

Club de l'Excellence

Epreuves de Mathématiques

Mathématiques Terminales S

Concours Général

☞ *Conseils pratiques*

☞ *Réflexes*

☞ *Epreuves du Concours Général de 1990 à 2011*

☞ *Des corrigés détaillés*

Présentation

Thierno Korka DIALLO

Elève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

Nul n'entre ici s'il n'est Mathématicien

Club de l'Excellence

Mathématiques

Concours Général Sénégalais

Terminales S



Hommage au professeur NIANG

☞ S'entraîner avec des sujets du concours général de 1990 à 2011

☞ Corrigés détaillés

Introduction

Vous préparez le Concours Général de Mathématiques, alors n'hésitez pas à vous mettre à l'épreuve dès maintenant en vous mesurant à un niveau de difficulté supérieur.

Dans la mesure où les programmes sont allégés d'année en année, voire en cours d'année, l'écart s'accroît entre ce qu'il suffit de savoir pour « être un bon élève » et ce qu'il faut maîtriser pour préparer le Concours Général.

Par une sélection de sujets particuliers, l'auteur a voulu atteindre un double objectif : d'une part aider les professeurs qui continuent, envers et contre tous, à être exigeants, dans l'intérêt même des élèves ; d'autre part, offrir aux élèves curieux, comme à ceux qui sont sensibles au plaisir des maths - et il en existe beaucoup - le bonheur de s'entraîner à des exercices qui dépassent la simple application du cours et requièrent réflexion, finesse et ingéniosité.

Sauf dans le cas d'une défaillance des programmes, il ne s'agit pas de déborder sur les programmes ultérieurs, mais plutôt d'aider les candidats aux Concours.

Vous trouverez ainsi :

- des sujets particulièrement difficiles, qui exigent un peu plus d'imagination ou de familiarité avec un certain type de questions ;
- ~ des exercices incontournables, qui offrent des outils précieux aux professeurs et dont la classe « peut traiter, et qui, l'année suivante, feront partie de ce que « tout le monde sait ».

Je ne cherche pas à faire de la publicité pour ce document, mais plutôt d'aider nos candidats à avoir une idée de ce qui les attend et de s'y préparer.

L'orientation étant bien indiquée, il appartient à chaque bénéficiaire d'en tirer le plus de profit possible.

Thierno Korka DIALLO

Contacts

Thierno Korka DIALLO, Tel: (+221 465 32 33) email: korka1991@yahoo.com

Pour mettre les élèves dans une vraie situation de recherche, j'ai pensé qu'il serait plus judicieux de séparer les épreuves des corrigés. Cependant, ceux qui auraient besoin de corrigés pourront me contacter au numéro ci-dessus

Sommaire

Histoire des Mathématiques	6
Epreuve de 1990.....	11
Epreuve de 1991.....	14
Epreuve de 1992.....	17
Epreuve de 1993.....	22
Epreuve de 1994.....	28
Epreuve de 1995.....	34
Epreuve de 1996.....	38
Epreuve de 1997.....	42
Epreuve de 1998.....	46
Epreuve de 1999.....	49
Epreuve de 2000.....	52
Epreuve de 2001.....	58
Epreuve de 2002.....	61
Epreuve de 2003.....	65
Epreuve de 2004.....	70
Epreuve de 2005.....	79
Epreuve de 2006.....	83
Epreuve de 2007.....	86
Epreuve de 2008.....	89
Epreuve de 2009.....	93
Epreuve de 2010.....	99
Epreuve de 2011.....	104

Au nom d'ALLAH, le Clément et le Miséricordieux

Je rends grâce à ALLAH le Tout – Puissant dont la main mystérieuse est en tout et partout dans les événements qui rythment notre vie d'êtres humains, à son Prophète Mohammad Paix et Salut sur Lui qui incarne et symbolise l'Humanité.

Remerciements et Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mon Papa et à ma Chère Maman sans qui je ne serai rien.

À petite sœur Fatoumata Binta DIALLO

À mon amie, sœur et promotionnaire de TS1 Maïmouna BALDE

À mon amie, sœur et promotionnaire de TS1 Salimata Dédji MANE

À mon grand-frère Mamadou Dian DIALLO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur DIAO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur FAYE

À mon ancien professeur des Sciences Physiques Mr Mafal FALL

À Mr AMOUZOU, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo

À Mr DIALLO, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo

À Mr FALL, professeur de Mathématiques au Lycée Djibock

À Mr TOP, professeur de Mathématiques au Lycée Djibock

À mon promotionnaire de TS1 2009 – 2010 Khadim NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Pape Ousmane NIASSE

A mon ami et frère polytechnicien Elhadj Omar NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Ameth NDIAYE (ancien du Djignabo)

À mon ami et frère polytechnicien Mamadou BARRY (ancien du Djignabo)

À Khadim NDIAYE, élève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

Concours Général Sénégalais

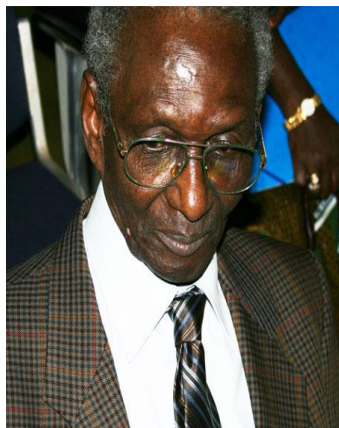
Le Concours Général sénégalais de Mathématiques est, comme son nom l'indique un concours. Il est donc beaucoup plus challengeant qu'une épreuve du BAC. Il est aussi plus long et dure 6 heures. Le concours vise à repérer les talents Mathématiques du futur.

Le Concours Général Sénégalais couvre l'ensemble du programme de Terminale S1 (TS1). Il n'est en général pas très adapté aux programmes des autres séries scientifiques. Il faut d'abord commencer par le plus simple, c'est à dire le BAC. L'idéal, c'est d'être capable de traiter les sujets de BAC au moins une bonne partie l'été qui précède la rentrée. Il faut beaucoup lire et faire des recherches à l'internet aussi il faut énormément s'exercer, disons il faut juste être bon. En dernier lieu, il faut surtout traiter les sujets, disons des 10-15 dernières années. Faute de temps, il est préférable d'essayer de les traiter dans les limites du temps, de vous rapprocher des professeurs.

Bons documents indispensables pour les Concours

1. Maths pour les Cracks
2. Maths pour les Musculation
3. Prolimaths (Collection Kordia)
4. NASAA Mathématiques (Collection Kordia)
5. Maths pour les Grands (Collection Kordia) contacter le 77 465 32 33
6. Hachette Analyse
7. Hachette Géométrie

Histoire des Mathématiques : Le professeur Souleymane NIANG



L'Afrique en général et le Sénégal en particulier a perdu un homme, un grand homme, un grand homme de science. L'éminent professeur Souleymane Niang, spécialiste de la science du calcul, cette science exacte et abstraite, cette science aux multiples signes mélangés dans un magma de chiffres et de lettres : le mathématicien, s'est éteint le lundi 30 Août 2010 à Toulouse. Il a justement rejoint le monde abstrait à l'âge de 81 ans. Tous les témoignages de la communauté scientifique ont convergé uniformément vers un même champ lexical: brillant, bon, humble, courtois...

« Il avait une large culture mathématique. Il est l'auteur de beaucoup d'ouvrages sur la Géométrie, la Mécanique, l'Algèbre. Il enseignait tout ça à la fois. Il était une véritable encyclopédie ». Dixit Pr Sangharé (ex chef du département Math-Info de l'Ucad)

Un "monstre" en mathématiques.

Le professeur Niang fut l'un des premiers mathématiciens d'Afrique. Il était plus spécialisé dans la branche la plus ardue, la plus redoutable et la plus redoutée de cette discipline: la mécanique. Les résultats de ses recherches ont fait l'objet de publication dans les plus grandes revues scientifiques mondiales et ont permis à sa frêle silhouette de parcourir presque toute la planète. Ses ouvrages sont présents dans les bibliothèques de beaucoup d'universités africaines et européennes. A l'instar de plusieurs savants dans l'histoire des maths, de Pythagore à Serre en passant par Thalès, Gauss, Fourier, Riemann... il a, lui aussi, élaboré et démontré un théorème qui porte son nom: le théorème Niang. Pas étonnant quand on sait qu'il a été l'étudiant de l'académicien Lichnorowish, le père de la mécanique différentielle française. Il a reçu plusieurs prix et distinctions dont le Chevalier de l'ordre national du Lion et le Chevalier de l'ordre national du mérite au Sénégal, la Palme Académique française...

Parcours remarquable

Après de brillantes études à Toulouse, il a rejoint l'université de Dakar dans les années 60 pour gravir les échelons en un temps record: d'abord assistant en

mécanique, puis maître de conférence, professeur sans chair et enfin professeur titulaire de chair.

Il n'a pas tardé à occuper le poste de Doyen de la faculté des sciences et techniques puis celui de recteur. Il devient ainsi le 2^{ème} recteur noir de l'université de Dakar en 1986.

Membre fondateur de l'Académie nationale des sciences et techniques du Sénégal, il a présidé pendant longtemps à la destinée de cette institution. Il a également été à la base de la création de beaucoup d'autres institutions comme l'Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de la physique et de la technologie (Irempt), l'Union mathématique africaine (Uma)... C'est dire que l'homme était aussi un grand panafricaniste. Il a d'ailleurs formé plusieurs générations de mathématiciens africains.

Adieu ! Grand mathématicien. Que Dieu vous accorde le pardon. Votre disparition est une grosse perte pour le pays. Mais grâce à la puissance de votre pensée, vous avez su entrer dans l'histoire. L'Afrique toute entière retiendra votre nom aussi longtemps que la Terre continuera à décrire sa trajectoire elliptique autour du Soleil.

KOR



Epreuves

Concours Général Mathématiques



Sujet 1

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1990

Les fonctions log-convexes

Sujet corrigéDéfinitions

i) Une fonction f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe sur I si et seulement si :

$$ii) \forall (\alpha, \beta) \in [0,1]^2 / \alpha + \beta = 1:$$

$$iii) \forall (x, y) \in I^2, f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

iiii) Une fonction f définie et positive sur I est dite log-convexe si et seulement si $\ln f$ est convexe.

Le but du problème est de déterminer les fonctions f log-convexes définies sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant :

$$\Leftrightarrow f(1) = 1 \text{ et l'équation fonctionnelle : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x).$$

Preliminaires :

j) Montrer que la fonction x^2 est convexe.

j) Montrer que si une fonction f est convexe sur un intervalle I , alors :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^+ / \sum_{p=1}^n \lambda_p = 1, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I : f\left(\sum_{p=1}^n \lambda_p x_p\right) \leq \sum_{p=1}^n \lambda_p f(x_p).$$

Première partie : Dans cette partie on suppose que f existe.

1.1. Calculer $f(n)$ pour n dans N^* et établir la relation : $f(n+x) = xf(x) \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{p}\right)$

$$f(n+x) = xf(x) \prod_{p=1}^{n-1} f(p) \left(1 + \frac{x}{p}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

1.2. On suppose x dans $]0, 1[$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

1.2.1. Trouver α et β réels tels que $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha n + \beta(n+1) = n+x$.

1.2.2. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $]0, 1[$: $\frac{f(n+x)}{f(n)} \leq n^x$

1.3. Soit x dans $]0, 1[$ et n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1.3.1. Trouver γ et δ réels tels que $\gamma + \delta = 1$ et $\gamma(n-1) + \delta(n+x) = n$.

1.3.2. En déduire que : $\frac{f(n+x)}{f(n)} \geq (n-1)^x$

1.4. Montrer que pour tout x dans $]0, 1[$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+x)}{n^x f(n)}$

1.5. Montrer que le résultat est vrai pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

1.6. Déterminer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n^x} \left(\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{x}{p} \right) \right) \right]$

1.7. En admettant le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \ln(n) \right] = \gamma, \text{ nombre appelé constante d'Euler, calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{x}{p} \right) e^{-\frac{x}{p}} \right]$$

1.8. En déduire une définition de $f(x)$.

Deuxième Partie : Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ de terme général $u_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{x}{p} \right) e^{-\frac{x}{p}}$

et v la suite $\ln(u)$, avec x dans $\mathbb{R}_+^*$ c'est-à-dire $v_n = \ln(u_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ de terme général $w_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$

2.1. Montrer que, pour tout $p \geq 2$, $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

2.1.1 En déduire que w converge.

2.2. Montrer que pour $u \geq 0$: $-\frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) - u \leq 0$.

2.2.1. Montrer que la suite u converge vers un nombre non nul.

Partie 3. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{1/x} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-\frac{x}{p}}$;

La fonction Γ , ainsi définie, de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même est la fonction gamma. $\Gamma \rightarrow \Gamma(x)$

3.1. Montrer que $\Gamma(1) = 1$

3.1.1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3.2. En admettant que l'on peut intervertir dérivation et limite montrer que la fonction Γ est log-convexe.

Sujet 2

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1991

Suites, Intégrales, Irrationalité

Sujet non corrigé.Préliminaires

A.1 Soit α un nombre réel strictement positif, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

2.1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)v_n = 2nv_{n-1}$

2.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

Soit f la fonction réelle de la variable réelle, admettant une dérivée seconde continue sur un intervalle $]a, b[$.

1. Soit x et h deux réel tels que x et $x+h$ appartiennent à $]a, b[$.

Déduire du théorème de la moyenne qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\alpha h).$$

2. En déduire qu'il existe deux réels β et θ dans $[0,1]$ tels que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \beta h^2 f''(x+\theta h).$$

B. Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x , on pose : $J_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx) dt$

1. Vérifier que $|J_n(x)| \leq 1$.

2. Calculer $J_0(x)$, $J_1(x)$ et $J_2(x)$.

3.1 Démontrer l'inégalité : $|J_n(x) - J_n(0)| \leq \frac{1}{6}x^2$ (on établira au paravent que pour tout u de $\mathbb{R}$, $1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}$).

3.2 En déduire, en fonction de n : $\lim_{x \rightarrow 0} J_n(x)$

4.1 Prouver, en évaluant $J_n(x+h) - J_n(x)$, que J_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$J'_n(x) = \int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(tx) dt.$$

4.2 En déduire que : $J'_n(x) = \frac{x}{2(n+1)} J_{n+1}(x)$.

Troisième partie :

Pour tout entier naturel et pour tout réel x , on pose : $K_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} J_n(x)$

3.1 Démontrer que $K_{n+1}(x) = (2n+1)K_n(x) - xK'_n(x)$, $K_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} J_n(x)$

3.2 En déduire que l'on peut mettre K_n sous la forme : $K_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x$, où P_n et Q_n sont des polynômes. Exprimer P_{n+1} et Q_{n+1} à l'aide de P_n , P'_n , Q_n , Q'_n .

3.3 Démontrer que P_n , Q_n sont à coefficients entiers, que P_n est une fonction paire et que Q_n est fonction impaire.

2. On considère les propositions suivantes :

$$(A_n) \begin{cases} \deg(P_n) = n \Rightarrow P(x) = ax^n + \dots \\ \deg(Q_n) = n-1 \Rightarrow Q_n(x) = bx^{n-1} + \dots \\ \text{sign}(a) = \text{sign}(b) \end{cases} \quad \text{et} \quad (B_n) \begin{cases} \deg(P_n) = n-1 \Rightarrow P(x) = ax^{n-1} + \dots \\ \deg(Q_n) = n \Rightarrow Q_n(x) = bx^n + \dots \\ \text{sign}(a) = -\text{sign}(b) \end{cases}$$

2.1 Prouver que : $(A_n) \Rightarrow (B_{n+1})$. On admettra que, de même $(B_n) \Rightarrow (A_{n+1})$.

2.2 Démontrer (A_2) . En déduire que pour tout entier naturel m , $\deg(P_{2m}) = 2m$.

NB : Pour la suite, on retiendra de cette partie que P_{2m} est un polynôme pair, à coefficients entiers, de degré $2m$.

Quatrième partie :

On se propose, dans cette partie, de démontrer par l'absurde que π^2 est irrationnel. On suppose π^2 rationnel, et l'on pose : $\pi^2 = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

4.1. Montrer que $K_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Y_m}{q^m}$, où Y_m est un entier naturel.

4.2. Montrer que $J_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. En déduire que $Y_m \geq 1$.

4.3. Montrer que Y_m peut se mettre sous la forme : $Y_m = J_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \delta(m)$, avec $\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(m) = 0$.

4.4. Conclure.

Sujet 3

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1992

Note : Ce sujet n'est pas l'énoncé du Concours Général 1992. L'énoncé de 1992 est illisible, j'ai donc pensé le remplacer par ce sujet.

Sujet corrigé.Partie A

En utilisant les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle ainsi que celles des croissances comparées, calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}, \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}_*^+;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} \quad \text{avec } a > 1$$

Partie B

Dans cette partie, on essayera de prouver les inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI.

Soient x, y, p et q des réels strictement positifs tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; et

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1/ Montrer que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$; (Utiliser la concavité de la fonction $\ln$)

2/ On suppose dans cette question que

$$\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$$

Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$

3/ En déduire la splendide inégalité de HOLDER

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

4/ On suppose en outre que $p > 1$;

Déduire de l'inégalité de HOLDER, l'inégalité de MINKOWSKI :

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Partie C

Cette partie vous propose un Calcul de probabilité.

On considère une compagnie aérienne A. Cinq pour cent des réservations sur une ligne donnée sont annulées, c'est pourquoi la compagnie A enregistre 100 réservations pour 97 places sur le vol numéro 3750.

1/ Donner la loi de la variable aléatoire X.

2/ Calculer $P(X = 3)$.

3/ Soit $p_n \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et k un entier tel que : $1 \leq k \leq n$;

4/ a) Déduire, à partir de la question précédente, que la loi de X peut être approchée par une loi de poisson $P(\lambda)$ définie par Y de loi $P(\lambda) \Leftrightarrow P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a) Utiliser cette approximation pour déterminer une valeur approchée de $P(X = 3)$ à 10^{-7} près.

Partie D Suites et séries

Dans cette partie, on étudiera les propriétés de suites et séries.

D.1 Suites trigonométriques

Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right)$

1/ Montrer que $U_{n+q} = U_n$ pour tout n .

2 / Calculer U_{nq} et U_{nq+1} , en déduire la nature de la suite U_n .

D.2 Série de Riemann

Définitions

Soit U_n une suite réelle ou complexe, on appelle série de terme général U_n , la suite V_n définie par :

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^n U_k$

La série de Riemann est, par définition, la série de terme général :

$U_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Enoncé de l'exercice : Soit $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; avec $k \in \mathbb{N}^*$

- Enoncer rigoureusement le théorème de l'inégalité des accroissements finis
- Par application de ce théorème à la fonction logarithme ($\ln$) sur un intervalle bien choisi montrer que la suite V_n est divergente.
- En déduire la nature de la suite W_n définie par :

$$W_n = \frac{1}{n} \left[(1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right]$$

Indication :

(On pourra utiliser le théorème de Césaro encore appelé moyenne de Césaro qui s'énonce comme suit : Soit A_n une suite réelle et B_n la suite définie par :

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k ;$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = l$ avec $l \in [\infty ; +\infty]$. (l peut être égale à $\pm\infty$)

- Etudier la série de Riemann suivant les valeurs de α .

Partie E

Cette partie nous propose de calculer des intégrales.

E.1 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle donné.

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ; par définition, on appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$; où F est une primitive de f sur K . On note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

1) A partir de cette définition, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2(x)} dx ; \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

$$I_4 = \int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5} dx ;$$

(Pour I_4 , poser $x = 2\text{sh}(t) + 1$; où sh désigne la fonction sinus hyperbolique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$)

2) Dans cette partie, on s'intéressera seulement à la primitive de la fonction f . En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_5 = \int \frac{dx}{\sin x} ; \quad I_6 = \int \frac{dx}{\cos x} ; \quad I_7 = \int \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx ; \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

E.2 Intégrales impropres (Intégrales de Bertrand)

- **Définition :** Les intégrales de Bertrand sont les intégrales impropres de la forme :

$$\int \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta} ;$$

Dans cet exercice, on s'intéressera au cas où $\alpha = n \in \mathbb{N}$; $\beta = -1$.

- **Enoncé :** On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \int_1^x t^{-n} \ln(t) dt.$$

a) Calculer $f_1(x)$.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, $f_n(x)$ pour $x \neq 1$.

c) Montrer que $f_n(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$ puis la calculer.

(On considère dans cette question que $n > 1$)

Partie F

Cette partie nous permet de construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

- 1) Donner les affixes $w_0 \dots w_4$ des points $A_0 \dots A_4$.
 - Montrer que $w_k = w_1^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
 - Montrer que $1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3 + w_1^4 = 0$.
- 2) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z + 1 = 0$.
En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
- 3) On considère le point B d'affixe -1 . Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$).
- 4) On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle C de centre I , de rayon $\frac{i}{2}$ et enfin le point J tel que $J =$ intersection de C avec la demi-droite $[BI]$. Calculer la longueur BJ .
- 5) Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Sujet 4

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1993

Note : Ce sujet n'est pas l'énoncé du Concours Général 1993. L'énoncé de 1993 est illisible, j'ai donc pensé le remplacer par ce sujet.

Sujet corrigé.

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on se place dans un plan P muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I- Préliminaires de géométrie élémentaire

1. Soit D et D' deux droites sécantes en un point I , s et s' les symétries axiales respectivement d'axes D et D' .

Montrer que $s \circ s'$ est une rotation, et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, O le centre du cercle circonscrit à ABC .

On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

(a) Montrer que : $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r^2 désigne $r \circ r$).

(b) Quelle est la nature du triangle $M_1M_2M_3$?

II- Nombres complexes

L'affixe du vecteur $\vec{u}$ étant 1 et celle du vecteur $\vec{v}$ étant notée i (avec $i^2 = -1$), comme il est d'usage, on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère, dans le plan P , les points O , A , B et C d'affixes respectives 0 , 1 , j et j^2 .

On désigne par s_1 , s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA) , (OB) et (OC) .

Soit enfin M un point quelconque du plan P , d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$, $j\bar{z}$.

2. Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC) .

Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

En déduire l'affixe de M_4 .

3. (a) A quelle condition les points M_2 , M_3 et M_4 sont-ils alignés ?

On suppose désormais que M_2 , M_3 et M_4 ne sont pas alignés ; on note Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

(b) Justifier le fait que Ω appartient à la droite (OM_1) .

Dans la suite, on note son affixe $\lambda e^{-i\theta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que : $\lambda = -\frac{1+2\rho\cos\theta}{\rho+2\cos\theta}$.

(d) En déduire une expression du rayon R du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

(e) Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si : $\ll \rho = 1$ ou $(\rho + \cos\theta)^2 = 1 - 3\cos^2\theta \gg$.

4. Montrer que le cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$ est de même rayon que le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ si et seulement si M appartient à un ensemble

Γ que l'on précisera géométriquement. Que peut-on dire dans ce cas des deux cercles circonscrits ?

III- Etude de fonctions

On considère l'application s définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par $s(\theta) = 1 - 3 \cos^2 \theta$.

1. (a) Etudier les variations de s . Préciser ses extremums, les valeurs de θ pour lesquelles $s(\theta)$ est nul, l'ensemble E des $\theta \in [-\pi, \pi]$ tels que $s(\theta) \geq 0$.

2(b) En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $s(\theta)e^{i\theta}$ lorsque θ varie.

On précisera les points d'intersection avec les axes et éventuellement quelques points particuliers (pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, par exemple).

On pourra aussi justifier les symétries de la courbe.

2. Soit la fonction r_1 définie pour tout $\theta \in E$ par $r_1(\theta) = \sqrt{1 - 3\cos^2 \theta} - \cos \theta$.

(a) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $r_1(\theta)$ est nul.

(b) En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $r_1(\theta)e^{i\theta}$ lorsque θ varie.

3. Dessiner, sans chercher à être extrêmement précis, l'ensemble des points M tels que le triangle $M_2M_3M_4$ défini à la partie II ait un cercle circonscrit de rayon 1.

EXERCICE 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x réel de l'intervalle $\left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0, 1]$.

2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

EXERCICE 3

On considère dans le plan trois points A_0, B, C non alignés.

1. On désigne par A_1 le centre du cercle inscrit dans le triangle A_0BC (c'est-à-dire le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle A_0BC).

On poursuit le processus en considérant A_2 , centre du cercle inscrit dans le triangle A_1BC , etc.

Ainsi, pour tout i entier naturel, A_{i+1} est le centre du cercle inscrit dans le triangle A_iBC .

Démontrer qu'il existe un point A , limite de la suite (A_n) , c'est-à-dire tel que A_n tende vers A et préciser sa position.

2. Que devient le résultat précédent si, à chaque étape, pour $i = 0, 1, 2, \dots$, on prend pour A_{i+1} l'orthocentre du triangle A_iBC au lieu du centre du cercle inscrit ?

EXERCICE 4

Si m_1 et m_2 sont deux entiers tels que $m_1 \leq m_2$, on désigne par $\llbracket m_1, m_2 \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $m_1 \leq k \leq m_2$.

Si a, b et n sont trois entiers, on note $a \equiv b \pmod{n}$ lorsque a et b sont congrus modulo n , c'est-à-dire lorsque $b - a$ est multiple de n .

Dans tout cet exercice, p désigne un nombre premier.

I- Définition du logarithme discret

Pour tout $A \in \mathbb{N}$, on note $(A \bmod p)$ le reste de la division euclidienne de A par p . C'est l'unique entier de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ congru à A modulo p .

Un entier $x \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ est appelé une racine primitive modulo p lorsque l'ensemble des $(x^k \bmod p)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est l'ensemble $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, c'est-à-dire lorsque les puissances de x , calculées modulo p , décrivent $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tout entier.

Ainsi pour $p = 5$:

- 1 n'est pas racine primitive modulo 5 puisque ses puissances valent toujours 1.
- 2 est racine primitive modulo 5 puisque :

$$(2^0 \bmod 5) = 1, \quad (2^1 \bmod 5) = 2, (2^2 \bmod 5) = 4, (2^3 \bmod 5) = 3$$

- 3 est racine primitive modulo 5 puisque $(3^0 \bmod 5) = 1, (3^1 \bmod 5) = 3, (3^2 \bmod 5) = 4, (3^3 \bmod 5) = 2$
- 4 n'est pas racine primitive modulo 5 puisque $(4^k \bmod 5), k \in \mathbb{N}$, vaut alternativement 1 ou 4.

1. On prend dans cette question $p = 7$. Déterminer les racines primitives modulo 7.

On admet désormais que, quel que soit le nombre premier p , il existe au moins une racine primitive modulo p . Dans la suite, on désigne par g une racine primitive modulo p .

2. (a) Montrer que l'ensemble des $(g^k \bmod p)$ pour $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ est $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(b) Soit $A \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

Justifier l'existence et l'unicité d'un entier $a \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ tel que $A = (g^a \bmod p)$. a est appelé logarithme de base g modulo p de A ; on le note $\mathcal{A}(A)$.

(c) Soit b un entier naturel congru à a modulo $p-1$. Calculer $(g^b \bmod p)$.

3. Une solution élémentaire pour déterminer $\mathcal{A}(A)$ consiste à calculer les entiers $(g^k \bmod p)$, pour $k = 0, 1, \dots$, jusqu'à trouver A .

(a) Décrire un algorithme qui réalise ce travail.

(b) Dans cette question, on prend : $p = 53, A = 40, g = 20$ (on admettra que 20 est bien une racine primitive modulo 53).

En programmant l'algorithme précédent sur une calculatrice, déterminer $\mathcal{A}(A)$.

II- Calcul du logarithme discret par la méthode d'Adleman

Cette partie exploite le fait que la connaissance des logarithmes de quelques entiers permet de déterminer rapidement le logarithme de tout entier.

1. On se place dans le cas $p = 113, g = 55$ et on donne $\mathcal{A}(2) = 60, \mathcal{A}(3) = 5$. Trouver $\mathcal{A}(54)$.

On suppose choisis, pour toute la suite de cette partie, des nombres premiers distincts $p_1, \dots, p_n$ strictement inférieurs à p et des entiers $a_1, \dots, a_n$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les facteurs premiers de $(g^{a_i} \bmod p)$ appartiennent à $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a ainsi une relation $(g^{\alpha_i} \bmod p) = p_1^{e_{i,1}} p_2^{e_{i,2}} \dots p_n^{e_{i,n}}$ où les $e_{i,j}$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, sont des entiers naturels.

2. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\alpha_i = e_{i,1}\ell(p_1) + e_{i,2}\ell(p_2) + \dots + e_{i,n}\ell(p_n) \pmod{p-1}.$$

3. On prend dans cette question $p = 53$, $g = 20$, $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$.

(a) A l'aide de g et g^3 , déterminer $\ell(2)$ et $\ell(5)$.

(b) En déduire $\ell(40)$.

(c) Combien d'entiers de $\llbracket 1, 52 \rrbracket$ peuvent-ils s'écrire sous la forme $2^\alpha 5^\beta$, avec α et β entiers naturels ?

4. Soit $A \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(a) Montrer que l'ensemble des $(g^s A \bmod p)$ pour $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ est $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

(b) On suppose connu $s \in \mathbb{N}$ tel que $(g^s A \bmod p)$ se factorise à l'aide de $p_1, \dots, p_n$ uniquement.

Si on suppose connus $\ell(p_1), \dots, \ell(p_n)$, en déduire $\ell(A)$.

(c) Avec $p = 53$ et $g = 20$, déterminer $\ell(30)$.

5. On revient au cas général.

(a) Quel est le nombre d'entiers de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ qui sont une puissance de p_1 ?

(b) En déduire la probabilité pour qu'un entier $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ soit tel que $(g^s A \bmod p)$ soit une puissance de p_1 .

(c) Montrer que la probabilité P pour qu'un entier $s \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ soit tel que $(g^s A \bmod p)$ se factorise à l'aide de p_1 et p_2 uniquement vérifie :

$$\frac{(\ln(p-1))^2}{2(p-1)(\ln p_1)(\ln p_2)} \leq P \leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_1} + 1 \right) \left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_2} + 1 \right)$$

(d) Généraliser le résultat au cas de n nombres premiers $p_1, \dots, p_n$.

Sujet 5

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1994

Note : Ce sujet n'est pas l'énoncé du Concours Général 1994. L'énoncé de 1994 est illisible, j'ai donc pensé le remplacer par ce sujet.

Sujet corrigé.

Dans tout le sujet $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1 : Calcul de limites

En utilisant les propriétés des fonctions $\ln$ et exponentielle ainsi que celles des **croissances comparées**, calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$

Indication: Pour le calcul de la dernière limite, utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$$

Exercice 2: Equation différentielle-méthode de Lagrange

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que la fonction sh est bijective et calculer la dérivée de sa bijection réciproque.

2) Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) a) Donner la solution générale de l'équation homogène sous la forme

$y(x) = c_1 \varphi(x) + c_2 \Psi(x)$, où c_1 et c_2 sont des constantes.

2) b) On admet que la solution générale de (E) est de la forme

$y(x) = c_1(x) \varphi(x) + c_2(x) \Psi(x)$ où φ et Ψ sont les fonctions déterminées dans la question précédente et $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont telles que :

$$c_1'(x) \varphi(x) + c_2'(x) \Psi(x) = 0$$

Déterminer $c_1(x)$ et $c_2(x)$.

En déduire la solution générale de (E).

Exercice 3: Inégalité de Markov-Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

X désigne une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$

1) Démontrer l'inégalité de Markov

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

, où $E(X)$ désigne l'espérance mathématique.

Application : Selon ses fournisseurs, sa matière première et sa disponibilité plus ou moins aléatoires, un producteur réalise en moyenne 20 objets par semaine.

Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine.

2) À l'aide de l'inégalité de Markov, déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{où } \sigma_X \text{ désigne l'écart type}$$

Exercice 4 : Densité de Q dans $\mathbb{R}$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'entre 2 réels, il existe une infinité de rationnels !

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et (U_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{E(2^n x)}{2^n}$, où $E(2^n x)$ désigne la partie entière de $2^n x$.

a) Montrer que (U_n) est croissante et majorée.

b) Calculer sa limite.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a \in \mathbb{R}$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_0$ alors $|U_n - a| < \varepsilon$

Grâce à cette définition et de la question 1, montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} (x < y), \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x < r < y$$

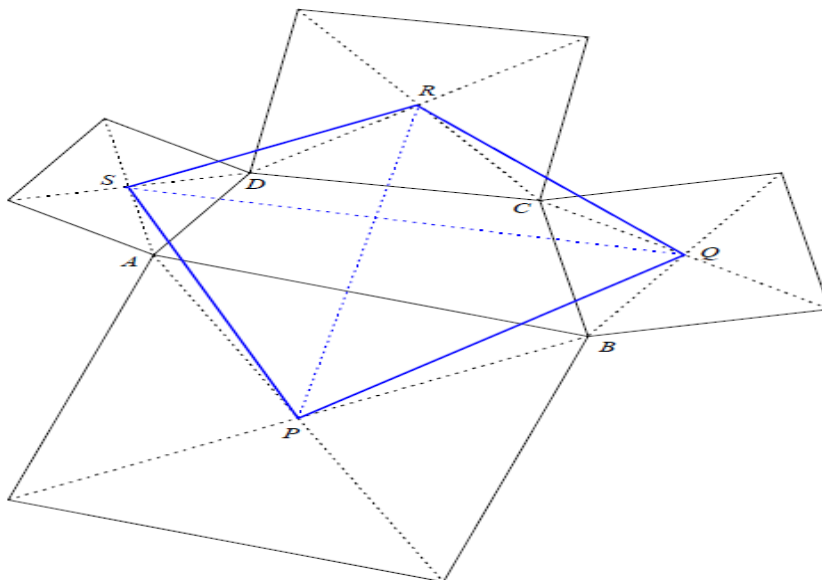
Conclure.

Exercice 5 : Des carrés autour d'un quadrilatère (Théorème de Von Aubel)

On considère un quadrilatère ABCD de sens direct.

On construit 4 carrés de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les cotés [AB], [BC], [CD] et [DA] du quadrilatère ABCD. (voir figure).

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère PQRS sont perpendiculaires et de même longueur.



On note a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans un repère orthonormée $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de sens direct.

1) Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

Etablir des relations analogues pour q , r et s .

2) Calculer $\frac{s-q}{r-p}$. Conclure.

Problème : Intégrations

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Calcul de primitives et intégrales

a) Calculez les primitives suivantes sur l'intervalle I .

i) $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$, $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right[$

j) $\int \frac{x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$, $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Indication: décomposer la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue .

1) Etablir $\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt$

2) En déduire

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$$

3) On définit $F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$ où $\min(x, t)$ désigne le plus petit entre x et t .

3) a) Montrer que F est de classe C^2 et calculer $F''(x)$, sachant qu'une fonction est dite de classe C^n , $n \in \mathbb{N}$ si elle est n fois dérivable et que sa dérivée n -ième soit continue.

3) b) En déduire

$$F(x) = \int_0^1 \int_u^1 f(t) dt du$$

Partie B : Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est de calculer l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-x^2} dx$$

Définition : Soit f une fonction définie et continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}^+$. On dit que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(x) dx$ existe et est finie, dans ce cas on note :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(x) dx$$

1) Montrer que la fonction $X \rightarrow \int_0^X e^{-x^2} dx$ est croissante et majorée.

2) En déduire l'existence de la limite définissant I .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

2-a) Démontrer l'inégalité stricte $0 < a_{n+1} < a_n$.

2-b) En supposant $n \geq 2$, former une relation de récurrence liant a_n et a_{n-2}

2-c) Montrer que si $n \geq 1$, on a l'égalité

$$na_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

2-d) Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

3) On pose, $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \text{ et } c_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

3-a) Comme dans la question 1, montrer que c_n existe.

3-b) Démontrer que $b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \leq c_n$

3-c) À l'aide de changement de variable convenablement choisis, exprimer b_n et c_n à l'aide des intégrales a_{2n+1} et a_{2n-2}

4) À l'aide des résultats précédents, déterminer la fameuse valeur de l'intégrale de Ga

Korka

Sujet 6

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1995

Suites, Complexes, la fonction ξ (dzêta) de RiemannSujet corrigéProblème 1

On dit qu'une suite (Z_n) de nombres complexes converge vers z dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |Z_n - z| = 0$.

Les résultats usuels sur les limites de sommes, produits, quotients, dans $\mathbb{R}$ s'appliquent aux limites dans $\mathbb{C}$.

On admettra que, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 dans $\mathbb{C}$, λ_3 non nul et n dans $\mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3 n + \lambda_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c et d dans $\mathbb{C}$; $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

1.1 Montrer qu'il existe δ dans $\mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}, f(z) = \frac{a}{c} + \frac{\delta}{cz+d}$

1.2 Montrer que f est une bijection de $S = \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $S = \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

2. On appelle birapport des nombres z_1, z_2, z_3 et z_4 le nombre complexe lorsqu'il existe, noté $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ tel que :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

2.1 On pose $Z_p = f(z_p)$ pour $p = 1, 2, 3, 4$. Montrer que :

$$[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

2.2 Soit M_p et N_p les points d'affixes respectives z_p et Z_p dans le plan complexe.

Montrer que, si M_1, M_2, M_3, M_4 sont alignés ou cocycliques, alors il en est de même des points N_1, N_2, N_3, N_4 ;

On considère la suite des nombres complexes définie par W_0 quelconque dans S et $W_{n+1} = f(W_n)$ pour tout entier naturel n . On suppose que W_0 n'est pas racine de l'équation $f(z) = z$.

3. Dans le cas où l'équation $f(z) = z$ admet deux racines distinctes n et m .

3.1.1 Montrer en utilisant $[\alpha, \beta, n, z]$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ que pour tout z de $S - \{\beta\}$:

$$\frac{Z - \alpha}{Z - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta} \text{ où } Z = f(z) \text{ et } k = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}$$

3.1.2 En utilisant la suite (t_n) définie par $t_n = \frac{W_n - \alpha}{W_n - \beta}$. Donner l'expression de W_n en fonction W_0, α, β, k et n .

3.2 Dans le cas où $|k| \neq 1$ on appelle α celle des deux racines telle que $|k| < 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n$ puis, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \alpha$.

Application : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ lorsque $f(z) = \frac{z+1}{z+1-i\sqrt{3}}$

3.3 Dans cette question $|k| = 1$. Soit A, B et M_n les points d'affixes respectives α, β, W_n . On pose $\tau = |t_0|$.

En utilisant la définition de la suite (t_n) , montrer que les points M_n appartiennent à une droite (D) à préciser ou à un cercle (C) dont on déterminera l'affixe w du centre et le rayon r en fonction de α, β et τ .

4. Dans le cas où l'équation $f(z) = z$ admet une solution double γ .

4.1 Etablir que $\frac{a}{c} - \gamma = \gamma + \frac{d}{c}$

4.2 Montrer, en utilisant $\left[-\frac{d}{c} + \frac{1}{n}, z, n, \gamma\right]$ que :

$$\forall z \in S - \{\gamma\}, \frac{1}{Z - \gamma} = h + \frac{1}{z - \gamma} \text{ avec } Z = f(z) \text{ et } h = \frac{1}{\frac{a}{c} - \gamma}$$

4.3 En utilisant la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{w_n - \gamma}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \alpha$.

Problème 2

Le but du problème est de définir la fonction ξ (dzêta) de Riemann, de donner une méthode de calcul des nombres $\xi(2m)$ pour m dans $\mathbb{N}^*$ et de représenter graphiquement la fonction ξ .

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x}$

1.1 Montrer que : pour $x > 1$ et $y \geq 1$: $\frac{1}{y^{(x-1)}} - \frac{1}{(y+1)^{(x-1)}} - \frac{x-1}{(y+1)^x} \geq 0$.

Indication : on pourra factoriser $\frac{1}{(y+1)^{(x-1)}}$ et poser $u = \frac{1}{y}$, ou encore appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $h(t) = \frac{1}{t^{x-1}}$

1.2 En déduire que : $u_n(x) \leq \frac{x}{x-1} = f(x)$ et que $u_n(x)$ est convergente pour $x > 1$.

2. Soit $\xi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$.

2.1 Montrer que pour $x > 1$ et $y \geq 1$: $\frac{1}{y^{(x-1)}} - \frac{1}{(y+1)^{(x-1)}} - \frac{x-1}{y^x} \leq 0$.

2.2 En déduire que $u_n(x) \geq \frac{1}{x-1} = g(x)$ puis que $\lim_{x \rightarrow 1+} \xi(x) = +\infty$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi(x)$.

4. Montrer que ξ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

5. Calcul de $\xi(2m)$ pour tout m dans $\mathbb{N}^*$

5.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$

5.2 Soit $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que $\alpha_n = \frac{n(2n-1)}{3}$.

5.3 Calculer $\beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

5.4 Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$

6. En déduire $\frac{\pi^2 \alpha_n}{(2n+1)^2} \leq u_n(2) \leq \frac{u_n \pi^2}{(2n+1)^2}$

7. Montrer alors que $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

8. Prouver de manière analogue $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90}$

9. Représenter sur un même graphique, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) les fonctions f , ξ et g .

Korka

Sujet 7

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1996

Etude de la fonction logarithme népérien

Sujet corrigéPréambule

Il s'agit de définir et d'étudier la fonction logarithme népérien ($\ln$) sans recourir à l'intégration. La définition envisagée repose sur la convergence d'une suite et sur l'étude des applications f d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels x et y appartenant à D , $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Partie A

A1 Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel r supérieur ou égal à -1 on a : $(1 + r)^n \geq 1 + nr$ (1)

A2 Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel s supérieur ou égal à $+1$ on a : $ns^{n+1} + 1 \geq (n + 1)s^n$ (2)

On pourra poser $\frac{1}{s} - 1 = r$ et appliquer (1)

A3 Soit E la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$.

a) On suppose x supérieur ou égal à 1, et on pose : $n_0 = E\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)$ où ε est un réel strictement positif. Démontrer, en utilisant l'inégalité (1), que pour tout réel strictement ε positif et pour tout n supérieur ou égal à n_0 on a : $1 \leq \sqrt[n]{x} \leq 1 + \varepsilon$ (On démontrera que si $n \geq n_0$ alors $x \leq 1 + n\varepsilon$).

b) On suppose que x est strictement compris entre 0 et 1, montrer en utilisant le résultat de A3a) que : $\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \sqrt[n]{x} \leq 1$

On supposera que les résultats de A3 prouvent que pour tout x strictement positif la suite $U_n = \sqrt[n]{x}$ est convergente et que l'on a plus précisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

A4 Montrer que pour tout x supérieur ou égal à $+1$, la suite $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ vérifie pour tout entier n strictement positif : $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$ (3) et $\frac{x-1}{x} \leq v_n(x) \leq x-1$ (4)

On pourra utiliser (2) en posant $s = \sqrt[n(n+1)]{x}$

A5

a) Soit $x \geq 1$. Montrer que la suite $v_n(x)$ est convergente en établissant que :

$$\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq x-1 \quad (5)$$

b) Soit $0 < x \leq 1$, montrer, en posant $y = \frac{1}{x}$ et en utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x).$$

c) Soit $0 < x < 1$, montrer que $\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq x-1$

Ces 5 résultats nous ont permis d'établir que pour $x > 0$, la suite $v_n(x)$ est convergente et de donner les précisions (5) et (6) sur sa limite. On remarque en outre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(0) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(1) = 0$.

Partie B

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction vérifiant, pour tout x, y appartenant à D , $f(xy) = f(x) + f(y)$ (7)

B1 Montrer que si $D = \mathbb{R}$ seule la fonction nulle vérifie (7).

B2 Montrer que si $D = \mathbb{R}^*$ (ensemble des réels non nuls) et si f est solution de (7) alors $f(1) = f(-1) = 0$. En déduire sous ces mêmes conditions que f est paire.

B3 Soit $D = \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Montrer que les fonctions constantes sur D et non nulles ne sont pas solutions de (7).

Désignons par F l'ensemble des fonctions numériques définies sur D , non nulles, non constantes, dérivables et vérifiant (7).

B4 Montrer que si f appartient à F , on a pour tout entier naturel n , $f(x^n) = nf(x)$ (8) ou encore $f(x) = nf(\sqrt[n]{x})$ (9)

B5 Montrer que pour tout x strictement positif et pour tout f de F on a $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$

(10) (on dérivera (7) par rapport à y)

B6 Montrer que le résultat obtenu en **B3** prouve que $f'(1) \neq 0$ et que si f est élément de F alors λf l'est aussi. (λ étant un réel non nul.) Il est donc possible de choisir $f'(1) = 1$.

B7 En utilisant **B2** et **B6** montrer que $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1$.

Conclusion de la Partie B Vous avez démontré à la question **B4** que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \geq 1$ $f(x) = nf(\sqrt[n]{x})$ et aussi à la question **A3** que la suite $U_n(x)$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ pour $x > 0$. En utilisant le résultat

B7 vous constatez que l'on est conduit à poser nécessairement pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$. En effet, $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1$, $t = \sqrt[n]{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\sqrt[n]{x})}{(\sqrt[n]{x} - 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{n(\sqrt[n]{x} - 1)} = 1$:
En outre $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ a bien un sens comme démontré à la question **A5**.

Partie C

Les résultats obtenus au cours des **Parties A** et **B** prouvent qu'il est légitime de poser pour une fonction f appartenant à F : pour tout $x > 0$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$. Dans cette dernière partie nous allons vérifier, en outre que cette fonction a bien les propriétés retenues des éléments de F . (Certaines propriétés ont déjà été démontrées dans les **Parties A** ou **B** ; il vous suffit de le faire remarquer).

C1 Pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$, démontrer que pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs et pour tout entier relatif p on a :

a) $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x-1$

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

c) $f(xy) = f(x) + f(y)$. (Remarquer que $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$)

d) $f(x^p) = pf(x)$. (On distinguera les 2 cas suivant le signe de p)

C2 Pour cette même fonction f , démontrer que :

a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

b) pour tout x strictement positif et différent de 1 on a : $\left| \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - 1 \right| \leq \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$. En déduire que f est dérivable au point 1 et que $f'(1) = 1$.

c) f est dérivable pour tout $x > 0$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$. On pourra utiliser le fait que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. Pour cela on démontrera successivement que :

1. $f(2) \geq \frac{1}{2}$

2. pour tout entier naturel k , si $x > 2^k$, alors $f(x) > \frac{k}{2}$.

On admettra que cette implication prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et l'on procédera de même pour démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Conclusion

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ est la fonction $\ln$, logarithme népérien que vous avez peut être définie par $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, ce qui est justifié par la proposition C2c).

Sujet 8

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1997

Approximation d'un irrationnel par la méthode des fractions continues

Sujet corrigéIntroduction

L'objet de ce problème est d'étudier la méthode des fractions continues qui permet de trouver de "bonnes" approximations rationnelles d'un irrationnel donné (par exemple, le très célèbre rationnel $\frac{355}{113}$, qui constitue une approximation de π à $3.10^{\square}$ près).

Notations

Etant donnés $(n + 1)$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $a_k \in \mathbb{R}_+^*$ pour $k \leq 1$.

On note $[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$

Autrement dit, on a : $[a_0] = a_0$, et en posant $f_k(x) = a_k + \frac{1}{x}$ on a :

$[a_0, a_1, \dots, a_n] = f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{n-1}(a_n)$ pour $n \geq 1$: On remarquera que $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ est bien défini puisque $a_k > 0$ pour $k \geq 1$. On notera S l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour $n \geq 1$: On notera S' l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour $n \geq 1$.

Partie 1 : Généralités sur les fractions continues

Soit $a = (a_n)$ une suite, élément de S . On lui associe les suites (p_n) , (q_n) , (r_n) définies par : $r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$

$$p_n = \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = a_0 \\ p_{n+2} = a_{n+1}p_{n+1} + p_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = 1 \\ q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + q_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La suite (r_n) s'appelle la fraction continue associée à la suite (a_n) .

1

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_{n+1}x + p_n}{q_{n+1}x + q_n}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

2

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $p_n q_{n+2} - q_n p_{n+2} = (-1)^n a_{n+1}$

3) Montrer que la suite (r_{2n}) est strictement croissante, que la suite (r_{2n+1}) est strictement décroissante, et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n} < r_{2n+1}$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|r_n - [a_0, a_1, \dots, a_n, x]| = \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)}$

Partie 2 : Développement en fraction continue

On reprend les mêmes notations que dans la partie 1. On suppose ici que la suite $a = (a_n)$ est élément de S' , de sorte que les suites (a_n) , (p_n) , (q_n) sont à valeurs entières et que la suite (r_n) est à valeurs rationnelles.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, p_n et q_n sont premiers entre eux.

2)

a) Montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante de limite $+\infty$.

b) Montrer que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes. On notera $t = t(a)$ leur limite commune.

3)

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|t - r_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}$ et que pour $n \geq 1$ on a :

$$0 < |q_n t - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

b) Montrer que t est irrationnel.

4) Pour $p \in \mathbb{N}$ fixe, on note t_p la limite de $[a_p, a_{p+1}, \dots, a_n]$ lorsque n tend vers $+\infty$. (Autrement dit, on a $t_p = t(a')$ où la suite $a' = (a'_n)$ est définie à partir de a par décalage des indices : $a'_n = a_{n+p}$. En particulier, on a $t_0 = t$.)

a) Montrer que $t = a_0 + \frac{1}{t_1}$

b) Montrer que $a_0 < t < a_0 + \frac{1}{a_1}$, et que $a_0 = E(t)$ = partie entière de t .

c) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $a_p = E(t_p)$ et $t_{p+1} = \frac{1}{t_p - E(t_p)}$.

5)- Réciproquement, soit u un irrationnel. On cherche s'il existe une suite a élément de S' telle que $t(a) = u$. D'après la question précédente, la seule suite qui peut convenir est la suivante : on pose $U_0 = u$, $U_{n+1} = \frac{1}{U_n - E(U_n)}$ et $a_n = E(U_n)$.

Reste à savoir si on a bien $t(a) = u$.

a)- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u = [a_0, a_1, \dots, a_n, U_{n+1}]$

b)- En déduire une majoration de $|r_n - u|$ (on pourra utiliser la question 1.4).

Montrer que $t(a) = u$. La suite $a = (a_n)$ est alors appelée le développement en fraction continue de u .

Partie 3 : Exemples

1)- Déterminer les 5 premiers termes du développement de π en fraction continue. Expliquer comment on obtient le rationnel mentionné dans l'introduction. Montrer ensuite que les résultats de la partie 1 permettent de retrouver la majoration de l'erreur annoncée.

2)- Soit $a = (a_n)$ une suite élément de S' et $t = t(a)$. Montrer que si a est périodique de période k , alors $t = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, t]$

3)- Calculer $t(a)$ dans les cas suivants :

a)- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$

b)- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2$

c)- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 2$.

4)- Soit $a = (a_n)$ une suite élément de S' , et $t = t(a)$. On suppose ici que la suite a est périodique.

a)- Montrer que t est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers (on dit alors que $t(a)$ est un irrationnel quadratique).

b)- Plus généralement, montrer que si la suite a est périodique à partir d'un certain rang, alors $t(a)$ est un irrationnel quadratique.

5)- Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$, puis celui de $\sqrt{1+p^2}$ $k \in \mathbb{N}^*$

Partie 4 : Meilleures approximations rationnelles d'un irrationnel

Soit u un irrationnel, (a_n) son développement en fraction continue, et (p_n) , (q_n) les suites d'entiers associées (notations du début du problème). On veut montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, q < q_n \Rightarrow \left| u - \frac{p}{q} \right| > \left| u - \frac{p_n}{q_n} \right|$

(On dit alors que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p}{q}$ est une meilleure approximation rationnelle de u). On raisonne par contraposée, et on suppose donc $\left| u - \frac{p}{q} \right| \leq \left| u - \frac{p_n}{q_n} \right|$. Pour fixer les idées, on supposera n pair.

1)- Montrer qu'on a alors $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} \leq \frac{p_n}{q_n}$

2)- Ecrire cette double inégalité sous la forme d'un système de deux inéquations linéaires en p et q . Résoudre ensuite un système raisonnable de deux équations linéaires d'inconnue p et q dont les seconds membres seront des paramètres entiers (de signe connu) et conclure.

Sujet 9

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 1998

Note : Ce sujet n'est pas le vrai énoncé du concours général 1998

Sujet corrigéProblème 1 :

Pour tout entier n non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $J_n = \int_0^1 (\cos x)^{2n} dx$

1.1 Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et J_n et J_{n-1} .

1.2 En déduire l'expression de I_n et J_n en fonction de n .

2. Montrer que pour tout entier n non nul, on a : $J_{n+1} \leq I_n \leq J_n$.

3. En déduire un équivalent au voisinage de l'infini de I_n .

Par définition, un équivalent d'une suite quelconque U_n est une suite V_n si et seulement si il existe une suite a_n avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ telle que $U_n = a_n V_n$.

4. Soit $a > 0$. Pour tout n non nul, on pose : $K_n(a) = \int_0^a (x)^n \left(2 - \frac{x}{a}\right)^n dx$. Déterminer $K_n(a)$.

Problème 2 :Partie A :

Pour tout entier n non nul, on pose : $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ et

$V_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$ avec $f(x) = \ln(1+x)$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

2. Montrer que (U_n) converge. Soit ℓ sa limite (On ne cherchera pas à calculer ℓ)

3. Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad U_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \leq V_n \leq U_n$

4. En déduire ℓ .

Partie B :

Soit $\alpha > 1$ un réel. Pour tout entier n non nul, on pose : $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $V_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad \text{et} \quad T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

1. Montrer que la suite (T_n) converge et préciser sa limite.

2.1 Montrer qu'il existe, pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]n, n+1[$ / $V_n = \frac{\alpha-1}{x_n^\alpha}$

2.2 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n}$. En déduire que la suite (S_n) converge.

Problème 3 :

Partie A :

Soit n un entier naturel et x un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un entier relatif.

Calculer la somme : $S = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{(\cos x)^2} + \dots + \frac{\cos nx}{(\cos x)^n}$

Partie B :

Calculer $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{1+x+x^2}$

Problème 4 :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

Démontrer que f admet au moins 7 zéros.

Indication : Considérer la fonction $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$ définie sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f .

Problème 5

C'est une idée simple d'une fonction f qui est négligeable devant une fonction g au voisinage d'un point x_0 , c'est-à-dire que lorsque x tend vers x_0 , la fonction f se comporte comme une constante (1) et $g(x)$ la même fonction.

Autrement : si x tend vers x_0 , $f(x)g(x) = g(x)$.

1. Enoncer rigoureusement le théorème des croissances comparées traduisant que la fonction $x \rightarrow e^x$ est négligeable devant la fonction $x \rightarrow x^\alpha$ qui à son tour est négligeable devant $x \rightarrow e^x$.

2. En se servant de la définition ci-dessus, donner sans calcul les limites suivantes :

$$2.1 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x$$

$$2.4 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^\alpha \frac{e^x}{\ln x}$$

$$2.2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha e^x$$

$$2.5 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

$$2.3 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha e^x \ln x$$

$$2.6 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^\alpha}$$

Problème 6 :

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un ensemble de points non alignés dans le plan (O, x, y) .

1. Montrer que la surface du triangle $A_1A_2A_3$ est donnée par la relation :

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}\|$$

2. Montrer que la surface d'un polygone fermé $A_1A_2\dots A_n$ est donné par la formule :

$$S = \frac{1}{2} |\sum_{k=1}^n X_i (Y_{i-1} - Y_{i+1})|. \quad \text{Précision : } Y_{n+1} = Y_1 \quad \text{et} \quad Y_0 = Y_n$$

Complexes – Intégrales

Sujet corrigé

Le Problème est composé de deux parties ayant chacune son objectif spécifique. La partie 1 vise à étudier les racines primitives d'ordre n de l'unité, pour construire quelques polynômes cyclotomiques permettant de déboucher sur une conjecture.

La partie 2 utilise quelques propriétés des racines nièmes de l'unité pour calculer l'intégrale $I(a)$.

$I(a) = \int_0^2 \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$ où a est un paramètre réel tel que $|a| \neq 1$.

Première partie

1. Soit n un entier naturel non nul et différent de 1.

1.1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$(e) : z^n = 1$$

Chacune des n solutions trouvées est appelée une racine nième de l'unité. Notons les z_p , avec $0 \leq p \leq n-1$.

1.2 On pose $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de w_n les solutions de l'équation (e).

2 Montrer que : $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = z_1(z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1})$

En déduire que : $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$

3. Montrer que l'on a : $\prod_{p=0}^{n-1} z_p = \pm 1$.

c'est-à-dire : $z_0 \times z_1 \times z_2 \times \dots \times z_{n-1} = \pm 1$, selon la parité de n .

4. On désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n racines du polynôme P de $\mathbb{C}$ de degré n tel que :

$$P(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0 \text{ avec } b_n \neq 0.$$

4.1 Montrer que l'on a : $\prod_{p=1}^n \alpha_p = (-1)^n \cdot \frac{b_0}{b_n}$

4.2 Montrer que l'on a : $\sum_{p=1}^n \alpha_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{b_{n-1}}{b_n}$.

5. En utilisant les résultats de la question 4. Retrouver les solutions de l'équation 2. Et 3.

6. Calculer la somme $S_n = \sum_{p=1}^n \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$.

B 1 Soit β l'une des racines d'ordre n de l'unité et $Q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ un polynôme avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Calculer $Q(\beta)$.

4 Calculer : $\prod_{p=0}^3 Q(z_p)$ avec z_p solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$.

2. Plus généralement calculer le produit : $\prod_{p=0}^{n-1} Q(z_p)$, les z_p étant les solutions de l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.

C on considère $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$.

1. Soit p un entier relatif. Calculer $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp}$. (Distinguer selon que p est multiple de n ou pas).

2 Soit p et q deux entiers relatifs. Calculer : $T_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} \cdot w_n^{kq}$ et $V_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} \cdot w_n^{-kq}$.

D₁ Factoriser le polynôme $z^n - 1$. En choisissant la valeur de z , montrer que l'on en déduit la formule :

$$(I) \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = n2^{n-1}.$$

2 Simplifier cette formule suivant que n est pair ou impair. En déduire la valeur des produits :

$$P_1 = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \text{ et } P_2 = \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1}$$

E Deux entiers sont dits premiers entre eux et leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1. Soit $z_p = e^{\frac{izp\pi}{n}}$ avec $0 \leq p \leq n-1$.

On dit que z_p est une racine primitive d'ordre n de l'unité si les entiers p et n sont premiers entre eux. On appelle polynôme cyclotomique d'indice n le polynôme :

$\Phi_n(z) = (z - z'_1)(z - z'_2) \dots (z - z'_p) \dots (z - z'_{n_0-1})$ où les z'_p sont, toutes, les racines primitives d'ordre n de l'unité.

1 Monter qu'une condition nécessaire et suffisante pour que z_p soit une racine primitive d'ordre n de l'unité est que, quelque soit l'entier $m < n$ z_p n'est pas une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

2 Que peut-on dire du degré du polynôme cyclotomique d'indice n ?

3 Pour tout n premier, écrire effectivement le polynôme cyclotomique d'indice n .

4 Monter que, pour tout n premier, on a : $\Phi_{2n}(z) = \Phi_n(-z)$.

F Application

1 Déterminer $\Phi_5(z)$ et en déduire $\Phi_{10}(z)$.

2 Écrire l'ensemble diviseurs du naturel 12. Pour chacun des diviseurs d de 12 y compris $d = 1$ et $d = 12$, déterminer les polynômes cyclotomiques $\Phi_d(z)$.

3 Effectuer alors le produit de ces polynômes. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

En considérant les polynômes cyclotomiques ci-dessus quelle conjecture peut-on en faire ?

Deuxième partie

1 Soit a un réel tel que $|a| \neq 1$.

Soit la fonction f définie de $[0, 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$.

Le but de l'exercice est de calculer $I(a) = \int_0^{2\pi} f(x) dx$.

1 Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^{2n} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une factorisation de $z^{2n} - 1$.

2a) Déterminer la valeur réelle de : $\prod_{k=1}^n \left(a - e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \right) \left(a - e^{\frac{-2ik\pi}{2n}} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la valeur de : $\prod_{k=1}^n \left(1 - 2a \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + a^2 \right)$.

3 On considère l'intégrale $J(a) = \int_0^\pi f(x) dx$. Déterminer une somme de $J_n(a)$ donnant une valeur approchée de l'intégrale $J(a)$ par la méthode des rectangles (on partagera l'intervalle $[0, \pi]$ en n intervalles de même longueur).

B1A Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a^{2n}-1)(a+1)}{(a-1)}$ si $|a| < 1$.

B Lorsque $|a| > 1$, on admettra qu'il existe une suite (h_n) qui converge vers 1 telle que : pour tout entier naturel n , $\frac{(a^{2n}-1)(a+1)}{(a-1)} = \frac{a^{2n+1}}{a-1} \times h_n$.

Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\pi}{n} \ln \left(\frac{(a^{2n}-1)(a+1)}{(a-1)} \right) \right]$.

2 En déduire $I(a)$ en fonction de a .

Intégration – Suite

Sujet corrigé

Le sujet comporte deux problèmes obligatoires. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies, de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.

Problème 1

A)

Dans cette partie, a est un réel strictement positif. On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ et l'application g_a de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

1) Etudier la fonction g_a et dresser son tableau de variations.

2) Pour $n \geq 1$, vérifier que $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. En déduire que si $n \geq 2$,

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq w_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

3)

a) Montrer que la suite (w_n) est monotone.

b) Calculer, suivant les valeurs de a , l'intégrale : $\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Montrer que :

- Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

- Si $\alpha > 1$, alors la suite (w_n) converge vers une limite ℓ telle que $\frac{1}{\alpha-1} \leq \ell \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

B)

Dans cette partie et la suivante, on considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ de terme général $S_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. On pose $t_n = \ln(S_n)$ pour tout $1 \leq n$ ($\ln$ désignant la fonction logarithme népérien).

1) Pour $n \geq 2$, montrer que $t_n - t_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

2) Soit h l'application de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

On note h' la dérivée première de h .

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$. Etudier les variations de h' . En déduire le signe de $h'(x)$ pour $x \in [2, +\infty[$.

b) A l'aide de ce qui précède, montrer que chacune des suites (t_n) et (S_n) est monotone.

c) Montrer que la suite (S_n) converge vers une limite positive ou nulle L .

C)

On cherche à calculer la limite L de la suite (S_n) . Soit g l'application de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = h(x) + \frac{1}{x^2}$.

1)

a) Par une méthode analogue à celle utilisée au B.2, déterminer le signe de $g(x)$, pour $x \in [2, +\infty[$.

b) En déduire que, si $n \geq 2$, $t_n - t_{n-1} \geq -\frac{1}{n^2}$.

2)

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $t_n = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

b) A l'aide des résultats de la partie A), trouver un minorant de la suite (t_n) . En déduire que $L > 0$.

3) On considère la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $r_n = \frac{S_{2n}}{S_n^2}$.

a) Montrer que la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ converge et exprimer sa limite en fonction de L .

b) Calculer r_n en fonction de n , pour tout $n \geq 1$.

c) On admet le résultat suivant : $\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!]^2 (2n+1)}{(n!)^4 2^{4n}}$. Calculer L .

Remarque : Ainsi $\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$ est une valeur approchée de $n!$ pour les très grandes valeurs de n (on dit aussi que c'est un équivalent de $n!$).

Problème 2

1) Nous admettons que toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée, admet un plus grand élément, c'est-à-dire : si $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \emptyset$ et il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $p \leq M, \forall p \in E, \exists p_0 \in E : p \leq p_0, \forall p \in E$.

2) Soient G_1 et G_2 deux ensembles non vides. On suppose que dans chacun d'eux est définie une application (+) ayant les mêmes propriétés que celle définie dans $\mathbb{Z}$. On dit qu'une application f définie de G_1 dans G_2 possède la propriété (H) lorsque : pour tous x, y éléments de G_1 , $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

3) Soit G un ensemble non vide dans lequel est définie une addition notée + ayant les mêmes propriétés que celle définie dans $\mathbb{Z}$ (en particulier, l'unique élément e de G vérifiant $x + e = e + x = x$ quel que soit $x \in G$, est noté 0).

Nous supposons qu'est définie dans G une relation notée $\leq$ possédant les mêmes propriétés que $\leq$ dans $\mathbb{Z}$ (En particulier, $[x < y]$ signifie $[x \leq y \text{ et } x \neq y]$).

Enfin, nous supposons que G possède la propriété (A) suivante : pour tous $a \in G, b \in G$ et $a > 0$, il existe un entier n tel que $n.a > b$.

$(\underbrace{na = a + a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}})$

L'objectif du problème est de montrer que : Quel que soit l'élément $u > 0$ de G , il existe une unique application strictement croissante h définie de G dans $\mathbb{R}$, possédant la propriété (H) et vérifiant $h(u) = 1$.

Partie A

Soit $u > 0$ un élément de G . Soit x appartenant à G . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \{p; p \in \mathbb{Z} \text{ et } pu \leq 2^n x\}$, où si $p \in \mathbb{Z}, pu = -[(-p)u]$.

1) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n n'est pas vide. En déduire qu'il existe $p_n \in P_n$ tel que quel que soit $p_n \in P_n, p \leq p_n$.

2) Montrer que $p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$. En déduire que $2p_n \leq p_{n+1} \leq 1 + 2p_n$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = 2^{-n}p_n$; y_n est ainsi un rationnel.

a) Etudier la monotonie de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq y_{n+1} - y_n \leq 2^{-n-1}$. En déduire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $r(x)$.

- 4) Montrer que s'il existe une application croissante h de G dans $\mathbb{R}$ possédant la propriété (H) et vérifiant $h(u) = 1$ alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq 2^n h(x) < 1 + p_n$. En déduire que, dans ce cas, $y_n \leq h(x) \leq 2^{-n} + y_n$.
- 5) Montrer que si h existe alors h est unique.

Partie B

On s'intéresse maintenant à l'application r définie de G dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto r(x)$, $r(x)$ est le réel défini antérieurement.

1) Soient x et x' deux éléments de G tels que $x < x'$ et soient (p_n) et (p'_n) les suites d'entiers associées respectivement à x et x' (voir A.1)

a) Montrer que $0 < 2^n(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$.

b) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $n_0(x' - x) > u$ et $2^{n_0}(x' - x) > u$.

c) Montrer que si $n > n_0$ alors $2^{n-n_0} < 1 + p'_n - p_n$. En déduire que y_n et y'_n définis par : $y_n = 2^{-n}p_n$ et $y'_n = 2^{-n}p'_n$ vérifient $y_n - y'_n > 2^{-n_0} - 2^{-n}$, pour tout $n > n_0$.

d) Montrer que l'application : $x \mapsto r(x)$ est strictement croissante sur G .

2) Avec les mêmes notations, on pose $y''_n = 2^{-n}p''_n$; (y''_n) est la suite associée à $x'' = x + x'$, x et x' étant deux éléments de G .

a) Montrer que $(p_n + p'_n)u \leq 2^n(x + x') < (2 + p_n + p'_n)u$

b) Montrer que $p_n + p'_n \leq p''_n \leq 1 + p_n + p'_n$ et $y_n + y'_n \leq y''_n \leq 2^{-n} + y_n + y'_n$. En déduire que $r(x'') = r(x) + r(x')$.

3) Montrer que $r(u) = 1$.

4) Conclure.

Partie C (Etude d'un cas particulier)

On prend $G = \mathbb{R}$. Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant la propriété (H). L'objectif est de montrer que $f(x) = xf(1)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

1) On suppose que $f(1) = 0$.

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

c) Montrer que $f(n) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) On admet que tout nombre réel y positif peut s'écrire sous la forme $y = n + x$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. Montrer que $f(y) = 0$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

2) On suppose que $f(1) \neq 0$.

a) Montrer que $f(1) > 0$. En déduire que l'application h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$ possède la propriété (H), est croissante et vérifie $h(1) = 1$.

b) Montrer que $h(x) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3) Conclure.

Korka

Suite – Géométrie (conique, ensemble de points)

Sujet corrigé

Introduction

Le sujet comporte deux problèmes obligatoires. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.

Problème 1

Soit $U = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (4n+2)U_n + U_{n-1}\}$

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de U vérifiant respectivement

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = -0,1639 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = -0,1640 \end{cases}$$

Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gardent un signe constant à partir d'un certain rang que l'on déterminera pour chacune des suites (U_n) et (V_n) . Préciser le comportement de (U_n) et (V_n) à l'infini.

2. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de U tels que $a_0 = b_1$ et $a_1 = b_0 = 0$.

a) Calculer $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$).

b) Etudier la limite de $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right), n \geq 1$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right), n \geq 0$. Que peut-on dire de la convergence de $\left(\frac{a_n}{b_n}\right), n \geq 1$. (La limite sera déterminée dans la question 3).

c) En étudiant selon le réel m le comportement de $(a_n - b_n \mu)_{n \geq 0}$, déterminer les éléments de U qui tendent vers 0.

3. A chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction polynomiale ϕ ainsi définie : ϕ_0 est la fonction égale à 1 et $\forall n \geq 1, \phi_n(t) = \frac{t^n(t-1)^n}{n!}$.

a) Etablir que $\forall n \geq 1, \phi''_{n+1}(t) = (4n+2)\phi_n(t) + \phi_{n-1}(t)$.

b) Soit $I_n = \int_0^1 \phi_n(t) e^{-t} dt$. Calculer I_0 et I_1 . Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de U .

c) Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right), n \geq 1$

d) Justifier l'écriture : $\frac{3-e}{e-1} = \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{\ddots}}}}}$

4. Soit P_n l'unique polynôme tel que $P_n - P'_n = \emptyset_n$. La vérification de l'existence et de l'unicité de P_n n'est pas demandée : on admettra également que les coefficients de P_n sont des nombres rationnels.

a) Calculer I_n en fonction de $P_n(0)$ et de $P_n(1)$.

b) Montrer que les suites $(P_n(0))_{n \geq 0}$ et $(P_n(1))_{n \geq 0}$ appartiennent à U . (On rappelle que e est irrationnel).

5.

a) En désignant le polynôme défini par $Q_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$. Calculer $Q_n(t) - Q'_n(t)$ (on conviendra que $Q_0(t) = 1$).

b) Etablir l'égalité (*) suivante où $n \in \mathbb{N}$ $W_k = \frac{(2k)!}{k!}$.

$$(*) P_n\left(u + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} - W_{2k}(u)$$

c) En admettant que, pour t fixé, la suite $n \mapsto Q_n(t)$ converge vers e^t ; déterminer la limite de la suite : $n \mapsto \frac{P_n\left(u + \frac{1}{2}\right)}{W_n}$ (u fixé). On pourra montrer que pour tout réel u , il existe une constante $k > 0$ telle que l'on ait :

$$\left| \frac{P_n\left(u + \frac{1}{2}\right)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| < \frac{k}{2n-1}. \text{ En déduire que pour toute suite } (U_n)_{n \geq 0} \text{ de } U,$$

$\left(\frac{U_n}{W_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite en fonction de U_0 et U_1 .

Problème 2

1. Calculer $\tan 3\emptyset$ en fonction de $t = \tan \emptyset$.

2. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la famille de droites Δ_t d'équations $t^2 x - ty + \frac{p}{2} = 0$, t étant un paramètre réel non nul et p un réel strictement positif donné.

- a) Discuter suivant la position du point $M_0(x_0, y_0)$, le nombre de droites (Δ_t) qui passent par M_0 .
- b) On notera (P) l'ensemble des points M_0 où passe une droite unique (Δ_t) . Montrer que (P) est une parabole dont on donnera l'équation réduite. Donner une équation de la droite (Δ_t) correspondante.
- 3.
- a) Déterminer l'ensemble (D) des points M_0 tels que l'angle géométrique des droites (Δ_t) passant par M_0 , soient perpendiculaires.
- b) Déterminer l'ensemble (H) des points M_0 tels que l'angle géométrique des droites (Δ_t) passant par M_0 , ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.
4. Soit F le point d'abscisse $\frac{p}{2}$ de l'axe (Ox) : $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Montrer que pour tout point M de (H) , $\frac{FM}{KM}$ est une constante, K étant le projeté orthogonal de M sur (D) .
- 5.
- a) Montrer que la perpendiculaire (Δ') à (Δ_t) au point où (Δ_t) coupe $y'Oy$, passe par un point fixe. Cette perpendiculaire (Δ') coupe (D) au point I d'ordonnée h .
- b) Déterminer l'ensemble décrit par le point d'intersection de (Δ_t) avec la droite d'équation $y = h$, quand t varie et préciser ce que sont les droites (Δ_t) pour cet ensemble.
6. On considère les droites (Δ_t) correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 solutions de l'équation $t^3 - 3t + k(1 - 3t^2) = 0$ (1) (k étant un réel).
- a) Montrer que M_1, M_2 et M_3 , points d'intersection respectifs de Δ_{t_2} et Δ_{t_3} , Δ_{t_1} et Δ_{t_3} , Δ_{t_1} et Δ_{t_2} sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- b) Calculer les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 en fonction de t_1, t_2 et t_3 .
7. Calculer $t_1 + t_2 + t_3, t_1t_2 + t_3t_1 + t_2t_3$ en fonction des coefficients de l'équation (1).
- 8.
- a) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle $M_1M_2M_3$ en fonction de k et p .
- b) Quel est l'ensemble décrit par G , lorsque k varie dans $\mathbb{R}$?

Problèmes ouverts

Sujet corrigé**PROBLEME 1****Partie A**

Le plan euclidien P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité 1 cm. On considère les points $A_1(1, 0), A_2(2, 0), \dots, A_n(n, 0), B_1(0, 1), \dots, B_n(0, n)$ et $C_n(n, n)$ dans ce plan.

Les droites passant respectivement par $A_1, \dots, A_{n-1}$ et parallèles à la droite de repère $(O, \vec{v})$ et les droites passant respectivement par $B_1, \dots, B_{n-1}$ et parallèles à la droite de repère $(O, \vec{u})$, partagent le carré $OACB$ en n^2 carrés de mêmes dimensions. Parmi ces carrés, on distingue ;

- les 4 carrés en coin, qui ont deux cotés sur la frontière du carré $OACB$.
- les $4(n-2)$ carrés en bordure, qui ont un seul côté sur la frontière du carré $OACB$.
- les $(n-2)^2$ carrés intérieurs qui n'ont aucun côté sur la frontière du carré $OACB$.

On dit que deux carrés sont adjacents, s'ils ont un côté commun.

A chacun de ces carrés, autres que les carrés en coin dont on ne s'occupera pas, on affecte un nombre réel X qu'on appellera potentiel de ce carré, de telle sorte que le potentiel de tout carré intérieur soit la moyenne arithmétique des potentiels de 4 carrés adjacents.

Le problème consiste à étudier les potentiels des carrés intérieurs quand on connaît ceux des carrés en bordure.

1. Montrer que le potentiel X d'un carré intérieur est au plus grand égal au plus grand des potentiels X_4 des carrés adjacents et au moins égal au potentielle plus petit X_1 de ces mêmes carrés. Dans quel cas y'a-t-il égalité entre le potentiel d'un carré intérieur et ces deux potentiels X_1 et X_4 ?

2. a. Montrer que, si le plus grand des potentiels est atteint en un carré intérieur, tous les carrés ont même potentiel.

b. Montrer que, si le potentiel d'un carré intérieur est strictement positif, il existe au moins un carré en bordure dont le potentiel est strictement positif.

c. Montrer que, si le potentiel d'un carré intérieur est strictement négatif, il existe au moins un carré en bordure dont le potentiel est strictement négatif.

d. Montrer que, si tous les potentiels des carrés en bordure sont nuls, il en est de même que ceux des carrés intérieurs.

Partie B

On prend $n = 4$ et on suppose que les carrés en bordure ont les potentiels indiqués sur la figure suivante :

	1	1	
0			0
0			0
	0	0	

Calculer les potentiels des carrés intérieurs et les reporter sur la figure. Reproduisez la figure et complétez-la en y plaçant les potentiels des carrés intérieurs.

Partie C

On suppose de nouveau n quelconque ($n \geq 3$) et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i} = \frac{1}{2n} \cdot \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \frac{1}{2n} \cdot \overrightarrow{OB}$. On prend comme potentiel de chacun des carrés autres que ceux en coin, la valeur prise au centre du carré considéré, par la fonction φ telle que :

$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

1. Prouver qu'il existe une condition nécessaire et suffisante sur certains des coefficients de la fonction φ pour que cette répartition des potentiels satisfasse à la condition imposée.
2. La répartition des potentiels, demandée dans la partie B, peut-elle être obtenue à l'aide d'une fonction φ ?
3. La répartition des potentiels étant donnée par φ , n étant quelconque, on suppose qu'il existe 3 carrés centrés sur la diagonale $[OC]$ et qui ont des potentiels nuls.

Montrer que tous les carrés centrés sur $[OC]$, ont chacun un potentiel nul et que tous les autres carrés ont des potentiels deux à deux opposés.

Partie D

Le plan muni du repère orthonormé direct de la partie A. On appelle potentiel d'un point quelconque $M(x,y)$ du plan le réel $\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan de potentiel nul ; construire cet ensemble dans chacun des cas suivants :

1. $\varphi(x,y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$. (On pourra chercher l'équation de l'ensemble dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. avec :

$$\begin{cases} \vec{i} = (\cos\theta)\vec{u} + (\sin\theta)\vec{v} \\ \vec{j} = (-\sin\theta)\vec{u} + (\cos\theta)\vec{v} \end{cases} \text{ ensuite on choisira judicieusement } \theta.$$

2. $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 - \frac{1}{25}(3x+4y-1)^2 = 0$

PROBLEME 2

Preliminaire

On pose : $P(x) = x^n$, $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Montrer que : $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, h \neq 0 : P(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(x)$, où $P^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de P . On admettra ce résultat, connu sous le nom de formule de Taylor, pour un polynôme quelconque de degré n .

1. On appelle nombres de Bernoulli les nombres B_α ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) définis par les relations :

$$B_0 = 1, \quad C_2^0 B_0 + C_2^1 B_1 = 0, \quad C_3^0 B_0 + C_3^1 B_1 + C_3^2 B_2 = 0 \dots$$

$$C_k^0 B_0 + C_k^1 B_1 + C_k^2 B_2 + \dots + C_k^{k-1} B_{k-1} = 0$$

Calculer B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5 . Montrer que les B_k sont rationnels.

2. On appelle polynômes de Bernoulli les polynômes définis par :

$$B_k(x) = C_k^0 B_0 x^k + C_k^1 B_1 x^{k-1} + C_k^2 B_2 x^{k-2} + \dots + C_k^k B_k$$

a) Prouver que : $\frac{dB_k(x)}{dx} = kB_{k-1}(x)$

b) En déduire l'expression de $\frac{d^p B_k(x)}{dx^p}$.

3. Prouver le développement :

$$B_k(x+h) = C_k^0 B_k(x) + C_k^1 h B_{k-1} + C_k^2 h^2 B_{k-2}(x) + \dots + C_k^k x^k$$

4. Calculer $B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x)$ et $B_5(x)$.

5. Prouver que : $B_k(x+1) - B_k(x) = kh^{k-1}$

6. a) Trouver l'expression de la somme $S_k^n = \sum_{p=1}^{n-1} p^k$ à l'aide du polynôme $B_{k+1}(x)$. En déduire S_k^n pour $k = 1, 2, 3, 4$.

b) Prouver à l'aide de 3. Que $\sum_{s=0}^{k-1} C_k^s B_s(x) = kx^{k-1}$. En déduire le polynôme $B_k(x)$ en fonction des polynômes $B_s(x)$.

Application : Calculer $B_6(x)$, puis S_5^n .

Sujet 14

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2003

Généralisation du théorème des accroissements finis – fonction exponentielle

Sujet corrigé**PARTIE 1**

Dans cette partie on généralise le théorème des accroissements finis.

1) Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, admettant une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$. Soit ε_n le nombre défini par :

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \phi(x) \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par}$$

$$\phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon_n = 0$$

a) Montrer que $\phi^{(m)}(a) = 0$ pour tout entier m tel que $m \in [a, b]$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer, en partant de $C_0 = b$, que pour tout entier m vérifiant $0 < m \leq n + 1$, il existe $C_m \in]a, C_{m-1}[$ tel que $\phi^{(m)}(C_m) = 0$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = \varepsilon_n$.

Remarque 1. En remplaçant ε_n par $f^{(n+1)}(c)$, on a (F_1) :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \text{ cette formule est appelée formule de Taylor à}$$

l'ordre n , $n \in \mathbb{N}$, avec reste de Lagrange. Le reste de Lagrange est $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. Le

réel c dépend de f , a , b et n . Le théorème des accroissements finis correspond ici à l'ordre $n = 0$.

2) Soient a , b et c trois réels avec $a < b$. Montrer que $c \in]a, b[$ si et seulement s'il existe un unique réel $\theta \in]0, 1[$ tel que $c = a + \theta(b - a)$.

Remarque 2. En utilisant ce résultat, la formule (F_1) devient (en posant par exemple $a = 0$ et $b = x$) la formule suivante, dite formule de Mac-Laurin à l'ordre n d'une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0.

$$(F_2) : f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta(x)), \theta \in]0,1[; \forall x \in I, \theta \text{ dépend de } f, x$$

et n .

3) Applications : On pose $\alpha_r(x) = (1+x)^r, x \in]-1, +\infty[, r \in \mathbb{Q}$. Donner la formule de Mac-Laurin à l'ordre n , de α_r pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la formule du binôme de

Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ pour tous a et b réels. Les notations qu'on donne ici

sont valables pour les parties 2, 3 et 4. On note F l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $(P_0) : f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

On note F^* les fonctions non nulles de F et D l'ensemble des fonctions de F^* qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 2

a) Que devient la relation (P_0)

1er cas : $y = 0$ 2^{ème} cas : $x = y = 0$

b) Déterminer les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P_0) . En déduire que F, F^* et D sont non vides.

c) Soit $f \in F$, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$.

2)

a) Soit $f \in F$. Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.

b) Soient $x_0 \in F^*$ et $f \in F$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $f(0) = 0$.

3) Soit $f \in F^*$. Montrer que $f(0) = 1$ et $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

4)

a) Soient $k \in \mathbb{R}, f$ et $f, g \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k, f et g pour que $kf \in F, f+g \in F$. En déduire que si $f, g \in F^*$ alors $f+g \notin F^*$.

b) Soient $f, g \in F^*$. Montrer que fg et $\frac{f}{g} \in F^*$.

c) Soient $f \in D, g \in D$. Montrer que fg et $\frac{f}{g} \in D$.

5) Soient $f \in F^*$ et r dans $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que $f(rx) = [f(x)]^r$ (on pourra successivement prendre $r = 0, r = -1, r = n \in \mathbb{N}, r = m \in \mathbb{Z}$ puis $r = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$).

b) Montrer que $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

6) Soient $f, g \in F^*$. Montrer que $f(1) = g(1)$ si et seulement si $f = g$.

7) D'après 2-6) et 2-5a) si $f(1) = a$ alors $f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$ et $a > 0$ d'après 2-3).

Soit a un réel strictement positif et $\bar{f}_a$ la fonction définie de $\mathbb{Q}$ dans $]0, +\infty[$ par $\bar{f}_a(r) = a^r$.

On admet que $\bar{f}_a$ possède un prolongement sur $\mathbb{R}$ qui est unique et dérivable. On note le prolongement $f_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ tel que $f_a(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $f_a \in D$ (on pourra utiliser la propriété (P₁) du préambule).

b) Soit l'application $\alpha :]0, +\infty[\rightarrow D$ par $\alpha(a) = f_a$ où f_a est définie comme ci-dessus :

Montrer que α est une application bijective.

c) propriétés algébriques de α : Pour tous réels a et b de $]0, +\infty[$ et tout rationnel r , montrer que :

$$c_1) \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$$

$$c_2) \alpha\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\alpha(a)}$$

$$c_3) \alpha\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)}$$

$$c_4) \alpha(a^r) = [\alpha(a)]^r$$

PARTIE 3

1) Soit $f_a \in F^*$ dérivable en 0. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}$ alors f_a est dérivable en x_0 et que $f'_a(x_0) = f'_a(0)f_a(x_0)$ (On pourra utiliser 2-5b))

2) Soit $f_a \in D$. Montrer que pour tout entier naturel n , f_a est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que

$$f_a^{(n+1)}(x) = f'_a(0)f_a^{(n)}(x) = [f'_a(0)]^n f_a(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

3) Pour tout $a \in]0, +\infty[$, on pose $\mu(f_a) = f'_a(0)$. On définit ainsi une application μ de D dans $\mathbb{R}$ par : $\mu(f_a) = f'_a(0)$. Propriétés algébriques de μ :

a) Montrer que :

$$a_1) \mu(f_a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$a_2) \mu(f_a) = 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

b) Pour tous a et b de $]0, +\infty[$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, montrer que

$$b_1) \mu(f_a f_b) = \mu f_a + \mu f_b$$

$$b_2) \mu\left(\frac{1}{f_a}\right) = -\mu(f_a)$$

$$b_3) \mu\left(\frac{f_a}{f_b}\right) = \mu(f_a) - \mu(f_b)$$

$$b_4) \mu(f_a^r) = -\mu[(f_a)^r] = r\mu(f_a)$$

c) Montrer que :

$$c_1) \mu(f_a) = \mu(f_b) \Leftrightarrow a = b$$

$$c_2) \mu(f_a) > \mu(f_b) \Leftrightarrow a > b.$$

4) Tableau de variations pour $f_a \in D$.

a) En utilisant 3.2) et 3.3a) donner les sens de variations de f'_a et f_a en fonction de a , $a \in]0, +\infty[$.

b) On suppose que $a > 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que : $f_a(x) \geq 1 + x(\mu(f_a))$, $\forall x > 0$.

c) En déduire que (+) reste vrai

$c_1)$ pour $0 < a < 1$ et $x < 0$ $c_2)$ pour $x = 0$, $a \in]0, +\infty[$.

d) Si $a > 1$ (respectivement $a < 1$) calculer les limites de f_a en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) puis en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$). Compléter les tableaux de variations du 3.4a).

e) On suppose que $a > 1$.

1. $e_1)$ En utilisant la formule de Mac-Laurin, montrer que $f_a(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} [\mu(f_a)]^k$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

2. $e_2)$ En déduire les limites de $\frac{f_a(x)}{x^n}$ et $x^n f_a(-x)$ en $+\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Puis les limites de $\frac{f_a(x)}{x^r}$ et $x^r f_a(-x)$ en $+\infty$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

5) Soit x un réel positif, on pose $s_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. On donne $S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n s_k(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On définit ainsi une suite $(S_n(x))_n$ dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$. On veut montrer qu'elle est convergente et on suit la démarche suivante.

a) Etudier la convergence de $(S_n(x))_n$.

b) On suppose que $x > 0$, on pose $p = 2(E(x)+1)$. Montrer que, pour $k \geq p$, $s_k(x) \leq s_{p-1}(x) \frac{1}{2^{k-p+1}}$.

c) Etudier la convergence de $(S_n(x))_n$, $x \in]0, +\infty[$. puis en utilisant (a) et (b) ci-dessus, montrer que $(S_n(x))_n$ converge pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Remarque 3. On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_1(1)$. Cette notation reste valable pour la suite. Calculer $S_5(1)$ à 0,001 près.

6) Soit $f_a \in D$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mu(f_a)$ pour que $f'_a \in D$.

7)

a) En utilisant la formule de Mac-Laurin à l'ordre n de f_a , $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $\mu(f_a) = 1$ alors $a = \gamma$ où γ est défini en 3.5c, en déduire que $\mu[(f_\gamma)^r] = r$, $\forall r \in \mathbb{Q}$ en utilisant 3.3.b₄).

b) Donner les formules de Mac-Laurin à l'ordre n de f_a et f_γ pour $a \in]0, +\infty[$.

c) Si $\mu(f_a) = m \in \mathbb{R}$, en utilisant 3.7.b), montrer qu'il existe θ et $\theta' \in]0, 1[$ tel que : $a - f_\gamma(m) = \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} [f_a(\theta) - f_\gamma(\theta'm)]$. En déduire que $a = f_\gamma(m)$ c'est-à-dire $a = f_\gamma(\mu(f_a))$, $\forall a > 0$.

d) En utilisant la formule de Mac-Laurin à l'ordre n , $n \in \mathbb{N}^*$ de $\alpha_r(x) = (1+x)^r$ où $r \in \mathbb{Q}$, $|r| < 1$, $x > -1$ (voir 1.3) avec $x = a - 1$, puis en faisant tendre r vers 0, montrer qu'il existe $\theta''_0 \in]0, 1[$ dépendant de n et a tel que :

$$\mu(f_a) = f'_a(0) = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(a-1)^n}{n} + (-1)^n \frac{(a-1)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{[1 + \theta''_0(a-1)]^{n+1}}$$

Vérifier $\forall a > 0$, $1 + \theta''_0(a-1)$ est compris entre 1 et a (regarder les cas $a = 1$, $a < 1$ et $a > 1$).

8) On définit une nouvelle application λ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $\lambda = \mu \circ \alpha$.

a) **propriétés algébriques de λ .** Si $a, b \in]0, +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, en utilisant 27), 33) et 3.7) montrer que :

a₁) $\lambda(1) = 0$

a₂) $\lambda(\gamma) = 1$

a₃) $\lambda \circ f_\gamma(r) = r$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.

a₄) $f_\gamma \circ \lambda(a) = a$, $\forall a > 0$

a₅) $\lambda(ab) = \lambda(a) + \lambda(b)$

a₆) $\lambda\left(\frac{1}{a}\right) = -\lambda(a)$

a₇) $\lambda\left(\frac{a}{b}\right) = \lambda(a) - \lambda(b)$

a₈) $\lambda(a^r) = r\lambda(a)$, $r \in \mathbb{Q}$.

b) propriétés analytiques de λ

1. b₁) En utilisant 3.7.d, montrer que λ est continue et dérivable en 1 et que $\lambda'(1) = 1$.

En déduire que λ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner $\lambda'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Préciser les variations de λ . (N.B. : λ' est la dérivée première de λ).

2. b₂) En utilisant 3.8.aa₃) et a₄) et la propriété (P₁) du préambule, montrer que λ est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que f_γ est sa bijection réciproque.

b₃) Calculer les limites de λ en 0^+ et $+\infty$ puis les limites de $\frac{\lambda(x)}{x^r}$ en $+\infty$ et $x^r \lambda(x)$ en 0^+ , $r \in \mathbb{Q}_+^*$ (on pourra utiliser f_γ).

c) : détermination des fonctions D en fonction de f_γ et λ

Montrer que $f_a(r) = f_\gamma(r\lambda(a))$, $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$. En déduire que $f_a(x) = f_\gamma(x\lambda(a))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

PARTIE 4

On se propose de montrer ici que les fonctions de D peuvent être regardées comme des limites de suites. Pour cela d'après le 3.8.c) il suffit de le montrer pour f_γ . Si x est un

réel, on pose $t_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$w_n(x) = \begin{cases} t_n(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{t_n(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On définit ainsi deux suites $(t_n(x))_n$ et $(w_n(x))_n$.

1)

a) Si $x > 0$, en utilisant la formule du binôme de Newton montrer que $t_n(x) > 1$.

b) Si $x > 0$, montrer que $t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$. En déduire que $t_n(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ puis que la suite $(t_n(x))_n$ est majorée en utilisant 3.5).

c) Montrer que $(t_n(x))_n$ est croissante puis qu'elle converge.

2) Etudier la convergence de la suite $(t_n(0))_n$.

3)

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|t_n(x)t_n(-x)| \leq \frac{1}{n} [t_n(x^2) - 1]$. En déduire que $(t_n(x))_n$ converge pour $x < 0$.

b) Montrer que $(t_n(x))_n$ converge pour tout réel x . On note $h(x)$ sa limite. Montrer que $(w_n(x))_n$ converge vers $h(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $w_n(-x) = \frac{1}{w_n(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$

5)

a) Soient x et y deux réels, montrer que :

$$|t_n(x)t_n(y) - t_n(x+y)| \leq \frac{1}{n} t_n(|x+y|)(t_n(xy) - 1)$$

En déduire que h vérifie (P_0) c'est-à-dire $h(x+y) = h(x)h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n(x) = h(x)$ où $w'_n(x)$ est la dérivée première de w_n en tant que fonction de x .

c) On admet que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b w'_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} w'_n(x) dx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc $h \in D$). Montrer que $h(x) = h(1) + \int_1^x h(t) dt$; en déduire que $h'(x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $h = f_\gamma$.

Conclusion

On vient d'étudier les fonctions exponentielles à base a (avec $a > 0$) que vous avez peut-être définies par $f_a(x) = \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$. La fonction f_γ est la fonction exponentielle à base $e = \gamma$ et la fonction λ est la fonction logarithme népérien introduite ici de manière peu usuelle.

Sujet 15

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2004

Sujet non corrigé**Objectifs, définitions et notations**

Dans tout le problème, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Objectif

L'objet du problème est l'étude de quelques questions relatives à la notion de points cocycliques.

Cette étude fera appel à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une troisième ainsi qu'à celle de puissance d'un point par rapport à une conique généralisant la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle qui a été certainement déjà rencontrée.

Définition 1 (angle orienté de droites)

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et θ un nombre réel.

On dit que θ est une mesure de l'angle orienté du couple de droites $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ si et seulement si θ ou $\theta + \pi$ est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

On note, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^\wedge$ l'angle du couple de vecteur $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)^\wedge$ l'angle du couple de droites $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

Définition 2 (Droites symétriquement inclinées)

Etant données trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si les angles orientés des couples de droites, $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_2)$ ont des mesures opposées modulo π .

PRELIMINAIRES

1. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'affixes respectives z_1 et z_2 et soit θ un nombre réel.
Donner une relation nécessaire et suffisante entre z_1 , z_2 et θ pour que $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \theta (\pi)$.
2. Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
 - a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation φ du plan $\mathcal{P}$ définie analytiquement dans $\mathbb{C}$ par :
$$\begin{cases} x' = \lambda x + \alpha \\ y' = \lambda y + \beta \end{cases}$$
 - b) Soit Γ une courbe d'équation, dans $\mathbb{C}$, $f(x, y) = 0$, où f est une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que l'ensemble Γ' défini par : $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$, se déduit de Γ par une transformation que l'on précisera.

PARTIE I Droites symétriquement inclinées et points cocycliques

1. Soit trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'affixes respectives z , z_1 et z_2 .
 - a) Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $\frac{z_1 z_2}{z^2}$ est réel.
 - b) En déduire, dans le cas où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, que :
 $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elles sont, soit parallèles à $\mathcal{D}$, soit perpendiculaires à $\mathcal{D}$.
2. Soit A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre points distincts d'un cercle du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 .
On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\frac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$ est réel.

b) Montrer que les droites $(A_1 A_3)$ et $(A_2 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathbb{D}$.

En est-il de même pour les droites $(A_1 A_4)$ et $(A_2 A_3)$?

3. Soit A_1, A_2 et A_3 trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et soit t l'affixe d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente T en A_1 , à $\mathcal{C}$. On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur une droite $\mathbb{D}$ de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\frac{(z_3 - z_2)t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$ est réel.

b) Montrer que les droites T et $(A_2 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathbb{D}$.

PARTIE II Etude générale des coniques

On rappelle que les coniques (propres) sont les courbes obtenues en coupant un cône circulaire par un plan ne passant pas par le sommet du cône.

On a aussi la définition suivante.

Définition 3

Etant donné une droite d , un point F n'appartenant pas à d et un réel strictement positif e , on appelle conique de directrice d , de foyer associé F et d'excentricité e l'ensemble Γ des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur d .

1) Montrer que la droite $\mathbb{D}$ passant par F et orthogonale à d est un axe de symétrie pour Γ .

2) Soit K le point d'intersection de d et de $\mathbb{D}$, M un point de Γ , M' son projeté orthogonal sur $\mathbb{D}$.

Montrer que $M' M^2 + (\overrightarrow{M'F} + e \overrightarrow{M'K}) \cdot (\overrightarrow{M'F} - e \overrightarrow{M'K}) = 0$.

3) On suppose $e = 1$.

- Montrer que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{\Omega\}$, où Ω est le milieu de $[KF]$.
- Montrer que $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} / M' M^2 = 2 \overline{\Omega M'} \times \overline{KF}\}$.
- En déduire que l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est la demi-droite $[\Omega x)$ d'origine Ω contenant F .
On dit que Γ est la parabole de directrice d et de foyer F ; Ω est son sommet.

4) On suppose $e \neq 1$

- Montrer que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{\Omega, \Omega'\}$, où $\Omega = \text{bary} \{ (F, 1) (K, e) \}$.
et $\Omega' = \text{bary} \{ (F, 1) (K, -e) \}$.
- Montrer que $\Gamma = \{ M \in \mathcal{P} / M' M^2 = (e^2 - 1) \overline{M' \Omega} \times \overline{M' \Omega'} \}$.
- En déduire que :
 - si $e < 1$, l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est $[\Omega \Omega']$. Γ est alors appelé ellipse ; Ω et Ω' sont ses sommets.
 - si $e > 1$, l'ensemble des projetés orthogonaux des points de Γ sur $\mathcal{D}$ est la réunion des deux demi-droites $[\Omega x)$ et $[\Omega' x')$ d'origine respectives Ω et Ω' ne contenant pas K .
 Γ est alors appelé hyperbole ; Ω et Ω' sont ses sommets.

5) On se propose de montrer qu'un cercle ne peut pas vérifier la définition 3.
En effet, si tel était le cas, l'axe focal $\mathcal{D}$ serait un diamètre de ce cercle et aurait deux points communs Ω et Ω' avec le cercle.

- Montrer alors que $M' M^2 = -\overline{M' \Omega} \times \overline{M' \Omega'}$
- En comparant avec une autre expression de MM'^2 , conclure.

N.B. : Cela n'empêche pas au cercle d'être une conique en tant que section plane d'un cône.

Nous retiendrons donc que les coniques sont les cercles, les ellipses les hyperboles et les paraboles.

PARTIE III Puissance d'un point par rapport à une conique

Soit Γ une conique et S un point du plan. On se propose de définir la notion de puissance de S par rapport à Γ .

On considère alors une droite Δ quelconque passant par S , munie d'un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$.

- On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon $R > 0$.
 - On suppose que Δ coupe Γ en deux points A et B et on pose $p = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$.
Exprimer p en fonction de SI et R .
Le nombre p , qui ne dépend que de S et Γ , est appelé puissance de S par rapport à Γ et est noté $\Gamma(S)$.
 - On suppose que Δ est tangente à Γ en M_0 . Montrer que $\Gamma(S) = SM_0^2$.

2. On suppose que Γ n'est pas un cercle. Soit e son excentricité, $\mathcal{D}$ son axe focal et θ une mesure de l'angle orienté du couple de droites $(\mathcal{D}, \Delta)$.

On se propose de montrer que lorsque Δ coupe Γ en deux points A et B , le produit $p = (1 - e^2 \cos^2 \theta) \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend que de S et Γ . Pour cela, on suppose dans cette question que le repère $\mathcal{R}$ est choisi de sorte que $\mathcal{D} = (o, \vec{i})$.

- a) Montrer que Γ peut être défini dans $\mathcal{R}$ par une équation de la forme $f(x, y) = 0$, où $f(x, y) = (1 - e^2) x^2 + y^2 + \mu_1 x + \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 deux constantes réelles.
- b) On note (x_0, y_0) les coordonnées de S . Soit $M \in \Delta$ et posons $\lambda = \overline{SM}$.
- i) Exprimer les coordonnées x et y de M en fonction de x_0, y_0, θ et λ .
- ii) En déduire que $M \in \Gamma$ si et seulement si λ est racine d'une équation de la forme $(1 - e^2 \cos^2 \theta) X^2 + \beta X + \gamma = 0$ où β et γ sont des réels qu'on exprimera en fonction de $\theta, x_0, y_0, e, \mu_1$ et μ_2 .
- c) On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B .
Montrer que $p = f(x_0, y_0)$; p s'appelle la puissance de S par rapport à Γ et sera noté $\Gamma(S)$.
- d) On suppose que Δ est tangente à Γ en M_0 .
En admettant que $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$, montrer que $f(x_0, y_0) = (1 - e^2 \cos^2 \theta) SM_0^2$.

PARTIE IV lignes de niveau de l'application $S \mapsto \Gamma(S)$

Soit Γ une conique du plan.

A tout réel r , on associe $\Gamma_r = \{S \in \mathcal{P} / \Gamma(S) = r\}$

On pose : $U = \{r \in \mathbb{R} / \Gamma_r = \emptyset\}$ $V = \{r \in \mathbb{R} / \Gamma_r \text{ est réduit à un point}\}$;
 $W = \mathbb{R} \setminus (U \cup V)$.

1. On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon R .
Préciser en fonction de R , les ensembles U, V et W et décrire Γ_r pour $r \in W$.
2. On suppose que Γ n'est pas un cercle.
- a) Déterminer Γ_0 . Lequel des ensembles U, V et W contient O ?
- b) On suppose que Γ est une ellipse d'équation, dans $\mathcal{R}$,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$. On a alors $\mathcal{D} = (o, \vec{i})$ qui est l'axe focal.

Déterminer U, V et W et montrer que pour tout réel $r \in W$, Γ_r est l'image de Γ par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

c) Répondre aux mêmes questions qu'en IV – 2 –b) si Γ est la parabole d'équation $y^2 = 2ax$ dans $\mathbb{R}$ avec $a > 0$. $\mathcal{D} = (o, \vec{i})$ est alors l'axe focal.

d) On suppose que Γ est une hyperbole d'équation, dans $\mathbb{R}$,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$. On a alors $\mathcal{D} = (o, \vec{i})$ qui est l'axe focal.

i) Décrire Γ_{b^2} .

ii) Déterminer et construire $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$.

iii) On suppose $r \neq b^2$. Montrer que, selon la valeur de r , Γ_r est l'image de Γ ou Γ' par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

PARTIE V

Points cocycliques sur une conique

Γ désigne une conique qui n'est pas un cercle. On note $\mathcal{D}$ son axe focal. Soit quatre points distincts A_1, A_2, A_3 et A_4 sur Γ .

1. On suppose que $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont sécantes en un point S.

a) Montrer que $S \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

b) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si

$$\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SA_3} \cdot \overline{SA_4} \text{ (utiliser III ; 1-a)}$$

c) Montrer que A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathcal{D}$.

2. On suppose $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ parallèles.

a) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathbb{D}$.

b) Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de Γ .

3. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la droite $(A_2 A_3)$ sont sécantes en un point S . On appelle $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle A_1, A_2 et A_3 .

a) Montrer que $S \notin \{A_1, A_2, A_3\}$.

b) Montrer que T_1 est la tangente à $\mathcal{C}$ en A_1 si et seulement si :

$$SA_1^2 = \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_3}.$$

c) Montrer que T_1 est la tangente à $\mathcal{C}$ en A_1 si et seulement si $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur $\mathbb{D}$.

KOR

Sujet 16

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2005

Sujet corrigé**PRELIMINAIRE**

1) Déterminer un polynôme P , de degré 3, à coefficients réels, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(x-1) = x^2, \text{ et vérifiant } P(0) = 0.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) En utilisant une méthode analogue à celle de la première question, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

PARTIE A

(U_n) est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de raison r et telle que $U_0 = a$ et $U_{n_0+1} = b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et n_0 fixé dans $\mathbb{N}$.

1) Si $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $b - a \in \mathbb{N}^*$ et que r est un diviseur de $b - a$.

2) On suppose dans cette question que r est fixé dans $\mathbb{N}^*$ et que $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.
Si $b < r(n_0 + 2)$, déterminer le nombre de suites (U_n) possibles.

3) On considère un polynôme φ du second degré tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \in \mathbb{R}^*, (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2.$$

On suppose dans cette question que la suite (U_n) est strictement croissante et que $\alpha.Q(a) > 0$, $\alpha.Q(b) < 0$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Montrer que $a < \frac{-\beta}{2\alpha}$.

4) Si $r = a$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b = 16\,200$, quel est le nombre de valeurs de a ?

5) On suppose que n_0 est pair avec $n_0 = 2h$; on pose $x = \frac{a+b}{2}$.

Calculer $U_0, U_1, \dots, U_{n_0+1}$ en fonction de x, r et h .

6) On suppose que $U_0, U_1, \dots, U_{n_0-1}$ sont des entiers impairs consécutifs positifs ou négatifs tels que $U_0 + U_1 + \dots + U_{n_0-1} = 7^3$.

Donner les valeurs de a et b .

7) S_n est la somme des n premiers termes de la suite (U_n) , $r \neq 0$, $a \neq 0$, $n \neq 0$.

- a) Déterminer les suites (U_n) telles que $\frac{S_{2n}}{S_n}$ soit indépendant de n .
- b) On suppose que $r \neq 0$, $a \neq 0$, $n \neq 0$ et $\frac{S_{2n}}{S_n} = k$, k constante réelle. Donner la valeur de k .

On pose alors $\Sigma_n = S_2 + S_4 + S_6 + \dots + S_{2n}$.

Mettre Σ_n sous la forme d'un polynôme factorisé, en n .

Calculer $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n$, en fonction de n .

8) Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

On suppose que $S_n = 3n^2 + 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Donner la valeur de la raison r de la suite (U_n) et celle de U_0 .
- b) Montrer qu'il y a une infinité de termes de la suite (U_n) , qui sont des carrés parfaits et donner la forme générale des indices de ces termes.
- 9) On pose : $U_m = \lambda$, $U_n = \mu$ et $U_p = \gamma$ avec $r \neq 0$.
Montrer que : $\lambda(n-p) + \mu(p-m) + \gamma(m-n) = 0$.

10) On pose : $w_n = e^{U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- a) Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
- b) Si x , y et z sont des termes consécutifs de la suite (w_n) , montrer que :
 $\forall k \in \mathbb{Z}, (x^k + y^k + z^k)(x^k - y^k + z^k) = x^{2k} + y^{2k} + z^{2k}$.
- c) x , y et z étant des réels tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait
 $(x^k + y^k + z^k)(x^k - y^k + z^k) = x^{2k} + y^{2k} + z^{2k}$, donner les conditions sur k , x et z pour que x , y et z soient 3 termes consécutifs d'une suite géométrique.
- d) Déterminer 3 termes consécutifs d'une suite géométrique (t_n) sachant que la somme de leurs inverses est égale à 26 et que la somme des carrés de leurs inverses est égale à 364.
- e) Montrer que si $t_m = s$, $t_n = h$ et $t_p = e$ alors $s^{n-p} \cdot h^{p-m} \cdot e^{m-n} = 1$.

11) Soit $f : x \mapsto f(x) = x^2 e^x$.

- a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b) On suppose que (U_n) a pour raison $r = 2$ et que $a = 0$.
Montrer que $f^{(n)}$, fonction dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur $\mathbb{R}$, vérifie :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + x U_n + V_n)$, où (V_n) est une suite à déterminer.
Calculer U_n et V_n en fonction de n .

- c) Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal, on considère les points $M_n (U_n, V_n)$.
Montrer que si $n \geq 1$, M_n appartient à une parabole (P) dont on donnera une équation et les éléments caractéristiques.

12) On suppose que $\tan(2a) = 2$, que $0 < a < \frac{\pi}{4}$ et que $b - a = (n_0 + 1) \frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction $g : x \mapsto g(x) = e^{-x} \sin(2x)$.

- a) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.
- b) Pour tout réel x , calculer $g'(x)$.
- c) Montrer que les solutions de l'équation $g'(x) = 0$ sont les termes de la suite (U_n) et que les images par g de ces solutions sont des termes d'une suite géométrique dont on donnera la raison et dont on étudiera le sens de variation et la convergence.

PARTIE B

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $0 < a < b$, $U_0 = a$ et $U_{n_0+1} = b$.

- 1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 2) a) Montrer que la fonction $\exp_e : x \mapsto e^x$ peut s'écrire $\exp_e = \varphi + \psi$ où φ est une fonction paire et ψ une fonction impaire, définies sur $\mathbb{R}$ et à déterminer.
- b) Etudier les variations de φ et ψ et tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (C') représentatives de φ et ψ respectivement.
- c) Montrer que ψ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque ψ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, [\varphi(x)]^2 - [\psi(x)]^2 = 1$ et en déduire l'expression de $(\psi^{-1})'(x)$

en fonction de x et la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

- d) On considère le domaine $(D_n) = \{M(x,y) \in P / 0 \leq x \leq U_n \text{ et } \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$
Calculer en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}_n$ de (D_n) .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- 3) On considère la courbe $(H) : 2xy = 1$. Soit A le point de (H) d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et M le point de (H) , de coordonnée (x,y) . On désigne par A' et M' les projetés orthogonaux respectifs de A et M sur l'axe (ox) du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et K le point d'intersection de (OA) et (MM') .
- a) Démontrer que le triangle OMK et le trapèze $A'A K M'$ ont même aire.
En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine curviligne fermé OAM limité par $[OA]$, $[OM]$ et l'arc de (H) limité par A et M .

- b) On veut que $\mathcal{A} = U_n$.
Calculer alors, en fonction de U_n , les coordonnées x et y de M , dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- c) X et Y étant les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ déduit du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation $R(0, \frac{\pi}{4})$ de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$; montrer que : $X = \varphi(2U_n)$ et $Y = \psi(2U_n)$.
- d) Calculer $X^2 - Y^2$ et en déduire la nature de (H) et ses éléments caractéristiques.
- e) On considère un triangle EFG dont les 3 sommets appartiennent à un même arc de (H) ; montrer que l'orthocentre T de ce triangle appartient à cet arc de (H) .
- f) Ω étant le centre du cercle circonscrit au triangle EFG ,
on pose : $\vec{v} = \vec{\Omega T} - \vec{\Omega E} - \vec{\Omega F} - \vec{\Omega G}$.
❖ Montrer que : $\vec{v} \perp \vec{FG}$ et que $\vec{v} \perp \vec{EF}$.
En déduire que : $\vec{\Omega T} = \vec{\Omega E} + \vec{\Omega F} + \vec{\Omega G}$.
- ❖ Les points E, F et G décrivent un même arc de la courbe (H) de telle sorte que, pour tout réel x , on ait : $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \lambda) = x^3 - \frac{1}{2}$.
Déterminer la position du point Ω .

Sujet 17

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2006

Sujet non corrigé

$\mathcal{S}$ est un plan euclidien.

Si Γ est un cercle de ce plan de centre Ω et de rayon R , on notera $J(\Gamma)$, le disque ouvert de centre Ω et de rayon R .

$$J(\Gamma) = \{M \in \mathcal{S} / \Omega M < R\}.$$

$\mathcal{E}(\Gamma)$, est l'extérieur du cercle Γ .

PARTIE 1 Puissance d'un cercle par rapport à un point. (04 points)

Soit Γ un cercle de centre Ω et de rayon R .

- 1) Soit M un point de $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M et coupant Γ en deux points T_1 et T_2 .

On pose : $P_{(\mathcal{D}, \Gamma)}(M) = \overline{MT_1} \cdot \overline{MT_2}$.

Montrer que $P_{(\mathcal{D}, \Gamma)}(M)$ ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$ passant par M et sécante au cercle Γ . (0,5 pt)

Dans la suite, on pose : $P_{\Gamma}(M) = P_{(\mathcal{D}, \Gamma)}(M)$; (Cette quantité est la puissance du point M par rapport à Γ).

- 2) a) Etudier le signe de la puissance d'un point M en fonction de sa position dans le plan. (0,5 pt)
b) Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ? (0,5 pt)

- 3) Soit Γ un cercle et $\mathcal{D}_0$ une droite passant par M et tangente au cercle Γ en un point T .
Quelle est la position du point M par rapport au cercle si une telle droite existe ? $\mathcal{D}_0$ est-elle unique ?

Montrer que $P_{\Gamma}(M) = MT^2$. (0,5 pt)

- 4) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en deux points A et B . Montrer que la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $P_{\Gamma_1}(M) = P_{\Gamma_2}(M)$. (01 pt)

- 5) Déterminer la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles lorsque ceux-ci ne sont pas forcément sécants.

Quelle est la situation si les deux cercles sont tangents ? (0,5 pt)

- 6) P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Γ un cercle dont l'équation cartésienne dans ce repère est : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Déterminer la puissance de O par rapport à Γ . (0,5 pt)

PARTIE 2 Construction d'une Π – droite (07,5 points)

Dans cette partie, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R , et Π est un disque ouvert limité par $\mathcal{C}$, A et B deux points distincts de Π .

- 1) On suppose que A et B sont situés sur un même diamètre de $\mathcal{C}$. Montrer que dans ce cas, aucun cercle Γ passant par A et B ne rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés. (01 pt)
- 2) On suppose que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre de $\mathcal{C}$ et que $OA = OB$. Montrer l'existence et l'unicité d'un cercle Γ qui passe par A et B et qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés. (0,5 pt)

Proposer un programme de construction de Γ . (0,5 pt)

- 3) On suppose que $OA \neq OB$ et que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre de $\mathcal{C}$.
On suppose qu'il existe un cercle Γ de centre Ω qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2 .

a) Montrer que (AB) rencontre $(T_1 T_2)$ en un point unique S . (0,5 pt)

b) Comparer $P_\Gamma(S)$ et $P_\Gamma(O)$. (0,5 pt)

- c) Soit Γ' un cercle quelconque passant par A et B et rencontrant $\mathcal{C}$ en deux points U_1 et U_2 distincts.

Comparer la puissance de S par rapport aux cercles $\mathcal{C}$, Γ et Γ' ; en déduire que $S \in (U_1 U_2)$. (0,5 + 0,5 pt)

- d) Lorsqu'on ne connaît pas Γ , déduire de ce qui précède une construction géométrique du point S , puis de Γ . (01,5 pt)

e) Justifier que Γ passe par T_2 . (0,5 pt)

4) Autre démonstration de l'existence de Γ

On suppose que $\mathcal{S}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon $R = 1$.

- a) Montrer qu'un cercle Γ (distinct de $\mathcal{C}$) rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés si et seulement si $P_\Gamma(O) = -1$. (01 pt)

- b) En déduire une méthode analytique pour montrer l'existence et l'unicité de Γ en déterminant une équation cartésienne, puis son centre. (0,25 pt)

Comment dans cette méthode reconnaît-on que les coordonnées de A et B sont telles que on est dans le cas particulier étudié à la question 1) ? (0,25 pt)

PARTIE 3 Un lieu géométrique (02,5 points)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , de rayon R , et A un point distinct de O situé dans le disque ouvert Π limité par $\mathcal{C}$.

- 1) Soit $[To ; T'o]$ le diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (OA) . Soit Γ_0 le cercle circonscrit au triangle $To T'o A$, et Ω_0 son centre. Soit Ω un point de la perpendiculaire Δ à (OA) qui passe par Ω_0 . Soit $[T1, T2]$ le diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (ΩO) .

a) Montrer que $\Omega T_i = \Omega A$, pour $i = 1, 2$. (0,5 pt)

- b) Soit $\mathcal{L}$ le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par A et qui coupent $\mathcal{C}$ selon deux points diamétralement opposés. Montrer que $\Delta \subset \mathcal{L}$. (01 pt)

- 2) Montrer que $\mathcal{L} \subset \Delta$. (0,5 pt)
- 3) En déduire une nouvelle construction géométrique du cercle Γ qui passe par deux points A et B (non situés sur un même diamètre du disque Π et qui coupe $\mathcal{L}$ en deux points diamétralement opposés). (0,5 pt)

PROBLEME N°2**(05 points)**

L'objet de ce problème est d'étudier la suite U définie par $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et de déterminer sa limite

$U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ si elle existe. On rappelle que si x est un réel, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

- 1) On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos 2kx.$$

Déterminer $f_n(0)$, puis déterminer l'expression $f_n(x)$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(2n+1)x$, pour tout x tel que : $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. (0,25 + 0,75 pt)

- 2) α et β étant deux réels, on considère la fonction h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\alpha x + \beta x^2}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = \alpha. \end{cases}$$

Montrer que h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que h' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (0,5 + 0,5 pt)

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $H(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) \sin nx \, dx$

Montrer qu'il existe un réel K , ne dépendant pas de n tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $|H(n)| \leq \frac{K}{n}$ (01 pt)

- 4) Soit $J(k, \alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$.

Déterminer un couple de réels (α^*, β^*) tel que : $J(k, \alpha^*, \beta^*) = \frac{1}{4k^2}$. (0,5 pt)

On suppose que : $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$ pour toute la suite.

- 5) a) Montrer que $U_n = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-x + \frac{x^2}{\pi}\right) f_n(x) \, dx$. (0,5 pt)

b) En déduire que U_n est convergente et déterminer U . (01 pt)

Présentation clarté et précision : (01 point)

Sujet 18

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2007

Sujet corrigé**PROBLEME N°1****(09,75 points)**

Soit (E) un plan affine euclidien et d la distance euclidienne définie sur (E) . Soit $\mathcal{A}$ une partie de (E) .

Définitions :

- ✓ On appelle distance sur E une application $d : (E) \times (E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :
 - ✓ $\forall (x, y, z) \in (E) \times (E) \times (E)$
 - $d(x, y) = d(y, x)$;
 - $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
 - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
- ✓ On appelle expansion de $(\mathcal{A}, d)$ toute application f de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ telle que : quels que soient M et M' éléments de $\mathcal{A}$, on ait la relation $d(M, M') \leq d(f(M), f(M'))$.
- ✓ On appellera isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ toute application bijective f conservant la distance, c'est-à-dire : $d(M, M') = d(f(M), f(M'))$. On notera $\mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des expansions et $\mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des isométries.

- 1/ a) Prouver qu'une expansion est injective. **(0,5 point)**
 b) Montrer que la composée de deux expansions est une expansion **(0,5 point)**
 c) Soit f une expansion bijective. Prouver que f est une isométrie si et seulement si $f^{-1} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$. **(0,5 point)**
- 2/ Soient A et B deux points distincts de (E) et $\mathcal{A}$ le segment $[AB]$.
 a) Pour $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$, déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$. **(0,5 point)**
 b) En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f . **(0,5 points)**
 c) Déterminer $\mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$. **(0,75 point)**
- 3/ $\mathcal{A}$ est une partie quelconque de (E) et $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que U et V sont deux points de $\mathcal{A}$ invariants par f et que C est un point de $\mathcal{A}$ tel que $f(C) \neq C$. Prouver que le segment $[U V]$ est inclus dans le demi plan fermé contenant C de frontière la médiatrice de $[C, f(C)]$. **(0,75 point)**

- 4/ On suppose que $\mathcal{A}$ est la partie fermée composée de l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' , de grand axe $2a$, et de l'ensemble des points de $\mathcal{E}$. Soit A et A' les extrémités du grand axe, puis B et B' les extrémités du petit axe.
- a) Prouver que $d(M, M') \leq 2a$, pour tout $(M, M') \in \mathcal{A}^2$. Déterminer les conditions d'égalité. **(0,5 + 0,25 point)**
- b) Soit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que $f(A) = A$ et $f(A') = A'$ et qu'il existe C de $\mathcal{E}$ tel que $f(C) \neq C$. Montrer que F et F' sont sur la médiatrice de $[C, f(C)]$. **(0,5 point)**
- c) Soit $f \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que A, A', B et B' sont invariants par f . Montrer que $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$. **(0,75 point)**
- d) Déterminer l'expansion de $(\mathcal{A}, d)$ **(01 point)**
- 5/ Déterminer $\mathcal{E}(\mathcal{A}, d)$ lorsque $\mathcal{A}$ est le domaine fermé limité par un cercle (C) non réduit à un point. **(01 point)**
- 6/ On suppose que (E) est rattaché à $\mathbb{R}^2$. Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de (E) . On note δ la distance sur (E) définie par : $\delta(M, M') = \sup(|x - x'|, |y - y'|)$. On note $\Gamma = \{M \in (E) \text{ tels que } \delta(O, M) \leq 1\}$ la boule fermée de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1. On note $A(1, 1), B(-1, 1), C(-1, -1)$ et $D(1, -1)$ les quatre sommets de Γ .
- a) Prouver qu'un élément $g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ envoie une paire de points situés sur 2 segments distincts parallèles du quadrilatère A, B, C, D sur une paire de points possédant la même propriété. **(01 point)**
En déduire que g laisse globalement invariant $\{A, B, C, D\}$. **(0,25 point)**
- b) Montrer que si un élément g de $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ vérifie $g(A) = A$ alors $g(C) = C$. **(0,5 point)**

PROBLEME N°2**(10,25 points)**

L'objet du problème est de trouver les termes premiers d'une suite récurrente.

Partie 1**(02,75 points)**Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles U définies par : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, pour tout $n > 0$.

- 1/ a) Prouver que si U et V sont des 2 suites de $\mathcal{U}$, alors la suite $(\alpha U_n + \beta V_n) \in \mathcal{U}$ pour tous réels α et β . **(0,25 point)**
- b) Montrer que tout élément de $\mathcal{U}$ est défini par la donnée des réels U_0 et U_1 . **(0,5 point)**
- 2/ On suppose que les suites V et W sont des suites de $\mathcal{U}$ non proportionnelles. Soit (U_n) une suite de $\mathcal{U}$. Prouver qu'il existe un couple unique (α, β) de réels tels que : $\alpha V_0 + \beta W_0 = U_0$ et $\alpha V_1 + \beta W_1 = U_1$
En déduire que l'ensemble $\mathcal{U}$ est l'ensemble des suites $(\alpha V_n + \beta W_n)$ **(0,5 point)**
- 3/ a) Déterminer r de façon qu'il soit la raison d'une suite géométrique de premier terme 1 appartenant à $\mathcal{U}$. **(0,5 point)**
- b) Montrer que les deux suites géométriques obtenues en a) ne sont pas proportionnelles. **(0,5 point)**
- c) En déduire l'expression générale d'une suite quelconque de $\mathcal{U}$ **(0,5 point)**

Partie 2 (02,5 points)

Soit U la suite définie par $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$, avec $U_1 = 1$ et $U_2 = 2$.

- 1/ Montrer que U est une suite positive et croissante. (0,5 point)
- 2/ On définit la suite V par $V_n = U_n + 1$ pour tout $n > 0$.
Donner l'expression précise de V_n en fonction de n . (0,5 point)
- 3/ Démontrer que :
 $(R_1) : (V_{2n})^2 = V_{2n-1} V_{2n+1} - 1$
 $(R_2) : (V_{2n+1})^2 = V_{2n} V_{2n+2} + 1$ (0,5 point)
- 4/ Dédurre de la question 3/ la relation $(R_3) (U_{2n+1} - U_{2n-1})^2 = U_{2n-1} U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1}$. (0,5 point)
- 5/ Montrer que :
 $(R_4) : (U_{2n+1} + U_{2n-1})^2 = 5 U_{2n-1} U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1}$
 $(R_5) : 5 U_{2n-1} U_{2n+1} = (U_{2n-1} + U_{2n+1}) (U_{2n-1} + U_{2n+1} - 1)$ (0,5 point)

Partie 3 (02,5 points)

- 6/ A partir de (R_5) démontrer que si U_{2n-1} est premier, alors il divise soit U_{2n+1} , soit $U_{2n+1} - 1$. (0,5 point)
- 7/ On considère le premier cas : U_{2n-1} divise U_{2n+1} .
 a) Montrer qu'il existe un entier $q > 1$ tel que :
 $(q^2 - 3q + 1) U_{2n-1} = 1 + q : (R_6)$ (0,25 point)
 b) Quelles sont les seules valeurs possibles de q ? (0,5 point)
 Le terme U_{2n-1} est-il premier ?
- 8/ Dans cette question, on considère le deuxième cas :
 U_{2n-1} divise $U_{2n+1} - 1$.
 a) Montrer qu'il existe un entier $q' > 1$ tel que :
 $(q'^2 - 3q' + 1) U_{2n-1} = 4 - q' : (R_7)$ (0,5 point)
 b) Montrer que q' admet une seule valeur possible. Alors le terme U_{2n-1} est-il premier ? (0,5 point)
- 9/ Un terme de rang impair de la suite U peut-il être un nombre premier ? (0,25 point)

Partie 4 (02,5 points)

- 10/ En utilisant (R_2) , démontrer que :
 $(R_8) : [(U_{2n+2} + 1) + (U_{2n} + 1)]^2 = 5(U_{2n} + 1)(U_{2n+2} + 1) + 1$ (0,25 point)
 En déduire la relation
 $(R_9) : 5 U_{2n} U_{2n+2} = (U_{2n} + U_{2n+2} - 2)(U_{2n} + U_{2n+2} + 1)$ (0,25 point)
- 11/ Démontrer alors que si U_{2n} est premier il divise $U_{2n+2} - 2$ ou $U_{2n+2} + 1$. (0,5 point)
- 12/ On considère le premier cas : U_{2n} divise $U_{2n+2} - 2$
 a) Montrer qu'il existe $q > 1$ tel que : (0,25 point)
 $(R_{10}) : (q^2 - 3q + 1) U_{2n} = 7 - 3q$
 b) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R_{10}) ? (0,5 point)
- 13/ On considère le deuxième cas : U_{2n} divise $U_{2n+2} + 1$
 a) Montrer qu'il existe un entier $q' > 1$ tel que : (0,25 point)
 $(R_{11}) : (q'^2 - 3q' + 1) U_{2n} = 3q' - 2$.
 b) Déterminer les seules valeurs possibles de q' . (0,25 point)
 c) Déterminer alors les seuls termes nombres premiers de la suite U . (0,25 point)

Sujet 19

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2008

Sujet corrigé (problème 1)**PROBLEME 1****(08 points)**A. Soit a un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$. (02 pts)On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = \ln(x^2 - 2x \cos a + 1)$$

Et $\mathcal{C}_a$ la représentation graphique de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 1) Etudier les variations de la fonction f_a . (01,5 pt)2) Tracer la courbe $\mathcal{C}_a$ pour $a = \frac{\pi}{3}$. (0,5 pt)B. Soit n un entier naturel non nul (06 pts)1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^{2n} - 1 = 0$. $\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes. (0,75 pt)b) Soit Z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{k\pi}{n}$, $k \in I = \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$.b) Soit Z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{k\pi}{n}$, $k \in I = \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$.(0,5 pt)Soit $k \in I - \{0, n\}$ et k' un entier tel que $k + k' = 2n$ Développer l'expression : $(Z - Z_k)(Z - Z_{k'})$ c) On admettra que (0,5 pt)

$$\forall Z \in \mathbb{C} ; Z^{2n} - 1 = (Z - Z_0)(Z - Z_1) \dots (Z - Z_{2n-1})$$

En utilisant b) montrer que :

$$Z^{2n} - 1 = (Z^2 - 1) \left(Z^2 - 2Z \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right) \left(Z^2 - 2Z \cos \frac{2\pi}{n} + 1 \right) \dots \left(Z^2 - 2Z \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1 \right)$$

2) On considère la fonction S_n définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \ln(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1)$

a) Montrer que S_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (0,75 pt)

b) Dédire de B. 1) c) que si $x^2 \neq 1$, on a : (0,5 pt)

$$S_n(x) = \ln \left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} \right)$$

c) En déduire alors $S_n(1)$ et $S_n(-1)$. (0,5 pt)

3) x étant un réel fixe, différent de 1 et -1, on considère la fonction g_x telle que :

$$g_x(t) = \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) \text{ pour } t \in [0, \pi].$$

a) Vérifier que g_x est bien définie sur $[0, \pi]$ et qu'elle admet une primitive définie sur $[0, \pi]$ qui s'annule en 0. (0,75 pt)

b) En appliquant la méthode des rectangles à la fonction g_x , exprimer $\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_x\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ en fonction de $S_n(x)$. (01 pt)

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$. (0,75 pt)

PROBLEME 2 (12 points)

Preliminaires

Le but du problème est l'étude du point de Torricelli pour un triangle

On considère dans le plan un triangle ABC tel que :

L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ admet une mesure α dans l'intervalle $]0; \pi[$.

L'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ admet une mesure β dans l'intervalle $]0; \pi[$.

L'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ admet une mesure γ dans l'intervalle $]0; \Pi[$.

On désigne par E_A le demi plan fermé limité par (BC) passant par A .

On désigne par E_B le demi plan fermé limité par (AC) passant par B .

On désigne par E_C le demi plan fermé limité par (AB) passant par C .

PARTIE A**PROPRIETES PRELIMINAIRES****(02,25 pts)**

- 1) Soit P un point intérieur au sens strict au triangle ABC
 - a) Démontrer l'inégalité : $PA + PB < CA + CB$. (On pourra construire le point P' intersection des droites (AP) et (CB) . **(0,5 pt)**
 - b) Soit θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PB})$ tel que $\theta \in]0; \Pi[$ **(0,5 pt)**
Démontrer l'inégalité $\gamma < \theta$
- 2) Soit Q un point du demi plan E_A et R son symétrique par rapport à la droite (BC) . **(0,25 pt)**
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MQ \leq MR$.
- 3) Les droites (BC) ; (CA) et (AB) partagent le plan en sept régions ; définir ces régions en fonction de E_A , E_B et E_C . **(01 pt)**

PARTIE B**CONSTRUCTION DU POINT DE TORRICELLI****(02,5 pts)**

On construit trois triangles équilatéraux ACB' , BAC' et CBA' tels que :

$B' \notin E_B$, $C' \notin E_C$ et $A' \notin E_A$.

- 1) Démontrer les égalités : $AA' = BB' = CC'$. (On pourra utiliser des rotations convenablement choisies). **(0,5 pt)**
- 2) a) Montrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes. Soit T leur point d'intersection. **(0,25 pt)**
b) Montrer que les points $A'BCT$ sont cocycliques. **(0,5 pt)**
c) Montrer de même que $B'CAT$ et $C'ABT$ sont cocycliques. **(0,5 pt)**
- 3) Déterminer l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{TC}; \overrightarrow{TC'})$ dans le cas où cet angle est défini. En déduire que les droites (AA') ; (BB') et (CC') sont concourantes en T .
Le point T est appelé point de Torricelli du triangle ABC . **(0,5 + 0,25 pt)**

PARTIE C**POSITION DU POINT DE TORRICELLI****(04 points)**

- 1) On suppose que le point T est intérieur, au sens strict ; au triangle ABC .
 - a) Donner la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{TA}; \overrightarrow{TB})$; $(\overrightarrow{TB}; \overrightarrow{TC})$; $(\overrightarrow{TC}; \overrightarrow{TA})$ **(0,5 pt)**
 - b) Montrer que chacun des réels α, β, γ appartient à l'intervalle $\left]0; \frac{2\Pi}{3}\right[$ **(0,5 pt)**
- 2) On suppose que le point T est extérieur, au sens strict ; au triangle ABC et qu'il appartient au demi plan E_C .
 - a) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{TA}; \overrightarrow{TB})$; $(\overrightarrow{TB}; \overrightarrow{TC})$; $(\overrightarrow{TC}; \overrightarrow{TA})$.
On discutera suivant la position du point C . **(01 pt)**
 - b) En déduire que $T \notin E_A$; $T \notin E_B$ et que le réel $\gamma \in \left]\frac{2\Pi}{3}; \Pi\right[$ **(0,5 pt)**

 21

- 3) On suppose que le point T appartient au triangle ABC ($T \in [AB] \cup [BC] \cup [AC]$).

(0,5 + 0,5 pt)

Préciser la position du point T. En déduire α, β, γ .

- 4) Formuler une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle pour que le point T soit à l'intérieur du triangle au sens strict.

(0,5 pt)

PARTIE D MINIMUM DE $MA + MB + MC$ (03,25 pts)

On considère la fonction φ définie du plan dans $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(M) = MA + MB + MC$. On se propose de déterminer s'il existe, le minimum de la fonction φ et l'ensemble des points pour lesquels il est atteint.

On désigne par r_1 ; r_2 et r_3 les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs A, B, C.

On pose $M_1 = r_1(M)$; $M_2 = r_2(M)$ et $M_3 = r_3(M)$.

- 1) a) Etablir les égalités :

(0,75 pt)

$$\varphi(M) = AM + MM_3 + M_3A' = BM + MM_1 + M_1B' = CM + MM_2 + M_2C'.$$

- b) Montrer que la fonction φ est minorée par le réel CC' .

(0,25 pt)

- c) Soient M un point du demi plan E_A et N son image par la symétrie orthogonale d'axe (BC).

Comparer $\varphi(M)$ et $\varphi(N)$. Montrer que si la fonction φ est minimale en un point M, ce point est à l'intérieur au sens large du triangle ABC.

(0,25 + 0,5 pt)

- 2) On suppose dans cette question : $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$; $0 < \beta < \frac{2\pi}{3}$; $0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}$.

- a) Montrer que le point T appartient au segment $[C C']$

(0,25 pt)

- b) Sachant que $T_2 = r_2(T)$ appartient au segment $[T C']$. Calculer $\varphi(T)$.

(0,25 + 0,25 pt)

Quel est le minimum de la fonction φ ?

- c) Soit M un point du plan tel que $\varphi(M) = \varphi(T)$. Montrer que le point M appartient à chacune des droites (AA') ; (BB') et (CC') . Conclure.

(0,5 + 0,25 pt)



Sujet 20**Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2009****Sujet corrigé (problème 2)****PROBLEME-I****(05 points)**

On donne dans l'espace trois droites (D) , (D') , (D'') concourantes en O et non coplanaires.

Sur chacune d'entre elles, on prend trois points deux à deux distincts, A_i, B_i, C_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et

$A_i \in (D)$; $B_i \in (D')$; $C_i \in (D'')$.

On suppose que : $\frac{2}{OA_2} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_3}$ et les relations analogues sur les droites (D') et (D'') .

- 1) Trouver tous les plans $(A_i B_j C_k)$ tels que $i + j + k = 6$ avec i, j et k éléments de $\{1, 2, 3\}$. (01pt)
- 2) En munissant l'espace d'un repère convenablement choisi, déterminer les équations cartésiennes de chacun des plans trouvés au 1). (02,5pts)
- 3) En supposant que trois des plans trouvés au 1) ont un point commun, montrer que tous les plans $(A_i B_j C_k)$, $i + j + k = 6$, sont concourants. (01,5pt)

PROBLEME-II**(15 points)**

On donne les définitions suivantes :

- 1) Une partie non vide E du plan (P) est dite convexe lorsque :
si A et B sont deux points quelconques de E , alors $[AB] \subset E$.
- 2) Epigraphe d'une fonction : f étant une fonction numérique d'une variable réelle, on appelle épigraphe de f , l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan (P) muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tels que $y \geq f(x)$, et on note $Ep(f) = \{M(x, y) \in (P) / y \geq f(x)\}$.
- 3) Fonction convexe : Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque $Ep(f)$ est une partie convexe du plan (P) ; f est concave lorsque $-f$ est convexe.

A. On se propose de montrer que :

$$[f \text{ convexe}] \Leftrightarrow [\forall (x_1, x_2) \in Df \times Df, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \lambda + \mu = 1 \Rightarrow f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)]$$

1) On suppose f convexe et on considère deux points $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$ appartenant à la courbe (C_f) .

a) Montrer que $[M_1 M_2] \subset \text{Ep}(f)$. (0,5 pt)

b) Soit M le barycentre de $\{(M_1, \lambda); (M_2, 1-\lambda)\}$, $\lambda \in [0, 1]$. (0,5 pt)

Montrer que $M \in \text{Ep}(f)$ et en déduire que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

En déduire que si f est convexe, $\forall x_1 \in Df; \forall x_2 \in Df, \forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0$, avec $\lambda + \mu = 1$, alors $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$.

2) On suppose que : $\forall (x_1, x_2) \in Df \times Df, \forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0$, si $\lambda + \mu = 1$ alors $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$.

Soit $M_1(x_1, y_1) \in \text{Ep}(f)$, $M_2(x_2, y_2) \in \text{Ep}(f)$.

Pour tout point $M(x, y)$ du segment $[M_1 M_2]$, montrer qu'il existe λ dans $[0, 1]$, tel que M soit le barycentre de $\{(M_1, \lambda); (M_2, 1-\lambda)\}$.

En déduire que $M \in \text{Ep}(f)$ et que f est convexe. (0,75 pt)

B. 1) Montrer que quels que soient $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ points de C_f tels que $a < b$, f est convexe si et seulement si : $\forall x \in [a, b], f(x) \leq d(x)$, $y = d(x)$ étant l'équation réduite de la droite (AB) . (0,75 pt)

2) Montrer que si f est convexe alors :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Df \times Df \times \dots \times Df, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+, \text{ si } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1,$$

$$\text{alors } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (0,5 \text{ pt})$$

C. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I

$$\text{On considère la fonction } p_a : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall x \in I - \{a\}, p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On se propose de montrer que :

f est convexe sur I si et seulement si p_a est croissante sur $I - \{a\}$, pour tout a de I .

1) On suppose f convexe.

Soit $x_1 \in I, x_2 \in I, x_1 < x_2$, x un élément de $]x_1, x_2[$

a) Montrer qu'il existe λ dans $]0, 1[$ tel que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. (0,25 pt)

b) En déduire que : $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I$ si $x_1 < x_2$ alors :

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1) \text{ et que } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (2). \quad (0,5 \text{ pt})$$

c) $\forall t \in I, \forall t' \in I$, si $a < t < t'$, montrer que : $(1) \Rightarrow p_a(t) \leq p_a(t')$.

Si $t < t' < a$, montrer que $(2) \Rightarrow p_a(t) \leq p_a(t')$.

$$\text{Si } t < a < t', \text{ montrer que : } (1) \Rightarrow \frac{f(a) - f(t)}{a - t} \leq \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \text{ et que}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \leq \frac{f(t') - f(a)}{t' - a}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

En déduire que : $\forall t \in I, \forall t' \in I$, si $t < t'$ alors $p_a(t) \leq p_a(t')$.

Conclure.

3) On suppose que p_a est croissante sur $I - \{a\}$, $\forall a \in I$.

$\forall (x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 < x_2$ et $x \in]x_1, x_2[$, on sait qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

$$\text{Montrer que } f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)].$$

En déduire que f est convexe.

D. Soit f une fonction convexe définie sur $]0, +\infty[$, croissante et non constante sur $]0, +\infty[$.

1) Soit: $p : x \mapsto p(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Montrer que p est croissante sur $]0, +\infty[- \{1\}$. (0,25 pt)

2) Montrer qu'il existe a dans $]0, +\infty[- \{1\}$, tel que $f(a) \neq f(1)$ et que $p(a) > 0$. (0,5 pt)

3) On suppose $x > 1$ et $x > a$.

Montrer que $f(x) \geq (x - 1)p(a) + f(1)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (0,5pt)

E. 1) On suppose f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; soit $a \in I$.

En utilisant le B. montrer que : $\forall t \in I, t < a \Rightarrow p_a(t) \leq f'(a)$

$\forall t \in I, t > a \Rightarrow p_a(t) \geq f'(a)$. (0,75 pt)

2) a) On suppose f dérivable et convexe sur I .

Quels que soient x_1 et x_2 dans I , comparer $p_{x_1}(x_2)$ et $p_{x_2}(x_1)$ (0,25 pt)

Si $x_1 < x_2$, montrer que $f'(x_1) \leq p_{x_1}(x_2)$ et $p_{x_2}(x_1) \leq f'(x_2)$ (0,25 pt)

En déduire que f' est croissante sur I . (0,25 pt)

b) On suppose f dérivable sur I et f' croissante sur I . (0,75 pt)

Quels que soient x_1 et x_2 dans I , soit λ dans $]0, 1[$ et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$,
avec $x_1 < x_2$.

- Montrer que $x_1 < x < x_2$.

- Montrer qu'il existe c_1 dans $]x_1, x[$, tel que : $f(x) - f(x_1) = (x - x_1)f'(c_1)$ et qu'il existe c_2 dans $]x, x_2[$, tel que : $f(x_2) - f(x) = (x_2 - x)f'(c_2)$.

- Montrer que $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ et en déduire que f est convexe sur I .

On vient d'établir donc que $[f \text{ convexe et dérivable sur } I] \Leftrightarrow [f \text{ dérivable sur } I \text{ et } f' \text{ croissante sur } I]$.

3) On suppose f deux fois dérivable sur I .

a) Montrer que f est convexe sur I si et seulement si : $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. **(0,5 pt)**

b) Montrer que f est concave sur I si et seulement si : $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$. **(0,25 pt)**

4) Soit f dérivable sur I .

a) En comparant $p_a(x)$ et $f'(a)$, montrer que si f est convexe sur I , (C_f) est au-dessus de toutes ses tangentes. **(0,25 pt)**

b) Réciproquement supposons f dérivable sur I et que (C_f) est au-dessus de sa tangente (T) au point $A(a, f(a))$, pour tout a dans I .

Montrer que : $\forall a \in I, \forall b \in I, f(b) \geq f(a) + (b - a) f'(a)$ et $f(a) \geq f(b) + (a - b) f'(b)$. **(0,5pt)**

En déduire que $(b - a) [f'(b) - f'(a)] \geq 0$ et que f est convexe sur I . **(0,25 pt)**

F.1) Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$;

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 2e^{x/2} - 1. \quad \textbf{(0,5pt)}$$

2) Montrer que la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est convexe sur $[0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **(0,25 pt)**

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$. **(0,25 pt)**

3) a) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. La moyenne arithmétique de $x_1, x_2, \dots, x_n$ est

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ leur moyenne géométrique est } g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \text{ et leur moyenne harmonique } h$$

$$\text{vérifie } \frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Montrer que la fonction $\ln$ est concave et que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$. **(0,25 pt)**

En déduire que $g \leq a$ et que $h \leq g \leq a$. **(0,25 pt)**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, x^n - 1 \geq n \left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}} \right)$. **(0,5pt)**

4) Etant données f convexe sur $\mathbb{R}$ et g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt)

5) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$; montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

(0,5 pt)

6) Soit f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$; soit $p_a:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p_a(x) = 0$ et en déduire que : $\forall x > a, p_a(x) \leq 0$ et que f est décroissante

sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt)

b) Soit $g: x \mapsto g(x) = f(-x)$

Montrer que g est convexe et majorée et en déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt)

c) Déduire de ce qui précède que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Montrer que cette propriété n'est pas vraie sur $]0, +1[$ en considérant

$f: x \mapsto f(x) = -\ln(1+x)$.

(0,5 pt)

7) Soit f convexe sur $]0, +\infty[$.

a) En utilisant la fonction $p_1:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto p_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

et $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x} + \frac{f(1)}{x}$, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

(0,5 pt)

b) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell, \ell \in \mathbb{R}$

Soient x et y tels que $0 < x < y$; soit $p_x:]x, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto p_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_x(t) = \ell$ et en déduire que la fonction

$h: x \mapsto h(x) = f(x) - \ell x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

(0,5 pt)

Sujet 21

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2010

Sujet corrigé (Problème 2)**Définitions**

1) On dit que l'application $\Psi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est un endomorphisme si :

- a) Pour tous $\vec{x}, \vec{y}$ appartenant à $\mathcal{E}$, $\Psi(\vec{x} + \vec{y}) = \Psi(\vec{x}) + \Psi(\vec{y})$
- b) Pour tout réel α et pour tout $\vec{x} \in \mathcal{E}$, $\Psi(\alpha\vec{x}) = \alpha\Psi(\vec{x})$

2) Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme

3) On appelle endomorphisme adjoint, l'unique endomorphisme Ψ^* tel que :

$$\vec{x} \cdot \Psi(\vec{y}) = \Psi^*(\vec{x}) \cdot \vec{y} \text{ quels que soient } \vec{x} \text{ et } \vec{y} \text{ appartenant à } \mathcal{E}.$$

4) Un endomorphisme Ψ est dit symétrique si $\Psi^* = \Psi$.

5) On appelle coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC, les trois réels λ, μ, ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A, B, C affectés respectivement de λ, μ, ν .

On rappelle qu'un point M est intérieur à un triangle si et seulement si ses coordonnées barycentriques sont strictement positives.

Préliminaires

- 1) Montrer qu'un endomorphisme Ψ de $\mathcal{E}$ est symétrique s'il existe une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{u} \cdot \Psi(\vec{v}) = \Psi(\vec{u}) \cdot \vec{v}$.
- 2) Montrer que Ψ^{-1} bijection réciproque d'un automorphisme Ψ symétrique de $\mathcal{E}$ est symétrique.
- 3) Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\vec{MA} + \mu\vec{MB} + \nu\vec{MC} = \vec{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

PARTIE 1**Points isogonaux relativement à un triangle.**

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{A}$. On note a, b, c les affixes des points A, B et C et $f(z)$ le polynôme complexe définie par $f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r$ ayant pour racines a, b et c.

Deux points distincts M et N sont dits isogonaux (respectivement strictement isogonaux) relativement à ce triangle, s'ils sont distincts de A, B et C et on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) \text{ (modulo } \pi \text{) (resp. Modulo } 2\pi)$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) \text{ (modulo } \pi \text{) (resp. modulo } 2\pi)$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) \text{ (modulo } \pi \text{) (resp. Modulo } 2\pi)$$

- 1) Soient M et N deux points distincts ou confondus d'affixes respectives m et n, et soit le polynôme complexe $Q(z) = (z - m)(z - n)$. Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si, il existe des nombres réels non nuls α , β et γ tels que : $Q(a) = \alpha f'(a)$, $Q(b) = \beta f'(b)$ et $Q(c) = \gamma f'(c)$, et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α , β et γ sont strictement positifs. (On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, on a $f'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$)
- 2) On suppose que les points M et N d'affixes m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.
- a) On considère $R(z) = \frac{Q(z)}{f(z)}$. Montrer qu'il existe trois nombres a' , b' et c' tels que

$$R(z) = \frac{a'}{z-a} + \frac{b'}{z-b} + \frac{c'}{z-c}.$$

En déduire que les nombres α , β , γ définis précédemment vérifient : $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

- b) Etablir que $\frac{\alpha}{m-a} + \frac{\beta}{m-b} + \frac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\frac{\alpha}{n-a} + \frac{\beta}{n-b} + \frac{\gamma}{n-c} = 0$
- c) Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC. En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans $\mathcal{A}$ de la réunion des droites (AB), (AC) et (BC) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.
- 3) Soient α , β , γ trois réels non nuls de somme égale à 1. On pose :

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b)$$

Soient m et n les racines de ce polynôme avec éventuellement $m = n$. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

PARTIE 2 Triangles orthologiques

Etant donnés deux triangles ABC et A'B'C' du plan $\mathcal{A}$ on note :

- δ_A , δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A, B et C et perpendiculaires respectivement aux droites (B' C') ; (C' A') et (A' B')
- $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A', B', C' et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA), (AB)
- f l'application du plan $\mathcal{A}$ dans lui-même telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ associé à f c'est-à-dire tel que : si $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ alors $\Psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$, pour tous M, M', N et N' appartenant à $\mathcal{A}$

On dit que le triangle A' B' C' est orthologique au triangle ABC si les droites δ_A , δ_B et δ_C sont concourantes.

1) Soient ABC et A'B'C' deux triangles du plan $\mathcal{A}$.

- a) Montrer que l'application Φ , qui à tout point M de $\mathcal{A}$ associe $\Phi(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A'B'}$ est constante sur $\mathcal{A}$.
- b) Montrer que la constante est égale à $\overrightarrow{CA} \cdot ((\Psi - \Psi^*)(\overrightarrow{AB}))$
- c) On suppose que le triangle A' B' C' est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A , δ_B et δ_C . Montrer que $\Phi(O) = 0$. En déduire que Ψ est symétrique.
- d) Réciproquement montrer que si Ψ est symétrique alors le triangle A'B'C' est orthologique à ABC.

2) Montrer que si ABC est orthologique à A'B'C' alors A'B'C' est orthologique à ABC. Quelle relation y-a-t-il entre le point O de concours des droites δ_A , δ_B , δ_C et le point de concours O' des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$?

La relation « ABC est orthologique à A'B'C' » est symétrique. On dira simplement que les triangles ABC et A'B'C' sont orthologiques.

- 3) Soit ABC un triangle et soit A', B', C' les milieux respectifs des segments [AB], [CA], [AB]. Montrer que les triangles ABC et A'B'C' sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A , δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant A, B et C en les points A', B' et C'.

PROBLEME 2 (08 points)

- I. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, f(x + y) = f(x).f(y) \quad (1)$$

- 1) Vérifier que f est à valeurs positives ou nulles.
- 2) Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle.
Dans la suite on suppose que f est non identiquement nulle.
- 3) Déterminer la valeur de $f(0)$.
- 4) Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{1}{n}x)$ en fonction de $f(x)$ et de n.
- 5) Soit x un réel positif ou nul, $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel où p et q sont deux entiers strictement positifs. En calculant $f(q(rx))$ de deux manières, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et de r.
- 6) Pour cette question, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$
 - a) Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0 tels que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n.
 - b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Dans ce qui suit, on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives
- 7) On suppose que la fonction f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe

a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif non nul.

8) On suppose que f est continue à droite en 0.

Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et conclure.

9) On suppose qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur l'intervalle $[A, B]$.

Soit M un majorant de f sur $[A, B]$

a) Montrer que pour tout $x \in [0, B - A]$, on a :

$$0 < \frac{f(B)}{M} \leq f(x) \leq \frac{M}{f(A)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \frac{B-A}{n}]$

Montrer que :

$$\left(\frac{f(B)}{M}\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \leq \left(\frac{M}{f(A)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

En déduire que f est continue à droite en 0.

II. Pour tout λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle, alors sa fonction de répartition est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

- F_X caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X .
- Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle s'il existe un réel λ strictement positif tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f_\lambda(t) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On dit alors que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

a) Expliciter sa fonction de répartition.

b) Montrer que $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$ ②

où la notation $P(A/B)$ représente la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B , de probabilité non nulle, est réalisé

La propriété ② se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

2) Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. On note F_T sa fonction de répartition.

a) Montrer que la fonction G_T définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, G_T(x) = 1 - F_T(x) \text{ vérifié l'équation fonctionnelle. } ①$$

b) Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

Sujet 22

Concours Général de Mathématiques : épreuve de 2011

Sujet corrigéPROBLEME 1

On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres réels respectivement.

Préliminaires : Lire ce préliminaire avant de répondre aux questions qui suivent.

Définitions : On rappelle les définitions suivantes.

Dans ce qui suit, $\mathbb{F} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{F}$.

D1 : Soit $M \in \mathbb{F}$. On dit que $\mathbb{E}$ est majorée par M dans $\mathbb{F}$, si $x \leq M$, $\forall x \in \mathbb{E}$.

D2 : Soit $m \in \mathbb{F}$. On dit que $\mathbb{E}$ est minorée par m dans $\mathbb{F}$, si $x \geq m$, $\forall x \in \mathbb{E}$.

D3 : Soit $M \in \mathbb{F}$. On dit que M est le plus grand élément de $\mathbb{E}$, si $M \in \mathbb{E}$ et $\mathbb{E}$ est majoré par M .

D4 : Soit $m \in \mathbb{F}$. On dit que m est le plus petit élément de $\mathbb{E}$, si $m \in \mathbb{E}$ et $\mathbb{E}$ est minoré par m .

D5 : Divisibilité : Soient a et b deux entiers relatifs, b non nul. On dit que a est divisible par b ou que b divise a , s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

Propriétés : On admet les propriétés suivantes, appelées axiomes.

P1 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$, admet un plus petit élément.

P2 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée, admet un plus grand élément.

P3 : Toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est finie.

QUESTIONS

1.A.1 Soit a, b dans $\mathbb{N}$, b non nul. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kb > a$.

1.A.2 Soient a, b dans $\mathbb{N}$, b non nul. Montrer qu'il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que

$bq \leq a < (q+1)b$. On pourra poser $E = \{k \in \mathbb{N} : kb > a\}$ puis utiliser 1.A.1 et P2.

1.A.3 Division euclidienne dans $\mathbb{N}$. On veut montrer que si a, b sont des entiers naturels, b non nuls, alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

D6. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est déterminer le couple d'entiers naturels (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. r est appelé reste de la division euclidienne de a par b .

- existence : utiliser 1.A.2 pour montrer que qu'un tel couple (q, r) existe.

- unicité : si (q, r) et (q', r') sont deux couples tels que $a = bq + r$ et $a = bq' + r'$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$, montrer que $r = r'$ et $q = q'$.

1.A.4 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. En utilisant 1.A.3, montrer que si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, alors, il existe un unique couple si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

1.A.5 Plus grand diviseur commun. Pour tout entier relatif x , on note $D(x)$ l'ensemble des diviseurs positifs de x .

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ non tous nuls, montrer que l'ensemble $D(a) \cap D(b)$ admet un plus grand élément.

D7 : Le plus grand élément de $D(a) \cap D(b)$, est appelé le « plus grand diviseur commun » de a et b et est noté $\text{pgdc}(a, b)$.

1.A.6 Algorithme d'Euclide. Cette méthode permet de calculer le pgdc .

D8 : On définit la suite $(r_n)_n$ par $r_0 = a$, $r_1 = b$, tant que r_n non nul, on pose :

$r_{n-1} = r_{n+1} + q_n r_n$ où r_{n+1} est le reste et q_n le quotient de la division de r_{n-1} par r_n pour $n > 1$.

1.A.6.1 Montrer qu'il existe un plus petit entier N tel que $r_N = 0$. On pourra utiliser P3.

1.A.6.2 Montrer que $r_{N-1} = \text{pgdc}(a, b)$

D9 : L'entier N ci-dessus, compte le nombre de divisions successives nécessaires pour le calcul du pgdc. On l'appelle nombre de pas de l'Algorithme d'Euclide.

1.A.7 Equation de Bézout :

D10 : Soient a et b deux entiers relatifs non tous nuls, il existe deux entiers relatifs u et v , appelés coefficients de Bézout, tels que $au + bv = \text{pgdc}(a, b)$.

Algorithme Etendu d'Euclide. Cette procédure permet de calculer les coefficients de Bézout.

1.A.7.1 Expliquer comment déterminer u et v tels que $au + bv = \text{pgdc}(a, b)$.

1.A.7.2 Déterminer deux entiers u et v tels que $135u + 504v = 9$.

PARTIE B

Soit (a, b, a', b') un quadruplet d'entiers strictement positifs vérifiant l'égalité $ab' - a'b = 1$.

1.B.1 Comparer $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$ et montrer que $\text{pgdc}(a, b) = \text{pgdc}(a', b') = 1$ et $\text{pgdc}(a+a', b+b') = 1$. Puis déterminer les rationnels de la forme $\frac{m}{b+b'}$ appartenant à l'intervalle ouvert $\left] \frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \right]$, où m est un entier.

1.B.2 En déduire les rationnels de dénominateur 10 appartenant à l'intervalle $\left] \frac{2}{3}, \frac{5}{7} \right]$.

PROBLEME 2

Dans tout le problème a désigne un réel strictement supérieur à 1. L'objectif du problème est de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a}$.

Préliminaires

- Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $[a ; b[$ (a est un réel et b est soit un réel ou $+\infty$).

On dit que f est intégrable sur $[a ; b[$ si : $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

S'il existe une fonction g intégrable sur $[a ; b[$ telle que :

$\forall t \in [a; b[, |f(t)| \leq g(t)$, alors f est intégrable sur $[a ; b[$.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est de classe C^1 , si elle est dérivable sur I et sa dérivée est continue sur I .

PARTIE I

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

Pour tout x dans $]0, \pi]$, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $g_n(x) = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

1. Etablir que : $\forall x \in]0, \pi], f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)$.

2) a) En déduire que g_n est prolongeable par continuité en 0.

On pose $\tilde{g}_n$ le prolongement de g_n .

b) Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \int_0^\pi \tilde{g}_n(x) dx$.

Montrer que la suite (U_n) est constante et préciser sa valeur.

3) Soit α un réel non nul ; soit $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, \pi], g(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } g(0) = 0.$$

a) Prouver que g est continue en 0.

b) Etablir l'existence et la valeur de la limite de $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x)$.

c) Etablir que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ et préciser $g'(0)$.

PARTIE II

Pour tout entier naturel n , non nul, on pose : $X_n = \int_0^\pi g_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$.

1) Pour tout n non nul, on pose : $v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right] dx$.

Montrer qu'il existe un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$

2) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} v_n + \frac{\pi}{2}$.

Montrer que la suite (X_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k} \right]$

PARTIE III

On adopte la notation $\beta = \frac{1}{\alpha}$, et pour tout $t \in]0,1]$, on pose : $\varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t}$ et $\psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$

1) Montrer que les applications φ et ψ sont intégrables sur $]0,1]$.

Dans toute la suite on pose : $J(\beta) = \int_0^1 \varphi(t) dt$ et $K(\beta) = \int_0^1 \psi(t) dt$

2) a) Montrer que : $\forall \alpha \in]0,1[, \int_a^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} = \beta \int_{a^\alpha}^1 \varphi(t) dt$. (indication : on pourra poser $t = x^\alpha$)

En déduire la formule : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} = \beta J(\beta)$.

b) Montrer que : $\forall \alpha \in]1, +\infty[, \int_1^A \frac{dx}{1+x^\alpha} = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 w(t) dt$

En déduire que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{1+x^\alpha} = \beta K(\beta)$.

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, et pour tout réel t , on pose : $\delta_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^k t^k$.

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout t dans $]0,1]$, on pose : $\varphi_n(t) = \delta_n(t) t^{\beta-1}$ et $\psi_n(t) = \delta_{n-1}(t) t^{-\beta}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \left| \delta_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,1], |\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t), |w_n(t)| \leq 2w(t)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n et ψ_n sont intégrables sur $]0,1]$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n(\beta) = \int_0^1 \varphi_n(t) dt$ et $K_n(\beta) = \int_0^1 \psi_n(t) dt$

a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\beta) = J(\beta)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\beta) = K(\beta)$.

b) Exprimer $J_n(\beta) + K_n(\beta)$ à l'aide de X_n et de α .

c) Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.

Korka



Né en 1991, Thierno Korka DIALLO est élève ingénieur originaire de la région de Ziguinchor où il fit ses études moyenne et secondaire. Après avoir décroché son Bac en série S1, il est admis à l'Ecole Polytechnique de Thiès. Soucieux de la réussite des élèves, il s'est engagé dans l'élaboration de documents pouvant leur être utiles. Ainsi, son objectif dans cet ouvrage est de briser le mythe dont on entoure à tort les Mathématiques. Il garde encore dans son agenda de nombreux recueils qu'il espère publier dans les années à venir.

Visitez : <http://document1991.skyrock.com/profil/photos/10>

A quand la sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale ?

La sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale passe d'abord par l'accès à la culture scientifique qui n'a pas nécessairement pour but de former de futurs scientifiques mais d'aider le plus grand nombre à comprendre le monde et permettre à tous de porter un regard critique sur les enjeux des avancées des sciences (risques, utilisation).

A l'école et plus particulièrement au lycée, l'enseignement scientifique est presque essentiellement une acquisition de savoirs. Pour motiver les élèves à l'apprentissage de ces savoirs souvent complexes, peut-être faudrait-il commencer par former les élèves à une démarche scientifique en les mettant dans une véritable situation de recherche ? Entrer dans une démarche de recherche, c'est apprendre la rigueur, se poser des questions, avoir un regard critique à la fois sur les contenus et les méthodes.

Parallèlement, il faudrait former les enseignants, souvent déstabilisés, quand il s'agit d'aider les élèves en situation de recherche. Il n'est pas nécessaire de connaître la réponse à toutes les questions des élèves, mais il s'agit bien de les aider à trouver eux mêmes les réponses.

L'enseignement scientifique attire et fait peur. La démarche scientifique permet de développer, entre autres, l'esprit critique, la créativité, une attitude citoyenne... En ce sens l'apprentissage de cette démarche n'est-elle pas un moyen de contribuer à la réussite du plus grand nombre.

Le savoir est dans la nature, et, pour le trouver il faut se détacher des mœurs de la société, c'est comme le disait Rémy de Gourmont "Savoir ce que tout le monde sait, c'est ne rien savoir. Le savoir commence là où commence ce que le monde ignore"; bref, il faut être anticonformiste pour être un bon scientifique.

Thierno Korka DIALLO

Du même auteur, découvrez (pour les élèves de S1) ou visiter le site :
<http://document1991.skyrock.com/profil/photos/10>

