Ngom Mamadou

Terminale S1

2018/2019

1 ∝ Coniques : Suite du cours

2 ∝ Arithmétique

3 ∝ Probabilité

4 ∝ Géométrie dans l'espace

5 ∝ Transformations dans l'espace

Que serait le monde, sans maths ??

Scanned by CamScanner

Application Le 26/01/2019

Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1$

Montrer que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ tel que $t \longmapsto \left(\frac{1}{\cos t}, 2\tan t\right)$ est un paramétrage de (H)

Solution

Soit $M(t)\left(\frac{1}{\cos t}, 2\tan t\right) \Leftrightarrow M(t): \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = 2\tan t \end{cases}$

Ainsi $x(t)^2 - \frac{1}{4}[y(t)]^2 = \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2\tan^2 t}{4} = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t$

or $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ donc $x^2(t) - \frac{1}{4}y^2(t) = 1$

Donc $\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ $M(t) \in (H)$

** Réciproquement :

On a : $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 1$

$\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$

Ainsi il existe un unique $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan t = \frac{y}{2}$

Ainsi $x^2 - (\tan t)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

$\Leftrightarrow |x| = \left|\frac{1}{\cos t}\right|$

Si $x > 0$ alors $x = \frac{1}{\cos t}$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

Si $x < 0$ alors $x = \frac{1}{\cos t}$ $\forall t \in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

Ainsi $\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, $y = 2\tan t$

Scanned by CamScanner

De la même façon:
$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$ ainsi il existe un unique $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(t+\pi) = \frac{y}{2}$
donc $2\tan t = y$

Donc (H) est définie par le paramétrage

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = 2\tan t \end{cases} \quad \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$$

D'une manière générale
Soit l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'hyperbole a pour paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a}{\cos t} \\ y(t) = b\tan t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \pm \frac{b}{a}\sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$$

2) Ellipse

a) Définition

On appelle ellipse l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ avec $0 < e < 1$

(H) est le projeté orthogonal de M sur (D) la directrice
F est le foyer et e l'excentricité.

b) Propriétés

* L'axe focal de l'ellipse est la droite perpendiculaire à (D) passant par F
* L'axe focal coupe l'ellipse en deux points A et A' appelés sommets de (E) qui sont barycentre respectifs de $\{(F,1),(K,e)\}$ et $\{(F,1),(K,-e)\}$

Scanned by CamScanner

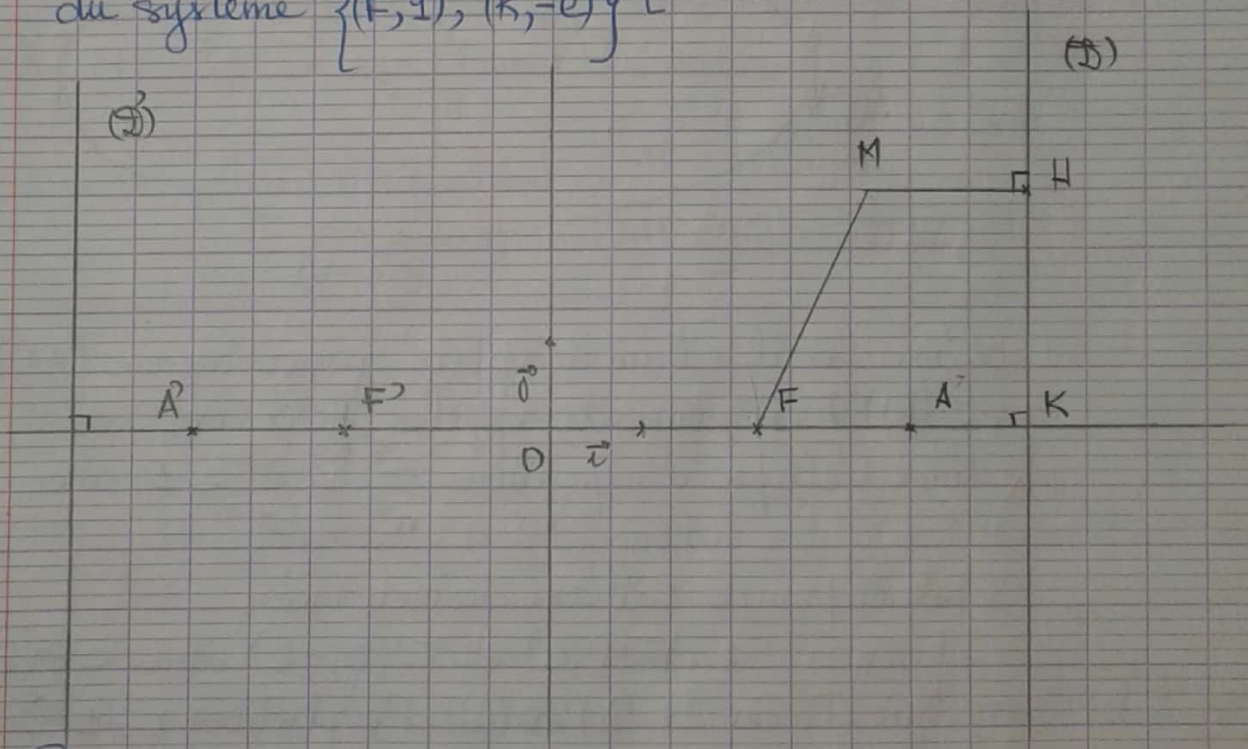
où K est le projeté orthogonal de F sur (D)

* Toute ellipse (E) admet un centre de symétrie appelé centre de l'ellipse qui est le milieu de [AA'] et deux axes de symétries qui sont : axe focal et la droite passant par le centre de l'ellipse et perpendiculaire à l'axe focal.

c) Équation réduite de l'ellipse

Soient F le foyer associé à (D) et F' = $S_O(F)$ associé à (D') = $S_O(D)$

A barycentre du système $\{(F,1),(K,e)\}$ et A' barycentre du système $\{(F,1),(K,-e)\}$



Posons OF = c , OA = a

D'après ce qui précède $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$

avec $e = \frac{c}{a}$ et $c < a$ donc $a^2 - c^2 > 0$

FF' = 2c = Distance focale

Posons $b^2 = a^2 - c^2$ alors l'équation réduite de l'ellipse est

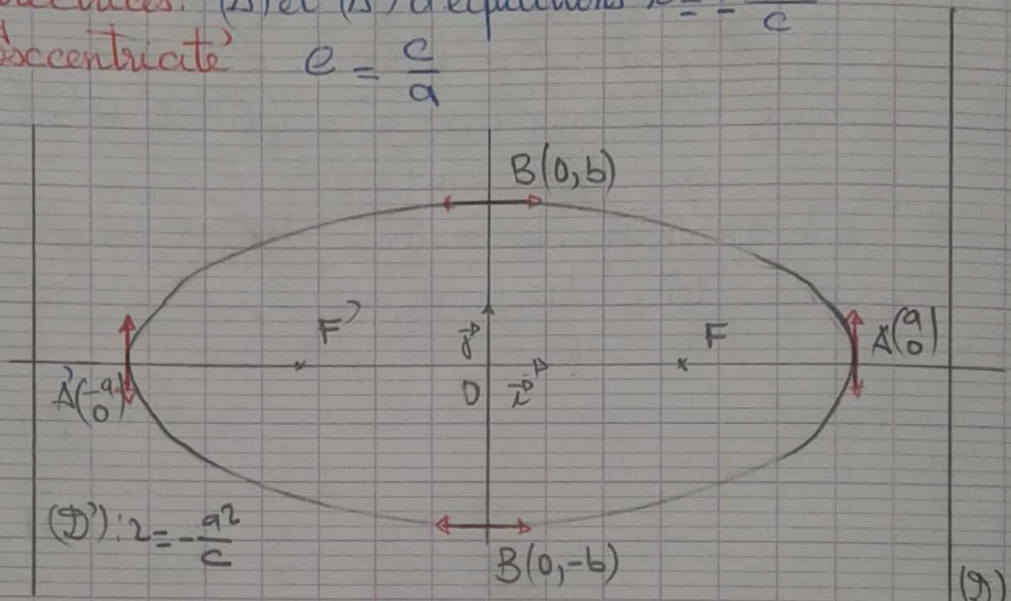
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Scanned by CamScanner

NB:

- Pour l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$, on a:

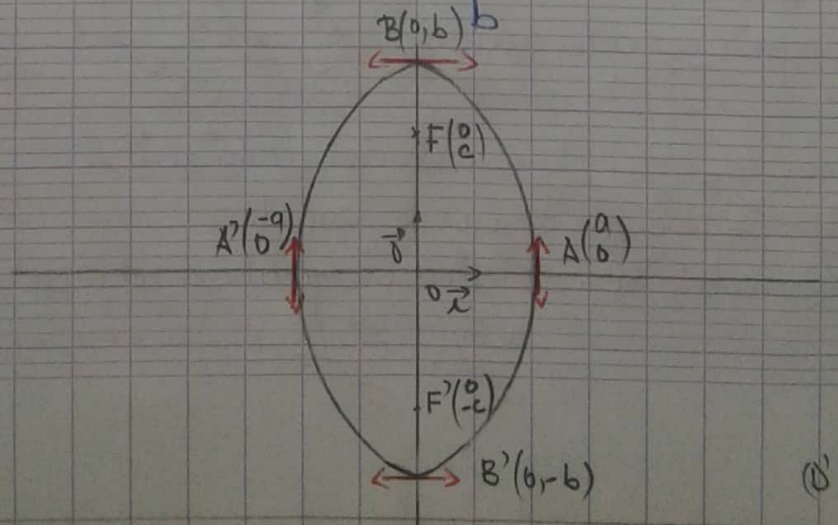
Axe focal: L'axe des abscisses
Foyers : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec $c=\sqrt{a^2-b^2}$
Directrices: (Δ) et (Δ') d'équations $x=\pm\frac{a^2}{c}$
Excentricité $e=\frac{c}{a}$



L'axe focal est aussi appelé grand axe ase (AA') et (BB') est souvent appelé petit axe.

- Pour l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a<b$, on a:

Axe focal : L'axe des ordonnées
Foyers : $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$ avec $c=\sqrt{b^2-a^2}$
Directrices : (Δ) et (Δ') d'équations $y=\pm\frac{b^2}{c}$
Excentricité : $e=\frac{c}{b}$



Scanned by CamScanner

L'axe focal (BB') est le grand axe et le petit axe est la droite (AA')

d) Définition bifocale de l'ellipse

i) Définition ou Activité

Soit O milieu de $[FF']$, $\vec{i} = \frac{1}{FF'}\overrightarrow{FF'}$ et $\vec{j}$ le vecteur unitaire directement opposé orthogonal FF' à $\vec{i}$

Montrons que $M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

Supposons que $MF + MF' = 2a$

On a : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, $M(x,y)$

$\overrightarrow{MF}(c-x,-y)$ et $\overrightarrow{MF'}(-c-x;-y)$

donc $MF^2 = (c-x)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$

$MF^2 - MF'^2 = -4cx \Leftrightarrow (MF - MF')(MF + MF') = -4cx$

or $MF + MF' = 2a$ donc $MF - MF' = \frac{-4cx}{2a} = -\frac{2cx}{a}$

D'où le système d'équation $\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -\frac{2cx}{a} \end{cases}$

La résolution donne :

$$MF = a - \frac{cx}{a} \text{ et } MF' = a + \frac{cx}{a}$$

Donc si $MF + MF' = 2a$ alors $M \in (E)$ (1)

Réciproquement

$MF + MF' = a + a - \frac{cx}{a} + \frac{cx}{a} = 2a$

Donc $M \in (E) \Rightarrow MF + MF' = 2a$ (2)

D'après les conclusions (1) et (2), $M \in (E)$ si et seulement si $MF + MF' = 2a$.

ii) Établissons l'équation de l'ellipse pour $b^2 = a^2 - c^2$

D'après la question précédente :

$$MF = a - \frac{cx}{a} \Leftrightarrow MF^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

or $MF^2 = (c-x)^2 + y^2$ donc $(c-x)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

$\Leftrightarrow c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{(cx)^2}{a^2} - 2cx$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow x^2\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)+y^2 = a^2-c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2 = a^2-c^2$

Comme $a^2-c^2=b^2$ alors $x^2\times\frac{b^2}{a^2}+y^2=b^2$

donc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ équation de (E)

2) Définition

Soit l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, F et F' ses foyers

L'ensemble des points M du plan tel que $MF+MF'=2a$ est un ellipse (E).

Remarque

* Pour $b>a$

$M\in(E) \Leftrightarrow MF+MF'=2a$

* $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ sont les rayons vecteurs de l'ellipse (E)

3) Équation de la tangente

Soit l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

L'équation de la tangente (T) en (E) au point $M_0(x_0,y_0)$ est : $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Application

Déterminer suivant les valeurs du nombre réel m, la nature de l'ensemble (T_m) d'équation

$(m+2)x^2+m^2y^2+2(m+2)x-(m+2)(m^2-1)=0$

Solution

Nature de l'ensemble (T_m) suivant les valeurs de m

a) Si $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

On obtient : $4y^2=0 \Leftrightarrow y=0$

Scanned by CamScanner

Donc (T_{-2}) est la droite (Ox)

b) Si $m^2=0 \Leftrightarrow m=0$

On obtient $2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0$

Donc (T_0) est une droite d'équation $x=-1$

c) Pour $m\neq 0$ et $m\neq -2$

On obtient $x^2+\frac{m^2}{m+2}y^2+2x=m^2-1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+\frac{m^2}{m+2}y^2=m^2$ (E)

Posons $X=(x+1)$ et $Y=y$

Ainsi $(E) \Leftrightarrow X^2+\frac{m^2}{m+2}y^2=m^2$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{m^2}+\frac{y^2}{m+2}=1$

Si d'une part $m+2>0 \Leftrightarrow m>-2$ alors (T_m) est une hyperbole.

Si d'autre part $m+2<0$ et $m\neq 0$ et $m\neq -2$ alors (T_m) est une ellipse.

d) Pour $m^2=m+2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$\Delta=1+8=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$

$m_1=\frac{1+3}{2}=2$ et $m_2=\frac{1-3}{2}=-1$

Ainsi pour $m=2$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$

(T_2) est un cercle de centre $A(-1,0)$ et de rayon 2

Pour $m=-1$, $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{1}=1$

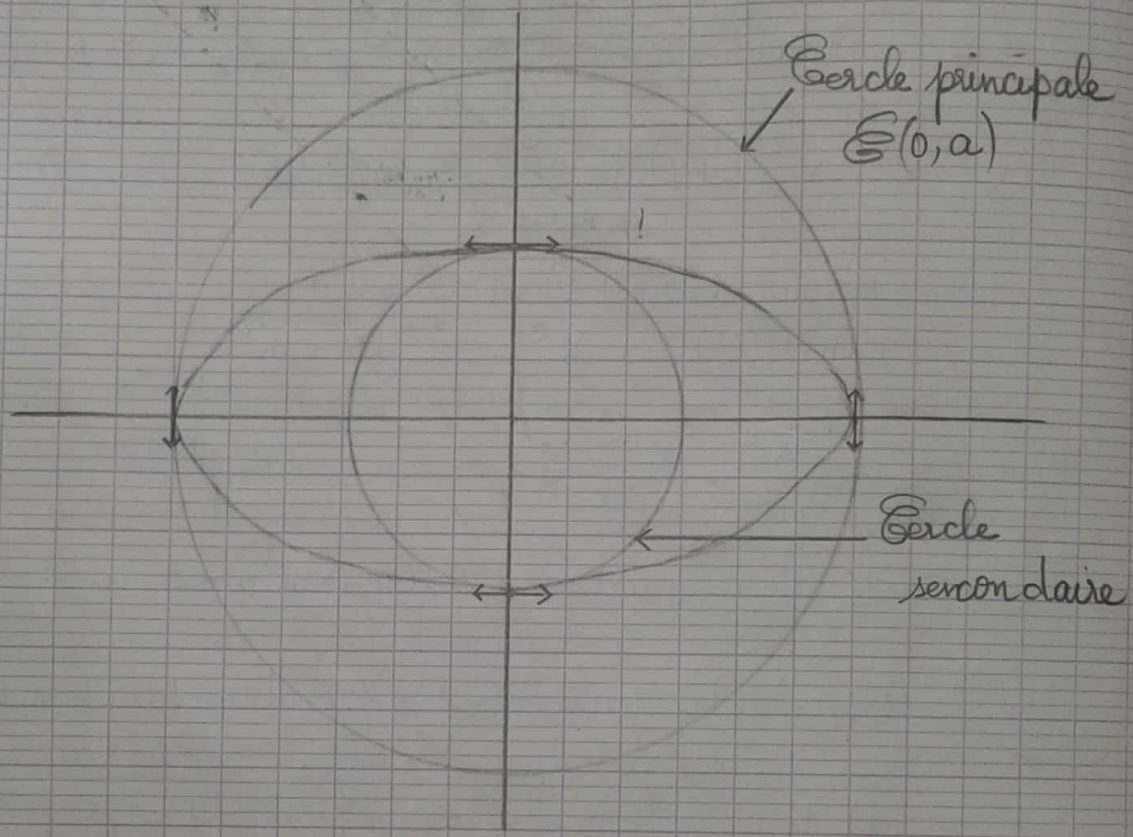
(T_{-1}) est de même un cercle de centre $A(-1,0)$ et de rayon 1

f) Cercles d'une ellipse Le 29/Janvier/2019

Scanned by CamScanner

1) Cercle principale, cercle secondaire

L'ellipse (E) d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$ de centre O a pour cercle principale $\mathcal{C}(0, a)$ et pour cercle secondaire $\mathcal{C}(0, b)$.



2) Cercles directrices directeurs d'une ellipse

Si $a > b$, l'ellipse d'équation réduite (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Alors le cercle (Γ) de centre F et de rayon $2a$ et le cercle (Γ') de centre F' et de rayon $2a$ sont appelés cercles directeurs de l'ellipse.

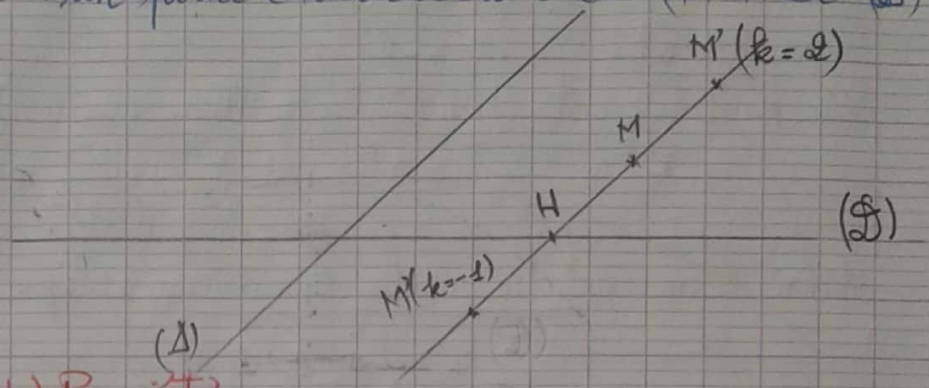
3) Ellipse affine d'un cercle

a) Affinité

Soient (D) et (D') deux droites sécantes du plan, k un réel non nul.
On appelle affinité de base ou d'axe (D), de direction celle de (D') et de rapport k l'application

$f : P \longrightarrow P$ telle que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{MH}$ et $(MM') \parallel (\Delta)$
$M \longmapsto M'$

avec H un point d'intersection de (MM') et $(\mathcal{D})$



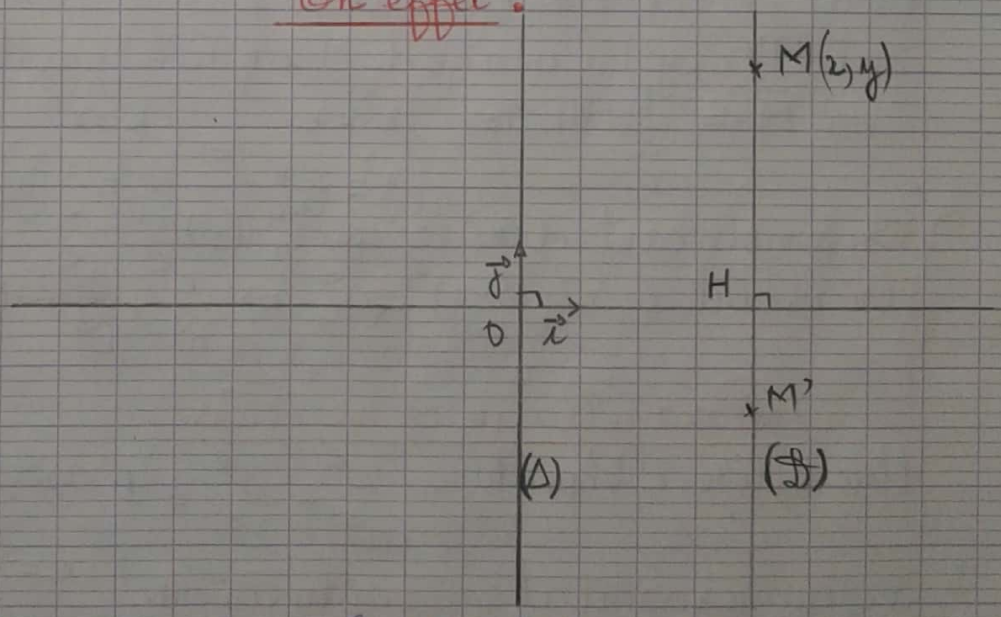
b) Propriétés

- Si $k \neq 1$, les seuls points invariants par cette affinité sont les points de la droite $(\mathcal{D})$.
- Si $k = 1$, tout point du plan est invariant par cette affinité. Alors on obtient une "Identité du plan".
- Si $(\Delta) \perp (\mathcal{D})$, alors on a une affinité orthogonale

c) Image d'un cercle par une affinité orthogonale :

L'image d'un cercle $(\mathcal{C})$ par une affinité orthogonale noté $\mathcal{A}((\Delta), (\Delta), k)$ est une ellipse (E).

En effet :



Soit $\mathcal{C}(O, r)$: $x^2 + y^2 = r^2$

Scanned by CamScanner

Soit $M(x,y)$ $H(x,0)$ et $M'(x,ky)$

On a: $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ avec $M'(x',y')$

donc $\begin{cases} x = x' \\ y' = ky \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation de $(\mathcal{C})$ on obtient

$$x'^2 + \frac{y'^2}{k^2} = r^2 \iff \frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{(kr)^2} = 1$$

Ainsi l'image du cercle $\mathcal{C}$ est une ellipse (E) d'équation

$$\boxed{\frac{x}{r^2} + \frac{y^2}{(kr)^2} = 1}$$

(E) est dit Ellipse affine du cercle $(\mathcal{C})$

Propriété

Application

Montrer que l'ellipse $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de son cercle principal $\mathcal{C}(0,a)$ par une affinité orthogonale d'axe $(0,x)$ et de rapport $\frac{b}{a}$

Solution

On a: $\mathcal{C}(0,a): x^2 + y^2 = a^2$

Soit $M'(x',y')$ l'image de $M(x,y) \in (\mathcal{C})$ par $A((0x),(0y),\frac{b}{a})$

$\iff \overrightarrow{M'H} = \frac{b}{a}\overrightarrow{MH} \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{a}{b}y' \end{cases}$

En remplaçant dans le cercle $(\mathcal{C})$

On obtient: $x^2 + (\frac{a}{b}y)^2 = a^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to E$ Ellipse

b) Paramétrage d'une ellipse

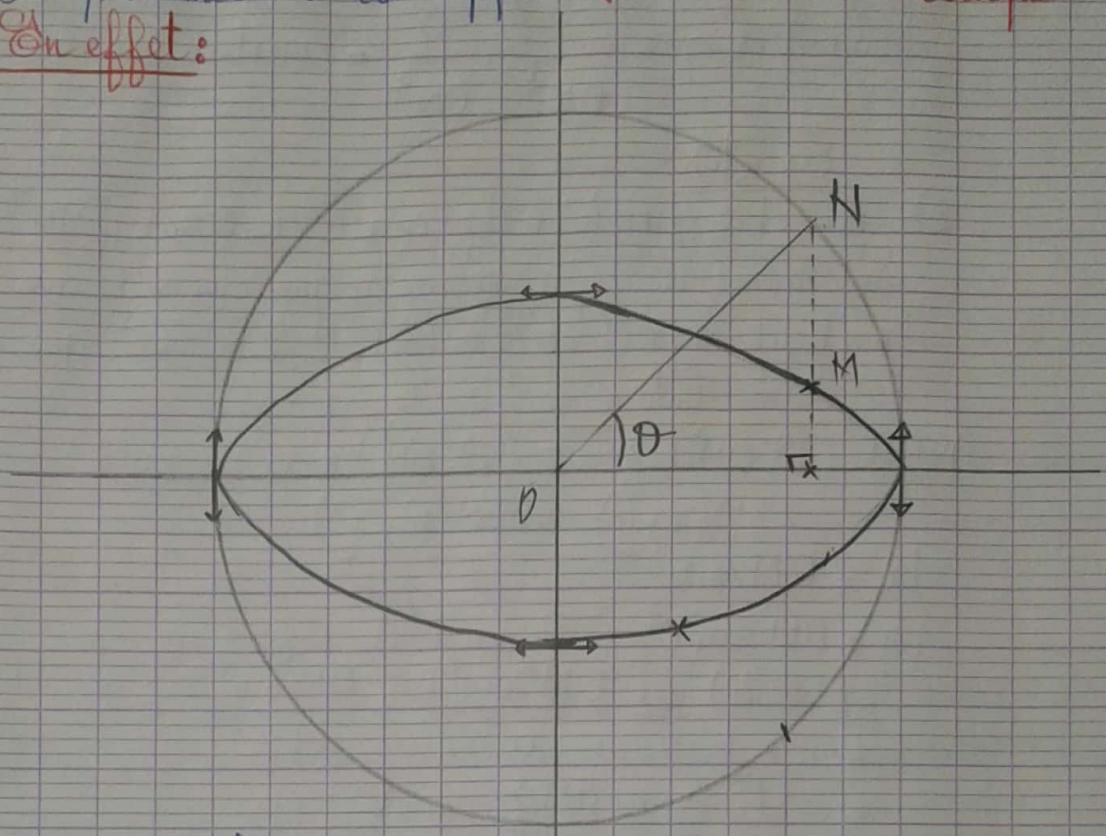
Une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$

a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Scanned by CamScanner

Le paramètre θ est appelé « Anomalie excentrique ».

En effet :



Soit $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \theta$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x_N}{ON} = \dfrac{x_N}{a} \Rightarrow x_N = a\cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{y_N}{ON} = \dfrac{y_N}{a} \Rightarrow y_N = a\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow N\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$$

or $M = f(N)$ avec $f = \mathcal{A}\left((Ox),(Oy),\dfrac{b}{a}\right)$

Ainsi $\begin{cases} x_M = x_N \\ y_M = \dfrac{b}{a} y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = a\cos\theta \\ y_M = \dfrac{b}{a} \times a\sin\theta \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$

la représentation paramétrique de l'ellipse (E)

Application

Soit $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $(a > b)$

Scanned by CamScanner

Soient M et N deux points appartenant tels que $(OM) \perp (ON)$

Démontrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} =$ constante

Solution

2) Soit H le projeté orthogonale de O sur [MN]

Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M et N varient sur l'ellipse (E) de telle sorte que $(OM) \perp (ON)$

Solution

1) Soit $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \alpha$

$M(x, y)$ et $N(x', y')$

$$\begin{cases} x = OM\cos\theta \\ y = OM\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow \frac{OM^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{OM^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b}\right)^2 \quad (1)$$

De même $\begin{cases} x' = ON\cos\alpha \\ y' = ON\sin\alpha \end{cases}$

Or $\alpha + \frac{\pi}{2} + \theta = \pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \pi = \alpha$

D'où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

Ainsi $\begin{cases} x' = -ON\sin\theta \\ y' = ON\cos\theta \end{cases}$

$N \in (E) \Leftrightarrow ON^2\left(\frac{\sin\theta}{a}\right)^2 + ON^2\left(\frac{\cos\theta}{b}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ON^2} = \left(\frac{\sin\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{b}\right)^2 \quad (2)$$

Après (1) et (2) : $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \frac{1}{b^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$

Ainsi $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = cte$

Scanned by CamScanner

2) Dans un triangle rectangle ABC en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC), en calculant deux fois l'aire du triangle ABC on peut montrer aisément que

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Application 2 Le 01/Février/2019

Un point M décrit une ellipse fixe $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a>b)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé

Déterminons le lieu géométrique du centre I du cercle inscrit de triangle MFF' avec F et F' les foyers de l'ellipse.

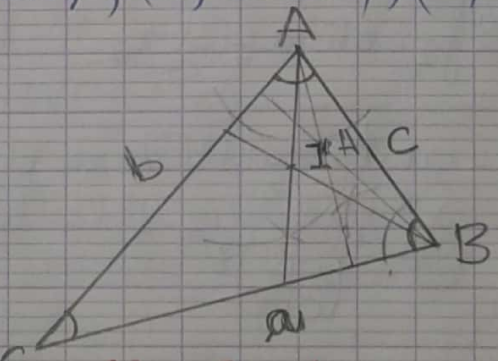
Rappel

Dans un triangle ABC

Le point de rencontre des bissectrices I, centre du cercle inscrit est le barycentre du système $\{(A;a),(B;b) \text{ et } (C;c)\}$

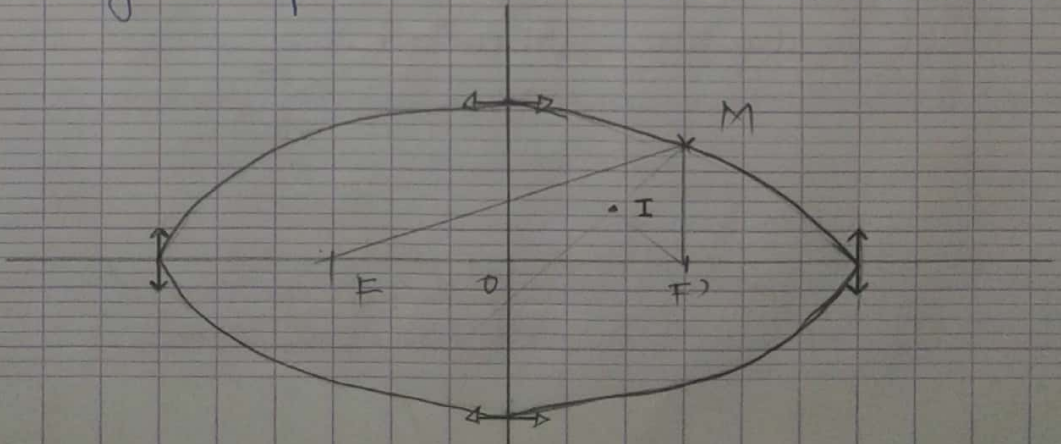
L'orthocentre est le barycentre du système

$\{(A;\tan\hat{A}),(B;\tan\hat{B}),(C;\tan\hat{C})\}$



Solution de l'application

Lieu géométrique de I centre du cercle inscrit au triangle MFF'



Scanned by CamScanner

On a $a>b$, $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$FF'=2c$, $MF=a-\frac{cx}{a}$ et $MF'=a+\frac{cx}{a}$

or I barycentre $\{(F,MF'),(M,FF'),(F',MF)\}$

$$x_I=\frac{x_F MF'+x_M FF'+x_{F'} MF}{MF'+FF'+MF}$$

$$y_I=\frac{y_F MF'+y_M FF'+y_{F'} MF}{MF'+FF'+MF}$$

or $M(x,y)$, $F(c,0)$; $F'(-c,0)$

Tout calcul fait, on obtient :

$$x_I=\frac{cx}{a} \text{ et } y_I=\frac{c}{a+c}y$$

Ainsi lorsque M décrit l'ellipse (E), on obtient

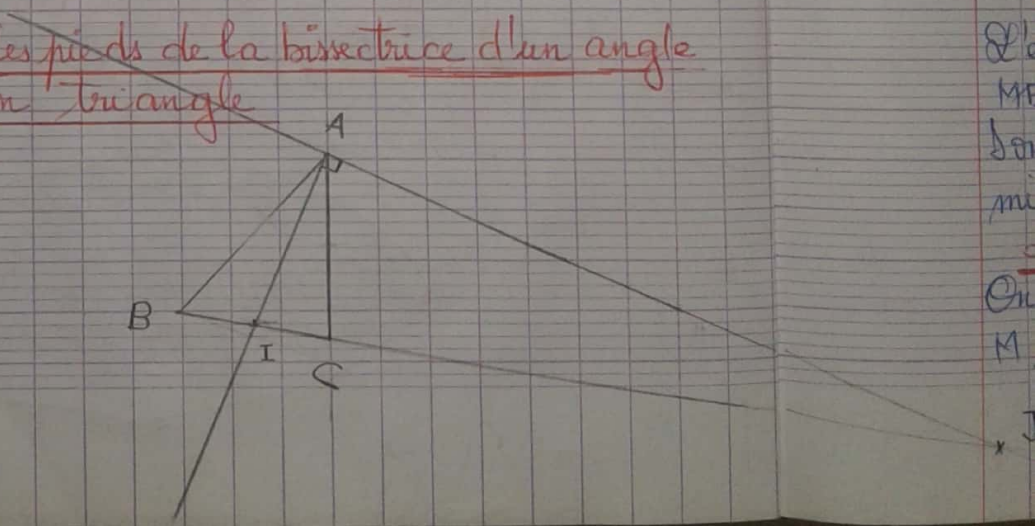
$$y=\frac{c+a}{c}y_I \text{ et } x=\frac{a}{c}x_I$$

En remplaçant dans (E), on obtient :

$(E'): \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{cb}{c+a}\right)^2}=1$, l'ellipse décrit par I.

Rappel

Propriétés des pieds de la bissectrice d'un angle dans un triangle



Scanned by CamScanner

I est le pieds de la bissectrice intérieur de $B\hat{A}C$
J est le pieds de la bissectrice extérieur de $B\hat{A}C$

On a : $\begin{cases} \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \text{ et } BI+IC=BC \\ \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC} \text{ et } JB-JC=BC \end{cases}$

Application 3

On considère l'ellipse $(E) : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>b)$ mobile de foyers F et F'.
Soit M un point (E) tels que la bissectrice intérieur de l'angle $F\hat{M}F'$ coupe $[FF']$ en un point N et $NF' = 2NF$
Déterminer le lieu geométrique du point M.

Solution

Lieu géométrique du point M
N'étant le pieds de la bissectrice de $F\hat{M}F'$ alors $\frac{NF}{NF'} = \frac{MF}{MF'}$
et $NF = 2NF$
donc $MF' = 2MF \Leftrightarrow (MF')^2 = 4(MF)^2$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MF'})^2 - (2\overrightarrow{MF})^2 = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MF'} - 2\overrightarrow{MF}) \cdot (\overrightarrow{MF'} + 2\overrightarrow{MF}) = 0$ (a)
Soit I barycentre du système $\{(F';1) \text{ et } (F;2)\}$
J barycentre du système $\{(F';1) \text{ et } (F;2)\}$

$\Rightarrow \begin{cases} MF' - 2\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MI} \\ MF' + 2\overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MJ} \end{cases}$

L'égalité (a) devient ainsi
$MF' \times 2\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MI} \cdot 3\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre O milieu de $[IJ]$ et de rayon $\frac{1}{2} IJ$

Application 4

On considère une ellipse mobile (E) de foyers F et F'
M un point de (E) tel que la tangente (T) en M à

J

Scanned by CamScanner

l'ellipse (E) coupe (FF') en N de manière que $NF' = 2NF$
Déterminer le lieu géométrique de M

Solution

Puisque la tangente en M à l'ellipse représente la bissectrice extérieur donc N est le pied de la bissectrice extérieur.

D'où $\frac{NF'}{NF} = \frac{MF'}{MF}$ & $NF' = 2NF$

Même raisonnement que l'application précédente

Courbe d'équation

Soit la courbe (C) d'équation : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

- Si $A \times B > 0$ alors (C) peut être une ellipse, un cercle ou l'ensemble vide.
- Si $A \times B < 0$ alors (C) peut être une hyperbole ou deux droites sécantes.
- Si $A \times B = 0$ alors (C) peut être une parabole, deux droites parallèles ou l'ensemble vide ou une droite

Scanned by CamScanner

Arithmétique : Le 15/02/2019

I) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$: Diviseurs multiples d'un entier

1) Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.
Dire que a divise b signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$. On écrit alors $a|b$
On dit aussi « a est diviseur de b »
« b est divisible par a »
« b est multiple de a »

Exemple : $-3|6$ car $6 = (-2)(-3)$
$2|-6$ car $-6 = (-3)(+2)$

Pour tout entier relatif n, $n+1$ divise n^2-1
En effet : $(n-1) \in \mathbb{Z}$ et $n^2-1 = (n+1)(n-1)$

Remarques :

- Tout entier relatif a divise 0 car $0 = a \times 0$
mais 0 ne divise aucun entier relatif $a \neq 0$
- 1 et -1 divisent tout entier relatif a
En effet : $a = a \times 1$ et $a = (-a)(-1)$
- Soit $a \in \mathbb{Z}^*$, l'ensemble des diviseurs de a est noté
$D(a)$ = ensemble fini non vide

Exemple : $D(6) = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

- L'ensemble des multiples de $a \in \mathbb{Z}^*$ est noté $a\mathbb{Z}$
$a\mathbb{Z}$ est un ensemble infinie
$a\mathbb{Z} = \{\ldots, -4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots\}$
L'ensemble $a\mathbb{Z}$ contient une infinité d'éléments
avec $a \in \mathbb{Z}^*$, et $a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$

2) Propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Propriété 1 : Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$

En effet : Si $a|b$ et $b|c$ alors il existe des

Scanned by CamScanner

entiers relatifs k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'b$
donc $c = kk'b$ or $kk' \in \mathbb{Z}$ donc $a|c$

Exemple :
Comme $2|4$ et $4|12$ alors $2|-12$

Propriété 2 : Si $a|b$ et $a|c$ alors pour tout α et β appartenant a $\mathbb{Z}$ alors $a|\alpha b + \beta c$.

En effet : $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = ka \\ a|c \Rightarrow c = k'a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha b = \alpha ka \\ \beta c = \beta k'a \end{cases}$

La sommation membre à membre donne :
$\alpha b + \beta c = a(\alpha k + \beta k')$
or $(\alpha k, \beta k') \in \mathbb{Z}^2$ donc $(\alpha k + \beta k') \in \mathbb{Z}$
Ainsi a divisive $\alpha b + \beta c$

Attention : Si $a|\alpha b + \beta c$ alors a ne divise pas forcement b et c

En effet : $2|2\times3 + 4\times5$ mais 2 ne divise ni 3 ni 5.

- Si $a|b$ alors $ka|kb$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Si $a|b$ alors $a|bc$ $\forall c \in \mathbb{Z}$

Propriété 3 : Si $a|b$ et $b \neq 0$ alors $|a| \leq |b|$
Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = \pm b$

En effet :
Si $a|b$ et $b \neq 0$ alors $\exists$ un $k \in \mathbb{Z}^* / b = ka$
$\Leftrightarrow |b| = |k| \times |a|$ or $|k| \geq 1$
donc $|b| \geq |a|$
De plus si $a|b$ et $b|a$ alors $|a| \leq |b|$ et $|b| \leq |a|$
donc $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

Applications :

Application 1

1) Démontrer que $a|b$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}$
$a|(b - ka)$

Scanned by CamScanner

2) Déterminer les entiers relatifs a tels que $(a-5)/(a+7)$

Solution

1) Supposons que a/b

$a/b \Leftrightarrow b = ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$

or a/a donc $a/b-ka$ (1)

Réciproquement prenons $a/b-ka$

$a/b-ka \Leftrightarrow b-ka = k'a$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow b = a(k+k')$ or $(k+k') \in \mathbb{Z}$

donc a/b (2)

D'après (1) et (2) : $a/b \Leftrightarrow a/b-ka$

2) Les entiers relatifs a vérifiant $(a-5)/(a+7)$

$\begin{cases} a-5/a+7 \\ a-5/a-5 \end{cases} \Rightarrow a-5/a+7-a+5 \Leftrightarrow a-5/12$

or $D(12) = \{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$

donc $a \in \{-7,-1,1,2,3,4,6,7,8,9,11,17\}$

Applications 2 :

Déterminer les entiers naturels n tels que $n-1$ divise $n+3$

Solution

On a : $\begin{cases} n-1/n+3 \\ n-1/n-1 \end{cases} \Rightarrow n-1/n+3-n+1 \Leftrightarrow n-1/4$

or $D(4) = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ et $n \in \mathbb{N}$

alors $n = \{0,2,3,5\}$

Application 3

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2-y^2=13$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x^3+xy-11=0$

Solution

1) Résolution de $x^2-y^2=13$ dans $\mathbb{N}^2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)=13 \Rightarrow \begin{matrix} x-y/13 \\ x+y/13 \end{matrix}$

or $D(13) = \{-13,-1,1,13\}$

Scanned by CamScanner

D'où $\begin{cases} x-y=13 \\ x+y=1 \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=13 \end{cases}$ (2) ou $\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ (3) ou $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-13 \end{cases}$ (4)

Comme $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ alors

Les systèmes 3 et 4 sont absurdes

Ainsi dans (1) : $2x = 14 \Rightarrow x = 7$ et $y = -6$ absurde

Dans (2) : $2x = 14 \Rightarrow x = 7$ et $y = 6$

Donc $S_{\mathbb{N}} = \{(7,6)\}$

2) Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de $2x^3 + xy = 11$

$\Leftrightarrow x(2x^2 + y) = 11$

$\Rightarrow x \mid 11$ et $2x^2 + y \mid 11$

Or $D(11) = \{-11, -1, 1, 11\}$

D'où les systèmes :

$\begin{cases} 2x^2+y=-11 \\ x=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+y=-1 \\ x=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+y=-1 \\ x=11 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+y=11 \\ x=-1 \end{cases}$

La résolution donne :

$S_{\mathbb{Z}} = \{(-11,-243),(-1,-13),(11,-241);(1,9)\}$

Application 4

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29

Solution

Soit $\alpha_n = 2^{5n+1} + 3^{n+3}$

Pour $n=0$ $\alpha_0 = 2 + 27 = 29$ or $29 \mid 29$

donc α_0 est un multiple de 29 (1)

Supposons que $29 \mid \alpha_n$ et démontrons que $29 \mid \alpha_{n+1}$

Comme $\begin{cases} 29 \mid \alpha_n \\ 29 \mid 29 \end{cases}$ alors $29 \mid$

On a : $29 \mid \alpha_n \Rightarrow 2^{5n+1} + 3^{n+3} = 29k$

$\Leftrightarrow 2^{5n+1} = 29k - 3^{n+3}$

Donc $\alpha_{n+1} = 2^{5n} \times 2^{5n+1} + 3 \times 3^{n+3}$

$= 32(29k - 3^{n+3}) + 3 \times 3^{n+3}$

Scanned by CamScanner

$\alpha_{n+1} = 32k \times 29 - 32 \times 3^{n+3} + 3 \times 3^{n+3}$

$= 32k \times 29 - 29 \times 3^{n+3}$

$= 29(32k - 3^{n+3})$ or $32k - 3^{n+3} \in \mathbb{Z}$

Donc $29 / \alpha_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (2)

D'après (1) et (2) $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est un multiple de 29

II) Division euclidienne

1) Activité

a) Écrire la division euclidienne de 12 par 5

b) Dans chacun des cas ci-dessous, trouver deux entiers relatifs q et r tels que $0 \leqslant r < 5$.

i) $12 = -5q + r$

ii) $-12 = 5q + r$

iii) $-12 = -5q + r$

Solution

a) Division euclidienne de 12 par 5

$12 = 5 \times 2 + 2$

b) Détermination de q et r tels que $0 \leqslant r < 5$ dans chaque cas

i) $12 = -5 \times (-2) + 2 \Rightarrow q = -2$ et $r = 2$

ii) $-12 = 5 \times (-3) + 3 \Rightarrow q = -3$ et $r = 3$

iii) $-12 = -5(3) + 3 \Rightarrow q = 3$ et $r = 3$

2) Propriété d'Archimède.

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul alors il existe un entier naturel n tel que $n \times b \geqslant a$

Preuve:

Si $a = 0$ alors $n \geqslant 1$ convient

Si $a \neq 0$, comme $\left.\begin{matrix} b \geqslant 1 \\ ab > a \end{matrix}\right.$ d'où $n = a$ convient

Conséquence:

Etant donnés deux entiers naturels a et b $(b \neq 0)$, il

Scanned by CamScanner

existe un entier naturel q tel que :

$$bq \leqslant a < b(q+1)$$

3) Théorème :

Soit a un entier naturel a et b un entier naturel non nul alors il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

Démonstration

Existence :

D'après le résultat précédent, il existe $q \in \mathbb{N}$,

$qb \leqslant a < (q+1)b \Leftrightarrow 0 \leqslant a - bq < b$

En posant $r = a - bq$ on obtient $a = bq + r$

avec $0 \leqslant r < b$

Unicité

Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples tels que

$a = bq_1 + r_1$ et $a = bq_2 + r_2$

avec $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$

Ainsi $\begin{cases} 0 \leqslant r_1 < b \\ -b \leqslant -r_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -b \leqslant r_1 - r_2 < b \quad (\alpha)$

$\begin{cases} r_1 = a - bq_1 \\ r_2 = a - bq_2 \end{cases} \Rightarrow r_1 r_2 = -bq_1 + bq_2 = b(q_2 - q_1) \quad (\beta)$

En remplaçant l'expression de $r_1 - r_2$ dans (α) on obtient $-b < b(q_2 - q_1) < b \Leftrightarrow -1 < q_2 - q_1 < 1$

Or entre -1 et 1, on a strictement comme entier naturel 0 donc $q_2 - q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2$

De plus $r_1 - r_2 = b \times 0 \Rightarrow r_1 = r_2$

D'où l'unicité du couple (q, r)

Cas général

Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul alors il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$

Scanned by CamScanner

Application 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Quel est le reste dans la division euclidienne de:

a) $(n+2)^2$ par $n+4$? b) $2n^2+n$ par $n+1$?

Solution

Reste r des divisions euclidienne:

a) $(n+2)^2$ par $n+4$

$(n+2)^2 = n^2+4n+4 = n(n+4)+4$ or $0 \leqslant 4 < n+4$

Donc $r=4$

b) $2n^2+n$ par $n+1$

$2n^2+n = n(2n+1) = n(n+n+1) = n(n+1)+n^2$

$= n(n+1)+n^2+1-1 = (n+1)n+1+(n+1)(n-1)$

$= (n+1)(n+n-1)+1$

$= (n+1)(2n-1)+1$ or $0 \leqslant 1 < n+1$

Donc $r=1$

Application 2: Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminer le reste de la division euclidienne de $7n+15$ par $3n+2$

Le 18/Février/2018

Application 3:

On considère la fraction $q_n = \frac{n+19}{n-7}$ avec $n>7$ et $n \in \mathbb{N}$

1) Comment choisir n pour que q_n soit simplifiable?

2) Déterminer n pour que q_n soit égale à un entier naturel.

Solution : Application 2

Détermination du reste de la division euclidienne de $7n+15$ par $3n+2$

$7n+15$	$3n+2$
$n+11$	2

Posons $0 \leqslant n+11 < 3n+2$

$\Rightarrow n > \frac{9}{2}$

→ Si $n \geqslant 5$ alors $r = n+11$

→ Si $n \in [1,4]$ alors $r = \{2, 5, 3, 1\}$

Scanned by CamScanner

Solution de l'Application 3

1) L'ensemble des entiers naturels tel que q_n simplifiable

On a: $q_n = \frac{n+19}{n-7} = \frac{n-7+26}{n-7} = 1 + \frac{26}{n-7}$

donc q_n est simplifiable si 26 et $n-7$ ont un diviseur commun distinct de 1

$D(26) = \{-26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26\}$

Pour tout $n > 7$, $n-7 > 0$

donc $2 | n-7$ $13 | n-7$ et $26 | n-7$

Ainsi q_n est simplifiable si

$n = 2k+7$ ou $n = 13k+7$ ou $n = 26k+7$

avec $k \in \mathbb{N}^*$

2) L'ensemble des entiers naturels tel que q_n soit un entier naturel.

On a: $q_n = 1 + \frac{26}{n-7} \in \mathbb{N}^*$ si $n-7 | 26$

et $n-7 > 0$ donc $n-7 = 1$ $n-7 = 2$ $n-7 = 13$ $n-7 = 26$

donc $n \in \{8, 9, 20, 33\}$

III) Plus grand commun diviseur (PGCD)

1) Diviseurs communs à deux entiers naturels

a) Activité

i) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 18 et 24

ii) On note $D(18,24)$, l'ensemble des diviseurs communs à 18 et 24.

Déterminer $D(18,24)$ puis $PGCD(18,24)$

Correction

c) L'ensemble des diviseurs de 18 et 24

$D(18) = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D(24) = \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ii) Détermination de $D(18,24)$

Scanned by CamScanner

D'après la question précédente :
$D(18,24) = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$
Ainsi le plus grand diviseur commun est :
$PGCD(18,24) = 6$

b) Définition

Soient a et b deux entiers relatif, on appelle le plus grand diviseur commun de a et b, le plus grand élément de l'ensemble $D(a,b)$.
On le note : $PGCD(a,b)$ ou $a \wedge b$

c) Conséquence

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
. $PGCD(a,b) \leqslant a$ et $PGCD(a,b) \leqslant b$
. Si $b|a$ alors $PGCD(a,b) = b$

En effet :

On sait que $\begin{cases} b|b \\ b|a \end{cases}$ d'où b est un diviseur commun à a et b
Or $PGCD(a,b) \leqslant b$ donc $PGCD(a,b) = b$

2) Lemme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Si des entiers naturels q et r avec $r \neq 0$ sont tels que $a = b \times q + r$ alors $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$

En effet

Soit $d = D(a,b) = PGCD(a,b)$
Puisque $a = b \times q + r \Leftrightarrow r = a - b \times q$ donc $d|r$
Ainsi pour $d = D(a,b)$ alors $d = D(b,r)$
Réciproquement : Soient $d' = D(b,r) = PGCD(b,r)$
Comme $a = bq + r$ d'où $d'|a$
Ainsi pour $d'(b,r)$ alors $d'(a,b)$
Conclusion : a et b ont les mêmes diviseurs communs que b et r donc $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$.

Scanned by CamScanner

3) Calcul du PGCD : Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non-nuls avec $a > b$. Pour déterminer le PGCD(a,b), on utilise l'algorithme d'Euclide qui découle du lemme précédent.

Opération	Reste	Commentaire
On divise a par b	r_0	$a < r_0 < b$ et $PGCD(a,b) = PGCD(b, r_0)$
Si $r_0 \neq 0$, on divise b par r_0	r_1	$0 < r_1 < r_0$ $PGCD(b, r_0) = PGCD(r_0, r_1)$
si $r_1 \neq 0$, on divise r_0 par r_1	r_2	$0 \leqslant r_2 < r_1$ $PGCD(r_0, r_1) = PGCD(r_1, r_2)$
Si $r_n \neq 0$ on divise r_{n-1} par r_n	0	$PGCD(a,b) = r_n$

Exemple :

Déterminons le PGCD(258, 96) en utilisant l'Algorithme d'Euclide

258 | 96	96 | 66	66 | 30	30 | 6
66 | 2	30 | 1	6 | 2	0 | 5

Donc PGCD(258, 96) = 6

Déterminons PGCD(1636, 1158)

1636 | 1158	1158 | 498	498 | 202	
498 | 1	202 | 2	14 | 3	
202 | 74	74 | 54	54 | 20	20 | 14
54 | 2	20 | 1	14 | 2	6 | 1
14 | 6	6 | 2		
2 | 2	0 | 3		

Donc PGCD(1636, 1158) = 2

Propriété :

Lorsque b ne divise pas a, le PGCD(a,b) est au dernier reste non nul obtient par l'algorithme d'Euclide.

Application :

Si on divise 4373 et 826 par un même nombre entier naturel non nul n, on obtient respectivement 8 et 7 pour reste. Quel est ce nombre n.

Solution

Déterminons n

On a : $4373 = nq + 8 \Rightarrow nq = 4365$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, $n > 7$ et $n > 8$

$826 = nq' + 7 \Rightarrow nq' = 819$

Montrons que $n = PGCD(4365, 819)$

4365 | 819	819 | 270	270 | 9
270 | 5	9 | 3	0 | 30

Donc PGCD(4365, 819) = 9 or $9 > 8$, $9 > 7$

donc $n = 9$,

4) Propriétés du PGCD entiers premiers entre eux

a) Propriétés du PGCD

Si on multiplie deux entiers naturels non-nuls a et b par un même entier naturel k, leur PGCD est multiplié par k.

Scanned by CamScanner

C'est à dire $PGCD(ka, kb) = PGCD(a, b)$

On effet :

Si $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

$ka = kbq + kr$; $0 \leq kr < kb$

donc kr est le reste de la division de ka par kb

d'après l'algorithme d'Euclide

$PGCD(ka; kb) = PGCD(kb, kr_0) = \dots = kr_n$

Or $r_n = PGCD(a, b)$ donc :

$PGCD(ka, kb) = k\ PGCD(a, b)$

Exemple :

$PGCD(12000, 32000) = 1000\ PGCD(12, 32)$

$= 1000 \times 4 = 4000$

b) Conséquence :

Si k est un entier naturel non-nul

alors $PGCD\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k} PGCD(a, b)$

On effet :

$a = k \times \frac{a}{k}$ et $b = k \times \frac{b}{k}$

donc $PGCD\left(k \times \frac{a}{k}, k \times \frac{b}{k}\right) = k\ PGCD\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right)$

* **Extension du PGCD aux entiers relatifs**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls

$PGCD(a, b) = PGCD(|a|, |b|)$

$PGCD(ka, kb) = |k|\ PGCD(a, b)$

c) Nombres premiers entre eux

× **Définition**

Dire que deux nombres entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux signifie que

$PGCD(a, b) = 1$

Scanned by CamScanner

Exemple : Montrons que 35 et 26 sont des nombres premiers entre eux

35 | 26	26 | 9	9 | 8	8 | 1
9 | 1	8 | 2	1 | 1	1 | 8

Comme PGCD(26,35) = 1 alors 35 et 26 sont des nombres premiers entre eux.

* **Propriété**

Soient a et b deux entiers relatifs non-nuls
Si d = PGCD(a,b) alors il existe des entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que a = da' et b = db'

En effet :

On a : d = PGCD(a,b) $\Rightarrow$ d|a et d|b
Donc il existe deux entiers relatifs a' et b' tel que
a = da' et b = db'
Ainsi PGCD(a,b) = PGCD(da', db') = d PGCD(a', b') = d
donc PGCD(a', b') = 1
Par conséquent a' et b' sont des nombres premiers entre eux.

Application 2 :

Soient m et n deux entiers naturels non-nuls
Quel est le PGCD(mn ; 2mn + n)

Solution

Déterminons PGCD(mn, 2mn+n)
PGCD(mn ; 2mn+n) = PGCD(mn ; n(2m+1))
= n PGCD(m ; 2m+1)

2m+1 | m	m | 1
-2m | 2	0 | m
1	

Donc PGCD(m ; 2m+1) = 1
Par conséquent PGCD(mn ; 2mn+n) = n

Application 3 :

Scanned by CamScanner

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que

$$\begin{cases} 1452 = ab \\ PGCD(a,b) = 11 \end{cases}$$

Solution : Détermination de l'ensemble des couples (a,b)

On a $PGCD(a,b) = 11$ donc il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 11a'$ et $b = 11b'$

Ainsi $ab = 121a'b' \Rightarrow a'b' = 1452 = 121a'b'$

$$a'b' = 12$$

donc $\begin{cases} a'b' = 12 = 4 \times 3 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$

Or $\begin{cases} D_{\mathbb{N}}(4) = \{1, 2, 4\} \\ D_{\mathbb{N}}(3) = \{1, 3\} \end{cases} \Rightarrow PGCD(3,4) = 1$

Par identification $a' = 3$ et $b' = 4$

ou $b' = 3$ et $a' = 4$

D'où $(33, 44)$ ou $(44, 33)$

De plus $ab' = 12 = 12 \times 1$

$\Rightarrow a' = 12$ et $b' = 1$ ou $a' = 1$ ou $b' = 12$

donc $(132, 11)$ ou $(11, 132)$

IV) Congruences dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non-nul.

On dit que a et b sont congrus modulo n, lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note $a \equiv b$ (modulo n) ou $a \equiv b\ [n]$

Exemple : $2003 = 3\ [10]$

$57 = 1\ [7]$

$-6 = 1\ [7]$

$-12 = 3\ [5]$

Scanned by CamScanner

2) Conséquences

- $a \equiv a [n]$
- $a \equiv b [n] \iff b \equiv a [n]$
- Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$ alors $a \equiv c [n]$
- $n | a \iff a \equiv 0 [n]$

3) Propriété fondamentale

Soient a et b deux entiers relatifs et $n \in \mathbb{N}^*$

Dire que a et b ont même reste dans la division euclidienne par n équivaut à dire que $a-b$ est un multiple de n.

En effet :

On a : $a \mid n$ $\quad r \mid q$ $\iff a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$

$b \mid n$ $\quad r' \mid q'$ $\iff b = nq' + r'$ avec $0 \leq r' < n$

La différence entre a et b donne :

$a - b = n(q - q') + r - r'$ et $-n < r - r' < n$

Supposons que $r = r'$

On a : $a - b = (q - q')n$ où $(q - q') \in \mathbb{Z}$

Donc $n | a - b$ (a)

Réciproquement : Supposons que $n | a - b$

Ainsi $n | a - b \iff$ il existe un réel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$a - b = kn$ où $a - b = n(q - q') + r - r'$

Donc $kn = n(q - q') + r - r'$

$\iff r - r' = n(-q + q' + k)$

Puisque $(q' - q + k) \in \mathbb{Z}$ donc $r - r' | n$ $n | r - r'$

Donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$, tel que $r - r' = k'n$

or $-n < r - r' < n \iff -n < k'n < n$

$\iff -1 < k' < 1 \Rightarrow k = 0$

Alors $r - r' = 0 \Rightarrow r - r'$ (b)

D'après (a) et (b), a et b ont même reste dans la division euclidienne par $n \iff a - b$ multiple de n.

Scanned by CamScanner

Remarque

• Dire que r est le reste de a dans la division euclidienne par n équivaut : $a \equiv r\ [n]$ et $0 \leq r < n$

• $a \equiv b\ [n] \iff a \equiv b\ [-n]$

4) Compatibilité avec les opérations

Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ Alors :

i) $a+c \equiv (b+d)\ [n]$ et $a-c \equiv (b-d)\ [n]$

ii) $ac \equiv bd\ [n]$

iii) Pour tout entier naturel p ; $a^p = b^p\ [n]$

(Démontrer par récurrence) avec $n \geq 2$

Application

Déterminer les restes successifs dans la division euclidienne par 7 des nombres 50^{100}, 100, 100^3 et $50^{100} + 100^{100}$

Solution :

× $50 - 1 = 49 \Rightarrow 50 \equiv 1\ [7]$

$\Leftrightarrow 50^{100} \equiv 1\ [7]$

Le reste est 1

× $100 \mid 7$; $2 \mid 14$ $\Rightarrow 100 \equiv 2\ [7]$ $\Rightarrow$ le reste est 2

× $100 \equiv 2\ [7] \Leftrightarrow 100^3 \equiv 2^3\ [7]$ et $2^3 \equiv 1\ [7]$

donc $100^3 \equiv 1\ [7]$

$\Rightarrow$ le reste est 1

× $100^{100} = 100^{3\times 33+1} = 100^{3\times 33} \times 100$

or $100^3 \equiv 1\ [7] \Rightarrow 100^{3\times 33} \equiv 1\ [7]$

On a : $\begin{cases} 100^{3\times 33} \equiv 1\ [7] \\ 100 \equiv 2\ [7] \end{cases}$

$\Rightarrow 100 \times 100^{3\times 33} \equiv 2\ [7]$

$\Leftrightarrow 100^{100} \equiv 2\ [7]$

Scanned by CamScanner

Ainsi $\begin{cases} 50^{100} \equiv 1 [7] \\ 100^{100} \equiv 2 [7] \end{cases} \Rightarrow 50^{100} + 100^{100} \equiv 3 [7]$
$\Rightarrow$ le reste est 3

Application 2

Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{41} par 7

Resolution

Détermination de r

$23 \equiv 2 [7] \Rightarrow 23^2 \equiv 2^2 [7]$ et $23^3 \equiv 2^3 [7]$

or $2^3 \equiv 1 [7]$ donc $23^3 \equiv 1 [7]$

De plus $23^{41} = 23^{3 \times 13 + 2} = (23^3)^{13} \times 23^2$

Ainsi $\begin{cases} 23^3 \equiv 1 [7] \\ 23^2 \equiv 4 [7] \end{cases} \Rightarrow 23^{13 \times 3} \equiv 1 [7]$

Donc $23^{13 \times 3} + 23^2 = 1 \times 4 [7]$ D'où $23^{41} \equiv 4 [7]$

Ainsi le reste est $r = 4$

Application 3:

Déterminer Demontrer que $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003}$ est divisible par 5

Résolution

Demonstration

Remarquons que $\begin{cases} 4+1 = 5 \\ 3+2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{2003} \equiv -1^{2003} [5] \\ 3^{2003} \equiv -2^{2003} [5] \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} 1^{2003} \equiv 1^{2003} [5] \\ 2^{2003} \equiv 2^{2003} [5] \\ 3^{2003} \equiv -2^{2003} [5] \\ 4^{2003} \equiv -1^{2003} [5] \end{cases}$

La sommation membre à membre donne

$1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} \equiv 0 [5]$

Donc la somme $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003}$ est divisible par 5

Application

1) Verifier que $1000 \equiv 1 [87]$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$

Scanned by CamScanner

$10^{3n} \equiv 1 [37]$

2) Déduire ainsi le reste de la division euclidienne de 100 1037 par 37

Résolution

1) Vérifions que $1000 \equiv 1 [37]$

Etant donné que $1000 - 1 = 37 \times 27$

donc $1000 \equiv 1 [37]$

Déduction de $\forall n \in \mathbb{N}$: $10^{3n} \equiv 1 [37]$

Pour $n = 1$, $10^3 \equiv 1 [37]$

D'après la réponse précédente, $1000 \equiv 1 [7]$ vraie

Supposons que $10^{3n} \equiv 1 [37]$

Démontrons que $10^{3n+1} \equiv 1 [37]$

On a : $10^{3n+1} = 10^{3n} \times 10$

Ainsi $10^{3n} \equiv 1 [37] \Rightarrow 10^{3n+1} \equiv 1 [37]$

$10 \equiv 1 [37]$

Donc on peut dire que $10^{3n} \equiv 1 [37]$

2) Détermination du reste de la division euclidienne de 100 1037 par 37

On a : $100\,1037 = 1000\,000 + 1000 + 37$

$= 10^6 + 10^3 + 37$

Or $\begin{cases} 10^6 \equiv 10^{3\times 2} [37] \equiv 1 [37] \\ 10^3 \equiv 1 [37] \\ 37 \equiv 0 [37] \end{cases}$

La sommation membre à membre donne :

$100\,1037 \equiv 2 [37]$

Ainsi le reste de la division euclidienne est 2

Application

1) Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11

2) Pour quelles valeurs de n entier naturel $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Scanned by CamScanner

Résolution

1) Montrons que $67^{89}-1$ est un multiple de 11

Remarquons que $67 = 66+1 \Rightarrow 67 \equiv 1[7] \Rightarrow 67^{89} \equiv 1[7]$

$67^{89} - 1 \equiv 0[11]$

Donc $67^{89}-1$ est un multiple de 11

2) Détermination des valeurs de n entiers naturelles

Constatons que $5+1 = 2\times 3 \Rightarrow 5 \equiv -1[3]$

$\Leftrightarrow 5^n = (-1)^n[3]$ et $5^{2n} = 1[3]$

De plus $1 = 1[3]$

La sommation membre à membre de ces égalités donne :

$5^{2n} + 5^n + 1 \equiv (1 + 1 + (-1)^n)[3]$

Or pour que $2+(-1)^n$ soit un multiple de 3, il faut que n soit un entier pair

Donc l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^{2n}+5^n+1$ soit un multiple de 3 est l'ensemble des entiers naturels pairs avec $n \neq 0$

V) Nombre premiers

1) Définition

Soit p un entier relatif distinct de 1 et -1.

On dit que p est un nombre premier s'il a seulement quatre diviseurs -1, 1, p et $-p$

Exemples : 3, 7, 19, 13, -2, 5

NB : Dans la suite, on se limitera aux entiers naturels

Remarques

* 0 n'est pas un nombre premier car il admet une infinité de diviseurs dans $\mathbb{N}$
* 1 n'est pas un nombre premier car il a un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: lui même.
* 2 est le seul nombre premier pair.

2) Reconnaissance d'un nombre premier.

Scanned by CamScanner

a) Lemme : Le 23 / Février / 2019

Tout entier naturel non premier distinct de 1 admet au moins un diviseur premier : son plus petit diviseur dans $\mathbb{N}$ autre que 1

En effet :

Soit p le plus petit des diviseurs de n supérieurs à 1

Supposons que p n'est pas un nombre premier

Comme p n'est pas premier alors il admet un diviseur d tel que $1 < d < p$

On a : donc d/p or $p/n \Rightarrow d/n$

Ce qui est impossible car p est le plus petit diviseurs de n strictement supérieur à 1

Donc p est un nombre premier.

b) Théorème

Soit n un entier naturel supérieur à 2.

Si n n'est divisible par aucun entier p telle que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ alors n est un nombre premier.

En effet :

Supposons que n n'est pas un nombre premier. Le Lemme permet d'affirmer qu'il existe un diviseur premier p qui est son plus petit diviseur supérieur à 1

Ainsi p/n alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = qp$

avec $1 < p < q \Leftrightarrow p^2 < qp$

or $n = pq$ donc $p^2 < n \Rightarrow \sqrt{n} > p$

Par contraposition si n n'est pas premier divisible par aucun des nombres premiers p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ alors n est premier

Exemple :

Montrons que 131 est un nombre premier

Indication (Il faut montrer 131 n'a pas de

Scanned by CamScanner

diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{131}$

Résolution :

Remarquons que $\sqrt{131} = 11,44$ et que $11 \leq \sqrt{131} \leq 12$

Puisque les nombres premiers inférieur ou égale à 11 $(2, 3, 5, 7, 11)$ ne divisent pas 131 donc 131 est un nombre premier.

Remarque

Il existe une infinité de nombres premiers

En effet :

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

Soit $a = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n + 1$ donc $a \neq 1$

Ainsi il admet au moins premier p_i

Donc p_i est l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots p_n$

On en déduit que p divise $n - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$

c'est à dire 1

Ce qui est contradictoire avec le fait que p est premier

Il existe donc une infinité de nombre premiers.

3) Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entiers naturels n non premiers distinct de 0 et 1 se décompose de façon unique sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

avec p_i des nombres premiers et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$

On note $$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Exemple :

Décomposition de 432 et 4312 en produit de facteur premier.

432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3

Donc $432 = 2^5 \times 3^2$

Scanned by CamScanner

Application

1) Décomposer 484 en produit de facteurs premiers et en déduire tous ses diviseurs

2) Soient x et y deux entiers naturels non-nuls

a) Démontrer que x+y et x-y ont la même parité

b) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = 484$

Résolution

1) Décomposition de 484

484	2
242	2
121	11
11	11
1	

$\Rightarrow 484 = 2^2 \times 11^2$

Les diviseurs de 484 sont donc

$D(484) = \{2, 4, 11, 121, 22, 44, 1, 242\}$

2-a) Démontrons que x+y et x-y ont même parité

Application Le 26 Janvier 2018

Détermination du PPCM des nombre suivants:

$A = 228 = 2^2 \times 3 \times 19$

$B = 5^2 \times 7 \times 19 = 3325$

$\Rightarrow PPCM(A,B) = 2^2 \times 3 \times 19 \times 7 \times 5^2$

$= 39900$

$C = 924 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 7$

$D = 333 = 2^2 \times 37$

$\Rightarrow PPCM(C,D) = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 37$

$= 102564$

VI) PPCM (Plus Petit Commun multiple)

1) Définition

Soient a et b deux entiers naturels non-nuls.

Le plus petit multiple strictement positive comme à a et b est le PPCM.

On le note PPCM(a, b)

2) Conséquences

- Le $PPCM(a,b) \geq max(a;b)$

Scanned by CamScanner

- Pour tout m multiple comme de a et b
$$PPCM(a,b) \leq |m|$$
- Si $b|a$ alors $PPCM(a,b) = a$
- $PPCM(1,a) = a$
$PPCM(a,a) = a$

3) Propriétés

• Propriété 1

Soient a et b deux entiers naturels non nuls
Si $PPCM(a,b) = m$ alors, tout multiple commun à a et b est un multiple de m.

En effet :

Soit $m = PPCM(a,b) \Leftrightarrow m$ un multiple de a et b
De plus, tout multiple de m est un multiple commun de a et b
Soit M un multiple commun à a et b
La division euclidienne de M par m donne :

$$\begin{array}{l|l} M & m \\ r & q \end{array} \quad \Leftrightarrow M = mq + r \text{ avec } 0 \leq r < m$$

Etant donné que $a|M$, $b|M$, $a|m$ et $b|m$
donc $a|M - mq$ et $b|M - mq$ avec $q \in \mathbb{Z}$
D'où $a|r$ et $b|r \Rightarrow r$ est un multiple comme de a et b tels que $0 \leq r < m$
Or cela n'est possible que si $r = 0 \Leftrightarrow M = mq$
Ainsi M est multiple de m

Conclusion : Tout multiple de m avec $PPCM(a,b) = m$ est un multiple commun de a et b.

Remarque :

La définition du PPCM s'étend aux entiers relatif non nuls.

$$PPCM(a,b) = PPCM(|a|, |b|)$$

car $|a|$ et $|b|$ sont des entiers non-nuls

Scanned by CamScanner

• Propriété 2

Soient a, b, k des entiers naturels non-nuls

1) $PPCM(ka, kb) = k\ PPCM(a, b)$

2) Si k est diviseur commun à a et b alors

$$PPCM\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k} PPCM(a, b)$$

En effet

Soit $m = PPCM(a, b)$ alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $p' \in \mathbb{N}$ tel que $m = pa$ et $m = p'b$

$\Leftrightarrow km = kpa$ et $km = kp'b$

Donc km est un multiple commun à ka et kb

d'où $km \geqslant PPCM(ka; kb)$

or $m = PPCM(a, b)$

$\Rightarrow k\,PPCM(a, b) \geqslant PPCM(ka, kb)$ (1)

Soit $M = PPCM(ka, kb)$ alors il existe $(q, q') \in \mathbb{N}^2$ tel que $M = qka$ et $M = q'kb$

$\Leftrightarrow \frac{M}{k} = qa$ et $\frac{M}{k} = q'b$

Donc $\frac{M}{k}$ est un multiple commun à a et b

$\Leftrightarrow \frac{M}{k} \geqslant PPCM(a, b)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k} PPCM(ka, kb) \geqslant PPCM(a, b)$

$\Leftrightarrow PPCM(ka, kb) \geqslant k\ PPCM(a, b)$ (2)

D'après (1) et (2), on a:

$$PPCM(ka, kb) = k\ PPCM(a, b)$$

Application

Déterminer les entiers naturels non-nul b tels que

$$PPCM(28, b) = 140$$

Solution

$28 = 2^2 \times 7$ et $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

Scanned by CamScanner

Pour que PPCM(b, 28) = 140, il faut que
$b = 2^x \times 5 \times 7^y$ avec $0 \leq x \leq 2$ $0 \leq y \leq 1$

$2^0 \times 7^0 \times 5 = 5$ $\quad$ $2^1 \times 7 \times 5 = 35$

$2^1 \times 7^0 \times 5 = 10$ $\quad$ $2^2 \times 7 \times 5 = 70$

$2^2 \times 7^0 \times 5 = 20$ $\quad$ $2^3 \times 7^0 \times 5 = 140$

$b \in \{5, 10, 20, 35, 70, 140\}$

Propriété 3

Soient a et b deux entiers naturels non-nuls.
Si a et b sont des nombres premiers entre eux alors

$$PPCM(a, b) = ab$$

En effet

On a ab un multiple commun de a et b

* Montrons que tout multiple commun de a et b est un multiple de ab

Soit m un multiple commun de a et b. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kb$ or $a \mid m \Rightarrow a \mid kb$

Ainsi, étant donné que $a \mid kb$ et a et b premiers entre eux alors $a \mid k \Rightarrow$ il existe un $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = qa$

Or $m = kb \Leftrightarrow m = qab \Rightarrow ab$ divise m

Par conséquent m est un multiple de ab

Donc si a et b sont premiers entre eux alors $PPCM(a,b) = ab$

Remarque

Si $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et $a \wedge b = 1$ alors $PPCM(a,b) = ab$

4) Relation entre PPCM et PGCD

a) Lemme :

Si $PGCD(a, b) = \alpha$ alors $\frac{a}{\alpha}$ et $\frac{b}{\alpha}$ sont premiers entre eux

En effet

On a : $PGCD(a, b) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} PGCD(a, b) = 1$

or $\frac{1}{\alpha} PGCD(a, b) = PGCD\left(\alpha \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right)$

Donc $PGCD\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right) = 1$

Scanned by CamScanner

Ainsi $\frac{a}{\alpha}$ et $\frac{b}{\alpha}$ sont premiers entre eux.

b) Théorème

Le produit de deux entiers naturels non nuls est égale au produit de la PGCD et de leurs PPCM.

Autrement dit : $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = ab$

On effet :

Soit $\alpha = PGCD(a;b)$

On a : $PPCM\left(\frac{a}{\alpha}; \frac{b}{\alpha}\right) = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\alpha} = \frac{ab}{\alpha^2}$

En multipliant par α, on obtient

$\alpha PPCM(a,b) = \frac{ab}{\alpha}$

Ainsi $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = \frac{ab}{\alpha} \times \alpha = ab$

Donc $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = ab$

NB : Pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}$

$PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = |ab|$

Application

Soit $A = 792$ et $B = 1638$

a) Décomposer a et b en produits de facteurs premiers

En déduire $PPCM(a,b)$.

b) Déterminer le $PGCD(a,b)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide

En déduire $PPCM(a,b)$.

Résolution

a) Décomposition de a et b

$A = 792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$

$B = 1638 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 13$

Donc $PPCM(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$PPCM(A,B) = 72072$

Scanned by CamScanner

b) Détermination de PGCD(a,b) avec l'algorithme d'Euclide

1638	792	792	54	54	36	36	18
54	2	36	14	18	1	0	2

donc PGCD(a,b) = 18

Comme PPCM(a,b) × PGCD(a,b) = ab

donc $PPCM(a,b) = \frac{ab}{18}$

donc $PPCM(a,b) = 7207 \times 2$

a', b'

Remarque :

Si d = PGCD(a,b) alors il existe deux entiers premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$

donc $PPCM(a,b) = PPCM(da', db') = d\,PPCM(a', b')$

Ainsi $\boxed{PPCM(a,b) = da'b'}$

Application

Résoudre le système d'équations suivant :

a) $\begin{cases} xy = 23040 \\ PPCM(x,y) = 960 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y = 540 \\ PGCD(x,y) = 30 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y = 135 \\ PPCM(x,y) = 504 \end{cases}$

Résolution :

a) $S = \{(192, 120)\}(120, 192)\ (960, 24)\ (24, 96)\}$

b) $\begin{cases} x+y = 540 \\ PGCD(x,y) = 30 \end{cases}$

Donc il existe x' et y' premiers entre eux tels que

$x = 30x'$ et $y = 30y'$

En remplaçant dans (1), on a : $x' + y' = 18$

or $18 = 13+5 = 11+7 = 17+1$

ainsi $S = \{(150, 390)\ (390, 150)\ (330, 210)\ (210, 330)$

$(510, 30)\ (30, 510)\}$

Scanned by CamScanner

VII | Théorème de Bejout | Théorème de Gauss

1) Théorème de Bejout

a) Lemme (Identité de Bejout)

Soient a et b deux entiers naturels non-nuls, tels que

$$PGCD(a,b) = d$$

Il existe des entiers relatifs u et v, tels que

$$au + bv = d$$

En effet : * Si $b|a$ alors $PGCD(a,b) = b$

En prenant $u = 0$ et $v = 1$ on a :

$$au + bv = b \Leftrightarrow PGCD(a,b) = au + bv$$

* Si $a|b$ alors $PGCD(a,b) = a$

En prenant $u = 1$ et $v = 0$ on a :

$$au + bv = a \Leftrightarrow PGCD(a,b) = au + bv$$

* Dans les autres cas, on suppose par exemple $0 < b < a$, l'algorithme d'Euclide s'écrit :

$$a = bq_0 + r_0 \qquad b = r_0 q_1 + r_1 \qquad r_0 = r_1 q_2 + r_2$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \qquad r_n = r_n q_{n+1}$$

avec $0 < r_n < r_{n+1} < \dots < r_0 < b$

Ainsi on obtient :

$$r_0 = a - bq_0 = 1 \times a - (q_0) b = au + bv$$

avec $a = 1$ et $v = -q_0$

$$r_1 = b - r_0 q_1$$
$$r_1 = b - q_1 (a - bq_0) \Rightarrow r_1 = -aq_1 + b(1 + q_0 q_1)$$
$$= au + bv$$

avec $a = -q_1$ et $b = 1 + q_0 q_1$

En réitérant ce procédé, on montre que tous les restes r_k (avec $0 \leq k \leq 1$) obtenus dans l'algorithme d'Euclide sont de la forme $r_k = au_k + bv_k$ avec u_k et v_k des entiers relatifs qui s'expriment en fonction de $q_0, q_1, q_2 \dots q_k$

Scanned by CamScanner

En particulier pour le dernier reste non nul r_n qui est le PGCD$(a;b)$

b) Théorème

Soient a et b deux entiers naturels non-nuls.
Dire que a et b sont premiers entre eux équivaut à dire qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au + bv = 1$$

En effet :

Supposons que a et b sont premiers entre eux.
Alors PGCD$(a,b) = 1$
L'identité de Bejout permet alors de dire qu'ils existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv =$ PGCD(a,b)
Ainsi $au + bv = 1$
Réciproquement : Supposons que $au+bv=1$
avec u et v des entiers relatifs
Etant donné que tout diviseur commun de a et b divise toute combinaison linéaire de a et b.
Or $au+bv=1$ et ~~PGCD(a,b)~~.
Donc PGCD$(a,b) \mid au+bv \Leftrightarrow$ PGCD$(a,b) \mid 1$
Comme 1 a un seul diviseur lui même dans $\mathbb{N}$
alors PGCD$(a,b) = 1 \Rightarrow a$ et b premiers entre eux.

Attention (Identité de Bejout)
Le couple (u,v) n'est pas unique.
Par exemple : Pour $a=2$ et $b=3$
On PGCD$(2,3)=1$ et $3\times1 - 2\times1 = 1$
c'est à dire $U=1$ et $V=1$
De même $-1\times3 + 2\times2 = 1$
avec $u=-1$ et $v=2$

NB : L'identité de Bejout se prolonge au cas de deux entiers relatifs non-nuls a et b

Scanned by CamScanner

Application

On donne $a = 145$ et $b = 55$

a) Ecrire l'algorithme d'Euclide pour déterminer PGCD$(a;b)$

b) En partant de la dernière égalité où le reste est non-nul et en exprimant celui-ci successivement en fonction des restes précédents, déterminer un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tels que

$$au + bv = PGCD(a;b)$$

Résolution

a) Détermination du PGCD $(a;b)$

Algorithme d'Euclide

1) $145 = 2 \times 55 + 35$
2) $55 = 35 \times 1 + 20$
3) $35 = 20 \times 1 + 15$
4) $20 = 15 \times 1 + 5$

$15 = 5 \times 3 + 0$

$\Rightarrow PGCD(a;b) = 5$

b) Détermination d'un couple $(u;v)$ d'un de Résolution

On a: $20 = 15 \times 1 + 5$

Dans (3): $15 = 35 - 20$

Donc $20 = (35 - 20) + 5$

Dans (2): $20 = 55 - 35$

Donc $55 - 35 = (35 - 20) + 5$

Dans (1): $35 = a - 2b$

Donc $b - (a - 2b) = (a - 2b - 20) + 5$

$\Leftrightarrow b + 2b - a - a + 2b = 15$

$\Leftrightarrow 5b - 2a = -15$

$20 = (35 - 20) + 5$

~~ou $20 = b - 35$~~

~~$b - 35$~~

Scanned by CamScanner

b) Détermination du couple (u, v)

On a : $5 = 20 - 15$

Dans (3) $15 = 35 - 20$ donc $5 = 20 - (35 - 20)$

Dans (2) : $20 = b - 35$ donc $5 = b - 35 - (35 - b - 35)$

Dans 1 $35 = a - 2b$

donc $5 = b - (a - 2b) - (a - 2b - b + a + 2b)$

$\Rightarrow 5 = -a + 3b + b = -a + 4b$

donc $8b - 3a = 5$

$u = -3$ et $v = 8$

Application 2

Soient a, b et c des entiers naturels non nuls tels que :

a et b premiers entre eux

a et c premiers entre eux

Démontrer que a et bc sont premiers entre eux

Solution

D'après le théorème de Bejout :

* a et b premiers entre eux $\Leftrightarrow$ Il existe deux entiers relatifs m et n tels que $am + bn = 1$ (1)
* a et c premiers entre aux $\Leftrightarrow$ Il existe deux entiers relatifs m' et n' tels que $am' + cn' = 1$ (2)

(1) et (2) donnent : $am + am' + bn + cn' = 2$

$\Leftrightarrow a(m + m') + bc\left(\frac{n}{c} + \frac{n'}{b}\right) = 2$

$\Leftrightarrow a\left(\frac{m + m'}{2}\right) + bc\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{c} + \frac{n'}{b}\right)\right] = 1$

En posant $u = m + m'$ et $v = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{c} + \frac{n'}{b}\right)$

Alors $au + bcv = 1$

Donc a et bc sont premiers entre eux

2) Théorème de Gauss

Soient a, b et c des entiers naturel non nuls
Si a divise le produit bc et est premier avec b
alors a divise c.
En d'autre terme:
Si $a|bc$ et $PGCD(a,b)=1$ $\Rightarrow a|c$

En effet

Supposons que a et b sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$
Comme $c \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow au+bv=1 \Leftrightarrow auc+bvc=c$
Etant donné que $a|ac$ et $a|bc$
donc $a|c(a+b)$ or $(a+b) \in \mathbb{N}^*$
donc $a|c$

Attention

Il est essentiel de vérifier que a et b sont premiers entre eux avant d'appliquer le théorème de Gauss. Car a peut diviser le produit bc sans pour autant diviser ni a ni c.

Exemple: $300 = 15 \times 20$
6/300 et pourtant 6 ne divise ni 20 ni 15

3) Conséquences

Propriété 1

Soient a et b des entiers naturels non nuls et p un nombre premier.
Si p divise le produit ab alors p divise a ou p divise b

En effet:

Si p divise a alors la propriété est établie
Si p ne divise pas a alors $PGCD(p,a)=1$

Scanned by CamScanner

Car les seuls diviseurs de p sont 1 et lui même
Ainsi p et a sont premiers entre eux et $p|ab$
D'après le théorème de Gauss $p|b$

Propriété 2:

Soient a, b et c des entiers naturels non-nuls.
Si b et c sont premiers entre eux et divisent a
alors bc divise a
En d'autre terme: Si $b \wedge c = 1$ alors $bc|a$
$b|a$ et $c|a$

En effet:

Supposons que $b|a$ et $c|a$ alors il existe deux entiers
d et d' tels que $a = db$ et $a = d'c$
Donc $db = d'c$
De plus $c|d'c$ donc $c|db$
Etant donné que c et b sont premiers entre eux
d'après le théorème de Gauss. $c|d$
Ainsi $c|d$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ telque $d = kc$ or $a = db$
$a = kcb$ d'où $bc|a$

Exemple: Le nombre 1573875 est divisible par 5 et par 9
Or 5 et 9 sont premiers entre eux
donc $9 \times 5 | 1573875$

VIII) Equations de Diophantiennes

1) Activité

a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $7x = 11y$
b) Vérifier que le couple $(x_0, y_0) = (13, 8)$ est solution de l'équation (E) : $7y - 11y = 3$
c) En déduire tous les couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E)

Scanned by CamScanner

Résolution

1) Resolvons $7x = 11y$

Etant donné que $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ alors $11 | 7x$ et $PGCD(7,11) = 1$ alors d'après le Théorème de Gauss $11|x$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x = 11k \Rightarrow y = 7k$

Les couples sont sont alors $(11k, 7k)$

b) Comme $7 \times 13 - 11 \times 8 = 3$

Alors $(13, 8)$ est une solution de (E)

c) Déduction de l'ensemble des couples (x_0, y_0) solution de (E)

$$(E): \begin{cases} 7x - 11y = 3 \\ 7x_0 - 11y_0 = 3 \end{cases}$$

La différence membre à membre donne

$$7(x - x_0) = 11(y - y_0)$$

D'après la réponse à la question (a)

On a: $\begin{cases} x - x_0 = 11k \\ y - y_0 = 7k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 11k + 13 \\ y = 7k + 8 \end{cases}$

Donc $S_k = \{(11k + 13 ; 7k + 8)\}$

2) Définition

Les équations Diophantiennes sont celles de la forme

$(E): ax + by = c$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$

On cherche les solutions entiers

Remarque:

(E) admet des solutions équivaut à $PGCD(a,b)$ divise c

Exemple: $4x - 2y = 1$

Scanned by CamScanner

Comme PGCD(4,2) = 2 et 2 ne divise pas 1
alors $S = \emptyset$

Application

a) Montrer que $59x + 68y = 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $59x + 68y = 1$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $59x + 68y = 2$

Résolution

a) Résous $59x + 68y = 0 \Leftrightarrow 59x = -68y$

$\Rightarrow 68 / 59x$ or PGCD(68, 59) = 1

D'après le Théorème de Gau

On a : $59x + 68y = 1$

Etant donné que PGCD(68, 59) = 1 alors d'après le Théorème de Bézout, il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $59x + 68y = 1$

b) Résolution de $59x + 68y = 1$

On a : $68 = 59 + 9$

$59 = 6 \times 9 + 5$

$9 = 5 \times 1 + 4$

$5 = 4 \times 1 + 1$

$4 = 4 \times 1 + 0$

Ainsi $1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \times 5 - 9$

$= 2(6 \times 9 + 59) - 9 = -12 \times 9 - 9 + 2 \times 59$

$= 2 \times 59 - 13 \times 9$

$= 2 \times 59 - 13 \times (68 - 59)$

$= 2 \times 59 - 13 \times 68 + 13 \times 59$

$= -13 \times 68 + 15 \times 59$

Donc la solution particulière est $(15, -13)$

$\begin{cases} 59x + 68y = 1 \\ 59x_0 + 68y_0 = 1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

La différence membre à membre donne :
$59(x+x_0)+68(y+y_0)=1$
Donc d'après la première question

$$\begin{cases} x = 15-68k \\ y = 59k-13 \end{cases} \quad S_k\{(x,y)\}$$

c) Résolution de (E') $59x+68y=2$
Précédemment : $59x+68y=1$
$\Leftrightarrow 2(59x+68y)=2$
$\Rightarrow 80\times59-26\times68=2 \Rightarrow$ le couple $(80,-26)$ est une solution particulière
Donc $S'_k = \begin{cases} x = 80-68k \\ y = -26+59k \end{cases}$

Petit Théorème de Fermat Le 05/Mars/2019

Si p est un nombre premier, a est un entier tels que $a \geq 2$ et non divisible par p alors $a^{P-1}-1$ est divisible par p c'est à dire $a^{P-1} \equiv 1[P]$

En effet :

Puisque p est premier alors il est premier avec $1, 2, 3, 4, \ldots, P-1$ sinon, il existe un diviseur positif autre que 1 divisant $1, 2, 3, \ldots, P-1$
Donc p est premier avec $(P-1)!$ (d'après le Théorème de Gauss)
Montrons que les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ sont des divisions respectives de $a, 2a, 3a, \ldots, a(P-1)$ par p sont non nuls et tous distinctes deux à deux.
Soit $k \in [1, p-1]$
Pour $ka = q_k p + r_k$ avec $q_k \in \mathbb{Z}$

Scanned by CamScanner

Supposons que $r_k = 0$

$ka = q_k p \Rightarrow p \mid ka$ et $p \wedge k = 1$.

D'après le Théorème de Gauss $p \mid a$ est impossible car par hypothèse a est non divisible par p

Ainsi on peut dire que $r_k \neq 0$

Montrons que tous les restes r_k sont distincts

Soit k' un entier distinct de k avec $k < k'$

tel que $k' \leq p-1$

Soit $r_{k'}$ le reste de la division euclidienne de $k'a$ par p

Ainsi $\begin{cases} k'a = q_{k'} p + r_{k'} \\ ka = q_k p + r_k \end{cases}$

Supposons que $r_k = r_{k'}$

$\Leftrightarrow a(k'-k) = p(q_{k'} - q_k)$

Comme $q_{k'} - q_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid (k'-k)a$

or $(k'-k) \in [1, p-1]$ donc $p \wedge (k'-k) = 1$ par suite $p \mid a$

Impossible car p ne divise pas a dans l'hypothèse

Donc $r_k \neq r_{k'}$

L'algorithme d'Euclide donne

$1a \equiv r_1 [p]$

$2a \equiv r_2 [p]$

$3a \equiv r_3 [p]$

$4a \equiv r_4 [p]$

$5a \equiv r_5 [p]$

$\vdots$

$(p-1)a \equiv r_{p-1} [p]$

Le produit membre à membre donne

$1a \times 2a \times 3a \times \cdots \times (p-1)a \equiv r_1 \times r_2 \times r_3 \times \cdots r_{p-1} [p]$

$\Leftrightarrow (p-1)! \, a^{p-1} \equiv r_1 \times r_2 \times r_3 \times \cdots \times r_{p-1} [p]$

Etant donné que les restes ne peuvent prendre qu'une valeur comprise entre 1 à $p-1$ alors

$r_1 \times r_2 \times r_3 \times \cdots \times r_{p-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) = (p-1)!$

Par suite on obtient : $(p-1)! \, a^{p-1} \equiv (p-1)! \times 1 [p]$

$\Leftrightarrow (p-1)! (a-1) \equiv 1 [p]$

or $p \wedge (p-1)! = 1$ d'après le Théorème de Gauss

$p \mid a^{p-1} - 1$ D'où $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

Scanned by CamScanner

Exemple

On a: 7 est un nombre premier et ne divise pas 12
donc $12^6 - 1$ est un multiple de 7. D'après le Petit Théorème de Fermat.

Conséquence

Si p est un nombre premier, a un entier supérieur à 2 ou égal alors $a^p - a$ est divisible par p.
C'est à dire que $a^p \equiv a\ [p]$

En effet

On sait que $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$

* Si a est divisible par p alors $a(a^{p-1} - 1)$ est divisible par p
* Si a ne peut être pas divisible p un nombre premier alors d'après le Petit Théorème de Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1\ [p] \Leftrightarrow p \mid a^{p-1} - 1$$

donc $p \mid a(a^{p-1} - 1)$
C'est à dire $p \mid a^p - a$

Application

Soit n un entier supérieur ou égale à 2.
Considérons l'entier naturel a tel que : $a = n^5 - n$
a) Démontrer que a est divisible par $n^3 - n$.
b) ~~Déduisser~~ Démontrer que a est divisible par 30

Solution

a) On sait que $a = n^5 - n$

$$= n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1)$$

$$a = (n^3 - n)(n^2 + 1)$$

Comme $n^2 + 1$ est un entier
donc $n^3 - n \mid a$

b) $30 = 2 \times 3 \times 5$

$a = n^5 - n$

Scanned by CamScanner

Etant donné que 2, 3 et 5 sont des nombres premiers ; La conséquence du Petit Théorème de Fermat nous permet de dire que $\begin{cases} 5 \mid a \\ 3 \mid a \\ 2 \mid a \end{cases}$. Or $n^5 - n \mid a$ et 2, 3 et 5 sont premiers entre eux.

D'après la propriété du Théorème de Gauss $2 \times 3 \times 5 \mid a$

Donc a est un multiple de 30

Application

Soient x et y deux nombres premiers entre eux.

a) Montrer que x et y et y d'une part, $(x+y)$ et x d'autre part puis $(x+y)$ et $(x-y)$ sont premiers entre eux.

b) Montrer que $(x+y)$ et xy sont premiers entre eux.

Solution

a) Démontrons que $(x+y) \wedge y = 1$

Supposons $(x+y) \wedge y \neq 1$ donc il existe $k \neq 1$ tel que $k \mid (x+y)$ et $k \mid y$

Donc k est un diviseur commun de toutes les combinaison linéaire entre $(x+y)$ et y

$\Leftrightarrow k \mid (x+y) - y \Rightarrow k \mid x$

Ainsi $\begin{cases} k \mid x \\ k \mid y \end{cases} \Rightarrow x \wedge y \neq 1$ absurde donc $(x+y) \wedge y = 1$

Par le même raisonnement, on a :

$(x+y) \wedge x = 1$

Démontrons que $(x+y) \wedge (x-y) = 1$

Supposons que $(x+y) \wedge (x-y) \neq 1$

Donc il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$k \mid x+y$ et $k \mid x-y$

Ainsi $k \mid \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) \Rightarrow k \mid x$

$k \mid \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) \Rightarrow k \mid y$

Scanned by CamScanner

a) k/x et k/y est impossible

donc $(x+y) \wedge (x-y) = 1$

b) Démontrons que $(x+y) \wedge xy = 1$

Etant donné que $(x+y) \wedge x = 1$

$(x+y) \wedge y = 1$

Alors $(x+y) \wedge xy = 1$

Le 11/Mars/2019 X) Système de numérotation

1) Activité :

Calculer les nombres

$M = 3\times10^2 + 9\times10 + 7$

$N = 2^8 + 2^7 + 0\times2^6 + 0\times2^5 + 0\times2^4 + 2^3 + 2^2 + 0\times2 + 1$

$L = 3\times5^3 + 0\times5^2 + 4\times5 + 2$

Comparer M, N et L

Correction

a) M = 397 N = 397 L = 397

b) M = N et M ≥ L ; N ≥ L

M = N = L

Conclusion

397 a été décomposé de 03 façon différentes

- M donne l'écriture décimale ou l'écriture en base de dix. Les coefficients sont 3, 9 et 7 inférieurs à 10
- N donne l'écriture en base 2. Les coefficients (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) sont strictements inférieurs à 2
- L donne l'écriture de 397 en base 5. Les coefficients (3, 0, 4, 2) sont strictements inférieurs à 5.

2) Numérotation de base a

* Théorème

Soit a un entier naturel tels que $a \geq 2$.

Tout entier naturel X non nul s'écrit de façon unique sous la forme

Scanned by CamScanner

$$X = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0$$

avec $x_n \neq 0$ et les $x_i \in \mathbb{N}$; $0 \leq x_i < a$

On dit que X est écrit dans le système de base a (a)

On note $X = \overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0}^{(a)}$

Un système de base 10 appelé aussi système décimal les chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Un système de base 2 : appelé système binaire, les chiffres sont 0 et 1

Un système de base 16 : les chiffres sont, 0, 1, 2, 3 9, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

Avec A, B, C, D, E et F désignent respectivement 10, 11, 12, 13, 14, 15

Exemple :

En base 10 : $128 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8$

$\overline{1001}^{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$

$\overline{431}^{(5)} = 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 = 116$

$\overline{9AC}^{(16)} = 9 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 12 = 2476$

Remarques

→ Dans l'écriture de X en base 10, on ne fait pas apparaître la barre et la base.

→ S'il y'a n chiffres dans l'écriture décimale alors la plus grande puissance est $n-1$.

→ Si $X = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$ alors $a^{n-1} \leq X \leq a^n$

3) Passage d'un système à un autre système de numérotation :

Activité

Soit a un entier naturel désignant 2, 5, 10 ou 16.

Soit N un entier naturel tels que

$$N = \overline{xyzt}^{(a)}$$

Scanned by CamScanner

a) Montrer que t est le reste de la division euclidienne de N par a.

b) Soit q_1 le quotient de la division euclidienne de N par a
Montrer que z est le reste de la division euclidienne de q_1 par a

c) Soit q_2 le quotient de la division euclidienne de q_1 par a. Montrer que y est le reste de la division euclidienne de q_2 par a

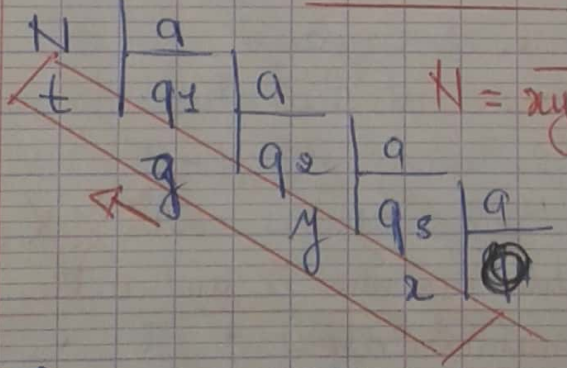
d) Soit q_3 le quotient de la division euclidienne de q_2 par a
Montrer que x est le reste de la division euclidienne de q_3 par a

Résolution

a) $\overline{N = xyzt}^{(a)} = xa^3 + ya^2 + za + t$
$= a(a^2x + ay + z) + t$ et $0 \leq t \leq a$
donc t est le reste de la division euclidienne de N par a

Les autres questions se repondent comme ainsi

Conclusion



Donc les chiffres t, z, y et x sont les restes successifs dans les divisions de N par a

Exemple

Ecrire 397 en base 2, en base 5 et en base 16

397	2
1	198
0	99
1	49
1	24
0	12
0	6
6	3
1	1
1	0

$\Rightarrow 397 = \overline{110001101}^{(2)}$

$397 = \overline{3042}^{(5)}$

$397 = \overline{18D}^{(16)}$

397	5
2	79
4	15
0	3
3	0

397	16
13	24
8	1
1	0

Application : Exercice 12 (Série Arithmétique)

Correction

1) $1238 = \overline{100\,110\,10\,110}^{(2)}$

2) $N = \overline{27}^{(10)}$ $\quad N = \overline{1B}^{(16)}$

3) $N = \overline{701}^{(10)}$ $\quad N = \overline{10\,10\,11110\,1}^{(2)}$

4-a) Montrons que N est divisible par 7 si et seulement si $N' - 2a_0$ est divisible par 7

avec $N' = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1}^{(10)}$

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots a_1 10 + a_0$

$= 10N' + a_0$

On a : $N \equiv 0[7] \Leftrightarrow 10N' + a_0 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 10N' \equiv -a_0[7]$

Comme $10 \equiv 3[7]$ donc $\begin{cases} 10N' \equiv 3N'[7] \\ 3N' \equiv -a_0[7] \Rightarrow 15N' \equiv -5a_0[7] \end{cases}$

Etant donné que $15 \equiv 1[7]$ donc $15N' \equiv N'[7]$

$\Rightarrow N' \equiv -5a_0[7]$

D'où $N' - 2a_0 \equiv -7a_0[7] \equiv 0[7]$

$\Rightarrow N' - 2a \equiv 0[7]$

Remarque : $N = \overline{252}^{(10)} \Leftrightarrow N = 252$

Scanned by CamScanner

b) Déduction :

* $N = \overline{252}^{(10)}$ et $N' = \overline{25}^{(10)}$ $a_0 = 2$

$\Rightarrow N = 252$ et $N' = 25$

or $N' - 2a_0 = 25 - 4 = 21 \equiv 0[7]$

donc $252 \equiv 0[7]$

* $N = 616$ $N' = 61$ et $a_0 = 6$

$N' - 2a_0 = 49 \equiv 0[7]$

d'où $616 \equiv 0[7]$

Application 2

Quelle est la base du système de numérotation dans lequel le nombre 12551 du système décimal s'écrit 30407.

Correction

Soit x la base du système de numérotation $x > 7$

Ainsi $3x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 0x + 7 = 12551$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 + 7 - 12551$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 - 12544 = 0$

La résolution de cette équation donne

$x = 8$

Application 3

Un nombre de trois chiffres s'écrit $\overline{xyz}$ dans le système à base 7 et $\overline{zyx}$ dans le système à base 9. Quel est ce nbre

Correction

Soit N le nombre recherché

$N = \overline{xyz}^{(7)} = 49x + 7y + z$ et $N = \overline{zyx}^{(9)} = 81z + 9y + x$

Par égalité : $49x + 7y + z = 81z + 9y + x$

$\Leftrightarrow 48x + 4y - 80z = 0$

$\Leftrightarrow 24x - y - 40z = 0$

Pour $x = 1$ $y = 4 \Rightarrow z = 2$

donc $N = 79$

Scanned by CamScanner

Probabilité

Le 22 Mars 2019

I) Vocabulaire:

1) Expérience aléatoire:

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont le résultat n'est pas prévisible à l'avance de manière certaine.

Exemples:

* Jet d'une pièce de monnaie
* Jet d'un dé
* Réponse par vrai ou faux.

2) Univers

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers. On le note en général Ω

Remarque:

Le cardinal de Ω noté $Card(\Omega)$ ou $|\Omega|$ est le nombre de résultats possibles.

3) Evénement:

On appelle événement toute partie de l'univers.

Si A est un événement alors $A \subseteq \Omega$

Parmi les événements, on peut citer

* l'événement certain: il correspond à l'univers Ω.
* l'événement impossible: il correspond à l'ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$
* Si l'événement contient une seule issue, on dit que l'événement est élémentaire (éventualité).
* L'événement "A et B" correspond à l'ensemble $A \cap B$
* L'événement "A ou B" correspond à l'ensemble $A \cup B$
* Si A est un événement alors l'événement contraire de A est noté $\overline{A}$ avec $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$

Scanned by CamScanner

* A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exemple:
Un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6

- Les résultats possibles sont 1,2,3,4,5,6 donc $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Soit A l'evenement «obtenir un chiffre pair»
$A = \{2,4,6\}$

L'évenement contraire de A est $\bar{A} = \{1,3,5\}$

Soit B l'evenement "obtenir le chiffre 7»
B est donc un évenement impossible $\Rightarrow B = \emptyset$

II) Définition et propriétés

1) Definition

Soit E une expérience aléatoire d'univers Ω
On appelle probabilité sur Ω, toute application notée p, telle que:

$$p : \Omega \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A)$$

avec $P(\emptyset) = 0$
$P(\Omega) = 1$

- Pour tout évenement A de l'univers Ω on a: $0 \leq P(A) \leq 1$
- Si $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ avec e_i des évenement alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\})$

2) Propriétés

Soient A et B deux évenements de l'univers Ω

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont disjoints ou incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Application

On donne $P(A \cup B) = 0,6$
$P(A \cap B) = 0,2$
$P(\bar{B}) = 0,5$
Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Correction

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\Rightarrow P(A) = 0,6$

* Calcule de $P(\bar{A})$
$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \underline{0,5}$
* Calcul de $P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(B) = 0,6 - 0,5 + 0,2$
donc $\underline{P(B) = 0,3}$
* Calcul de $P(A \cap \bar{B})$
$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,7$
Remarquons que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
donc $P(A \cap \bar{B}) = 0,5 - 0,2 = \underline{0,3}$
* Calcul de $P(\bar{A} \cap B)$
$B = (B \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)$
donc $P(\bar{A} \cap B) = 0,5 - 0,2 = \underline{0,1}$
* Calcul de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
$\bar{A} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,5 - 0,1 = \underline{0,4}$

Scanned by CamScanner

3) Équiprobabilité

a) Définition

Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires e_i ont la même probabilité alors il y'a équiprobabilité.

Remarque :

Les expressions telles que :
- de parfait (non piqué) ou "non truqué" ou bien équilibré
- indiscernables au toucher
- tirage au hasard

indiquent l'équiprobabilité.

b) Théorème

Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Application

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :
1) Le roi de trèfle
2) Un roi
3) Un trèfle
4) Un roi ou un trèfle
5) ni roi, ni trèfle.

Solution

1) Soit A l'événement "obtenir le roi de trèfle"

$$P(A) = \frac{1}{32} =$$

2) Soit B l'événement "Obtenir un roi"

$$P(B) = \frac{4}{32} = 0,125$$

3) Soit C l'événement "obtenir un trèfle"

$$P(C) = \frac{8}{32} = 0,25$$

4) Soit D l'événement "obtenir un roi ou un trèfle"

$$P(D) = \frac{1}{32} + \frac{8}{32} = 0,28125 - \frac{1}{32}$$

5) Soit E l'événement obtenir "ni un roi ni trèfle"

$$P(E) = 1 - P(D) = 0,71875 - 0,0625 = \frac{11}{32}$$

Application 3

On considère deux urnes U_1 et U_2
U_1 contient 3 boules blanches et 2 Boules noires
U_2 contient 5 BB et 1 BN
L'expérience consiste à tirer une boule dans chaque boule urne. Le tirage étant équiprobable, Calculer la probabilité de tirer exactement
1-a) Deux boules blanches
b) Deux boules noires
c) Une boule blanche et une boule noire
2) On appelle D l'événement "les deux boules tirées sont de la même couleur"
Démontrer que $P(D) = \frac{17}{30}$

Correction : Ω l'univers $\text{Card}(\Omega) =$ ~~5×3×2~~

1-a) Soit A l'événement "tirer deux BB"

$\text{Card}(A) = 5 \times 3 = 15$

$\text{Card}(\Omega) = 5 \times 6 = 30$

donc $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

1-b) Soit B l'événement "tire 2BN"

$\text{Card } B = 2$

donc $P(B) = \frac{2}{15 \times 2} = \frac{1}{15}$

Scanned by CamScanner

1- a) Soit l'événement « tirer 1BN, 1BB » = C

$Card(C) = C_5^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1 = 13$

donc $P(C) = \frac{13}{80}$

2) D est l'événement « les deux Boules tirées sont de même couleur »

~~$Card(D) = P(A) + P(B)$~~

$Card(D) = Card(A) + Card(B) = \frac{15}{80} + \frac{2}{80} = \frac{17}{80}$

donc $P(D) = \frac{17}{80}$

Remarque

Dans le cas de non équiprobabilité, les événements élémentaires ei n'ont pas la même probabilité. Pour ce calcul on exprime chaque probabilité p_i en fonction de p_1 (par exemple) et on utilise l'égalité $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ pour déterminer p_1.

Application 4

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face i

On suppose que $P_2 = P_4 = P_6 = 2P_1$

$P_3 = P_5 = 3P_1$

1) Calculer P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6

2) On note A l'événement « obtenir un chiffre pair et B l'événement « Obtenir un multiple de 3 »

Calculer : P(A), P(B) et P(AUB)

Solution

1) On a : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

$\Leftrightarrow P_1 + (P_2 + P_4 + P_6) + (P_3 + P_5) = 1$

$\Leftrightarrow P_1 + 2P_1 \times 3 + 3P_1 \times 2 = 1$

$\Leftrightarrow P_1 + 6P_1 + 6P_1 = 1 \Leftrightarrow 13P_1 = 1$

donc $P_1 = \frac{1}{13}$

Ainsi $P_2 = P_4 = P_6 = \frac{2}{13}$ et $P_3 = P_5 = \frac{3}{13}$

2) Détermination de P(A)

$Card(A) = 3$

Soit l'univers Ω avec $Card(\Omega) = 6$

donc $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2 \times 3}{13}$

$P(A) = \frac{6}{13}$

Détermination de P(B)

$P(B) = P(3) + P(6) = \frac{3}{13} + \frac{2}{13} = \frac{5}{13}$ donc $P(B) = \frac{5}{13}$

Détermination de P(AUB)

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ or $P(A \cap B) = P(6)$ donc

$= \frac{6}{13} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{6+5-2}{13}$

donc $P(AUB) = \frac{9}{13}$

Noter Bien :

Si p_i la probabilité d'apparition de la face i est proportionnelle à i alors

$p_i = k \times i$

Détermination de k

$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} k_i = k \sum_{i=1}^{n} i = 1$

donc $k = \frac{1}{1+2+3+4+5+6+\dots+n}$

Scanned by CamScanner

Le 26 Mars 2019

III) Probabilité conditionnelle

1) Activité

On répartit les élèves d'une classe de TS selon le tableau suivant :

	Matheux	Pas matheux
Garçons	3	15
Filles	2	10

Calculer la probabilité qu'un élève soit :

a) Un matheux
b) un garçon
c) Un garçon et matheux
d) Un matheux sachant qu'il est un garçon

Solution

Ω est l'ensemble contenant les élèves de la classe

$\text{Card}\,\Omega = 30$

a) Soit M l'événement « Etre matheux »

$\text{Card}\,M = 5$

donc $P(M) = \frac{\text{Card}\,M}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{5}{6\times5} \Rightarrow P(M) = \frac{1}{6}$

b) Soit G l'événement « être un garçon »

Card (G) est tel que

$G = (G \cap M) \cup (G \cap \overline{M}) \Rightarrow \text{Card}\,G = 18$

donc $P(G) = \frac{18}{30} \Rightarrow P(G) = \frac{1}{10}\ \frac{3}{5}$

c) Soit $G \cap M$ l'événement « Etre garçon matheux »

$G = (G \cap M) \cup (G \cap \overline{M}) \Rightarrow \text{Card}\,G =$
$\text{Card}\,G \cap M = 3$
$\Rightarrow P(G \cap M) = \frac{1}{10}$

c) Soit G M/G l'événement « Etre matheux sachant qu'etre garçon »

$P(M/G) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{6}$

Conclusion :

On constate que $P(E) = \frac{P(G \cap M)}{P(G)}$

La probabilité conditionnelle de M sanchant que G est réalisé : $P(M/G) = \frac{P(G \cap M)}{P(G)}$

2) Définition

Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoire tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé, le réel noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ avec

$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

3) Conséquences :

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors
  $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = P(A) \times P(B/A)$
- Si $P(A \cap B) = 0$ alors $P(A/B) = 0$
- Si $B \subset A$ alors $P(A/B) = 1$.

Exemple : On tire une carte au hazard dans un jeu de 32 cartes.

Scanned by CamScanner

Soit A l'événement « le résultat est un pique »
B l'événement « le résultat est un roi »
$A \cap B$ l'événement « le résultat est le roi de pique »
$Card(A) = 8$ $Card(B) = 4$ et $Card(A \cap B) = 1$
Soit Ω l'ensemble des cas possibles $\Rightarrow Card\,\Omega = 32$

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A/B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{8}.$$

4) Formules de probabilités totales

a) Partition de l'univers

Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et $n \geq 2$.
Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ $A_i \neq \emptyset$
- Pour tout i et j (avec $i \neq j$) de $\{1, 2, \ldots n\}$ $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

b) Formules des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω. constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.
Alors $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

$$= P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \times P(B/A_n)$$

donc $$\boxed{P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P(B/A_k)}$$

En effet :

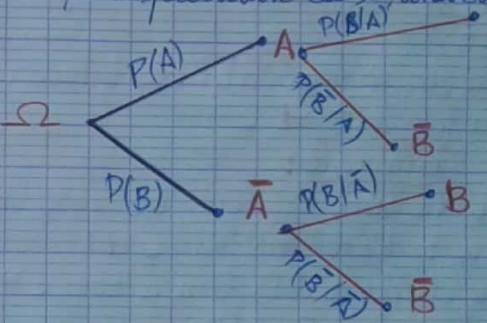
$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

or les événements $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $\ldots$ $B \cap A_n$ sont deux à deux disjointes
donc
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

5) Arbre de probabilité ou arbre pondéré

a) Définition

Un arbre pondéré est un ensemble de branches représentant une partition de l'univers Ω.

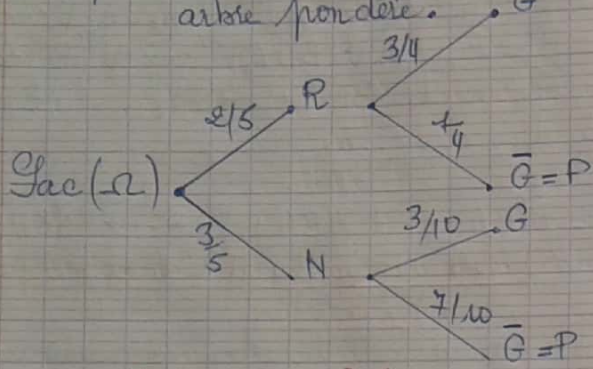


- Un arbre peut avoir plusieurs niveaux constitués d'une succession de branche issues d'un même nœud
- Un arbre est composé de plusieurs chemins ou feuille

Exemple :
Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "gagné" soit "perdu".

Scanned by CamScanner

Sur 15 boules rouges est marqué "gagné"
Sur 9 BN est marqué "gagné"
Soit R l'évenement « On tire une BR »
G " " « On tire une B marqué Gagné »
L'expérience aléatoire peut être schématiser par un arbre pondéré.



b) Règles opératoires

Règle 1:
La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1.

Exemple:
A partir du noeud « On tire une boule »
On a: $P(R)+P(N)=1$
A partir du noeud « Boule Rouge »
$P(G/R)+P(P/R)=1$

Règle 2:
La probabilité d'une « feuille » est le produit des probabilités d'un chemin aboutissant à cette feuille

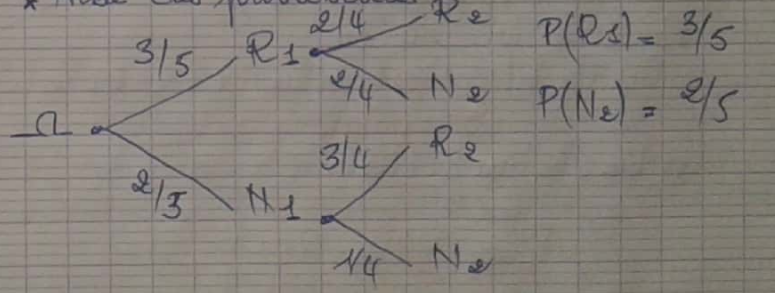
Exemple:
On considère la feuille $R \cap G$, on a
$P(R \cap G) = P(R) \times P(G/R)$

Règle 3: « Formule des probabilités totales »
La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune des ces feuilles.

Exemple:
L'événement "On tire une boule marqué gagné" est associé aux feuilles $R \cap G$ et $N \cap G$
$P(G) = P(R \cap G) + P(N \cap G)$

Application 1
Une Urne contient 3BR et 2BN indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 2B de l'urne.
Considérons les événements suivants:
R_1 « Obtenir une BR au 1er tirage »
N_2 « Obtenir une BN au 2e tirage »
Calculer $P(R_1)$ et $P(N_2)$

Solution
Calcul de $P(R_1)$
Soit Ω l'univers contenant l'ensemble des boules de l'urne
$Card(\Omega) = 5$
* Arbre des probabilités



Application
Une Urne U_1 contient 3BV et 10BR
Une Urne U_2 contient 3BR et 10BV

Scanned by CamScanner

On choisit au hazard une Urne puis on Tire une boule de cette Urne.
Calculer la probabilité que
a) la boule tirée soit verte
b) la boule tirée provienne de U_1 sachant qu'elle est verte

Correction

a) $P(V) = \frac{1}{2}$ b) $P(U_1/V) = \frac{3}{13}$

Application 3

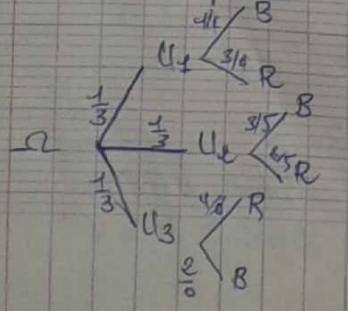
On dispose de trois urnes contenant chacune un certain nombre de boules colorés comme l'indique le tableau ci-dessous

	Boules Bleues	Boules Rouges
U_1	1	3
U_2	3	2
U_3	4	2

On Tire au hazard une urne puis on Tire une boule dans cette urne
La boule tirée est blue
Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1

Correction

Arbre des probabilités



$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1) \times P(B/U_1)}{P(B)}$$

or $P(B) = P\left[(U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B) \cup (U_3 \cap B)\right]$

$= P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B)$

$= P(U_1) \times P(B/U_1) + P(U_2) \times P(B/U_2) + P(U_3) \times P(B/U_3)$

donc $P(U_1/B) = \frac{15}{91}$

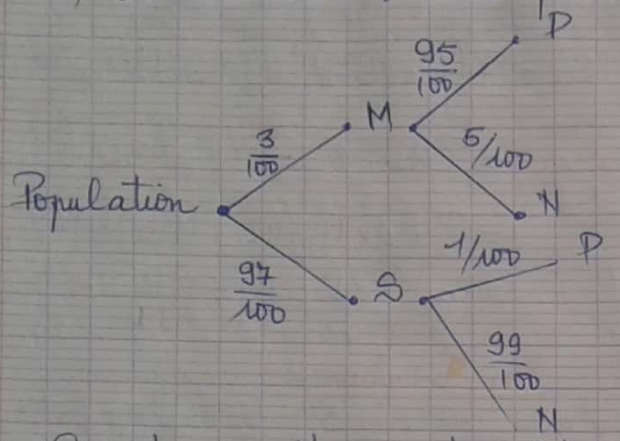
Application 4

Une maladie atteint 3% de la population donnée.
Un test de dépistage donne les résultats suivants :
Chez les individus malades 95% des tests sont positifs et 5% négatifs
Chez les individus sains 1% des tests sont positifs et 99% négatifs
On choisit au hazard l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
On choisit un individu au hazard
1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité
a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif
b) qu'il soit sain et ait un test négatif
c) qu'il ait un test positif
d) qu'il ait un test positif
3) Calculer la probabilité
a) qu'il soit sain sachant que le test est positif
b) qu'il soit malade sachant que le test est négatif

Scanned by CamScanner

Solution

1) Construction de l'arbre pondéré



Soient : M l'evenement « Etre malade »
S " " « Etre sain »
P " " « Avoir un test positif »
N " " « Avoir un test négatif »

2-a) Soit $M \cap P$ l'evenement « Etre malade et avoir un test positif »

$P(M \cap P) = P(M) \times P(P/M) = \frac{3}{100} \times \frac{95}{100}$

donc $P(M \cap P) = \frac{57}{2000}$

2-b) Soit $S \cap N$ l'evenement « Etre sain et avoir un test négatif »

$P(S \cap N) = P(S) \times P(N/S) = \frac{97}{100} \times \frac{99}{100}$

$P(S \cap N) = \frac{9603}{10000}$

2-c) P est l'événement « avoir un test positif »
On sait que $P(P) = P((S \cap P) \cup (M \cap P))$

$= P(S \cap P) + P(M \cap P)$

$\Leftrightarrow P(P) = P(S) \times P(P/S) + P(M) \times P(P/M)$

$= \frac{97}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{95}{100}$

$= \frac{97}{10000} + \frac{285}{10000}$

donc $P(P) = \frac{191}{5000}$

2-d) N est l'événement « Avoir un test négatif »

$P(N) = P(S) \times P(N/S) + P(M) \times P(N/M)$

$= \frac{97}{100} \times \frac{99}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{5}{100}$

$= \frac{9603}{10000} + \frac{15}{10000}$

donc $P(N) = \frac{4809}{5000}$

3-a) Soit S/P l'événement « Etre sain sachant que le test est positif »

On sait : $P(S/P) = \frac{P(S \cap P)}{P(P)} = \frac{97}{10000} \times \frac{5000}{191}$

$P(S/P) = \frac{97}{382}$

3-b) Soit M/N l'evenement « Etre malade sachant que le test est négatif »

$P(M/N) = \frac{5 \times 3}{10000} \times \frac{5000}{4809}$

6) Evenement independant :

a) Définition

Soient A et B deux événements de probabilités nuls.
A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre

Autrement dit :

A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A/B) = P(A)$ ou $P(B/A) = P(B)$

b) Théorème :

- A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants

Application

Dans une population, un individu est atteint par une maladie m avec une probabilité de 0,005 et par une maladie n avec une probabilité de 0,01
On choisit au hazard un individu de cette population.
Soient M l'événement « l'individu a la maladie m » et N l'événement « l'individu a la maladie n »
On suppose que M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement : « l'individu a au moins l'un des deux maladies »

Solution

Posons A l'evenement : « l'individus a au moins l'un des deux maladies » $\Leftrightarrow A = M \cup N$

$\Rightarrow P(A) = P(M) + P(N) + P(M \cap N)$
$= P(M) + P(N) - P(N) \times P(M)$
donc $P(A) = 0,01495$

Remarque : Ne pas confondre des événements indépendants aux événement incompatibles.

* A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
* A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

IV) Variables aléatoires

a) Définition

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$

b) Vocabulaire

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ est appelé univers image de Ω par X.
- $(X = x_i)$ désigne l'événement « x prend la valeur x_i »
- $(x < k)$ désigne l'événement « x prend une valeur strictement inférieur à k ».

Application

Une urne contient 3BR et 4BB
On tire deux boules simultanément et au hazard.
On gagne 100F par boule rouge tirée.
Déterminer les gains possibles et leurs probabilités

Solution

Les gains possibles $X(\Omega) = \{0, 100, 200\}$ Car on peut tirer 0 ou 1 ou 2 BR.
Les probabilités respectives sont :

$X = 0$ $P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$

$X = 100$ $P(X=100) = 4/7$

$X = 200$ $P(X=200) = 1/7$

c) Loi de probabilité

Soit P une probabilité définit sur un univers Ω. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X (ou loi de probabilité transportée par X), l'applicat

Scanned by CamScanner

qui a tout element x_i fait correspondre $P(X=x_i)$

$$P : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$x_i \longrightarrow P(X=x_i)$$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n

Remarque

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$$

d) Caractéristique d'un variable aléatoire

On considère un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité P et X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et

$$p_i = P(X=x_i)$$

→ Espérence mathématique

On appelle espérence mathématique de X le réel noté $E(X)$ ou $\overline{X}$ tels que :

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) \dots + x_n P(X=x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X=x_i)$$

→ Variance :

On appelle variance le nombre réel positif $V(X)$ tels que

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times p_i$$

* Formule de Köenig

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

→ Ecartype :

On appelle écartype de X le nombre réel positif $\sigma(X)$ tels que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4) Fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire d'univers Ω. La fonction de répartition de la variable aléatoire X et la fonction F définie ~~par~~ sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(X) = P(X \leq x)$$

La fonction de répartition est une fonction en escalier qu'on définit de la manière suivante : $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ étant les valeurs prises par X dans l'ordre croissant :

Si $x \in]-\infty, x_1[$ alors $F(X) = 0$

Si $x \in [x_1, x_2[$ alors $F(X) = P(X=x_1)$

Si $x \in [x_2, x_3[$ alors $F(X) = P(X=x_1) + P(X=x_2)$

Si $x \in [x_n, +\infty[$ alors $F(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

Application

On jette deux dés et ayant la forme d'un tétraèdre régulier dont les faces sont numerotées de 1 à 4. On note X la somme des numéros obtenus.

Scanned by CamScanner

1) Déterminer la loi de probabilité
2-a) Définir la fonction de répartition de X
b) Représenter cette fonction
3) Calculer: l'espérance mathématique de X
la variance de X
l'écartype de X

7) Loi de Bernoulli

a) Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S) et échec (noté $\bar{S}$) de probabilité respectives p et $1-p$.
La loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli

Application

Une urne contient 70BR et 30BN. On tire au hasard une boule de l'urne.
Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli.
On appelle succès "le Tirage d'une BR"
Donner la loi de probabilité

Solution

Cette expérience est une épreuve de Bernoulli car comptant uniquement 2 cas possibles:
Soit tirer 1BR, soit tirer une BN.
La loi de probabilité
Soit S l'évènement succès "tirer 1BR"

$$P(S) = \frac{70}{100} \Rightarrow P(\bar{S}) = \frac{3}{10}$$

Issues	S	$\bar{S}$
Probas	7/10	3/10

b) Loi binomiale

b-1) Définition

On dit que une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si X est la variable aléatoire définie par le nombre de succès obtenus en répétant n fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli

b-2) Théorème

Théorème 1:
Si X suit la loi binomiale de paramètre n et p alors la probabilité d'obtenir exactement k succès (avec $0 \leq k \leq n$) est : $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Théorème 2:
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors :
- l'espérance mathématique de X est : $E(X) = np$
- la variance est : $V(X) = np(1-p)$

Application

On considère deux urnes U_1 et U_2.
U_1 contient 3BB et 2BN.
U_2 contient 5BB et 1BN.
L'expérience consiste à tirer 1B dans chaque urne
1) Calculer la probabilité de l'évènement "tirer 2B de même couleur" A
2) On répète l'expérience 05 fois de suit avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'evenement A
3) On répète l'expérience n fois dans les même conditions. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins 1 fois l'évènement A.
4) Trouver le plus petit entier n tels que $P_n \geq 0,999$.

Scanned by CamScanner

Solution

1) Soit Ω l'univers comportant l'ensemble des cas possibles

$$\text{Card}\,\Omega = 5 \times 6 = 30$$

A l'evenement « tirer 2B de même couleur »

$$\text{Card}\,A = 3 \times 5 + 2 \times 1 = 17$$

Ainsi $P(A) = \dfrac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \dfrac{17}{30}$ donc $P(A) = \dfrac{17}{30}$

2) On a une épreuve de Bernoulli de n et p

avec $n = 5$, $p = \dfrac{17}{30}$

Posons l'évenement A comme étant le succes $k = 3$

Ainsi $P_3 = C_5^3 \times \left(\frac{17}{30}\right)^3 \times \left(\frac{13}{30}\right)^2$

$= 0,34168$

3) L'expérience étant repeter n fois de suit alors la probabilité d'obtenir au moins 1 fois l'evenement A est : $P_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1 - P_0$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i \quad \text{avec} \quad P_i = C_n^i \left(\frac{17}{30}\right)^i \times \left(\frac{13}{30}\right)^{n-i}$$

4) Déterminons n tels que $P_n \geq 0,999$

On sait que $P_n \leqslant P_n$ $\quad 0,999 \leqslant P_n \leqslant 1$

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i \left(\frac{17}{30}\right)^i \times \left(\frac{13}{30}\right)^{n-i}$$

Posons $P_n = 0,999 \iff 1 - (1-p)^n = 0,999$

$\iff (1-p)^n = 0,001$

$n \ln\left(\frac{13}{30}\right) = \ln 0,001$

$n = 9$

Géométrie dans l'espace

$\mathcal{E}$: l'ensemble des points de l'espace

$\vec{\mathcal{E}}$ = l'ensemble des vecteurs de l'espace.

I) Vecteurs coplanaires, points coplanaires, repère de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartenant à $\vec{\mathcal{E}}$.

Si pour tous réels a, b et c, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow$ $a = b = c$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Dans ce cas l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

2) Points coplanaires

A, B, C et D sont quatre points de l'espace $\mathcal{E}$

A, B, C et D sont coplanaires $\iff$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

3) Repère de l'espace

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont non coplanaires, on dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$ et pour tout point $O \in \mathcal{E}$ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de $\mathcal{E}$.

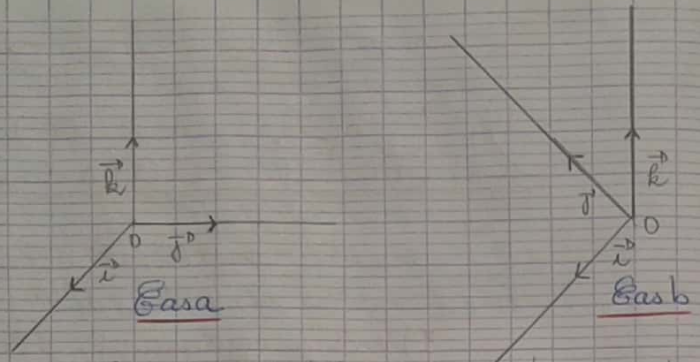
II) Orientation

1) Orientation dans l'espace

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$ avec $\vec{i} = \vec{OI}$ $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \vec{OK}$

On a deux situations :

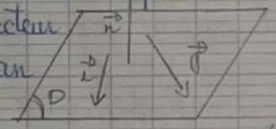
Scanned by CamScanner



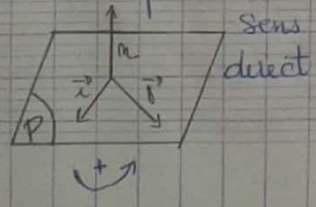
Un bonhomme d'ampère dont les pieds sont en O et regardant le point I a :
→ Sa main gauche qui indique le point J dans le cas a
→ Sa main droite " " le point J en b
Un repère du type @ est dit direct
Un repère du type (b) est dit indirect
Orienté l'espace c'est faire la distinction entre ces deux types de repères.

2) Orientation d'un plan dans l'espace

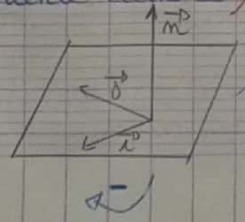
Soit un plan (P) de l'espace et $(\vec{i},\vec{j})$ une base de (P)
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (P)



On oriente un plan (P) dans l'espace à l'aide d'un vecteur normal à (P)
Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{n})$ est une base directe de $\mathcal{E}$, on dit que le plan est orienté dans le sens direct
Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{n})$ est une base indirecte de $\mathcal{E}$, on dit que le plan (P) est orienté dans le sens indirecte.



sens direct

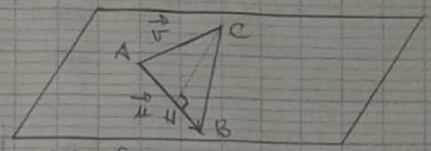


sens indirect

III) Produit scalaire

1) Définition

Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$



Dans le plan ABC, H est le projeté orthogonal de C

$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AH}$$

2) Autres expressions du produit scalaire

a) $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{BAC})$

b) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

c) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés alors
$\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|$

d) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$
or $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ et $\vec{v}^2=\|\vec{v}\|^2$
alors $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$

e) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}.\vec{v}\Leftrightarrow\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$
$\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

3) Propriétés

a) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ b) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
c) $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$ avec $k\in\mathbb{R}$
d) $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$ e) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$
f) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}.\vec{v}$
g) $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

4) Orthogonalité, repère orthogonal, repère orthonormé

a) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}=0$
$\vec{u}\perp\vec{v}$

b) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthogonal si :
$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$

Scanned by CamScanner

c) $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé ou orthonormal si $\begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$

5) Expression analytique

Soit l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

IV) Droite dans l'espace

Notation : $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ = droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) $\mathcal{D}(A,\vec{u}) = \{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = k\vec{u},\ k \in \mathbb{R} \}$

$(A,\vec{u})$ est un repère de la droite $(\mathcal{D})$

$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ indique que k est l'abscisse du point M dans le repère $(A,\vec{u})$

On dit aussi que k est le paramètre de M dans $(A,\vec{u})$

2) Représentation paramétrique d'une droite

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{D}(A,\vec{u})$

Ainsi $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

Donc $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k\alpha \\ y - y_A = k\beta \\ z - z_A = k\gamma \end{cases}$

Alors $\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

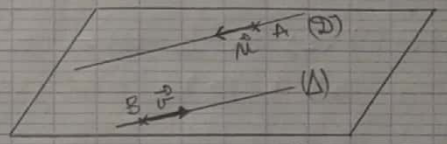
3) Positions relatives de deux droites

Soient deux droites $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $\Delta(B,\vec{v})$ dans l'espace

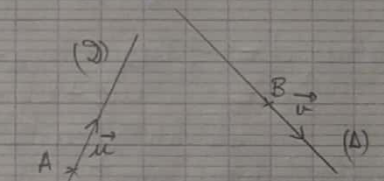
a) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\left(\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \alpha\right)$ alors les deux droites $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont parallèles.

Si $A \in (\Delta)$ alors $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont confondues

Si $A \notin (\Delta)$ alors $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont strictement parallèles.



b) Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires



Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires alors $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont coplanaires donc elles sont aussi sécantes.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires alors (Δ) et $(\mathcal{D})$ ne sont pas coplanaires.

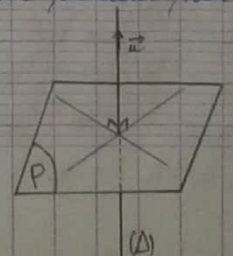
c) Orthogonalité : $\mathcal{D}(A,\vec{u}) \perp \Delta(B,\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

V) Plan dans l'espace

1) Vecteur normal à un plan :

Soit $(\mathcal{P})$ un vecteur de plan dans l'espace $\mathcal{E}$.

Tout vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite (Δ) perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$

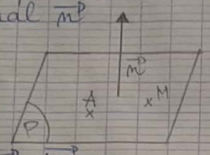


Scanned by CamScanner

2) Equation cartésienne d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
(P) est un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$
$\vec{n}(a;b;c)$
$M(x;y;z)$



$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

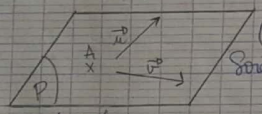
$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A)=0$

Posons $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$
Donc $ax+by+cz+d=0$
équation cartésienne de (P)

Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne d'un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$

3) Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
(P) est un plan passant par A et de base $(\vec{u},\vec{v})$



$(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère de (P)
Soient $A(x_A;y_A;z_A)$
$\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$

Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan (P) équivaut
$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}+k'\vec{v}$ avec $(k,k') \in \mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A = k\alpha+k'\alpha' \\ y-y_A = k\beta+k'\beta' \\ z-z_A = k\gamma+k'\gamma' \end{cases} \text{ avec } (k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A+k\alpha+k'\alpha' \\ y = y_A+k\beta+k'\beta' \\ z = z_A+k\gamma+k'\gamma' \end{cases} (k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique du plan (P)

Passage d'une équation cartésienne du plan (P) à une représentation paramétrique

(P) : $ax+by+cz+d=0$
Posons comme paramètre y et z avec $y=k$ et $z=k'$
donc $x=-\frac{b}{a}k-\frac{c}{a}k'-\frac{d}{a}$

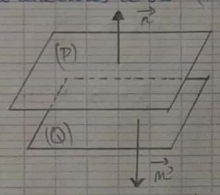
Ainsi on obtient : $\begin{cases} x=-\frac{b}{a}k-\frac{c}{a}k'-\frac{d}{a} \\ y=k \\ z=k' \end{cases}$

Donc (P) est un plan passant par $A(-\frac{d}{a};0;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-\frac{b}{a};1;0)$ et $\vec{v}(-\frac{c}{a};0;1)$

4) Position relative de deux plans

Soient deux plans (P) et (Q) de vecteurs normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n'}$

a) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires alors (P) // (Q)



b) Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires alors (P) et (Q) sont sécantes et leur intersection est une droite (Δ)
En particulier, si $\vec{n} \perp \vec{n'}$ (P) et (Q) sont perpendiculaires

Scanned by CamScanner

Exemples : Soient deux plans (P) et (Q) tels que

$(P) : x+2y-4z+3=0 \quad \vec{n}(1,2,-4)$

a) $(Q) \; -2x-4y+8z+5=0 \; \vec{n}'(-2,-4,8)$

On constate que $\vec{n}' = -2\vec{n} \Rightarrow \vec{n}'$ et $\vec{n}$ colinéaires

d'où (P) et (Q) sont parallèles strictement

b) $(P) : x+2y-z+3=0 \quad \vec{n}(1,2,-1)$

$2x-y+3z-1=0 \quad \vec{n}'(2,-1,3)$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc (P) et (Q) sont sécantes.

Leur intersection est une droite (Δ) de système d'équations : $\begin{cases} L_1) \; x+2y-z+3=0 \\ L_2) \; 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ -5y+5z-7=0 \quad (L_2-2L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=z-3 \\ y=z-\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\left(z-\frac{7}{5}\right)-z+3=0 \\ y=z-\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-z-\frac{1}{5} \\ y=z-\frac{7}{5} \end{cases}$$

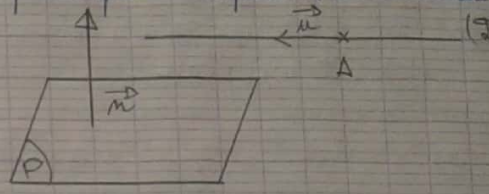
Posons $z=k$ donc $\begin{cases} x=-\frac{1}{5}-k \\ y=-\frac{7}{5}+k \\ z=k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$

$(P)\cap(Q)=(\Delta)$ et (Δ) est la droite passant par $A\left(-\frac{1}{5},-\frac{7}{5},0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,1,1)$

5) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ une droite de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

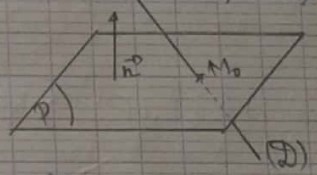
a)



Si $\vec{u}\perp\vec{n}$ alors $(\mathcal{D})\parallel(P)$.

- Si $A\in(P)$ alors $(\mathcal{D})\subset(P)$
- Si $A\notin(P)$ alors $(\mathcal{D})$ et (P) sont strictement parallèle

b) Pour $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ donc $(\mathcal{D})$ et (P) sont sécantes en M_0



Exemple :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite caractérisée par :

$$\begin{cases} x=1+2k \\ y=-2+k \\ z=3+5k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R} \qquad \vec{u}(2,1,-5)$$

Et $(P) : 7x-5y-3=0 \quad \vec{n}(7,-5,1)$

$\vec{n}.\vec{u} = 14-5-5 = 4 \neq 0$

Donc (P) et $(\mathcal{D})$ sont sécantes

Soit $M_0 = (\mathcal{D})\cap(P)$

D'une part $M_0\in(\mathcal{D}) \Rightarrow M_0(1+2k_0, -2+k_0, 3-5k_0)$

D'autre part $M_0\in(P)$

$\Rightarrow 7(1+2k_0)-5(-2+k_0)-3+(3-5k_0)=0$

$7+14k_0-5k_0+10-3+3-5k_0=0$

$\Leftrightarrow 4k_0=-17 \Rightarrow k_0=-\frac{17}{4}$

Par suite $\begin{cases} x_0=1-\frac{17\times 2}{4}=-\frac{15}{2} \\ y_0=-2-\frac{17}{4}=-\frac{25}{4} \end{cases}$ $\quad z_0=3+5\left(\frac{17}{4}\right)$

$z_0=\frac{97}{4}$

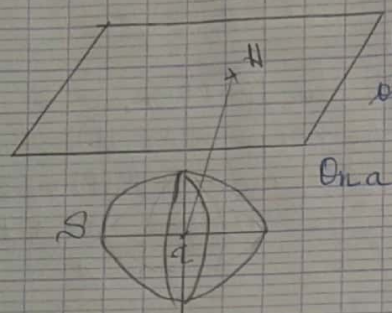
Scanned by CamScanner

donc $M\left(-\frac{15}{2}, -\frac{25}{4}, \frac{97}{4}\right)$

6) Intersection d'un plan et d'une sphère

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère de centre Ω et de rayon R
(P) est un plan.

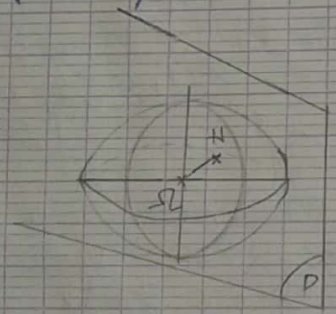
a)



H est le projeté orthogonal de Ω sur (P)
On a: $\Omega H = d(\Omega, (P))$

Si $d(\Omega, (P)) > R$ alors $(S) \cap (P) = \emptyset$

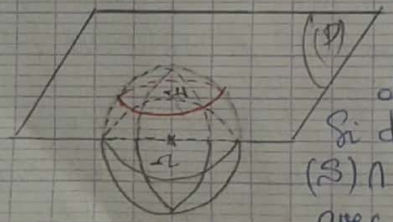
b)



H est le projeté orthogonal de Ω sur (P)

Pour $d(\Omega, (P)) = R$, on a:
(P) tangente à (S) en H.

c)



H est le projeté orthogonal de Ω sur (P)
Si $d(\Omega, (P)) < R$
$(S) \cap (P) = \mathcal{C}(H, r)$
avec $r^2 = R^2 - \Omega H^2$

Le 28 Avril 2019

VI) Produit Vectoriel

1) Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tels que :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{BAC})|$

Remarque:
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

2) Propriétés :

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
b) $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$
c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

3) Expression analytique

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$
Soit $\vec{u} \wedge \vec{v}(X, Y, Z)$
$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$\begin{matrix} x & y & z & x & y \\ x' & y' & z' & x' & y' \end{matrix}$$

X Y Z

$$X = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - zy' \qquad Z = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

$$Y = \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} = zx' - xz'$$

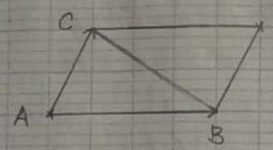
4) Application

Scanned by CamScanner

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff$ A, B et C alignés

b) Aires

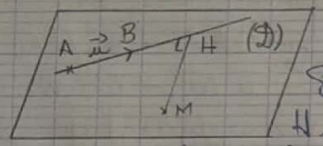


Aire $(ABC) = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$

Aire $(ABDC) = \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$

c) Distance d'un point à une droite

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$



$(\mathcal{D})$: droite dirigée par $\vec{u}$

Soit M un point de l'espace

H projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$

$MH = d(M, (\mathcal{D}))$

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$

Puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

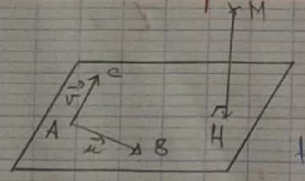
donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \| = \| \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{HM} \| \times \| \overrightarrow{AB} \|$

d'où $\| \overrightarrow{HM} \| = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$

$$d(M, (\mathcal{D})) = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$$

d) Distance d'un point à un plan



$(\mathcal{P})$ est un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$

M un point de l'espace

H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$

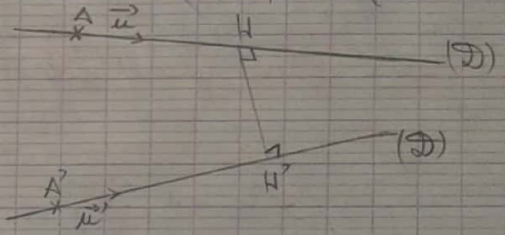
On sait que $d(M, (\mathcal{P})) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\| \vec{n} \|}$, $\vec{n}$ étant un vecteur normal à $(\mathcal{P})$

Soit $(\mathcal{P}) = (ABC)$ et $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

d'où $$d(M; (\mathcal{P})) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}$$

e) Distance entre deux droites

Soient deux droites $\mathcal{D}(A; \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(A'; \vec{u}')$ de l'espace.



Supposons qu'il existe une perpendiculaire commune à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ tels que cette droite commune coupe $(\mathcal{D})$ en H et $(\mathcal{D}')$ en H'

HH' est la distance entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) \cdot \vec{n}$

$= \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}_{0} + \overrightarrow{HH'} \cdot \vec{n} + \underbrace{\overrightarrow{A'H} \cdot \vec{n}}_{0}$

Ainsi $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HH'} \cdot \vec{n} \Rightarrow |\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n}| = \| \overrightarrow{HH'} \| \times \| \vec{n} \|$

$$HH' = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n}|}{\| \vec{n} \|}$$

d'où $$HH' = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\| \vec{u} \wedge \vec{u}' \|}$$

5) Produit mixte

a) Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est un réel noté

Scanned by CamScanner

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ tel que

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

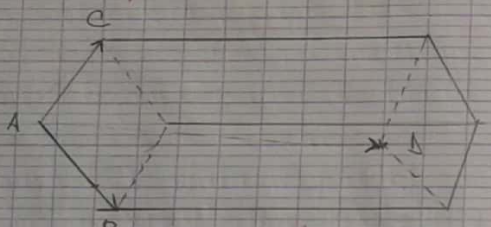
b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0 \iff \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires

c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\neq 0 \iff$ le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace

Si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]>0$, la base est directe

Si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]<0$, la base est indirecte

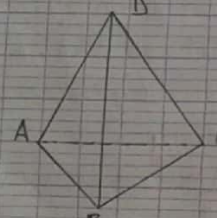
d) Volume d'un parallélépipède



Volume du parallélépipède $= \left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|$

$$= \left|(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{AD}\right|$$

e) Volume d'un tétraèdre



$V = \frac{1}{3}$ Aire $(ABC) \times$ hauteur

aire $(ABC) = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$

$h = d(D,(ABC)) = \dfrac{|\vec{DA}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC})|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$

donc $V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|\times\dfrac{|\vec{DA}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC})|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{DA}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\right|$$

d'où Volume $= \frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|$

Transformations de l'espace

I) Translations - Homothéties Le 03 Mai 2019

$\mathcal{E}$: l'ensemble des points de l'espace

1) Translation

a) Définition

$\vec{u}$ est un vecteur de l'espace.

La translation de vecteur $\vec{u}$ dans l'espace est l'application

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$t_{\vec{u}} : M \longmapsto t_{\vec{u}}(M) = M' \text{ tels que } \vec{MM'} = \vec{u}$$

Pour $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ = identité dans l'espace

b) Propriétés

- $t_{\vec{u}}$ est une transformation de l'espace et sa bijection réciproque est $t^{-1}_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}}$
- f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une translation $\iff$ si $f(M)=M'$ et $f(N)=N'$ alors $\vec{M'N'} = \vec{MN}$

c) Composée de deux translation

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}$$

2) Homothéties

a) Définition

Soit Ω un point de l'espace et k un réel donné.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application

$$h(\Omega,k) = \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longrightarrow & h_{(\Omega,k)}(M) = M' \end{array} \text{ tels que } \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$$

Si $k=0$, $h_{(\Omega,k)}$ est constante, c'est à dire $h(M)=\Omega$

Si $k=1$ alors $h_{(\Omega,k)}$ est une identité de l'espace

Scanned by CamScanner

b) Propriétés

* $h(\Omega, k)$ pour $k \in \mathbb{R}^*$ est une transformation de l'espace et sa transformation réciproque est $h^{-1}(\Omega, k) = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$
* f une application de l'espace dans lui même
$\Leftrightarrow$ si $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

c) Composée de deux homothétie

* $h(\Omega, k) \circ h(\Omega, k') = h(\Omega, kk')$ si $kk' \neq 1$

Pour $kk' = 1$ alors la composée est une translation

* $h(\Omega, k) \circ h(\Omega', k') = h(\Omega_1, kk')$

De plus $h(\Omega, k) \circ h(\Omega', k') \neq h(\Omega', k') \circ h(\Omega, k)$

Si $kk' = 1$ alors la composée est une translation

3) Propriétés des translations et des homothétie.

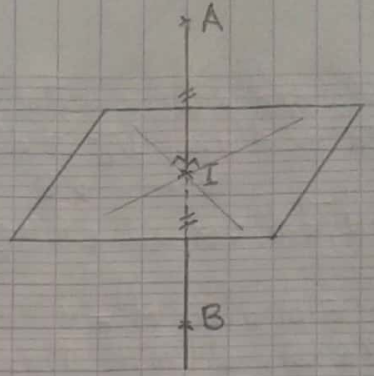
* $t_{\vec{u}}$ est une isométrie de l'espace
* $h(\Omega, k)$ multiplie les distances par $|k|$ c'est à dire si $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $M'N' = |k| \times MN$
* $t_{\vec{u}}$ et $h(\Omega, k)$ transforment un plan (P) en un plan (P') avec (P) // (P')
* $t_{\vec{u}}$ et $h(\Omega, k)$ transforment deux plans parallèles en deux plans parallèles et deux plans orthogonaux en deux plans orthogonaux
* $t_{\vec{u}}$ et $h(\Omega, k)$ conservent le parallélisme, l'orthogonalité, la perpendicularité entre deux plans, deux droites ou un plan et une droite.

II) Réflexion

1) Plan médiateur d'un segment

Le plan médiateur (P) d'un segment [AB] est le plan passant par le milieu du segment [AB] et qui lui est perpendiculaire.

I est le milieu du segment [AB]



Le plan médiateur est l'ensemble des points M de l'espace est tels que MA = MB

2) Définition d'une reflexion

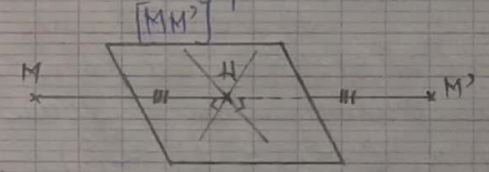
Soit un plan (P) de l'espace.

La symétrie orthogonale par rapport au plan (P) ou reflexion de plan (P) est l'application :

$$S_P : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad M \longmapsto S_P(M) = M'$$ tel que :

si $M \in (P)$ alors $M' = M$

si $M \notin (P)$ alors (P) est le plan médiateur du segment [MM']



H milieu [MM']

3) Propriétés d'une reflexion

a) Une reflexion (P) est une transformation de l'espace.

La bijection réciproque $S_P^{-1} = S_P$

C'est à dire $S_P \circ S_P^{-1}$ = identité de l'espace

b) L'ensemble des points invariants par S_P est le plan (P)

c) S_P est une isométrie.

III) Rotation

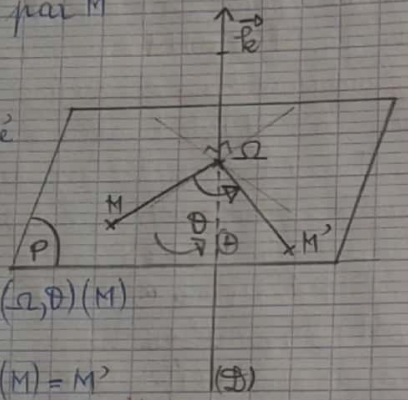
Soit (D) une droite de l'espace $\mathcal{E}$, $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de (D). Soit θ un réel donné.

Scanned by CamScanner

$\Delta_{\vec{k}}$ est la droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{k}$.
La rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ est l'application

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$r(\Delta,\vec{k},\theta) : M \longmapsto r(\Delta_{\vec{k}},\theta)(M) = M' \text{ tel que}$$

* Si $M \in (\Delta)$ alors $M' = M$
* Si $M \notin (\Delta)$, soit (P_M) le plan perpendiculaire à $(\Delta_{\vec{k}})$ et passant par M



$\Omega = (\mathcal{D}) \cap (P)$
(P_M) est orienté par $\vec{k}$
Ainsi $M' = r(\Omega,\theta)(M)$
On a alors
$r(\Delta_{\vec{k}},\theta)(M) = M'$

2) Propriétés d'une rotation

a) $r(\Delta_{\vec{k}},\theta)$ est une tranformation de l'espace.
La tranformation réciproque est $r^{-1}(\Delta_{\vec{k}},\theta) = r(\Delta_{\vec{k}},-\theta)$
b) $r(\Delta_{\vec{k}},-\theta) = r(\Delta,-\vec{k},\theta)$
$r(\Delta,-\vec{k},-\theta) = r(\Delta,\vec{k},\theta)$

IV) Composition et décomposition Demi-tour

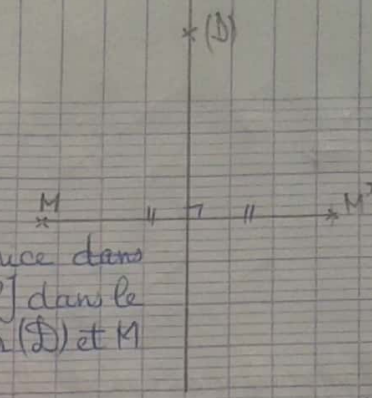
1) Définition

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace
La reflexion orthogonale par rapport à (Δ) ou demi-tour d'axe $(\mathcal{D})$ est l'application:

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$S_{\mathcal{D}} : M \longmapsto S_{\mathcal{D}}(M) = M' \text{ tel que}$$

* Si $M \in (\Delta)$, alors $M = M'$

* Si $M \notin (\Delta)$



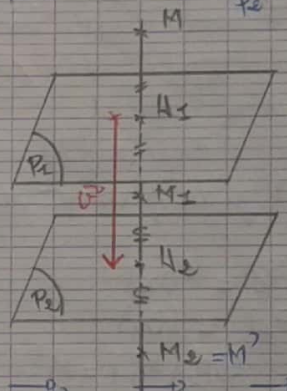
$(\mathcal{D})$ est la médiatrice dans du segment $[MM']$ dans le plan défini par $(\mathcal{D})$ et M

Remarque:
$S_{\mathcal{D}}$ est aussi une rotation d'angle π d'où le nom de demi-tour

V) Composition et décomposition

1) Composée de deux reflexions de plans parallèles

Soient (P_1) et (P_2) deux plans parallèles de l'espace.
Soient M, M_1 et M', tels que
$M_1 = S_{P_1}(M)$ $M' = S_{P_2}(M_1)$ donc $M' = S_{P_2} \circ S_{P_1}(M)$

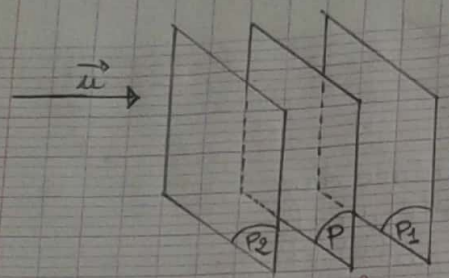


H_1 est milieu de $[MM_1]$
H_2 milieu de $[M_1M']$
donc $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{MH_1} = 2\overrightarrow{H_1M_1}$
$\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1H_2}$

On a ainsi $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2}$
$= 2(\overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2})$
Donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{H_1H_2} = 2\vec{v}$
D'où $S_{P_2} \circ S_{P_1}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$

Réciproque:
$t_{\vec{u}}$ est une translation
Soit (P) un plan quelconque dont $\vec{u}$ est un vecteur normal

Scanned by CamScanner



Soient $(P_1) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}((P))$

$(P_2) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}((P))$

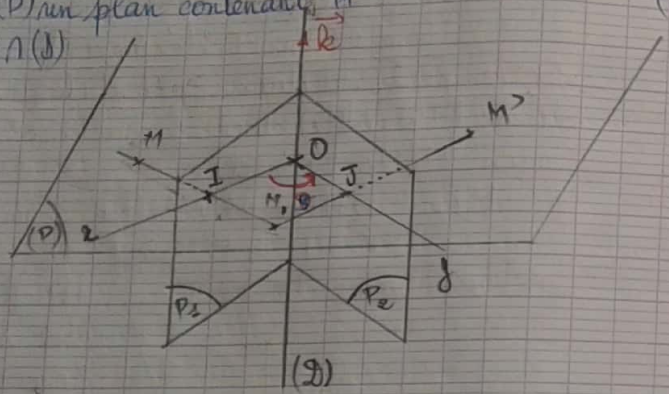
On a: $S_{P_2} \circ S_{P_1} = S_{P_2} \circ S_P = t_{\vec{u}}$

2) Composée de deux réflexions de plans sécants

Soient (P_1) et (P_2) deux plans sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$

Soit (P) un plan contenant $(\mathcal{D})$

$O = (P) \cap (\mathcal{D})$



$M \notin (\mathcal{D})$ et (P_M) plan passant par M et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$

$(P_M) \cap (P_1) = (Ox)$

$(P_M) \cap (P_2) = (Oy)$

$S_{P_1}(M) = M_1 \quad S_{P_2}(M_1) = M'$

$\vec{k}$ vecteur directeur de $(\mathcal{D})$

Dans le plan (P_M), $M_1 = S_{Ox}(M)$ et $M' = S_{Oy}(M_1)$

donc $M' = S_{Oy} \circ S_{Ox}(M) = r(O, \theta)$

avec $\theta = 2(\vec{OI}, \vec{OJ})$ dans (P_M) orienté par le vecteur unitaire $\vec{k}$

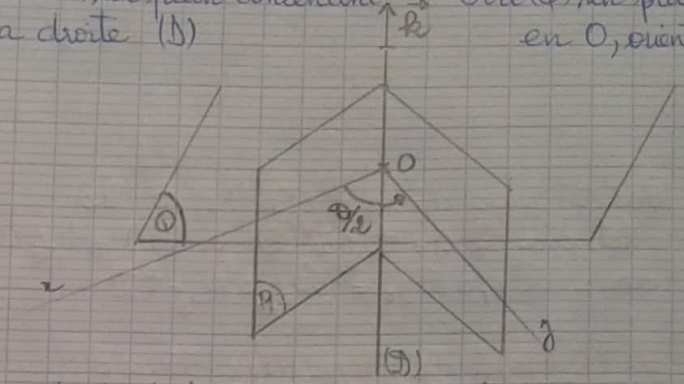
D'où $S_{P_2} \circ S_{P_1} = r(\mathcal{D}, \vec{k}, \theta)$

Réciproque

Soit la rotation $r(\mathcal{D}, \vec{k}, \theta)$

Soit (P) un plan contenant la droite $(\mathcal{D})$

Soit (Q) un plan $\perp (\mathcal{D})$ en O, orienté par $\vec{k}$



Soit (Ox) l'intersection de (Q) et (P)

Soit (Oy) tels que $(\widehat{Ox, Oy}) = \frac{\theta}{2}$

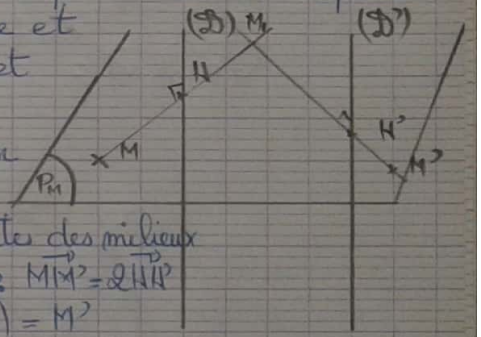
Soit le plan contenant $(\mathcal{D})$ et (Oy) appelé (P')

On a alors $S_{P'} \circ S_P = r(\mathcal{D}, \vec{k}, \theta)$

3) Composée de deux demi-tour d'axes parallèles

Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites parallèles de l'espace

M est un point de l'espace et (P_M) le plan contenant M et perpendiculaire aux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ respectivement en H et H'



D'après le théorème des droites des milieux dans le triangle MM_1M_1 : $\vec{MM'} = 2\vec{HH'}$

$S_{\mathcal{D}}(M) = M_1$ et $S_{\mathcal{D}'}(M_1) = M'$

donc $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}(M) = M'$

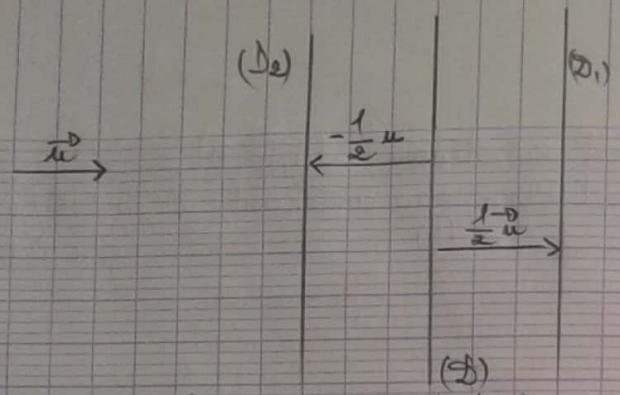
Ainsi $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\vec{HH'}}$

Réciproque :

Soit la translation $t_{\vec{u}}$

$(\mathcal{D})$ est une droite tel que $\vec{u}$ soit son vecteur normal

Scanned by CamScanner



Soient deux autres droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$
tels que $(\mathcal{D}_1) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}_2) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D})$
donc $S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1} = S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{\vec{u}}$

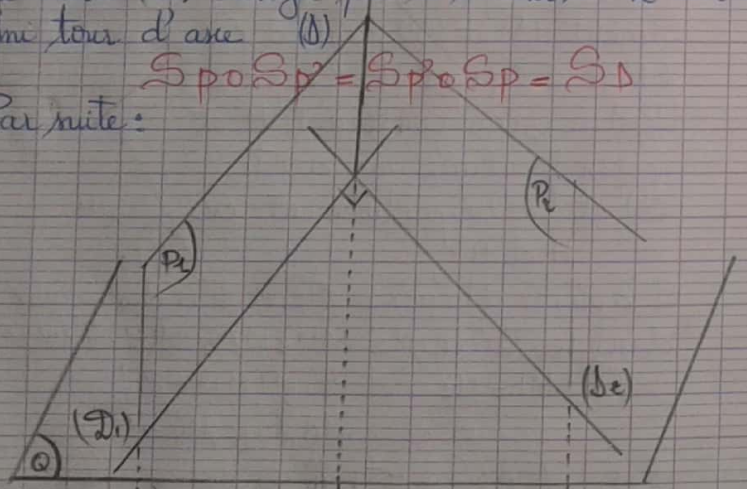
4) Composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites perpendiculaires

Remarque :
La composée de deux réflexions S_p et $S_{p'}$ dont les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires et sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{k}$ est le demi tour d'axe (Δ)

$$S_p \circ S_{p'} = S_{p'} \circ S_p = S_\Delta$$

Par suite :



$(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ déterminent le plan (Q)
Soit (P_1) le plan perpendiculaire à (P) et contenant la droite $(\mathcal{D}_1)$ (Δ)

(P_2) est le plan perpendiculaire à (Q) contenant $(\mathcal{D}_2)$
De plus $(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$
On a : $S_{P_1} \circ S_Q = S_Q \circ S_{P_1} = S_{\mathcal{D}_1}$
$S_{P_2} \circ S_Q = S_Q \circ S_{P_2} = S_{\mathcal{D}_2}$
Donc $S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1} = S_Q \circ S_{P_2} \circ S_Q \circ S_Q \circ S_{P_1}$

Donc $S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1} = S_{P_2} \circ S_{P_1} = S_\Delta$

Finalement :

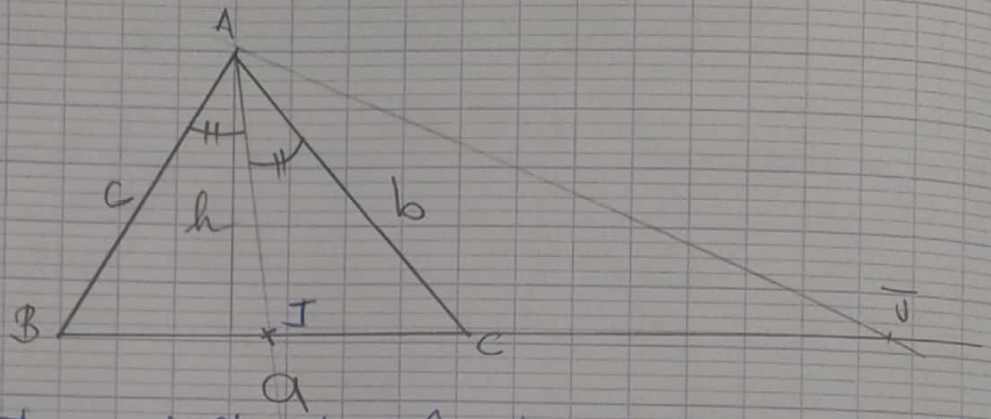
$$S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1} = S_\Delta$$

Scanned by CamScanner

Equation vectorielle de la droite d'Euler

Pour un triangle ABC avec H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscris au triangle on a:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$



Pour (AI) Bissectrice de l'angle $B\hat{A}C$ et (AJ) Bissectrice extérieure

On a: $Aire(ABI) = \frac{1}{2} h_{BI} = \frac{1}{2} AB \times AI \sin\frac{\hat{A}}{2}$

$$Aire(ACI) = \frac{1}{2} h_{CI} = \frac{1}{2} AC \times AI \sin\frac{\hat{A}}{2}$$

Ainsi $\frac{Aire(ABI)}{Aire(ACI)} = \frac{1}{2} h_{BI} \times \frac{2}{h_{CI}} = \frac{1}{2} AB \times AI \sin\frac{\hat{A}}{2} \times \frac{2}{AC \times AI \times \sin\frac{\hat{A}}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b\,BI = c\,CI$$

Posons $\vec{u} = -b\overrightarrow{BI}$ et $\vec{v} = -c\overrightarrow{CI}$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

Comme $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés

alors $-\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$

D'où $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Conclusion I Barycentre du système $\{(B,b)$ et $(C,c)\}$

De la même manière: J Barycentre $\{(B,b)$ et $(C,-c)\}$

Scanned by CamScanner