

collection (Aïman)



MATHS

Tles
C et E

- Sujets d'examen
- Corrigés détaillés et commentés



NEI

SOMMAIRE

Avant-propos	3
--------------------	---

EXAMENS

Examen 1 : session de remplacement 1994 série C	9
Examen 2 : session de juin 1995 série C	13
Examen 3 : session de remplacement 1995 série E	16
Examen 4 : session de juin 1996 série C	19
Examen 5 : session de remplacement 1996 série C	22
Examen 6 : session de juin 1996 série E	25
Examen 7 : session de remplacement 1996 série E	29
Examen 8 : session de juin 1997 série C	31
Examen 9 : session de remplacement 1997 série C	34
Examen 10 : session de juin 1998 série C	37
Examen 11 : session de remplacement 1998 série C	40
Examen 12 : session de juin 1998 série E	43
Examen 13 : session de juin 1999 série C	46
Examen 14 : session de remplacement 1999 série C	49
Examen 15 : session de juin 1999 série E	51
Examen 16 : session de juin 2000 série C	54
Examen 17 : session de juin 2000 série E	57
Examen 18 : session de juin 2001 série C	60
Examen 19 : session de juin 2001 série E	63

CORRIGÉS

Examen 1 : session de remplacement 1994 série C	69
Examen 2 : session de juin 1995 série C	78
Examen 3 : session de remplacement 1995 série E	87
Examen 4 : session de juin 1996 série C	98
Examen 5 : session de remplacement 1996 série C	111
Examen 6 : session de juin 1996 série E	123
Examen 7 : session de remplacement 1996 série E	133
Examen 8 : session de juin 1997 série C	143
Examen 9 : session de remplacement 1997 série C	153
Examen 10 : session de juin 1998 série C	161
Examen 11 : session de remplacement 1998 série C	171
Examen 12 : session de juin 1998 série E	185
Examen 13 : session de juin 1999 série C	194
Examen 14 : session de remplacement 1999 série C	203
Examen 15 : session de juin 1999 série E	211
Examen 16 : session de juin 2000 série C	219
Examen 17 : session de juin 2000 série E	227
Examen 18 : session de juin 2001 série C	237
Examen 19 : session de juin 2001 série E	251



ÉNONCÉS DES EXAMENS

DAMIBA

EXAMEN 1

Session de Remplacement 1994
Série C

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 4 cm pour unité.

1. Soit (H) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :
 $x^2 - y^2 + x = 0$.
 - a. Déterminer la nature de (H) .
Préciser ses éléments de symétrie et asymptotes éventuelles.
 - b. Représenter graphiquement (H) .
2. A tout point M d'affixe z différente de 0 et de -1 on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{2}{z^2 + z}$.
 - a. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.
 - b. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on désigne par (C_1) et (C_2) deux cercles de centres O_1 et O_2 , de rayons respectifs 2 et 5 et sécants en I et J tels que :

$$\text{Mes}(\widehat{IO_1IO_2}) = \frac{2\pi}{3}.$$

1. Faire une figure (unité : 1 cm).
2. Soit s une similitude directe plane transformant (C_1) en (C_2) .
 - a. Quel est le rapport d'une telle similitude ?
 - b. Si N est le centre de s , quelle est la valeur du rapport $\frac{NO_2}{NO_1}$?
 - c. Déterminer et construire avec soin l'ensemble (Γ) des centres N des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2) .
3. On considère maintenant la similitude plane directe S de centre I

transformant (C_1) en (C_2) .

Faire une deuxième figure ne faisant pas apparaître (Γ) .

- a. Soit M_1 un point de (C_1) et M_2 son image par S .
Démontrer que les points J , M_1 et M_2 sont alignés.
- b. Placer un point M_1 sur (C_1) , construire alors M_2 .
4. Une droite (D) passant par J recoupe (C_1) en B_1 ($B_1 \neq M_1$) et (C_2) en B_2 .
 - a. Pourquoi les droites (B_1M_1) et (B_2M_2) sont-elles sécantes ?
 - b. On désigne par P le point d'intersection de (B_1M_1) et (B_2M_2) .
Démontrer que les points I , B_1 , B_2 et P sont cocycliques.

.. PROBLÈME

On désigne par g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$
On se propose d'étudier g et de trouver une de ses primitives.

Partie A : Étude d'une fonction G définie par une intégrale

1.
 - a. Démontrer que g est une fonction paire.
 - b. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
 - c. Étudier le sens de variation de g .
Dresser le tableau des variations de g .
 - d. Tracer (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (On prendra 4 cm pour unité et $e \simeq 2,7$).
2. On considère la fonction numérique G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

(On ne cherchera pas à exprimer $G(x)$ en fonction de x .)

- a. Que représente G pour la fonction g ?
- b. Préciser $G'(x)$ et déduire le sens de variation de G .
- c. Déterminer le signe $G(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Étude d'une bijection f et de sa réciproque

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ par :

$$f(x) = \ln \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

- a. Démontrer que si $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ alors $\tan(x + \frac{\pi}{4}) \in]0; +\infty[$
- b. Démontrer que f est une fonction impaire.
- c. Démontrer que : pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$,

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2(x + \frac{\pi}{4})}{\tan(x + \frac{\pi}{4})}$$

Préciser le nombre dérivé de f en 0.

- d. Étudier la limite à droite de f en $-\frac{\pi}{4}$, ainsi que la limite à gauche de f en $\frac{\pi}{4}$.
- e. Dresser le tableau des variations de f .
- f. Tracer (C), la courbe représentative de f , dans le plan muni d'un repère orthonormé (O', I', J') (unité : 4 cm).
- a. Démontrer que f admet une bijection réciproque, que l'on notera f^{-1} , dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
- b. Préciser les limites de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition.
Préciser le nombre dérivé de f^{-1} en 0.
Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
Tracer sa courbe représentative (C'), dans le même repère que (C).

- c. Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ on a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^x = \tan(y + \frac{\pi}{4}).$$

- d. En déduire que $(f^{-1})' = G'$ et démontrer que $f^{-1} = G$.

EXERCICE 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$.

1. a. Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n .
b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$.
2. a. Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b. En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^1 x^n dx$.
a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.
b. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel strictement positif.

On considère le point A de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de coordonnées $(a; a)$.

On désigne par R la rotation de centre O et l'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $F = R' \circ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ? Préciser ses éléments caractéristiques. (On pourra considérer l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$.)
2. Soit (D) la droite d'équation $x + y = a$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $S_{(D)} \circ F$.

.. PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de D_f .)

2. a. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] -\infty ; 0 [$.
b. Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] 0 ; +\infty [$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$

Soit (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité sera égale à 1 cm).

1. a. En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f .
b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $] 0 ; +\infty [$.
3. Démontrer que les droites (Δ) d'équation $y = x$ et (Δ') d'équation $y = -x$ sont asymptotes à (C_f) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.
4. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $] 0 ; +\infty [$.
b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ') sur $] 0 ; +\infty [$.
5. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ) sur $] -\infty ; 0 [$.
b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $] -\infty ; 0 [$.
6. Tracer (Δ) , (Δ') et (C_f) .

Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $] -\infty ; 0 [$.

Soit la fonction h définie sur $] -\infty ; 0 [$ par : $h(x) = f(x) + x$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.
b. Étudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.
2. a. Démontrer que l'équation $x \in] -\infty ; 0 [, f(x) = -x$ admet une solution unique α .

- b. Démontrer que :

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

Partie D

1. Soit t un non
Calculer l'ai
d'équations
2. On pose, po
a. À l'aid
b. Démon
c. Détern

Partie D

1. Soit t un nombre réel tel que $t \geq 1$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan délimitée par (Δ') , (C_t) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.
2. On pose, pour tout nombre réel t tel que $t \geq 1$: $\mathcal{J}(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{J}(t)$.
 - b. Démontrer que : $0 \leq \mathcal{J}(t) \leq 1$.
 - c. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(t)$.

EXAMEN 3Session de Remplacement 1995
Série E**EXERCICE 1**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un nombre complexe non nul et A le point d'afixe a .

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'afixe z , associe le point M' d'afixe z' définie par :

$$z' = az^3 + a - 1$$

- Déterminer l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation. Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
- Déterminer l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie.

Représenter graphiquement l'ensemble des points A dont l'afixe a appartient à E_2 .

- Caractériser f pour $a = 1 + i$.

- Soit M_0 le point d'afixe 1 et M'_0 son image par f . On considère l'ensemble (Γ) des points A d'afixe a telle que le point M'_0 appartient à l'axe $(O, \vec{u})$. Démontrer que (Γ) est la réunion d'une droite et d'une hyperbole.
 - Sur une figure distincte de celle de la deuxième question, représenter graphiquement (Γ) .

EXERCICE 2

On considère trois points non alignés A , B et C de l'espace. On désigne par G_1 , le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 2)$ et $(C, -1)$ et par G_2 , le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

- Calculer $\vec{G_1G_2}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 - En déduire que $G_1 \neq G_2$.

- À tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que :

$$\vec{MM_1} = 3\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} \text{ et le point } M_2 \text{ tel que : } \vec{MM_2} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

- Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.

b. Démontrer
3. Déterminer

PROBL

On considère la

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

On note (C) s

Partie A

- Dé

- Étu

- Démont

- Tracer

- Dé

- Pr

- D

- Tr

- D

- f

- C

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b.

- b. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant quand M décrit l'espace.
3. Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0$.

PROBLÈME

On considère la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie A

1. a. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que le point A de (C) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (C) .
3. Tracer (C) . On construira en particulier la tangente à (C) au point A .
4. a. Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} .
Préciser l'ensemble de définition de f^{-1} .
- b. Donner une expression de $f^{-1}(x)$.
- c. Tracer dans le même repère que (C) , la courbe (Γ) représentative de f^{-1} .
5. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x , on ait :

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$$
- b. On pose : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t) dt$. Déduire de 5.a, que

$$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^\lambda + 1) + \ln\left(\frac{4}{27}\right).$$
6. a. x étant un réel de l'intervalle $[0 ; 1[$, établir à l'aide d'une considération géométrique que :

$$I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t) dt = xf^{-1}(x).$$
- b. En déduire une expression de $\int_0^x f^{-1}(t) dt$.

Partie B

1. a. Étudier le sens variation de f' .

b. En déduire que, pour tout réel x , $0 < f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel, $\varphi(x) = f(x) - x$.

a. Démontrer que la fonction φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique, que l'on notera α .

c. Démontrer que : $-1,5 < \alpha < -1,4$.

3. On définit la suite numérique (U_n) par son premier terme U_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.

a. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que, pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4} |U_n - \alpha|$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$
En déduire que la suite (U_n) converge vers α .

c. On donne $U_0 = -1$

Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

À partir de quel rang n est-on sûr d'avoir : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$?

EXAMEN 4

Session de Juin 1996
Série C

EXERCICE 1

L'unité choisie est le centimètre.

Dans le plan orienté on considère deux points A et O tels que : $AO = 1,5$.

Soit f la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1. On pose : $B = f(A)$ et $C = f(B)$.

a. Construire les points B et C.

b. Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})}$ et que $BC = 2 BA$.

En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par D, E et F les points tels que : $B = R(D)$, $E = R(C)$ et $F = f(D)$.

a. Construire les points E, D puis F.

b. Démontrer que les points A, D, B et O sont cocycliques.

En déduire que B, F, C et O sont cocycliques.

c. Soit : $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD ;

$\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle BCF ;

$\mathcal{C}''$ le cercle circonscrit au triangle ACE.

Démontrer que ces trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE 2

Soit la suite réelle U de premier terme u_0 égal à 5 et définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}.$$

1. a. Démontrer que pour tout entier n : $u_n > 0$.

b. Démontrer que pour tout entier n : $u_n \neq 1$.

2. Donner dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique de

la fonction f définie sur $] -5 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{2x + 4}{x + 5}$ (unité : 2 cm).

Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation $y = x$ pour placer u_0 , u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de U et sa limite ?

3. Soit V la suite réelle de terme général v_n tel que : $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$
- Démontrer que V est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.
 - Démontrer que V est convergente et calculer sa limite.
 - En déduire que la suite U converge et calculer sa limite.

.. PROBLÈME

Un tableau de valeurs est donné en fin d'énoncé.
Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 3 cm).

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et préciser les asymptotes éventuelles à (C) parallèles aux axes.
 - Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.
 - Tracer (C).
- u est un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $A(u)$ de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = u$.
- Calculer $\lim_{u \rightarrow +\infty} A(u)$.

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B

On considère les fonctions f_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$.

- Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Étudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation.
 - Construire la représentation graphique (C₂) de f_2 dans le même repère que la courbe (C).
- Déterminer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Étudier le sens de variation de f_3 et dresser son tableau de variation.
 - Construire la représentation graphique (C₃) de f_3 dans le même repère que la courbe (C).

- Étudier, suivre, donner ses limites.
 - Démontrer que...

Partie C

On considère les fo

- En utilisant la re
- Démontrer que

En déduire qu

- Démontrer
 - En déduir
 - Calculer
 - Démontr

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1$$

Partie D

- On suppose
Étudier le se
lorsque x ten
Déterminer
- On suppose
Étudier le s
 x tend vers
Déterminer
Préciser le
- Déterminer
l'équation

$$(1 + x$$

Tableau d

x	
e^x	

3. a. Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
- b. Démontrer que pour tout entier non nul $n : f'_n = f_{n-1} - f_n$.

Partie C

On considère les fonctions J_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $J_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

1. En utilisant la relation de la question B.3.b, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x .
2. Démontrer que pour tout réel x , on a : $J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^n f_k(x)$.

En déduire que : $J_n(x) = e - e^{1-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$.

3. Dans cette question, on suppose que x est élément de $[0 ; 1]$.
 - a. Démontrer que pour tout entier non nul $n : 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$.
 - b. En déduire que pour tout x élément de $[0 ; 1]$, $J_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.
 - c. Calculer la limite de $J_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - d. Démontrer que pour tout x élément de $[0 ; 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$$

Partie D

1. On suppose n pair.

Étudier le sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $J_n(x) = e$.
2. On suppose n impair.

Étudier le sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $J_n(x) = e$.

Préciser le signe de chaque solution.
3. Déterminer, suivant la parité de n , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = 0 \quad (\text{On ne calculera pas les solutions}).$$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$	2
e^x	0,05	0,13	0,37	2,72	4,48	7,39

EXAMEN 5Session de Remplacement 1996
Série C**EXERCICE 1**

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur a . Soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -2)$.

- Déterminer et construire I .
- Calculer IA^2 , IB^2 et IC^2 en fonction de a .
- Soit k , un nombre réel.
 - Déterminer en fonction de k , l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$
 - Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k) ?
- Démontrer que (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droite (AB) .
 - Démontrer que le symétrique D de B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC) .
 - Démontrer que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D .
 - Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On prend 2 centimètres comme unité graphique. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, notée (E).

$$(E) : z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i = 0$$

- Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique, que l'on calculera.
 - Résoudre l'équation (E).
- Soient A , B et C les points d'affixes respectives i , $-1-2i$ et $2-i$.
 - Placer les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B .
 - Calculer les réels b et c pour que le point O soit le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; (B, b) et (C, c) .

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
est le centimètre.

PARTIE A

- Soit (h) la conique $\mathcal{C}$ d'équation $z^2 + 2z + 1 = 0$.
Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
On note A le sommet de $\mathcal{C}$ d'affixe z_A .
- On pose : $z = x + iy$.
Soit R l'application f du plan complexe dans le plan complexe d'affixe z' définie par $f(z) = z^2 + 2z + 1$.
Démontrer que f est une similitude directe.
- Soit S l'application g du plan complexe dans le plan complexe d'affixe z'' définie par $g(z) = z^2 + 2z + 1$.
 - Démontrer que g est une similitude directe.
 - Démontrer que g est une translation.
 - Déduire de la question précédente que f est une similitude directe.
- Vérifier que f est une similitude directe.
 - Démontrer que f est une translation.
- Démontrer que f est une similitude directe.
 - En déduire que f est une translation.
- Expliquer pourquoi f est une similitude directe.
 - Conclure que f est une translation.

.. PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

PARTIE A

1. Soit $(\mathcal{H})$ la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Quelle est la nature de $(\mathcal{H})$?

On note A le sommet de $(\mathcal{H})$ d'ordonnée positive. Tracer $(\mathcal{H})$.

2. On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels. Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)z$.

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3. Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M''

d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)\bar{z}$.

- a. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D)

d'équation : $y = (\sqrt{2} + 1)x$.

- b. Démontrer que $S = R \circ S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0;1).

- c. Dédire de ce qui précède, la nature de S.

4. a. Vérifier que : $R(A) = S(A)$. On notera A' ce point.

- b. Démontrer que (D) coupe $(\mathcal{H})$ en deux points E et F.

5. a. Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient :

$$x'y' = x''y'' = \frac{1}{2} (y^2 - x^2).$$

- b. En déduire que $(\mathcal{H})$ a la même image par R et S. On appelle $(\mathcal{H})$ cette image.

Donner la nature et une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6. a. Expliquer pourquoi E et F appartiennent à $(\mathcal{H})$.

- b. Construire sur la même figure la courbe $(\mathcal{H})$, les points A et A', la droite (D) et la courbe $(\mathcal{H})$.

PARTIE B

1. On note $(h+)$ l'ensemble des points de (h) d'ordonnées positives.

a. Démontrer que $(h+)$ est la courbe représentative de la fonction

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2+16} \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

b. Soit N un point de $(h+)$ d'abscisse x positive. On note $U(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe $(h+)$ et les segments $[OA]$ et $[ON]$. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x :

$$U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16} dt - \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2} \right)$$

On ne cherchera pas à calculer $U(x)$.

c. Pour tout réel positif ou nul x , on pose : $G(x) = 8 \ln(x + \sqrt{x^2+16})$.
Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0; +\infty[$.

Calculer $U(0)$ et $G(0)$.

En déduire que pour tout réel positif ou nul x :

$$U(x) = 8 \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2+16}}{4} \right).$$

2. Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

a. Étudier le sens de variation de la fonction U sur $[0; +\infty[$.

b. Calculer le nombre dérivé de U en O .

Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

c. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 8]$. On construira la tangente à (C) en O .

On prendra : $\ln 2 \simeq 0,693$; $\ln(1+\sqrt{2}) \simeq 0,881$; $\ln(2+\sqrt{5}) \simeq 1,444$;

$\ln(1+\sqrt{5}) \simeq 1,174$.

PARTIE C

On appelle $(\mathcal{H}+)$ l'ensemble des points de $(\mathcal{H})$ d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de $(\mathcal{H}+)$ d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$.

1. Démontrer que le point N_1 , tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à $(h+)$ et que son abscisse x est positive.

2. Soit (Δ') la partie du plan limitée par $(\mathcal{H}+)$, les segments $[OA']$ et $[ON']$.
Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

EXERCICE 1

Un carré ABCD, de côté 35 cm, est divisé en 1225 (soit 35^2) petits carrés de 1 cm de côté par des segments régulièrement espacés et parallèles soit au segment [AB], soit au segment [AD].

1. On appelle "nœud" tout point d'intersection de deux segments de ce quadrillage qui n'est pas situé sur les côtés du carré ABCD.
 - a. Combien y a-t-il de nœuds dans le quadrillage ?
 - b. On choisit au hasard un de ces nœuds et on le note M. Soit I le projeté orthogonal de M sur (AB) et J le projeté orthogonal de M sur (AD). Déterminer la probabilité de chacun des événements :
 - b-1 : le quadrilatère AIMJ est un carré,
 - b-2 : le quadrilatère AIMJ a un périmètre de 24 cm.
2. n étant un entier naturel non nul, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.
 - a. Démontrer que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - b. Combien y a-t-il d'entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leq 1225$?
3. Les petits carrés du quadrillage sont numérotés de 1 à 1225.
 - a. On choisit au hasard un des petits carrés, et on note son numéro k . Quelle est la probabilité pour qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $S_n = k$?
Un tel événement est appelé "succès".
 - b. On réalise 5 fois l'épreuve précédente.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois "succès" ?

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i = 0$$

1.
 - a. Vérifier que -3 est solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation (E).
Les solutions seront notées z_0, z_1 , et z_2 , où $z_0 = -3$ et z_2 a sa partie réelle positive.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité: 1 cm). On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .
- Placer les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - Démontrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle isocèle.
3. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(M_0, -1); (M_1, 1)$ et $(M_2, 1)$.
- Construire géométriquement le point G . Justifier la construction. (On ne demande pas de calculer les coordonnées de G .)
 - Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que :
 $-MM_0^2 + MM_1^2 + MM_2^2 = -GM_2^2$.
 (On pourra vérifier que M_2 est un point de $(\mathcal{C})$.)

...PROBLÈME

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n} & \text{si } x > 0 \text{ (ln } x \text{ désigne le logarithme népérien de } x) \\ f_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm).

PARTIE A

- Étudier la continuité de f_n à droite en 0.
- Déterminer la limite de $\frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (on distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$).
Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- Étudier le sens de variation de f_n . Préciser la nature de la branche infinie.
- Construire (C_1) et (C_2) .

PARTIE B

Soit λ un réel strictement positif.

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x \, dx$.
- En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f_2(x) \, dx$.
- Calculer la limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$.
En déduire l'aire des régions du plan situées au-dessus de l'axe des abscisses et les bornes de ces régions.

PARTIE C

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx$.
Dresser le tableau de variation de U_n .
En déduire que $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Étudier le sens de variation de U_n .
Dresser son tableau de variation.
 - Démontrer que $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \alpha U_n$.

- À l'aide du résultat de la question 2.a, déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.
- α étant le réel défini par la question 2.a, déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.
- Démontrer que $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

PARTIE B

Soit λ un réel strictement positif.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de λ l'intégrale :

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x \, dx.$$

2. En déduire la valeur, en fonction de λ , de $I(\lambda)$ tel que :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f_2(x) \, dx.$$

3. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan limitée par (C_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

PARTIE C

1. On pose, pour tout x de l'intervalle $]0;1[$, $g(x) = f_2(x) - x$.
Dresser le tableau de variation de g .
En déduire que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.
2. a. Étudier le sens de variation de f_2' , fonction dérivée de f_2 sur $]0;1[$ et dresser son tableau de variation.
- b. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, on a : $|f_2'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
3. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_2(U_n) \end{cases}$$

- a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \in [0;1]$.
- b. α étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |U_n - \alpha|,$$

- c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|$.
- d. En déduire que la suite (U_n) converge vers α .

EXERCICE 1

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R et un point O' tel que $OO' = 3R$.

Soit r la rotation de centre O' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. On pose : $f = r \circ t$.

1. a. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
b. Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par f . Faire une figure où l'on prendra $R = 3$ cm.
c. Déterminer et construire Ω , centre de la rotation f .
2. M étant un point quelconque de $(\mathcal{C})$ et M' son image par f , on appelle I le milieu du segment $[MM']$.
a. Déterminer la nature du triangle $\Omega MM'$.
b. En déduire que I est l'image de M par une similitude directe de centre Ω , dont on précisera le rapport et l'angle.
c. Déterminer et construire l'ensemble des points I quand M décrit le cercle $(\mathcal{C})$. Justifier votre construction.

EXERCICE 2

Deux personnes, A et B , écrivent chacune au hasard un nombre entier compris entre 1 et 50. On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B . On suppose que tous les couples (a, b) tels que $1 \leq a \leq 50$ et $1 \leq b \leq 50$ sont équiprobables.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - a. $a = b$
 - b. $a + b = 20$
 - c. $b \geq 15$
 - d. $b \geq a$
2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'événement " $b \geq a$ " soit réalisé au moins deux fois ? Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

.. PROBLÈME

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } n = 0, f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{pour } n \geq 1, f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Étudier la parité des fonctions f_n .
2. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition. Étudier le sens de variation de f_0 et construire (C_0) .
3. Démontrer que toutes les courbes (C_n) ($n \in \mathbb{N}$) ont deux points communs.
4. Dans cette question, on suppose que n est non nul. Pour tout réel x , calculer $f_n'(x)$ où f_n' est la fonction dérivée de f_n .
5. a. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
b. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2 et dresser leurs tableaux de variation.
c. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_1) en $+\infty$ et préciser la position de (C_1) par rapport à cette asymptote. Tracer (C_1) et (C_2) dans le même repère que (C_0) .

PARTIE B

Soit (I_n) la suite réelle définie par : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout entier naturel n , démontrer que : $I_n \geq 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :
$$\frac{1}{\sqrt{2}(2n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$$
3. En déduire la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
4. On partage l'intervalle $[0;1]$ en cinq segments de même longueur 0,2 par les points $a_0 = 0$; $a_1 = 0,2$; $a_2 = 0,4$; $a_3 = 0,6$; $a_4 = 0,8$; $a_5 = 1$.
a. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel i tel que $0 \leq i \leq 4$:
$$0,2f_0(a_{i+1}) \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x) dx \leq 0,2f_0(a_i)$$

b. Pour tout entier naturel i tel que $1 \leq i \leq 5$, calculer $f_0(a_i)$ à 10^{-2} par défaut et par excès. En déduire un encadrement de I_0 .

5. a. À l'aide d'une intégration on a : $I_{n+1} = \sqrt{2} \cdot I_n$.
b. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .

EXAMEN 8

.. EXERCICE 1 ..

On considère les intégrales

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \text{ et, po}$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \text{ et, po}$$

1. a. Calculer J_0 et I_0 .
b. Calculer I_2 et J_2 .

$$I_{n+2} - I_n =$$

2. a. Calculer I_1 et J_1 .
b. En déduire I_3 et J_3 .
3. Soit f la fonction définie par :

a. Démontrer que :

b. On pose :

Calculer :

c. Calculer :

.. EXERCICE 2 ..

Dans le plan, Soit un point A . La parallèle à la droite (AB) passant par A est la droite (AC) .
1. Justifier que AC est la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ en A . Préciser la position de C par rapport à $\mathcal{P}$.

5. a À l'aide d'une intégration par parties de I_n , démontrer que, pour n de $\mathbb{N}$,
on a : $I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$.
b. Exprimer I_1 en fonction de I_0 et donner un encadrement de I_1 .

EXAMEN 8

Session de Juin 1997
Série C

EXERCICE 1

On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, par } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx,$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, par } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx,$$

1. a. Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel n non nul.
b. Calculer $I_2 - I_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}$$

2. a. Calculer I_1 .
b. En déduire I_3 .

3. Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- a. Démontrer que, pour tout réel x : $\cos x = 2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

- b. On pose, pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$: $u(x) = \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En déduire une primitive de f sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$.

- c. Calculer I_0 puis I_2 et I_4 .

EXERCICE 2

Dans le plan, on donne trois points alignés A, B et P.

Soit un point Q n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que : $AQ = BP$.

La parallèle à la droite (PQ) passant par B coupe la droite (AQ) en C.

1. Justifier l'existence d'une homothétie h transformant P en B et Q en C.
Préciser son centre.

2. a. Construire B_1 et C_1 les images respectives de B et C par h .
b. Démontrer que : $AC = BB_1$.
3. On donne un triangle RST . On veut construire deux points I et J tels que :

$$\{(IJ) // (ST)$$

$$I \in (SR) \setminus \{S; R\}$$

$$J \in (RT) \text{ et } RJ = SI.$$

(Dans cette question, on ne demande pas de trouver toutes les solutions mais seulement d'en donner une.)

- a. Démontrer que, si le triangle RST est isocèle en R , il y a une solution évidente.
- b. Dans la suite, les segments $[RS]$ et $[RT]$ ne sont pas de même longueur. À l'aide des deux premières questions, donner un programme de construction d'un couple de points (I, J) solution du problème. Justifier ce programme.

.. PROBLÈME

PARTIE A

Soit f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .
2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.
a. Étudier le sens de variation de φ .
b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.
3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
En déduire les variations de f .
b. Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$.
c. Calculer la limite de f en $+\infty$.
d. Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On placera en particulier les points d'abscisses $1; 3; 4; e^2; 12$.

On prendra $\ln(0,27) \simeq -1,31; \ln(0,28) \simeq -1,27; \ln(2) \simeq 0,7; \ln(3) \simeq 1,1; \ln(5) \simeq 1,6$.

PARTIE B

1. a. Démontrer que...
- b. Démontrer...
2. Soit g la fonction...

positif x par : $g(x) = \dots$

- a. Étudier le...
- b. Démontrer...
- c. Démontrer...

On prendra...

3. Soit (U_n) la suite...

- a. Démontrer...
- b. Démontrer...

En déduire...

- c. Démontrer...
- d. Pour qu...

PARTIE C

1. Soit n un entier...

Démontrer...

Placer α_1 ...

2. a. Démontrer...
- b. Démontrer...

$f(\alpha_n)$

- c. Démontrer...

et c...

PARTIE B

1. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3, 4]$.
 b. Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.
2. Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
 a. Étudier le sens de variation de g .
 b. Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.
 c. Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 On prendra : $e^{\frac{4}{3}} \simeq 3,8$; $e^{\frac{5}{4}} \simeq 3,49$.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.
 a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$.
 b. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.
 En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
 c. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.
 d. Pour quelles valeurs de n , U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

PARTIE C

1. Soit n un entier naturel non nul.
 Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule.
 Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\alpha_n \geq e^n$.
 b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$f(\alpha_n) = n \text{ est équivalent à } \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}.$$

 c. Dédire des questions 2.a. et 2.b. que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $(p ; q) \in \mathbb{Z}^2$, $11p - 7q = -4$

1. a. Vérifier que $(-1; -1)$ est solution de (E).
b. Résoudre (E).
2. a. Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :

$$(F) \quad x \in \mathbb{Z}, \quad 2x \equiv 3 [7]$$

$$(G) \quad x \in \mathbb{Z}, \quad 9x \equiv 4 [11]$$
- b. Déduire de 1) et de 2) les solutions du système

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 [7] \\ 9x \equiv 4 [11] \end{cases}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 2

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une boule de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.
 - a. Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.
 - b. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

Le but du problème est c
 $\begin{cases} \forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \end{cases}$

On notera (C) la cour
 $(0, 1, J)$ d'unité 5 cm

PARTIE A

On considère la fonct

1. Démontrer que
2. Étudier le sens
3. Déduire de 2) c

PARTIE B

1. a. Calculer

- b. Démontr
- c. Calculer
- Donner

- d. On adn

En déd
d'abs

2. a. On ad
- Dém

$f'(x)$

- b. En c

- c. Dér

- d. Dar

tan

Or

PROBLÈME

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x-1} \ln(x) \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1. \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 5 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $g(x) = (x-2)\ln(x) + (x-1)$.

1. Démontrer que pour tout réel x élément de $]0 ; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln(x)$.
2. Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
3. Dédire de 2) que $g(x)$ est positif pour tout réel x élément de $]0 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b. Démontrer que f est continue à droite en 0, et continue en 1.
c. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
d. On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \frac{3}{2}$.
En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} g(x).$$

- b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- c. Démontrer que pour tout réel appartenant à $[0 ; 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$
- d. Dans le repère (O, I, J) , tracer la demi-tangente à (C) au point O , la tangente à (C) au point B de coordonnées $(1 ; 1)$ et la courbe (C) .
On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln 3 \simeq 1,1$.

PARTIE C

1. Pour tout réel α appartenant à $]0; \frac{1}{2}[$ on considère l'intégrale $A(\alpha)$ telle que :

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1} \ln(t) dt.$$

On note A la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.

2. Que représente géométriquement le nombre A ?
 - a. Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n , sur $]0; +\infty[$ par : $H_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln(t) - \frac{1}{n+1})$ est une primitive de la fonction $t \mapsto t^n \ln(t)$ sur $]0; +\infty[$.
 - b. Soit α dans $]0; \frac{1}{2}[$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \ln(t) dt \text{ et } I_n = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} I_n(\alpha).$$

Calculer $I_n(\alpha)$ et en déduire que $I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. a. Pour tout réel t différent de 1, et pour tout entier naturel non nul n , calculer la somme : $t^2 + t^3 + \dots + t^{n+1}$ (somme des n premiers termes d'une suite géométrique).

$$\text{Démontrer que } \frac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - \dots - t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}$$

$$\text{et que } A(\alpha) = -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) - \dots - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t) dt.$$

- b. En utilisant la question 2.c. de la partie B, démontrer que :

$$0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t) dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n dt \leq \int_0^1 t^n dt.$$

- c. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq A(\alpha) + I_2(\alpha) + I_3(\alpha) + \dots + I_{n+1}(\alpha) \leq \frac{1}{n+1}$$

et que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

- d. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\text{Démontrer que } A = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}.$$

EXAMEN 1 EXERCICE

Dans le plan orienté

Mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Soit M un point de la perpendiculaire

1. Faire une figure
2. On considère
 - a. Démontrer
 - b. En déduire
3. a. Déterminer telle que
 - b. Quelle est
 - c. Démontrer
 - d. En déduire

EXERCICE

Soit a un réel

$\{U_0 = 0, U_1 = \dots\}$
(Pour tout n)

1. Pour que
2. Démontrer que $V_n = U_n$ terme à terme
3. a. Démontrer que U_n
 - b. Pour tout n
 - c. Pour tout n
 - d. Pour tout n

.. EXERCICE 1

Dans le plan orienté on considère le carré ABCD de centre O tel que

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, et I le milieu de [MN].

1. Faire une figure.
2. On considère la rotation r de centre A telle que : $r(D) = B$.
 - a. Démontrer que N est l'image de M par r .
 - b. En déduire la nature du triangle AMN.
3. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A telle que $s(D) = O$.
 - b. Quelle est l'image de C par s ?
 - c. Démontrer que I est l'image de M par s .
 - d. En déduire l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite (DC).

.. EXERCICE 2

Soit a un réel non nul. On considère la suite U définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } aU_{n+1} = (a+1)U_n - U_{n-1}. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a , la suite U est-elle arithmétique ?
Dans la suite de l'exercice, on supposera le réel a différent de 1.
2. Démontrer que la suite V définie pour tout entier naturel n par :
 $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a :
 $U_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$
 - b. Pour tout entier naturel n non nul, calculer U_n en fonction de n et de a .
 - c. Pour quelles valeurs de a , la suite U est-elle convergente ?
Préciser alors la limite de U en fonction de a .

4. On choisit $a = 2$.
 Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - 2| < 10^{-3}$.
 On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$ et $\ln 5 \simeq 1,61$.

PROBLÈME

Ce problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes.

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité mesurant 1 cm.

PARTIE A

On considère la fonction f définie, sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Démontrer que f est continue à droite en 0.
 b. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.
 En déduire une interprétation géométrique.
2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
 c. Tracer (C).
3. a. Soit g la restriction de f à $[4; +\infty[$.
 Démontrer que g est une bijection de $[4; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ et que son application réciproque g^{-1} est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4.$$
 b. Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} , dans le même repère que (C).
 On appellera (H) la courbe $(C) \cup (C')$.
4. Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 a. Démontrer que pour tous réels x et y positifs, on a :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0.$$
 En déduire que $(H) = (E)$.
 b. Démontrer que un point $M(a; b)$ est un point de (E) si, et seulement si, le point $M'(b; a)$ est aussi un point de (E).
 En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

PARTIE B

1. Soit m un réel appartenant à $]0; 2[$. Soit les points A_m de coordonnées $(0; 2-m)$.
 a. Écrire une équation de la droite (Δ_m) la droite d'équation $y = 2 - m$.
 b. Soit F le point de coordonnées $(1; 1)$. Démontrer que le point F appartient à (Δ_m) pour toutes les valeurs de m .
 c. Démontrer que (Δ_m) est tangente à la courbe (C) pour $m = 1$.
2. a. Soit H_m le projeté orthogonal de F sur (Δ_m) . Démontrer que H_m appartient à la courbe (C).
 b. Soit F le point de coordonnées $(1; 1)$. Démontrer que F appartient à la courbe (C).
3. Pour $m = \frac{1}{2}$, placer les points A_m, H_m, B_m, F .

PARTIE C

1. Soit M un point de la courbe (C).
 a. Démontrer que M appartient à la courbe (E).
 b. Démontrer que M appartient à la courbe (H).
2. a. Démontrer que M appartient à la courbe (E) si, et seulement si, le point M' de coordonnées $(b; a)$ appartient à la courbe (E).
 b. Interpréter géométriquement ce résultat.

PARTIE B

1. Soit m un réel appartenant à $] -2 ; 2[$.
 - a. Soit les points A_m de coordonnées $(2+m ; 0)$ et B_m de coordonnées $(0 ; 2-m)$.
Écrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m .
 - b. Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x - y - 2m = 0$.
Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}(2+m)^2 ; \frac{1}{4}(2-m)^2\right)$.
 - c. Démontrer que (D_m) est tangente à (C) en T_m .
2.
 - a. Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y = -x$.
Démontrer que H_m a pour coordonnées $(m ; -m)$.
 - b. Soit F le point de coordonnées $(2 ; 2)$.
Démontrer que le quadrilatère $A_m H_m B_m F$ est un carré pour tout m appartenant à $] -2 ; 2[$.
3. Pour $m = \frac{1}{2}$, placer le point T_m , tracer les droites (D_m) , (Δ_m) et le carré $A_m H_m B_m F$.

PARTIE C .

1. Soit M un point du plan d'affixe z .
 - a. Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ) .
 - b. Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à $\left| \frac{z+i\bar{z}}{2} \right|$.
2.
 - a. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left| \frac{z+i\bar{z}}{2} \right| = |z - (2+2i)|$ est la courbe (E) .
 - b. Interpréter géométriquement ce résultat.
En déduire la nature de la courbe (E) .
En donner deux éléments caractéristiques.

EXAMEN 11Session de Remplacement 1998
Série C**EXERCICE 1**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que :

$$|z-1| = \frac{1}{4} |z-i\bar{z}-2(i-1)|$$

On appelle (D) la droite d'équation $x - y + 2 = 0$.

1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2} (z+i\bar{z}) + i - 1.$$

(On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.)

- Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = M$ est la droite (D).
- Démontrer que pour tout point M du plan, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).
- Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à la droite (D), puis caractériser géométriquement l'application f .

2. On se propose de déterminer l'ensemble (E) défini au début de l'exercice.

- Démontrer que : $z - z' = \frac{1}{2} [z - i\bar{z} - 2(i-1)]$.
 - En déduire que (E) est une ellipse de foyer F d'affixe 1, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser son axe focal (Δ).
 - Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $\frac{1}{2}(1+i)$ et $\frac{1}{2}(5-3i)$ sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal.
- 3.
- Construire la droite (D), l'axe focal (Δ), les points A, A' et F.
 - Déterminer géométriquement les autres sommets de (E).
 - Construire (E).

EXERCICE
Les questions 1 et 2 sont
On considère dans le plan,
où a est un nombre réel str
1. a. Déterminer et co
(A, 1); (B, -1)
Déterminer et co
 $\overrightarrow{MA}$

2. Soit H le point du
a. Démontrer qu
(A, 3); (B, 1
b. Pour tout ré
que: $3M$

- Pour quelle
c. Détermine
 $3MA^2 + M$

PROBL

On considère la
On désigne par
(unité graphi

PARTIE A

1. a. Ca
su
b. D
v

2. Dé

De

EXERCICE 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel $AB = 2a$ et $AC = a$, où a est un nombre réel strictement positif donné.

1. a. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1).
b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$.

2. Soit H le point du plan défini par : $\vec{AH} = \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{AC}$.

- a. Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, 1) et (C, -2).
b. Pour tout réel k , on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
Pour quelle valeur de k , E_k contient-il le point C ?
c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$.

PROBLÈME

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(unité graphique : 4 cm).

PARTIE A

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . En déduire le sens de variation de la fonction f .
b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et donner le tableau de variation de f .
2. Démontrer que le point A de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C).
3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
4. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$.
a. Démontrer que :
 $\forall x \in]-\infty ; 0[, \varphi(x) > 0,$
 $\forall x \in]0 ; +\infty[, \varphi(x) < 0.$

- b. En déduire la position de (T) par rapport à ($\mathcal{C}$).
- c. Tracer (T) et ($\mathcal{C}$).

PARTIE B

Pour tout réel non nul m , on considère les fonctions f_m dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $f_m(x) = f\left(\frac{x}{m}\right)$.

($\mathcal{C}_m$) désigne la courbe représentative de f_m dans le repère (O, I, J).

Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{HM'} = m \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

1. a. Donner la nature de T_{-1} .
- b. Démontrer que ($\mathcal{C}_m$) est l'image par T_m de ($\mathcal{C}$).
- c. Tracer ($\mathcal{C}_1$).

2. Soit λ un réel. On pose $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x) dx$.

Calculer $I_m(\lambda)$ et en déduire que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m .

PARTIE C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = x - f(x)$.

1. a. Étudier le sens de variation de g .
- b. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- c. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
2. a. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.
- b. Calculer $f''(x)$. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
- c. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|$.
3. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence : $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
- a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.
- b. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.
- c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.
4. a. Déterminer la limite de (U_n).
- b. Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$.

EXERCICE 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé A

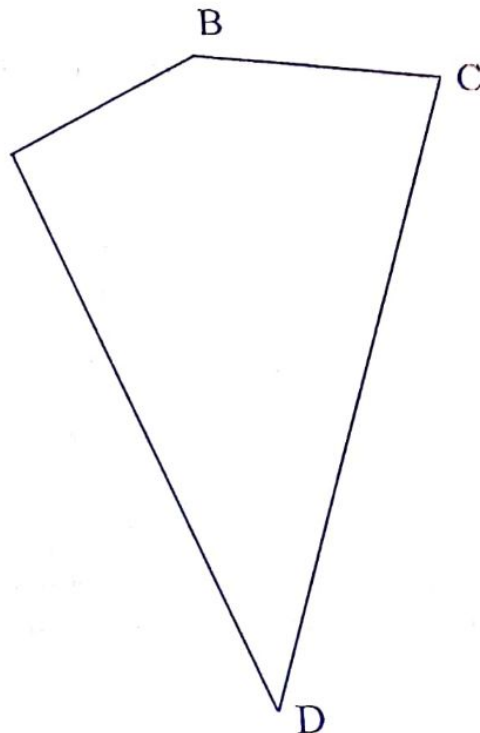
direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère :

- le quadrilatère convexe ABCD.

(Voir figure ci-contre.)

- Extérieurement au quadrilatère, le point M_1 (respectivement $M_2; M_3; M_4$) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C , CM_3D , DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_i (respectivement M_2, M_3, M_4).

Le but de l'exercice est de démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.



- Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .
 - Exprimer z_1 en fonction de a et b .
 - En déduire les expressions de z_2, z_3 et z_4 en fonction de a, b, c et d .
- Démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.

EXERCICE 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$$(1) \quad 25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2.$$

- En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une ellipse de foyer O et de directrice associée la droite (Δ) d'équation $x = \frac{16}{3}$.

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteur $(\vec{i}, \vec{OM})$.

2. a. Dédurre de l'équation (1) une relation entre OM et l'abscisse x de M .

b. Démontrer que $OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}$

3. On suppose ici que θ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M' .

a. Démontrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M .

b. Démontrer que $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$.

.. PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 3 cm).

PARTIE A

1. a. Calculer les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Étudier le sens de variation de la fonction f_1 et dresser son tableau de variation.
c. Tracer la tangente à l'origine à (C_1) , puis tracer (C_1) .
2. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, étudier le sens de variation de la fonction f_n .
b. Calculer les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
c. Sur une autre figure, tracer la tangente à l'origine à (C_3) , puis tracer (C_3) .
3. On note S_n la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation : $x = n$ et (C'_n) l'image de (C_n) par S_n .
a. M étant le point du plan de coordonnées (x, y) , calculer les coordonnées (x', y') de son image M' par S_n .
b. Démontrer que (C'_n) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient : $y = f_n(2n-x)$.
c. Tracer (C'_3) dans le même repère que (C_3) .
d. Pour $x \leq 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n-x)$.
En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :
$$\int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n g_n(t) dt.$$

4. Pour tout x élément de $]0, n]$, on pose $h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.
- De l'étude des variations de h_n , déduire le signe de $h_n(x)$.
 - Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, n]$, on a $f_n(x) \leq g_n(x)$.
 - Déduire de ce qui précède, l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t) dt \leq \int_0^{2n} f_n(t) dt.$$

PARTIE B

Pour tout réel positif x , on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.
- À l'aide d'une intégration par parties :
 - Calculer $F_1(x)$.
 - Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.
- En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$F_n(x) = n! \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right].$$
- Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$.
 - Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_n(x) \leq n!$.

PARTIE C

- Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq n!$$
- Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2}.$$

$$\frac{1}{2} e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$

EXAMEN 13

Session de Juin 1999
Série C

EXERCICE 1

On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1. Calculer la probabilité d'avoir :
 - a. une face blanche.
 - b. une face noire.
2. On jette le dé quatre fois de suite.
 - a. Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche ; une face blanche.
 - b. Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.
 - c. Calculer la probabilité d'avoir une face noire au 4^e lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).
3. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.
 - b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geq 0,99$.

EXERCICE 2

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$.
 - a. Calculer $h'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
 - b. Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
 - c. Démontrer que : $\forall x \in [1 ; e], 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
 - a. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer I_2 .
 - b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
 - c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
 - d. En utilisant la question 1.c., démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{e^2}{n+2} - \frac{e^2}{(n+2)e^n}$.
 - e. En déduire la limite de la suite (I_n) .

.. PROBLÈME

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité : 1 cm.

PARTIE A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0.$$

1. Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.
2. On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes respectives 3 ; $2 + i\sqrt{3}$; -1 ; 7 et $11 + 4i\sqrt{3}$.
 - a. Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.
 - b. Démontrer que les points B, C et G sont alignés.
 - c. Placer les points A, B, C, E et G.
3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

PARTIE B

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB.

1. On veut déterminer l'homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.
 - a. Démontrer que l'image par h de $[IA]$ est $[EF]$.
 - b. Justifier que : $h(I) = E$, $h(A) = F$ et $h(B) = G$.
 - c. Déterminer le centre et le rapport de h .
2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = h \circ r$.
 - a. Déterminer le rapport et l'angle de f .
 - b. Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.
3. Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG.
 - a. Démontrer que $h^{-1} \circ g$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même).
 - b. Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.
 - c. En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h , f et une troisième f' que l'on décomposera à l'aide de h et de r .
 - d. Déterminer le rapport et l'angle de f' .

4. Soit Ω le centre de la similitude f . On appelle K le milieu du segment $[IA]$.
 - a. Déterminer l'image K' de K par f .
 - b. Démontrer que Ω , A , G et F sont cocycliques.
 - c. Démontrer que Ω , F , K et K' sont cocycliques.
 - d. Construire Ω .
5. Déterminer l'application complexe associée à f' .
6. Calculer l'affixe du centre Ω' de f' .

EXAMEN 14

EXERCICE 1

1. Trouver suivant le système de coordonnées euclidienne de 4^n .
2. Justifier que : 19
3. En déduire le réel
4. Soit l'entier A_k tel que $10^k \leq A_k < 10^{k+1}$. Discuter, suivant k , la nature euclidienne de A_k .

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x) - x^2$. Étudier la fonction g .
3. Démontrer que f est une fonction paire.
4. Démontrer que f est une fonction impaire.
5. Démontrer que f est une fonction paire.
6. Démontrer que f est une fonction impaire.
7. Démontrer que f est une fonction paire.
8. Démontrer que f est une fonction impaire.
9. Démontrer que f est une fonction paire.
10. Démontrer que f est une fonction impaire.

.. EXERCICE 1

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2. Justifier que : $1999 \equiv 4 \pmod{7}$.
3. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132} .
4. Soit l'entier A_k tel que : $A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$.
Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k , le reste de la division euclidienne de A_k par 7.

.. EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère les fonctions f_n dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et définies par : $f_n(x) = x + n \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Calculer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, calculer $f'_n(x)$.
3. Étudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que l'équation, $x \in]0 ; n[$ $f_n(x) = 0$, admet une unique solution a_n .
5. Démontrer que : $\forall n \geq 3, 1 < a_n < e$.
6. Démontrer que : $\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$.
7. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
8. En déduire que la suite (a_n) converge.
9. Démontrer que : $\forall n \geq 3, \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$.
10. En déduire la limite de la suite (a_n) .

.. PROBLÈME

Dans le plan orienté muni du repère orthonormé direct (O, I, J) , on considère le carré direct $OIKJ$ de côté 1 (L'unité étant le centimètre, on prendra : $OI = 4$). Soit A un point quelconque de la droite (IJ) distinct de J et soit S la similitude directe de centre O qui applique J sur A .

PARTIE A

On désigne par I' , K' et A' les images respectives des points I , K et A par S .

1. Démontrer que le quadrilatère $OI'K'A$ est un carré direct.
2. Construire les points O , I , K , J , I' et K' .
3. Démontrer que les points A , A' et I' sont alignés.
4. Démontrer que : $OA' = A'K'$.

PARTIE B

Soit a l'affixe du point A , α un argument de a et x la partie réelle de a .

1. Déterminer l'affixe de K .
2. Démontrer que : $ia + 1 = x(1 + i)$.
3. En déduire qu'il existe un argument de $ia + 1$ dans la paire $\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\}$.
4. Démontrer que : $\widehat{(OJ, OA)} = \widehat{(KA, KJ)}$
5. En déduire que $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ est un argument du nombre complexe $a - (1 + i)$.

PARTIE C

Soit M un point du plan d'affixe z et M' son image d'affixe z' par S .

1. Démontrer que : $z' = -iaz$.
2. Calculer en fonction de a les affixes respectives k' et a' des points K' et A' .
3. Soit u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{KK'}$, et $\overrightarrow{K'A'}$.
 - a. Démontrer que u est un imaginaire pur et que v est un réel.
 - b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.
4. Démontrer que I , K et K' sont alignés et en déduire que K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (IK) .
5. En déduire une construction de A' .
6. Démontrer que, lorsque A décrit (IJ) privée de J , A' appartient à la parabole (Γ) de foyer O et de directrice (IK) .

PARTIE D

On veut construire (Γ) .

1. Donner l'axe focal et le sommet de (Γ) .
2. Démontrer que J appartient à (Γ) .
3. Construire (Γ) .

EXAMEN 15

Session de Juin 1999
Série E

EXERCICE 1

On considère l'application f suivante :

$$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x$$

1. Démontrer que f est une bijection.
On notera g la bijection réciproque de l'application f .
2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+x} dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

EXERCICE 2

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches. On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$.

1. Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :

A : Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches.

B : Obtenir au moins une boule blanche.

(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

2. On suppose $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geq 2$.

a. Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.

b. Démontrer que la suite $(P_n)_{n \geq 2}$ est majorée par 1.

Quel est le sens de variation de $(P_n)_{n \geq 2}$?

c. Dédire de la question précédente que $(P_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

1. On désigne par M_0 l'origine O du repère et par M_1 le point tel que : $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$.
On fixe un nombre réel $r > 0$ et un réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.
Soit M_2 le point du plan tel que :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r \|\overrightarrow{M_0M_1}\| \\ \text{mes}(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

Calculer l'afixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'afixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout entier naturel non nul n , on définit M_{n+1} à partir des points M_n et M_{n-1} par :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r \|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\| \\ \text{mes}(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite $M_0, M_1, \dots, M_n$, et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1], [M_1M_2], \dots, [M_nM_{n+1}], \dots$ est appelée «polygone». On note v_n ,

l'afixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $v_n = r e^{i\theta} v_{n-1}$. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. Déduire de la question précédente, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ .
3. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calculer v_n pour $0 \leq n \leq 3$ et placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 , en prenant 8 cm pour unité graphique.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geq 0$, on note z_n l'affixe du point M_n .

1. Calculer z_0, z_1, z_2 .
2. Pour tout $n \geq 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1} .
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
3. On rappelle que pour tout nombre $z \neq 1$, on a : $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$
Pour tout $n \geq 0$, calculer z_n en fonction de n, r et θ .
4. a. Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
b. On note Ω le point d'affixe ω tel que : $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$.
Interpréter géométriquement le résultat de la question a. ci-dessus.
5. Pour tout $n \geq 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.
 - a. Calculer z'_n en fonction de n, r et θ .
 - b. Établir qu'il existe un nombre complexe α non nul tel que pour tout $n \geq 1$, $z'_n = \alpha z'_{n-1}$.
 - c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geq 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.
 - d. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$; calculer dans ce cas les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée.
Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.

.. EXERCICE 1

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD). On désigne par I, J, O les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

1. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$
2. Les médiatrices des côtés [AD] et [BC] se coupent en G.
Démontrer que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.
3. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.
 - a. Justifier que (E_2) est non vide.
 - b. Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ (où k est une constante réelle).
 - c. En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$.
 - d. Déterminer et construire (E_2) .

.. EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C telles que :

$$z_A = -3, z_B = 2 + 2i \text{ et } z_C = 7i.$$

1. Construire le triangle ABC.
2. Vérifier que les nombres complexes $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$ ont le même module que l'on précisera.
3. Écrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.
4. Déduire des questions 2. et 3. que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
5. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de S.
 - b. Construire, après justification, les points E et F images de C et E par la similitude S. (On ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F.)

6. On pose : $A_0 = S(A)$; $A_1 = B$; $A_2 = S(B)$; $A_3 = S(C)$; $A_4 = S(E)$; $A_5 = S(F)$; $A_6 = S(A_5)$; ... ; pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $A_n = S(A_{n-1})$ et, pour tout entier naturel n : $R_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$.

a. Calculer $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et R_2 .

b. En déduire la nature précise du triangle AA_2A_3 .

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_n .

d. Démontrer que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

e. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{29}$.

.. PROBLÈME

Dans tout le problème le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm).

PARTIE A

1. On considère f la fonction numérique, de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$.

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2. On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|e^{|1-x|}$.

a. Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b. En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de g sur $]-\infty, 1]$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$.

c. Étudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto xe^{x-1}$.

d. Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 1.

e. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g .

f. Tracer $(\mathcal{C}_g)$ ainsi que les demi-tangentes à $(\mathcal{C}_g)$ aux points d'abscisses 0 et 1.

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par : $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$.

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n .

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

En donner une interprétation graphique.

3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a. Déterminer la dérivée f_n' de f_n .
 - b. Étudier le signe de $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n .
 - c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f_n(x) = x$.
 - d. En déduire que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes que l'on précisera.
4. Étudier la position de $(\mathcal{C}_n)$ par rapport à $(\mathcal{C}_{n+1})$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère (O, I, J) .
6. α étant un nombre réel, on pose : $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha f_n(x) dx$.
 - a. Calculer $I_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - b. Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

EXAMEN 17

EXERCICE 1

PARTIE A

Cette partie propose l'étude

$$I_n = \int_0^1 (1-x^n) \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{On pose } J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

1. En utilisant une consi
2. Calculer J_1 , en dé
3. a. Étudier le sens
b. En déduire que
4. a. Démontrer que
b. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty}$

PARTIE B

On se propose dans ce

1. Soit v la fonction
fonction dérivée
a. Démontrer
sur $[0; 1]$.
b. À l'aide d'
pour tout

$$(n+2)J_n =$$

2. Démontrer qu

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \dots \times (2p)}$$

EXAMEN 17

Session de Juin 2000
Série E

EXERCICE 1

PARTIE A

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 (1-x^n) \sqrt{1-x^2} dx.$$

On pose $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

1. En utilisant une considération d'aire, justifier que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. Calculer J_1 , en déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.
3. a. Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b. En déduire que les suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.
4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de J_n en fonction de n .

1. Soit v la fonction définie sur $[0; 1]$ par $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et soit v' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Démontrer que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$. On admet que le résultat reste valable sur $[0; 1]$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir v , démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :
 $(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$. Vérifier que cela reste valable pour $n=2$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul p , on a :
 $J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \dots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4}$ et $J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2p)}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+3)}$.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\begin{cases} AB = AC \\ \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On appelle r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose : $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g .
b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
2. a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant la transformation réciproque de f).
b. Déterminer l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.
3. Démontrer que (AC) est l'image de (IJ) par f .
4. Soit M un point du plan. On désigne par M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g .
a. Démontrer que $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{AC}$.
b. Démontrer que M appartient à la droite (IJ) si et seulement si les points A, C, M_1 et M_2 sont alignés.
c. On suppose que le point M n'appartient pas à la droite (IJ).
Quelle est la nature du quadrilatère $ACM_1 M_2$? Justifier.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique 2 cm.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \sqrt{e^x - 1}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ et définie par :

$$g(t) = 1 - t - e^{-2t}.$$

- a. Étudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en $+\infty$.
(on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).

- b. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$.
- c. Étudier le signe de $g(t)$.
- d. Établir que $0,79 \leq \alpha \leq 0,8$.

Sens de variation de f .

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

- b. Dédire de la question précédente le sens de variation de f .

Limite de f en 0.

3. a. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\ln[f(x)] = \frac{1}{x} (1 + x \ln x) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - e^{-\frac{2}{x}} \right)$$

- b. En déduire la limite de f en 0.

Limite de f en $+\infty$.

4. a. Établir que pour tout élément t de $[0 ; 1]$:

$$0 \leq e^t - 1 \leq te.$$

- b. En déduire à l'aide d'une intégration, que pour tout u de $[0, 1]$:

$$1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{e}{2} u^2.$$

- c. Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geq 2$:

$$0 \leq [f(x)]^2 - 2x \leq 2e$$

- d. Démontrer que pour tout $x \geq 2$: $f(x) \geq \sqrt{2x}$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

- a. Dresser le tableau de variation de f .

5. b. Tracer ($\mathcal{C}$).

EXAMEN 18

Session de Juin 2001
Série C

EXERCICE 1

On considère la suite (J_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt.$$

1. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n :

- a. J_n est positif si n est pair.
- b. J_n est négatif si n est impair.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$.

3. Calculer J_0 , J_1 et J_2 .

4. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$.

5. Retrouver J_1 et J_2 connaissant J_0 .

6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}$.

EXERCICE 2

Le quadrilatère OHKL est un rectangle de sens direct tel que : $OH = 2 LO$. La médiatrice de $[OK]$ coupe (OH) en E et (OL) en F. Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre E passant par O recoupe (OH) en A. Le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre F passant par O recoupe (OL) en O'. S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1. Démontrer que l'angle de S mesure $-\frac{\pi}{2}$.
2. Démontrer que : $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{O; K\}$.
3. Déterminer le centre de la similitude S.
4. Démontrer que : $S(H) = L$ et en déduire le rapport de S.
5. Déterminer l'image du point E par S.
6. Soit M un point de (OH) distinct des points O et A. On admet que le cercle passant par O, K et M recoupe (OL) en M'. Démontrer que : $S(M) = M'$.

PROBLÈME

PARTIE A

Dans tout le problème, les fonctions f et g désignent la fonction logarithme népérien.

On considère la fonction h définie par :

1. Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. On note h' la dérivée de h . Calculer $h'(x)$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
4. En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère la fonction g définie par :

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. On note g' la dérivée de g . Calculer $g'(x)$.
3. Démontrer que $g(x) > 0$ pour $x > 0$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$.
5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$.
- a. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- b. Démontrer que $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

On note f' la dérivée de f .

Dresser le tableau de variation de f .

PROBLÈME

PARTIE A

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$.

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0.
2. On note h' la dérivée de h ; démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1 ; +\infty[$.
4. En déduire le signe de h .

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.
2. On note g' la dérivée de g ; démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g'(x) = xh(x)$.
3. Démontrer que $g(x_0) > 0$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0 ; 1[$.
5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0 ; +\infty[$.
 - a. Déterminer le signe de g .
 - b. Démontrer que $x_1 \in]0,3 ; 0,4[$ et $x_2 \in]3,3 ; 3,4[$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2}.$$

1. Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la dérivée de f ; démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Démontrer que si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$ alors : $\ln \alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$.
6. En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$.
7. Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f .
8. Tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) . (On prendra pour unités: 3 cm en abscisse, 8 cm en ordonnées, $x_1 \approx 0,35$ et $x_2 \approx 3,35$.)

PARTIE D

1. On considère la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.
 Calcul de la limite de F en $+\infty$.
 a. Démontrer que $\forall t \in]1 ; +\infty[$, $\frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.
 b. Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$.
 c. En déduire les limites de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Calcul de la limite de F en 0.
 Pour tout nombre réel α élément de $]0 ; 1[$, on pose : $\phi(\alpha) = \int_1^\alpha t \ln t dt$.
 a. Exprimer $\phi(\alpha)$ en fonction α .
 b. Calculer $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \phi(\alpha)$.
 c. En déduire un encadrement de $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} F(x)$.
3. Déterminer la fonction dérivée F' de F .
4. Dresser le tableau de variation de F .
5. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans le même repère (O, I, J) de la partie C.

EXAMEN 1

EXERCICE

On considère l'équation

1. a. Démontrer
- b. Résoudre

2. Dans le plan
 A, B et C d'axe
 Soit G le barycentre
 2, -2 et 1.
 a. Déterminer

vecteur

b. Démontrer
 d'une
 c. En déduire
 B en

EXERCICE

Dans le plan

tel que l'équation

On désigne

la rotation

Pour tout

1. a

EXAMEN 19

Session de Juin 2001
Série E

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$.

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$; $3i$; $-2 + 3i$.
Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

- a. Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\vec{GA}$, $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$.

- b. Démontrer que les affixes des vecteurs $\vec{GA}$, $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
- c. En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose : $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$, $r = r_2 \circ r_1$.

1. a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).
Déterminer $r(D)$.
b. Démontrer que r est la symétrie centrale de centre Ω milieu de [BD].

2. a. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω .
 (On pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})$.)
 b. Prouver que (Γ) admet $[AD]$ pour diamètre et que le milieu I de $[AB]$ appartient à (Γ) . Construire le cercle (Γ) .

.. PROBLÈME

Partie A

On propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions numériques f d'une variable réelle, définies sur $] -1; +\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

1. Soit f un élément de $\mathcal{J}$ et soit g la fonction dérivable sur $] -1; +\infty[$ et définie par :
 $g(x) = (1+x)f(x)$.
 a. Démontrer que g est une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction h définie par :
 $\forall x \in] -1; +\infty[, h(x) = 1 + \ln(x+1)$.
 b. Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h . Démontrer que la fonction f_1 , définie par :

$$\forall x \in] -1; +\infty[\quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x} \text{ est élément de } \mathcal{J}.$$

2. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

- b. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de h sur $] -1; +\infty[$.

3. En déduire l'ensemble $\mathcal{J}$

Partie B

1. On considère l'ensemble des fonctions f_k dérivables sur $] -1; +\infty[$ et définies sur cet intervalle par :

$$f_k(x) = \ln(x+1) + \frac{k}{x+1}, \quad k \text{ étant un paramètre réel.}$$

- a. Calculer suivant les valeurs de k , la limite de f_k en $+\infty$ et à droite en -1 .
 b. Étudier suivant les valeurs de k , le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation.

c. Tracer avec soin, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques respectives (C_{-1}) , (C_0) et (C_1) des fonctions f_{-1} , f_0 et f_1 .

2. Pour tout réel t et pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose :

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$

a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}, Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1 + t}$.

b. En déduire que $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \left(\frac{t^{n-1}}{1+t} \right)$, $t \neq -1$.

c. À l'aide d'une intégration sur $[0; x]$ ($0 \leq x \leq 1$), démontrer que :

$$(f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt) \text{ avec}$$

$$P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

3. On considère la fonction φ définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x} \text{ si } x \in]0; 1] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall x \in [0; 1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt$.

b. En déduire que : $\forall x \in [0; 1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$.

c. Utilisant 2. c., démontrer que : $\forall x \in]0; 1], \frac{-1}{nx} \leq \varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}$.

d. Par intégration sur $[\frac{1}{n}; 1]$, démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x) dx + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{avec } S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2} \quad n \geq 2.$$

Partie C

1. Soit $g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1; +\infty[$,

$$f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}.$$

2.

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}.$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$

3. On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{i=0}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}.$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0(1) = U_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx.$

b. En déduire la limite de la suite (U_n) .