Mathématiques

Terminales S1

2018/2019

Lycée Scientifique d'Excellence de Diourbel

Mamadou Ngom

Scansionato con CamScanner

Le 04/Octobre 2018 :

Rappels et Compléments sur la continuité la dérivabilité et les primitives

I.) Continuité

1.) Continuité en un point d'abscisses x_0

- f est continue en x_0 si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Pour une fonction de raccordement $\begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0) \end{cases}$

2.) Continuité sur un intervalle I :

f est continue sur un intervalle I si elle est continue en en tout point $x_0 \in I$.

3.) Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a;b]$

Corollaire 1 :

Si f est continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a;b[$.

De plus : Si f est strictement monotone sur I alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a;b[$.

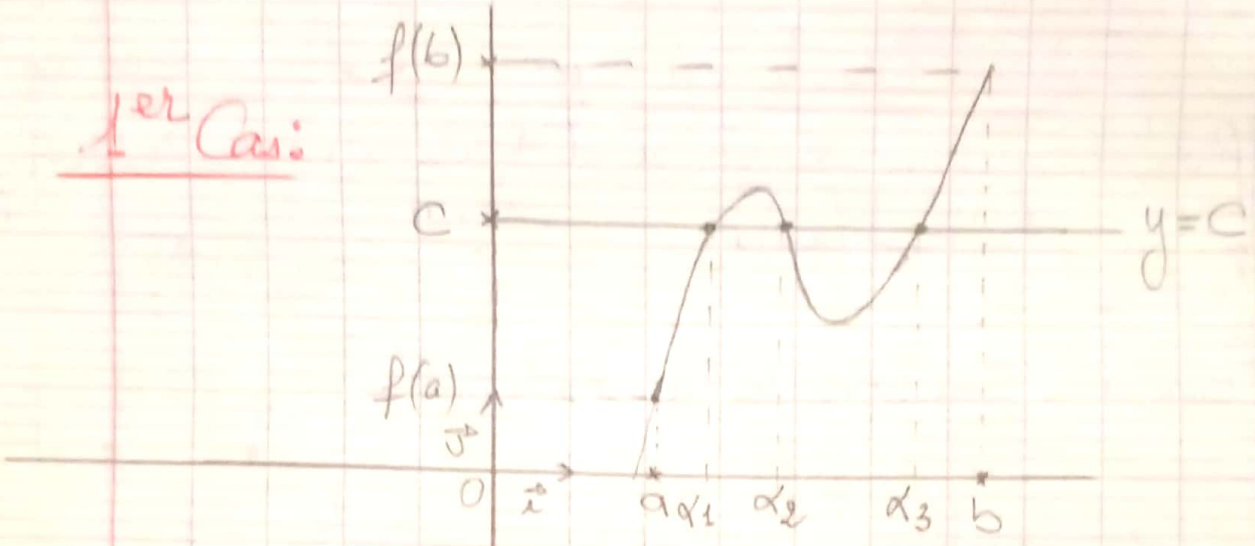
Scansionato con CamScanner

Corollaire 2 :

Si f est continue sur $I=[a;b]$ et ne s'annule pas alors elle garde un signe constant

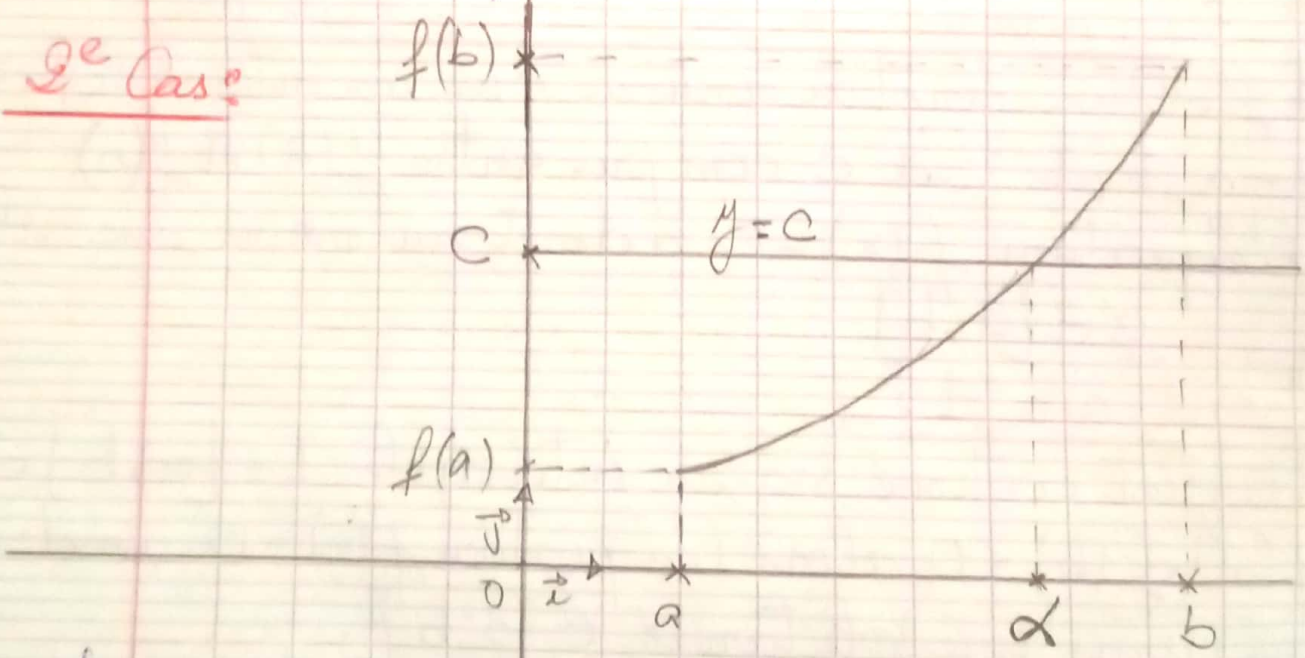
Illustrations graphiques

1er Cas :



f est continue mais n'est pas monotone sur $[a;b]$
L'équation $f(x)=c$ peut avoir plusieurs solutions.

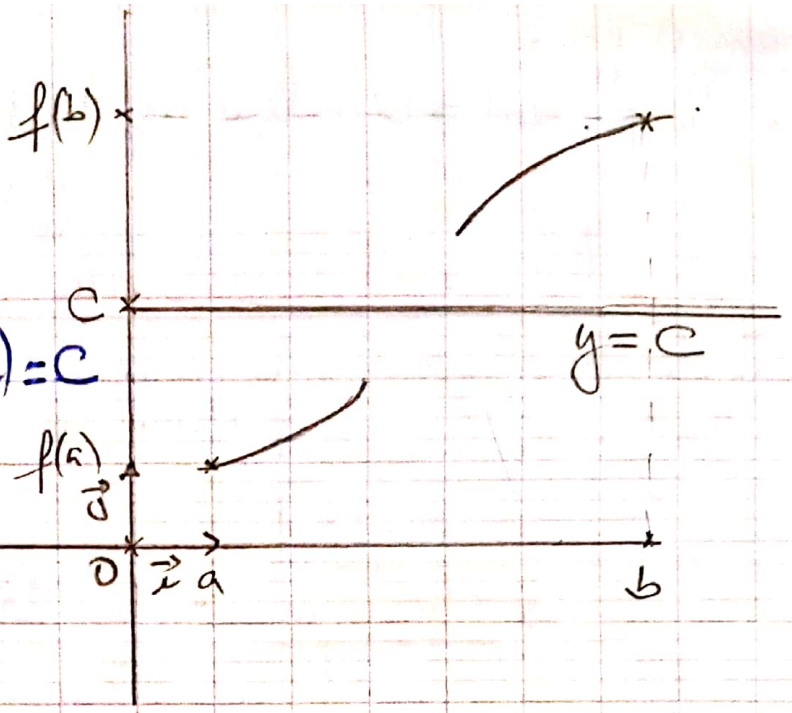
2e Cas :



f est continue et strictement croissante sur $[a;b]$.
L'équation $f(x)=c$ admet une unique solution $\alpha \in [a;b]$

Scansionato con CamScanner

3e Cas:



f n'est pas continue sur [a;b]. L'équation f(x)=C peut ne peut pas avoir de solution.

II) Dérivabilité

- f est dérivable en un point d'abcisse $x_0 \in D_f$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

- Pour une fonction de raccordement, si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$ alors f est dérivable à droite de x_0

Si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$ alors f est dérivable à gauche de x_0

De plus si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ alors f est dérivable en x_0

- Et (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et (C_f) admet une tangente verticale d'équation $x = x_0$

Scansionato con CamScanner

Remarque :

- Si $f'(x_0) = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation $y = f(x_0)$

* Dérivabilité sur un intervalle I

f est dérivable sur un intervalle I lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in I$

Le 05 Octobre 2018

* Théorème de la bijection :

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de $I \to J = f(I)$

* Dérivabilité de la bijection réciproque :

Théorème :

Soit f une fonction bijective sur un intervalle dérivable l'un intervalle I sur un intervalle J

Soit Si $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$

alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

et $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'[f'(y_0)]}$$

or $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$

donc $$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

En effet :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Scansionato con CamScanner

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Puisque $f'(x_0) \neq 0$ alors $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

NB: Si pour tout $x \in I$, f est une fonction bijective dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

Remarque:
- f et f^{-1} ont même sens de variation
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

* Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$

Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

* Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. f est une fonction définie sur $[a;b]$.

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tels que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

En effet:

Scansionato con CamScanner

Soit $h : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$

$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,a$

$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,b$

$h(a)-h(b) = f(a)-f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a)$

donc $h(a)-h(b) = 0$

alors $h(a) = h(b)$

Puisque h est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $h(a) = h(b)$, alors en appliquant le théorème de Rolle à h sur $[a,b]$ tel que il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$

Ainsi $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

d'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Application :

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

Solution

Soit $f : t \longmapsto \sin t$ avec $t \in [x;y]$

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[x;y]$

f est dérivable sur $]x;y[$

Scansionato con CamScanner

Soit $c \in]x;y[$

D'après le théorème des accroissement finis $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$f'(t) = \cos t$ or $|\cos t| \leq 1 \ \forall t$

donc $|f'(c)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq 1$

d'où $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$

* Théorème des Accroissement finis ou Théorème généralisé des accroissement finis :

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a<b$

f et g deux fonctions définies sur $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur $[a,b]$; dérivables sur $]a;b[$ telles que $\forall x \in]a,b[\quad g'(x) \neq 0$

Alors il existe un réel $c \in]a;b[$ tels que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En effet :

* Montrons que $g(b)-g(a) \neq 0$

Supposons que $g(b)-g(a)=0 \iff g(a)=g(b)$

Puisque g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a)=g(b)$; d'après le théorème de Rolle il existe un réel $d \in]a;b[$ tel que $g'(d)=0$

Ce qui est absurde car $\forall x \in]a,b[\quad g'(x) \neq 0$

Donc d'où $g(a)-g(b) \neq 0$

Scansionato con CamScanner

Soit $q(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

$q(a) = [f(b)-f(a)]g(a) - [g(b)-g(a)]f(a)$

$q(a) = g(a)f(b) + g(a)f(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a)$

$= g(a)f(b) - g(b)f(a)$

$q(b) = g(b)f(b) - g(b)f(a) - f(b)g(b) + f(b)g(a)$

$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$

donc $q(a) - q(b) = 0 \iff q(a) = q(b)$

Comme q est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $q(a) = q(b)$ alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $q'(c) = 0$

$q'(c) = [f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0$

donc $g'(c)[f(b)-f(a)] = f'(c)[g(b)-g(a)]$

d'où $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$

* Inégalité des accroissements finis

Théorème :

Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction

f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$

Scansionato con CamScanner

S'il existe deux réels m et M tels que
$m \leq f'(x) \leq M$ sur $[a,b]$ alors

$$\boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

On effet :

Soient deux fonctions h et g définies sur $[a,b] \to \mathbb{R}$
par $h(x) = f(x) - mx$ et $g(x) = f(x) - Mx$

h est dérivable sur $[a,b[$

$h'(x) = f'(x) - m$ or $f'(x) \geq m$

donc $h'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) - m \geq 0$

d'où h est croissante

alors $h(a) \geq h(b) \Leftrightarrow f(a) - ma \geq f(b) - mb$

$\Leftrightarrow f(a) - f(b) \geq m(a-b)$ (1)

g est dérivable sur $]a,b[$

$g'(x) = f'(x) - M$ or $f'(x) \leq M$

donc $g'(x) \leq 0$

d'où g est décroissante

alors $g(a) \leq g(b) \Leftrightarrow f(a) - Ma \leq f(b) - Mb$

$\Leftrightarrow f(a) - f(b) \leq M(a-b)$ (2)

D'après les inégalités (1) et (2)

$m(a-b) \leq f(a) - f(b) \leq M(a-b)$

Autre méthode

f est continue sur $[a,b]$

f dérivable sur $]a,b[$

alors il existe un réel $c \in]a,b[$

Scansionato con CamScanner

tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

or $m \leq f'(x) \leq M \Rightarrow m \leq f'(c) \leq M$

donc $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$

$b > a$ alors $m(b-a) \leq f(b)-f(b) \leq M(b-a)$

Le 06 Octobre 2018

NB: Si $|f'| \leq M$ alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$

Le 09/Octobre/2018

Fonctions circulaires réciproques

1.) Fonctions Arcsinus

a) Définition

La fonction sinus est continue et définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable strictement monotone. Cependant la restriction de la fonction $x \longmapsto \sin$ de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection notée

$$[-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Arcsin :

$$x \longmapsto \text{Arcsin } x = y$$

On a: $y = \text{arc sin } x \Leftrightarrow \sin y = x$ et $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

b) Valeurs remarquables

$\text{Arc sin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\text{Arc sin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\text{Arc sin}(1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\text{Arc sin}\left(\sqrt{3}/2\right) = \frac{\pi}{3}$

c) Dérivée de la fonction arc sinus

Scansionato con CamScanner

Puisque sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

et $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad \sin' y = \cos y \neq 0$

Donc arc sinus est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall -1 < x < 1 \quad ; (\text{Arc}\sin)'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\text{Arc}\sin x)}$

or $\text{Arc}\sin x = y$

donc $(\text{Arc}\sin)'(x) = \dfrac{1}{\cos y}$

or $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

$$(\text{Arc}\sin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

Tableau de variation de Arcsinus :

x	-1		1
$(\text{Arcsin})'(x)$	$+\infty$	$+$	$+\infty$
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

Remarque : La fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$ est impaire

En effet :

Soit $f(x) = \text{Arc}\sin(x) + \text{Arc}\sin(-x)$

Si f est dérivable sur $[a;b]$ et $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$

Alors f est une constante sur $[a,b]$

→ Soit $x \in [a;b]$

f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$
D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$$

$$\Leftrightarrow f'(c_x)(x-a) = f(x)-f(a)$$

or $\forall x \in [a,b]$, $f'(x)=0$ d'où $f(x)=f(a)$ const

Soit $f(x) = \text{Arcsin}\, x + \text{Arc sin}(-x)$
f est dérivable sur $]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{donc } f'(x)=0$$

D'après le théorème précédent f est constante sur $[-1;1]$

Si $x=0$ $\quad f(0) = \text{Arcsin}\,0 + \text{Arcsin}\,0 = 0$

Alors $\forall x \in [-1,1]$ $\quad f(x)=0$

Alors $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arc sin}(x)$

Par conséquent la fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$ est impaire.

2°) Fonctions Arccosinus

La restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ est continue et strictement décroissante.
Donc elle réalise une bijection réciproque notée

$$\text{Arccosinus} : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$$
$$x \longmapsto \text{Arccos}\, x = y$$

Scansionato con CamScanner

Ainsi On a: $y = \text{Arc}\cos x \iff \begin{cases} \cos y = x \text{ et } 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$

* Valeurs remarquables

$\text{Arc}\cos(-1) = \pi$ $\quad$ $\text{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\text{Arc}\cos(1) = 0$ $\quad$ $\text{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

NB: La fonction Arccosinus n'est ni paire ni impaire.

* Dérivée de la fonction ~~arccosx~~ Arccosinus

Soit $\text{Arccosinus} : [-1; 1] \longrightarrow [0, \pi]$

Puisque cosinus est dérivable sur $]0; \pi[$ et $0 < y < \pi$ $\cos' y = -\sin y \neq 0$ alors Arccosinus est dérivable sur $]-1; 1[$

$$\forall x \in]-1, 1[\; ; (\text{Arc}\cos x)' = \frac{1}{\cos'(\text{Arc}\cos x)}$$

or $y = \text{Arc}\cos x \Rightarrow (\text{Arc}\cos)'(x) = \frac{1}{-\sin y}$

Comme $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

donc $\boxed{(\text{Arc}\cos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Tableau de variation de Arccosinus:

x	-1		1
$(\text{Arc}\cos)'(x)$	$-\infty$	$-$	$-\infty$
Arccosinus	π	↘	0

Scansionato con CamScanner

Remarque : $\boxed{\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \pi/2}$

En effet :

Soit g une fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$g(x) = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x$$

g est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$ ~~$g'(x) \neq 0$~~

$$g'(x) = (\text{Arc sin})'(x) + (\text{Arc cos } x)'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Donc g est une fonction constante $g(x) = C$ $(C \in \mathbb{R})$

Si $x = 0$ $g(0) = \text{Arc sin } 0 + \text{Arc cos } 0 = \frac{\pi}{2}$

Donc $g(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}}$$

3) Fonction Arc tangente :

La restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante alors elle réalise une bijection réciproque notée

Arctangente : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$x \longmapsto \text{Arctg}(x) = y$$

Ainsi On a : $y = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow \tan y = x$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

* **Valeurs remarquables :**

$\text{Arctg}(-1) = -\pi/4$ $\quad$ $\text{Arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$

$\text{Arctg}(1) = \pi/4$ $\quad$ $\text{Arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$

NB : La fonction $x \longmapsto \text{Arctan}(x)$ est impaire

Scansionato con CamScanner

* Dérivée de la fonction Arctangente

Puisque la fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $\forall -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ $\tan' y = 1+\tan^2 y \neq 0$

donc Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Arctg'(x) = \frac{1}{\tan'(Arctg x)} = \frac{1}{\tan'(y)}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc $\boxed{Arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0}$

Tableau de variation de Arctg:

x	$-\infty$		$+\infty$
$Arctg'(x)$		$+$	
Arctg	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

Scansionato con CamScanner

Fonction logarithme népérien

Le 15/10/2018

I) Définition

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]0;+\infty[$ et sa primitive s'anule en 1 est appelée fonction logarithme népérien noté ln.

$$\ln : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \quad \text{avec } (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0$$

Conséquences de la définition

a) $D_{\ln} =]0;+\infty[$

b) $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

c) On admet : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

x	0		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	‖ 1	↗	‖ $+\infty$

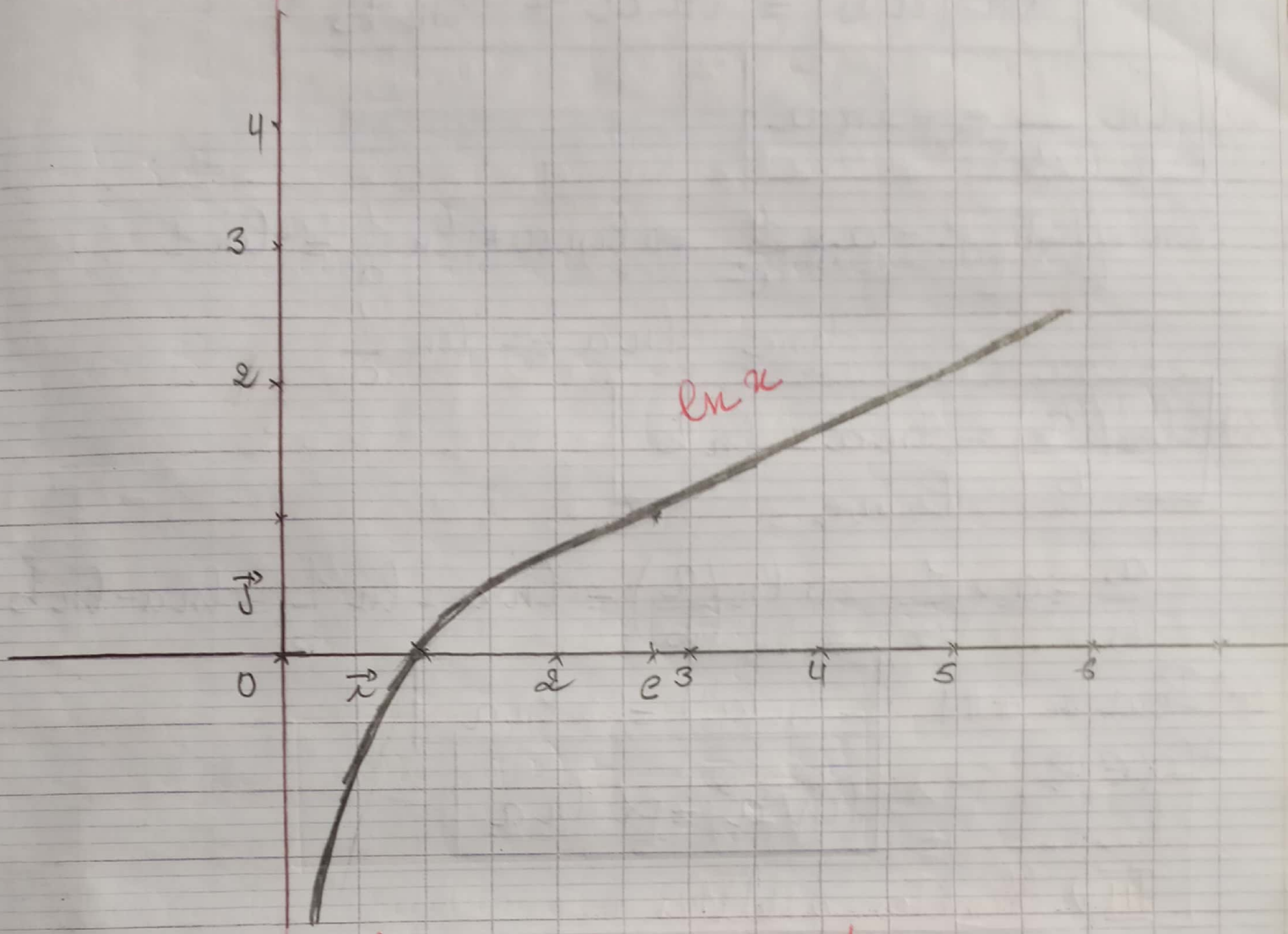
ln est une bijection de $]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$1 \in \mathbb{R}$ donc 1 a un antécédant un par ln noté e c'est à dire $\ln e = 1$

$e \simeq 2,71828\ldots$

Scansionato con CamScanner

d.) Courbe



e.) ln est strictement croissante

$\ln a = \ln b \iff a = b$

$\ln a < \ln b \iff a < b$

$\ln a > \ln b \iff a > b$

f.) Signe de $\ln x$

x	0 ‖		1	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	ϕ	$+$

II.) Propriétés algebriques

$a > 0$ et $b > 0$

1.) Propriétés fondamentale

Scansionato con CamScanner

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

2) $\boxed{\ln \frac{1}{a} = -\ln a}$

En effet $1 = a \times \frac{1}{a} \Rightarrow \ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln 1$

donc $\ln a = -\ln \frac{1}{a}$

3) $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$

Preuve

$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad \boxed{\ln(a^n) = n \ln a}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\ln a^\alpha = \alpha \ln a}$

II) Limites usuelles

1) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad n \in \mathbb{N}^*$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+$ avec $\alpha > 0$

IV) $\ln \circ u$ (Composé de ln et u)

* $\left[\ln(u(x))\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$

Scansionato con CamScanner

* Si $f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$ alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions

$$\boxed{F \;/\; F(x) = \ln|U(x)| + C}$$

NB: ln est la fonction logarithme de base e ($\ln e = 1$)

Le 19/Octobre/2018

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $x = x \ln e = \ln e^x$

$\ln[U(x)]$ Existe ssi $\begin{cases} U(x) > 0 \\ U(x) \text{ existe} \end{cases}$

$\ln|U(x)|$ existe ssi $\begin{cases} U(x) \neq 0 \\ U(x) \text{ existe} \end{cases}$

$f(x) = \ln[U(x)]$

f est dérivable sur un intervalle I ssi

$\begin{cases} U \text{ dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ U(x) > 0 \end{cases}$

$g(x) = \ln|U(x)|$

g est dérivable ssi $\begin{cases} U \text{ dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ U(x) \neq 0 \end{cases}$

Scansionato con CamScanner

Démonstration de la propriété fondamentale

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$[\ln(ax)]' = (ax)' \times \ln'(ax) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow [\ln(ax)]' = (\ln x)'$

d'où $\ln(ax) = \ln x + k$

Posons $x = 1$ $\quad \ln(a) = \ln 1 + k = k$

donc $\ln ax = \ln x + \ln a$

$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

$\left[\ln\left(\frac{u}{v}\right)\right]' = \frac{u'v - v'u}{uv}$

Si f est croissante et non majorée sur ~~I ouverte~~ $I = [a, b]$ alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

~~f(x) =~~ Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

Soit $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$

On sait que $\forall x \in]0; +\infty[\quad 0 \leq |\ln x| \leq 2\sqrt{x}$

$0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]1; +\infty[$

Scansionato con CamScanner

$\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e\sqrt{x}}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

* Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* Si $f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

S'il existe un réel l, une fonction g et un intervalle I

Si $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \\ \forall x \in I \quad |f(x) - l| \leq g(x) \end{cases}$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Calcul $\lim_{x \to x_0} \ln[u(x)]$

$\lim_{x \to x_0} u(x) = a$

Scansionato con CamScanner

Si $a = 0^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \ln[U(x)] = -\infty$

Si $a = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \ln(U(x)) = +\infty$

Si $a \neq (+\infty)$ et $a \neq 0^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \ln[U(x)] = \ln a$

Si $a < 0$ alors $\lim_{x \to x_0} \ln[U(x)]$ n'existe pas

Fonction logarithme de base a $(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$

1) Définition

On appelle fonction logarithme de base a toute fonction définie sur $]0; +\infty[$ notée $\log_a$ telle que $\forall x \in]0; +\infty[$; on a :

$$\log_a = \frac{\ln x}{\ln a}$$

2) Propriétés

Soit x et y deux réels strictement positif

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3) $\log_a(a) = 1$

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

5) $\log_a(x) = \log_a(y) \iff x = y$

6) $\log_a(x^r) = r \log(x)$

Scansionato con CamScanner

3) Sens de variation

1.) La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0;+\infty[$;

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \left[\log_a(x)\right]' = \frac{1}{x \ln a}$$

Si $a \in]0;1[$; $\ln a < 0 \iff \frac{1}{x \ln a} < 0$

d'où $\log_a$ est strictement décroissante

Si $a \in]1;+\infty[$; $\ln a > 0 \iff \frac{1}{x \ln a} > 0$ d'où

$\log_a$ est strictement croissante

4) Tableau de variation de $\log_a$

Pour $a \in]0;1[$

x	0		$+\infty$
$[\log_a(x)]'$	‖	$-$	
$\log_a$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Pour $a \in]1;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$[\log_a(x)]'$	‖	$+$	
$\log_a$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5) Conséquence

Fonction logarithme décimal

Scansionato con CamScanner

On appelle fonction logarithme décimale, la fonction logarithme de base 10 définie sur $]0;+\infty[$ et noté log telle que $\forall x>0$

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

NB: $\ln x = y \iff x = e^y$

En effet:

$\ln x = y \iff \ln x = y \times 1 = y \times \ln e = \ln e^y$

$\ln x = \ln e^y \iff x = e^y$

Application 1:

Resolvons dans $\mathbb{R}$ $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x+2)$

L'inégalation existe si et seulement si:

$x \in]-\infty;-2[\cup]-1;1[\cup]2;+\infty[$

or $\frac{1}{2} \in]0;1[\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}$ strictement décroissante

Ainsi $S =]-\infty;-2[\cup]-1;0[$

Application 2:

1.) Montrer que $1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.) A l'aide du théorème d'accroissement finis montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

3.) Calculer la limite de la suite

$$U(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{P}{3}\right)$$

Scansionato con CamScanner

4) En déduire la limite de $V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{P}{3}\right)$

Solution

1) Démontrons que $1+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit f une application telle que $f(n) = 1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

Si $n=1$ on a : $f(1) = 1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$

donc l'égalité est vrai au 1er rang

Supposons que $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrons que $f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

or $2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$

donc $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Comme $f(n+1) = S_{n+1}$

alors $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$

Scansionato con CamScanner

Fonction exponentielle et Fonction puissance

le 23/10/18

I.) Fonction exponentielle

1.) Définition

On appelle fonction exponentielle, l'application réciproque de la fonction logarithme néperien.

x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp x)'$		$+$	
$\exp$	0	↗	$+\infty$

$$\mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$$
$$\exp : x \longmapsto \exp(x)$$

2.) Conséquences immédiates

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$
- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1 \qquad \ln(e) = 1 \iff e = \exp(1)$

3.) Notation

$\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est notée e^x

4.) Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

Scansionato con CamScanner

a) $e^x \times e^y = e^{(x+y)}$

b) $\frac{e^x}{e^y} = e^{(x-y)}$

c) $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

d) $(e^x)^r = e^{rx}$ $r \in \mathbb{Q}$

e) $e^x = e^y \iff x = y$ car la fonction exp est injective

f) $e^x \leqslant e^y \iff x \leqslant y$

5) Formules d'inversion

$\forall a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ alors $e^b = a \iff b = \ln a$

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ alors $\ln b = a \iff b = e^a$

6) Formule de composition

* $\forall a > 0$, $e^{\ln a} = a$
* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\ln e^a = a$

7) Dérivabilité de la fonction exponentielle

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $\forall x > 0$; $(\ln x)' \neq 0$

Alors la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$

En effet :

On sait que $\ln e^x = x$

donc $(\ln e^x)' = (x)' \iff (e^x)' \times (\ln(e^x)) = 1$

$\iff (e^x)' \times \frac{1}{e^x} = 1 \iff \frac{(e^x)'}{e^x} = 1$

donc $\boxed{(e^x)' = e^x}$

8) Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

Scansionato con CamScanner

Si $U(x)$ est dérivable sur I alors $e^{U(x)}$ est dérivable sur I

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{(e^{U(x)})' = U'(x)\, e^{U(x)}}$

Application : Soit f une fonction : $f(x) = e^{\cos x}$

1.) Domaine de définition

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

2) Dérivabilité de f

Soit $m(x) = \cos x$

Comme m est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

3.) Calcul de $f'(x)$

$$f'(x) = (\cos x)' e^{\cos x} = -\sin x e^{\cos x}$$

donc $f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$

Remarque

$$D_{fog}(x) = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$$

9.) **Autre primitive**

$\forall x \in I$, $f(x) = U'(x) e^{U(x)}$ alors $F(x) = e^{U(x)} + k$

Cas particulier

Si $f(x) = e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$ alors

$$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + k$$

10.) **Limites usuelles :**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

Scansionato con CamScanner

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Démonstration : changement de variable

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e) $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ f) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve

Soit $m(x) = e^x$

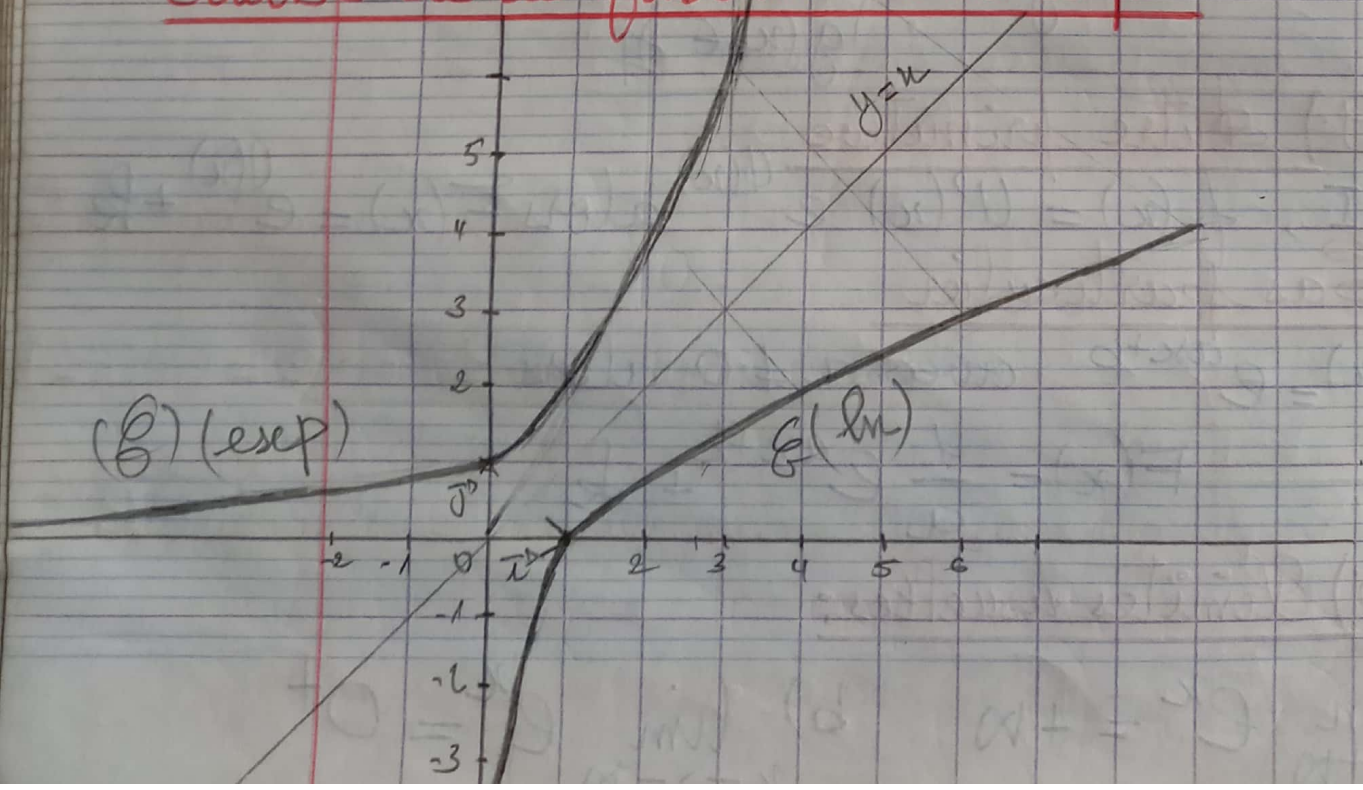
m est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$

donc $\frac{m(x) - m'(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{m(x) - m(0)}{x} = e^0 = 1$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Courbe de la fonction ln et exp



Scansionato con CamScanner

Application : PROBLEME 4

Correction : voir cahier exercice Maths

II) Fonction exponentielle de base a

1) Définition

On appelle fonction exp de base a la fonction exponentielle : $x \longmapsto e^{x \ln a}$

2) Notation : $a^x = e^{x \ln a}$

3) Propriétés

Soit a et b deux réels strictements positifs

$$a^x \times a^y = a^{(x+y)}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad (a \times b)^x = a^x \times b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

4) Sens de variation

La fonction f_a définie par $f_a = e^{x \ln a}$

Comme $(\ln a) \times x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'_a(x) = (x \ln a)' \times e^{x \ln a}$

$= (\ln a) e^{x \ln a}$

Donc $f'_a(x) = (\ln a) e^{x \ln a}$

Scansionato con CamScanner

Si $0<a<1$; alors $f'_a(x)<0$ donc f_a strictement décroissante

Si $a>1$ alors $f'_a(x)>0$ donc f_a strictement croissante

Tableau de variation

Si $0<a<1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	
f_a	$+\infty$	↘	0

Si $a>1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	
f_a	0	↗	$+\infty$

III) Fonction Puissance

1.) Définition

Soit α un réel, on appelle fonction puissance la fonction $f_\alpha :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_\alpha(x) = x^\alpha$$

Scansionato con CamScanner

- Limites 2) Notation

$$x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$$

3) Limites

$\alpha > 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$

$\alpha < 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

4) Sens de variation :

La fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

$x \longmapsto \alpha \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Alors f_α est dérivable sur $]0; +\infty[$,

et $\forall x > 0 \quad f'_\alpha(x) = (\alpha \ln x)' \times e^{\alpha \ln x}$

$$= \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}$$

Donc $$\boxed{f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}}$$

* Si $\alpha > 0$ alors f_α est strictement croissante
* Si $\alpha < 0$ alors f_α est strictement décroissante

Tableau de variation de f_α

Scansionato con CamScanner

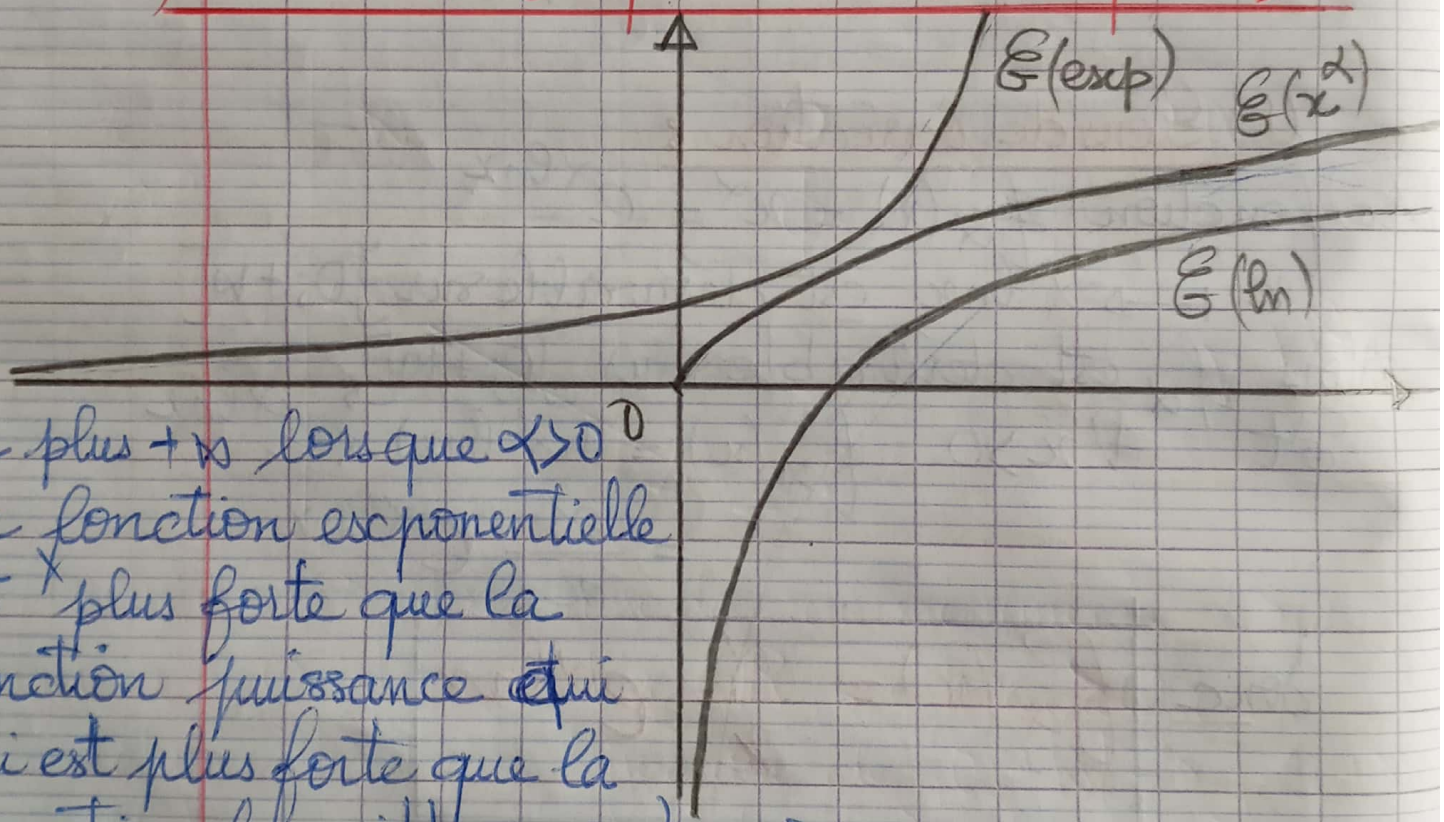
x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	$+$	
f_α	0 ↗	$+\infty$

Si $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	$-$	
f_α	$+\infty$ ↘	0

Si $\alpha < 0$

5) Puissance Comparée en $+\infty$ lorsque $\alpha > 0$



En plus $+\infty$ lorsque $\alpha > 0$ la fonction exponentielle est plus forte que la fonction puissance qui lui est plus forte que la fonction logarithme népérienne.

Donc on a:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$$

Scansionato con CamScanner

Complément

Fonction Hyperbolique Directes et Réciproques

I.) Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

1.) Définition

On appelle sinus et cosinus hyperboliques les deux fonction définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2.) Remarque :

Ce sont deux fonctions définies et continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$

On a : $\begin{cases} ch x + sh x = e^x \\ ch x - sh x = e^{-x} \end{cases}$

3.) Variations

* Puisque la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $(sh x)' = ch x > 0$

donc la fonction sh est strictement croissante

Ce qui signifie que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui même.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(sh x)'$		$+$	
sh	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

Scansionato con CamScanner

D'après le tableau de variation $\forall x \in \mathbb{R}$

On a : $\text{sh}x < 0$ si $x < 0$

$\text{sh}x > 0$ si $x > 0$

* $x \longmapsto \text{ch}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$

Sur $]-\infty ; 0[$ $\text{sh}x < 0$ donc $x \longmapsto \text{ch}x$ est strictement décroissante

Sur $]0 ; +\infty[$ $\text{sh}x > 0$ donc $x \longmapsto \text{ch}x$ est strictement croissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\text{ch}x)'$		$-$	ϕ	$+$	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

La fonction $x \longmapsto \text{ch}x$ possède un minimum $1 > 0$ pour $x = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}x > 0$

La fonction ch est une bijection de $]0 ; +\infty[\to]1 ; +\infty[$

II) Fonction tangente hyperbolique

On appelle tangente hyberlolique, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\text{th}x = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$

Remarque :

th est une fonction impare continue et indéfiniment

dérivable sur $\mathbb{R}$

3) Variation

Puisque th est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors

$$(\text{th}x)' = \left(\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right)' = \frac{(\text{sh}x)'\text{ch}x - (\text{ch}x)^2\text{sh}x}{\text{ch}^2x}$$

$$= \frac{+\text{ch}^2x + \text{sh}^2x}{\text{ch}^2x} = 1 + \text{th}^2x$$

De plus $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$

Donc $\boxed{(\text{th}x)' = 1 + \text{th}^2x = \frac{1}{\text{ch}^2x}} > 0$

Donc la fonction th est strictement croissante

Application :

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{th}x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \quad (\text{Factoriser par } e^x)$$

Limites (Utilisat° de la démonstration précédente de l'applicat°)

$$\lim_{x \to +\infty} \text{th}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

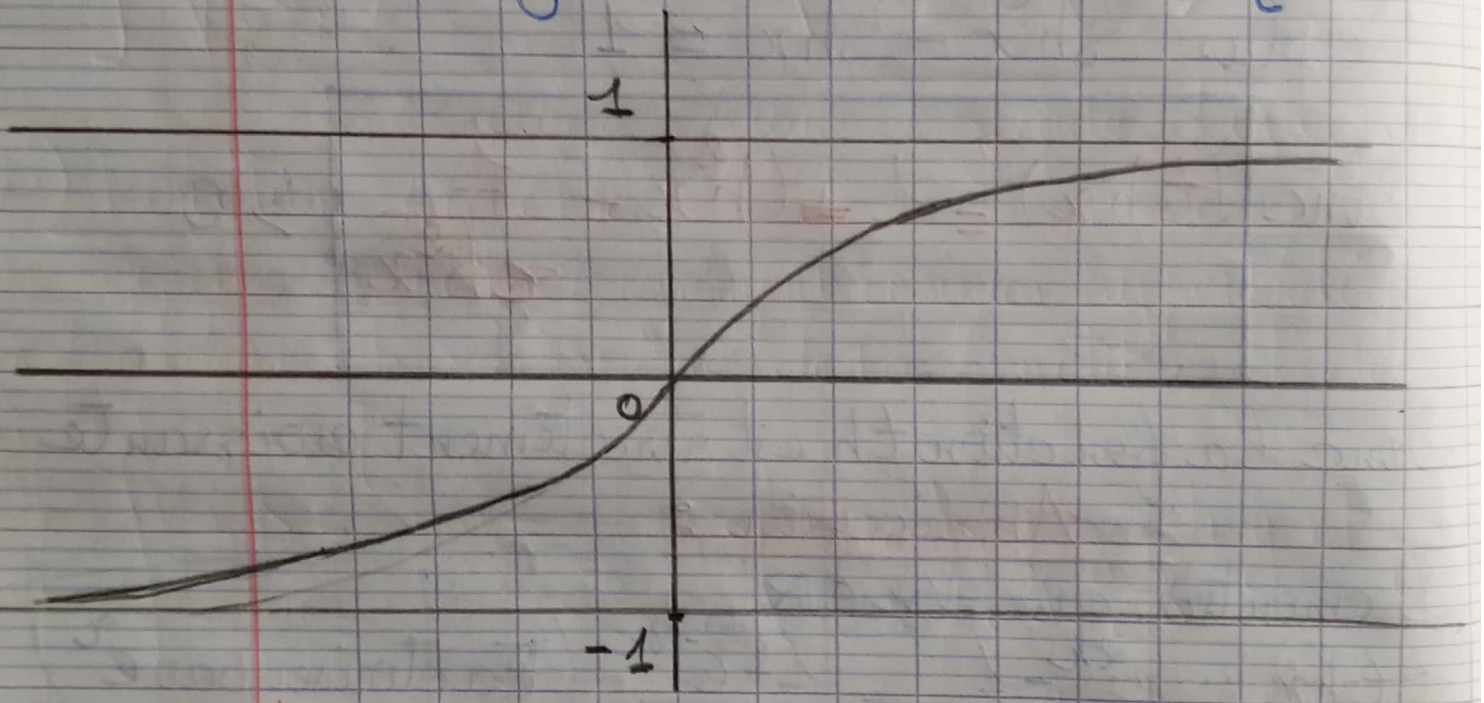
$$\lim_{x \to -\infty} \text{th}x = -1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Tableau de variation

Scansionato con CamScanner

	$-\infty$		$+\infty$
$(\text{th}x)'$		$+$	
th		↗	1
	-1		

ainsi th est une bijection de $\mathbb{R} \to]-1;1[$



III.) Fonctions hyperboliques Réciproques

On appelle argument sinus hyperbolique et on note Arg sh la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y = \text{Arg sh}\, x \iff x = \text{sh}\, y$$

$$\iff \text{sh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

$$\iff 2x = e^y - e^{-y}$$

$$\iff 2x = e^{-y}(e^{2y} - 1)$$

Scansionato con CamScanner

$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1$

$\Leftrightarrow -2xe^y + e^{2y} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$

Posons $t = e^y \Rightarrow t^2 - 2tx - 1 = 0$

$\Delta = 4x^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{x^2+1}$

$t_1 = \dfrac{2x - 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x - \sqrt{x^2+1}$

$t_2 = x + \sqrt{x^2+1}$

$\begin{cases} e^y = x - \sqrt{x^2+1} & \text{absurde} \\ e^y = x + \sqrt{x^2+1} & \text{vrai} \end{cases}$

Donc $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

ou $y = \text{Arg sh } x$

donc $\boxed{\text{Arg sh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$

Puisque la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $(\text{sh}'x) \neq 0$ alors Arg sh est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$(\text{Arg sh } x)' = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Arg sh } x)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Arg sh } x)}$$

or $\forall y \in \mathbb{R}$; $\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$

$\Leftrightarrow \text{ch}^2(\text{Arg sh } x) - \text{sh}^2(\text{Arg sh } x) = 1$

Scansionato con CamScanner

De plus $sh^2 \circ Argsh\, x = x^2$

donc $ch(Argsh\, x) = \sqrt{x^2+1}$

d'où $(Argsh\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

donc : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \alpha$

avec α une constante d'intégration

2°) Fonction Argch x

On appelle Argch Argument cosinus hyperbolique la fonction réciproque de la fonction ch définie sur $[1;+\infty[$.

et $\forall x \geq 1$, $y = Argch\, x \iff x = ch\, y$ et $y \geq 0$

$x = ch\, y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \iff 2x = e^y + e^{-y}$

$\iff 2x = e^{-y}(e^{2y}+1) \iff 2x e^y - (e^y)^2 - 1 = 0$

Posons $m = e^y$

donc $m^2 - 2xm + 1 = 0$ $\quad \Delta = 4x^2 + 4$

$m_1 = \dfrac{2x - 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x - \sqrt{x^2+1}$

$m_2 = x + \sqrt{x^2-1}$

$\begin{cases} e^y = x - \sqrt{x^2-1} & \text{absurde} \\ e^y = x + \sqrt{x^2-1} & \text{vraie} \end{cases}$

Scansionato con CamScanner

Donc $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$

$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

D'où $\boxed{\text{Arg ch } x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$

Puisque la fonction ch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x>1$ $\text{sh}\,x \neq 0$ alors Arg ch est dérivable sur $]1;+\infty[$

$$(\text{Arg ch } x)' = \frac{1}{\text{sh}\left[\text{Arg ch } x\right]}$$

or $\forall y>1$, $\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$

$\Leftrightarrow \text{ch}^2(\text{Arg ch } x) - \text{sh}^2(\text{Arg ch } x) = 1$

De plus $\text{ch}^2(\text{Arg ch } x) = x^2$

Donc $x^2 - \text{sh}^2(\text{Arg ch } x) = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \text{sh}^2(\text{Arg ch } x) > 0$

$\Rightarrow \text{sh}(\text{Arg ch } x) = \sqrt{x^2-1}$

D'où $(\text{Arg ch } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Donc $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \beta}$

Scansionato con CamScanner

3-) Fonction Argth

On appelle Argument tangente hyperbolique et on note Argth la fonction réciproque de la fonction th, elle est définie sur $]-1;1[$

par $y = \text{Argth}\, x \iff x = \text{th}\, y$

l'équation $\text{th}\, y = x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \iff x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$\iff e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

donc $\forall x \in]-1;1[$ $\quad \text{Argth}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$\frac{d}{dx}\,\text{Argth}\, x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \gamma}$$

Scansionato con CamScanner

Nombres complexes

Le 30/10/2018

I) Présentation de l'ensemble $\mathbb{C}$

Il existe un surensemble de $\mathbb{R}$ appelé ensemble des nbres complexes noté $\mathbb{C}$ muni de deux opérations l'addition et la multiplication. Ses propriétés sont :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Il existe une nbre complexe noté i tel que $i^2 = -1$
- L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ possèdent les mêmes propriétés algébriques que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

1) Ecriture ou forme algébrique d'un nbre complexe

Tout nbre complexe z s'écrit de manière unique

$$z = a + ib \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Dans cette écriture a = partie réelle de z $\mathrm{Re}(z)$

b = partie imaginaire de z $\mathrm{Im}(z)$

Donc $\boxed{z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}$ → forme algébrique

2) Conséquences

* Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors $z = \mathrm{Re}(z)$ alors z est un réel
* Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z = i\,\mathrm{Im}(z)$ alors z est un imaginaire pur. $z \in i\mathbb{R}$

3) Propriétés

* Pour tout nbre complexes
  - z est réel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(z) = 0$
  - z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z) = 0$

Scansionato con CamScanner

* Deux nbres complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

* Un nombre complexes est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont simultanément nulles.

$$z=0 \iff \begin{cases} Re(z)=0 \\ Im(z)=0 \end{cases}$$

4.) Puissance de i

Exemple : Calculons i^{2019}

Puisque i^n est périodique de période 4

alors si $n = 4q+r \Rightarrow i^n = (i^4)^q \times (i)^r$

avec r le reste de la division euclidienne de n par 4

2019	4
3	504

$\Rightarrow 2019 = 4\times 504 + 3$

$i^{2019} = (i^4)^{504} \times i^3$

donc $i^{2019} = 1^{504} \times (i^2) \times i = -i$

$$\boxed{i^{2019} = -i}$$

5.) Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient deux nbres complexes $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$

$$z+z' = a+a' + i(b+b')$$

$$z \times z' = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$$

Application

Scansionato con CamScanner

Donner l'écriture algébrique des nbres complexes

$$z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i - i + 2 = \frac{13}{6} - \frac{2}{3}i$$

$$\boxed{z_1 = \frac{13}{6} - i\frac{2}{3}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{2 + 3i}{13} = \boxed{\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i}$$

$$z_3 = \frac{2 - i}{1 + i} = (2 - i) \times \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{1}{2}(2 - i)(1 - i)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(2 - 2i - i - 1) = \frac{1}{2}(-3i + 1)$$

$$\boxed{z_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

Rappel

Triangle de PASCAL

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
1	5		10		10		5	1
1		6		15		20		15		6		1
1	7		21		35		35		21		7	1
1		8		28		56		70		56		28		8		1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5b^4a + b^5$$

Scansionato con CamScanner

Formule du Binôme de NEWTON

Soient a et b deux nbres complexes

Pour tout entier naturel n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Formule de Factorisation

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n}\left(a^{n-1-k}\, b^k\right)$$

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(a^{n-1-k}\, b^k\right)$$

Somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{Si } q \neq 0 \\ n+1 & \text{Si } q = 1 \end{cases}$$

Application 2 : Écriture algébrique

$z_1 = (2+i)^3$ $\quad$ $z_2 = (1-i)^8$

$z_1 = 2+11i$ $\quad$ $z_2 = 16$

Scansionato con CamScanner

6.) Conjugué d'un nbre complexe

a.) Définition

Soit $z = a + ib$ un nbre complexe quelconque.
On appelle nbre complexe conjugué de z noté $\bar{z}$, le nbre complexe : $\bar{z} = a - ib$

b.) Conséquences

× $\bar{z} + z = 2\,Re(z) = 2a$

× $z - \bar{z} = 2i\,Im(z) = 2ib$

* $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z}$

* $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0 \iff z = -\bar{z}$

Théorème

1.) $Z \in \mathbb{R} \iff Z = \bar{Z}$

2.) $Z \in i\mathbb{R} \iff Z = -\bar{Z}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$

1.) $z - 2i\bar{z} + 4 - 5i = 0$ 2.) $z^2 = \bar{z}$

3.) $z^2 + z\bar{z} = 0$

Solution

1.) $z - 2i\bar{z} + 4 - 5i = 0 \Rightarrow z = i - 2$

2.) $z^2 = \bar{z} \Rightarrow$ 4 solutions

3.) $z^2 + z\bar{z} = 0 \Rightarrow$ ~~Solut~~ Imaginaire Pure

c.) Propriétés

Soient 2 nbres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

Scansionato con CamScanner

* $\overline{z+z'} = a+a'-i(b+b') = \overline{z}+\overline{z'}$

* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Si $z \neq 0$ on peut écrire $z' \times \frac{1}{z'} = 1$

* $\overline{z' \times \frac{1}{z'}} = 1$ * $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$

* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Retenons que pour tout nbre complexe z et z'

* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

* $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

* $\overline{kz} = k \times \overline{z}$ $k \in \mathbb{R}$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

En posant $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$

1

Scansionato con CamScanner

$$(z^{-n}) = \frac{1}{z^n}$$

Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}^*, \forall z \in \mathbb{C}^*$

$$(\overline{z^p}) = (\overline{z})^p$$

Solution

1.) Démonstration par récurence

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déja démontrer

Démontrer pour $p \in \mathbb{Z}^-$ on pose $p = -n$

$$(\overline{z^p}) = \left(\frac{\overline{1}}{z^{-n}}\right) = \left(\underbrace{\frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \dots \times \frac{1}{z}}_{n \text{ fois}}\right)$$

donc $(\overline{z^p}) = \left(\frac{1}{(\overline{z})^n}\right) = (\overline{z})^p$

Exercice 2:

Soit $z \neq 1$ et $Z = \frac{z-2}{z-1}$

Comment faut-il choisir z pour que Z soit un réel?

Solution:

Z est un réel $\Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Rightarrow z \in \mathbb{R} - \{1\}$

Remarque 1:

$$z\overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$$

Remarque 2

Scansionato con CamScanner

Soit un polynôme à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Si $P(z_0)=0$ alors $\overline{P(z_0)}=0$

C'est à dire si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$ est racine

Preuve :

$$P(z_0)=0 \iff a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$\overline{P(z_0)}=\overline{0} \iff a_n \overline{(z_0)} + a_{n-1}\overline{(z_0^{n-1})} + \dots + a_0 = 0$$

donc $P(\overline{z_0})$ est racine

II) Représentation graphique des nbres complexes

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$

1) Affixe d'un point et d'un vecteur

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe et M le point de coordonnées $(a;b)$ avec $x_M = Re(z)$ $y_M = Im(z)$

Donc M est le point d'affixe z noté $M(z)$

ou M est le point image de z

Exemple : $A(1+3i) \iff A(1,3)$

A d'affixes $(1+3i) \iff$ A de coordonnées $(1,3)$

Soient deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$

$z_A = x_A + i y_A$ et $z_B = x_B + i y_B$

Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$

2) Propriétés

Scansionato con CamScanner

* Soient trois points du plan complexe
$A(z_A)$ $B(z_B)$ et $C(z_C)$
A, B et C sont alignés si et seulement si

$$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}$$

Preuve :

A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
donc $\exists$ un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow z_C - z_A = \alpha (z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha \in \mathbb{R}$$

* Deux droites (AB) et (CD) sont // ssi $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$

* $\overrightarrow{OM}$ est colinéaires à $\overrightarrow{OM'}$ ssi $\mathrm{Im}(z\bar{z}') = 0$
* $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM'}$ ssi

$$\mathrm{Re}(z\bar{z}') = 0$$

Preuve :

On pose $z = x + yi$ et $z' = x' + iy'$

$$z\bar{z}' = (x+yi)(x'-iy')$$
$$= \mathrm{Re}(z\bar{z}') + i\,\mathrm{Im}(z\bar{z}')$$

$$\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 \Leftrightarrow x'y - y'x = 0$$

Scansionato con CamScanner

* Quatre points A, B, C et D ~~sont alignés~~ deux à deux distinctes sont Ecycliques ssi :

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

III) Module d'un nombre complexe

1.) Définition

Soient $z = a + ib$ un nbre et M son image dans le plan
On appelle module de z le réel positif ou nul noté $|z|$ et donné par $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$

NB) Pour tout nbre $z = a + ib$

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2) Propriétés

Soient z et z' deux nbres complexes

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad z' \neq 0$$

$$|kz| = |k||z|$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

$$|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1$$

Scansionato con CamScanner

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ $\quad |z^n| = (|z|)^n$

c) Interprétation géométrique

Le plan complexe est muni d'un RON ; $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$AB = |z_B - z_A| = |z_{AB}|$$

Si I est milieu de [AB] alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Si G est barycentre de (A, α) (B, β) et (C, γ)

alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

IV) Forme trigonométrique

1) Argument d'un nbre complexe non nul

a) Définition

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$
Soit z un nbre complexe non nul et M (z)
On appelle argument de z noté arg (z) toute mesure exprimé en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Scansionato con CamScanner

Si $M(z)$, On a: $\text{Arg}(z) = (\vec{u}; \vec{OM})\ [2\pi]$

Remarques

* l'angle $(\vec{u}; \vec{0})$ n'est pas définie, alors un nbre complexe nul n'a pas d'argument
* Si $\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$ alors $\text{Arg}(z)$ est l'angle principal de z

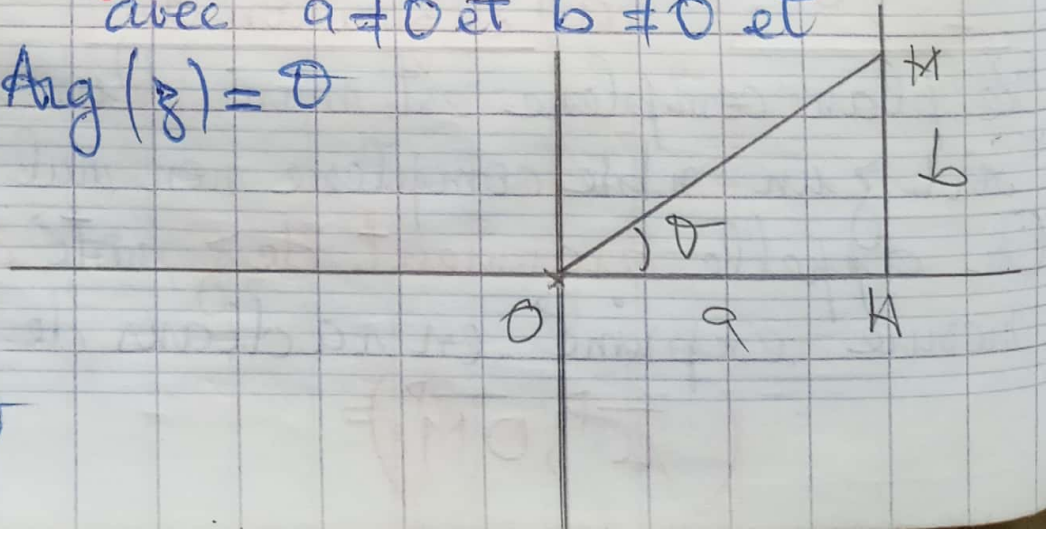
Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Arg}(z) = 0\ [\pi]$ ou $z = 0$

Théorème : Soit z un nbre complexe

* $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$ ou $z = 0$
* $z \in i\mathbb{R} \iff \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $z = 0$
* $z \in \mathbb{R}_+^* \iff \text{Arg}(z) = 0\ [2\pi]$
* $z \in \mathbb{R}_-^* \iff \text{Arg}(z) = \pi\ (2\pi)$
* $z \in i\mathbb{R}_+^* \iff \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
* $z \in i\mathbb{R}_-^* \iff \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3) Forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $\text{Arg}(z) = \theta$



$\cos\theta = \frac{OH}{OM}$

$a = |z| \cos\theta$

$b = |z| \sin\theta$

Scansionato con CamScanner

Or $z = a + ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

avec $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$

Rotation : $Z = [r, \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = r \\ \text{Arg}(Z) = \theta \end{cases}$

(1) Propriétés

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$

Si $r > 0$ alors $|z| = r$ $\quad \arg(z) = \theta \ [2\pi]$

Si $r < 0$ alors $|z| = -r$ $\quad \arg(z) = (\pi + \theta) \ [2\pi]$

Soient z et z' deux nbres complexes non nuls

$$\text{Arg}(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') \ [2\pi]$$

$$\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) \ [2\pi]$$

$$\text{Arg}(-z) = \pi + \arg(z) \ [2\pi]$$

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg(z) \ [2\pi]$$

Scansionato con CamScanner

5) Interprétation géométrique

Soient trois points distincts A, B et M d'affixes z_A, z_B et z_M

On a : $\arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$

Rappel : Ensemble des points

Soient A et B deux points distincts et r un réel positif

* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ est la droite (AB) privé de A et B
* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [2\pi]$ est la droite (AB) privé du segment [AB]
* $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$ est le segment [AB] privé de A et B
* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ est le demi cercle de diamètre [AB] $\setminus \{A; B\}$
* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ est le demi cercle de diamètre [AB] $\setminus \{A, B\}$
* $MA \leq r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r
* $MA < r$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r
* $MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r
* $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
* $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

L'équation d'un cercle de centre I(a, b) et de rayon r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Application :

Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que

1) $\arg(3i - z) = 0\ [2\pi]$
2) $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Scansionato con CamScanner

3) $\text{Arg}\left(\frac{z}{z-3+i}\right) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ $\quad \frac{-3\pi}{2}\ [\pi] = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

4) $\text{Arg}(z^2-4) = \arg(z+2)\ [2\pi]$ $\quad \text{Arg}\ z$

Solution Dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) $E_1 = \{M(x,y)$ tel que $x<0$ et $y=3\}$

2) $E_2 = \{M(x,y)$ tel que $x=-2$ et $(x;y) \neq (-2,0)\}$

3) $E_3 = \{M(x,y) \in (\Delta)$ de pente -1 passant par $A(4,0)$ privé de $B(5;1)\}$

4) $E_4 = \{M(x,y) / x>2$ et $y=0\}$

V) Notation exponentielle

1) Définition

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\theta}$ est le nbre complexe de module 1 et d'argument θ

Remarque

Si $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta$ alors

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = |z|e^{i\theta}$

$\text{Arg}(z_M - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

Scansionato con CamScanner

D'une manière générale $z = |z| e^{i \arg(z)}$

Propriétés : Voir cours sur exponentielle

* $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2k\pi$

* $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Preuve

$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

* $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(2i \sin\frac{\theta}{2}\right)$

* $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} + e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$

Exemple

$e^{i\pi} = -1$ $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{i2\pi} = 1$ $\quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

NB = La forme exponentielle est la forme la mieux indiquée pour calculer les puissances

Application : Mettre $(1 + i\sqrt{3})^{2019}$ sous FA

Soit $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ a) mettre z sous FT puis sous FA

b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

On donne $U = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Scansionato con CamScanner

a) Mettre U^2 sous forme trigonométrique

b) En déduire $|U|$ et $\arg(U)$

c) Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

Solution :

1) $(1+i\sqrt{3})^{2019} = -2^{2019}$

2-a) $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ forme algébrique

$z = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ forme trigonométrique

b) Par identification $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

3-a) $U^2 = 4e^{5i\frac{\pi}{4}}$

3-b) $\arg(U) = \frac{5\pi}{8}$

c) $\cos\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

3) Formule de Moivre

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Preuve : Par récurrence

Application : Exprimer $\cos 2x$ et $\sin 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ de 2 manières différentes

Scansionato con CamScanner

1ère méthode :

$(\cos 2x + i\sin 2x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i\, 2\cos x \sin x$

Par identification

$\cos 2x = 2\cos x \sin x$

$\sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

4.) Formules d'EULER

Puisque : $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta & (2) \end{cases}$

$1+2 \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$1-2 \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Pour les linéarisat°

Généralisation :

$\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$

$\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

Remarque :

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z + \bar{z} = 2\cos\theta \;,\; z - \bar{z} = 2i\sin\theta$

$\cos\theta = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Scansionato con CamScanner

Donc : $\cos n\theta = \frac{z^n + \bar{z}^n}{2}$

$\sin n\theta = \frac{z^n - \bar{z}^n}{2i}$

Application

a) Linéariser $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$

b) Déterminer une primitive de f

Solution

$$f(x) = \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$$

$$F(x) = \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x$$

Rappel :

× Primitives des polynômes trigonométriques

Pour déterminer les primitives des fonctions du type $x \longmapsto \cos^m x \times \sin^n x$ avec n et $m \in \mathbb{N}^*$

On peut utiliser les procédés suivantes :

- Si m et n sont de même signe on parle parité on peut linéariser directement.
- Si m et n sont de parité différents, on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

× Formules de transformation de produits en somme :

$$\cos x \times \cos y = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2i}\right)$$

Scansionato con CamScanner

donc $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

De même: $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

Application

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$

b) Trouver une primitive de la fonction

$x \longmapsto \sin 3x \cos 5x$

VI.) Equations du 2nd degres dans $\mathbb{C}$

1) Racine carré d'un réel

Soit r un réel et (E) l'équation : $z^2 = r$

* Si $r = 0$ alors $z = 0$ d'où $S = \{0\}$
* Si $r > 0$ alors $z = \sqrt{r}$ ou $z = -\sqrt{r}$

d'où $S = \{\sqrt{r}\ ; -\sqrt{r}\}$

* Si $r < 0$; $z^2 = r = -(-r) = i^2(-r)$

alors $z = i\sqrt{-r}$ ou $z = -i\sqrt{-r}$

d'où $S = \{i\sqrt{-r}\ ; -i\sqrt{-r}\}$

ou $S = \{i\sqrt{|r|}\ ; -i\sqrt{|r|}\}$

Exemple:

Resolvons $z^2 = -5$

$\Leftrightarrow z^2 = -(5) = i^2\sqrt{5}$

donc $z = i\sqrt{5}$ ou $z = -i\sqrt{5}$

$S = \{i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}\}$

Scansionato con CamScanner

2) Racine carré d'un nbre complexe

Pour tout nombre complexe non nul, sa racine carré admet deux solut° opposées.

Déterminer les racines carrés de Z équivaut à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = Z$

Soit z un nbre complexe tel que

$z = a+ib$ ou $z = re^{i\theta}$

$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = Z$

Par identification $Re(Z) = a^2 - b^2$

$Im(Z) = 2ab$

$|z^2| = |Z| \iff (|z|)^2 = |Z| \iff a^2+b^2 = |Z|$

Ainsi on obtient : $\begin{cases} a^2+b^2 = |Z| \\ a^2-b^2 = Re(Z) \\ 2ab = Im(Z) \end{cases}$

Application : Resolvons dans $\mathbb{C}$

1) $z^2 = 3-4i$ Posons $z = a+ib$

$\iff (|z|)^2 = |3-4i| = \sqrt{25} = 5$

$\iff a^2 - b^2 + 2iab = 5 \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 3 \ (1) \\ 2ab = -4 \ (2) \\ a^2+b^2 = 5 \ (3) \end{cases}$

$(1)+(3) \iff 2a^2 = 8 \iff a = 2$ ou $a = -2$

si $a = 2 \Rightarrow b = -1$; si $a = -2 \Rightarrow b = 1$

Ainsi $S = \{2-i ; -2+i\}$

2) $S = \{3+4i, -(3+4i)\}$ 3) $S = \{\sqrt{2}(1+i); -\sqrt{2}(1+i)\}$

Scansionato con CamScanner

Autre méthode:

$z^2 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$

$z^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ou $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ ou $z = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = -(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$

$S = \left\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}); -(\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}$

3.) Equation du second degrés à coefficients réels

Soit (E): $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$

$\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta \in \mathbb{R}$

Si $\Delta > 0$; (E): admet deux racines réelles conjugués z_1 et z_2

Si $\Delta = 0$ (E) admet une racine double

Si $\Delta < 0$ (E) admet deux racines complexes conjuguées tels que $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Application Resolvons dans $\mathbb{C}$

1) $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Delta = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1)$

Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha < 0$

donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Delta < 0$

Scansionato con CamScanner

Si $\alpha = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alors $\Delta = 0$

donc $z = \frac{2\cos\alpha}{2} = \cos\alpha$ $S = \{\cos\alpha\}$

Si $\alpha \neq 2k\pi$

$$z_1 = \frac{2\cos\alpha - i2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2} = \frac{+2\cos\alpha - i2\sqrt{\sin^2\alpha}}{2}$$

$$z_2 = \frac{+2\cos\alpha + i2\sqrt{\sin^2\alpha}}{2} \quad S = \{z_1, z_2\}$$

2.) $z^4 - z^2 - 2 = 0$ Posons $z^2 = m$

donc $m^2 - m - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$m_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ $m_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

$\Leftrightarrow z^2 = 2$ ou $z^2 = -1$

$z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$ ou $z = \sqrt{-1} = i$ ou $z = -i$

$z = \{-\sqrt{2}, -i, \sqrt{2}, i\}$

4) Equation du second degrés à coef dans $\mathbb{C}$

Application 1: Resolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) : z^2 - (1-2i)z + 1 - 7i = 0$

$\Delta = (1-2i)^2 - 4(1-7i) = 1 - 4 - 4i - 4 + 28i$

$\Delta = -7 + 24i$

Soit δ tel que $\delta^2 = \Delta = 24i - 7$

On pose $\delta = a + ib \Leftrightarrow \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow (a+ib)^2 = -7 + 24i$

D'après l'application précédente

$a = 3$ ou $a = -3$ $b = 4$ ou $b = -4$

Scansionato con CamScanner

donc $\delta = 3+4i$ ou $\delta = -3-4i$

donc $\delta = 3+4i = \sqrt{\Delta}$

$z_1 = \frac{1+2i-3-4i}{2} = \frac{-2-6i}{2} = -(1+3i)$

$z_2 = \frac{1+2i+3+4i}{2} = 2+i$

$S = \{2+i, -(1+3i)\}$

Application 2

On pose pour tout nbre complexe z

$f(z) = z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$

1) Vérifier que $f(z)=0$ admet une racine réelle.

2) En déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z)=0$

Solution

1.) Soit un réel m tel que $f(m)=0$

$f(m)=0 \Leftrightarrow m^3 - (3+4i)m^2 - 4(1-3i)m + 12 = 0$

$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 - 4im^2 - 4 + 12im + 12 = 0$

$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 - 4 + 12 + i(-4m^2 + 12m) = 0$

$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 8 + i(12m - 4m^2) = 0$

$\begin{cases} m^3 - 3m^2 + 8 = 0 \\ 12m - 4m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 3m^2 + 8 = 0 \ (1) \\ m(12 - 4m) = 0 \ (2) \end{cases}$

(2) : $m = 0$ ou $m = 3$

En remplaçant dans (1) on obtient

Si $a = 0$ on a : $Im(0) \neq 0$

Si $a = 3$ on a : $Im(0) = 0$

Donc $a = 3$ est racine de $f(z)=0$

Scansionato con CamScanner

2) $f(z)=0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2-4iz-4)=0$

$z^2-4iz-4=0 \quad \Delta \rightarrow \quad S=\{3;2i\}$

V.) Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

1) Racine $n^{ième}$ de l'unité

a) Définition

Soit z un nbre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

On dit que z est une racine $n^{ième}$ de l'unité si et seulement si $z^n = 1$

b) Théorème

Les n racines de l'unité sont de la forme suivante

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

En effet :

Soit $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \theta + 2k\pi \end{cases}$

$z^n = r^n e^{in\theta}$

Ainsi $z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = e^{i0} \Rightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$ alors $z^n = 1 \Leftrightarrow \boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{C}$

1) $z^3 = 1$ et $z^4 = 1$

Solution

$z^3 = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $0 \leq k \leq 2$

donc $S = \{1 ; e^{i\frac{2\pi}{3}} ; e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

Scansionato con CamScanner

Remarque 1

La somme des n racines $n^{ième}$ de l'unité est nulle

En effet :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

Posons $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$

alors $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$

Remarque 2 :

Le produit de deux racines $n^{ième}$ de l'unité est encore une racine $n^{ième}$ de l'unité

Les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ images respectifs des solutions $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots z_{n-1}$ sont inscrits sur le cercle trigonométrique et forme un polygone régulier

De plus :

$$M_k M_{k+1} = 2\sin\frac{\pi}{n} \text{ et } \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n}$$

En effet :

Scansionato con CamScanner

Soit M_k d'affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et M_{k+1} d'affixe $z_{k+1} = e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$

$$M_kM_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = \left|e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|$$

$$= \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| \times \left|e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1\right| = \left|2i\sin\frac{\pi}{n}\right|$$

donc $\boxed{M_kM_{k+1} = 2\sin\frac{\pi}{n}}$

$$(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \arg\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) = \text{Arg}(z_{k+1}) - \text{Arg}(z_k)$$

$$\arg\left(\frac{e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right) = \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) = \frac{2\pi}{n}$$

Donc $\boxed{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}}$

2) Racines $n^{ième}$ de Z

a) Définition

On dit que z est une racine $n^{ième}$ de Z si et seulement si $z^n = Z$ avec $n \geq 2$

b) Théorème

Les solutions de $z^n = Z$ sont de la forme

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{\frac{i(\arg(Z) + 2k\pi)}{n}}$$

avec $0 \leq k \leq n-1$

Scansionato con CamScanner

- Posons $z = |z| e^{i\theta}$ et $Z = r e^{i\alpha}$ avec $r = |Z|$
et $\theta = \arg(z)$ et $\alpha = \arg(Z)$

$z^n = Z \iff |z^n| e^{in\theta} = r e^{i\alpha}$

Par identification : $\begin{cases} r = |z^n| \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$ Donc $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}$

c) Propriété importante

On obtient les racines $n^{ième}$ de Z en multipliant l'une d'entre elles par les racines $n^{ième}$ de l'unité.

Application

Soit (E) : $z^4 = 24i - 7$

1) Vérifier que $z_0 = 2 + i$ est une solution de (E)

(2) En déduire les autres racines de (E)

Solution

Scansionato con CamScanner

Similitudes directes: 06/12/17

I) Etude de quelques transformations du plan :

1) Translation

Soit la translation de vecteur $\vec{u}(b)$ qui à tout point

$M(z) \longrightarrow M'(z') \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}}$

$\iff z_{M'} - z_M = b \implies z' = z + b$

NB: L'application $z \longrightarrow z' = z + b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

Application :

Donner l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(-1;1)$

Correction

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation $\vec{u}(-1+i)$ qui à tout point du plan $M(z) \longrightarrow M'(z') \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

or $\overrightarrow{MM'} = z' - z$ et $\vec{u} = -1 + i$

donc $z' - z = i - 1 \implies \boxed{z' = i - 1 + z}$

2) Homothétie :

Soit Ω le point d'affixe ω et H l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui à tout point

$M(z) \longrightarrow M'(z) \iff H(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\iff z_{\overrightarrow{\Omega M}} = k\, z_{\overrightarrow{\Omega M}} \iff \boxed{z' = k(z - \omega) + \omega}$

NB: L'application $z \longmapsto z' = k(z - \omega) + \omega$

Scansionato con CamScanner

est une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

Application

Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(1+i)$ et de rapport -2

Solution

Soit H l'homothétie de centre $\Omega(1+i)$ et de rapport $k=-2$. Alors pour tout $M(z)$ du plan

$$H(M)=M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\iff z'-(1+i) = k(z-1-i)$$

donc

$$\boxed{z \longmapsto z' = k(z-1-i)+1+i}$$

$$z' = -2z+2+2i+1+i$$
$$= -2z+3+3i$$

3) Rotation :

Soit R la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ tel que à tout point $M(z) \mapsto M'(z')$

On a : $R(M)=M'$

$$\iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

$*\ \Omega M = \Omega M' \iff \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \iff |z-\omega| = |z'-\omega|$

$$\iff \left|\frac{z-\omega}{z'-\omega}\right| = 1 \quad (1)$$

$*\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \iff \arg\left(\frac{z-\omega}{z'-\omega}\right) = \theta \ [2\pi] \quad (2)$

Scansionato con CamScanner

donc $\frac{z-w}{z-w'} = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow z' = (z-w)e^{i\theta} + w$

NB: L'application $z' = z' - w = e^{i\theta}(z-w)$ est une rotation de centre Ω d'affixe w d'angle θ.

II) Similitudes directes

1) Définition

On appelle similitude directe la composition d'une isométrie positive (c'est à dire une isométrie qui conserve les angles orientés ou déplacement) et d'une homothétie de rapport k $(k>0)$

2) Ecriture complexe de $S = H \circ R$.

Soit $H(\Omega, k)$ et $R(\Omega;\theta)$ on a:

$M(z) \xrightarrow{\text{Rotation}} M'(z') \xrightarrow{\text{Homothétie}} M''(z'')$

$H(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' = k(z-w) + w$

$R(M') = M'' \Leftrightarrow z'' = e^{i\theta}(z'-w) + w$

$S(H) = R \circ H(M) = M''$

$z'' = w + e^{i\theta}\left(w + k(z-w)\right)$

$$\boxed{z'' = ke^{i\theta}(z-w) + w}$$

NB: $M \xrightarrow{S} M' \Rightarrow z' - w = ke^{i\theta}(z-w)$

Scansionato con CamScanner

3) Forme réduite d'une similitude directe :

Puisque $z' = ke^{i\theta}(z-w)+w$

$= kze^{i\theta} + w(1-ke^{i\theta})$

Posons $a = ke^{i\theta}$ et $b = w(1-ke^{i\theta})$

$|a| = k$ et $b = w(1-a)$

$\text{Arg}(a) = \theta [2\pi]$

Donc $w = \dfrac{b}{1-a}$

Ainsi on a : $\boxed{z' = az+b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}$

4) Théorème

Toute écriture de la forme $z' = az+b$ avec $a \neq 1$ est une similitude directe du plan.

Caractéristiques : * rapport $k = |a|$
* d'angle $\theta = \arg(a)$
* de centre d'affixe $w = \dfrac{b}{1-a}$

Soit $f : z' = az+b$

1er Cas : Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ alors f est une homothétie de rapport a et de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$

2e Cas : Si $a \in \mathbb{C}$

Si $a \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre

$$\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$$

Scansionato con CamScanner

Application :

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point $M(z)$, on associe le point $M'(z')$ définie par : $z' = z(1+i) - 1$

Montrer que f est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques.

Solution :

$$z' - 1 = z(1+i)$$

Posons $a = 1+i$ $\quad |a| = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta \Rightarrow \theta = \arg(a) = \frac{\pi}{4}$$

Soit Ω le centre de f avec $\Omega(w)$

En posant $b = -1$, on obtient : $b = w(1-a)$

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1}{1-1-i} = +\frac{1}{i} = -i$$

Donc f est une similitude directe du plan d'affixe de centre $\Omega(-i)$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $k = \sqrt{2}$

6°) Propriétés

Soit S une similitude telque $S = S(\Omega, k, \theta)$

Puisque S est bijective alors elle admet une bijection réciproque S^{-1} définie par :

S^{-1} : × rapport $1/k$
× d'angle $-\theta$
× de centre Ω

$$S^{-1} = S\left(\frac{1}{k}, \Omega, -\theta\right)$$

Scansionato con CamScanner

* Soient $S_1 = S(\Omega_1, k_1, \theta_1)$

$S_2 = S(\Omega_2, k_2, \theta_2)$

- Si $\Omega = \Omega_1 = \Omega_1$ alors $S_1 \circ S_2$ est une similitude de centre Ω, de rapport $k_1 \times k_2$ et de rapport $\theta_1 + \theta_2$
- Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ alors $S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1$ et que $S_1 \circ S_2$ est une similitude directe de centre I, de rapport $k_1 \times k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$
- Si $S = S(\Omega, k, \theta)$

alors $S^n = \underbrace{S \circ S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ fois}}$

$$S^n = S(\Omega, k^n, n\theta)$$

Remarque

S^n est une homothétie si et seulement si $n\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

* Si $\begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases}$ alors $\begin{cases} k = \dfrac{A'B'}{AB} \\ \theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{cases}$

Preuve

$S : z' = az + b$

$S(A) = A' \iff z_{A'} = az_A + b$ (1)

$S(B) = B' \iff z_{B'} = az_B + b$ (2)

Scansionato con CamScanner

$(1)-(2) \iff z_{A'}-z_{B'} = a(z_A - z_B)$

$\iff a = \dfrac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A - z_B}$

$\left|\dfrac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B}\right| = |a| = k \iff \dfrac{A'B'}{AB} = k$

$\arg\left(\dfrac{z_{A'}-z_{B'}}{z_A-z_B}\right) = \cancel{(\overrightarrow{AB}}\cdot \arg(a) = 0$

$\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = 0$

* Une similitude directe multiplie des distances par k, les volumes par k^3 et les aires par k^2
* Une similitude directe conserve le parallélisme, l'orthogonalisme, le contact et l'alignement le barycentre
* L'image d'un cercle $(\mathcal{C})$ par (S) est un cercle $(\mathcal{C}')$
* Si $\mathcal{C}'(I', r')$ est l'image de $\mathcal{C}(I, r)$ alors

$I' = S(I)$ et $r' = kr$

Application

Soit f une similitude directe de centre $\Omega(-i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $k = \sqrt{2}$

Déterminer (d') et $(\mathcal{C}')$ les images respectifs de $(d): x - y + 2 = 0$ et $(\mathcal{C})$ de centre $I(1-i)$ et de rayon 2.

Scansionato con CamScanner

Solution :

On a : $(d) : x - y + 2 = 0$

$S = S\left(\Omega, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $w(-i)$

f similitude directe $\Leftrightarrow f(z) = az + b$

avec $a = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$b = -i\left(1 - \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

$f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z - i + i\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

Soient deux points $A(0,2)$ et $B(-2,0) \in (d)$

$f(z_A) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(2i) - i + i\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) 2i - i + i - 1$

$= (1+i)2i - 1 = 2i - 2 - 1 = 2i - 3$

$f(z_A) = -3 + 2i \quad A'(-3+2i)$

$f(z_B) = -2 - 2i - i + i - 1 = -2i - 3$

donc $S(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$

$z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = -2i - 3 + 3 - 2i = -4i$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (d') \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'M}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'M}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -4(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

donc $\boxed{(d') : x = -3}$

Scansionato con CamScanner

$(\mathcal{E}) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ $\quad I(1-i)$

$f(z_I) = (1-i)\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i + \sqrt{2}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= (1-i)(1+i) - i + i(1+i)$

$= (1-i^2) - i + i - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$

donc $(\mathcal{E}') : (x-1)^2 + (y-0)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$$\boxed{(\mathcal{E}') : (x-1)^2 + y^2 = 8}$$

Application :

Soient $A(-1)$, $B(-2+i)$, $C(i)$ et $D(1-2i)$ des points du plan

1.) Déterminer l'expression complexe de la similitude directe S telle que $S(A) = B$ et $S(C) = D$

2.) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S' qui laisse invariant A et transforme B en C.

3.) Déterminer l'expression analytique de la similitude S'' de centre C d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport 2.

Solution :

1) Expression complexe de S

$S : f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$

$S(A) = B$ et $S(C) = D$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a - b = i - 2 \\ ai + b = 1 - 2i \end{cases}$

donc $a = \frac{i-1}{2}$ et $b = \frac{3i-5}{2}$

Scansionato con CamScanner

donc $f(z) = \frac{i-1}{2}z + \frac{3i-5}{2}$ Expression réduite

2) Les éléments caractéristiques de S'

$f'(z) = az + b$ avec $a \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} S'(A) = A \\ S'(B) = C \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a(i-2) + b = i \end{cases}$

$a = -i$ et $b = -(1+i)$

$|a| = 1$

$\text{Arg}(a) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$

Donc S' est une similitude directe du plan

* de rapport $k = 1$
* de centre A
* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

3) Expression analytique de S''

$S''(C) = C \quad k = 2 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$f''(z) = i + 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$

$\Leftrightarrow z' = i + 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$

$= i + 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z - i)$

$= i + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - i)$

$= i + (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(z - i)$

or $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

Scansionato con CamScanner

$$x'+iy' = i+\sqrt{2}(1+i)(x+iy-i)$$
$$= i+\sqrt{2}(1+i)[i(y-1)+x]$$
$$= i+\sqrt{2}(i(y-1)+x-(y-1)+xi)$$
$$= i+\sqrt{2}i(y-1)+\sqrt{2}x-\sqrt{2}(y-1)+\sqrt{2}xi$$
$$= i(1+\sqrt{2}(y-1)+\sqrt{2}x)+\sqrt{2}x-\sqrt{2}(y-1)$$
$$= i(1+\sqrt{2}y-\sqrt{2}+\sqrt{2}x)+\sqrt{2}(x-y+1)$$
$$= \sqrt{2}(x-y+1)+i(1+\sqrt{2}y)$$

Par identification $S'': \begin{cases} x' = \sqrt{2}(x-y+1) \\ y' = 1+\sqrt{2}y \end{cases}$

Application:

1) Soit l'application $f: M(z) \longrightarrow M(z')$
Déterminer la nature et les éléments caractéristique de f dans les cas suivants:

a) $z' = (-\sqrt{3}+i)(z-i)$
b) $z' = 2+z+3i$
c) $z' = -5iz$
d) $z' = i+e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

2) Soit la similitude directe f définie analytiquement par: $\begin{cases} x' = x-y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3}+y-2\sqrt{3} \end{cases}$

Scansionato con CamScanner

Donner l'écriture complexe de f

Solution

1.) Nature et éléments caractéristiques de f

a) $z' = (z-i)(i-\sqrt{3}) = zi - z\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3}$

$z' = z(i-\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$

Posons $a = i-\sqrt{3}$ et $\arg(a) = \theta$

$|a| = 2$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+\sqrt{3}+i)}{(1+\sqrt{3})^2+1} = \frac{1+\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+3i-1}{1+2\sqrt{3}+3+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+4)}{4+2\sqrt{2}}$$

Donc f est une similitude directe de centre $I\left(\frac{\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+4)}{4+2\sqrt{2}}\right)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) $z' = z + 2 + 3i$

Le coefficient de z étant 1 alors $f : z' = z + 2 + 3i$ est une translation de vecteur $\vec{u}(2+3i)$

c) $z' = -5iz$

Posons $a = -5i$ $\quad |a| = 5$

$\text{Arg}(a) = -\frac{\pi}{2}$

Scansionato con CamScanner

donc $f : z' = -5iz$ est une similitude directe de centre $O(0,0)$ de rapport 5 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

d) $z' = i + e^{-i\frac{\pi}{3}} z$

Posons $a = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |a| = 1$

Soit Ω le centre

$$z_\Omega = \frac{i}{1 - \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} i} = \frac{i}{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$= \frac{i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{2i}{1 + \sqrt{3} i} = 2 \times \frac{i(1 - i\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{i + \sqrt{3}}{2}$$

Ainsi $f : z' = i + z e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est une similitude directe de rapport 1 d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right)$

2) $f : \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{3} \end{cases}$

On sait que $z' = x' + iy'$

$$= x + y\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{3})$$

$$= x - y\sqrt{3} + xi\sqrt{3} + yi - 2i\sqrt{3}$$

$$= x(1 + i\sqrt{3}) + y(-\sqrt{3} + 1) - 2i\sqrt{3}$$

or $\frac{z + \bar{z}}{2} = x \qquad \frac{z - \bar{z}}{2i} = y$

Scansionato con CamScanner

donc $z' = \frac{z+\bar{z}}{2}(1+i\sqrt{3}) + \frac{z-\bar{z}}{2i}(1-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{3}$

$z' = x + iy + i\sqrt{3}(x+iy) - 2\sqrt{3}$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2) + 2$

Exercice

Soit la suite (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$

1) Calculer z_1 et z_2

2) On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = z_n + 2$

a) Montrer que $u_n = (2+i)(1+i)^n$

b) Exprimer z_n en fonction de n

3) Soit trois points M_{n+1}, M_n, A et B d'affixes z_{n+1}, z_n, i et $-\frac{1}{2}(1+i)$

Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que $\left(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$

Scansionato con CamScanner

Intégrale d'une fonction continue

le 19/11/2018

1) Rappels sur les primitives

a) Tableau récapitulatifs de primitives

Condition	Fonction	Primitive
	$f+g$	$F+G+cte$
$\alpha \in \mathbb{R}$	αf	$\alpha F + cte$
$a \neq 0$ et $(ax+b) \in I$	$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a} F(ax+b) + cte$
$x \mapsto f^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$f' f^\alpha$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$
$\forall x \in I, f(x) \neq 0$	$\frac{f'}{f^2}$	$\frac{-1}{f} + cte$
$\forall x \in I, f(x) > 0$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + cte$
$\forall x \in I, f(x) \neq 0$	$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f \rvert + cte$
	$f' e^f$	$e^f + cte$
f et g ont	pour primitives	F et G sur I

Scansionato con CamScanner

b) Exemple :

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$

1) $f(t) = \sin(at+b) \Rightarrow F(t) = -\frac{1}{a}\cos(at+b) + cte$

2) $f(t) = \cos(at+b) \Rightarrow F(t) = \frac{1}{a}\sin(at+b)$

3) $f(t) = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

Posons $u(t) = \cos t \Rightarrow u'(t) = -\sin t$

Ainsi $f(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)} \Rightarrow F(t) = -\ln|\cos t| + cte$

4) $f(t) = \frac{3t}{\sqrt{t^2+5}}$

Posons $u(t) = t^2+5 \Rightarrow u'(t) = 2t \Rightarrow t = \frac{u'(t)}{2}$

Ainsi $f(t) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$

donc $F(t) = 3\sqrt{t^2+5} + cte$

5) $f(t) = t\,e^{-2t^2+1}$

Posons $u(t) = -2t^2+1 \Rightarrow u'(t) = -4t$

$\Rightarrow t = -\frac{1}{4}u'(t)$

Ainsi $f(t) = -\frac{1}{4}u'(t)\,e^{u(t)}$

donc $F(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t^2+1}$

2) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Scansionato con CamScanner

F une primitive de f sur I et a et b deux réels de I.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f le réel $F(b)-F(a)$ et on note

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

* Remarque

On note aussi $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b$

Ce qui se lit : « F(t) prise entre a et b »

- Dans l'expression $\int_a^b f(t)\,dt$, t peut être remplacé par n'importe quelle lettre. On dit que t est une variable muette.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

- dt est appelé différentielle et signifie qu'on doit intégrer par rapport à t.
- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Scansionato con CamScanner

Exemple: Calculer l'intégrale suivante

1.) $\int_0^1 (t^2+t)\,dt$

$t \longmapsto t^2+t$ est continue sur $[0,1]$ et une de ses primitives est définie par $F(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$

Ainsi $\int_0^1 (t^2+t)\,dt = F(1) - F(0)$

$F(1) = \frac{5}{6}$ et $F(0)$ donc $\int_0^1 (t^2+t)\,dt = \frac{5}{6}$

2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin t)\,dt$

$t \longmapsto \sin t$ est continue sur $[0,1]$ et une de ses primitives est définie par $F(t) = -\cos t$.

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin t)\,dt = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ F\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin t)\,dt = 0$$

3.) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt + \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$

$$= \left[\ln t\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

Scansionato con CamScanner

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

Attention :

$t \longmapsto \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0;+\infty[$

Alors il est impossible de définir son intégrale de -1 à 1 car f n'est pas continue en 0.

3) Théorème

Soit a un réel de l'intervalle I et f une fonction continue sur I.

L'unique primitive F de f sur I, telle que $F(a)=0$ est définie $\forall x \in I$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

4) Propriétés d'une intégrale

a) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b et c

alors : $$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt$$

Application :

1) Calculer $\int_{-1}^{1} |2x^2+x-1|\,dx$

2) Soit $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Scansionato con CamScanner

Solution :

1) Calculer $\int_{-1}^{1} |2x^2+x-1|\,dx$

Sur $[-1,1]$, f est continue et une des ses primitives est $F(x) = \left|\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x\right|$ écrire f sans valeur absolue

$F(1) = \left|\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1\right| = \left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$

$F(-1) = \left|-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right| = \left|-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right| = \frac{5}{6}$

$F(1) - F(-1) = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}$

Donc $\int_0^1 |2x^2+x-1|\,dx = \frac{19}{12}$

2) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Soit $t \in [k; k+1] \Leftrightarrow k \leq t \leq k+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$

Scansionato con CamScanner

or $\frac{1}{k+1} = cte$ et $\frac{1}{k} = cte$

alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t} dt \leqslant U_n$

De plus $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$

$= \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) - \ln 1$

$= \ln(n+1)$

Comme $\ln(1+n) \leqslant U_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

Alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

b) Linéalité d'une intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a et b.

Alors $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Scansionato con CamScanner

- $\int_a^b k\,dt = k(b-a)$ avec k une constante

Attention :

Ce résultat ne s'étend pas à l'intégrale du produit de deux fonctions f et g

Illustration

Soient $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t$ et $g : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{t}$

$$\int_1^2 (f \times g)(t)\,dt = \int_1^2 \left(t \times \frac{1}{t}\right) dt = 1$$

$$\int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 g(t)\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln t\right]_1^2 = \ln 2$$

Donc $\int_1^2 (f \times g)(t)\,dt \neq \int_1^2 f(t)\,dt \times \int_1^2 g(t)\,dt$

c) Signe de l'intégrale

Scansionato con CamScanner

$f>0$ et $a<b$	$f(x)>0$ et $a>b$	$f<0$ et $a<b$	$f<0$ et $a>b$
$\int_a^b f(x)\,dx>0$	$\int_a^b f(x)\,dx<0$	$\int_a^b f(x)\,dx<0$	$\int_a^b f(x)\,dx>0$

La réciproque de cette propriété est fausse.

Illustration :

Soit une fonction $f : \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \cos t$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos t \geq 0$ et $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ $\cos t \leq 0$

Cependant : $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\,dt = [\sin t]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

donc $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\,dt \geq 0$

et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ $f(t) \leq 0$

Donc le signe de la fonction f est indépendant de celle de son intégrale dans un intervalle.

* Conséquence

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telle que $\forall t \in [a,b]$ $f(t) \leq g(t)$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Scansionato con CamScanner

Application : Soient une fonction continue sur $[a;b]$

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Solution :

On sait que $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \leq |f(t)|$

En composant par intégration, on obtient

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Donc $$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

NB:

Soit f une fonction définie : $[a,b] \to \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f(t) \geq 0 \\ \int_a^b f(t)dt = 0 \end{cases}$ alors $f(t) = 0$

d) Intégrale d'une fonction bornée

Si $a \leq b$, f continue sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Scansionato con CamScanner

Remarque :

On a : $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Inégalités de la moyenne

Comme $a \leqslant b \Rightarrow b-a \geqslant 0$

Donc $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leqslant M$

Le réel $\mu = \dfrac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Exemple : Soit $f(x) = \sin x$

Déterminons la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$

Sur $[0;\pi]$, f est continue.

Soit α la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$

$$\alpha = \frac{\int_0^\pi f(t)dt}{\pi} = \frac{[-\cos t]_0^\pi}{\pi} = \frac{-(-1)+1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Donc $\alpha = \dfrac{2}{\pi}$

NB : Les inégalités $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$ sont appelées les inégalités de la moyenne.

5.) Calcul d'une intégrale

Le 23/Nov/2018

a) Utilisation des primitives usuelles

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Alors $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Scansionato con CamScanner

b) Intégration par partie

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur I contenant a et b.

Alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$

Si de plus u' et v' sont continue sur I

On a: $$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'v)dt + \int_a^b (uv')dt$$

$$\Leftrightarrow \left[uv\right]_a^b = \int_a^b (u'v)dt + \int_a^b (v'u)dt$$

D'où l'intégration par parties.

Théorème:

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et u' et v' continues sur I et $(a,b) \in I^2$

Alors: $$\int_a^b (u'v)(t)dt = \left[uv(t)\right]_a^b - \int_a^b ((uv')(t)dt$$

Remarque

Une primitive H sur I de la fonction ~~$t \longmapsto u'(t)$~~ $t \longmapsto u'(t)\,v(t)$ est définie par

$\forall x \in I$, $H(x) = \int_a^x u'(t)v(t) = \left[uv(t)\right]_a^x - \int_a^x (v'u)(t)dt$

Illustration

Déterminons une primitive de la fonction $\ln$ définie sur $]0;+\infty[$.

Scansionato con CamScanner

$$\int_1^x \ln(t)\,dt$$

Soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$

ainsi $\begin{cases} u'(t) = 1 \Rightarrow u(t) = t \\ v(t) = \ln t \Rightarrow v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

donc $\int_1^x \ln t\,dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\,dt$

$= x \ln x - x + 1$

Les primitives de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ sont de la formes : $x \longmapsto x \ln x - x + cte$

Exemples : Calculons l'intégrale;

1) $I = \int_1^e t \ln t\,dt$ Posons $\begin{cases} u'(t) = t \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ v(t) = \ln t \Rightarrow v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

ainsi $I = \left[uv(t)\right]_1^e - \int_1^e uv'(t)\,dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}t^2 \times \frac{1}{t}\right) dt$

$= \left(\frac{e^2}{2} \ln e\right) - \int_1^e \left(\frac{1}{2}t\right) dt$

$= \frac{e^2}{2} \ln e - \left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2} \ln e - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{3}{4}$

Scansionato con CamScanner

$$I = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

2) $J = \int_0^1 t e^t dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^t \Rightarrow u(t) = e^t \\ v(t) = t \Rightarrow v'(t) = 1 \end{cases}$

$$J = [uv(t)]_0^1 - \int_0^1 (v' \times u)(t)\, dt$$

$$= [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

$$= e - [e^t]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Donc $\boxed{\int_0^1 t e^t dt = 1}$

3.) $K = \int_0^\pi e^t \sin t \, dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \sin t \Rightarrow u(t) = -\cos t \\ v(t) = e^t \Rightarrow v'(t) = e^t \end{cases}$

$$K = [u \times v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi (v' \times u(t))\, dt$$

$$K = [-e^t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi -e^t \cos t$$

Scansionato con CamScanner

$$K = e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^t \cos t \, dt$$

Soit $K_1 = \int_0^{\pi} e^t \cos t$

Posons : $\begin{cases} U'(t) = \cos t \\ V(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(t) = \sin t \\ V'(t) = e^t \end{cases}$

$$K_1 = \left[e^t \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \sin t \, dt = -k$$

donc $2K = e^{\pi} + 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)}$

Application 1 :

Pour tout entier naturel n, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

1) Calculer J_0 et I_0

2) En intégrant par parties I_n puis J_n

Montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

3) En déduire les espression de I_n et J_n en fonction de n

4) Déterminer la limite de I_n et celle de J_n

Scansionato con CamScanner

Solution

1) $I_0 = 1 \quad J_0 = 1$

2) Montrons que : $\begin{cases} I_n + n J_n = 1 \\ -n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-nx} \sin x)\, dx$$

Posons : $\begin{cases} U'(x) = \sin x \\ V(x) = e^{-nx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = -\cos x \\ V'(x) = -n e^{-nx} \end{cases}$

Ainsi : $I_n = \left[-e^{-nx}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n e^{-nx}\cos x$

$$= \left[-e^{-nx}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x$$

$$I_n = 1 - n J_n$$

donc $I_n + n J_n = 1$ ①

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-nx}\cos x)\, dx$$

Posons $\begin{cases} U'(x) = \cos x \\ V(x) = e^{-nx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = \sin x \\ V'(x) = -n e^{-nx} \end{cases}$

Ainsi $J_n = \left[\sin x\, e^{-nx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-n e^{-nx} \sin x)\, dx$

$$= e^{-n\frac{\pi}{2}} - n I_n$$

donc $n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$ ②

$$\begin{cases} n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \\ I_n + n J_n = 1 \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

3) Déduisons I_n et J_n en fonction de n

$$\begin{cases} -n\,I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \\ I_n + n\,J_n = 1 \end{cases} \quad \cdot(-n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n\,I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \\ +n\,I_n + n^2 J_n = +n \end{cases}$$

$$J_n(1+n^2) = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n$$

$$\boxed{J_n = \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}} + n}{1+n^2}}$$

$$I_n = 1 - n\,J_n$$

$$\boxed{I_n = 1 - \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}}$$

c) Les limites de I_n et J_n

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}} + n}{1+n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} (1 - n J_n) = 1 - 0 = 1$$

Application 2 :

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

Scansionato con CamScanner

Montrer que $n I_n = (n-1) I_{n-2}$ avec $n \geq 2$

Solution:

Démontrons que $I_n = (n-1) I_{n-2}$

On a: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x \times \sin x) \, dx$$

Posons $\begin{cases} U'(x) = \sin x \\ V(x) = \sin^{n-1} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(x) = -\cos x \\ V'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2} \end{cases}$

Ainsi $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [U'(x) V(x)] \, dx = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [U(x) V'(x)] \, dx$

$n I_n = (n-1) I_{n-2}$

6.) Changement de variable

Pour calculer $\int_a^b f(\alpha t + \beta) \, dt$ avec $\alpha \in \{0\}$

On peut procéder à un changement de variable en posant $u = \alpha t + \beta$

ainsi $\frac{du}{dt} = \alpha \Rightarrow dt = \frac{du}{\alpha}$

Si $t = a$ alors $u = \alpha a + \beta$

Si $t = b$ alors $u = \alpha b + \beta$

Scansionato con CamScanner

$$\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{f(u)}{\alpha}\,du$$

Donc $$\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)\,du$$

Exemple :

Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,dt$$

Posons $u = \sqrt{2t+3}$ $\Rightarrow \frac{du}{dt} = 2 \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$

Si $t = 0$ $\quad u = 3$

Si $t = 1$ $\quad u = 1$

Ainsi $$\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,dt = \int_1^3 \frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}\,du$$

$$= \int_1^3 \frac{u-3}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{u}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_1^3 \frac{u}{\sqrt{u}}\,du - \int_1^3 \frac{3}{\sqrt{u}}\,du\right]$$

Scansionato con CamScanner

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \sqrt{u}\,du - \frac{3}{4}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 u^{\frac{1}{2}}du - \frac{3}{4}\int_1^3 u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_1^3 - \frac{3}{4}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_1^3 - \frac{3}{4}\left[2u^{1/2}\right]_{-1}^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2u\sqrt{u}}{3}\right]_{-1}^3 - \frac{3}{4}\left[2\sqrt{u}\right]_{-1}^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(9)\sqrt{9} - \frac{2}{3}\times 5\sqrt{5}\right) - \frac{3}{4}\times 2\left(\sqrt{9}-\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\left(27 - 5\sqrt{5}\right) - \frac{3}{2}\left(\sqrt{9}-\sqrt{5}\right)$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{t}{2t+3}\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

e) $J = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Posons $t = \sin u \iff \frac{dt}{du} = \frac{d(\sin u)}{du} = \cos u$

donc $dt = du \cos u$

Ainsi $J = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \times du \cos u$

si $t = \frac{1}{2}$ alors $u = \frac{\pi}{6}$

si $t = 0$ alors $u = 0$

Ainsi $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{du \cos u}{|\cos u|} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pm 1 \times du$

$= \pm \frac{\pi}{6}$ donc $J = \pm \frac{\pi}{6}$

7) Intégrale d'une fonction paire, impaire et périodique

Si f est paire alors $\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt}$

En effet:

On a: $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$

Scansionato con CamScanner

Posons $u = -t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -du$

si $t = a \Rightarrow u = a$

si $t = 0 \Rightarrow u = 0$

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(-u)(-du)$$

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(u)du$$

Comme la variable est muette

$$\int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Alors $$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

* Intégrale d'une fonction impaire

Activité

1) Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$
Montrer que si f est impaire sur $[-a, a]$
alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 \quad a > 0$

2) En déduire que : $\int_{-2}^{2} \frac{1 - e^{t}}{1 + e^{t}} dt = 0$

Scansionato con CamScanner

Solution

1°) $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{-a}^{0} f(t)\,dt$

Posons $u = -t \Rightarrow du = -dt$

Soit $I = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt$ si $t = 0 \Rightarrow u = 0$; si $t = -a \Rightarrow u = a$

$$I = \int_{a}^{0} f(-u)\,du$$

Si f est impaire alors $f(-u) = -f(u)$

donc $I = \int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{a}^{0} f(u)\,du$

$$I = -\int_{0}^{a} f(u)\,du$$

Ainsi $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

2) Déduisons que $\int_{-2}^{2} \frac{1-e^t}{1+e^t}\,dt = 0$

Soit $f(t) = \frac{1-e^t}{1+e^t}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad -t \in \mathbb{R}$

$$f(-t) = \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} = \frac{1-\frac{1}{e^t}}{1+\frac{1}{e^t}} = \frac{e^t-1}{e^t+1} = -f(t)$$

Scansionato con CamScanner

donc f est une fonction impaire

donc $\int_{-2}^{2} f(t)dt = 0$

Conclusion

Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

* Intégrale d'une fonction périodique

Activité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$

Pour tout réel a, montrer que

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

Solution

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$$

Soit $J = \int_T^{a+T} f(t)\,dt$

Posons $U = t - T \Rightarrow t = U + T$

Si $t = T$ alors $U = 0$

si $t = a+T$ alors $U = a$

Scansionato con CamScanner

ainsi $J = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du$

- f est T-périodique alors $f(u+T) = f(u)$

Ainsi $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^0 f(t)\,dt - \int_a^0 f(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

Conclusion

Si f est T périodique alors $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$

Exercice

Montrer que si f est continue et périodique de Période T sur $\mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt$$

Solution

On sait que $[0, nT] = [0, T] \cup [T, 2T] \cup \dots \cup [(n-1)T, nT]$

ainsi $\int_0^{nT} f(t) = \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{2T} f(t)\,dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)\,dt$

Scansionato con CamScanner

ainsi $\int_0^{nT} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt + \int_T^{T+T} f(t)dt + \dots + \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+T} f(t)dt$

or $\int_a^{T+a} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)\,dt$

donc $\int_0^{nT} f(t)dt = n\int_0^{T} f(t)\,dt$

Autre démonstration

$$\int_0^{nT} f(t)\,dt = \int \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)T}^{(k-1)T+T} f(t)\,dt$$

or f est T périodique $\Rightarrow$ $\int_{(k-1)T}^{(k-1)T+T} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt$

donc $\int_0^{nT} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{T} f(t)\,dt$

$\Rightarrow$ $\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^{T} f(t)\,dt$

Conclusion :

Si f est continue, périodique de période T

Scansionato con CamScanner

Alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}$

* $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$

* $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

* $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$

* $\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$

8) Etude d'une fonction définie par une intégrale

a) Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

Soient U et V deux fonctions définies de $I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur J tels que $U(I) \subset J$ et

Scansionato con CamScanner

$V(I) \subset J$

alors la fonction $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,dt$

est dérivable sur I et

$\forall x \in I$

$$G'(x) = V'(x) f(V(x)) - U'(x) f(U(x))$$

En effet :

Soient $a \in I$ et F une primitive de f

$$G(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\,dt = \int_{U(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{V(x)} f(t)\,dt$$

$$= \left[F(x)\right]_{U(x)}^{a} + \left[F(x)\right]_{a}^{V(x)}$$

$$G(x) = F(V(x)) - F(U(x))$$

$$G'(x) = V'(x) \times F'(V(x)) - U'(x) \times F'(U(x))$$

$$G'(x) = V'(x) f(V(x)) - U'(x) f(U(x))$$

Application

Etudier les variations de g

$g :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ continue

Une fonction est de classe C^1 si elle est dérivable et sa dérivée

Solution

Etude des variations de g

$$g :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^2-1}$$

Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1;+\infty[$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

f est continue sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ en particulier sur $]1;+\infty[$

alors g est dérivable sur $]1;+\infty[$

$\forall x > 1$ $\quad g'(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)(x^2+1)}$

or $x^2+1 > 0$ alors le signe de $g'(x)$ dépend de $\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2-1}$

Posons $\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2-1} = 0$

x	1	$+\infty$
$-x^2+2x-1$	$-$	
x^2-1	$+$	
$g'(x)$	$-$	

Sur $]1;+\infty[$, $g'(x) \neq 0$

alors g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

Application 2 :

Soit f une fonction définie par $\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$

2) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, ~~$e^{2x} \leq f(x) \leq e$~~

$e^{-2x} \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x} \ln 2$

3) Établir une inégalité analogue sur $\mathbb{R}_-^*$

4) En déduire que l'on peut prolonger f par continuité et étudier le comportement de f à l'infini

5) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

6) Étudier la dérivabilité de f en 0 et la position $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la tangente en ce point.

Solution :

1) Montrons que f est définie sur $\mathbb{R}^*$

Soit $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ est g est continue sur $\mathbb{R}^*$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

2) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Scansionato con CamScanner

$$e^{-2x}\ln 2 \leq f(x) \leq \ln 2\, e^{-x}$$

$\forall \quad x \leq t \leq 2x \iff -2x \leq -t \leq -x$

$\iff e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

Comme $t > 0$ alors $\dfrac{e^{2x}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{e^{-x}}{t}$

$$\int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-x}\int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}\,dt$$

$$\iff \ln 2\, e^{-2x} \leq f(x) \leq \ln 2\, e^{-x}$$

3.) Relation analogue $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$

$$\ln 2\, e^{-x} \leq f(x) \leq \ln 2\, e^{-2x}$$

4) Déduisons que f est prolongeable par continuité

On a: $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \ln 2\, e^{x} \leq f(x) \leq \ln 2\, e^{-2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln 2\, e^{-2x} \leq f(x) \leq \ln 2\, e^{-x}$

Si $x = 0$ $\quad \ln 2 \leq f(0) \leq \ln 2$

donc $f(0) = \ln 2$

Or $0 \notin D_f$ alors f est prolongeable par continuité en 0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Scansionato con CamScanner

5) f est dérivable ssi $\frac{e^{-t}}{t}$ est définie et continue donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$

6.) Dérivabilité de f en 0

Interprétation graphique d'une intégrale

Cas d'une fonction continue positive

Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

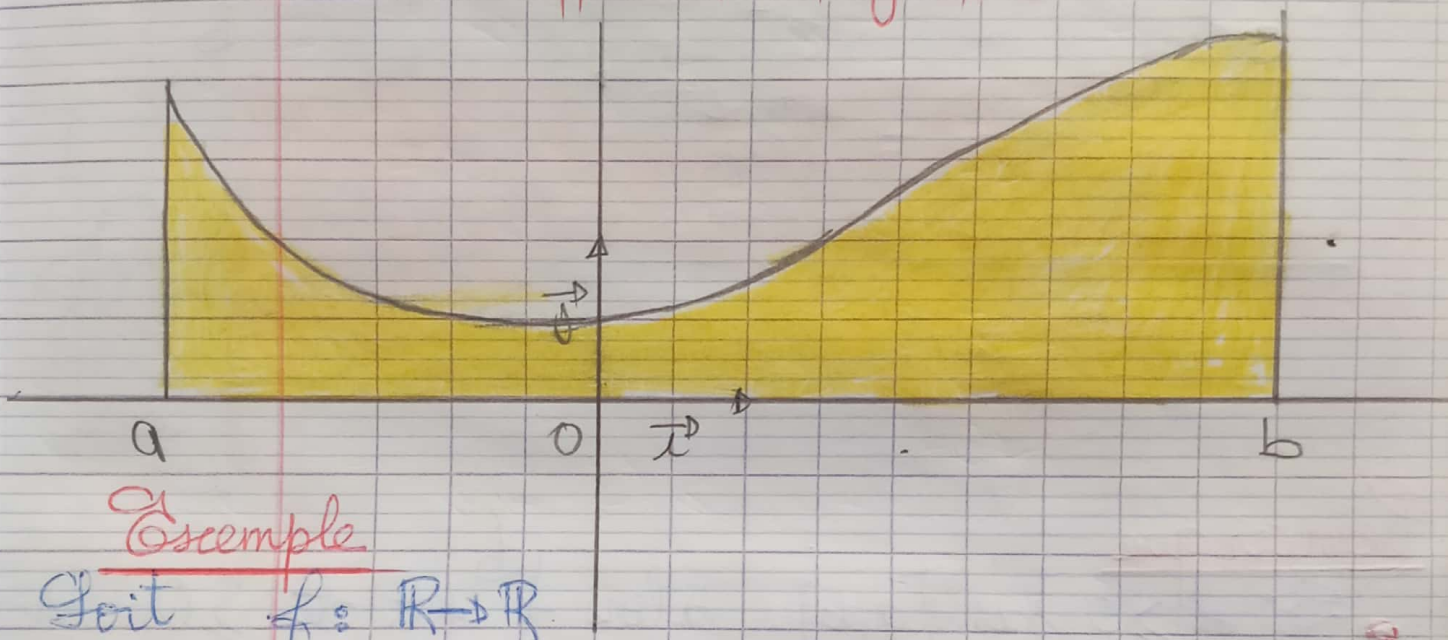
Alors l'aire de l'ensemble des points

Scansionato con CamScanner

$M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est

$$\text{Aire(domaine)} = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right] \text{U} \times \text{a}$$

$$\text{U.a} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = \text{Unité de l'aire}$$



Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 2x - x^2$$

Déterminons l'aire domaine delimité par l'axe des abcisses, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

donc $A = \frac{4}{3}\,cm^2$

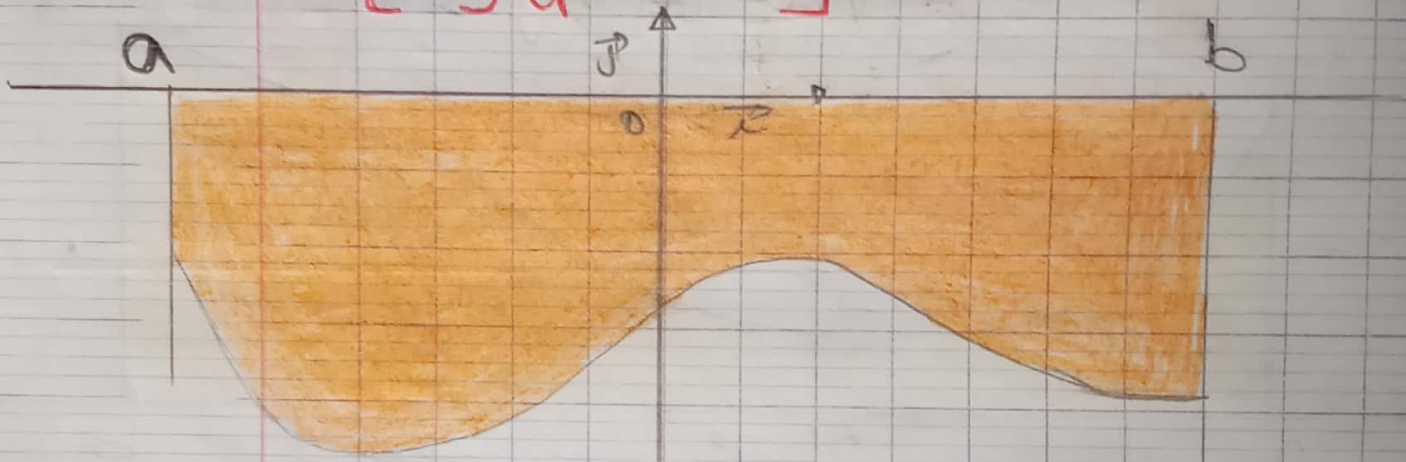
* **Cas d'une fonction continue négative**

Théorème

Scansionato con CamScanner

Soit f une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$. Alors l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$ est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left[-\int_a^b f(x)\,dx \right] \text{ U.a}$$



Remarque

- Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

Par suite

$$A = \left[\int_a^b f(t)\,dt \right] \text{ U.a}$$

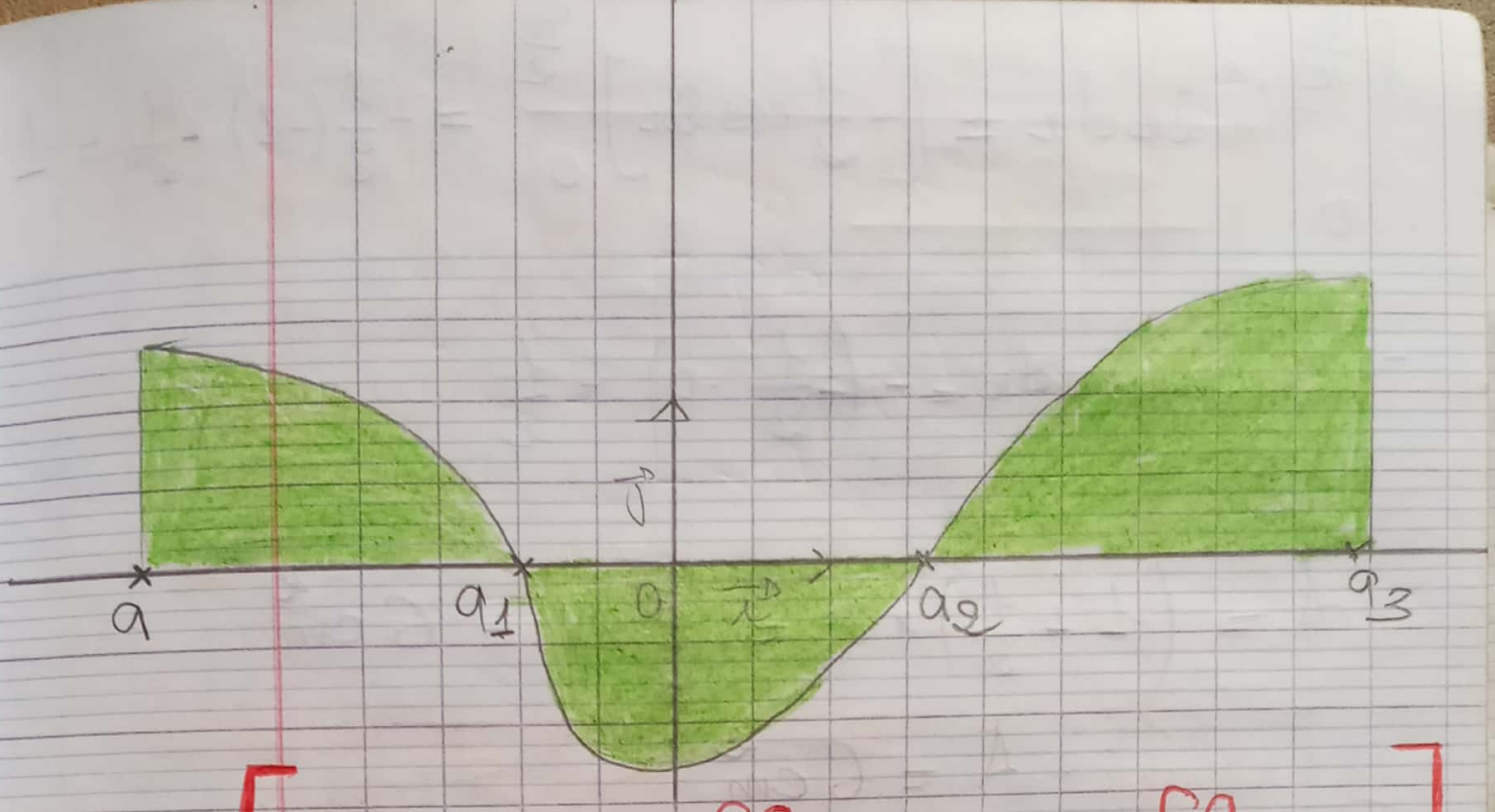
- Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq 0$

Par suite

$$A = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \text{ U.a}$$

Cas d'une fonction positive et négative

Scansionato con CamScanner



$$\mathcal{A} = \left[\int_a^{a_1} f(t)dt - \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^{a_3} f(t)dt \right]$$

Exemple

L'unité choisi pour chaque axe est 2 cm

Soit $f(x) = \sin 2x$

Défini de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Calculer l'air du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$ l'axe (xx'), $(D_1): x = -\frac{\pi}{4}$ et $(D_2): x = \frac{\pi}{2}$

Correction

× Sur $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ $f(x) \leq 0$ × Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) \geq 0$

donc $A = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx \right] \times 4 \text{ cm}^2$

Scansionato con CamScanner

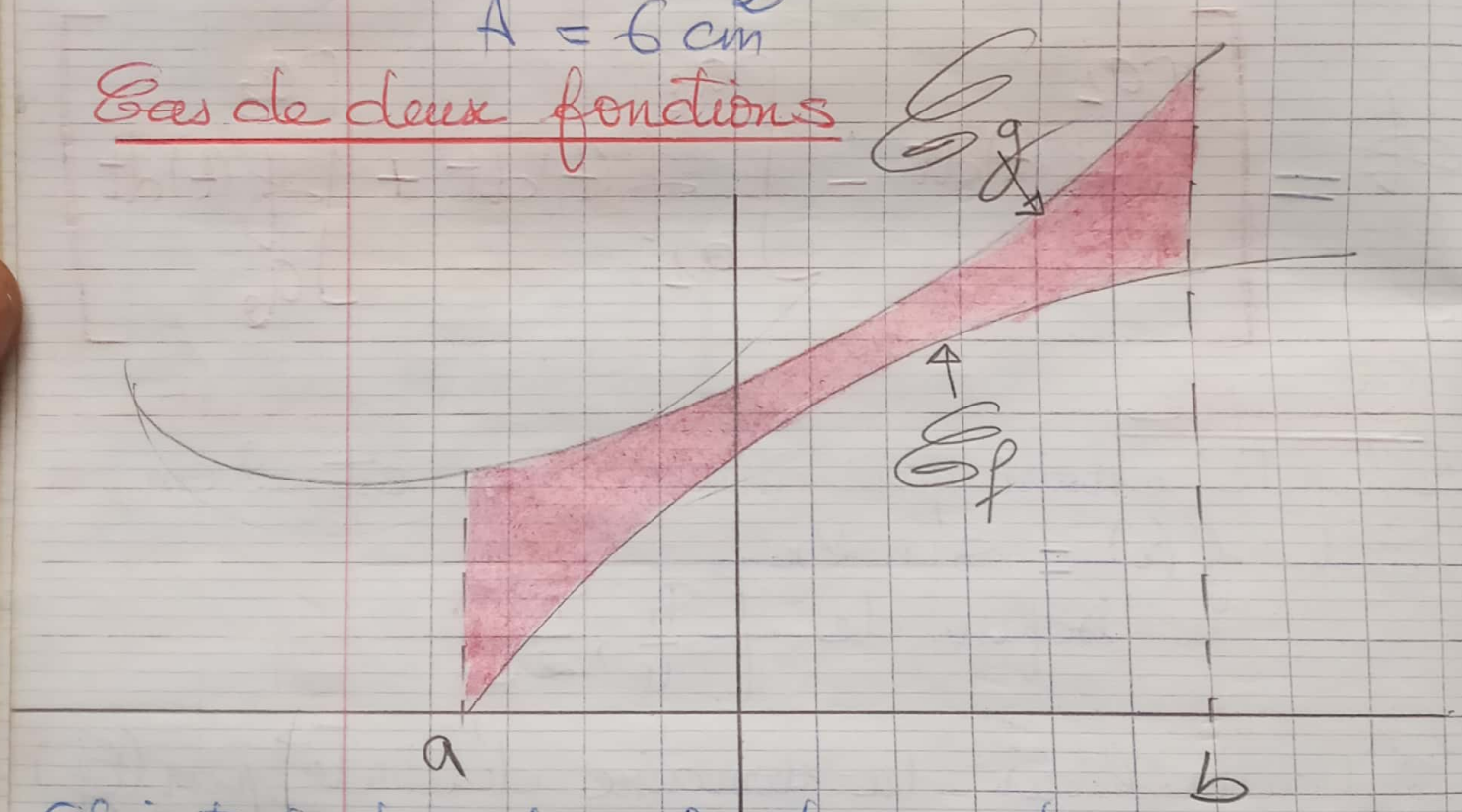
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 1$$

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin 2x\,dx = -\left(-\frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 4 = \frac{3}{2} \times 4 = 6\ cm^2$$

$$A = 6\ cm^2$$

Cas de deux fonctions



Soient f et G deux fonctions continues sur l'intervalle [a,b] tells que $f \leq g$
Alors l'aire du domaine de l'ensemble des points M(x,y) tels que

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

est

Scansionato con CamScanner

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx \times U_a$$

Exemple:

Calculons l'aire délimité par les paraboles

$y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ et $y = -\frac{x^2}{4} + x + 8$

Correction

Soient $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 8$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4 + \frac{1}{4}x^2 - x - 8 = \frac{1}{2}x^2 - x - 12$$

Soit $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 12$

$$\Delta = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{1+5}{1} = 6 \qquad x_2 = \frac{1-5}{1} = -4$$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

Sur $[-4, 6]$ $\quad f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) \geq f(x)$

$$A = \int_{-4}^{6} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{-4}^{6} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 12\right) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 12x\right]_{-4}^{6} =$$

Scansionato con CamScanner

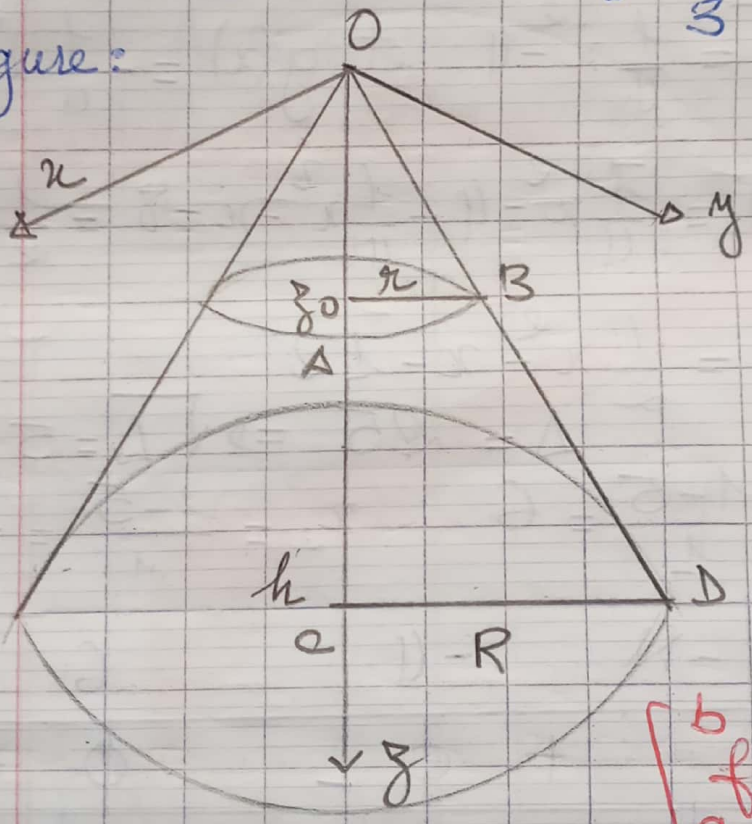
10) Calcul de volumes

Le 30/Nov/2018

a) Activité

Soit C un cône de sommet O d'axe (Oz) et de hauteur h et de base circulaire de rayon R
Montrer que le rayon du disque d'intersection entre $(\mathcal{E})$ et le plan d'équation $z = z_0$ est $r = \frac{R}{h} z_0$
Par la même méthode que précédemment en déduire que le volume du cône est : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

figure :



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x \in [a,b]} f(x)$$

Correction

Les triangles OAB et ODC sont en position de Thalès donc :

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OC} \quad \text{or} \quad AB = r \quad OA = z_0 \quad DC = R \quad OC = Rz = h$$

donc $\frac{r}{R} = \frac{z_0}{z}$ donc $\boxed{r = \frac{R}{h} z_0}$

Scansionato con CamScanner

Soit $z \in [0, h]$

donc $V(\text{Cone}) = \sum_{z=0}^{h} S_z = \int_0^h S(z)\,dz$ or

$S_z = \pi r_z^2$

$$V(\text{Cone}) = \int_0^h \pi r_z^2\,dz \quad \text{or } r = \frac{R}{h} z$$

$$V(\hat{\text{Cone}}) = \left[\frac{1}{3}\pi r^2 z\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Donc $V(\hat{\text{Cone}}) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

b) Conclusion

Le volume d'une cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R est : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

c) Volume de révolution

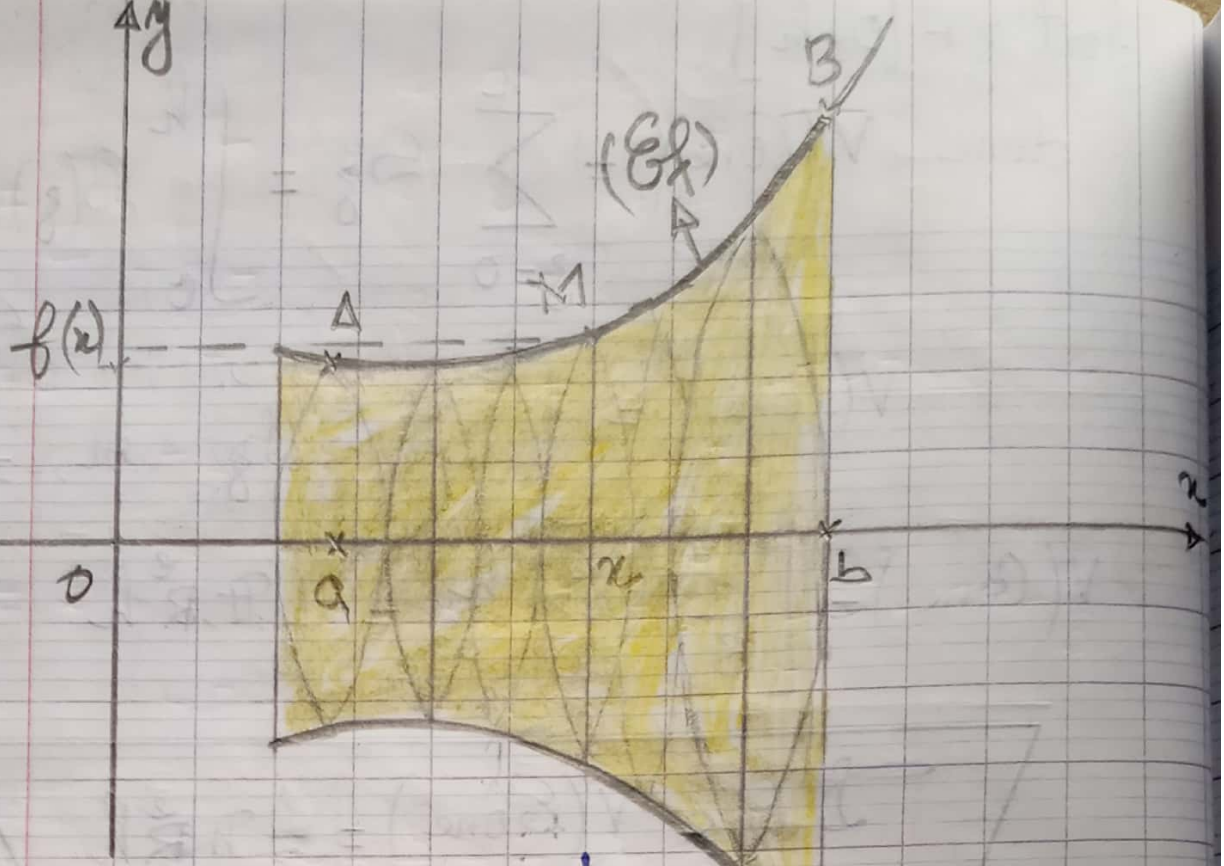
On considère deux points A et B sur $(\mathcal{C}_f)$ et on fait tourner l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe (OX).

Tout point $M(x, f(x))$ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tournant autour de (OX) décrit un cercle limitant un disque d'aire $S(x)$ et de rayon $f(x)$.

L'asse arc $\overset{\frown}{AB}$ tournant autour de (OX) engendre un volume : $V = \int_a^b S(x)\,dx = \left[\pi \int_a^b f^2(x)\,dx\right]$ UV

En effet :

Scansionato con CamScanner



On sait que $V = \sum_{x \in [a;b]} S(x) = \int_a^b S(x)\,dx$ et $S = \pi R^2$ avec $R = f(x)$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

Donc $$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Application : Exercice 18 de la Série

Solution

1) Représentation de la courbe $(\mathcal{E})$

Soit $f(x) = 1 - x^2$

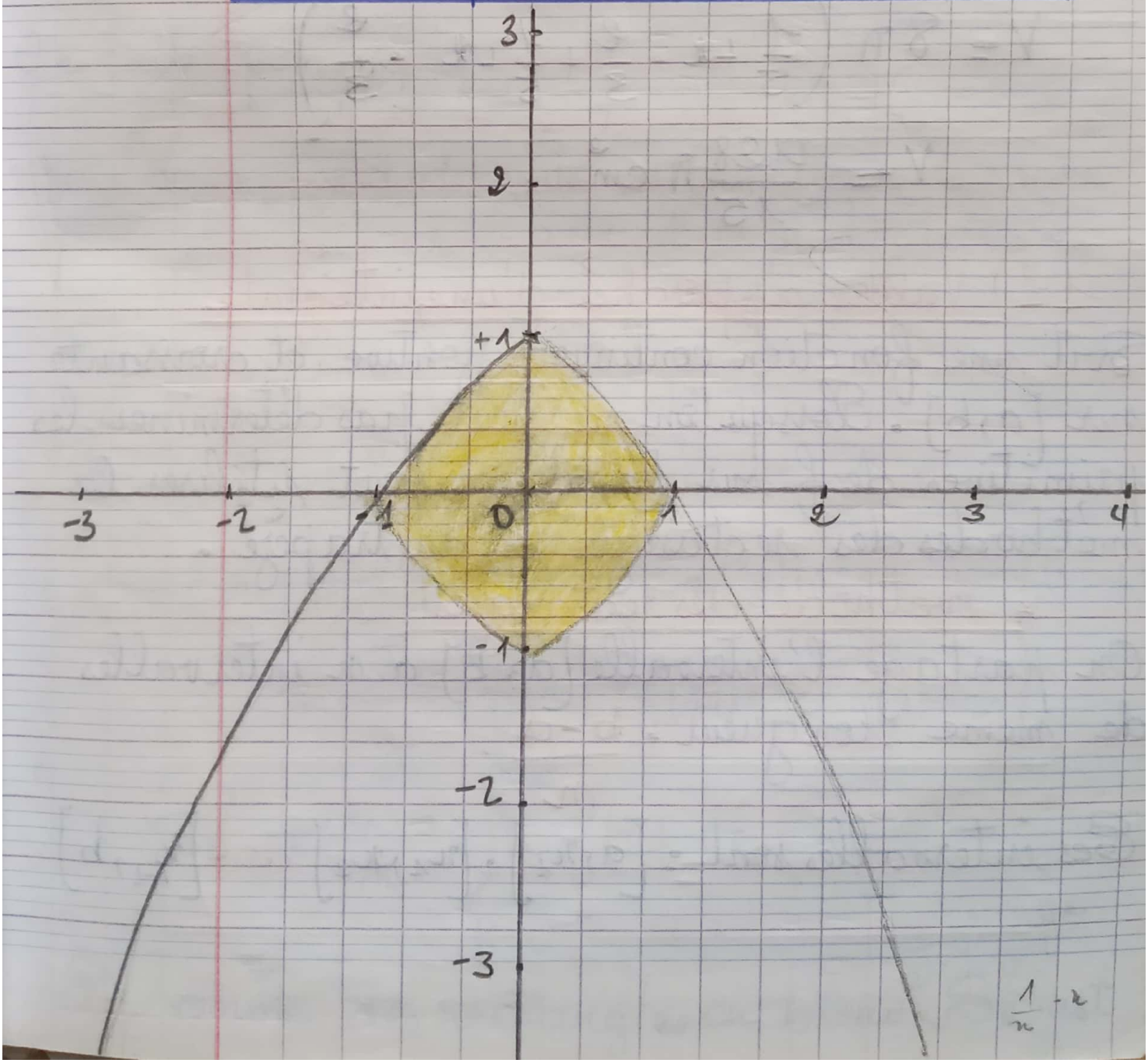
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Scansionato con CamScanner

Ainsi $f'(x) = -2x$

Posons $f'(x) = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$



Scansionato con CamScanner

2) Calculons V

$$V = \left[\pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx\right] \text{ u.v}$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx = 4\pi \int_{-1}^{1} 1+x^4-2x^2\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (x^4+1-2x^2) = 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{1}x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$V = 8\pi \left(\frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$V = \frac{128}{15}\pi \text{ cm}^3$$

11) Valeur approchée d'une intégrale

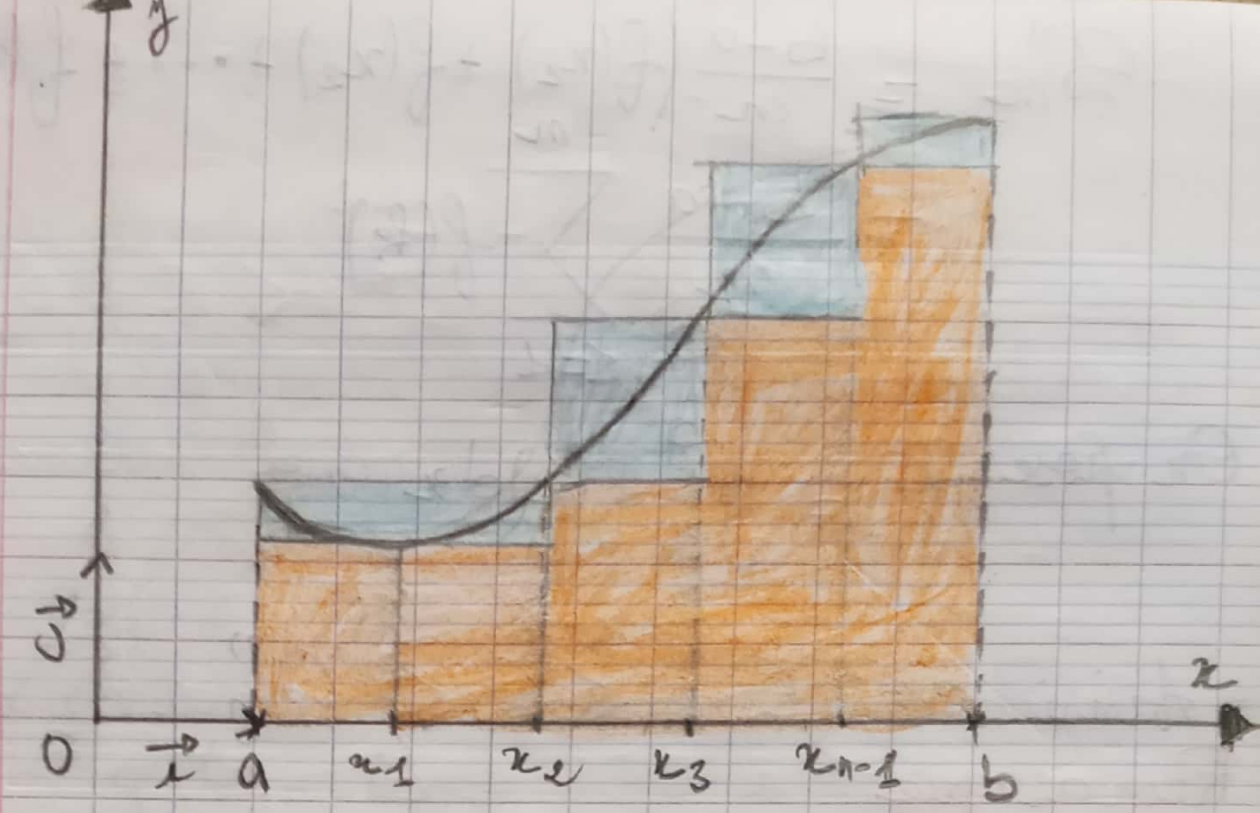
Soit une fonction continue, positive et croissante sur $[a,b]$. Lorsqu'on ne peut pas déterminer les primitives de f sur $[a,b]$, on peut utiliser la méthodes des rectangle ou du trapèze.

× Méthode des rectangles

On partage l'intervalle $[a,b]$ à n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$.

Ces intervalles sont : $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$ ... $[x_{n-1}, b]$

Scansionato con CamScanner



On sait que $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

Donc les x_k sont des suites arithmétique de raison $r = \frac{b-a}{n}$ et de premier terme x_0

Ainsi $x_k = x_0 + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$

La somme des aires des rectangles en orange S'_n est alors

$$S'_n = \frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_1) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_{n-1})$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right)$$

$$S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)$$

La somme des rectangles en bleue et orange S''_n est

$$S''_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

On pose $S = \int_a^b f(x)\,dx$

Ainsi $S'_n \leqslant S \leqslant S''_n$

Remarque

si f est continue, positive et décroissante sur $[a,b]$ les résultats deviennent :

$$S''_n \leqslant S \leqslant S'_n$$

* S'_n et S''_n sont les valeurs approchées par défaut et par excès de S

• $S''_n - S'_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$

$$S''_n - S'_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right)$$

$$S''_n - S'_n = \frac{(b-a)(b-a)}{n}$$

$$\boxed{S''_n - S'_n = \frac{(b-a)}{n}\left(f(b) - f(a)\right)}$$

Cette différence est la borne supérieur de l'erreur

Scansionato con CamScanner

~~Exemples~~

Exemple 1

Calculer les valeurs approchées de $\int_0^1 e^{\frac{-t^2}{2}}$ en divisant l'intervalle $[0,1]$ en 05 partie de même amplitude.

Corection

Soit $g(x) = e^{\frac{-t^2}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ g est dérivable alors continue sur $\mathbb{R}$

ainsi $g'(t) = -t e^{\frac{-t^2}{2}}$

$\forall t \in [0,1]$ $e^{\frac{-1}{2}t^2} > 0 \Leftrightarrow t e^{\frac{-1}{2}t^2} > 0$

$\Rightarrow -t e^{\frac{-1}{2}t^2} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

Ainsi sur $[0,1]$ g est strictement décroissante

De plus $[0,1] = [0, \frac{2}{10}] \cup [\frac{2}{10}, \frac{4}{10}] \cup [\frac{4}{10}, \frac{6}{10}] \cup [\frac{6}{10}, \frac{8}{10}] \cup [\frac{8}{10}, 1]$

$[0,1] = [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] \cup [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \cup [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \cup [\frac{4}{5}, 1]$

$S'_{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} f(x_k) = \frac{1}{5}\left(f(0) + f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})\right)$

$S'_{\frac{1}{5}} = 0,893$

Scansionato con CamScanner

$$S''_5 = \frac{1}{5}\left(f(1)+f(2)+\dots+f(5)\right) = 0,814$$

Donc $0,81 \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant 0,90$

0,90 est la valeur approchée par excès de $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}t^2}$ à 0,08 près

0,81 est la valeur approchée par défaut de $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}t^2}$ à 0,08 près

* **Intégrale et limites des suites**

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a,b]$

On a :

$$S'_n \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant S''_n$$

$$\Leftrightarrow S''_n - S'_n \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - S'_n \leqslant S''_n - S'_n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) = 0$

alors d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,dt - S'_n = 0$$

Scansionato con CamScanner

Par suite : $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(t)\,dt$

Application

Soit (U_n) une suite définie par

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$

et $$V_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Calculer : $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n$

Solution

Calculons les limites des suites

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n!}{n}\left(n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + n\right)$$

$$= \frac{n+1-1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Scansionato con CamScanner

Soit $b = n+1$ et $a = 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

donc $U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\ln x\right]_1^{n+1}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

$\Rightarrow$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

$$V_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{n\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x}$ $\quad b = 2+1$ $\quad a = 2$

Scansionato con CamScanner

$$V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{n\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

Soit $b = 1$ et $a = 0$

Donc $V_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

Posons $f(t) = \frac{1}{1+t}$ avec $x_k = 1 + \frac{k}{n}$

Donc $V_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{2n} f(t)$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln(t+1)\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \ln 2$$

Scansionato con CamScanner

Remarque

S'il existe un réel M tels que $\forall x \in [a;b]$

$|f'(x)| \leq M$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(t)\,dt$

On effet:

On a: $|f'(x)| \leq M$

Soit $t \in [x_k, x_{k+1}]$

D'après le théorème des inégalités d'accroissement fini

$$|f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$$

En intégrant membre à membre, on obtient

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,dt \leq M \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,dt$$

or $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,dt \geq \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,dt \right|$$

donc $$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\,dt \right| \leq M \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,dt$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt \right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,dt$$

Scansionato con CamScanner

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt$$

D'après la relation de chasles

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

où $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$

donc $$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Puisque $(t - x_k) = \left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]'$

alors $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)dt = \left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

ainsi $$M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)dt = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \times M \sum_{k=0}^{n-1} k$$

Scansionato con CamScanner

$$\Rightarrow M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-x_k)\,dt = \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

Retournons à l'inégalité

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{M(b-a)^2}{2n} = 0$

alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

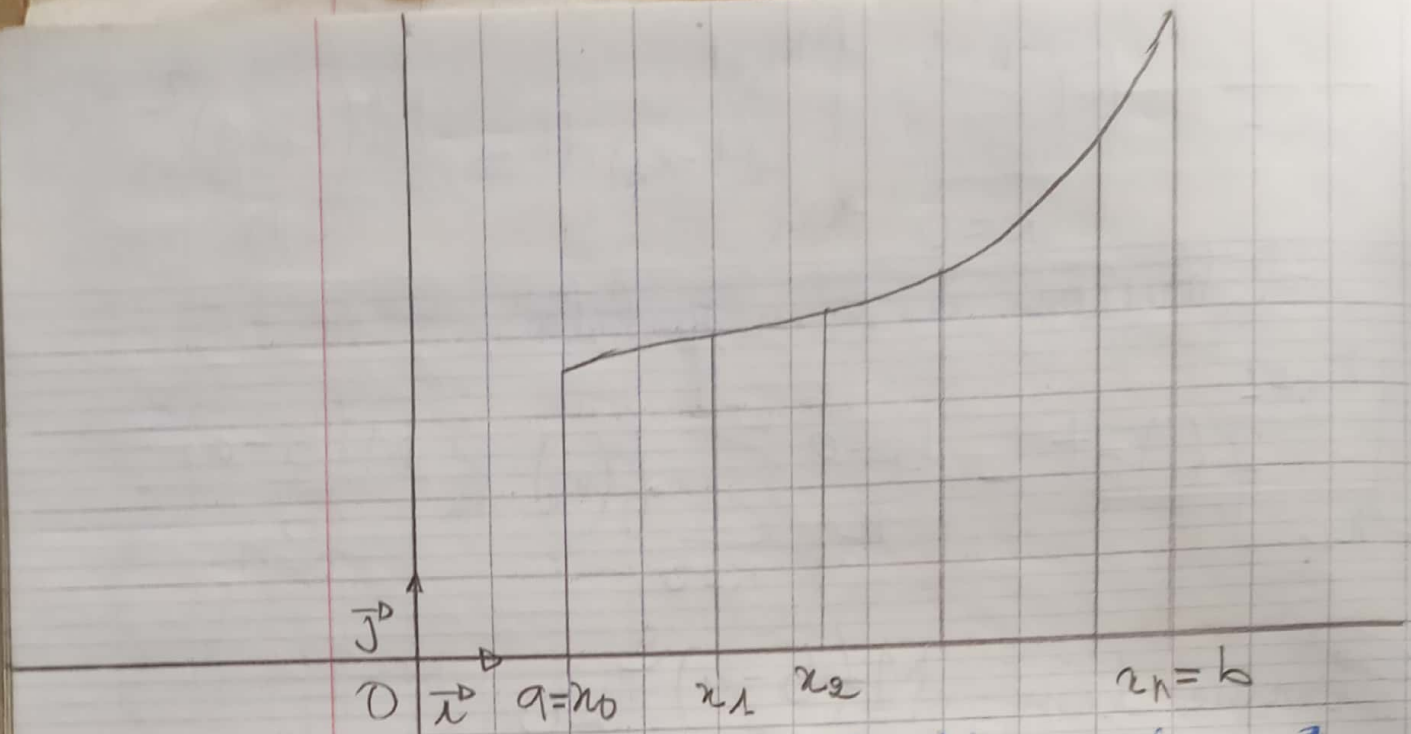
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Méthode des trapèzes

Soit la fonction continue positive et croissante sur l'intervalle $[a,b]$

Scansionato con CamScanner



Les x_k suivent une suite arithmétique de raison $\frac{b-a}{n}$ et de premier terme.

$$S'_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right)$$

$$S''_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right)$$

On a : $S''_n - \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right] \leq S_n \leq S''_n$

$$S'_n \leq S_n \leq S'_n + \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]$$

$$S''_n + S'_n + \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < 2S_n < S'_n + S''_n + \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$$

$$\frac{S''_n + S_n}{2} - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) < S_n < \frac{S''_n + S_n}{2} + \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a))$$

$$\left|S_n - \frac{S'_n + S''}{2}\right| < \frac{b-a}{2n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

Scansionato con CamScanner

Ainsi $\frac{S'_n + S''_n}{2}$ est une valeur approchée de

S à $\frac{b-a}{2n}\left(f(b)-f(a)\right)$ près

Interpetons geométriquement $\frac{S'_n+S''_n}{2}$

$$\frac{S''_n+S''_n}{2} = \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_0)+f(x_1)+\dots f(x_{n-1})+f(x_1)\dots+f(x_n)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}\right] + \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right] + \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right]$$

$$+ \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

Puisque $\frac{S'_n+S''_n}{2}$ est la somme des aires des trapèzes

Alors l'approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\frac{S'_n+S''_n}{2}$ est appelée

Méthode des trapèzes

Application

Soit la fonction définie par $f(t) = -\frac{1}{\ln t}$ sur $]0,1[$

Rechercher une valeur approchée du nombre $\int_{0,1}^{0,8} -\frac{1}{\ln t}\,dt$ en divisant l'intervalle $[0,1-0,8]$ en 7 intervalles de longueur 0,1

Scansionato con CamScanner

$t \longmapsto \ln t$ est continue sur $[0,1-0,8]$

donc f est continue sur $[0,1-0,8]$

$t \to \ln t$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1-0,8[$

donc f est dérivable sur $]0,1-0,8[$

f est aussi positive

$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t} > 0 \Rightarrow f$ croissante

$S'_7 = \dfrac{0,7}{0,7} \sum_{k=0}^{6} f(x_k)$ où $x_k = 0,1 + 0,1k$

$S'_7 = 0,918$

$S''_7 = 0,1 \sum_{k=1}^{7} f(x_k) = 1,323$

$\dfrac{S''_7 + S'_7}{2} = 1,12$ est une valeur approchée de α à β près

$\beta = \dfrac{0,7}{7}\left(\dfrac{1}{\ln 0,8} - \dfrac{1}{\ln 0,1}\right)$

Scansionato con CamScanner

Equations différentielles

Activité

Soit $f(x) = 4e^{3x} - 3e^{2x}$ et $g(x) = \sin 3x - \cos 3x$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$

b) $g''(x) - 9g(x) = 0$

Solution

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ f est dérivable

ainsi $f'(x) = 12e^{3x} - 6e^{2x}$

f' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$

$f''(x) = 36e^{3x} - 12e^{2x}$

Ainsi $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 36e^{3x} - 12e^{2x} - 60e^{3x} + 30e^{2x} + 24e^{3x} - 18e^{2x}$

$= e^{3x}(36 - 60 + 24) + e^{2x}(-12 + 30 - 18) = 0$

Donc $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ g est dérivable $\Rightarrow g'(x) = 3\cos 3x + 3\sin 3x$

g' est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow g''(x) = -9\sin 3x + 9\cos 3x$

Ainsi $g''(x) - 9g(x) = -9\sin 3x + 9\cos 3x - 9\sin 3x + 9\cos 3x$

$g''(x) - 9g(x) = \sin 3x(9 - 9) + \cos 3x(9 - 9) = 0$

$g''(x) - 9g(x) = 0$

Il en résulte que :

f est une solution de l'équation différentielle

$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0$

g est une solution de l'équation différentielle

$\ddot{y} + 9y = 0$

Scansionato con CamScanner

I) Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée y liant y avec certains de ses dérivées successives

$$y', y'', y''', \ldots\ldots y^{n}$$

Exemple:

1) $y' + 2y = 0$ 2) $y'' + 2y' + y = h(x)$

Remarque

Résoudre ou intégrer une équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

II) Equations différentielles à coefficient constants

- Les équations $ay' + by = 0$ et $ay' + by = h(x)$ sont des équations différentielles du 1er ordre à coefficient de
- L'équation $ay' + by = 0$ est appelée équation différentielle (sans second membre) ou (équation homogène)
- L'équation $ay' + by = h(x)$ est une équation différentielle (avec second membre) ou équation non homogène

III) Solution générale de l'équation homogène $ay' + by = 0$

La solution générale de l'équation homogène $ay' + by = 0$ est $y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$ où C est une constante arbitraire.

En effet:

$$ay' + by = 0 \iff ay' = -by \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

En intégrant membre à membre, on obtient

Scansionato con CamScanner

$$\ln|y| = -\frac{b}{a}x + k$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}x+k} \Leftrightarrow |y| = \left(+e^{k} \times e^{\frac{-b}{a}x}\right)$$

$$y = \pm e^{k} \times e^{-\frac{b}{a}x}$$

Posons $c = \pm e^{k}$ d'où $\boxed{y = ce^{-\frac{b}{a}x}}$

NB:

Si la constante c est connue alors la solution devient une solution particulière.

Exemple: Déterminons la solution de l'équation diff $2y' - 5y = 0$ vérifiant $f(0) = -1$

$2y' - 5y = 0 \Leftrightarrow 2y' = 5y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{5}{2}$

En intégrant membre à membre

$$\ln|y| = \frac{5}{2}x + k \Leftrightarrow y = ce^{\frac{5}{2}x}$$

or $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$

$\boxed{\text{Donc } f(x) = -e^{\frac{5}{2}x}}$

IV) Solution générale de l'équation non homogène $ay' + by = h(x)$

Acturité : Soit $(E): ay' + by = h(x)$ et $(E'): ay' + by = 0$

Soit g une solution particulière de (E)

1) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E')

2) En déduire la solution générale de (E)

Solution

1) g solution de $(E) \Leftrightarrow ag'(x) + bg(x) = h(x)$

Scansionato con CamScanner

Supposons que f est solution de (E)

$\Leftrightarrow af'(x) + bf(x) = h(x)$ (2)

2-1 $\Leftrightarrow a[f'(x) - g'(x)] + b[f(x) - g(x)] = 0$

donc $f-g$ est solution de (E')

Réciproquement

Supposons que $f-g$ est solution de (E')

$\Leftrightarrow a[f'(x) - g'(x)] + b[f(x) - g(x)] = 0$

$\Leftrightarrow af'(x) + bf(x) = ag'(x) + bg(x)$

or puisque g est solution de (E) alors

$ag'(x) + bg(x) = h(x)$

ainsi $af'(x) + bf(x) = h(x)$

d'où f est solution de (E)

Par conséquent si $f-g$ est solution de E' alors f est solution de (E)

2) Les solution générale de (E)

$ay' + by = 0$ a pour solution $ce^{-\frac{b}{a}x}$

or $(f-g)$ est solution de (E') alors $f-g(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}$

ainsi $f(x) = ce^{-\frac{b}{a}x} + g(x)$

Conclusion

La solution générale de l'équation différentielle non homogène $ay' + by = h(x)$ est la somme d'une solution particulière de cette équation avec la solution générale de l'équation homogène

$ay' + by = 0$

Scansionato con CamScanner

I) Équation différentielle du 2nd ordre à coefficient constants

Les équations $ay''+by'+cy=0$ et $ay''+by'+cy=h(x)$ sont des équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

1) Solution de l'équation homogène $ay''+by'+cy=0$

Pour résoudre l'équation homogène $ay''+by'+cy=0$
On résout d'abord l'équation caractéristique

$$ar^2+br+c=0$$

On effet

Soit $f(x)=e^{rx}$ une solution de l'équation

$$ay''+by'+cy=0$$

donc $af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0$

or $f''(x)=r^2e^{rx}$

$f'(x)=re^{rx}$

$f(x)=e^{rx}$

donc $e^{rx}(ar^2+br+c)=0$

Comme $e^{rx}\neq 0$ alors $ar^2+br+c=0$

On calcule $\Delta=b^2-4ac$

1er Cas: $\Delta>0$

alors l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ admet deux solution distinctes

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc la solution générale de l'équation est

$$y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$$

Scansionato con CamScanner

avec A et B deux constantes réels arbitraires

2e Cas $\Delta = 0$

alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une solution double $r_0 = \frac{-b}{2a}$

Donc la solution générale de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est $y = (Ax + B)e^{rx}$

3e Cas : $\Delta < 0$

alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux solution complexes conjugués

$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

Donc la solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$$

A et B sont des constantes arbitraires

Application

Déterminer une solution des équations différentielles

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$ telle que $f(0) = 0$ $f'(0) = -1$

2) $y'' - 2y' + y = 0$ telle que $f(0) = 0$ $f'(0) = 1$

3) $y'' + 4y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

Solution

1) Soit $f(x) = e^{rx}$ une solution de $y'' - 5y' + 6y = 0$

$\Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 1$ $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

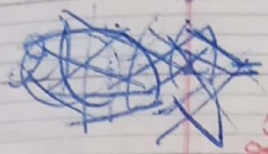
Scansionato con CamScanner

$y = Ae^{2x} + Be^{3x} \Leftrightarrow f(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$

or $f_1(1) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow 2B + 3B = -1$ $\Rightarrow A = 1$ et $B = -1$

Donc $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$



2) Solution générale de l'équation non homogène $ay'' + by' + cy = h(x)$

La solution générale de l'équation différentielle non homogène $ay'' + by' + cy = h(x)$ est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

Application

Soit (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $y'' + 2y' + y = 0 \Leftrightarrow E'$

a) Vérifier que $g(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E)

b) Déterminer la solution de (E')

c) Déduire la solution générale de E telle que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$

Solution

a) $g(x) = x^2 e^{-x}$ $g'(x) = -x^2 e^{-x}$ $g''(x) = x^2 e^{-x}$

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 e^{-x} - 2x^2 e^{-x} + x^2 e^{-x}$

$= 0$

Donc $g(x)$ est une solution particulière de E

b) $r^2 + 2r + 1 = 0$ $h(x) = (Ax + B)e^{-x}$

c) $\Delta = 4 - 4 = 0$

Scansionato con CamScanner

c) Déduisons la solution de (E)

Soit $k(x)$ la solution de (E)

$$k(x) = g(x) + (Ax+B)e^{-x}$$
$$= x^2e^{-x} + (Ax+B)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(x^2 + Ax + B)$$

$k(0) = 4 \Rightarrow B = 4$

$$k'(x) = -x^2e^{-x} + Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$

$$k'(0) = A - B = 0 \Rightarrow B = 4$$

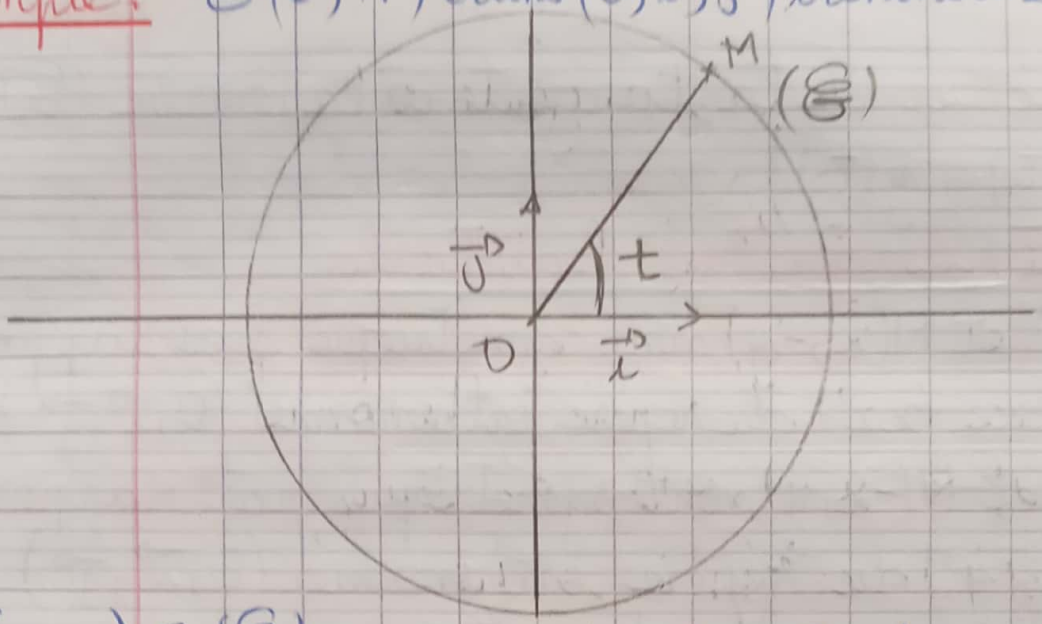
Donc $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 4)$

Scansionato con CamScanner

Courbes paramétrées

Le 04/Janvier/2019

Exemple : $\mathcal{E}(O, R)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé



$M(x, y) \in (\mathcal{E}) \iff \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

I) Définition

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I
L'ensemble des points $M(t) : (f(t), g(t))$ avec $t \in I$ (C)
est une courbe paramétrique de paramètre t et
$M(t)$ est le point de paramètre t.
Si t est le temps alors (C) est la trajectoire de M.
En général, $(\mathcal{E}) \iff \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

2) Tangente à une courbe paramétrée.

$(\mathcal{E}) : \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ avec $t \in I$

Soit $t_0 \in I$.
Si $t \longmapsto x(t)$ et $y\ t \longmapsto y(t)$ sont dérivables en t_0
alors le vecteur $\vec{v}(t_0)\left(x'(t_0); y'(t_0)\right)$ est un

Scansionato con CamScanner

vecteur directeur de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au $M(t_0)\left(x(t_0), y(t_0)\right)$,

III) Les symétries habituelles

a) $M(x,y)$ et $N(x,-y)$ sont symétriques par rapport à l'axe (xx') du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) $M(x,y)$ et $N(-x,y)$ sont symétriques par rapport à l'axe (yy') du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

c) $M(x,y)$ et $N(-x,-y)$ sont symétriques par rapport au point O

d) $M(x,y)$ et $N(y,x)$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice $(\Delta): y=x$

e) $M(x,y)$ et $N(-y;-x)$ sont symétriques par rapport à la deuxième bissectrice $(\Delta'): y=-x$

Si $M(t)$ et $M(t')$ sont symétriques, $t\in I_1 \Leftrightarrow t'\in I_2$ et $I = I_1 \cup I_2$ alors, l'étude des fonctions peut se réduit à I_2 et ensuite opérer la symétrie constatée

IV) Périodicité

Soit $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$

S'il existe un paramètre $T\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$

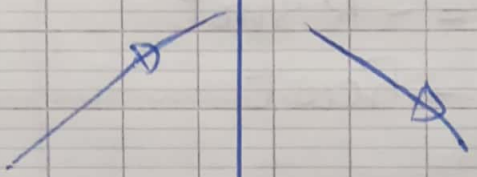
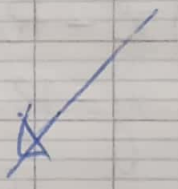
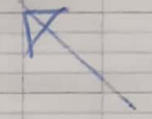
alors les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont T-périodique.

Scansionato con CamScanner

On a : $\forall\, M(t) = M(t+T)$

Alors on peut réduire l'étude de x et y à un intervalle d'amplitude T c'est à dire $[a; a+T]$

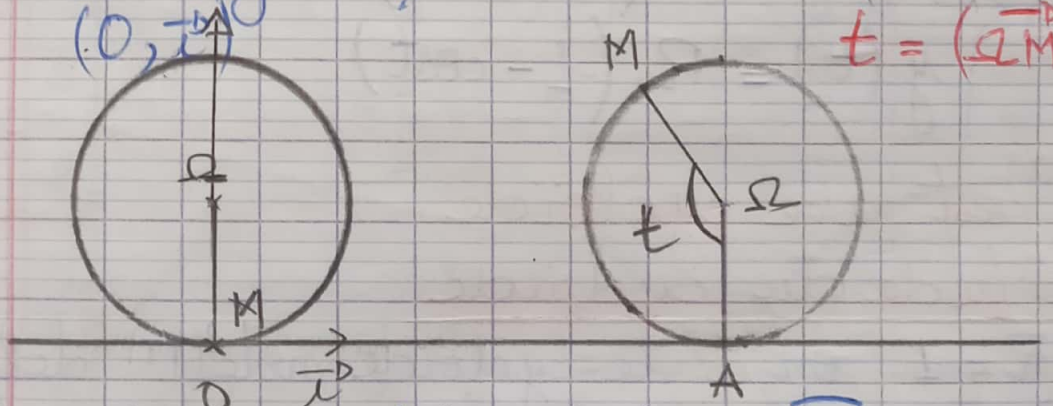
V) Monotonie et allure

variations x et y	x ↗ y ↗	x ↗ y ↘	x ↘ y ↘	x ↘ y ↗
Allure de la courbe				

Example 1 CYCLOIDE

Soit le cercle (E) de centre Ω et de rayon R. Le cercle roule sans glisser sur la droite (d) du repère $(O, \vec{i})$

$t = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A})$



(E) roule sans glisser sur (d) veut dire $\overline{AM} = OA = Rt$

$(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\vec{i}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})$

$= -\frac{\pi}{2} - t$

donc $\overrightarrow{\Omega M} = \Omega M \cos(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M})\vec{i} + \Omega M \sin(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M})\vec{j}$

Scansionato con CamScanner

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = R\cos\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)\vec{i} + R\sin\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)\vec{j}$$
$$= R\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\vec{i} - R\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\vec{j}$$
$$= -R\sin(t)\vec{i} - R\cos(t)\vec{j}$$

or $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\Omega\begin{pmatrix}Rt\\R\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{\Omega M}\begin{cases}x - Rt\\ y - R\end{cases}$

Ainsi $(x-Rt)\vec{i} + (y-R)\vec{j} = -R\sin(t)\vec{i} - R\cos t\,\vec{j}$

Par identification :

$$\begin{cases} x - Rt = -R\sin t \\ y - R = -R\cos t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = Rt - R\sin t \\ y = R - R\cos t \end{cases}$$

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$(\mathcal{E})$ est une cycloïde

Etude du cycloïde

Pour $R = 1$ on a le cycloïde noté (Γ) défini par

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = t - \sin t + 2\pi = x(t) + 2\pi \\ y(t-2\pi) = y(t) \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

$\overrightarrow{M(t)M(t+2\pi)} = 2\pi\vec{i}$ donc $M(2\pi+t)$ est l'image de $M(t)$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$

donc on peut réduire l'intervalle d'étude sur $[0, 2\pi]$

$\begin{cases} x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 2\pi \\ y'(t) = \sin t \end{cases}$

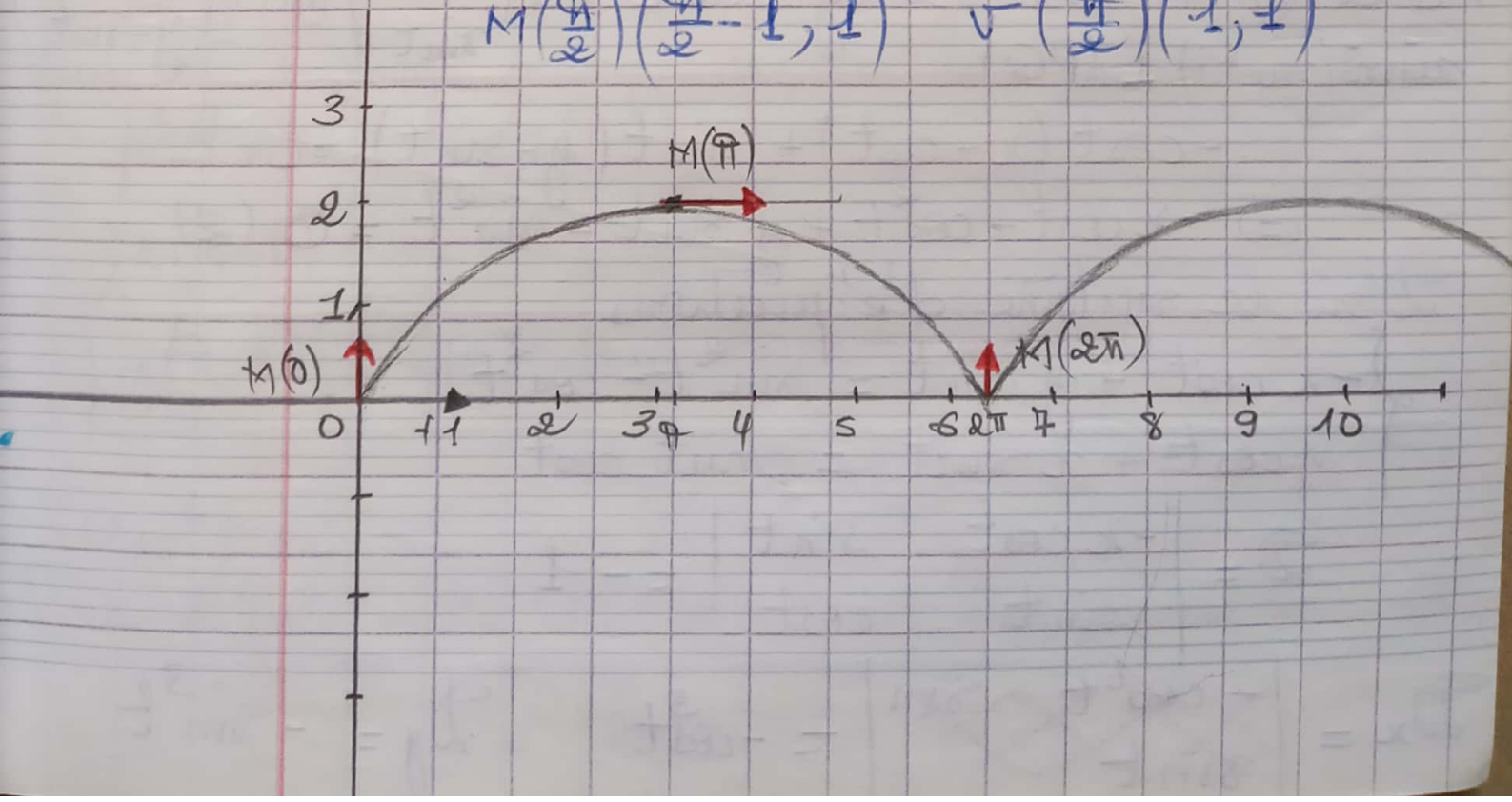
$y'(t) = 0 \iff t = k\pi$

donc $k = 0$ $t = \pi$ ou $t = 2\pi$

Dans le tableau de variation

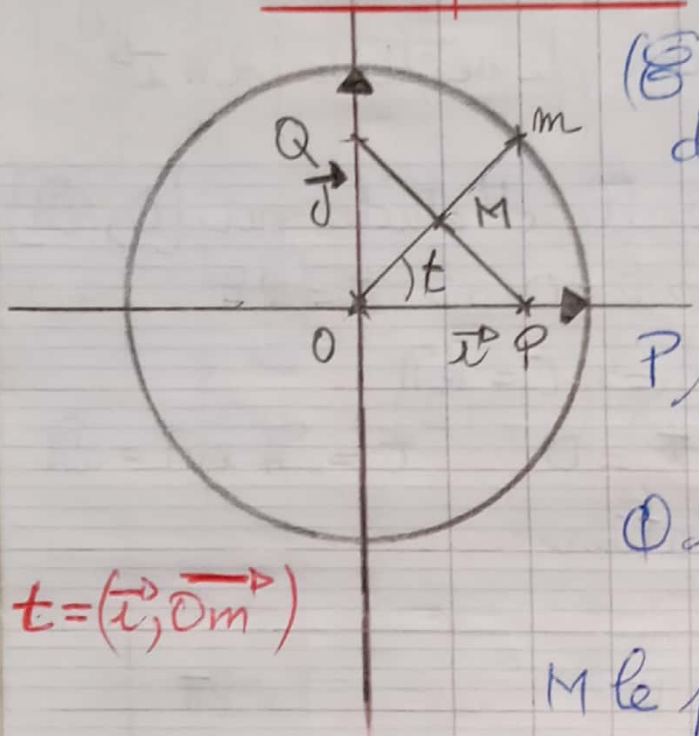
t	0		π		2π
$x'(t)$	0	$+$	2	$+$	0
$x(t)$	0	↗	π	↗	2π
$y'(t)$	$+$		0	$-$	0
$y(t)$	0	↗	2	↘	0

$M\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$ $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)(-1, 1)$



Scansionato con CamScanner

Exemple 2 : ASTROIDE



$t = (\vec{i}, \overrightarrow{Om})$

$(\mathcal{E})$ est un cercle trigonométrique de centre O dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé

$m \in (\mathcal{E})$

P projeté orthogonal de m sur $(O, \vec{i})$

Q projeté orthogonal de m sur $(O, \vec{j})$

M le projeté orthogonal de m sur (QP)

On a : $m(\cos t ; \sin t)$ $P(\cos t ; 0)$ $Q(0, \sin t)$

$M(x, y)$

$\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont colinéaires or $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-\cos t\\ y\end{pmatrix}$

ainsi $+y\cos t + \sin t(x - \cos t) = 0$

$\Leftrightarrow y\cos t + x\sin t - \sin t\cos t$ (1)

$\overrightarrow{PQ}$ et $(\overrightarrow{mM})$ sont orthogonaux $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{mM}\begin{pmatrix}x-\cos t\\ y-\sin t\end{pmatrix}$

ainsi $(mM) \perp (PQ)$

$-\cos t(x - \cos t) + \sin t(y - \sin t) = 0$

$\Leftrightarrow -x\cos t + \cos^2 t + y\sin t - \sin^2 t = 0$ (2)

D'où le système d'équations

$$\begin{cases} -x\cos t + y\sin t = \sin^2 t - \cos^2 t \\ y\cos t + x\sin t = \sin t\cos t \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -x\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathcal{D}_x = \begin{vmatrix} -\cos^2 t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = -\cos^3 t \qquad \mathcal{D}_y = -\sin^3 t$$

Scansionato con CamScanner

Ainsi $x = \frac{dx}{1} = \cos^3 t \quad y = \sin^3 t$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ est une astroïde

De manière générale une astroïde est de la forme

$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Étude de l'astéroïde

a) $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(2\pi+t) = y(t) \end{cases} \Rightarrow M(2\pi+t) = M(t)$

donc le domaine d'étude peut être $[-\pi, \pi]$

b) $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases} \Rightarrow$ M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à $(O, \vec{i})$

Donc l'axe des abscices est un axe de symétrie

Ainsi de manière plus facile, le domaine d'étude peut être : $[0, \pi]$

c) $\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases} \Rightarrow$ M(t) et M(π-t) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. C'est à dire l'axe $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie.

Donc l'intervalle d'étude peut être réduit à

$[0, \frac{\pi}{2}]$

Scansionato con CamScanner

d) $\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\Delta): y = x$

Donc (Δ) est un axe de symétrie.

Ainsi le domaine d'étude est $D = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t \cos^2 t \leq 0 \text{ sur } D \\ y'(t) = 3\cos t \sin^2 t \geq 0 \text{ sur } D \end{cases}$

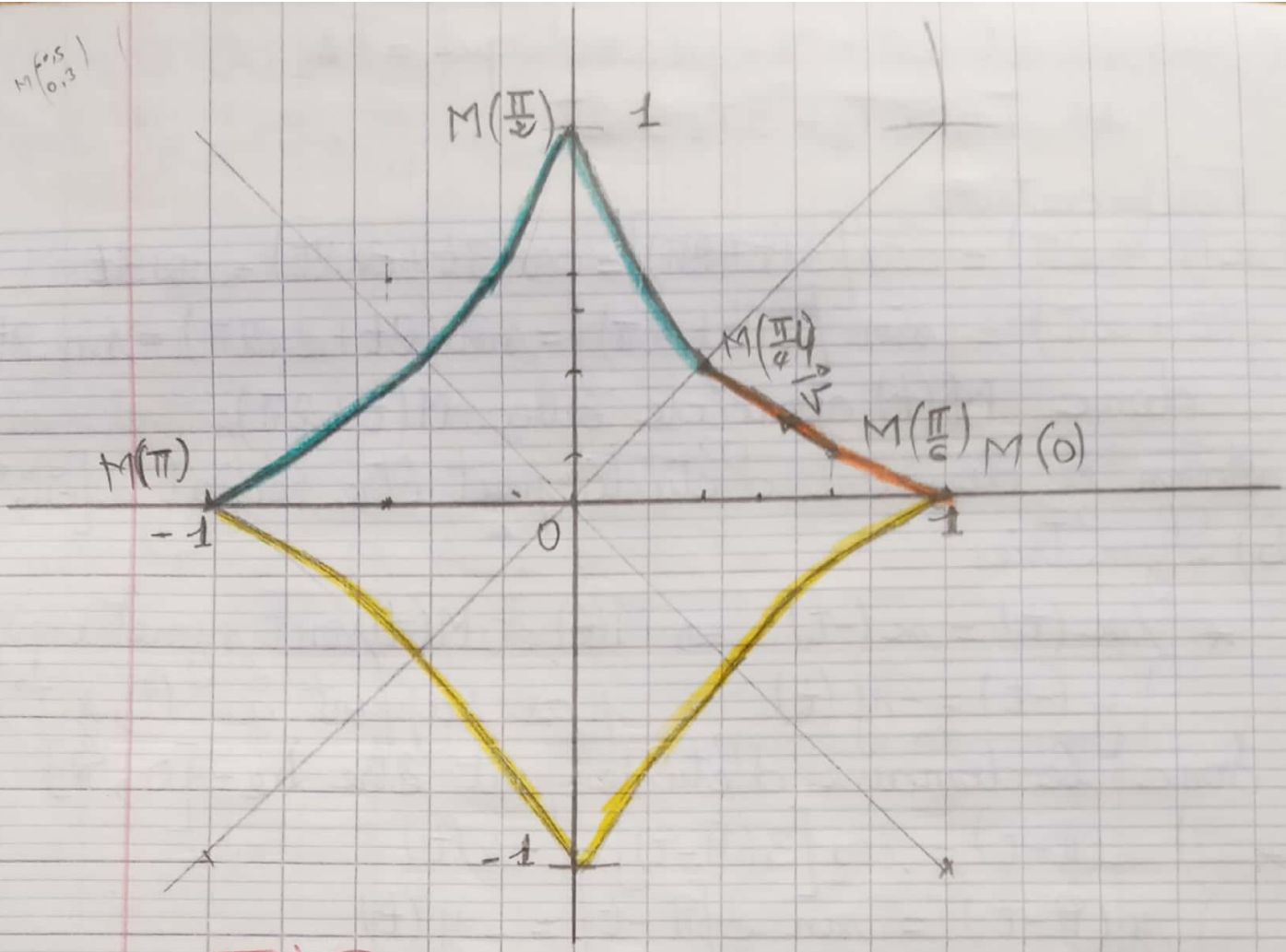
D'où le tableau de variation

t	0	$\pi/6$	$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
$x(t)$	1 ↘	$-3\sqrt{3}/8$ ↘	$1-\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0 ↗	$1/8$ ↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ $\quad$ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\vec{v}^D(-\cos t - \sin t)$

Ele 07/Janvier 2019

Scansionato con CamScanner



VI) Compléments

a) Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$

alors $(D_1) : x = x_0$ est une asymtote verticale à $(\mathcal{E})$

b) Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$

alors $(D_2) : y = y_0$ est une asymtote horizontale à $(\mathcal{E})$

Exemple 3: Courbe de Lissajous

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} x(t) = \sin\cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

a) Périodicité

$t \longmapsto \cos 3t$ est $t_1 = \frac{2\pi}{3}$ périodique

$t \to \sin 2t$ est π-périodique = T_2

or $T = 2T_2 + 3T_1 = 2\pi$

Vérification

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = \cos[3(t+2\pi)] = \cos(3t+3\times 2\pi) = \cos 3t \\ y(t+2\pi) = \sin[2(t+2\pi)] = \sin(2t+2\times 2\pi) = \sin 2t \end{cases}$$

donc $M(t)$ coincide avec $M(t+2\pi)$

Ainsi le domaine d'étude peut être réduit à $[-\pi, \pi]$

b) Symétries

* $\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases} \Rightarrow$ $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à $(O, \vec{x})$

Donc le domaine d'étude peut être $D_2 = [0, \pi]$

* $\begin{cases} x(\pi - t) = \cos[3(\pi - t)] = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin 2[\pi - t] = -y(t) \end{cases}$

Ainsi $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O. De plus si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\pi - t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Donc le domaine d'étude est $D = [0, \frac{\pi}{2}]$

* $\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = \cos[3(\frac{\pi}{2} - t)] = -\sin 3t \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = \sin[2(\frac{\pi}{2} - t)] = \sin 2t \end{cases} \Rightarrow$ Pas de symétrie

Ainsi le domaine d'étude final est $D_E = [0, \frac{\pi}{2}]$

c) Dérivée : $\begin{cases} x'(t) = -3\sin 3t \\ y'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ainsi sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$

Avec les fonctions trigonométriques, pour les périodicité et domaine d'étude, on peut : $\pi - t$

Scansionato con CamScanner

$y'(t) = 0 \iff \cos 2t = 0 \iff t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Sur D_E, $t = \frac{\pi}{4}$

* Points de rencontres avec les axes

$x(t) = 0 \iff \cos 3t = 0 \iff 3t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Sur D_E $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{\pi}{6}$

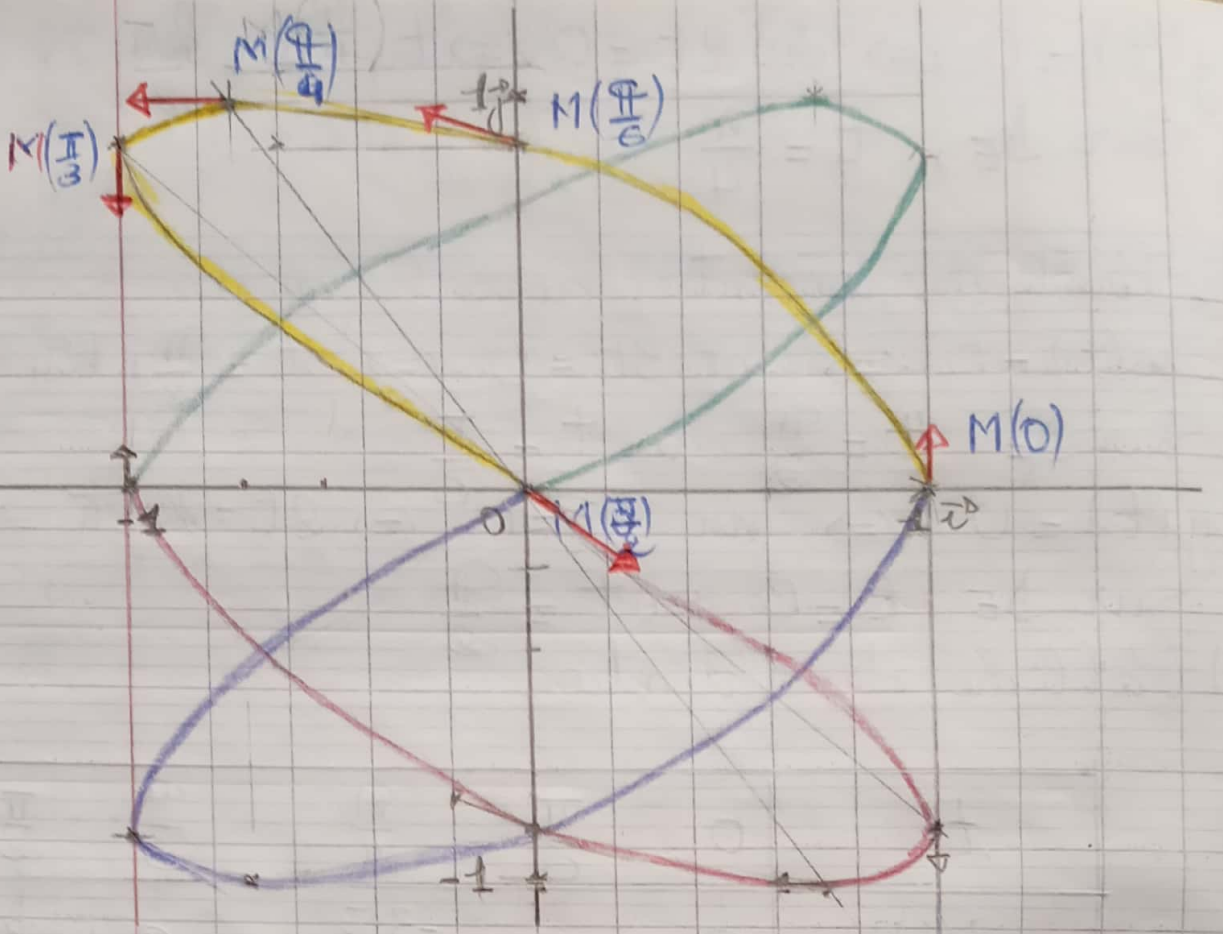
$y(t) = 0 \iff \sin 2t = 0 \iff 2t = 2k\pi \Rightarrow t = k\frac{\pi}{2}$

sur D_E $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$

d) Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-$	$-$	$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$	$-$	$+0$	$+$	3
$x(t)$	1	↘		↘	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	0
$y(t)$	0	↗		↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$y'(t)$	2	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-\frac{1}{1}$	$-$	-2

Scansionato con CamScanner



Scansionato con CamScanner

Coniques

Le 14/Janvier/2019

I) Définition

Soit une droite (Δ) et un point $F \notin (\Delta)$

e un réel strictement positif

Soit M un point du plan tels que H est le projeté orthogonal de M sur (Δ)

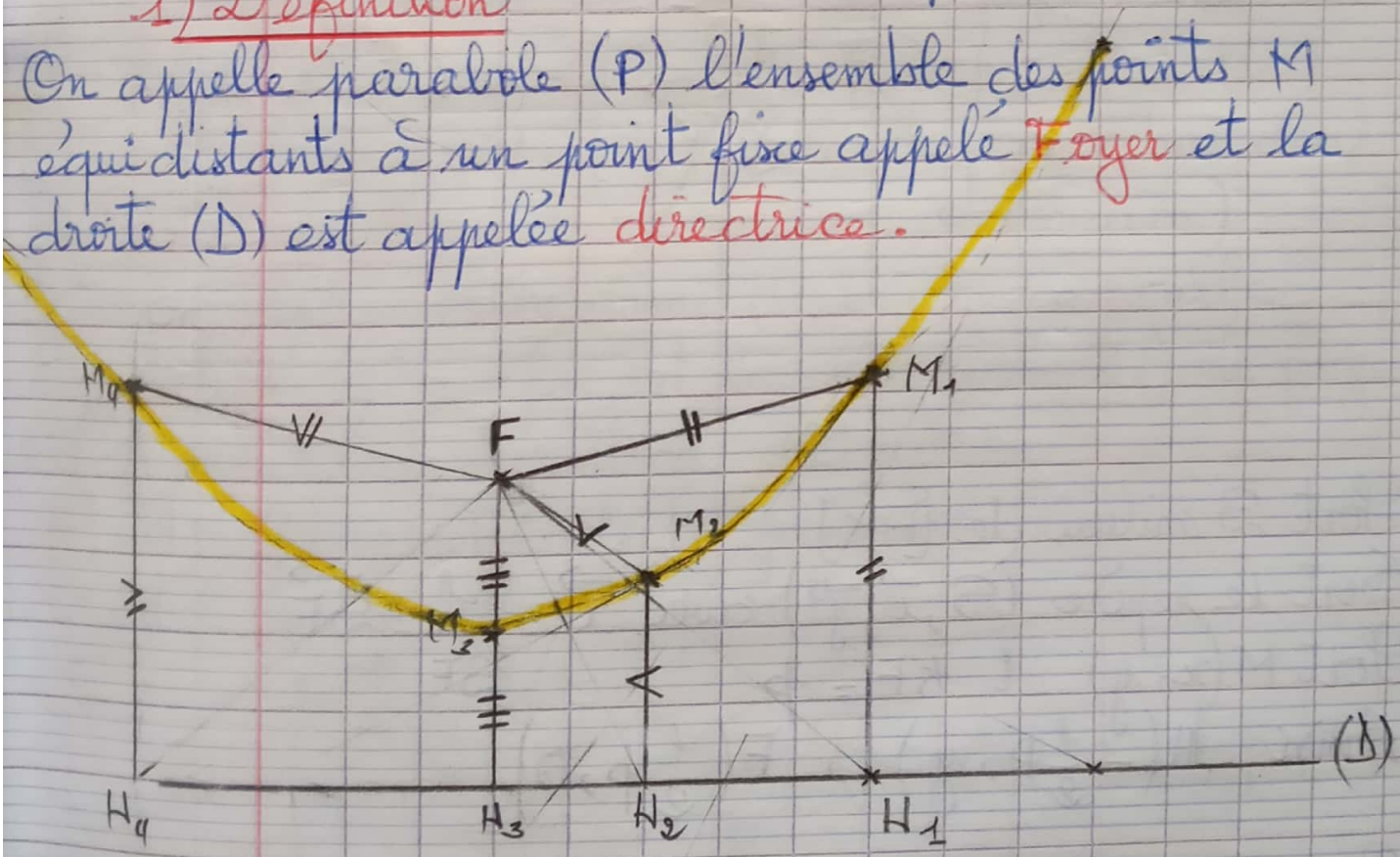
On appelle conique (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$

II) Parabole

Si $e = 1$ alors $MF = MH$, $(\Gamma) = \{M \in Plan \,/\!/\, MF = MH\}$

1) Définition

On appelle parabole (P) l'ensemble des points M équidistants à un point fixe appelé Foyer et la droite (Δ) est appelée directrice.



2) Propriétés

La parabole (P) possède un axe de symétrie (Δ)

Scansionato con CamScanner

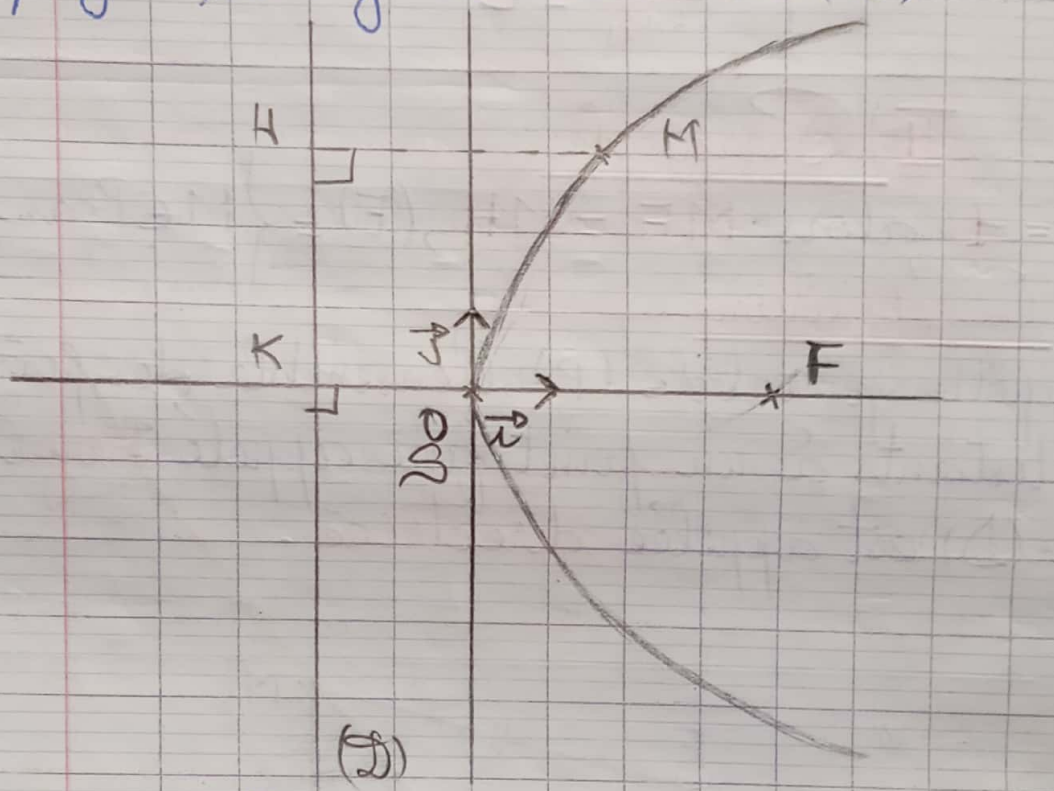
(Δ) est perpendiculaire à (D) passant par F

(Δ) est appelée axe focal ou axe de la parabole

Le sommet S est l'intersection de la parabole avec son axe focal

3) Equation réduite d'une parabole

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D)



Soit S milieu de [FK]

Soit le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{SF}\vec{SF}$

Soit M(x, y) et KF = p

Ainsi $H(-\frac{1}{2}p, y)$, $F(\frac{1}{2}p, 0)$

On a : MF = MH $\Rightarrow$ $MF^2 = MH^2$

$\vec{MF}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\vec{MH}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p - x \\ 0 \end{pmatrix}$

Scansionato con CamScanner

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}-x\right)^2 + y^2 = \left(-\frac{p}{2}-x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{4} + x^2 - px + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

La ~~direction~~ directrice $(\mathcal{D})$ a pour équation $x = -\frac{1}{2}p$

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole $(\mathcal{P})$ de directrice $(\mathcal{D})$, de foyer F a pour équation $(\mathcal{P})$ tel que $(\mathcal{P})$: $y^2 = 2px$ avec $p = \Delta(F, \mathcal{D})$

4) Etude d'une parabole

Soit $(\mathcal{P})$ le parabole d'équation $y^2 = 2px$ $(p>0, x>0)$

Soit (P_1) : $y = \sqrt{2px}$ et (P_2) : $y = -\sqrt{2px}$

(P_1) et (P_2) sont symétriques par rapport à (Ox)

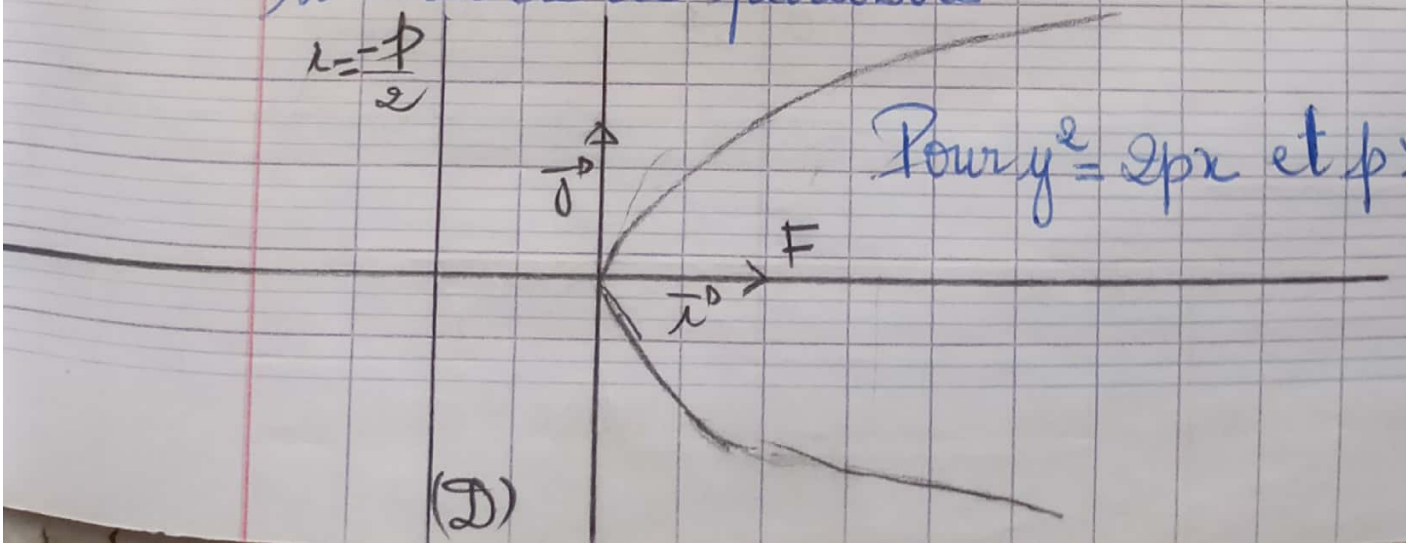
Soit $f(x) = \sqrt{2px}$ (Etude voir cahier cour d'exercice)

* Parabole d'axe (Ox)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ est la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$

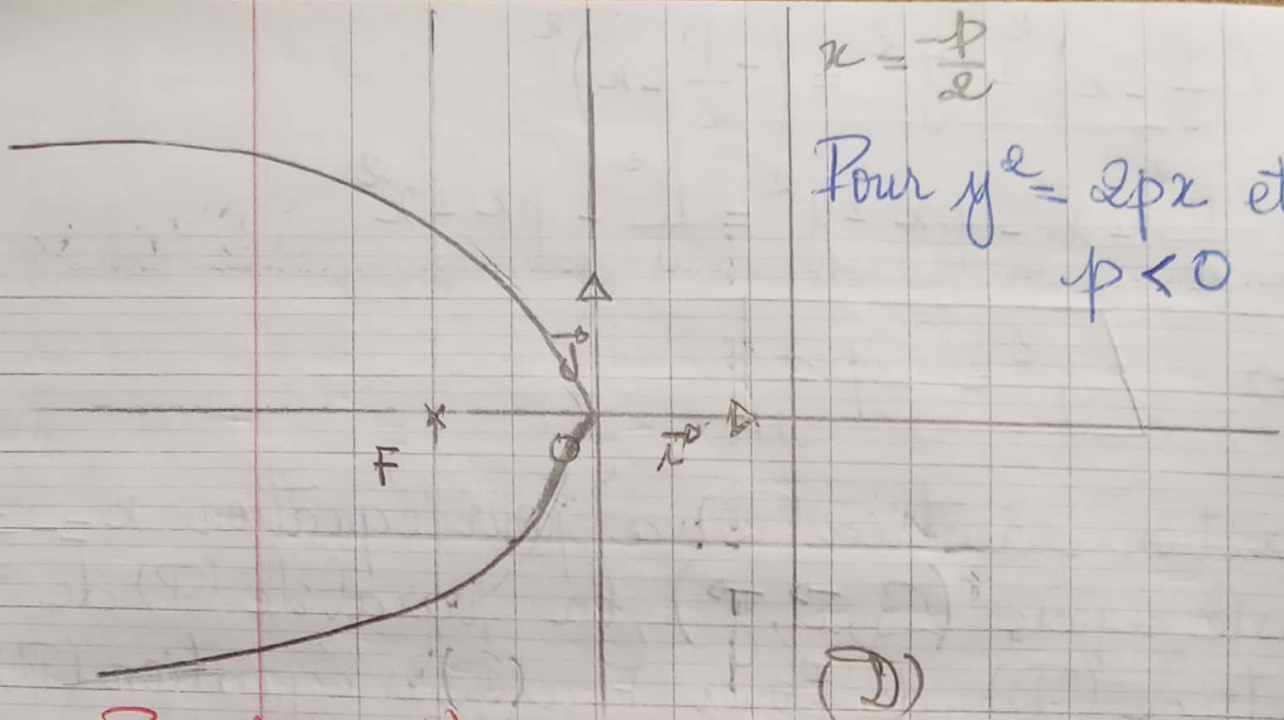
$|p|$ est le paramètre de la parabole

O est le sommet de la parabole



Pour $y^2 = 2px$ et $p>0$

Scansionato con CamScanner



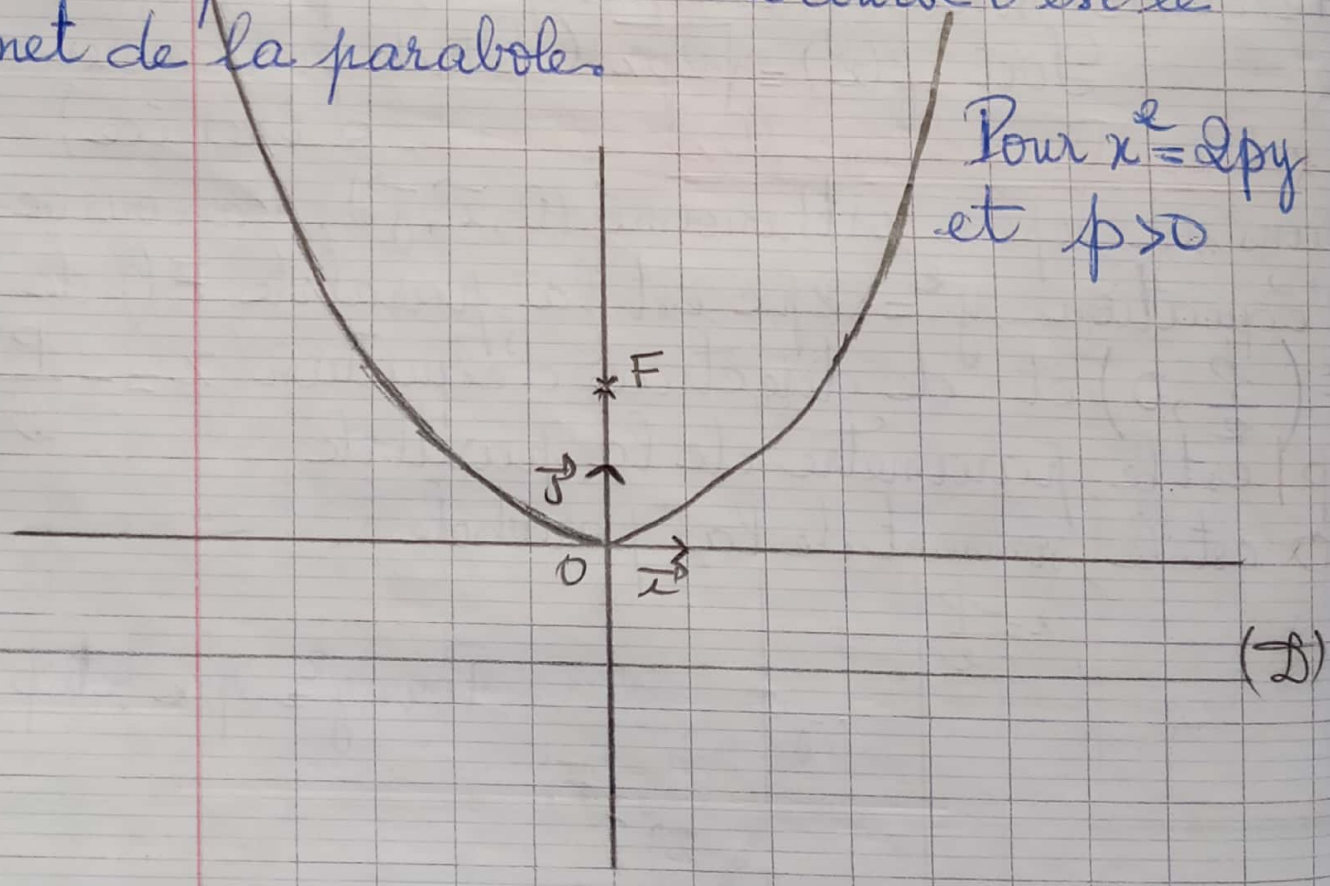
$x = \frac{-p}{2}$

Pour $y^2 = 2px$ et $p < 0$

* Paraboles d'axes (Oy)

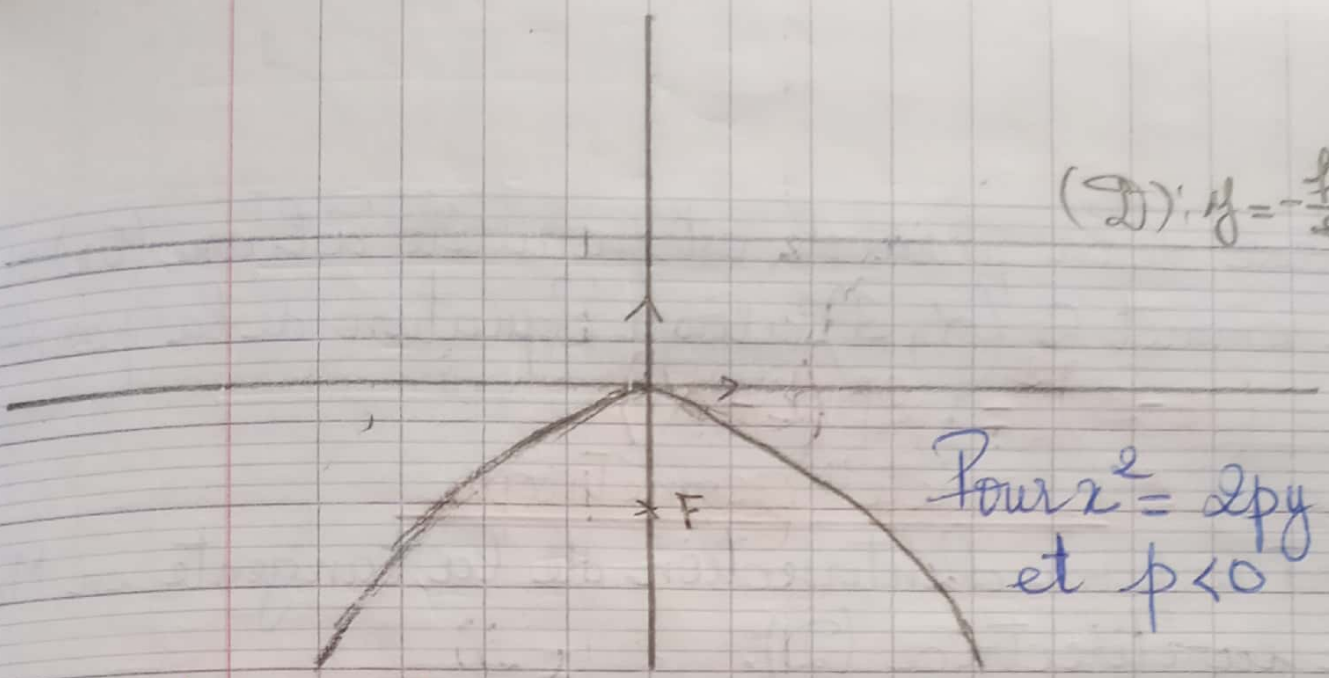
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe d'équation $x^2 = 2py$ est la parabole de foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ et de directrice d'équation $y = -\frac{p}{2}$

$|p|$ est le paramètre de la courbe O est le sommet de la parabole.



Pour $x^2 = 2py$ et $p > 0$

Scansionato con CamScanner



Application

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
On considère la droite $(D) : x = -\frac{3}{2}$ et le point $F(\frac{3}{2}, 0)$

a) Écrire une équation cartésienne de la parabole (P) de foyer F et de directrice (P)

b) Construire (P)

2) Soit $A(\frac{3}{2}, 3)$, A' son projeté orthogonal sur (D) avec (D) la tangente à la parabole (P) en A
Écrire une équation cartésienne de (Δ)

Tangentes

Pour une parabole $y^2 = 2px$, l'équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ est : $yy_0 = p(x + x_0)$

Pour une parabole d'équation $x^2 = 2py$, l'équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ est $xx_0 = p(y + y_0)$

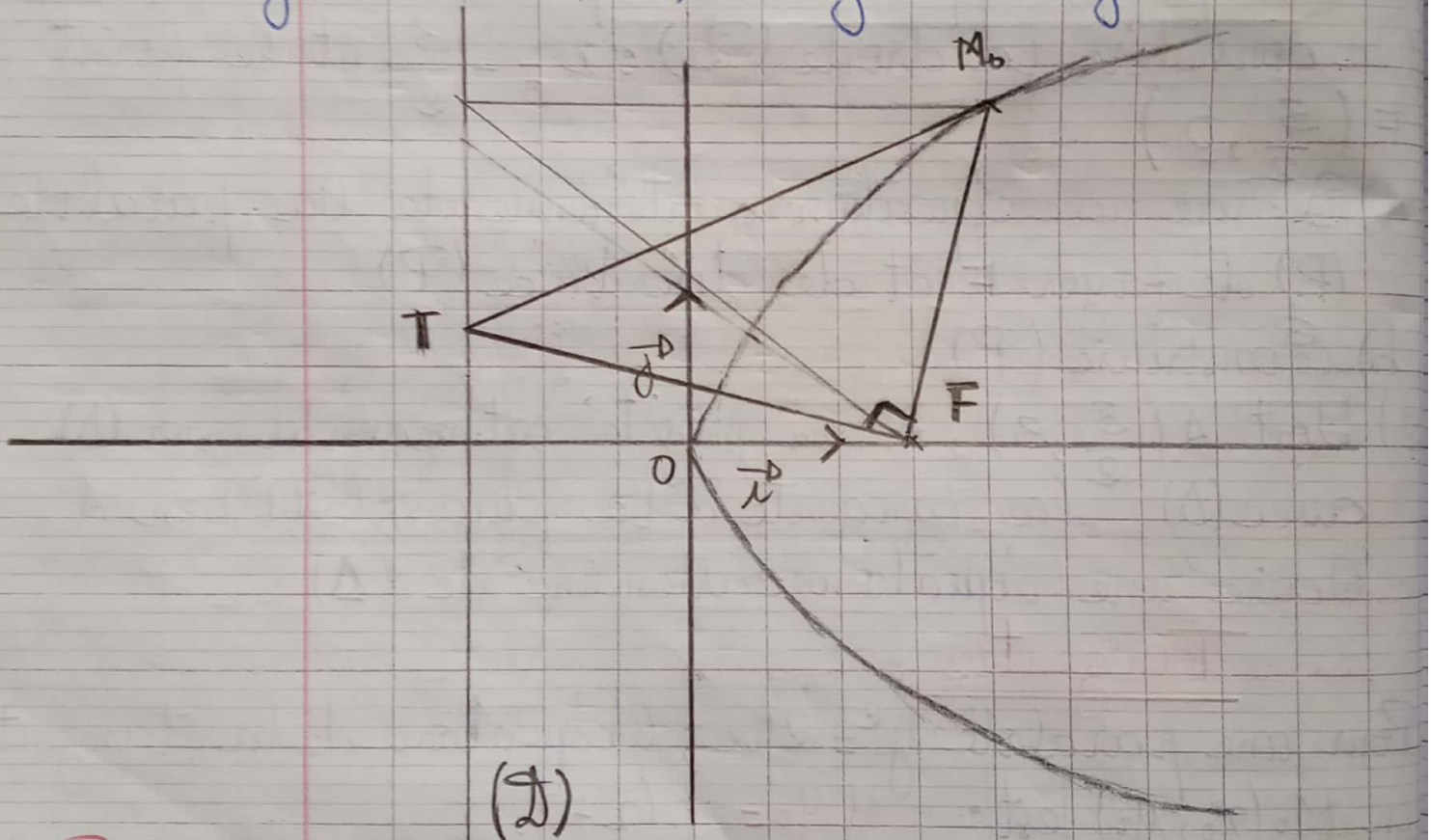
* Équation canonique

Scansionato con CamScanner

Si l'axe de la parabole est parallèle à l'axe (Ox) et le sommet $S(\alpha, \beta)$ alors l'équation de la parabole est $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

5) Propriété géométrique

Soit T le point d'intersection de la tangente en M_0 avec la directrice $(\mathcal{D})$.
La tangente (M_0T) est la médiatrice du segment $[FH]$ et le triangle M_0FT est un triangle rectangle en F.



Rappel : Le 21-Janvier 2019

Changement de repère

Soit $S(x_0, y_0)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Si un point du plan a pour couple de

Scansionato con CamScanner

coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$

alors $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Exemple 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (P) d'équation $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

Solution

$(P) : y^2 + 2y - 4x + 9 = 0 \iff (y+1)^2 - 1 - 4x + 9 = 0$

$\iff (y+1)^2 - 4x + 8 = 0$

$\iff (y+1)^2 = 4(x-2)$

Donc (P) est une parabole de sommet $S(2, -1)$ de paramètre $|p| = 2$ donc de directrice $(D) : x = +1$ et de foyer $F(3, -1)$

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ (P) est une parabole de directrice $(D) : x = -1$ de foyer $F(1; 0)$ et de paramètre $|p| = +2$

Exemple 2

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
la courbe $(P) : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = \frac{1}{25}(3x + 4y + 2)^2$

Scansionato con CamScanner

Montrer que $(\mathcal{P})$ est un parabole dont on donnera les éléments caractéristiques.

Rappel:

Considérons les points $M(x,y)$, $F(x_0,y_0)$ et une droite $(\Delta): ax+by+c=0$

Donc: $\text{distance}(M,(\mathcal{D})) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$

$$MH^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

Donc $(ax+by+c)^2 = (a^2+b^2)\,MH^2$

Solution de l'exemple 2

On a: $(x^2+y^2+2x-2y+2) = \dfrac{1}{25}(3x+4y+2)^2$

Soit $(\mathcal{D}): 3x+4y+2=0$

Ainsi $x^2+y^2+2x+2y+2 = (x+1)^2-1+(y-1)^2-1+2$

$= (x+1)^2+(y-1)^2 = MF^2$

avec $M(x,y)$ et $F(-1,1)$

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$

alors $MH^2 = \dfrac{(3x+4y+2)^2}{9+16} = \dfrac{(3x+4y+2)^2}{25}$

Donc $MH^2 = MF^2 \Leftrightarrow MH = MF$

Ainsi $(\mathcal{P})$ est une parabole de foyer $F(-1,1)$ de paramètre $|p| = d(F,(\mathcal{D}))$

Scansionato con CamScanner

1ère méthode de détermination de $|p|$

$$|p| = d(F,(\mathcal{D})) = \frac{|-3+4+2|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Et directrice $(\mathcal{D}) : 3x+4y+2=0$

De plus $(\mathcal{P})$: $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\times\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$(\mathcal{P}) : \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

2e méthode de détermination de $p = FK$

avec K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$

Soit (yy') la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.

Donc $\vec{n}(3,4)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D})$ donc vecteur directeur de (yy')

Soit $N(x,y) \in (yy')$, donc $\overrightarrow{NF}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

or $\overrightarrow{NF}\left(-\frac{1}{2}-x\,;\,1-y\right)$

d'où $\det(\overrightarrow{NF},\vec{n}) = 0 \iff -4x+3y-7=0$

Ainsi $(yy') \cap (\mathcal{D}) = \{K\}$

D'où le système d'équations $\begin{cases} -4x+3y=7 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

$\det = -16-9 = -25$

$\Delta x = 28+6 = 34$ Donc $x_K = \frac{-34}{25}$

$\Delta x = 8-27 = -13$

$y_K = +\frac{13}{25}$

Scansionato con CamScanner

$$\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} -\frac{34}{25}+1 \\ \frac{13}{25}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{25} \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix}$$

$$FK = \sqrt{\frac{9^2+12^2}{25^2}} = \frac{3}{5}$$

Donc $|p| = \frac{3}{5}$

Exemple 3

Soit $(P): x^2+y^2+2xy-6x+6y=0$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (P).

NB: L'équation de (P) contient un terme rectangle $2xy$

On doit alors faire une changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

Où θ est déterminé en annulant les coefficients de XY

Remarque

La parabole est une conique d'excentricité $e=1$

6) Représentation paramétrique

Dans le repère $\mathcal{S}(\vec{i},\vec{j})$, l'équation de (P) est $y^2=2px$

Donc on peut paramétrer (P) sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2p}t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

III) Conique à centre $e \neq 1$

1) Hyperbole

a) Définition

Scansionato con CamScanner

L'ensemble des points du plan tel que $\frac{MF}{MH} = e$ $(e > 1)$ est appelé hyperbole de foyer F de directrice $(\mathcal{D})$ avec $F \notin (\mathcal{D})$ et d'excentricité e

b) Propriétés

Soit (H) l'hyperbole de directrice $(\mathcal{D})$, de foyer F et d'excentricité e avec $e > 1$

* l'axe de l'hyperbole (H) est perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par F.
* l'hyperbole (H) rencontre l'axe focal en 02 points A et A' appelés sommets de (H) avec A barycentre du système $\{(F,1),(K,e)\}$ et A' barycentre du système $\{(F,1),(K,-e)\}$

et K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$

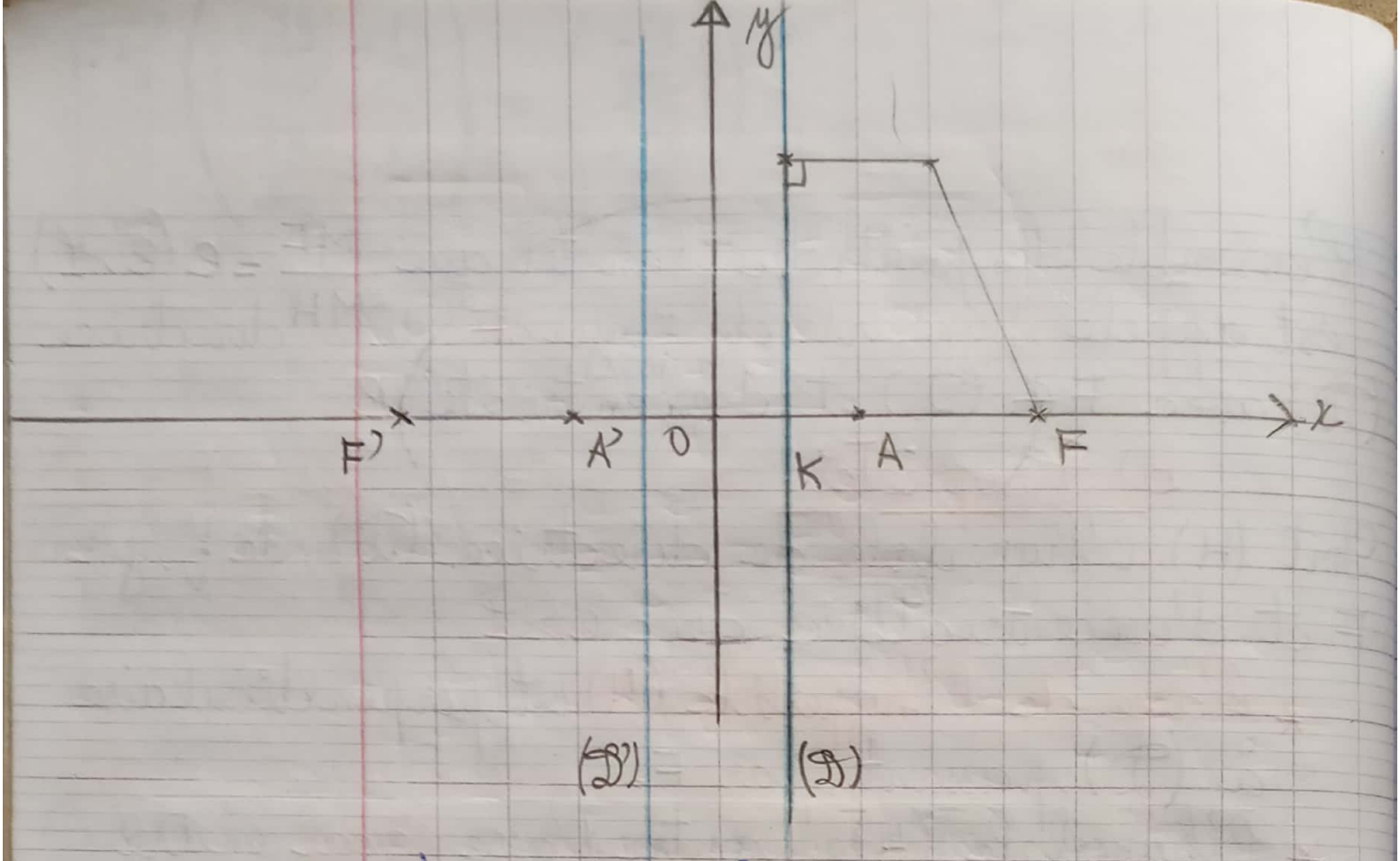
* L'hyperbole (H) possède un centre de symétrie O milieu de [AA'] et deux axes de symétries qui sont
  - → l'axe focal
  - → la droite passant par O et parallèle à $(\mathcal{D})$

c) Equation réduite d'une hyperbole

Soient F le foyer associé à $(\mathcal{D})$ et $F' = S_0(F)$ associé à $(\mathcal{D}')$

De plus $S_0(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$

Scansionato con CamScanner



A barycentre $\{(F,1),(K,e)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{0}$

Pour tout point M du plan en particulier O

$\overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA}$ (1)

A' barycentre $\{(F,1),(K,-e)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'F} - e\overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{0}$

Pour tout point du plan M en particulier O

$\overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'}$ (2)

Comme $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$ alors

(2) devient : $\overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (e-1)\overrightarrow{OA}$

Ainsi (1)+(2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA}(1+e+e-1)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} = 2e\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA}$

Posons $OF = c$ et $OA = a$

donc $OF = eOA \Leftrightarrow c = ae \Rightarrow e = \frac{c}{a}$

De plus 1-2 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA}(1+e-e+1)$

$\Leftrightarrow 2e\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow OA = eOK \Leftrightarrow OK = \frac{1}{e}OA$

Scansionato con CamScanner

Or $e = \frac{c}{a}$ alors $OK = \frac{a^2}{c}$

D'autre part, $S_O(F) = F' \Leftrightarrow \overrightarrow{FF'} = 2\overrightarrow{OF}$

Donc $FF' = 2c$ = Distance focale

De plus $M(x,y)$ $H\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ et $F(c,0)$

(H) est un hyperbole d'escentricité e

$\Rightarrow \frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF^2 = MH^2 e^2$

Or $MF^2 = (x-c)^2 + y^2$ et $MH^2 = \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$ et $e = \frac{c}{a}$

Donc $(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{2a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2$

$\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2 + y^2 - 2cx + c^2 + 2cx - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 + c^2 - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ Or $c > a \Leftrightarrow c^2 > a^2$

Posons $b^2 = c^2 - a^2$

D'où $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Equation réduite d'une hyperbole

Scansionato con CamScanner

* Foyers $F\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2}\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\sqrt{a^2+b^2}\\0\end{pmatrix}$

* L'excentricité $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

* Directrices $(D): x=\pm\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* Sommets $A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$ ~~$(D'): x=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$~~

Application

Déterminons les sommets, l'excentricité les foyers, les directrices des hyperboles suivantes :

1) $4x^2-9y^2-36=0$

2) $x^2-y^2=25$

3) $3y^2-5x^2=14$

Solution

1) $4x^2-9y^2-36=0 \Leftrightarrow 4x^2-9y^2=36$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{36}x^2-\dfrac{9}{36}y^2=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{6}\right)^2x^2-\left(\dfrac{3}{6}\right)^2y^2=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ donc $a=3$ et $b=2$

L'excentricité $e=\dfrac{\sqrt{9+4}}{3}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Les sommets $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

Directrices $x=\dfrac{9}{\sqrt{13}}=\dfrac{9}{13}$

Scansionato con CamScanner

Les foyers $F\begin{pmatrix}\sqrt{13}\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\sqrt{13}\\0\end{pmatrix}$

2) $x^2 - y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ donc $a=b=5$

L'excentricité $e = \frac{\sqrt{50}}{5} = \frac{2\times 5}{5} = 2$

Les sommets $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

Directrices $x = \frac{25}{\sqrt{2}\times 5} = \frac{5\times 5}{\sqrt{2}\times 5} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Les foyers $F\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$

3) $-3y^2 + 5x^2 = 14 \Leftrightarrow +5x^2 - 3y^2 = +14$

$\Leftrightarrow \frac{-5}{14}x^2 + \frac{3}{14}y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{+x^2}{\left(\sqrt{\frac{14}{5}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{14}{3}}\right)^2} = 1$

Donc $a = \sqrt{\frac{14}{5}}$ et $b = \sqrt{\frac{14}{3}}$

L'excentricité $e = \frac{\sqrt{\frac{14}{5}+\frac{14}{3}}}{\sqrt{\frac{14}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{112}{15}}}{\sqrt{\frac{14}{3}}} = \sqrt{\frac{1568}{5}}$

donc $e = \frac{4\sqrt{98}}{\sqrt{5}}$

Scansionato con CamScanner

Les sommets $A\left(\sqrt{\frac{14}{5}}, 0\right)$ et $B\left(-\sqrt{\frac{14}{5}}, 0\right)$

Directrices $x = \frac{\frac{14}{5}}{\sqrt{\frac{112}{15}}}$

Les foyers $A\left(4\sqrt{\frac{7}{15}}, 0\right)$ et $B\left(-4\sqrt{\frac{7}{15}}, 0\right)$

d) Etude de l'hyperbole

Soit (H) une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$

$\Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Soit $(H_1) : f_1 : x \longrightarrow \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

et $(H_2) : f_2 : x \longrightarrow -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

(H_1) et (H_2) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Etudions f_1

Domaine de définition

f_1 n'a de sens que si $x^2 - a^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \geq a^2$ donc $x \geq a$

$x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$

Domaine d'étude de f_1

Scansionato con CamScanner

Parité de f_1

$\forall x \geq a \Leftrightarrow -x \leq -a$
$x \leq -a \Leftrightarrow -x \geq a$
$\Rightarrow \forall x \in D_{f_1} \Rightarrow -x \in D_{f_1}$

De plus $f_1(-x) = f(x)$

Donc f_1 est paire

Par conséquent, on peut réduire le domaine d'étude sur $[0, +\infty[\cap]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$

$\Rightarrow D_E = [a, +\infty[$

→ Tableau de variation de f_1

f_1 est dérivable sur $D_f - \{-a, a\}$ donc dérivable sur $]a, +\infty[$

Ainsi $f_1'(x) = +\frac{b}{a} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{+bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

Puisque $a > 0$ et $b > 0$ alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de $-x$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$ $x \geq 0 \Rightarrow +x$

Donc f_1 est strictement croissante sur D_E

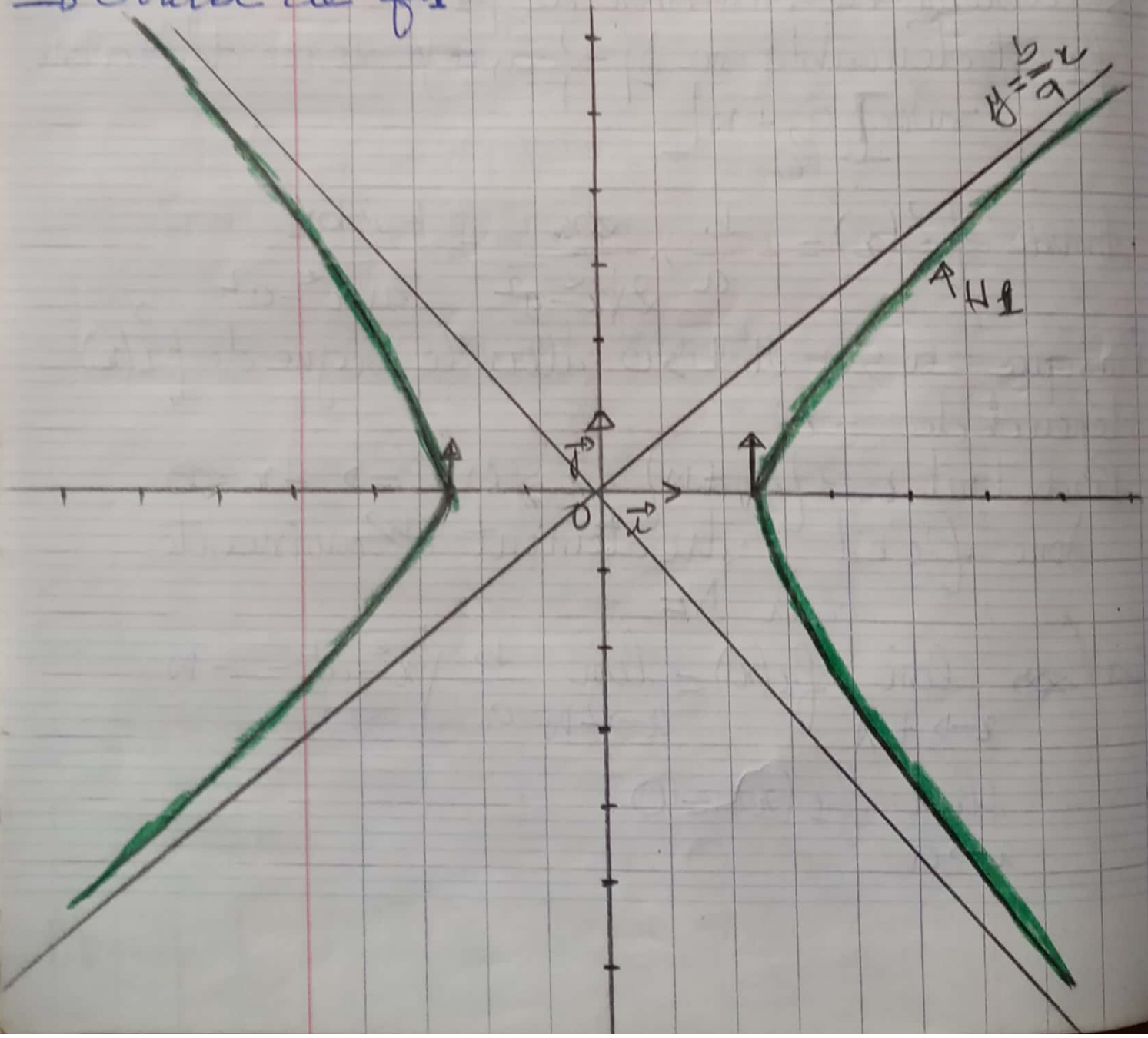
$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = +\infty$

$\lim_{x \to a} f_1(x) = 0$

Scansionato con CamScanner

x	a	$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|\|$	$+$
f_1	0	$+\infty$

→ Courbe de f_1



Scansionato con CamScanner

→ Asymtote de $\mathcal{C}_f$

D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$ (1)

• D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}$

or $\dfrac{b\sqrt{x^2-a^2}}{ax} = \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2}} = \dfrac{b}{a}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{a}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{b}{a}$ (2)

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_1(x) - \dfrac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{b}{a}x$

or $\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{b}{a}x = \dfrac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right)$

$= \dfrac{b}{a} \times \dfrac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \dfrac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) - \dfrac{b}{a}x = 0$ (3)

Ainsi d'après (1), (2) et (3) la droite $y = \dfrac{b}{a}x$ est une asymtote oblique à $\mathcal{C}_f$

* Théorème

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (H) et (H') d'equations réduites

Scansionato con CamScanner

respectif $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont des hyperboles de centre O, d'axes (Ox) et (Oy)

Pour une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

On a:

Axe focal : (Ox)

Foyers F(c,0) et F'(-c,0) avec $c^2 = \sqrt{b^2+a^2}$

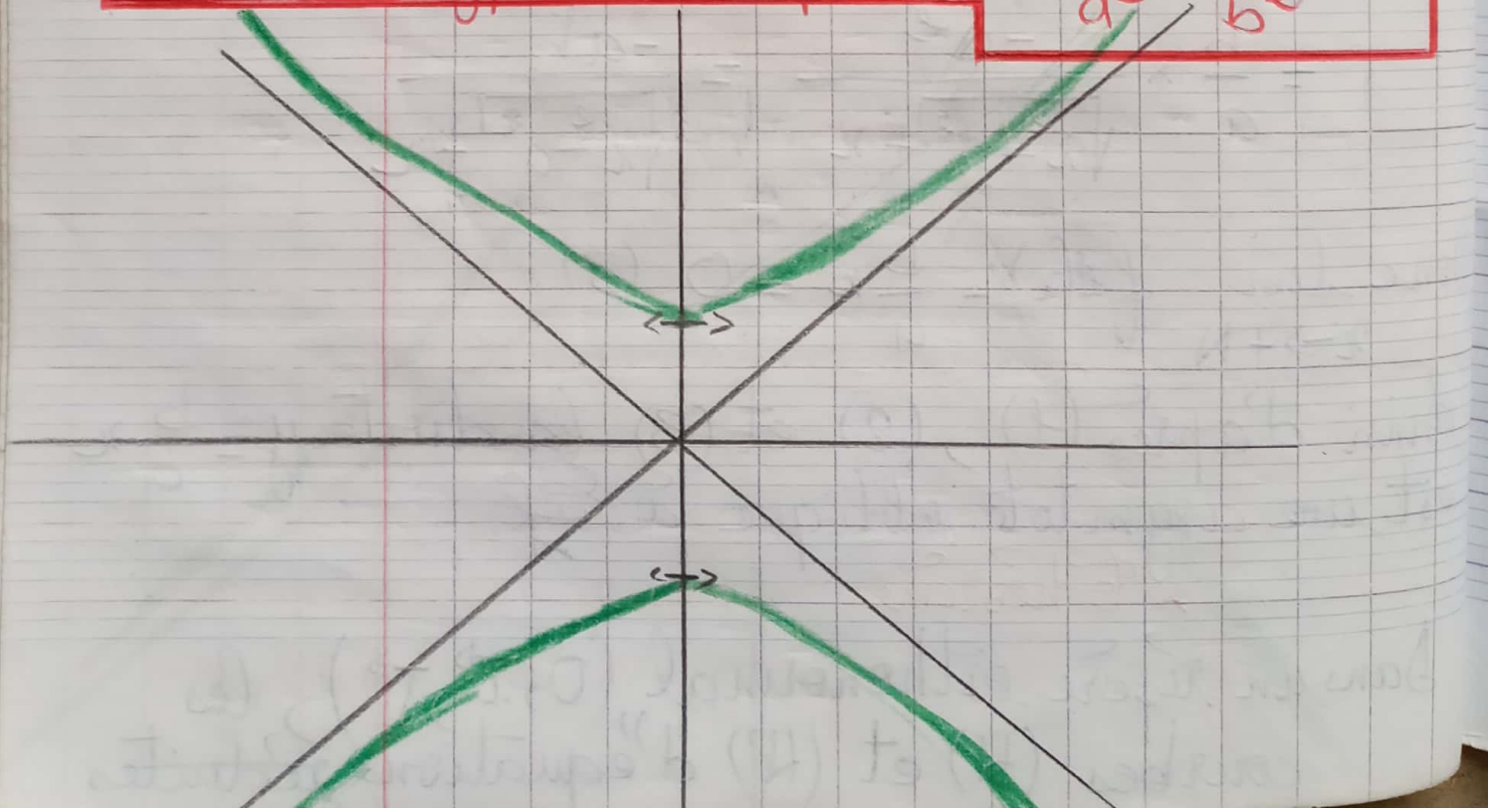
Directrices (D) et (D') d'équations $x = \pm \frac{a^2}{c}$

Excentricité $e = \frac{c}{a}$

Sommets : A(a,0) et A'(-a,0)

Asymtotes (Δ) et (Δ') d'équations $y = \pm \frac{b}{a} x$

Pour une hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Scansionato con CamScanner

Axe focal : (Oy)
Foyers : $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$
Directrices : (D) et (D') d'équations $y = \pm \frac{b^2}{c}$
Excentricité : $e = \frac{c}{b}$

Sommets $A(0,b)$ et $A'(0,-b)$
Asymtotes : (Δ) et (Δ') d'équations $y = \pm \frac{b}{a} x$

Remarque

Lorsque $a = b$, l'hyperbole est dite équilatérale équilatère. Ses asymtotes sont orthogonales et l'excentricité $e = \sqrt{2}$.

e) Equations de l'hyperbole rapportée à ses asymtotes

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Déterminons l'équation (H) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}$ le vecteur directeur de (Δ) $y = \frac{b}{a} x$ et $\vec{v}$ celui de (Δ') : $y = -\frac{b}{a} x$

* Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit $M(x,y)$

$(\Delta) : y = \frac{b}{a} x \Leftrightarrow ay - bx = 0 \Rightarrow \vec{u}(a,b)$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$(\Delta') : y = -\frac{b}{a} x \Leftrightarrow bx + ay = 0 \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} +a \\ -b \end{pmatrix}$

Scansionato con CamScanner

$\vec{v} = a\vec{i} - b\vec{j}$

* Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit $M(X, Y)$

$\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(a\vec{i} - b\vec{j})$

$= a\vec{i}X + b\vec{j}X + a\vec{i}Y - b\vec{j}Y$

$= \vec{i}(aX + aY) + \vec{j}(bX + bY)$

or dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Par identification

$$\begin{cases} x = aX + aY \\ y = bX + bY \end{cases}$$

En remplaçant x et y par leur valeurs dans l'équation de (H)

$$\left[\frac{a(X+Y)}{a}\right]^2 - \left[\frac{b(X-Y)}{b}\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (X+Y-X+Y)(X+Y+X-Y) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2Y \times 2X = 1$$

Donc $(H) \Leftrightarrow Y = \frac{1}{4X}$

Application

Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

Déterminer l'équation (H) dans le repère rapporté à ses asymtotes

Scansionato con CamScanner

Solution

$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$

Donc $a = 2$ et $b = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Ainsi les asymtotes : (Δ) et (Δ') d'équations respectifs

$$y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} x = \pm \sqrt{3} x$$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit $M(x, y)$

$(\Delta): y = \sqrt{3}x \Leftrightarrow y - \sqrt{3}x = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x + y = 0$

Donc le vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$

$(\Delta'): y = -\sqrt{3}x \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0$

Donc le vecteur directeur $\vec{v} = -\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$

Et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit $M(X, Y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = X(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) + Y(\sqrt{3}\vec{j} - \vec{i})$

$= X\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}X + \sqrt{3}\vec{j}Y - \vec{i}Y$

$= \vec{i}(X - Y) + \vec{j}(\sqrt{3}X + \sqrt{3}Y)$

Par identification $x = X - Y$

$y = \sqrt{3}X + \sqrt{3}Y = \sqrt{3}(X + Y)$

En remplaçant x et y par leur valeurs dans l'équation de (H) on obtient :

Scansionato con CamScanner

$$\frac{(X+y)^2}{4} - \frac{3(X+y)^2}{12} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X+y)^2}{4} - \frac{(X+y)^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow (+X+y-X+y)(+X+y+X+y) = 4$$

$$\Leftrightarrow -2y+2X = 4 \Leftrightarrow +Xy = 1$$

Donc Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$$(H): y = \frac{1}{X}$$

Une maniere generale

Soit l'hyperbole $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de (H) est

$$(H): y = \frac{1}{4mX} \quad m \in \mathbb{R}^*$$

avec $\vec{u}(am, bm)$ et $\vec{v}(am, -bm)$

Équation de la tangente

Soit l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

L'équation de la tangente T en $M(x_0, y_0)$ est $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Scansionato con CamScanner

Application

Soit l'hyperbole d'équation $-2x^2 + 3y^2 = 1$
Déterminer l'équation de la tangente en $A(-1; -1)$

Solution

$$(H): -2x^2 + 3y^2 = 1 \iff -x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff -\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\iff -2x^2 + y^2 =$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

Soit (T) la tangente à (H) en $A(-1,-1)$
donc $(T): -\dfrac{y}{\frac{1}{3}} + \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = 1$

$$\iff -3y + 2x = 1 \iff -3y = 1 - 2x$$

donc $(T): y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$$(T): y = \frac{1}{3}(2x - 1)$$

Scansionato con CamScanner

Remarque

Si (H) a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alors l'équation de la tangente au point $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$

f) Définition bifocal de l'hyperbole

Soit l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et F et F' ses foyers

L'ensemble des points M du plan, tel que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole.

Application

Déterminons l'équation d'une hyperbole tels que $FF' = 4$ et $|MF - MF'| = 2$

Solution

$|MF - MF'| = 2 \Rightarrow a = 1$

$FF' = 2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

Ainsi dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal (H) est de la forme : $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

Scansionato con CamScanner

si $A \Rightarrow B$ alors non $B \Rightarrow$ non A

Pour demontrer que si A est vraie alors B est vrai
On suppose que B n'est pas vraie

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Pour encadrer un trinôme du 2nd degrés on peut poser

La suite voire cahier 2

$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) Etablissons la relation $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Soit $h(x) = \ln(1+x) - x$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

Comme $x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1$

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1 \Rightarrow 0 \geq \frac{-x}{1+x} \geq -1$$

$$h'(x) \leq 0$$

or $\lim h(x) = 0$ $\lim h(x) = -\infty$

Scansionato con CamScanner