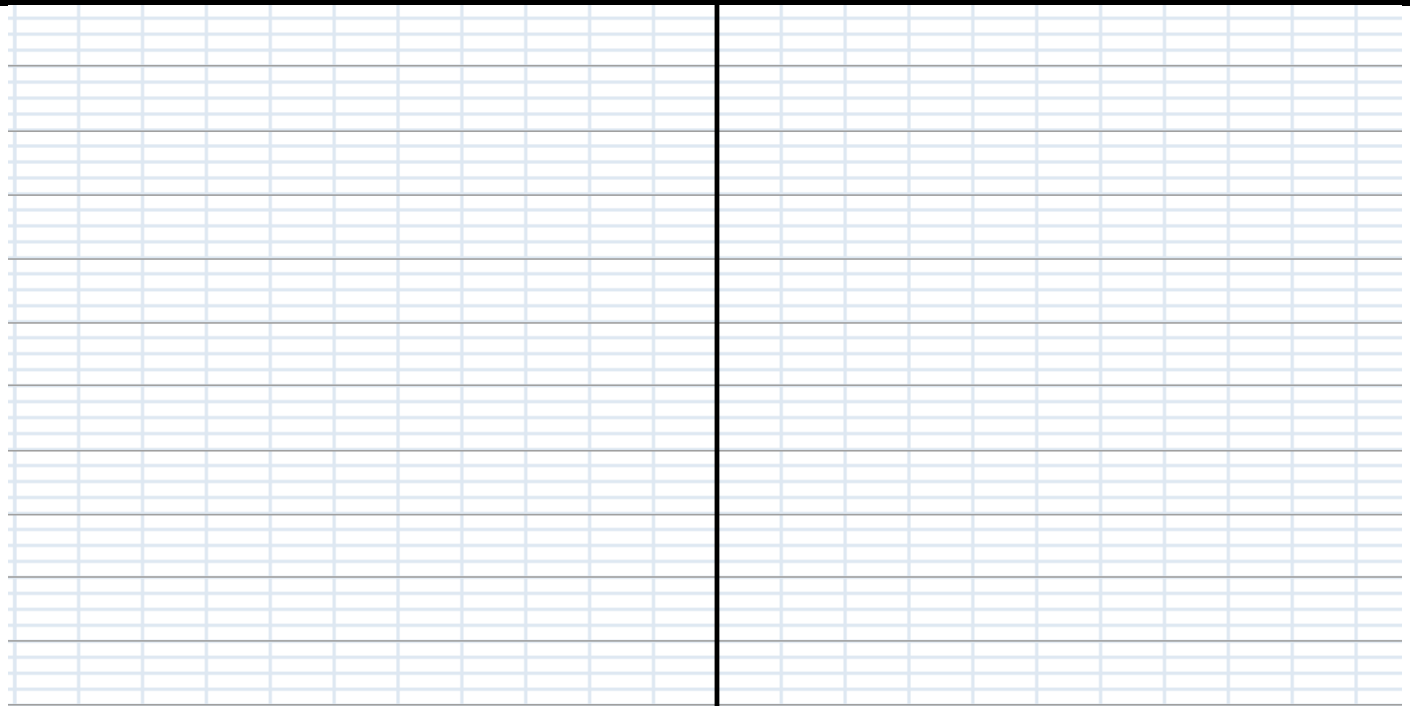
$$Z_1 = -1 - i\sqrt{3} ; Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; Z_3 = 1 + i ; Z_4 = 1 - i\sqrt{3}$$

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

$$Z_1 = 1 + i\sqrt{3} ; Z_2 = 2 - 2i ; Z_3 = -1 + i\sqrt{3} ; Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} ; Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 ; Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$$

Bilan :

--	--

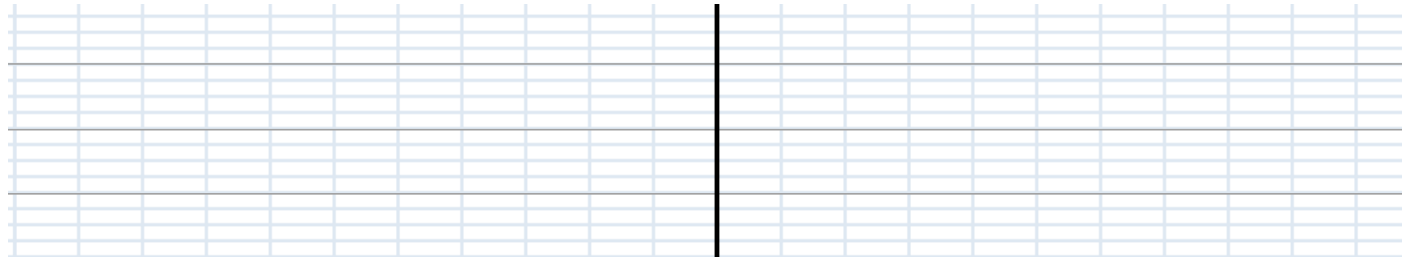
**Activité 6 : Forme trigonométrique, exponentielle et polaire d'un nombre complexe non nul**

Soit $z = a + bi$ et θ la mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ telle que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Ecrire le complexe z en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Bilan :

**Synthèse partielle :****1) Forme trigonométrique :**

Soit $Z = a + bi$ un nombre complexe de module $|Z|$ et d'argument θ . On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta \in [-\pi ; \pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases} \quad \text{avec } \theta = \arg Z$$

Propriété :

Soient Z et Z' deux complexes tels que $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $Z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$\begin{array}{ll} * & Z \times Z' = r \times r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] \\ * & \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')] \\ * & Z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \\ * & \frac{Z}{Z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ * & 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ * & 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \end{array}$$

2) Forme exponentielle :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ . On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z , toute écriture de Z se ramenant sous la forme $Z = re^{i\theta}$ où son conjuguée $\bar{Z} = re^{-i\theta}$

$$\begin{aligned} * \quad e^{i\theta} + e^{i\theta'} &= 2 \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right)} & * \quad e^{i\theta} - e^{i\theta'} &= 2 \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \theta'}{2}\right)} \end{aligned}$$

On appelle forme polaire de z l'écriture $z = [r ; \theta]$.

- 3) Ecris $z_1 z_2$ sous forme algébrique, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Bilan :

Activité 7 : Complément de trigonométrie :**Activité 7-1 : Binôme de Newton ou de Pascal (rappel)**

1) Donner la forme développée de :

2) $(a + b)^1$; $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$

Peux-tu donner une technique permettant de calculer $(a + b)^n$ avec n un entier naturel.

Bilan :

Synthèse générale :**a) Binôme de Newton :**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n \quad \text{ou} \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

b) Triangle de Pascal :

Les coefficients C_n^k du binôme de Newton sont donnés par le triangle de Pascal.

Voici le principe du triangle de Pascal :

c) Principe :

1										C_0^0									
1	1									C_1^0	C_1^1								
1	2	1								C_2^0	C_2^1	C_2^2							
1	3	3	1							C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3						
1	4	6	4	1						C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4					
1	5	10	10	5	1					C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5				
1	6	15	20	15	6	1				C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6			

Pour la différence $(a - b)$, on remplace b par $-b$. Ainsi le signe $(-)$ disparaît pour les puissances paires de $(-b)$ et reste pour les puissances impaires de $(-b)$.

$$(a - b)^5 =$$

b) écris $\cos^4 x$ et $\sin^3 x$ en fonction de $\cos nx$ et $\sin nx$; $n \in \mathbb{N}$.

Bilan :

[illegible]

[illegible]

Activité 7-3 : Conversion de produit en somme et de somme en produit

- 1) Exprimer $\cos a \cdot \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ à l'aide de la formule d'Euler.
- 2) En posant $a+b=p$ et $a-b=q$. En déduire l'expression de $\cos p + \cos q$

Bilan :

Synthèse partielle :**1) Formule de transformation du produit en somme :**

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad \text{de même} \quad \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

2) Formules de transformation de somme en produit :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \cos p - \cos q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad ; \quad \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Activité 8 : Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soit $z = r e^{i\theta}$ où r et θ sont respectivement module et argument de z .

On se propose de déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ de z .

1) On désigne par u une racine $n^{\text{ième}}$ de z

a) Exprime u en fonction de z .

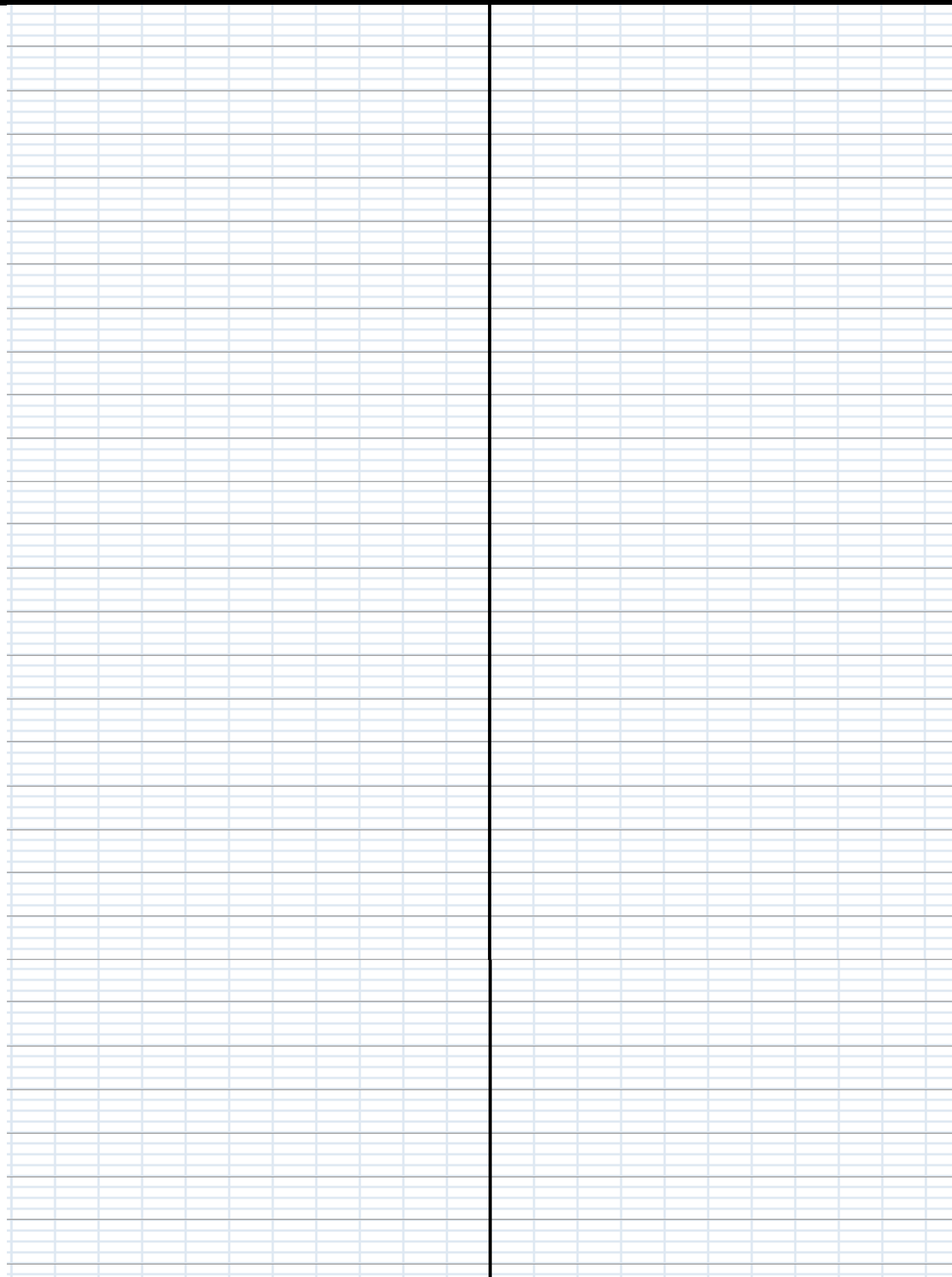
b) Exprime le module et argument de u en fonction du module et argument z .

c.) Déduis en la formule permettant de déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexes non nul de module r et d'argument θ .

2) détermine les racines cubiques de $-8i$.

Bilan :

[illegible]A blank sheet of graph paper with a light blue grid. The grid consists of small squares. A vertical black line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. There are 10 columns on each side of the line and 8 rows.



Activité 10-1 : Racine carrée d'un nombre complexe

a) On pose $z = x + yi$; $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$, Justifie que :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$$

c) On admet que si δ est une racine du discriminant Δ d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ alors les solutions sont données par $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$. Résous alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $2z^2 + 3z - 2 = 0$; $z^2 + z + 3 = 0$; $z^2 + 2(1+i)z + 2 = 0$

Bilan :

Synthèse partielle :

1) Equation du premier degré :

a) Définition : On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $aZ + b = 0$.

Avec ($a \neq 0$ et $a \in \mathbb{C}$).

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $aZ + b = 0$ est $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2) Racines carrées d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que $Z = z^2$

b) Résolution :

Si $Z = a + bi$ et $z = x + iy$. On dit que z est une racine carrée de Z si et seulement si :

$$\begin{cases} Z = z^2 \\ |Z| = |z|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + bi) = (x + iy)^2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

3) Equation du second degré :

a) Définition: On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{C} ; b \in \mathbb{C} ; c \in \mathbb{C})$$

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abord le calcul du discriminant associé Δ tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, on a : $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, on a : $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, on a : $Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = a + ib$ (sous forme algébrique), on a : $Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$.

Où δ_1 et δ_2 sont des racines carrées de Δ .

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, alors :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) ; \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

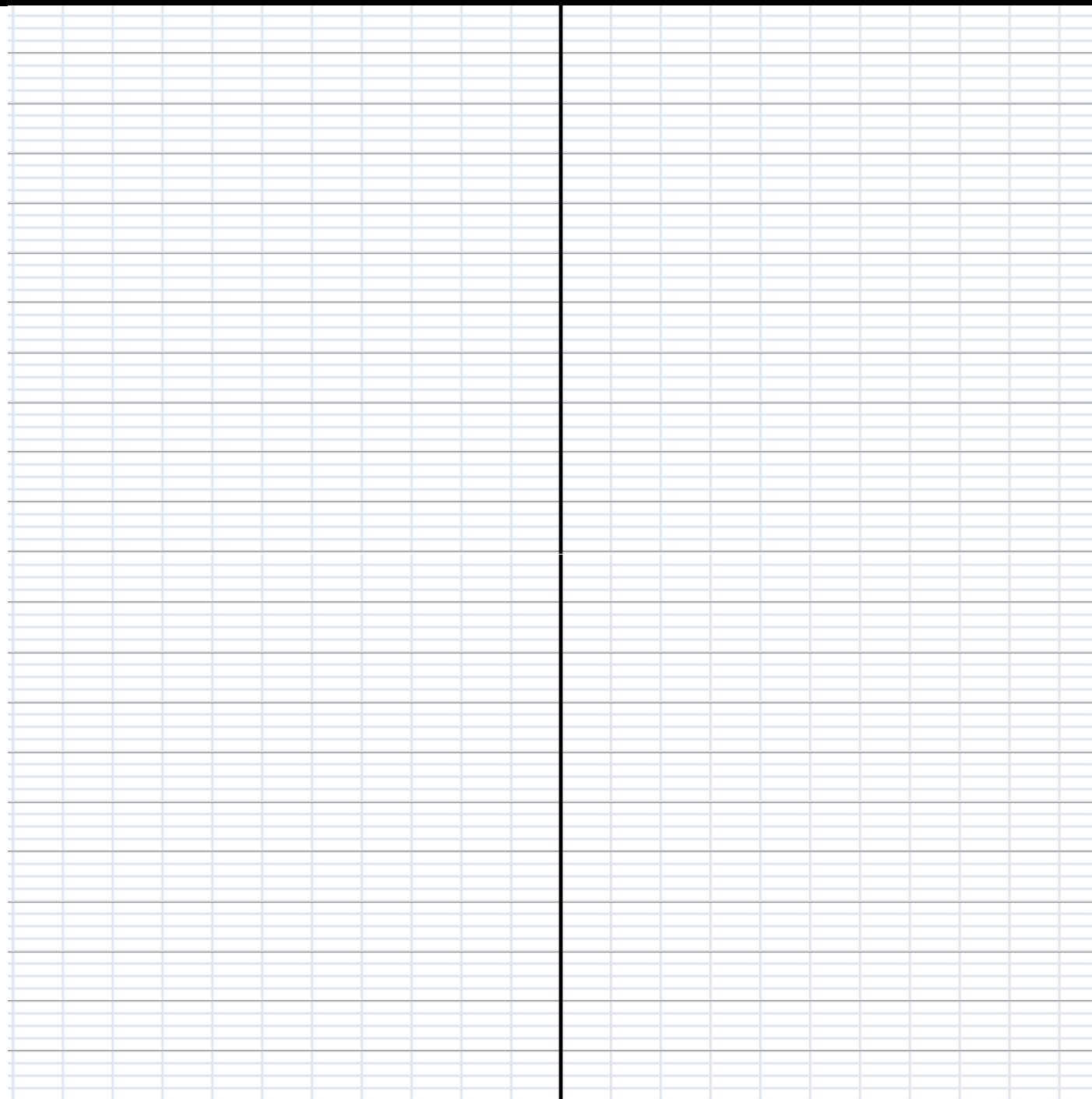
Evaluation formative :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

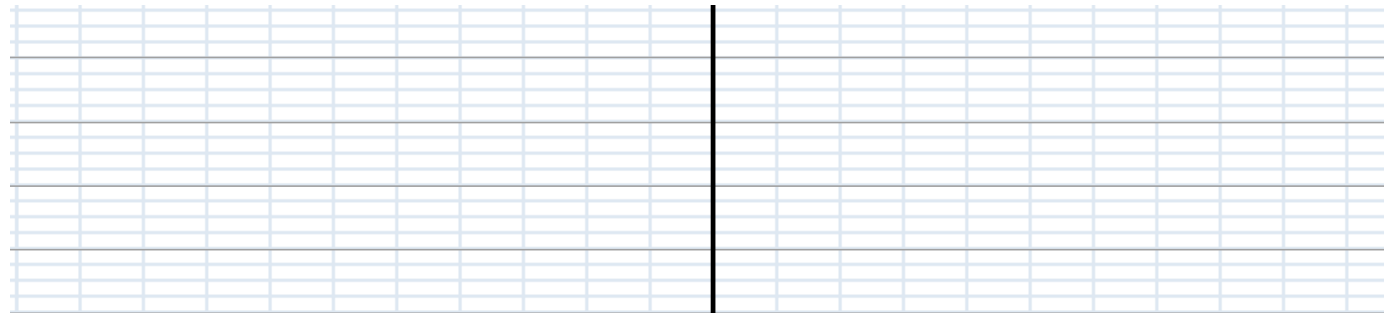
a) $P(z) = -iz^2 + (2 + 2i)z + (10 + 5i)$; b) $P(z) = (-1 + 2i)z^2 + (-5 + i)z + 9i + 6$

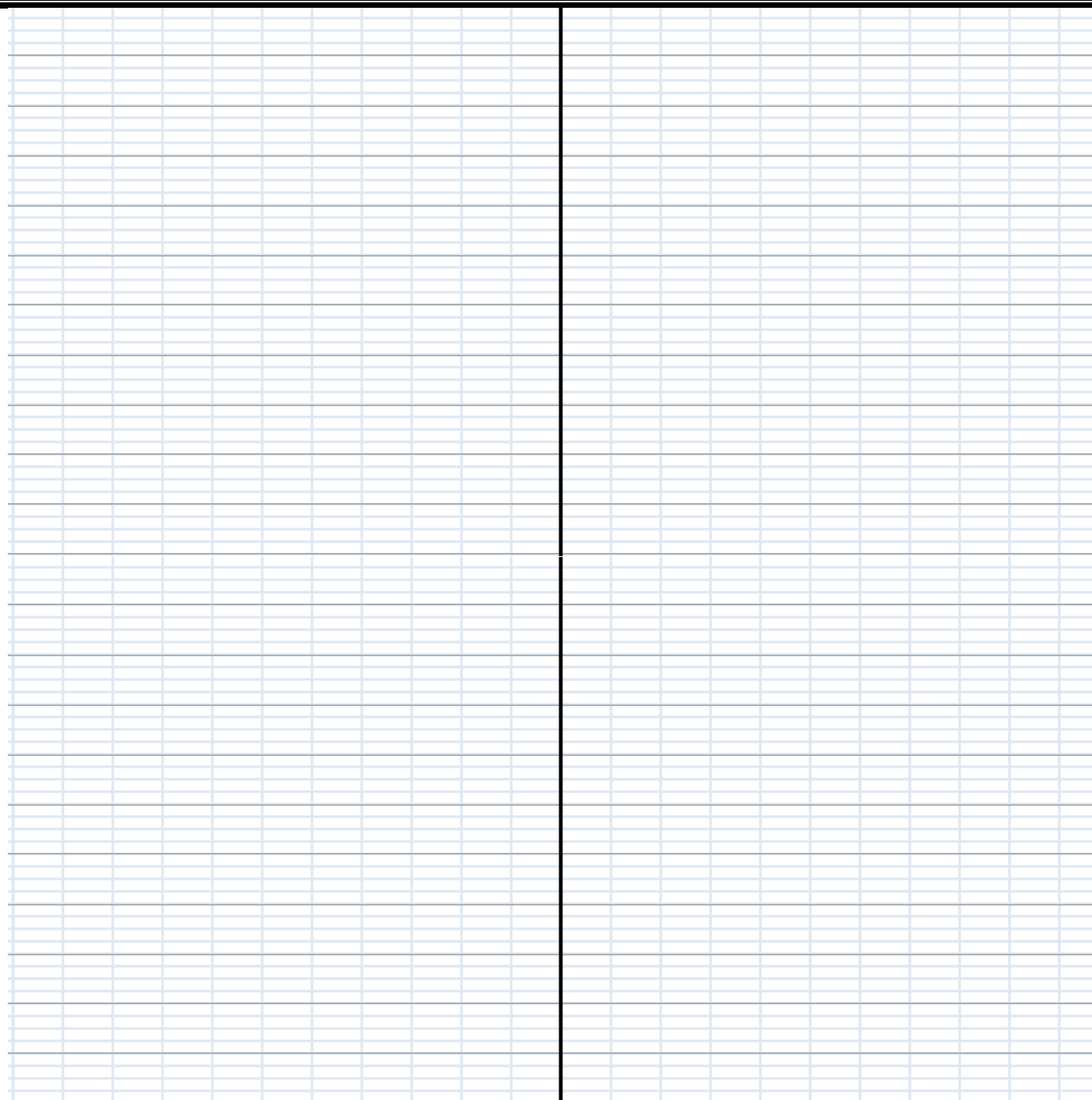
c) $P(z) = 2z^2 - 2(3 + 2i)z + 1 + 8i = 0$; c) $P(z) = 4z^2 - 4(1 + i)z - (45 + 26i)$

Bilan:

**Activité 12 : Application à la résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations de degré supérieur à 2**

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 + (4 - 5i)Z^2 + (8 - 20i)Z - 40i = 0$, sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Bilan :

**Synthèse partielle :****Equations se ramenant au second degré :****a) Définition :**

Ceux sont des équations dont le degré est supérieur à 2

Exemple : $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$; $aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e = 0$; etc

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite obligatoirement la reconnaissance d'une racine évidente : réelle

($Z_0 = a$) ou imaginaire ($Z_0 = bi$) ou encore $Z_0 = a + bi$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$) afin de factoriser puis de résoudre l'équation en utilisant l'une des techniques de factorisation qui suivent : (Division Euclidienne ; tableau d'Hôrner ou par identification des coefficients).

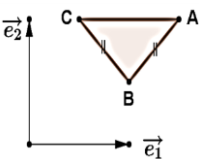
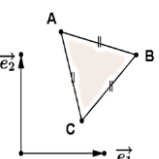
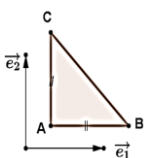
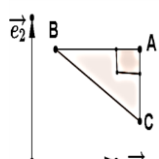
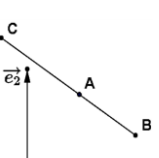
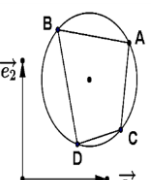
NB : Pour les équations bicarrées : $az^4 + bz^2 + c = 0$, il suffit de ramener l'équation bicarrée au second degré en posant :

$$z^2 = Z. \Rightarrow aZ^2 + bZ + c = 0 \text{ (avec } a \neq 0)$$

Activité 9 : interprétation géométrique

Activité 9-1 : Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en B 	$BA = BC$ $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\alpha} \text{ ou } e^{-i\alpha}$ $a \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC = BC$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{C} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	$AB = AC$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ ou } -i$
Triangle ABC rectangle en A 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib \text{ ou } -ib (b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 + k\pi$ Ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pi + k\pi$ $\text{mes}(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = 0[\pi]$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a (a \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C, D Cocyclique 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right)$ $\text{mes}(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = 0[\pi]$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \cdot \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

Application :

I) Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

Démontrer que ces trois points sont alignés.

II) Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

b) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

III) Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a) Etudier la nature des triangles ABC et BCD.

b) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Bilan :

This image shows a full page of graph paper. It features a uniform grid of small squares created by thin, light gray horizontal and vertical lines. A single, solid black vertical line bisects the entire page from top to bottom, creating two symmetrical halves. The background is white, and there are no margins or other markings present.

1) Distance entre deux points A et B :

$$d(A ; B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$$

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M . A d'affixe Z_A .

$$d(A ; M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$$

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B .

M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si $d(A ; M) = d(B ; M) \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'abscisse Z_M ; A est un point d'abscisse Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $\arg(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

1) Trouver l'ensemble (Γ) des points (M) du plan d'affixe Z tel que : $|Z - 3 + i| = 3$.

2) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que : $|\bar{z} - 1 + 2i| = 3$.

3) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que :

a) $\arg(Z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{3} + k\pi$; b) $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

4) A tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$

Détermine les ensembles de point M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $|Z| = 1$; b) $|Z| = 2$; c) Z est un nombre réel ; d) Z est nombre imaginaire

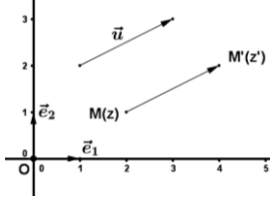
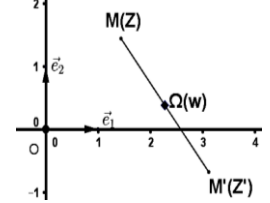
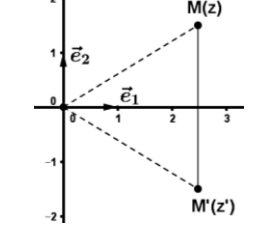
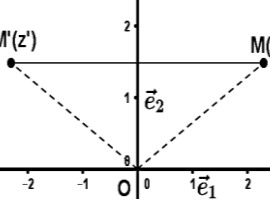
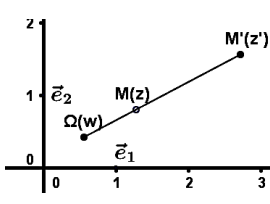
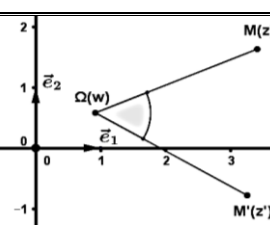
Bilan :

[illegible]

Activité 9-3 : Complexe et transformations géométriques du plan

Les transformations et nombres complexes sont résumés dans un tableau comme suite :

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous l'écriture complexe de certaines transformations du plan. Dans ce tableau, $M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacun de ces transformations.

Transformation	Image M' d'un point M	Définition géométrique	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(w)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - w = -(z - w)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}) = \pi - (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - w = k(z - w)$
Rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle α		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$	$z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$

Application :

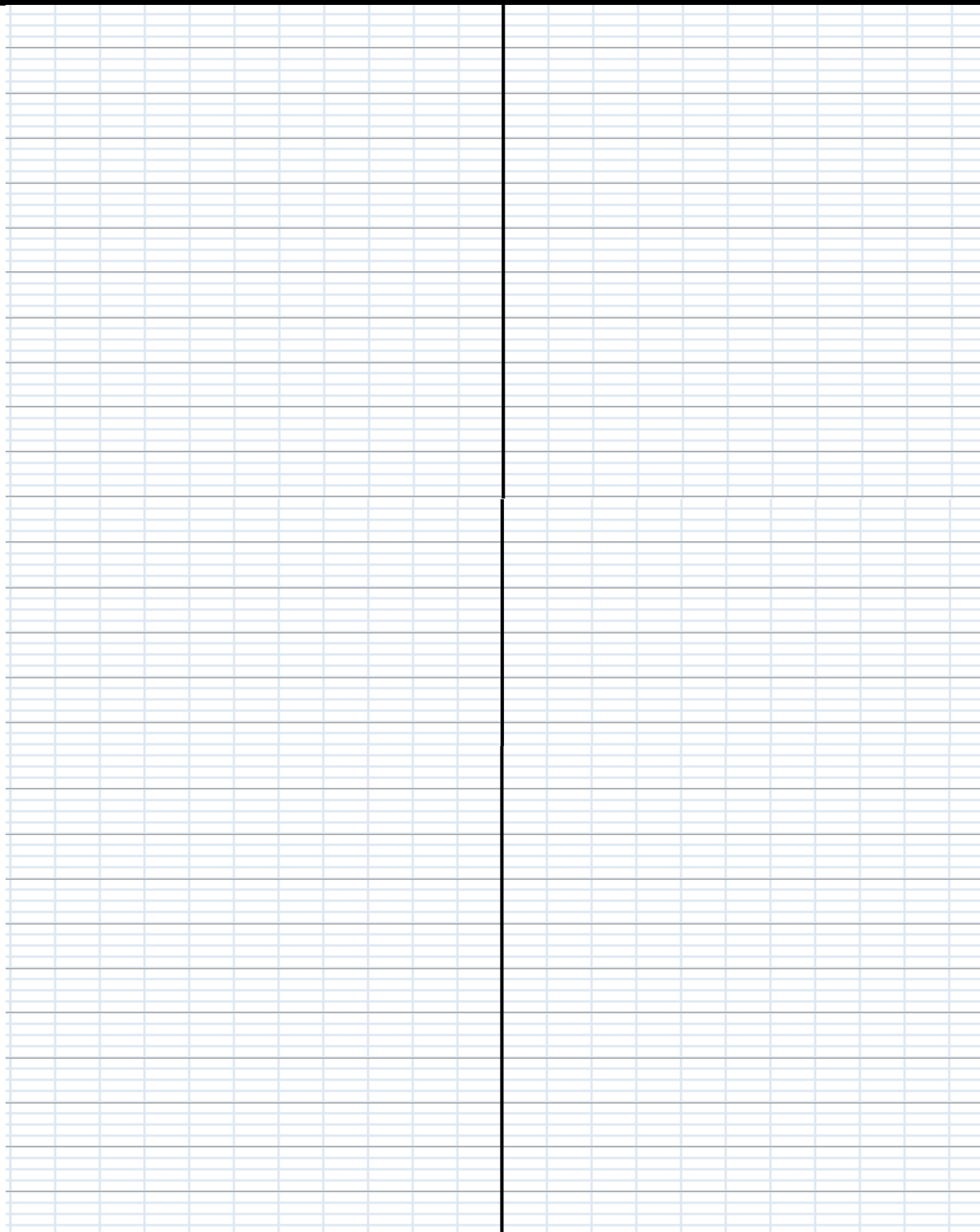
- 1) Soit la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $3 + 2i$
 - a. Déterminer l'écriture complexe de la translation t .
 - b. soit $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$. Détermine de l'expression analytique de la translation t .
- 2) Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $2 - 3i$ et de rapport 3.
 - a. Déterminer l'écriture complexe de h
 - b. Déterminer l'expression analytique de h .
- 3) Soit la rotation r de centre A d'affixe $z_A = 3i - 4$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

- Déterminer l'écriture complexe de rotation.
- Déterminer l'expression analytique de r .

Bilan :

[illegible]

Page 30



Pré-évaluation :

- 1) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 24 et 30 noté respectivement D_{24} et D_{30}
- 2) Détermine l'ensemble des diviseurs communs à 24 et 30 noté $D_{24} \cap D_{30}$
- 3) En déduis le plus grand commun diviseur de 24 et 30 noté $PGCD(24 ; 30)$.

Bilan :

[illegible]

Situation problème :

Dans l'écriture $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b , a ; b ; q et r sont des entiers naturels.

- a) Calcule b et q sachant que $a = 557$ et $r = 89$.
b) Calcule b et r sachant que $a = 1517$; $q = 75$.

Bilan :

[illegible]

Activité 1-1 : L'ensemble $\mathbb{N}$

- ### Synthèse partielle :

1) Propriétés de l'addition :

- ## 2) Propriétés de la multiplication :

- ### 3) Ordre dans $\mathbb{N}$:

Dans $\mathbb{N}$ on définit une relation notée $\leq$ par $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$

$$a \leq b \Rightarrow \text{il existe } c \in \mathbb{N} ; b = a + c$$

Propriétés :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$$

- $a \leq a$ (réflexive)
- $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitive)
- $a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a = b$ (Antisymétrique)

On dit que $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.

Activité 1-2 : Raisonnement par récurrence

Soient les trois premiers entiers naturels non nul.

- 1) Calcule la somme de leurs cubes et le carré de leurs somme. Que constates-tu ?
- 2) Fais de même pour les quatre premiers entiers naturels puis pour les cinq premiers entiers naturels

Bilan :

[illegible]

Synthèse partielle :

Ces observations conduisent à conjecturer que pour tout entier naturel non nul, ...

Etant dans l'impossibilité de démontrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n , nous allons utiliser un raisonnement par récurrence dont le principe est le suivant :

- **1^{ère} Etape :(Initialisation)**

On vérifie que la proposition P_n est vraie pour le terme initial, c'est-à-dire : (P_0 est vraie).

- **2^{ème} Etape :(Transmission)**

On suppose que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

- **3^{ème} Etape :(Conclusion)**

On conclut qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Application :

Démontrer par récurrence

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

Bilan :

Activité 1-3 : L'ensemble $\mathbb{Z}$

Compléter les phrases suivantes

- L'ensemble des nombres entiers relatif est noté = { }
- $\mathbb{Z}^*$ désigne.....,
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{ \dots \}$
- Pour tout entier relatif a et b , $a + b$ et $a \times b$ sont des..... On dit que l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne dans

Synthèse partielle :**1) Propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$:**

Pour a, b, c élément de $\mathbb{Z}$

- $a + b \in \mathbb{Z}$. On dit que (l'addition est une loi commutative interne dans $\mathbb{Z}$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$. On dit que (l'addition est associative)
- $\exists a' \text{ tel que } a + a' = 0$. On dit que (a est l'opposé de a')
- $a + 0 = 0 + a$. On dit que (0 est l'élément neutre)
- $a + b = b + a$. On dit que (l'addition est commutative)
- L'opposé d'un entier relatif a est unique et noté $-a$ et on l'appelle symétrique de a pour l'addition.
- Les 4 premières propriétés font de $(\mathbb{Z}, +)$ un groupe.
- Les 5 propriétés font de $(\mathbb{Z}, +)$ un groupe commutatif ou groupe abélien.

2) Multiplication dans $\mathbb{Z}$:

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ possède les propriétés suivantes

Pour tout entier relatif a, b, c

- $a \times b \in \mathbb{Z}$ (Multiplication est une loi de composition interne)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ la multiplication est associative
- $a \times 1 = 1 \times a$ 1 est l'élément neutre
- $a \times b = b \times a$ la multiplication est commutative
- $a \times (b + c) = ab + ac$ la multiplication est distributive par rapport à l'addition

Ces propriétés font de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire.

3) Structure de corps :

Soit un ensemble E muni de deux lois de composition interne $(T, *)$.

Cet ensemble est un anneau ssi (E, T) est un groupe abélien.

$*$ est distributive par rapport à T . C'est-à-dire $a * (bTc) = a * b T a * c$

Remarque :

- Si $*$ est commutative alors l'anneau est commutatif, si elle admet un élément neutre l'anneau est dit uniforme.
- Un ensemble E muni de deux lois de composition internes $(E, T, *)$ a une structure de corps ssi $(E, T, *)$ est un anneau.
- L'ensemble E privé de l'élément neutre T muni de la loi $(E, *)$ à une structure de groupe.

- Si b divise a , alors pour tout entier naturel n , b divise na .

Evaluation formative 1 :

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

- 1) $a = 59$ et $b = 18$ 2) $a = 59$ et $b = -18$
3) $a = -59$ et $b = 18$ 4) $a = -59$ et $b = -18$

Bilan :

Evaluation formative 2 :

- 1) Déterminer l'entier naturel n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.
2) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b .
Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$; rétablir la division

Bilan :

Activité 1-5 : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

- a) Déterminer tous les multiples de -3 et 6 .
 b) En déduire tous les multiples de -3 et 6 comprise entre -18 et 30 .

Bilan :**Synthèse partielle :****a) Définition :**Soient a et b deux entiers relatifs.

- On dit que a est un multiple de b ou que b divise a , s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.
- On dit que b est un diviseur de a , s'il existe un entier relatif q tel que : $a = bq$ (où q est le quotient de la division de a par b).

Remarque :Tout entier relatif est multiple de 1 et -1 1 ou -1 est un diviseur de tout entier relatif. 0 est multiple de tout entier relatif, tout entier relatif non nul divise 0 , 0 ne divise aucun entier relatif.Si $b \neq 0$ a est multiple de b (ou b divise a) ssi le reste de la division euclidienne de a par b est 0 .**b) Propriétés :**

- Si b divise a alors $b \leq |a|$
- Si a divise b et b divise c , alors a divise c . (a/b et b/c alors a/c)
- Si a divise b et a divise c , alors a divise $\alpha b + \beta c$. (a/b et a/c alors $a/\alpha b + \beta c$)

$$\begin{aligned}\overline{1441}^5 &= 1 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\ &= 1 \times 125 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 1 \\ &= 125 + 100 + 20 + 1 \\ &= 246\end{aligned}$$

Pour écrire le nombre 246 en base 5, on effectue les divisions entières successives de 246 par 5 jusqu'à ce que le quotient soit inférieur à 5.

$$\begin{array}{r|l} 246 & 5 \\ \hline 49 & \\ \hline 1 & 49 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi $246 = \overline{1441}^5$

4) Propriété :

- Par convention, dans le système décimal (appelé aussi à base 10), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux , à savoir : **0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9**.
C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

Exemple :

$$32401 = 3 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 30000 + 2000 + 400 + 1 = 32401$$

Donc, les chiffres **1 ; 0 ; 4 ; 2 ; 3** sont les coefficients respectifs des puissances croissantes de la base 10.

- Au Delas des 10 chiffres décimaux, on peut adopter les lettres : A ; B ; C ; D ; E...etc. pour : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 etc.

5) Changement de base :

a) Système binaire ou système en base 2 :

Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1

Evaluation formative :

Ecrire dans le système décimal le nombre $\overline{101111001}^2$

Ecrire le nombre 83 en base 2.

Bilan :

b) Système hexadécimal ou système en base 16 :

Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F

Evaluation formative :

Ecrire dans le système décimal le nombre $\overline{342}^5$

2) Ecrire dans le système binaire le nombre $\overline{1027}^{10}$

3) Ecrire dans le système décimal le nombre $\overline{F0A23}^{16}$

4) Sachant que $14 = 13 + 1$, écrire 14^8 dans le système de base 13.

5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal.

Ecrire ce nombre dans le système octal (à base 8).

[illegible]

- **Table d'addition :**

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{1} \\ + 11011 \\ \underline{1010} \\ = 100101 \end{array}$$

- **Table de multiplication**

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 101 \\ \hline = 1011 \\ 0000. \\ 1011. \\ \hline = 110111 \end{array}$$

A blank sheet of graph paper with a light blue grid. The grid consists of small squares. A thick vertical black line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. There are also horizontal lines spaced evenly across the page.

Soit $n \in \mathbb{N}$; démontrons que $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.

n	0	1	2	3	4
n^4	0	1	1	1	1
$n^4 - 1$	4	0	0	0	0
$n(n^4 - 1)$	0	0	0	0	0

Evaluation formative 1 : (Voir cahier)

Soit $a = 137$ et $b = 73$

Déterminer les restes de la division euclidienne de $a + b$; $3a - 2b$ et $a^2 + 3b^2$ par 25

1) Déterminer le reste de la division par 5 de 2^0 ; 2 ; 2^2 ; 2^3 et 2^n .

En déduire le reste de la division de 2^{20} par 5.

2) Déterminer le reste de la division de 7^n par 9 puis en déduire le reste de la division Euclidienne de 7^{2022} par 9.

3) Le nombre 2798793 est-il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?

Bilan :

[illegible]

Deux entiers x et y sont congru modulo n ssi x et y ont le même reste dans la division euclidienne par n . En conséquence les classes d'équivalences sont caractérisées par le reste de la division euclidienne par n .

Les restes possible de la division euclidienne par n sont :

$\{\dot{0} ; \dot{1} ; \dot{2} ; \dot{3} ; \dot{4} ; \dots ; \overline{n-1}\}.$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient n élément.

Exemple :

Dans la congruence modulo 2,

la classe $\dot{0}$: $x \equiv 0[2] \Rightarrow x = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\dot{0} = \{-\dots -6 ; -4 ; -2 ; 2 ; 4 ; 6 \dots\}$

La classe de $\dot{1}$: $x \equiv 1[2] \Rightarrow x = 1 + 2k$

Pour $k = 1$, $x = 3$ pour $k = 2$, $x = 5$ ainsi de suite

$\dot{1} = \{-\dots -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 \dots\}$

Consigne :

Fait de même sans la congruence modulo 3 .

Bilan :

Synthèse partielle :

1) Classe d'équivalence modulo n

a- Définition :

Lorsqu'un nombre quelconque x de $\mathbb{Z}$ est divisé par un entier naturel n, les restes possibles

sont : $0, 1, 2, \dots, n-1$.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{Z}$ appartient à la **classe $\dot{p}$ modulo n** si : $x \equiv p[n]$ avec $n-1 \geq 0$

D'une manière générale, si x est un élément de $\mathbb{Z}$, alors la classe de x modulo n est

l'ensemble de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont le même reste que x dans la division par n ; on

le note $cl(x) = \dot{x}$ tel que : $cl(x) = \dot{x} = \{y \in \mathbb{Z}/x - y \equiv 0[n]\}$

b- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

L'ensemble des classes $\dot{p}$ modulo n est noté par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et s'appelle groupe quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que :

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\dot{0} ; \dot{1} ; \dot{2} ; \dot{3} ; \dots ; \overline{n-1}\}.$

2) Propriétés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a) Propriétés (Addition) :

• L'associativité, $\dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z}$

• La commutativité, $\dot{x} + \dot{y} = \dot{y} + \dot{x}$

• L'élément neutre, $\dot{0}$ (car, $\dot{x} + \dot{0} = \overline{x+0} = \dot{x}$)

• L'élément $\overline{-x}$, symétrique de $\dot{x}$ (car $\dot{x} + \overline{-x} = \overline{x-x} = \dot{0}$).

b- Propriétés (Multiplication) :

• L'associativité : $\dot{x} \times (\dot{y} \times \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) \times \dot{z}$

• La commutativité : $\dot{x} \times \dot{y} = \dot{y} \times \dot{x}$

• L'élément neutre : $\dot{1}$ (car, $\dot{x} \times \dot{1} = \overline{x \times 1} = \dot{x}$)

• La distributivité par rapport à l'addition, soit : $\dot{x} \times (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) + (\dot{x} \times \dot{z})$

NB :

On dit qu'un anneau commutatif unitaire A est **intègre** si pour tout x, y de A, on a :

$x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Lorsque l'anneau n'est pas intègre, il existe x et y , tous non nuls, dont le produit est zéro. On dit alors que x et y sont des **diviseurs de zéro**.

Exemple : Table d'addition et multiplication dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Solution :

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

Evaluation formative :

Résoudre dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations ou système.

a) $4x + 5 = 0$; $x^2 = 1$

b) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

Bilan :

x	0	1	2	3	4	5	6
4x	0	4	1	5	2	6	3
4x + 5	5	2	6	3	0	4	1

$$4x + 5 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$$

Activité 5 : Nombre entier naturel premier

Soit à déterminer l'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 80. Pour cela : utiliser l'**algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

1) On construit une table des nombres allant de 1 à 80.

2) On élimine le nombre 1.

3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples

4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;

5) On procède ainsi jusqu'au nombre 80.

Bilan :

Activité 6-1 : PPCM de deux entiers relatifs :

- Bilan :**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small squares formed by thin, light blue horizontal and vertical lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

On dit que $PPCM(4 ; 6) = \dots$

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de a et b , le plus petit élément strictement positif de $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$ et on note $\text{PPCM}(a ; b)$.

Le plus petit commun multiple de a et b peut être noté comme suit : $PPCM(a ; b) = a \vee b = m$.

- $\forall a, b \in \mathbb{Z}^* \quad \text{PPCM}(a ; b) = \text{PPCM}(|a| ; |b|).$

- $\text{Max}(a ; b) \leq \text{PPCM}(a ; b) \leq a.b$
- $\text{PPCM}(a ; b) = a \Rightarrow a \in b\mathbb{Z}$

Exemple : $PPCM(12 ; 4) = 12 \Leftrightarrow 12 \in 4\mathbb{Z}$.

- Soit a et b deux entiers relatifs tel que : μ soit le PPCM. On a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$
- Si $a ; b$ et $k \in \mathbb{Z}^*$, $\text{PPCM}(ka ; kb) = k\text{PPCM}(a ; b)$

Exemple : $PPCM(120 ; 168) = PPCM(24 \times 5 ; 24 \times 7) = 24 \times PPCM(5 ; 7) = 24 \times 35 = 840$

- L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls a et b est l'ensemble des multiples de leurs *PPCM*, c'est-à-dire si $PPCM(a ; b) = m$; alors : $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$.

Exemple : $PPCM(4 : 6) = 12$ alors $(4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}) = 12\mathbb{Z}$

a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 14 et 12 noté respectivement D_{14} et D_{12} .

- b) Déterminer $D_{14} \cap D_{12}$. Puis déterminer le plus grand commun diviseur de 14 et 12.

Bilan :

Synthèse partielle :

On dit que $PGCD(14 ; 12) = 2$

a) Définition :

Soit a et b deux entiers relatifs non nul, on appelle plus grand commun diviseur de a et b et on note $PGCD(a ; b)$ le plus grand élément de D_a et D_b

Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de a et b peut avoir les notations suivantes :

$$PGCD(a ; b) = a \wedge b = d = \Delta$$

b) Propriétés :

- $\forall (a ; b) \in \mathbb{Z}^{*2} ; PGCD(a ; b) = PGCD(|a| ; |b|)$
- $\forall (a ; b) \in \mathbb{N}^{*2} ; 1 \leq PGCD(a ; b) \leq \min(a ; b)$
- $\forall (a ; b) \in \mathbb{N}^{*2} ; PGCD(a ; b) = a \Rightarrow a \in D_b$
- Soit a et $b \in \mathbb{Z}^{*2}$ σ leur PGCD, on a : $D(a ; b) = D(\sigma)$

Exemple : $PGCD(24 ; 30) = 6 \Rightarrow D(24 ; 30) = D(6) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

- $\forall a, b, k \in \mathbb{N}^* PGCD(ka ; kb) = kPGCD(a ; b)$

Exemple : $PGCD(205 ; 492) = PGCD(41 \times 5 ; 41 \times 12) = 41PGCD(5 ; 12) = 41 \times 1 = 41$

- $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ et σ leur PGCD un entier naturel, m est multiple de σ s'il existe deux entiers relatifs u et v tel que : $m = au + bv$

Exemple :

$$PGCD(205 ; 492) = 41 \text{ et } 82 \in 41\mathbb{Z}$$

$$\exists u, v \text{ tel que: } u = -2 ; v = 1 \text{ et } 82 = 205u + 492v$$

- Si $b > a$ alors $PGCD(a ; b) = PGCD(a ; b - a) = PGCD(b - a ; a - (b - a))$

Exemple : $PGCD(143 ; 27) = PGCD(27 ; 116) = PGCD(27 ; 86) = PGCD(27 ; 62) = PGCD(27 ; 35) = PGCD(27 ; 8) = PGCD(8 ; 19) = 1$

c) Algorithme d'Euclide :

Si $a = bq + r$ ($r \neq 0$) alors :

$$PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) \text{ et puis que } r = a - bq \text{ alors on a :}$$

$$PGCD(a ; b) = PGCD(a ; (a - bq))$$

Exemple : $PGCD(492 ; 205) = PGCD(205 ; 82) = PGCD(82 ; 41) = 41$

Evaluation formative 1 :

Déterminer le PGCD de 2070 et 368 par l'algorithme d'Euclide.

Bilan :

	2070	368	230	138	92	46
Quotient		5	1	1	1	2
Reste	230	138	92	46	0	

$$PGCD(2070 ; 368) = 46$$

[illegible]

Activité 8 : Exemple d'utilisation de l'algorithme d'Euclide**Activité : 8-1 : Détermination des coefficients d'une égalité de Bézout**

- a) Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide que 564 et 271 sont premiers entre eux.
 b) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $564u + 271v = 1$.

Bilan :

- On a : $564 = 271 \times 2 + 22$; $271 = 22 \times 12 + 7$; $22 = 7 \times 3 + 1$
 donc $\text{PGCD}(564; 271) = \text{PGCD}(271; 22) = \text{PGCD}(22; 7) = \text{PGCD}(7; 1) = 1$
 Puisque $\text{PGCD}(564; 271) = 1$ alors 564 et 271 sont premiers entre eux.
 - $564u + 271v = 1$

On a :

$$\begin{aligned}
 22 &= 7 \times 3 + 1 \Rightarrow 1 = 22 - 7 \times 3 \\
 &\Rightarrow 1 = 22 - 3(271 - 22 \times 12) \\
 &\Rightarrow 1 = 22 - 3 \times 271 + 22 \times 36 \\
 &\Rightarrow 1 = -3 \times 271 + 37 \times 22 \\
 &\Rightarrow 1 = -3 \times 271 + 37(564 - 271 \times 2) \\
 &\Rightarrow 1 = -3 \times 271 + 37 \times 564 - 74 \times 271 \\
 &\Rightarrow 1 = 37 \times 564 - 77 \times 271 \\
 &\Rightarrow 1 = 564(37) + 271(-77)
 \end{aligned}$$

Donc $564u + 271v = 1$ avec $u = 37$ et $v = -77$

Activité : 8-2 : Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations Diophantiennes Equations du type $(ax + by = c)$

- 1) On se propose de résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^2$. (E): $34x - 15y = 2$

- Déterminer le $PGCD$ de 34 et 15
 - Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E'): $34x - 15y = 0$
 - Déterminer une solution $(x_0 ; y_0)$ de E
 - Résoudre (E).
- 2) Retrouver les solutions de (E) en utilisant la congruence

Bilan :

This image shows a full page of graph paper. The background is white, and it is covered with a uniform grid of thin, light blue horizontal and vertical lines. A single, prominent black vertical line runs from the top edge to the bottom edge, exactly halfway across the page, creating two symmetrical columns. There are no margins, text, or other markings on the page.

Synthèse partielle :

a) Définition :

On appelle équation Diophantienne, toute équation de $\mathbb{Z}^2$ dont l'ensemble solution se présente sous forme de couple $(x ; y)$.

Résolution d'un cas particulier : Equation du type $ax + by = c$ où : $a ; b ; c$ sont tous des entiers (avec a et b non nul).

b) Théorème

L'équation : $ax + by = c$, admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple du $PGCD(a; b)$.

c) Résolution

Pour résoudre de telles équations, nous pouvons utiliser deux méthodes :

- $$S = \{(x_0 - b_1 k; y_0 + a_1 k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Bilan :

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The page features a uniform grid of small squares, created by light blue horizontal and vertical lines. A prominent black vertical line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. The grid extends to the edges of the page, providing a clean workspace for drawing or calculations.

Evaluation formative 2 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $S = \begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv 1[15] \end{cases}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$
- 3) Décomposition en produit de nombres premiers 4872 et 3600
- 4) Déterminer le PPCM et le PGCD de 700 et 78375 après avoir décomposé 700 et 78375
- 5) a) Quel est le nombre de diviseur positif de 14553 ?
b) Déterminer l'ensemble D des diviseurs de 14553

Bilan :

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The paper features a uniform grid of small squares formed by light blue horizontal and vertical lines. A prominent black vertical line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. The background is white, and the grid covers the entire area except for the central dividing line.

Pré-évaluation :

a) complète en rouge les limites de références ou usuelles ci-après

$$\lim_{x \rightarrow a} (C) = \dots ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \dots & \text{si } n \text{ est paire} \\ \dots & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \dots ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \dots & \text{si } n \text{ est paire} \\ \dots & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \dots & \text{si } n \text{ est paire} \\ \dots & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \dots ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \dots$$

b) Complète en rouge les définitions et propriétés suivantes

– Si x_0 appartient au domaine de définition de f alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots$

– Si x_0 n'appartient au domaine de définition de f alors on calcule si possible $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ respectivement appelées $\dots$ et si de plus $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$; $a \in \mathbb{R}$, alors on dit que $f \dots$

2) Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$. Trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{ax} \quad \text{avec } (a ; b) \in \mathbb{R}^{*2}$$

3) complète en rouge les tableaux suivants :

a) Somme de limite :

f et g sont deux fonction et a , l , l' trois réels tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l ; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$$

$f(x)$	l	0	$-\infty$	$+\infty$	0
$g(x)$	l'	l'	0	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) + g(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

b) Produit de limite :

$f(x)$	l	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l ; l > 0$	$l ; l < 0$	$l ; l < 0$	$l ; l > 0$
$g(x)$	l'	l'	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x) \times g(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

c) Quotient de limite :

$f(x)$	l	0	l	0	$-\infty$	$-\infty$
$g(x)$	l'	l'	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

d) Limite d'une racine carrée :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l \geq 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)}$	$\dots$	$\dots$

Bilan:

Retenons:

Dans un calcul de limites, on a une forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas conclure directement. Pour lever cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction :

- Soit en factorisant par le terme dominant (cas des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$)
- Soit en utilisant l'expression conjuguée (cas des fonctions racines carrées)
- Soit en revenant à la définition du nombre dérivé (cas des fonctions sous la forme d'un taux d'accroissement)

Situation problème:

N'Golo constate que la surface préparée par son père pour le jet des cauris est un rectangle carrelé de longueur $2x + 1$ et aire $x^2 - 8$ où $x \geq 3$

Il décide de connaître la largeur de cette surface préparée, de même que la longueur d'une de ces diagonales

1) Aide N'Golo dans ses recherches

2) Calcul ensuite les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8}{2x + 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 - 8}{2x + 1} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 8}{2x + 1} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 8} + 2x - 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{1}{x^2} \right)$$

Bilan :

Soit u la fonction définie par $u(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$

- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x)$ avec $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Bilan :

[illegible]

a) Définition :

Théorème : (admis)

Soit f et g deux fonctions. Soit a , b et c finis ou infinis.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$.

I) Soit f et g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$

- a) Compare les fonctions f et g sur $]0 ; +\infty[$
b) Comparer la limite de $f(x)$ et $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

II) Soient $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + x}$; $g : x \mapsto \frac{x + \sin x}{2x + 1}$; $h : x \mapsto \frac{4 \sin x + 3x}{x - 1}$

- 1) a) Démontre que pour tout $x \geq 0$; $f(x) > x$
 b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ puis fais une conjecture de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 2) a) Démontre que pour tout $x \geq 0$; $\frac{x-1}{2x+1} \leq g(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$.

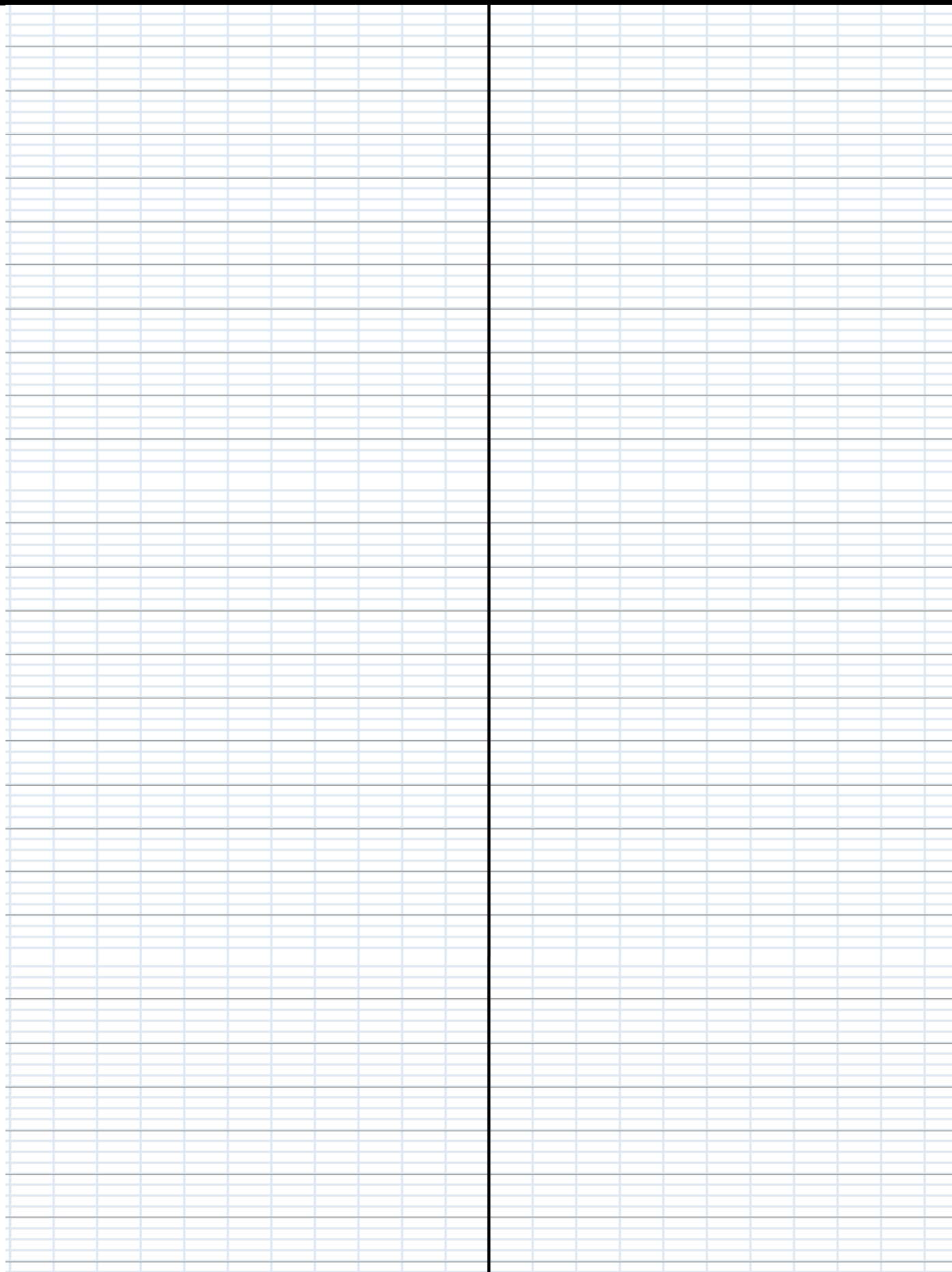
b) Calcule les limites en $+\infty$ des fonctions qui encadre $g(x)$ puis fais une conjecture de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

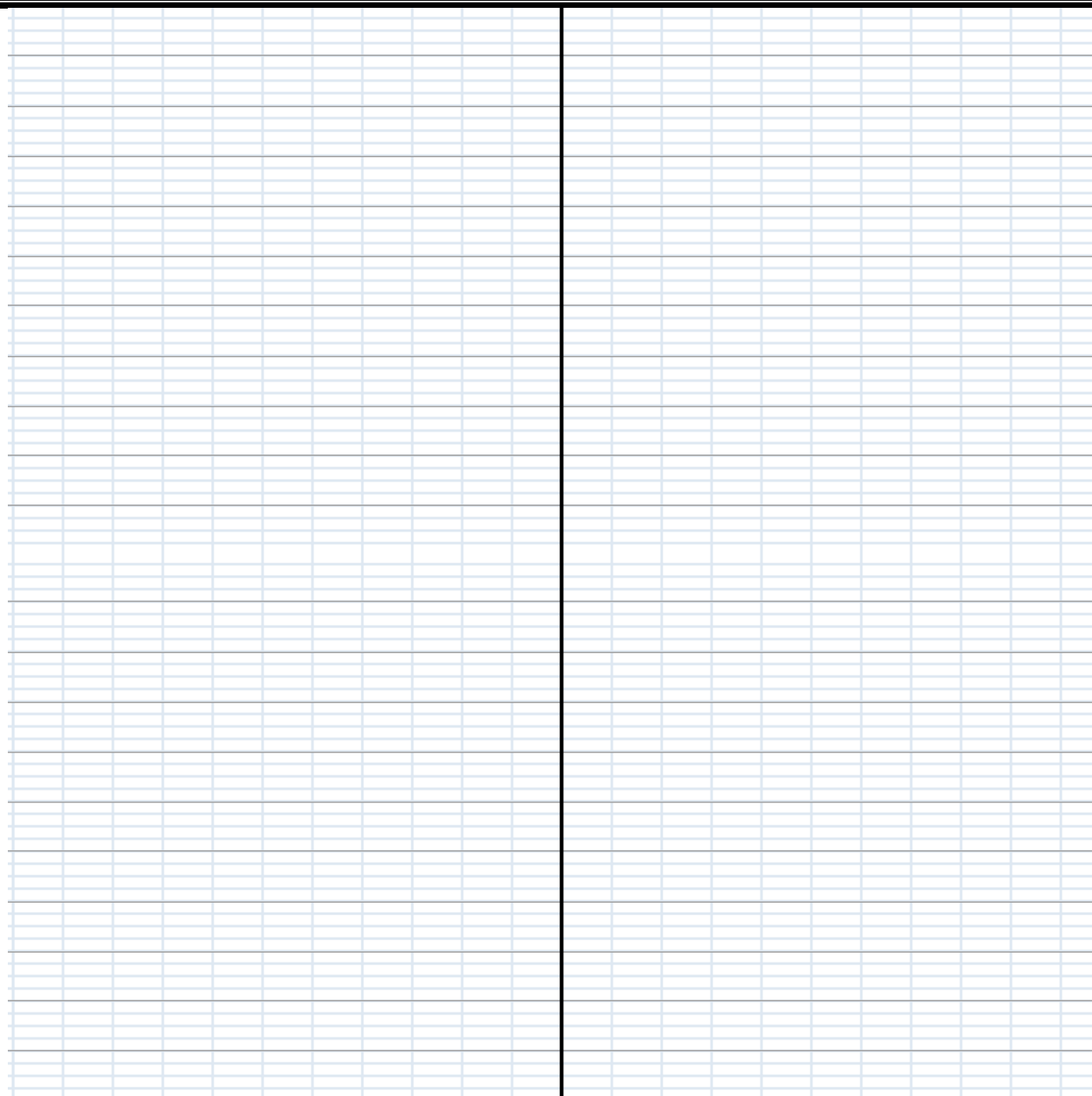
- 3) a) Vérifie que pour tout $x > 1$, $h(x) = \frac{4 \sin x + 3}{x-1} + 3$

b) Montre que $|h(x) - 3| \leq \frac{7}{x-1}$.

- c) En utilisant 2) a), déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 3)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

Bilan :



**Synthèse partielle :**

Définition : Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative. On appelle branche infinie de la courbe (C) une branche donc la direction est une droite et cette droite est appelée Asymptote.

a) Asymptote verticale :

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe dans un repère orthonormé et a un réel.

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite } (D) : x = a \text{ est} \\ \text{dite asymptote verticale à } (C) \end{array} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

b) Asymptote horizontale :

Soit f une fonction numérique de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé et b un réel.

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite } (D) : y = b \text{ est} \\ \text{dite asymptote horizontale à } (C) \end{array} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

c) Asymptote oblique :

Soit f une fonction numérique de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite } (D) : y = ax + b \text{ est} \\ \text{dite asymptote oblique à } (C) \end{array} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y) = 0$$

– Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O ; \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

– Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(0 ; \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$

– Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, ($a \in \mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$

* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie, alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à C_f en $+\infty$

2) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ dans les cas suivants :

$$a) f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-2} \qquad b) f(x) = \frac{3x^2+x-1}{2x+1}$$

b) Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x) - y$ puis en déduire la position relative de la courbe C_f par rapport à son asymptote.

Bilan :

Pour étudier la position de la courbe C_f de f par rapport à son asymptote oblique (D) d'équation $y = ax + b$; on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ dans D_f .

- Si $f(x) - (ax + b) < 0$; alors la courbe C_f est en dessous de (D) .
- Si $f(x) - (ax + b) > 0$; alors la courbe C_f est au-dessus de (D) .
- Si $f(x) - (ax + b) = 0$; alors la courbe C_f coupe (D) en un point x_0 .

les courbes (C) et (C') des fonctions f et g sont asymptotes si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

1) Trouver D_f , calculer les limites aux bornes et préciser les asymptotes.

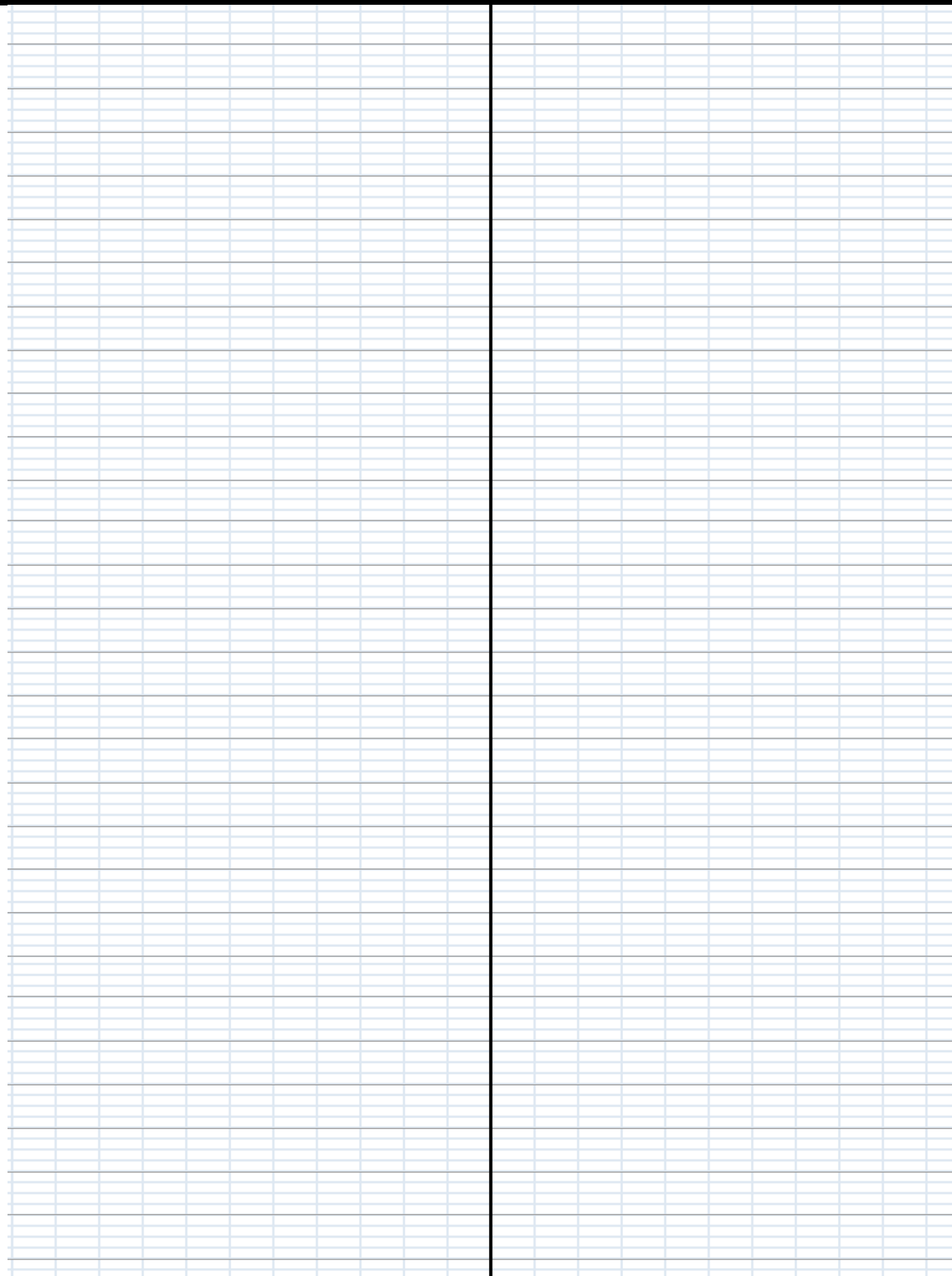
a) $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^2+7x+3}{x-1}$

2) Soit $f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x^2 + 1}$

- Trouver D_f
- Ecrire $f(x)$ sans le symbole $| \cdot |$
- Déterminer les asymptotes à la courbe (C)

Bilan :

[illegible]



1) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1[; f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ \text{pour } x \in]1 ; +\infty[; f(x) = x^2 + 1 \end{cases}$$

a) calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2) Soit $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $x_0 = 2$. Déterminer la limite de $f(x)$ en x_0 .

3) Soit la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$

a) Etudier la continuité de f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

b) Justifier que $\forall x \in [1 ; +\infty[, f(x) \geq -2$

c) Démontrer que tout élément β de $[-2 ; +\infty[$ a un antécédent α dans $[1 ; +\infty[$; tel que $f(\alpha) = \beta$. En déduire l'image par f de l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Bilan :

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The page features a uniform grid of small squares formed by thin black horizontal and vertical lines. A single, slightly thicker vertical line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. The background is white, and the grid covers the entire area except for a narrow margin at the top.

Synthèse partielle :

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$. On dit que $f(x)$ est continue en 2.

a) Continuité en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un réel appartenant à I .

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$.

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

$f(x_0)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l$ (l fini).

Remarque :

les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0 .

b) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si, f est continue en tout point de I .

Théorème 1 :

Toute fonction polynôme, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique et valeur absolue est continue sur chaque valeur qui compose son ensemble de définition.

Une fonction f définie sur un intervalle I ouvert est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a appartenant à I .

Théorème 2 :

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $f + g$; $f \times g$ et γf où $\gamma \in \mathbb{R}$ sont continue sur I
- Et si en plus g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I \quad g(x) \neq 0$) alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continue sur I .
- Si f est une fonction continue en un point x_0 et g une fonction continue au point $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ est continue au point x_0 .

c) Continuité à gauche – continuité à droite :

* Une fonction f est continue à gauche de x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

* Une fonction f est continue à droite de x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

NB :

Une fonction est continue en un point x_0 de I si elle est continue à gauche et à droite de x_0 .

d) Prolongement par continuité :

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0 .

NB : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0 .

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Déterminer le prolongement par continuité de f en 1

Solution :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

donc $g(x) = x+1$ est le prolongement de f en 1

Evaluation formative :

1) Etudier la continuité de la f au point x_0 tel que : $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = 1$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité au point x_0 .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ x_0 = 2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

3) Soit la fonction f définie par :

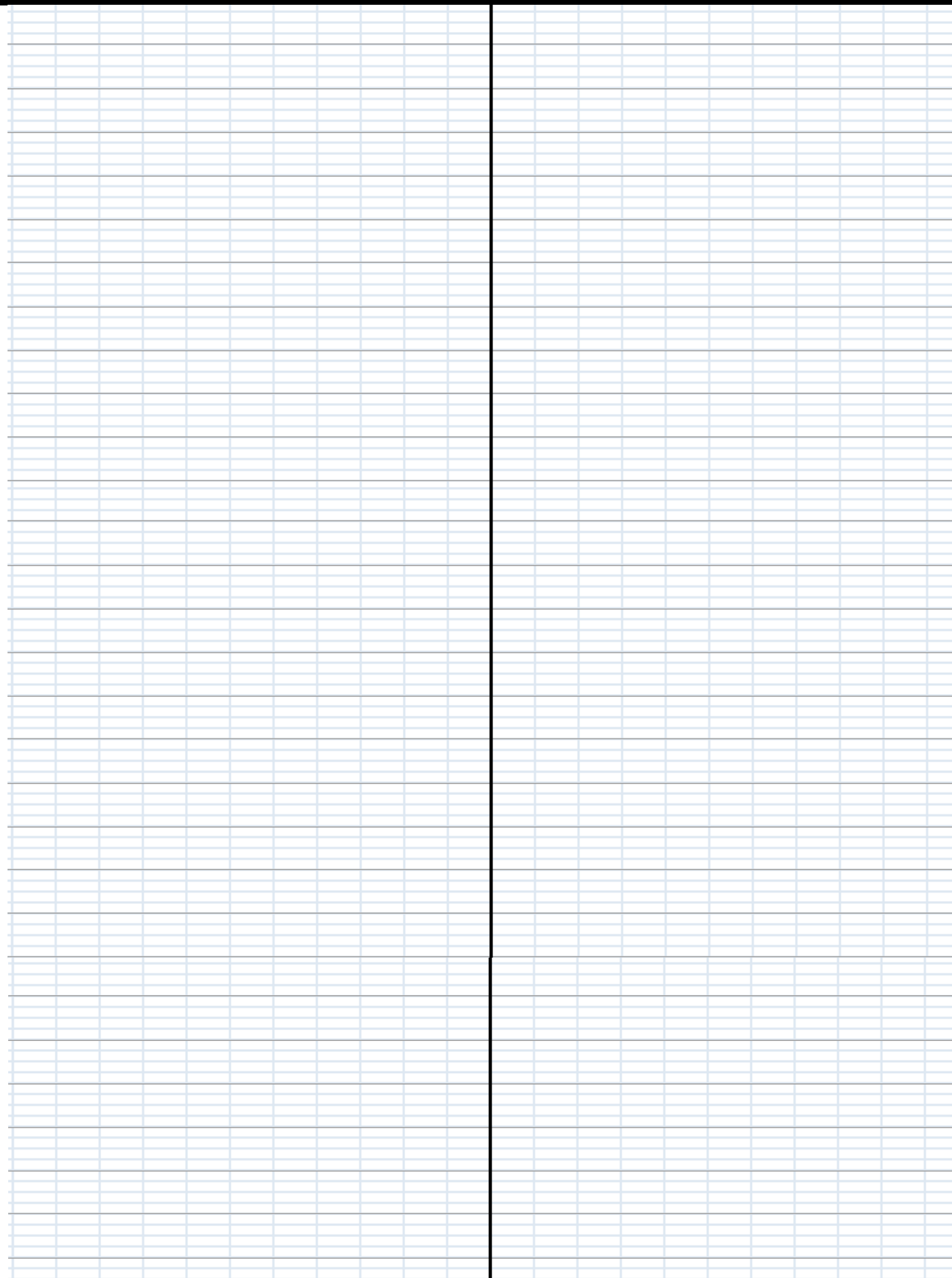
Si $x < -2$; $f(x) = -2x - 5$

Si $-2 \leq x < 1$; $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Si $1 \leq x$; $f(x) = -x + 6$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Bilan :



Soit $f : [2 ; +\infty] \rightarrow [-3 ; +\infty]$

$$x \quad \mapsto \quad x^2 - 4x + 1$$

a) Montrer que $f(x) = y$ équivaut à $(E): x^2 - 4x + 1 - y = 0$

c) Discuter suivant le signe de Δ le nombre de solution de E .

d) Conclure

e) En déduire la fonction réciproque f^{-1} .

Bilan :

[illegible]

a) Définitions :

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle I telle que $f(I)$ soit un intervalle J .
La fonction f est une bijection de I sur J lorsque tout élément de J a un et un seul antécédent dans I .
- Si une fonction f est une bijection de l'intervalle I sur J alors elle admet une fonction *bijection* réciproque définie sur l'intervalle J et à valeur dans l'intervalle I notée : f^{-1}

Si $y = f(x)$ alors $x = f^{-1}(y)$ où $x \in I$, $y \in J$

L'image d'un intervalle I par une *fonction* continue et strictement monotone sur I est un intervalle. La fonction détermine alors une bijection de I sur $f(I)$.

Pour se rendre à l'école, N'Golo parcourt avec sa moto une voie rectiligne rapportée à une droite graduée. A $t = 0$, la moto se trouve au point d'abscisse 2 et à $t = 2s$, la moto est repérée au point d'abscisse 8.

1) Exprime $x(t)$ en fonction de t .

2) Calcule la vitesse moyenne de la moto entre 0 et 2s.

3) Calcule la limite de $t \mapsto \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ en $t_0 = 2$

4) Que peut-on conclure ?

Bilan :

[illegible]

[illegible]

Fonctions f	Fonctions f'	Ensemble de définition
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

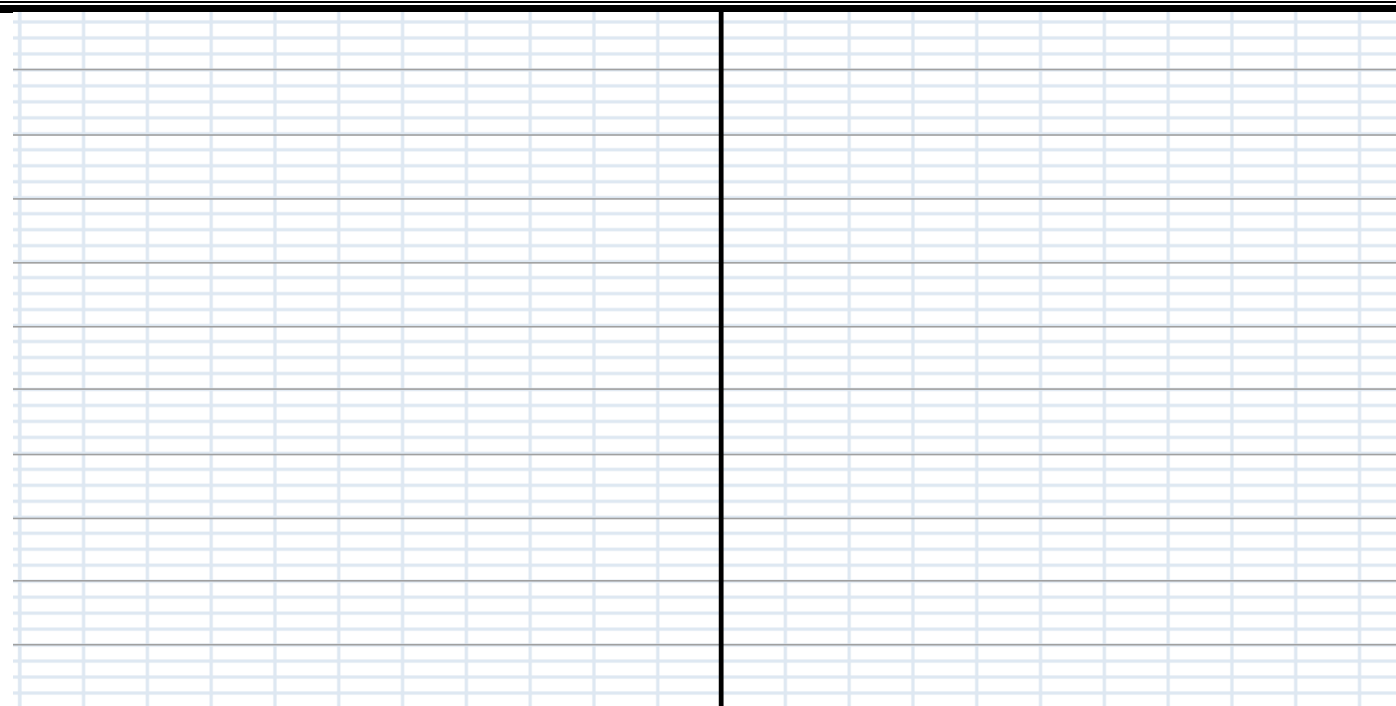
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cotan x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotan^2 x)$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cdot \cos(ax + b)$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$

Opérations	Fonctions	Fonctions dérivées
Somme	$U + V$	$U' + V'$
Produit	$k \times U$	$k \times U'$
	$U \times V$	$U' \times V + V' \times U$
Inverse	$\frac{k}{V}$	$-\frac{kV'}{V^2}$
Quotient	$\frac{U}{V}$	$\frac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$
Puissance	U^r	$rU'U^{r-1}$
Racine carrée	$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
Composé	$U \circ V$	$V' \times U' \circ V$

Fonction	$\cos u$	$\sin u$	$\tan u$	$\cotan u$
Dérivée	$-u' \sin u$	$u' \cos u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	$-\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cotan^2 u)$

Bilan :

A blank sheet of graph paper with a light blue grid. The grid consists of small squares. A vertical black line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. There are also horizontal lines, creating rows across the entire page.

**Synthèse partielle :**

Si f est une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$$

Activité 8 : Fonction dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone sur un intervalle

Soit f la fonction définie de $] -1 ; +\infty[$ vers $] -\infty ; 1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

a) Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

b) Déterminer de deux façons différentes la dérivée de la fonction réciproque f^{-1}

(Tu tiendras compte du fait que $f \circ f^{-1} = x$)

Bilan :



Synthèse partielle :

1) Fonction réciproque

Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E .

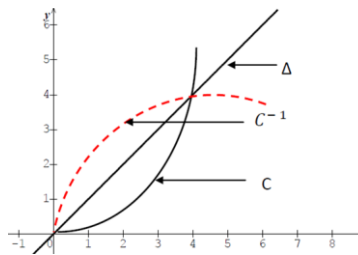
- En Pratique :

Une application f est bijective si et seulement si on a :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E ; \text{ on a : } f(x) = y$$

- Graphiquement

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$. et admet une bijection réciproque f^{-1} de $f(I)$ sur I ayant même sens de variation que f

2) Dérivée :

Si f est une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J , et si f est dérivable sur I , alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)} \text{ avec } y = f(x)$$

Remarque :

- Pour montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J , on détermine l'intervalle J , on détermine l'intervalle I tel que $J = f(I)$ puis on montre que f est dérivable sur I et de dérivée non nulle sur I .
- Pour montrer que f^{-1} est dérivable en un point y_0 , on détermine le réel x_0 tel que $y_0 = f(x_0)$, puis on montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$.

Activité 9 : Fonction dérivée seconde d'une fonction

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 5$

a) Déterminer f' puis $(f')'$

b) Etudier le signe de f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$

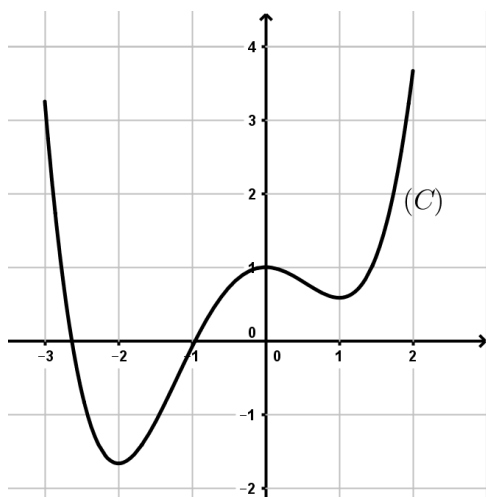
Bilan :

Synthèse partielle :

Soit une fonction f dérivable sur D la fonction dérivée f' est appelée dérivée première (ou d'ordre 1) de la fonction f sur D .
 Lorsque f' est elle-même dérivable sur D , sa fonction dérivée, notée f'' est appelé dérivée seconde (ou d'ordre 2) de la fonction f .
 Par itération, pour tout naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérivée n -ième (ou d'ordre n) notée f^n comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $(n - 1)$ soit : $f^n = (f^{n-1})'$

Activité 11 : Signe de la dérivée et sens de variation :

Le graphique ci-contre représente une fonction f :



- Détermine l'intervalle sur lequel f est dérivable.
- Détermine graphiquement les intervalles où f est strictement monotone (croissante ou décroissante).
- Détermine graphiquement le signe de $f'(x)$.

Bilan :

Synthèse partielle :

1) Dérivée et sens de variation :

a) Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

– Si $f'(x) > 0$ sur I on dit que f est croissante sur I .

– Si $f'(x) < 0$ sur I alors f est décroissante sur I .

– Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I .

b) Maximum - Minimum - Extremum

- **Minimum :**

Soit f une fonction définie en un point x_0 . S'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in I$ on a :

$f(x) \geq f(x_0)$ alors f présente un minimum m en x_0 . Ce minimum est $m = f(x_0)$.

- **Maximum :**

f admet un maximum relatif au point x_0 , s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in I$ on a :

$f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum est $M = f(x_0)$.

- **Extremum :**

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.

Théorème :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$

s'annule en x_0 et change de signe en passant par x_0 , on dit alors

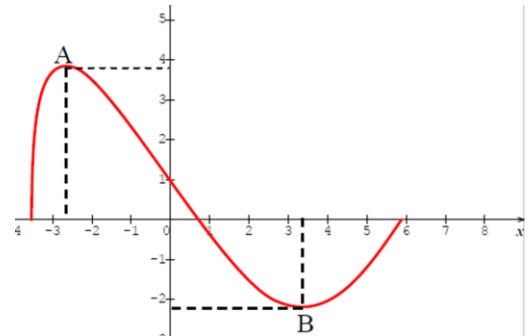
que f présente un extremum en x_0 . Cet extremum est égal à $f(x_0)$.

Il est le minimum si f' passe du signe négatif au signe positif. Il est

le maximum si f' passe du signe positif au signe négatif.

• A représente le maximum relatif,

• B représente le minimum relatif,



Cas d'un minimum

Valeur de x	a	c
Signe de $f'(x)$	-	+
Variation de f		

Cas d'un maximum

Valeur de x	a	c
Signe de $f'(x)$	+	-
Variation de f		

NB : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point x_0 , alors la fonction f admet un extremum relatif en x_0 .

c) Point d'inflexion :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Si f'' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un point d'inflexion

NB : Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition

- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule

- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f .

- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0; y_0)$ une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : $f'(x_0) = 0$.

- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0; y_0)$ une tangente de coefficient directeur a si et seulement si $f'(x_0) = a$

2) Dérivée et encadrement :

a) Inégalité des accroissements finis :

a et b sont deux réels et f la fonction définie de $]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$; si

• f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$

• f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,

• m et M sont deux réels tels que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors $(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq (b - a)$

b) Corollaire de l'inégalité des accroissements finis :

a et b sont deux réels et f la fonction définie de $]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$; si

• f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$

• f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$

• M est un réel positif tel que $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Application :1) Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ a) Montre que f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.b) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.c) Montre que $1 + \frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}$, pour tout réel t de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.d) En déduis un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.2) Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et α l'unique solution de $g(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$;

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

a) Calculer la dérivée g' et montrer que $\forall x \in [0 ; +\infty[; |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ b) En déduire que $\forall x \in [1 ; +\infty[; |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ 3) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x-3}$ a) Montrer que $x \in [4 ; 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ b) En déduire que $x \in [4 ; 5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$.**Bilan :**

Activité 12 : Etude des fonctions**Activité 12-1 : Parité d'une fonction**

On considère les fonctions ci – dessous données

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}} \quad ; \quad p(x) = \frac{x^2}{1 - 3x^2} \quad ; \quad h(x) = -2x^2 - 5 \quad ; \quad q(x) = x^3 + 3x$$

1) Trouve : $g(-x)$; $h(-x)$; $p(-x)$; $q(-x)$

2) Quelle égalité obtiens-tu ?

Bilan :

Synthèse partielle :

Parmi ces quatre fonction :

g et q sont impaire ; p est paire et h n'est ni paire ni impaire.

a) Définitions :

- Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple :

$$f(x) = -2x^2 - 5 \quad \text{est paire}$$

- Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

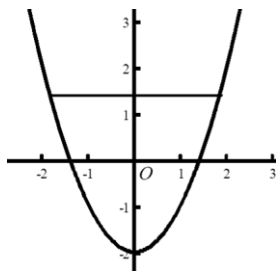
Exemple :

$$f(x) = x^3 + 3x \quad \text{est impaire}$$

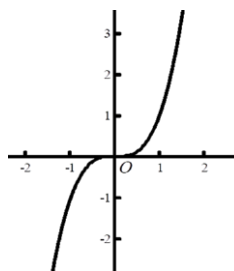
b) Interprétation graphique :

- Si une fonction est paire alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) ;
- Si une fonction est impaire alors sa courbe est symétrique par rapport l'origine O .

La fonction carrée ($x \mapsto x^2$) est paire, la fonction cubique ($x \mapsto x^3$) est impaire



x^2 est paire



x^3 est impaire

Activité 12-2 : Périodicité d'une fonction

Soient trois fonctions f ; g et h définies respectivement :

a) $f(x) = 3 \cos(3x)$; $g(x) = \sin(-x + 5)$; $h(x) = 5 \tan x$

Calculer $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$; $g(x + 2\pi)$ et $h(x + \pi)$. Que constatez-vous ?

Bilan :

Synthèse partielle :

On dit que la fonction f est périodique de période..... ; g est périodique de période et h est périodique de période

Définition :

Soit T un nombre réel strictement positif.

Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$, on a : $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

Exemple :

- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont périodique de période 2π .

- La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π .
- La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(2x)$ est π -périodique. Car :
 $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$ et $x - \pi \in \mathbb{R}$;
 $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ car la fonction sinus est 2π -périodique.
Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarque :

Si une fonction f est périodique, on peut l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$

- Si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \sin(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \tan(ax + b)$ alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$;

Activité 12-3 : Élément de symétrie

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et de g .

2) soit $a = 1$. Calculer $f(a - x)$; $f(a + x)$ et $f(2a - x)$. Quelles égalités obtenez-vous?

3) soit $a = 2$ et $b = 3$

Montrer que $f(a - x) + f(a + x) = 2b$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Bilan :

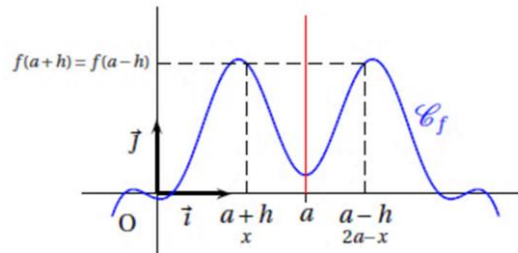
Synthèse partielle :

a) Axe de symétrie :

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(D): x = a$. (D) est dite axe de symétrie de (C) si et seulement si pour tout $x \in D_f$

$$f(a-x) = f(a+x) \text{ ou encore } f(2a-x) = f(x).$$

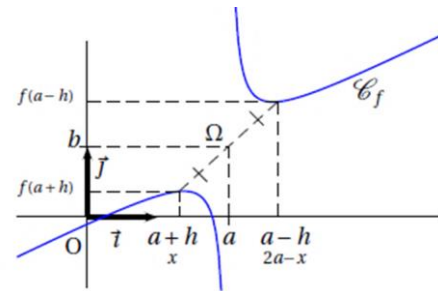


b) Centre de symétrie :

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $I(a, b)$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} I \text{ est le centre de} \\ \text{symétrie pour la} \\ \text{courbe } C \end{array} \right) &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, \forall -x \in D_f \\ f(a-x) + f(a+x) = 2b \end{cases} \\ \left(\begin{array}{l} I \text{ est le centre de} \\ \text{symétrie de } C \end{array} \right) &\Rightarrow f(2a-x) + f(x) = 2b \end{aligned}$$



Evaluation formative : (Voir cahier)

1) Soit $f(x) = x^2 - 4x + 7$

Montre que $(D): x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de f .

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

Montre que $I(-1, 3)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative de f

Bilan :

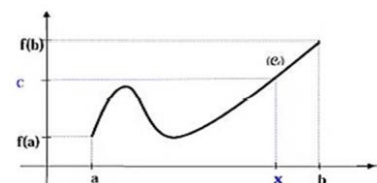


Théorème des valeurs intermédiaires 3 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé

$[a ; b]$ et c un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$

Inclusivement ; alors, il existe au moins une valeur x dans l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(x) = c$.



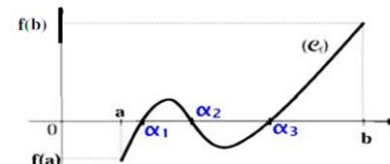
Conséquence :

Si f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et si

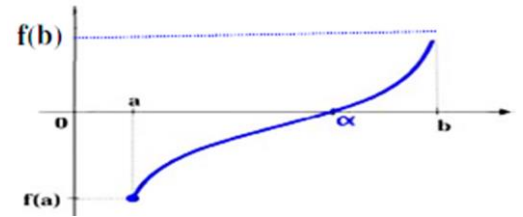
$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, c'est-à-dire :

$f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet

au moins une solution α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$ si f est croissante et sur $[f(b) ; f(a)]$ si f est décroissante. De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



- L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.
- Si f est continue et croissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Si f est continue et décroissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$

[illegible]

Bilan :

[illegible]

[illegible]

1) Approximation d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$:

a- Méthode de dichotomie :

f est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe α élément de $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il s'agit de trouver un encadrement de α d'amplitude réduit. On procède comme suite :

On calcule : $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires alors $\alpha \in \left[a ; \frac{a+b}{2}\right]$
- Si $f(b)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2} ; b\right]$

On répète le même processus dans le nouvelle intervalle trouvé auquel appartient α jusqu'à trouver un intervalle d'amplitude demandé.

b) Méthode des balayages :

f est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe α élément de $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il s'agit de trouver un encadrement de α d'amplitude réduit. On procède comme suite :

Effectuer un balayage de l'intervalle $[a ; b]$ avec un pas égale à 0,1 jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires.

x	a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$		$f(b)$

Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$, alors $\alpha \in [x_5 ; x_6]$

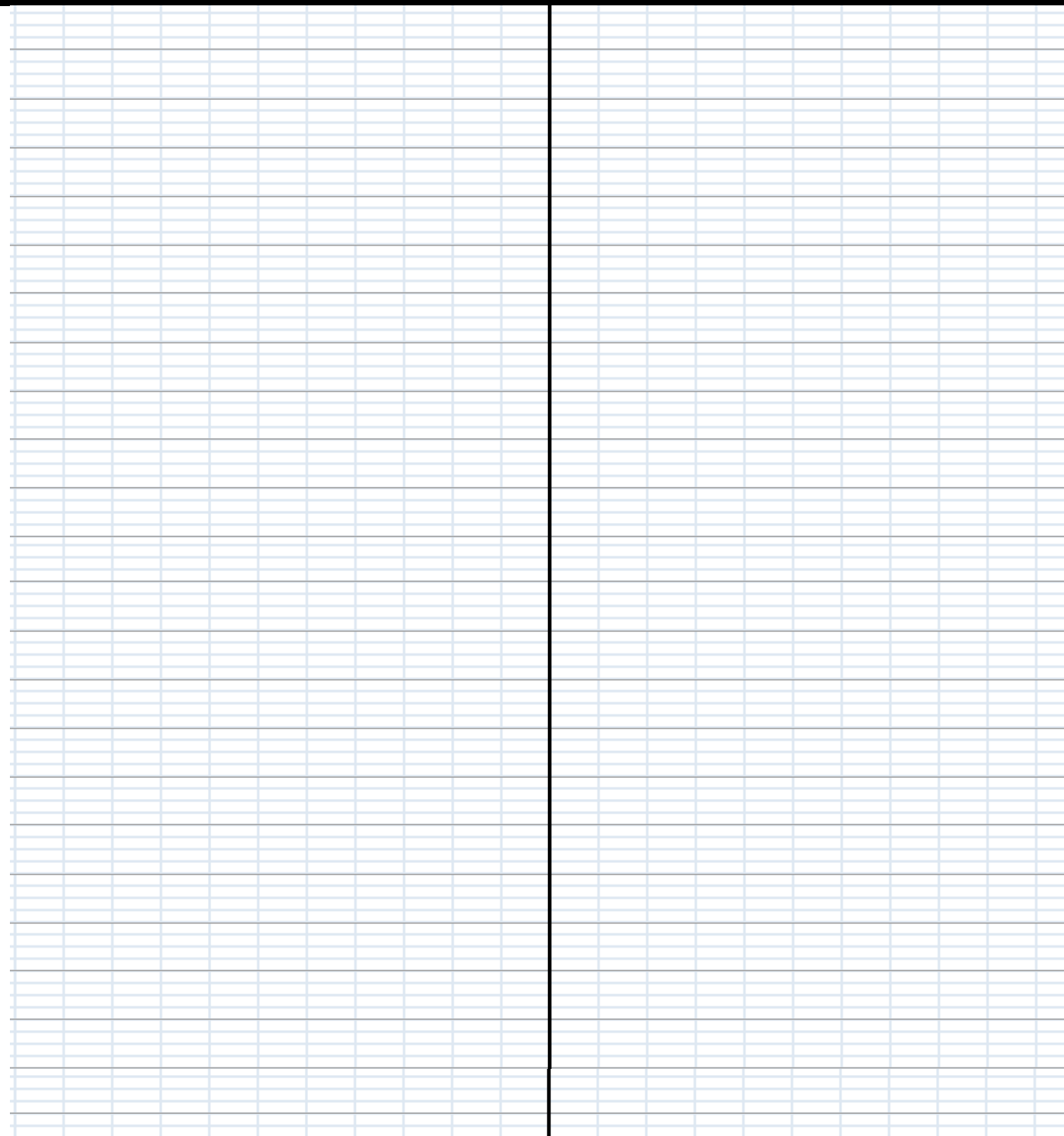
Evaluation formative :

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$

a) Calculer $f'(x)$.

b) Etudier le sens de variation de f .

[illegible]



2) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses c'est-à-dire $(C_f) \cap (x'ox)$, on résout l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox) .

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy).

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées c'est-à-dire $(C_f) \cap (y'oy)$, on calcule l'ordonnée $y = f(0)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(0)$ sur l'axe (oy) .

NB : Le point d'intersection de la courbe (C_f) , (C_g) des fonctions numériques f et g ont pour abscisse les solution de l'équation $f(x) = g(x)$ pour $x \in D_f \cap D_g$.

Les solutions d'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$.

Activité 13-1 : Fonctions polynômes - Fonction rationnelles

Soit à étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

- Bilan :**

[illegible]

Soit à étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$

- 1) Détermine le domaine de définition de f .

- 2) calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition (tu détermineras les éventuelles asymptotes)
- 3) Détermine f' , en déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 4) Représente graphiquement la fonction g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- 5) Démontre que la courbe représentative de g admet un centre de symétrie, que l'on déterminera.
- 6) Discute suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation (E) : $(2 - m)x^2 + (2m - 3)x + 3 - 2m = 0$

Bilan :

--	--

Exemple 3 :

Soit à étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

- 1) Détermine le domaine de définition de f puis
- 2) calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition (tu détermineras les éventuelles asymptotes)
- 3) Détermine f' et en déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
- 5) Représente graphiquement la fonction g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{4}\sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 3) Détermine les limites aux bornes de D_f . (tu déterminera les éventuelles asymptotes).
- 4) Etudie la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .
- 5) Détermine f' puis dresse le tableau de variation de f .
- 6) Trace la courbe (C) .

Bilan :

[illegible]

a) Fonction sinus :

Sinus est une fonction f notée $f(x) = \sin x$ on lit “ f de x égale sinus de x ”

Propriétés :

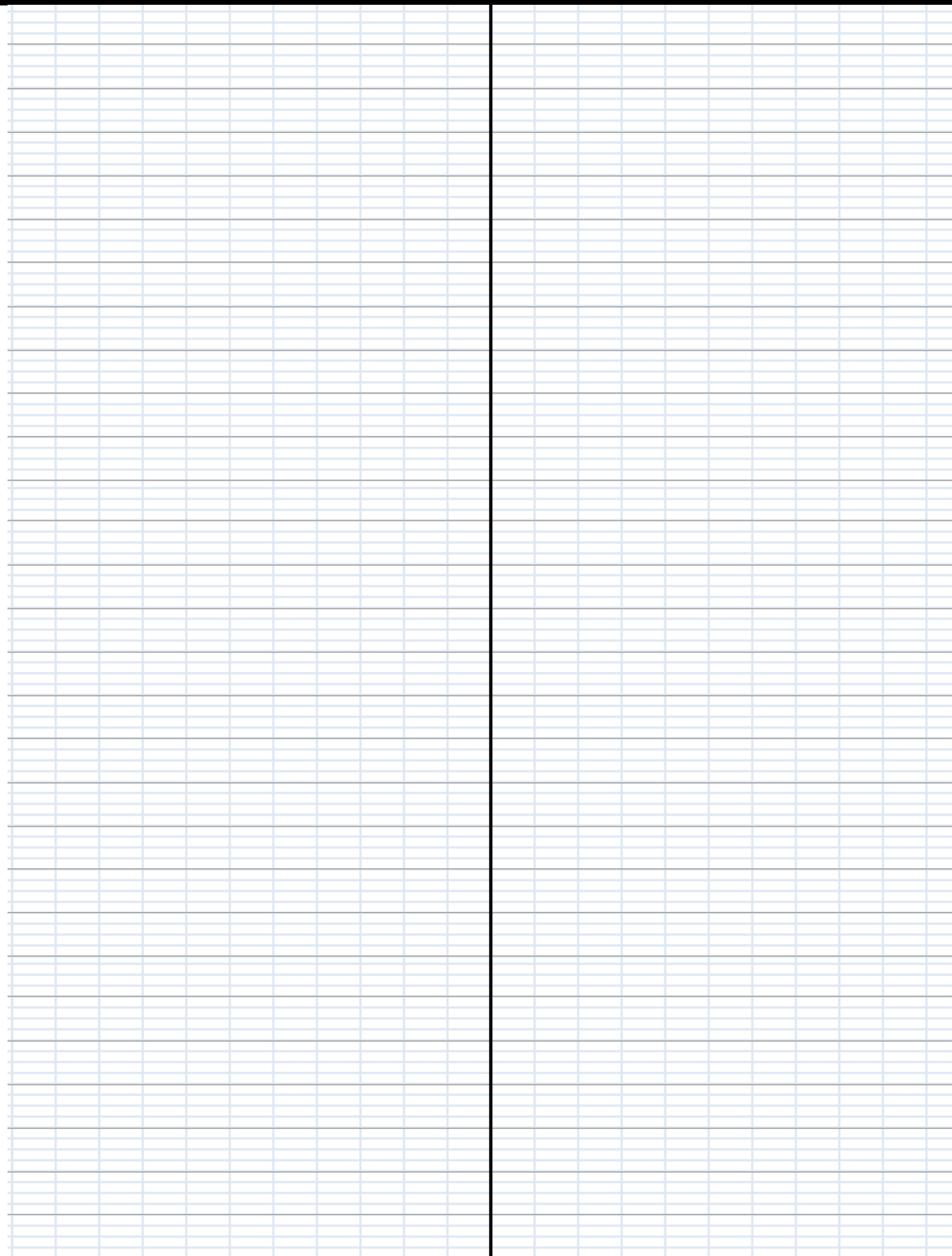
- La fonction sinus est impaire c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$: $\sin(-x) = -\sin x$

Evaluation formative 2:

soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2 \sin 2x}{1 + \cos x}$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f puis calcule les limites aux bornes de D_f .
b. Etudier la parité de f et la périodicité de f
2. Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
3. Tracer, dans un repère orthonormé $(0, I, J)$, la courbe de la restriction de f à $[-\pi ; \pi]$

Bilan :



Synthèse partielle :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f ;
- On calcule les limites aux bornes de D_f ;
- On étudie la parité et la périodicité de f ;
- On étudie la continuité de f ;
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier Son signe ;
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes ;
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées.

Séquence 1 : Primitives

Pré-évaluation :

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie par :

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 5x - 4 \quad ; \quad 2) f(x) = -2x^3 - \frac{1}{2}x - 2x + 2023 \quad ; \quad 3) f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$$

$$4) f(x) = (-5x^2 - 3x + 4)^4 \quad ; \quad 5) f(x) = \frac{-2x-3}{x-2} \quad ; \quad 6) f(x) = \frac{-4-3x}{x^2-3x+4} \quad ; \quad 7) f(x) = x - 2 + \frac{8}{x+1}$$

$$8) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{-x+1} \quad ; \quad 9) f(x) = (x^2 - 2x)(3x + 1)^2 \quad ; \quad 10) f(x) = (x - 2)^2 \frac{3x}{1-2x}$$

$$11) f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 4} \quad ; \quad 12) f(x) = (3x + 1)\sqrt{x^2 - 1} \quad ; \quad 13) f(x) = \frac{\sqrt{x^3+2x}}{x^2+2x-1}$$

Bilan :

Situation problème :

Un physicien étudie le mouvement d'une particule. La vitesse initiale de la particule est de 3 m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s^2) est $a(t) = 1 - \frac{1}{2(\sqrt{t+1})^3}$.

[illegible]

Fonction f définie par :	Primitive F définie par :	Intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + K$	$\mathbb{R}^*$ (avec $n \neq 1$)
$f(x) = \frac{a}{x^n}$	$F(x) = -\frac{a}{(n-1)x^{n-1}} + K$	$\mathbb{R}^*$ (avec $n \neq 1$)
$f(x) = x^r \quad , \quad r \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + K$	$\mathbb{R}$

Evaluation :

1) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - \frac{1}{x^2}$ 2) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 + 5x$
 3) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$ 4) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$ 5) $f(x) = \sin 3x$
 6) $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 7) $f(x) = 4 \cos 2x$ 8) $f(x) = \cos\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$

Bilan :

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The page is covered by a uniform grid of light blue lines forming small squares. A single vertical black line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Activité 2 : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 + 2x - 6$$

Montre que les fonctions F et G définies respectivement par :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 6x \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 6x - 15 \quad \text{sont des primitives de } f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Bilan :

Synthèse partielle :

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 + 2x - 6$$

admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I ; l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de type $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Si F est une primitive de f sur I , toute autre primitive de f est de la forme $F + k$.

Activité 3 : Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point fixé

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 10x$$

a) Montre que les fonctions de la forme $F = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

b) Détermine c pour que $F(-1) = 2$

Bilan :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + \dots$ est la primitive de f qui prend la valeur 2 en -1.

Activité 4 : Complément sur les primitives de fonctions de types $(g' \circ f) \times f'$; $f' \times f^m : m \in \mathbb{Q} - \{-1\}$

$f(x) = u'u$	$F(x) = \frac{u^2}{2} + k$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + k$
$f(x) = \frac{u'}{u^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + k$
$f(x) = u' \cos u$	$F(x) = \sin u + k$
$f(x) = u' \sin u$	$F(x) = -\cos u + k$
$f(x) = \frac{1}{u^n}$	$F(x) = \frac{-n}{(n-1)u^{n+1}}$

Détermine, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3$

2) $f(x) = (5x + 1)^7$

$$3) \quad f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-3)^3}$$

$$4) \quad f(x) = 5 + x + \frac{4}{(x+1)^2}$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$6) f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - x}}$$

7) $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$

8) $f(x) = \sqrt{x+5}$

9) $f(x) = 2x \cdot \sin(x^2)$

10) $f(x) = (x + 1)^3 \sin(x + 1)^4 1)$

11) $f(x) = x \cos x + \sin x$

12) $f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

Bilan :

[illegible]

Séquence 2 : Intégration**Pré-évaluation :****Donner les primitives des fonctions suivantes**

1) $f(x) = \cos 3x + \sin 2x$ 2) $f(x) = 3 \cos x - 2 \sin 2x + 1$; 3) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$; 5) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $f(x) = \frac{2}{(x+4)^3}$; 7) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

8) $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$; 9) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$; 10) $f(x) = (x+2)^3$; 11) $f(x) = 2x(1+x^2)^5$

12) $2x(3x^2-1)^3$; 13) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ 13) $f(x) = \frac{(x-1)^5}{3}$

Bilan :

Situation problème :Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2$ 1) Trace la courbe représentative de f .2) Soit P la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$

- c) Montre que si G est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbf{a} = G(0) - G(-2)$.

Bilan :

Activité 1 : Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + 2$.

- 1) f admet-elle une primitive sur l'intervalle $[1; 4]$?
- 2) Si oui, déterminer trois primitives F_1 , F_2 et F_3 de f .
- 3) Calculer $F_1(4) - F_1(1)$; $F_2(4) - F_2(1)$ puis $F_3(4) - F_3(1)$
- 4) Que remarques-tu ?

Bilan :

Synthèse partielle :

1) Définition 1 :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple : Calculer

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (3x^2 - 1) dx$; b) $\int_0^1 \sin(-2x + 3) dx$; c) $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$

Bilan :

2) Vocabulaire et notation :

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a ; b]$ lorsque $a \leq b$, ou encore de a à b , ou encore entre a et b .
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire :
 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f , on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
 L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b »

3) Propriétés :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I ,
 $F(b) - f(a) = G(b) - G(a)$

a) Propriétés algébriques :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b et c des éléments de I et α une constante.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Compatibilité avec l'addition)
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ (Multiplication avec un scalaire)
- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Intégrale et la valeur absolue)
- $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$ et $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$ (Compatibilité avec l'ordre)
 $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a ; b]$.
 si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (Comparaison)
- Cette inégalité est aussi appelée inégalité de la Moyenne

b) Propriété : (Inégalité et valeur de la moyenne)

- Inégalité de la moyenne :
 Soit f continue sur I et $a, b \in I$ avec $(a \leq b)$. Si m et M sont deux nombres réels tels que :
 $\forall x \in [a ; b], m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
 Ou encore

Soit f continue sur I , s'il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq 0 \text{ alors } \forall a, b \in I \text{ on a : } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a).$$

- Valeur moyenne :
 On appelle valeur moyenne de f , le réel $\bar{M}$ tel que : $\bar{M} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.
 Et il existe un réel $C \in [a ; b]$ tel que : $f(C) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Evaluation formative 1 :

- 1) Calculer $\int_{-2}^2 |x^2 - 1|dx$ (Relation de Chasles)
- 2) Calculer $\int_1^2 \frac{2x^2}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{-4x+2}{(x-1)^2}dx$ (Compatibilité avec l'addition)
- 3) Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2} dx$ (Compatibilité avec l'addition)
 - a) Calculer $I + 2J$ et $2J - I$
 - b) En déduire les valeurs de I et J .
- 4) a) Montrer que $\frac{1}{1+x} > 1-x$, pour tout réel x de $]0 ; 1]$. (Compatibilité avec l'ordre)
 b) Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx > \frac{1}{4}$.
- 5) a) Montrer que pour tout $x > 0, -x \leq \sin x \leq x$. (Comparaison)
 b) En déduire que pour tout $x > 0, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.
- 6) Déterminer un encadrement de $\int_4^2 \frac{1}{x}dx$ (Inégalité de la moyenne)
- 7) Calculer la valeur moyenne de $f: x \mapsto \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

Bilan :

4) Théorèmes :**Théorème 1 : linéarité**

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$

Pour tous réels α et β , $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Théorème 2 : (Intégrale et Périodicité)

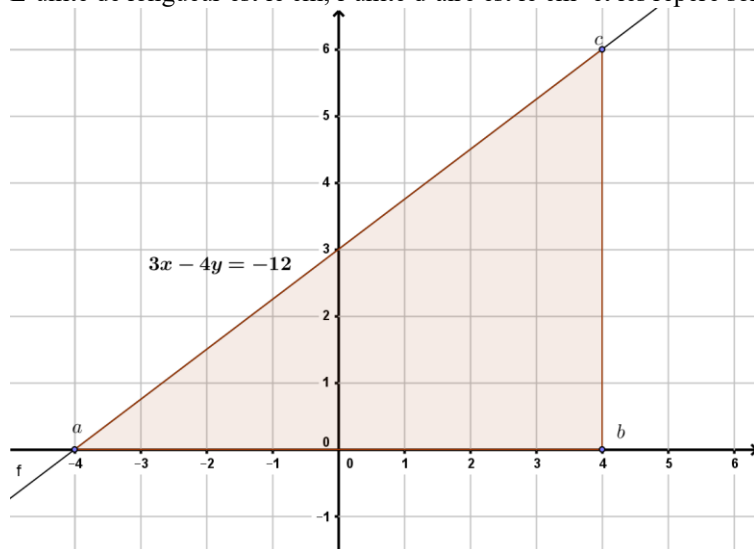
$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et a un réel de I .

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

NB : $\int_a^b f(x) \times g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx$

L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm^2 et les repère sont ortho normaux.



- Calculer l'aire du domaine colorié ;
- Trouver une primitive F de la fonction f représentée, puis calculer $F(b) - F(a)$.
- Que constater-vous ?

Bilan :

[illegible]

Synthèse partielle :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$

De façon générale, nous admettons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f sur $[a ; b]$ (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle).

Par définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suite, lorsque x va vers b ($a < b$)

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (unité d'aire) ou } S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ (unité d'aire)}$$

NB :

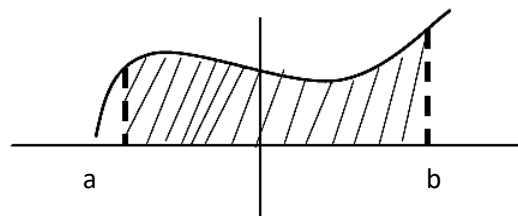
Dans cette intégration, les portions de surface au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.

Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

1^{er} cas :

$$M(x ; y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

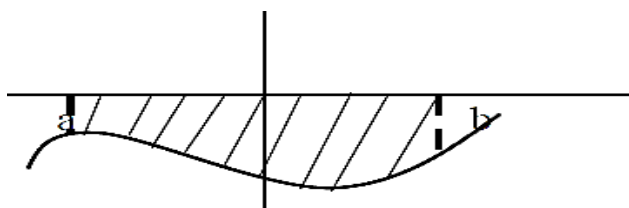
Ainsi l'aire du domaine plan D_a est $A(D) = \int_a^b f(x)dx$ (unité d'aire)



2^{ème} cas :

$$M(x ; y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

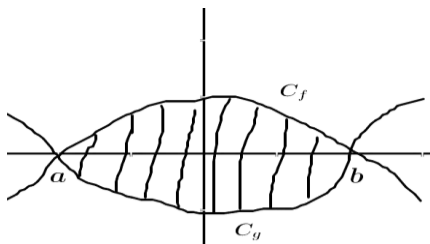
Ainsi l'aire du domaine plan D_a est $A(D) = -\int_a^b f(x)dx$ (unité d'aire)



3^{ème} cas :

$$M(x ; y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

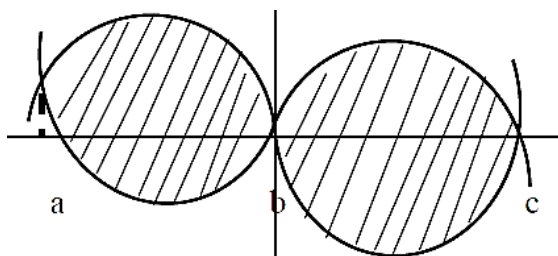
Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (C_f) et (C_g) est $A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (unité d'aire)
Car (C_f) est au dessus de (C_g)



4^{ème} cas :

$$M(x ; y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \text{ et } b \leq x \leq c \\ g(x) \leq y \leq f(x) \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes est : $A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$



Evaluations formative :

3) Calculer puis représenter l'aire A de l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan compris entre les courbes (C_f) et (C_g) de fonction respectives $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$

4) calculer puis représenter l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C_f) de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$

Bilan :

Activité 3 : Calcule au d'intégrales**Activité 3-1 : Calcule au moyen d'une primitive**

Calculer les intégrales suivants :

$$\int_2^3 (5x^4 - x^3 - 2) dx ; \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2} dt ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx ; \int_{-1}^2 (3x^2 + 1)(x^3 + x - 2) dx$$

$$\int_0^1 \frac{-2u}{(u^2+2)^3} du ; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sin^3 t} dt ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^3 x dx ; \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

Bilan :

**Activité 3-2 : Intégration par partie**

Le but de cette activité est de calculer $I = \int_0^1 (5x + 1)\sqrt{2x + 3} dx$

Soit la fonction définie par $f(x) = (5x + 1)\sqrt{2x + 3}$ avec $u(x) = 5x + 1$

- 1) Déterminer une fonction v telle que $f(x) = u(x) \times v'(x)$
- 2) Prouver que : $f(x) = (u(x) \times v(x))' - u'(x) \times v(x)$
- 3) En déduire la valeur de l'intégrale I

Bilan :



Synthèse :**Théorème :**

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un intervalle $I = [a ; b]$, alors on appelle intégration par parties, toutes opérations définie par : $\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$

Evaluation formative :

En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x \, dx \quad ; \quad B) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \quad ; \quad C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x+1) \, dx$$

Bilan :

Activité 3-3 : Intégration par substitution ou par changement de variable

Soit à calculer $I = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ par substitution.

a) En posant $u = 2x + 1$. **Montrer que** $I = \int_1^3 \frac{u-3}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2} du$

b) En déduire la valeur de I .

Bilan :

Synthèse partielle :

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable x une autre variable qui est fonction de x .

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$ ($\alpha \neq 0$) ; on utilise la méthode suivante :

- faire le changement de variable en posant :

$$u = \alpha t + \beta, \text{ on obtient } du = \alpha dt \text{ et } \begin{cases} \text{si } t = a \text{ alors } u = \alpha a + \beta \\ \text{si } t = b \text{ alors } u = \alpha b + \beta \end{cases}$$

- utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$.

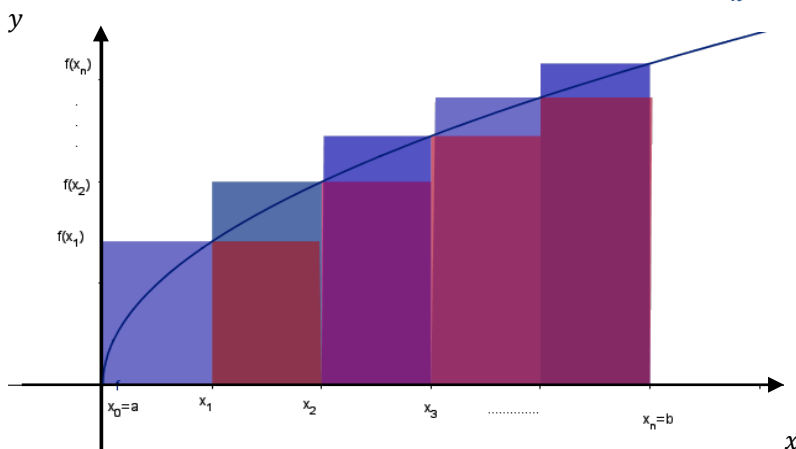
Activité 4 : Calculs de valeurs approchées d'une intégrale

Méthode de rectangles : Description :

Soit f une fonction numérique monotone sur $[a; b]$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Pour se faire, on divise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude égal à $\frac{b-a}{n}$.

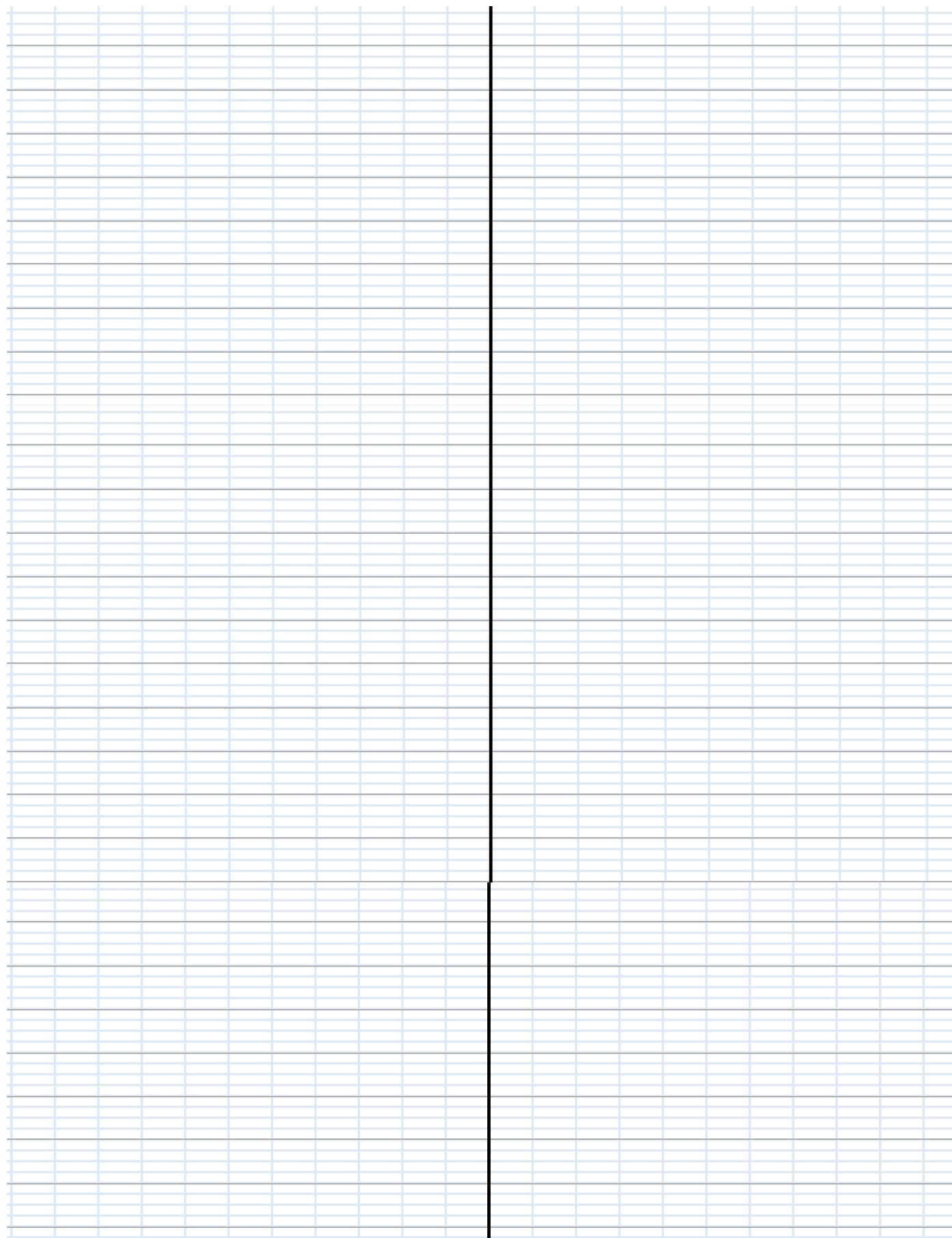
Chacun de ces n intervalles s'écrit $[x_i; x_{i+1}]$ avec $x_i = a + i \frac{(b-a)}{n}$ où $i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$



L'aire du domaine formé par les rectangles violets est :

$$S_1 = \frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_{n-1})$$

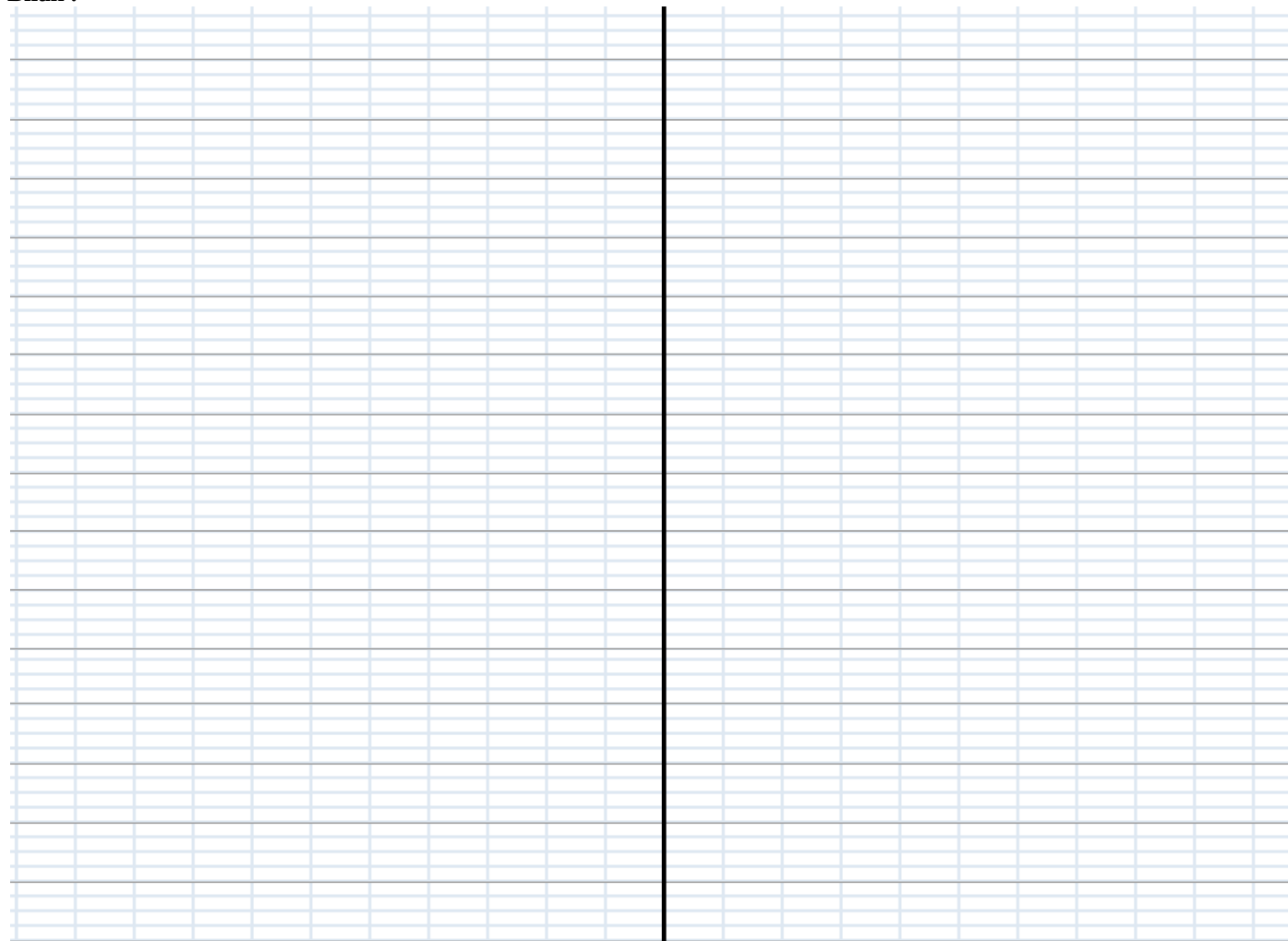
$$= \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})]$$



Exemple :

Déterminer une valeur approchée de l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ en partageant l'intervalle $[0 ; 1]$ en 5 intervalles de même amplitude.

Bilan :



Pré-évaluation :

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_1^2 x(2x+3)dx ; \int_1^2 \frac{1}{(2x+2)^2} dx ;$$

Situation problème : Introduction

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

$$f:]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t}$$

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites

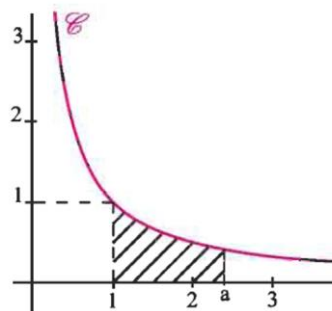
d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$

a) Que vaut $A(1)$

b) En prenant $a = 2$ et en partageant l'intervalle $[1 ; 2]$ en trois intervalle de même amplitudes, montrer que :

$$\frac{37}{60} \leq A(2) \leq \frac{47}{60}$$

Bilan :



Synthèse partielle :

1) Relation fonctionnelle fondamentale :

a) Propriété :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

b) Conséquence :

- Soit a et b deux réels strictement positifs : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$\text{Posons } \frac{a}{b} = c \Rightarrow bc = a \Rightarrow \ln(bc) = \ln a \Rightarrow \ln b + \ln c = \ln a \Rightarrow \ln c = \ln a - \ln b$$

$$\text{donc } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

- $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \forall n \in \mathbb{R} ; \quad \ln a^n = n \ln a$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b ; \quad \ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$

c) Propriétés

Domaine de définition : Soit u une fonction définie sur son domaine

- $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$
- $\ln |u(x)|$ existe si et seulement si $u(x) \neq 0$

2) Ordre et logarithme Népérien :

Si a et b sont deux réels strictement positifs alors la fonction $\ln$ conserve l'ordre. Ainsi on a :

$$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b ; \quad a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

3) Utilisation dans la résolution d'équation et d'inéquation :

Pour résoudre l'équation $\ln U = \ln V$, on procède comme suit :

- On cherche l'ensemble de validité $E_v = \{x \in \mathbb{R}, U(x) > 0 \text{ et } V(x) > 0\}$
- On utilise la propriété $\ln a = \ln b \Rightarrow a = b$ pour trouver les x qui appartiennent à E_v et vérifient l'équation.

Pour résoudre l'inéquation comportant $\ln$, on utilise l'une des propriétés suivantes :

$$\ln U \leq \ln V \Rightarrow \begin{cases} U > 0 \\ V > 0 \\ U \leq V \end{cases} \quad \text{ou} \quad \ln U \geq \ln V \Rightarrow \begin{cases} U > 0 \\ V > 0 \\ U \geq V \end{cases}$$

Evaluation formative :

1) Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$$\ln(\sqrt{3}) ; \ln(\sqrt[3]{2}) ; \ln 108 ; \ln(\sqrt[5]{2^3}) ; \ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right) ; \ln 8 + \ln 36 - 2 \ln\left(\frac{27}{32}\right) ; \ln 8 + \ln 36 - 2 \ln\left(\frac{27}{32}\right)$$

2) Calculer les réels suivants :

$$A = \ln \sqrt{2\sqrt{2}} - \ln 8^2 + \ln 128 ; B = 5 \ln 3 - \ln 243 + \ln \sqrt[3]{27} ; C = 3 \ln 15^3 - 2 \ln \sqrt{75} + \ln 225$$

3) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^9$.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$

4) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = 2x + 1 + \ln(3x - 1) ; \quad g(x) = \ln(x - 6) - \ln(-x + 4)$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{-3x + 6}{x + 1}\right) ; \quad p(x) = x^2 - 3 + \ln|x - 2|$$

$$q(x) = -3x + 1 + \ln\left(\frac{2x + 6}{-x + 2}\right) ; \quad t(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x - 1}$$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\ln(3x^2 + x + 1) = \ln(2x + 1) ; \ln(2x + 1) + \ln(5x - 4) = \ln 2 ; (\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$\ln(x + 1) < \ln(3x - 4) ; \ln(2x - 3) \geq \ln(2x^2 - 5x + 3) ;$$

$$-\ln^3 2x - 5 \ln^2 2x + \ln 2x + 5 > 0$$

Bilan :

[illegible]

Activité 2 : Limites usuelles :

Pour étudier quelques limites liées à la fonction $\ln x$, on considère les tableaux suivants :

x	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1
$\ln x$					
$x \ln x$					
$\frac{\ln(x+1)}{x}$					

x	10	100	1000	10000
$\ln x$				
$\frac{\ln x}{x}$				

- 1) Si x tend vers 0 à valeur positive, vers combien tend $\ln x$? ; $x \ln x$? et $\frac{\ln(x+1)}{x}$?
- 2) Si x tend vers $+\infty$, vers combien tend $\ln x$? et $\frac{\ln x}{x}$?
- 3) Quelles sont alors les limites qui se dégagent ?

Bilan :

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The page is covered by a uniform grid of light blue horizontal and vertical lines, creating small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Synthèse partielle :

La fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$.

1) Limites aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2) Branches infinies et asymptotes

- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(C_{\ln})$;
- La courbe $(C_{\ln})$ admet une branche parabolique de direction (Ox) car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Conséquences de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad ; \quad * \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad ; \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

En effet :

Posons $u = \frac{1}{x}$ alors $x = \frac{1}{u}$. Ainsi, si $x \rightarrow 0^+$ alors $u \rightarrow +\infty$.

$$\text{On aura : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} \ln \left(\frac{1}{u} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln u}{u} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u} \right)^n \ln \left(\frac{1}{u} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln u}{u^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{n-1}} \cdot \frac{-\ln u}{u} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

Remarque :

Si P un polynôme de degré quelconque alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$.

Conséquences de la dérivabilité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0} \text{ "F.I."}$$

Posons $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$. Ainsi, si $x \rightarrow 0$ alors $u \rightarrow 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$$

Evaluation formative :

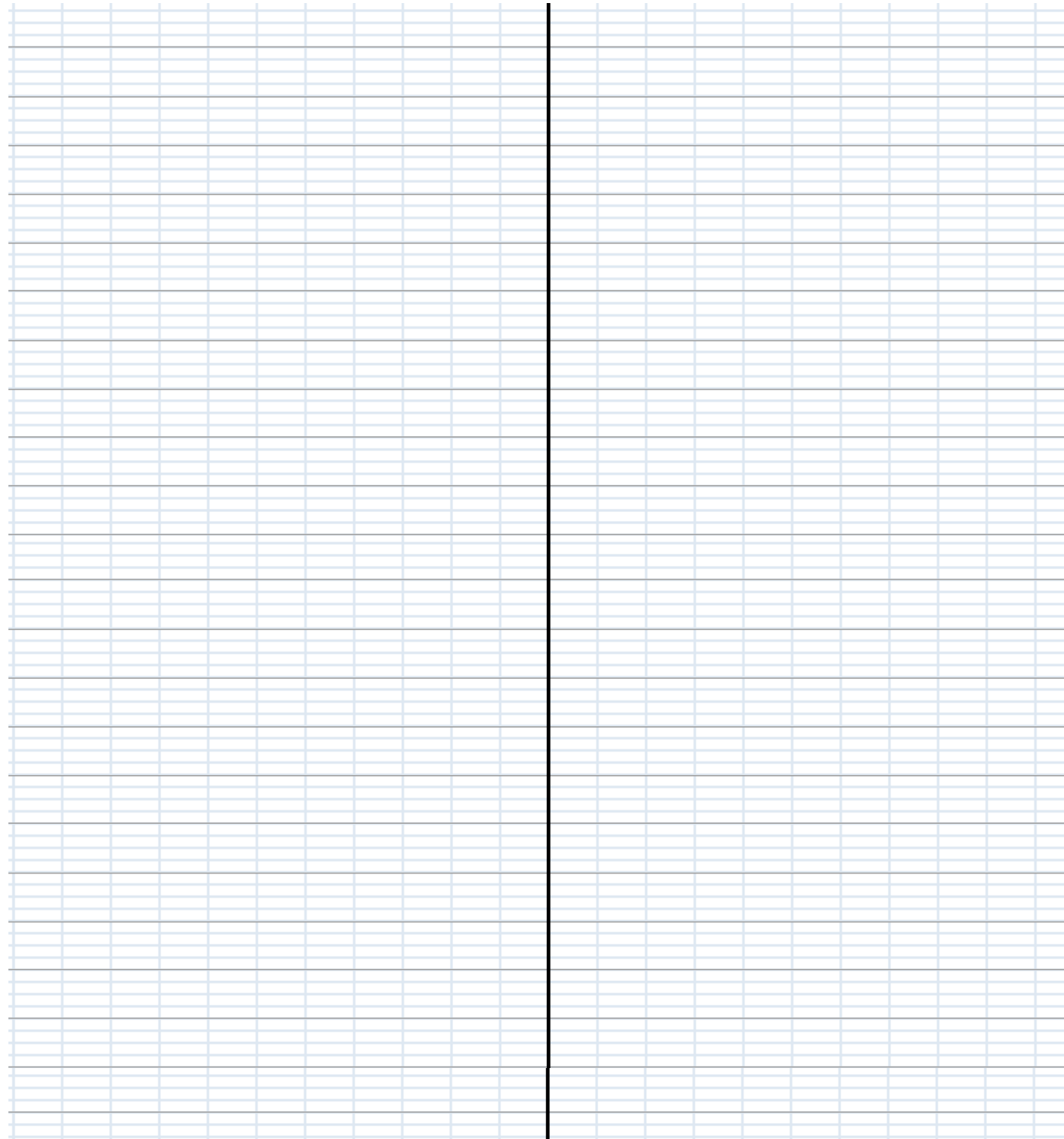
Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \ln x) \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 2 \ln x - 3) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \frac{1}{x}$$

Bilan :

Activité 3 : Etude

- 1) Etudier les variations de $f : x \mapsto \ln x$ (tu dresseras le tableau de variation)
 - 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$. Que l'on déterminera.
 - 3) Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
 - 4) Déterminer les Point d'intersection de (C_f) et les axes de coordonnées :
 - 5) Tracer C_f et (T) dans le plan rapporté a un repère orthonormé
 - 6) Quelle est la position de la tangente par rapport à C_f ?
 - 7) En déduire graphiquement le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$
- Données : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 2,718 \dots$

Bilan :

1) Tableau de variation :

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$	$+$		$+$	$+$
$\ln x$	$-\infty$	(0)	(1)	$+\infty$

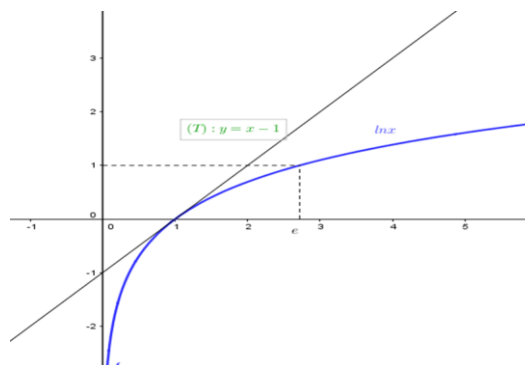
- $\forall x \in]0; 1[, \ln x < 0$
- $\forall x \in]1; +\infty[, \ln x > 0$

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution notée e tel que $\ln e = 1$.

Ce nombre irrationnel e est la base du logarithme Népérien. $e = 2,711828 \dots\dots\dots$

Si $x > 0$ alors $x = x \times 1 = x \times \ln e = \ln e^x$. Alors $x = \ln e^x$.

De la représentation, la courbe (C_{ln}) est en dessous de (T) . Cela entraîne

$$\forall x \in]0; +\infty[; \ln x \leq x - 1$$


Activité 4 : Fonction de type $\ln^{\circ}u$

$$x \mapsto \ln x$$

Soit u une fonction numérique à variable réelle x .

- 1) a) Justifier que si D est le domaine de définition de $f \circ u$ alors $D = \{x/x \in D_u ; u(x) > 0\}$
b) On donne $u(x) = x^2 - 2x - 3$. Déterminer le domaine de définition de $f \circ u$.
c) Calculer les limites de $f \circ u$ aux bornes de D .
- 2) a) Justifier que $f \circ u$ est dérivable en tout point de D . Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous
b) Exprimer $(f \circ u)'(x)$ pour $x \in D$.
- 3) a) Etudier le signe de $(f \circ u)'(x)$ pour $x \in D$.
b) Dresser le tableau de variation de $f \circ u$ sur D .

Bilan :

[illegible]

Synthèse partielle :

1) Ensemble de définition :

Soit f une fonction numérique de variable réelle et D_f son ensemble de définition.

- Si $f(x) = \ln(U(x))$ alors $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, U(x) > 0\}$.
- Si $f(x) = \ln|U(x)|$ alors $D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, U(x) \neq 0\}$.

2) Fonction dérivée :

La fonction $\ln U$ est dérivable si $U > 0$ et sa dérivée est : $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

Propriétés des dérivées logarithmiques :

$$P_1 : (\ln^{\circ} u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad P_3 : \left[\ln \left(\frac{u}{v} \right) \right]' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

$$P_2 : [\ln(u \times v)]' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \quad P_4 : [\ln u^n]' = n \times \frac{u'}{u}$$

3) Primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$:

Les fonctions du type $\frac{u'}{u}$ sont continues si $U \neq 0$ alors elles admettent des primitives. Ainsi, on a : $\int \frac{u'}{u} = \ln |U| + k$ avec k un réel.

Remarque :

Les primitives de la fonction $\ln x$ s'écrivent sous la forme de $x \ln x - x + k$.

En effet :

$$\int \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \times \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x$$

Evaluation formative :

1) Déterminer D_f dans les cas suivants :

$$f(x) = \ln(2x + 3) ; f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) ; f(x) = \ln|2x + 3| ; f(x) = \ln|-4x^2 + 5x - 1|$$

2) Calculer f' dans chaque cas :

$$f(x) = \ln(x + 2) ; f(x) = \frac{2}{x+3} - \ln(x^2 + 7x) ; f(x) = \ln\left(\frac{4x+2}{-3x+2}\right)$$

3) Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2}{3x+2} ; g(x) = \frac{6x+1}{3x^2+x-2} ; h(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} ; k(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Bilan :

Activité 5 : Fonction logarithme à a base a avec $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ avec $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \end{cases}$

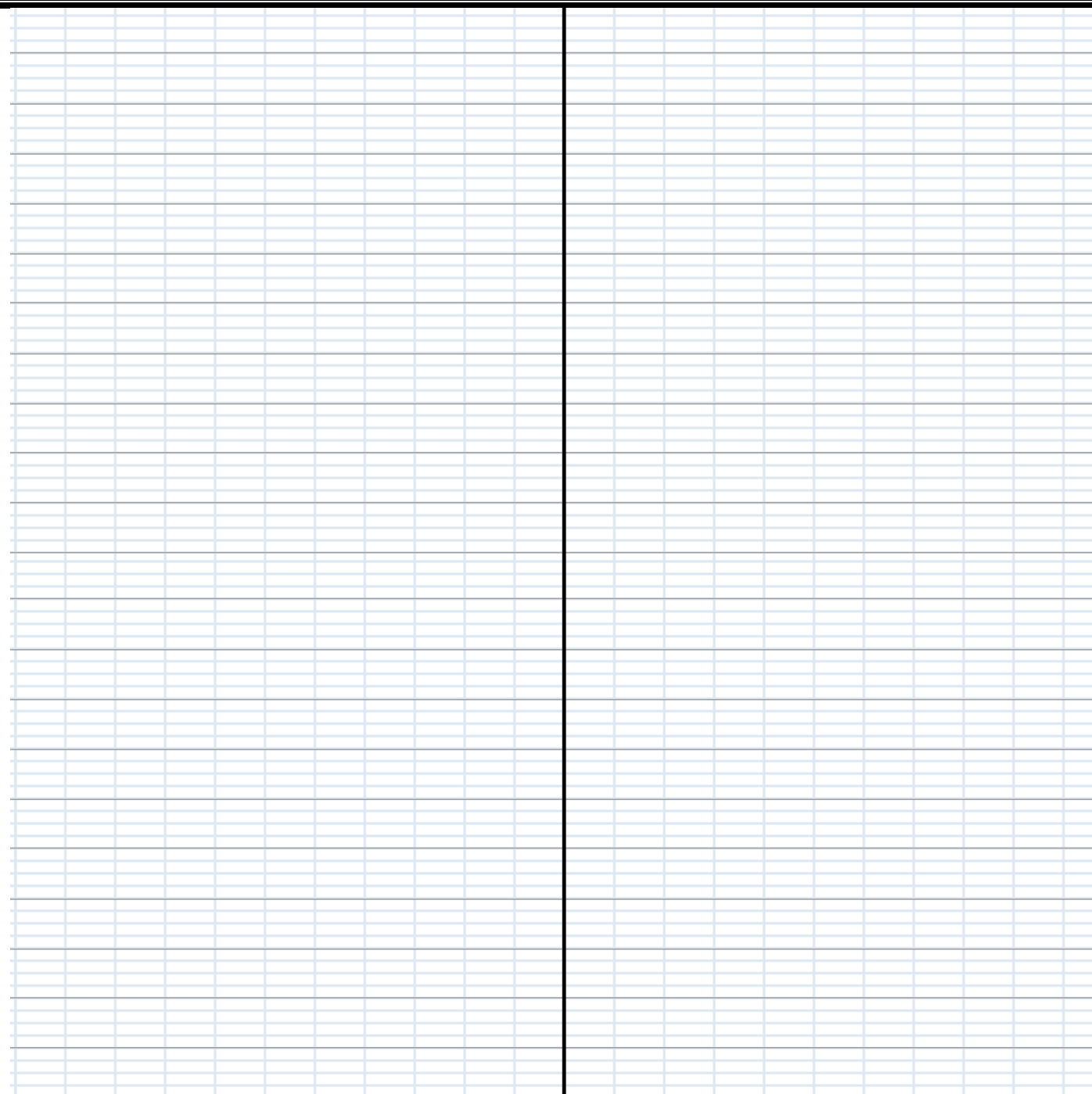
1) Donner le sens de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans les cas suivants

a) $0 < a < 1$

b) $a > 1$

2) Donner la représentation graphique de f pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = 4$

Bilan :

**Synthèse partielle :****1) Définition :**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

On appelle logarithme de base a noté $\log_a$, la fonction définie par : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque :

La fonction logarithme Népérien $\ln$ est le logarithme de base $a = e$. On peut aussi la noter $\log_e$.

En effet :

$$\ln x = \frac{\ln x}{1} = \frac{\ln x}{\ln e} = \log_e x$$

2) Propriétés :

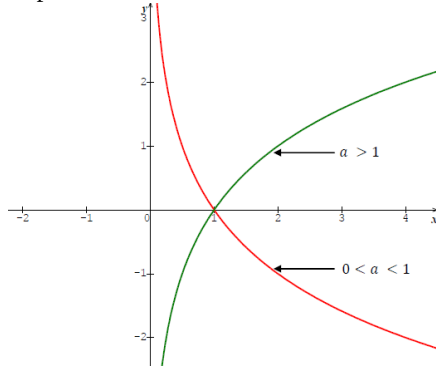
Soit x et y deux réels strictement positifs et r un rationnel non nul. On admet que :

$$\begin{array}{lll} * \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y & * \log_a(x^r) = r \times \log_a x & * \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \\ * \log_a a = 1 & * \log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x & * \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x \end{array}$$

Remarque :

La fonction $\log_a x$ a les mêmes propriétés que la fonction $\frac{1}{\ln a} \times \ln x$. On pourra toujours substituer $\log_a x$ et $\frac{1}{\ln a} \times \ln x$ pour plus de commodité dans les calculs.

Représentation :



Cas particulier : ($a = 10$)

La fonction logarithme décimal noté $\log$ ou $\log_{10}$ est la fonction définie par : $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Exemple : $\log 10^3 = 3$; $\log 10^{-2} = -2$; $\log 10 = 1$

Situation problème : Introduction

Justifie que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R} \rightarrow]0 ; +\infty[$

2) Cette bijection réciproque est appelée fonction exponentielle népérienne et se note $\text{Exp}(x) = e^x$.

a- Justifie que $x \mapsto e^x$ est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

b- Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$.

c- Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ est strictement positif

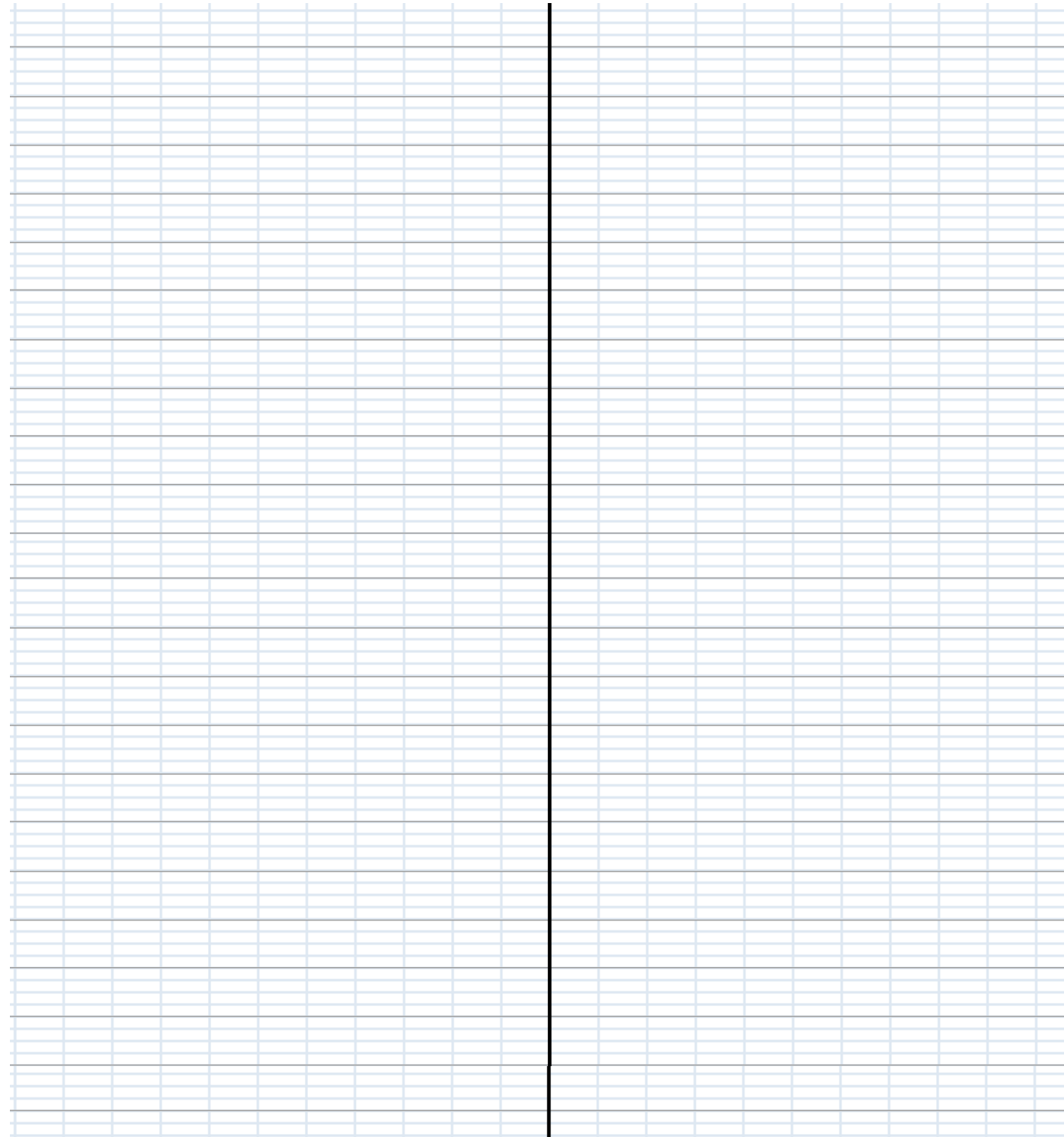
d- Précise les limites $-\infty$ et $+\infty$ de $x \mapsto e^x$

e- Précise le sens de variation de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3) a- Donne la représentation graphique de $x \mapsto e^x$ à partir de celle de $x \mapsto \ln x$

b – Calcule la valeur numérique de $x \mapsto e^x$ pour $x = 1$ puis déduis-en que $\ln e = 1$

Bilan :



Synthèse partielle :

a) Définition

La fonction logarithme népérien est continu et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et l'image de l'intervalle $]0; +\infty[$ par la fonction $\ln$ est égale à $\mathbb{R}$, donc la fonction $\ln$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle notée $\exp$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Par conséquent, la fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $\exp(x) > 0$.

Notations : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \exp(x)$.

b) Proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x \Rightarrow e^x = \ln^{-1}(x) = e^x = \exp(x)$. On convient d'étendre cette égalité à tout nombre réel x

Conséquences immédiates :

- * $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- * $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln(y)} = y$
- * Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (Tracer la courbe des deux fonctions dans le même repère)
- * $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- * de $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$, on a : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

Activité 2 : Propriété

2) Soient a et b deux nombres réels, x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $\ln x = a$ et $\ln y = b$

a- Exprimer de deux manières différentes xy et $\frac{x}{y}$.

b- En déduis que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ et $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$.

c) Justifie que $\forall x \in \mathbb{Q}, \ln(e^a)^r = ar$ puis en déduire que $(e^a)^r = e^{ar}$.

Bilan :

Synthèse partielle :

a) Propriété caractéristique :

Soit a et b deux réels. On retient que : $e^a \times e^b = e^{a+b}$

- * $(e^a)^b = e^{a \times b}$
- * $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- * $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- * $(e^a)^n = e^{na}$
- * $e^{\ln a} = \ln e^a = a$
- * $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- * $\ln e = e^{\ln 1} = 1$
- * $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- * $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- * Pour tout entier naturel, $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$
- * Pour tout entier naturel, $q \geq 2$ et tout entier p , $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$

b) Ordre :

- * $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$
- * $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

Evaluation formative :

1) Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}} \quad B = \frac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}} \times \sqrt[4]{e^2} \quad C = \frac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}} \times \sqrt[10]{e^{-20}}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } e^x = 3 & \text{b) } \ln x = 3 & \text{c) } e^{2x+3} = 4 \\ \text{d) } e^{2x+3} = e & \text{e) } (e^x - 1)(e^x - 2) = 0 & \text{f) } e^{2x} + e^x - 3 = 0 \\ \text{g) } e^{-x} - 12e^x - 1 = 0 & \text{h) } 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} - 4e^x \geq 0 & \text{i) } \frac{2e^{x+1}}{e^{x-2}} \leq 0 \end{array}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2e^x - 3e^y = -7 \\ -e^x + 2e^y = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) - \ln 2 = 0 \\ \frac{e^x}{e^5} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$

Bilan :

Activité 3 : Etude de la fonction exponentielle :

On désigne par (C) la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.
- 2) On pose $e^x = X$.
 - a) Montrer que $\frac{e^x}{x} = \frac{x}{\ln x}$.
 - b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement. que vaut $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$?
- 3) a) Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
 - c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
 - d) Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
- 4) Etudier l'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$).
- 5) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
 - b) Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = e^x - x - 1$. Etudier les variations de h et en déduire la position relative de (C) par rapport à (T).
- 6) Tracer (C) et (T).

Bilan :

Synthèse partielle :

a) Théorème :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Limites usuelles :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

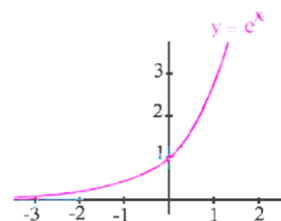
$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$



Evaluation :

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$$

2) Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^{2x}) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{2x} - e^x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{e^x+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3+1}$$

Bilan :

Activité 4 : Fonction de type $x \mapsto e^{u(x)}$ 1°) Soit $f(x) = e^{u(x)}$ a – Justifie que si u est définie, continue et dérivable sur I alors f l'est aussib - Exprime $f'(x)$ pour $x \in I$ c – Complète alors l'information suivante si u est une fonction dérivable sur I alors une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$ est**Bilan :****Synthèse partielle :****a) Théorème :**Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Dérivées remarquables :

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = ae^{(ax+b)}$

b) Corollaire :Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$ **Primitives remarquables :**

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + k$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{(ax+b)} + k$
- Si $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{u'(x)}e^{u(x)} + k$

1) Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \quad ; \quad g(x) = (2x+1)e^{-3x} \quad ; \quad h(x) = \frac{e^x + 1}{2e^{2x} + 3} \quad ; \quad p(x) = x^3 e^{3x}$$

2) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = e^{-3x} \quad ; \quad g(x) = xe^{x^2} \quad ; \quad h(x) = (2x+1)e^{x^2+x} \quad ; \quad p(x) = \sin x e^{\cos x}$$

3) Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I = \int_0^1 e^x dx \quad ; \quad J = \int_0^1 e^{-x+1} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad ; \quad L = \int_0^1 x e^{x^2}$$

Bilan :

[illegible]

1) Calculer les réels suivants : $A = e^{3 \ln 2}$; $B = e^{4 \ln(\frac{1}{2})}$; $C = e^{-\ln(\frac{1}{2})}$; $D = e^{-2 \ln \sqrt{2}}$

2) Vérifier que pour tout réel a , strictement positif et pour tout entier n , $a^n = e^{n \ln a}$.

3) Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes : $f : x \mapsto 2^x$ et $g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Synthèse partielle :

a) Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance α , la fonction notée f_α définie par $\begin{cases} f_\alpha :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_\alpha = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{cases}$

Conséquence :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

b) propriétés ($x > 0$) :

$$* x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \quad * x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad * x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$$

c) Etude de la fonction puissance :

i) Domaine de définition :

$$D_f =]0 ; +\infty[$$

ii) Limites aux bornes de D_f :

- * Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = 1$
- * Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$
- * Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

iii) Dérivée et sens de variation :

Soit $x \in]0 ; +\infty[$, alors $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$

la dérivée de f_α est donnée par $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Si $\alpha < 0$, alors $f'_\alpha < 0$, alors $f_\alpha(x)$ est décroissante ;
- Si $\alpha > 0$, alors $f'_\alpha > 0$, alors $f_\alpha(x)$ est croissante.

iv) Tableau de variation :

* Si $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		-
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	0

* Si $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+
$f_\alpha(x)$	0	$+\infty$

2) Croissance comparée de $\ln x$, e^x , a^x , x^α :

Limite de références :

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Note : Ces limites traduisent le fait que la fonction e^x croît plus vite que la fonction x^α qui croît plus vite que la fonction $\ln x$

Exemple :

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2 + 1)} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} \times e^x ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1}$$

Indication :

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)}$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = +\infty$$