

PROF FAYSSAL

Mathématiques

30 EXAMENS BLANCS 2025 AVEC CORRECTION

Deuxième baccalauréat
sciences PC/SVT/ST

PROF : FAYSSAL

0681399067

16 examens corrigés-15 examens pour la recherche

Collection FMATHS



Prof fayssal

0681399067

www.elboutkhili.jimdofree.com

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, ne peut être faite de ce livre sans l'autorisation

شروط استعمال الكتاب (PDF) :

- هذا الكتاب يستعمل للتدريس داخل القسم أو المراجعة والتحضير الشخصي.
- الكتاب (PDF) يحتوي على رمز سري خاص بكل نسخة يتم إرسالها
- أي **تسريب** للكتاب (PDF) أو **بيعه** يعتبر -اولاً- فعلاً لا أخلاقياً، ونحتفظ بحق متابعة أي مسرب للكتاب.
- يمنع مشاركة الكتاب أو أجزاء منه داخل مجموعات كيف ما كان نوعها.
- يمنع استعمال الكتاب لأغراض تجارية أو إعادة بيعه

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, ne peut être faite de ce livre sans l'autorisation

Prof
Faysal

Résumés de cours
Deuxième bac sciences
PC /SVT/SE

Prof fayssal

0681399067

Prof Faysal

1) Continuité d'une fonction : $a \in D_f$

- f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
- La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite de a et à gauche de a

Continuité sur un intervalle I

- Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$
- Les fcts rationnelles sont continuées sur D_f
- La somme ; le produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I
- La fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur l'intervalle I ssi u et v est continue sur I et $v \neq 0$
- Si u est continue et positive sur I alors $\sqrt{u}$ est continue sur I

2) Dérivabilité d'une fonction en $a \in D_f$

- f dérivable en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Interprétation géométrique :

(Cf) admet une tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en a

Interprétation géométrique :

(Cf) admet une demi tangente verticale au point $A(a; f(a))$ dirigée vers le haut

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

- Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
 $(ax + b)' = a$; $(a x^n)' = a n x^{n-1}$
- Si u dérivable alors $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
 $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$; $x \neq 0$; $\left(\frac{a}{u}\right)' = \frac{-a u'}{u^2}$; $u \neq 0$
 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x > 0$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $u > 0$
- u et v deux fonctions dérivables sur I alors
 $(u + v)' = u' + v'$; $(au)' = a u'$
 $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{(v)^2}$; $v \neq 0$
- Les fonction $\sin$; $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$; $(f(U))' = U' f'(U)$

Lien entre la dérivabilité et la continuité

f dérivable sur $I \Rightarrow f$ est continue sur I

3) T.V.I et Fonction réciproque

- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a; b[$
- Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ,

Alors la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définie sur $J = f(I)$

$$\text{Par la relation } \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

*Les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques** par rapport la droite **d'équation $y=x$**

Dérivabilité de f^{-1} en b avec $b = f(a)$

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

4)Convexité de (Cf) et les Points d'inflexions

- Si $f'' \geq 0$ sur I alors (Cf) est *convexe* $\cup$
- Si $f'' \leq 0$ sur I alors (Cf) est *concave* $\cap$
- Si f'' s'anulle et change le signe en a alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion

5) POSITION RELATIVE de (Cf) et (Δ)

Pour étudier la position relative de (Cf) est la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$

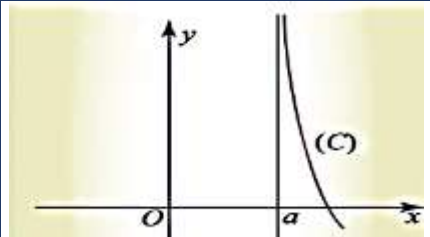
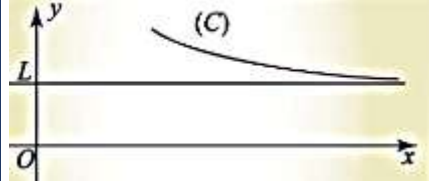
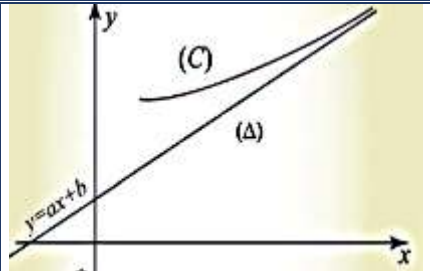
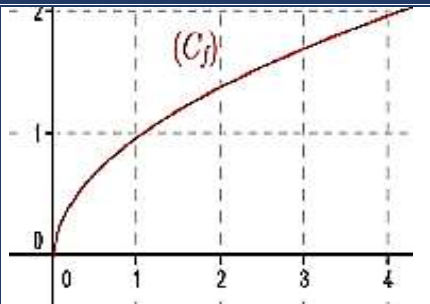
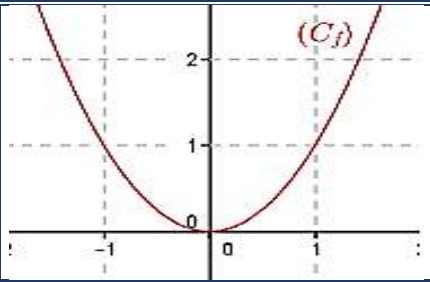
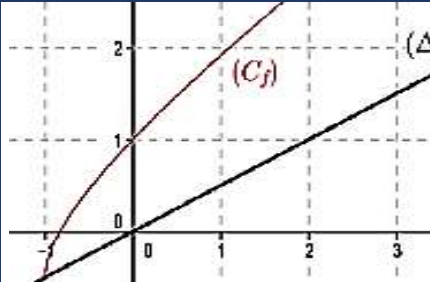
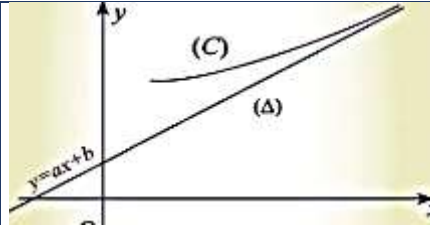
On étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors la courbe (Cf) est au dessus de (Δ)
- Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors la courbe (Cf) est au dessous de (Δ)

6) Les éléments de symétrie de (Cf)

- La droite d'équation $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (Cf) si pour tout $x \in D_f$
 $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- La fonction f est **paire** ssi $\forall x \in D_f$:
 $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
(Oy) est un axe de symétrie de (Cf)
- Le point $A(a; b)$ est centre de symétrie de (Cf) ssi pour tout $x \in D_f$:
 $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- La fonction est **impaire** ssi $\forall x \in D_f$:
 $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Le point O est centre de symétrie de (Cf)

La limite	Interprétation géométrique	Schématisation du résultat
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	Alors la droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f)	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	Alors la droite (D) : $y = L$ est asymptote horizontale à (C_f) voisinage de $+\infty$	
SI : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$	Alors droite $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$		
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de Direction la droite (O_x) Au voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de Direction (O_y) Au voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, (avec $a \neq 0$) On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$		
SI : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \infty$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(\Delta): y = ax$ au voisinage de $+\infty$	
SI : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$	Alors la droite d'équation $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) voisinage de $+\infty$	

A) 1) Fonction logarithme népérien

- La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par $\ln$
- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et $\ln(1) = 0$
- Pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- On a ; $\ln(e) = 1$ avec le nombre e est un nombre irrationnel ; $e \cong 2,7$

2) Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$; $x, y \in]0, +\infty[$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$; $r \in \mathbb{Q}$

3) Equations et inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$; $x, y \in]0, +\infty[$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$ avec $a \in \mathbb{R}$

4) Signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$

- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Conclusion : (le tableau de signe de $\ln$)

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+

5) Limites de la fonction $\ln$

- $FI: \frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple de méthode de changement de variable pour calcul des limites

Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

On pose $t = \sqrt{x}$ donc $t^2 = x$

Et on a $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(t)}{t} = 2 \times 0 = 0$$

(car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$)

6) Dérivée de la fonction $\ln(U)$ avec $U \neq 0$

Si U est dérivable sur I alors $\ln(|U|)$ est dérivable sur I et on a ; $\ln'(|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Primitives

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|U(x)|) + c$; $c \in \mathbb{R}$

B) 1) Fonction exponentielle

- La fonction réciproque de la fonction $\ln$ est appelée fct exponentielle, elle est définie et dérivable Sur $\mathbb{R}$
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ et $e^0 = 1$
- Pour tout x de $\mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$
- Si U est dérivable sur I alors
Pour tout x de I : $(e^{U(x)})' = U'(x)e^{U(x)}$

2) Propriétés algébriques de la fct exp

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^x \neq 0$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et $(e^x)^r = e^{rx}$; $r \in \mathbb{Q}$

3) Equations et inéquations

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$; $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln(a)} = a$; avec $a > 0$
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$; avec $a > 0$

4) Limites de la fonction exp

- $FI: \frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Logarithme de base $\neq 1$ et $a > 0$

- $\forall x \in]0, +\infty[$: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$; $a^x = a^{x \ln(a)}$

5) Primitives

- Les primitives de la fonction $x \mapsto U'(x)e^{U(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{U(x)} + c$; $c \in \mathbb{R}$
- Soit a un réel non nul : Les primitives de la fonction $x \mapsto e^{ax}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax} + c$; $c \in \mathbb{R}$

1) Définition d'une Primitive d'une fonction

On dit que la fonction F est une primitive de f si F est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I; F'(x) = f(x)$$

Primitive des fonctions usuelles ; $r \in \mathbb{Q} / \{-1\}$

- $\int k = kx$; $\int x = \frac{x^2}{2}$
- $\int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1}$; $\int U'(x) \times U(x)^r = \frac{U(x)^{r+1}}{r+1}$
- $\int \frac{a}{x^2} = -\frac{a}{x}$; $\int \frac{a}{x^n} = -\frac{a}{(n-1)x^{n-1}}$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$; $\int \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \sqrt{U(x)}$
- $\int e^x = e^x$; $\int U'(x)e^{U(x)} = e^{U(x)}$
- $\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}$
- $\int \frac{a}{x} = a \ln(|x|)$; $\int \frac{U'(x)}{U(x)} = \ln(|U(x)|)$
- $\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a} \ln(|ax+b|)$
- $\int \cos(x) = \sin(x)$
- $\int \sin(x) = -\cos(x)$
- $\int \cos(ax+b) = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$
- $\int \sin(ax+b) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$

2) Définition d'intégrale d'une fonction

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$

L'intégrale de la fonction f de a à b est le nombre réel noté par $\int_a^b f(x) dx$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque :

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b k dx = [kx]_a^b = b - a$

3) Propriétés d'intégrale :

➤ Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ; \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

➤ Relation de CHELS

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

➤ L'intégrale et l'ordre :

Si $\forall x \in [a; b]; f(x) > 0$ alors $\int_a^b f(x) dx > 0$

Si $f(x) > g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$

➤ $\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| dx$

4) Intégration par parties

Méthode ou bien disposition :

$$u(x) = \dots \quad u'(x) = \dots$$

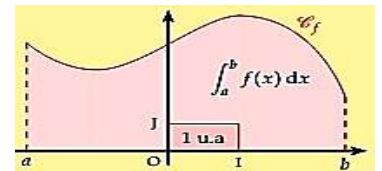
$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \quad v(x) = \dots$$

$$\int_a^b u v' dx = [u v]_a^b - \int_a^b u' v dx$$

5) Aire d'un domaine plan

L'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et



les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

est : $A(f) = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \times u.a$

Avec $u.a$ est l'unité d'aire $1u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

Si : $f > 0$ sur $[a; b]$ alors :

$$A(f) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) u.a$$

si : $f < 0$ sur $[a; b]$ alors :

$$A(f) = \left(\int_a^b -f(x) dx \right) u.a$$

Si $f > 0$ sur $[a; c]$ et $f < 0$ sur $[c; b]$ alors :

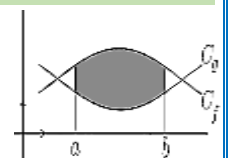
$$A = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx$$

L'aire du domaine délimité par (C_f) et (C_g)

et les droites :

$x = a$ et $x = b$

$$A = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a$$



Volume d'un solide de révolution

L'espace est rapporté à R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le volume de solide de révolution engendré par la rotation de (C_f) par rapport à (Ox)

(tour complet) sur $[a; b]$ est :

$$V(f) = \left(\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right) \times u.V$$

L'unité de volume est $u.V = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$

Préparation à l'examen nationale du baccalauréat	Fiche 05: Equations différentielles	Prof : FAYSSAL Page : 06
A) Equations différentielles de premier ordre : $y' = ay + b$ 1) L'équation (E) ; $y' = ay + b$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; ou y est la fonction inconnue et y' sa fonction dérivée 2) On appelle solution de l'équation (E) , toute fonction f qui vérifie $f'(x) = af(x) + b$ Résolution de l'équation : (E) ; $y' = ay + b$ 1) Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax}$ ou k est une constante réelle 2) Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ou k est une constante 3) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Il existe une solution unique y de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$ B) Equations différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$ 1) L'équation (E): $y'' + ay' + by = 0$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire du second ordre ou y est la fonction inconnue et y' sa dérivée première et y'' sa dérivée d'ordre 2 2) L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à l'équation (E): $y'' + ay' + by = 0$	Résolution de : (E) ; $y'' + ay' + by = 0$ Soit Δ le discriminant de L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, associée à (E): $y'' + ay' + by = 0$ ➤ Cas 01 ; $\Delta > 0$ L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions réelles r_1 et r_2 Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$; $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$ ➤ Cas 02 ; $\Delta = 0$ L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet une solution réelle unique r_0 Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$; $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$ ➤ Cas 03 ; $\Delta < 0$ L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = p + iq$ et $z_2 = \overline{z_1}$ Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{p x}$ ou $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$	

0) Raisonnement par récurrence

Soit n_0 un entier fixé et n un entier naturel
Pour montrer la proposition $\forall n \geq n_0 : P(n)$

On suit le principe de **récurrence** suivant :

- Pour $n = n_0$ on vérifie que $P(n)$ est vraie ,
- Soit n un entier fixé tel que $n \geq n_0$

On suppose que $P(n)$ est vraie

Et on montre que $P(n + 1)$ est vraie

- Alors $\forall n \geq n_0 : P(n)$ devient vraie

1) Suite croissante ; décroissante

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme U_0

- $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante
- $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante
- $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante

Résultat

(U_n) est croissante alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \geq U_0$

(U_n) est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq U_0$

2) Suite majorée ; minorée ; bornée

- $U_n > a \Rightarrow (U_n)$ est minorée par a
- $U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est majorée par b
- $a < U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est bornée

3) Suite convergente

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L \in \mathbb{R}$ on dit que la suite (U_n)

est convergente si non elle est divergente

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente

4) Limites des suites usuelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty ; \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 ; \quad p \in \mathbb{N}^*$$

5) Limite de la suite géométrique (q^n)

- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- $q < -1 \Rightarrow (q^n)$ n'admet pas de limite

6) Suite géométrique - arithmétique

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme U_0 et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$

(U_n) géométrique	(U_n) arithmétique
Définition : $U_{n+1} = q U_n$	Définition : $U_{n+1} - U_n = r$
U_n en fonction de n $U_n = U_p \times q^{n-p}$	U_n en fonction de n $U_n = U_p + (n - p)r$
Cas particulier : $U_n = U_0 \times q^n$	Cas particulier : $U_n = U_0 + nr$
Somme des termes $S_n = U_p + \dots + U_n$ $= U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$	Somme des termes $S_n = U_p + \dots + U_n$ $= \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$
Cas particulier : $S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	Cas particulier : $S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= \frac{(n + 1)(U_0 + U_n)}{2}$

7) Limite d'une suite et l'ordre

- $\begin{cases} V_n < U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- $\begin{cases} U_n < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- $\begin{cases} V_n < U_n < W_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- $\begin{cases} |U_n - l| < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

8) La suite (V_n) définie par : $V_n = f(U_n)$

Si la fonction f est **continue** en l et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = f(l)$$

9) La suite (U_n) liée à une fonction f ,

définie par : $U_{n+1} = f(U_n)$

f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$

Alors si :

- La fonction f est **continue** sur I et $f(I) \subset I$
 - La suite (U_n) est **convergente** et $U_0 \in I$
- Alors la limite de la suite (U_n) est **une** solution de l'équation $f(x) = x$ dans I

A) Ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$$

➤ L'écriture $a + ib$ s'appelle la forme algébrique du nombre $z = a + ib$

1) Conjugué d'un nombre complexe z :

$$z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib ; \bar{\bar{z}} \text{ le conjugué de } z$$

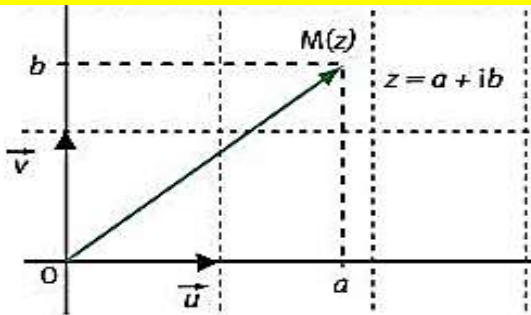
Propriété de conjugué d'un complexe

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} ; \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} ; \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z'}} ; \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 ; \quad \bar{z}^n = (\bar{z})^n$$

$$\bullet \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

2) Représentation géométrique d'un nombre complexe dans un repère orthon



Soit $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$ des points du plan :

• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

• L'affixe de I le milieu du segment $[AB]$ est z_I tel que : $Z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$

• Points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

3) Module d'un nombre complexe z : $|z|$

Le module de $z = a + ib$ d'image M est le nombre réel positif noté $|z|$ définie par

$$|z| = OM = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété de module et Distance

$$\bullet \quad |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bullet \quad |z \times z'| = |z| \times |z'| ; \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

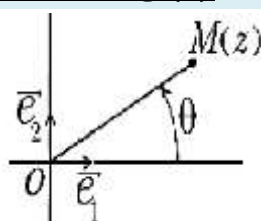
$$\bullet \quad |z^n| = |z|^n ; \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points alors la distance AB définie par : $AB = |z_B - z_A|$

B) Argument d'un complexe z : $\arg(z)$

On appelle **argument** de z une mesure θ , en radian de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$

$$\arg(z) \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$



1) Opérations sur l'argument

$$\bullet \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\bullet \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \quad \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\bullet \quad \arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$$

2) Forme trigonométrique d'un complexe

$$z = a + ib = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$\text{avec } \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

L'écriture : $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

est appelé **forme trigonométrique** du complexe z avec θ un argument de z

3) Détermination du forme trigonométrique

➤ **Cas particulier** $a; b \in \mathbb{R}_+$

$$z = a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi] \text{ et } |z| = a$$

$$z = -a \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi [2\pi] \text{ et } |z| = a$$

$$z = ib \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } |z| = b$$

$$z = -ib \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } |z| = b$$

➤ **Cas générale** ou $z = a + ib$; $a; b \in \mathbb{R}^*$

1) On calcule $|z|$ le module de z

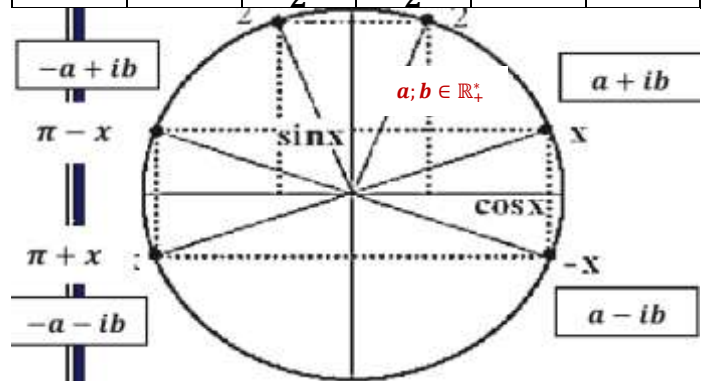
2) Factorisation: $z = a + ib = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right)$

3) On cherche θ un argument de z tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

en utilisant le tableau et le cercle suivant :

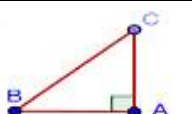
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



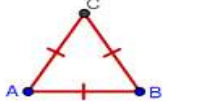
4) Interprétation géométrique d'argument

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
- $(AB) // (DC) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$
- $(AB) \perp (DC) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$
- A, B, C et D sont **cocycliques** (appartenant au même cercle) $\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in \mathbb{R}$

M) ABC un triangle isocèle et rectangle en A

$AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$	
---	---

M) ABC un triangle équilatéral

$AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$	
---	---

M) Ensemble des points M(z) du plan

- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = r$ est un **cercle** de centre A(z_A) et de rayon r ; r > 0
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la droite (D) **le médiatrice** du segment [AB]

C) Notation exponentielle $e^{i\theta}$

On note $e^{i\theta}$ le complexe de module 1 et d'argument θ donc $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

1) Forme exponentielle : $z = r e^{i\theta}$

$$z = |z| (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z| e^{i\theta}$$

2) Opérations sur la forme exponentielle

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$

$$\Rightarrow |e^{i\theta}| = 1 ; \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$$

$$\Rightarrow zz' = r e^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z'} = \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} ; \bar{z} = r e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = e^{-i\theta} ; -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

Formule de MOIVRE $(z)^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formule D'EULER

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

D) Résolution d'équations du second degré

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ tels que a ; b et c sont des réels

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation (E) a deux racines complexes conjuguées

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ tel que : } z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

E) Transformation dans le plan

1) Translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ (z_u)

Soit M'(z') l'image de point M(z) par translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_u

L'écriture complexe du translation $T_{\vec{u}}$

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

2) Homothétie de centre Ω et de rapport k

M'(z') l'image de M(z) par l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

L'écriture complexe de l'homothétie h

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

3) Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit M'(z') l'image du point M(z) par la

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

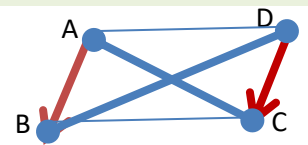
L'écriture complexe de la Rotation R est

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

Méthodes : ABCD est un Parallélogramme

$$M_1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

M₂) Les diagonales ont même milieu



ABCD est un Losange

M₁) Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires

M₂) Parallélogramme et AB = AD

ABCD est un Rectangle

M₁) Parallélogramme qui a un angle droit

M₂) Parallélogramme dont les diagonales sont isométriques

ABCD est un Carré

M₁) Rectangle et losange

$$M_2) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } AB = AD$$

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace

1) Formule analytique du scalaire

Soient $\vec{U}(x; y; z)$ et $\vec{V}(x'; y'; z')$ on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

2) DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a; b; c)$

Une représentation paramétrique de (D)

$$(D): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

3) Plan dans l'espace - Vecteur normale

➤ Tout plan à une équation cartésienne de la forme : $(P) : ax + by + cz + d = 0$

➤ Le Vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$

➤ A un point et $\vec{n}$ un vecteur de l'espace L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan (P) passant par A et de vecteur normale $\vec{n}$

4) DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5) Sphère dans l'espace

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r l'équation cartésienne de (S) est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

➤ L'équation cartésienne de la sphère (S) définit par son diamètre $[AB]$ est donné par : $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Proposition : l'ensemble des points M

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de tel que :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

est un sphère si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

➤ Son centre est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$

➤ Son rayon est $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$

6) Position relative d'un sphère et un plan

Soit (S) une sphère de centre Ω et de rayon R (P) un plan et d la distance entre le centre Ω est le plan $(P) : d = d(\Omega; (P))$

Si $d=R$ alors (S) est tangente à (P) un point H

Si $d < R$ alors (S) coupe (P) Suivant un cercle

(C) de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

➤ Pour déterminer les coordonnées de H on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (P) : ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Position relative d'une sphère et une droite

Soit (S) une sphère de centre Ω et d rayon R

et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}(a; b; c)$

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersections de (S) et (Δ) , on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (S) : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2 \end{cases}$$

Expression analytique du produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge \vec{V} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

➤ $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires ssi $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

➤ A ; B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

➤ Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Distance d'un point Ω à une droite (D)

(D) la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{U}$ et Ω un point de l'espace alors

$$d(\Omega; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$$

Aire d'un triangle ABC

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

A) Dénombrement.

1) Cardinal d'un ensemble fini

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé le cardinal de E, noté par $\text{Card}(E)$

2) Principe fondamentale de dénombrement

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent k choix,

Si le 1^{ère} choix se fait de n_1 façons différentes

Le 2^{ème} choix se fait de n_2 façons différentes,

Le k^{ème} choix se fait de n_k façons différentes,

Alors le nombre de résultats possibles est

donné par le produit : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$

3) Arrangements.

a) Arrangements sans répétition.

Arrangements sans répétition de p parmi n

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

$$\text{On a : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} ; A_n^n = n! ; A_n^1 = n.$$

Cas particulier : Permutations.

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 ; ; 0! = 1$$

b) Arrangements avec répétition.

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi n est noté n^p

4) Combinaisons.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Remarques :

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n ; C_n^n = C_n^0 = 1 \text{ et } C_n^p = C_n^{n-p}$$

5) Type de tirage et importance d'ordre.

Type de tirage	Nombre de tirages	Importance de l'ordre
Avec remise	n^p	Important
Sans remise	A_n^p	Important
Simultané	C_n^p	Sans importance

Nombre de possibilité d'arranger p éléments non distincts (Coefficient d'ordre)

Si on a p_1 éléments de type A et p_2 éléments de type B et p_3 éléments de type C tel que

$$p_1 + p_2 + p_3 = p$$

Alors le nombre de possibilités d'arranger

les p éléments dans p places est $\frac{p!}{p_1! \times p_2! \times p_3!}$

B) Probabilité d'un évènement.

1) Propriétés :

$$P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Hypothèse d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

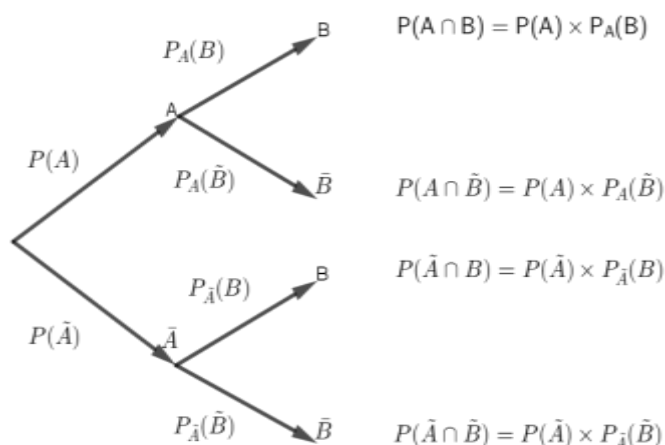
2) Probabilité conditionnelle.

Propriété :

La probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé est le nombre noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Arbre des possibilités :



On a $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$,

Donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Cette relation est appelée loi des probabilités totales

3) Indépendance de deux événements

Définition

* On dit que les événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

* Les événements A et B sont indépendants si et seulement $P_A(B) = P(B)$; avec $P(A) \neq 0$

4) Epreuves répétées.

Soit A un événement de probabilité p.
La probabilité de réaliser exactement k fois
l'événement A est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
où n est le nombre de répétition de l'épreuve
dans les mêmes conditions

5) Variable aléatoire-Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

a) Définitions :

- ✓ Toute fonction définie sur l'univers Ω à
valeur dans $\mathbb{R}$ est appelée variable
aléatoire, notée X ou Y ou Z....
- ✓ Les valeurs prises par la variable
aléatoire X notées $\Omega(X)$.
- ✓ Soit X une variable aléatoire définie sur
un univers Ω associé à une expérience
aléatoire telle que : $X(\Omega) =$
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Déterminer la loi de probabilité de la
variable aléatoire X,

C'est calculer la probabilité de chacun des
événements $\{X = x_i\}$ où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On résume la loi de probabilité de X par le
tableau suivant

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

b) Espérance mathématique-Variance et écart-type.

Soit X une variable aléatoire définie sur un
univers Ω associé

- ✓ **L'espérance mathématique** de la variable
aléatoire X est le nombre réel noté E(X)
définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

- ✓ **La variance** de la variable aléatoire X est
le nombre réel noté V(X) définie par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\text{Avec } E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i \\ = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$$

- ✓ **L'écart-type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

3) Loi binomiale.

Soit une expérience aléatoire formée d'une
répétition n fois de manière indépendante
d'une même épreuve à deux issues sont : A
succès de probabilité p, et $\bar{A}$ échec de
probabilité $q = 1 - p$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre
de fois que le succès se réalise au cours de
cette expérience.

- ✓ On dit que la variable aléatoire X suit la
loi binomiale de paramètres n et p,
notée $X \rightarrow B(n; p)$.
- ✓ La loi de probabilité de la variable
aléatoire X est appelée loi binomiale de
paramètres n et p.

Propriété.

Soit X une variable aléatoire suit une loi
binomiale de paramètres n et p, on a :

- ✓ Les valeurs prise par la variable
aléatoire X sont : $\{0, 1, 2, \dots, n\}$
- ✓ $(\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}) :$
 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- ✓ **L'espérance** de la variable aléatoire X
est : $E(X) = np$.
- ✓ **La variance** de la variable aléatoire X
est :

$$V(X) = npq = np(1-p) = E(X) \cdot (1-p)$$

L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

14	1
1	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 1



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M1-25

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 1

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5 - u_n} \text{ et } u_0 = \frac{5}{2}$$

- 0,5 **1)** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \frac{5}{2}$
- 0,5 **2)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-3)}{5-u_n}$, puis en déduire que la suite (u_n) est convergente
- 0,5 **3)** Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$
- 0,5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique et de raison $\frac{1}{2}$
- 0,5 **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{9+2^n}{3+2^n}$, puis calculer la limite de (u_n)
- 0,5 **4)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$
- 0,5 **a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = (n+1) \ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}^n}\right)$
- 0,5 **b)** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 2 (3 points) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- 0,5 **1) a)** Ecrire z_A la forme trigonométrique et vérifier que $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$
- 0,5 **b)** Montrer $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ et déduire la forme exponentielle de z_B .
- 0,25 **c)** En déduire l'écriture algébrique de z_C
- 0,25 **d)** Montrer que les points $O ; B$ et C sont alignés
- 2)** On note B_1 l'image du point B par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et C_1 l'image du point C par la rotation R
- 0,5 **a)** Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 et en déduire la nature du triangle OBB_1
- 0,25 **b)** En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$
- 0,5 **c)** Montrer que $|z_{C_1} - z_{B_1}| = |z_C - z_B|$ et que $(\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$
- 0,25 **d)** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} - 1 - i| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$

Exercice 3 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

On considère les points $A(1, 0, -1)$, $B(1, 3, 5)$, $C(-7, 2, 2)$ et $H(-1, 4, 3)$

- 0,5 **1) a)** Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC}$ que les points B ; C et H forment un plan
- 0,5 **b)** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est
 $x - 2y - 2z + 15 = 0$
- 0,5 **c)** Montrer que H est le projeté orthogonale de A sur le plan (HBC)
- 2)** On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$
- 0,5 **a)** Montrer que (S) est une sphère et préciser son centre I et son rayon R
- 0,25 **b)** Déterminer la position relative de la sphère (S) et le plan (HBC)
- 3)** Soit $J(0, 0, 1)$
- 0,5 **a)** Montrer que la droite (AJ) est tangente à (S)
- 0,25 **b)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et le plan (HBC)

Exercice 4 (3 points) :

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- ✓ Quatre jetons blancs marqués 0 ;
- ✓ Trois jetons rouges marqués 7 ;
- ✓ Deux jetons blancs marqués 2 ;
- ✓ Un jeton rouge marqué 5

On tire au hasard, simultanément 4 jetons du sac.

On considère les événements suivants :

A : "Les quatre jetons tirés sont identiques (Ont le même numéro et le même couleur)"

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

C : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

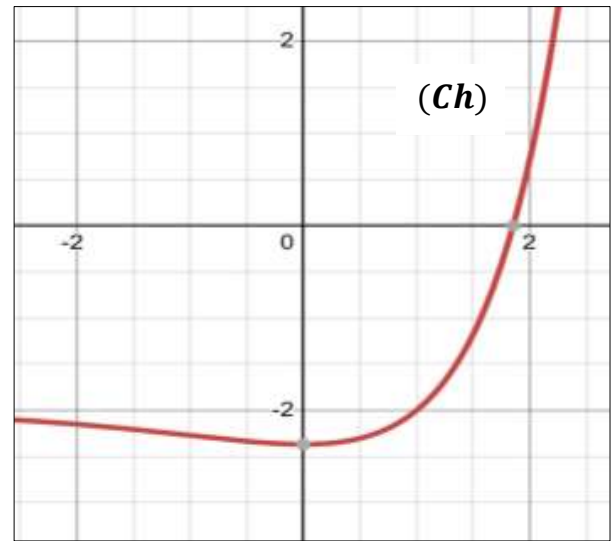
- 1,25 **1) a)** Calculer la probabilité de A ; B et C
- 0,5 **b)** Sachant que les jetons tirés sont blancs, calculer alors la probabilité de B
- 2)** On établit la règle du jeu suivante :
- ✓ Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 dirhams
 - ✓ Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 dirhams
 - ✓ Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 dirhams
 - ✓ Pour tous les autres tirages, il perd 5 dirhams.
- Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.**
- 0,5 **a)** Montrer que $p(X = 75) = \frac{2}{35}$
- 0,5 **b)** Etablir la loi de probabilité de X
- 0,25 **c)** Calculer l'espérance mathématique de X

Problème (08 points) :

A) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x - 1)e^{x-1} - 2$$

Et (Ch) ci-contre son graphe dans un repère orthonormé



1) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , appartient à l'intervalle $[1, 6 ; 2]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2) Déterminer graphiquement le signe de $h(x)$ sur $]1; +\infty[$ en justifiant votre réponse

3) Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x - 1)]$

a) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $g'(x) = \frac{h(x)}{x-1}$.

b) Étudier le sens des variations de g sur $]1; +\infty[$

c) En déduire le signe de g sur $]1; +\infty[$.

B) On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} & \text{si } x > 1. \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Et (Cf) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) Montrer que la fonction f est continue à droite en 1

2) Montrer que f n'est pas dérivable à droite de 1 puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t)}{e^t} = 0$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c) En déduire la branche infinie de la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[1; +\infty[$

5) Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion unique en précisant son abscisse

6) Tracer (Cf) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) a) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

b) Tracer (Cf^{-1}) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8) a) Calculer $\int_2^3 e^{x-1} dx$

b) Vérifier que $\forall x \in [2, 3]: \frac{x^2-2x}{x-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ puis montrer que $\int_2^3 \frac{x^2-2x}{x-1} dx = \frac{3}{2} - \ln(2)$

c) Par une intégrale par partie montrer que :

$$\int_2^3 2(x-1) \ln(x-1) dx = 4\ln(2) - \frac{3}{2}$$

d) En déduire en fonction de α l'air du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

Correction de l'exercice 1 (3points)**Soit (u_n) la suite définie par :**

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5 - u_n} \text{ et } U_0 = \frac{5}{2}$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 < U_n \leq \frac{5}{2}$ **Rappel :** Raisonnement par récurrenceSoit $P(n)$ une proposition tel que $n \geq n_0$ Pour montrer la propriété $P(n)$ est vraiepour tout entier $n \geq n_0$:• Pour $n = n_0$ on vérifie que $P(n)$ est vraie• Pour n un entier fixé tel que $n \geq n_0$ On suppose que La proposition $P(n)$ est vraie et on montre que $p(n+1)$ est vraie• Alors $\forall n \geq n_0 : P(n)$ devient vraie➤ Pour $n=0$ on a $1 < u_0 = \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}$ qui est vrai➤ Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $1 < u_n \leq \frac{5}{2}$ Et montrons que $1 < u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$ On a $1 < u_n \leq \frac{5}{2}$ donc :

$$1 < u_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq -u_n < -1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \leq 5 - u_n < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{5 - u_n} \leq \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{8}{5 - u_n} \leq \frac{16}{5} \Rightarrow 1 < -1 + \frac{8}{5 - u_n} \leq \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow 1 < -1 + \frac{8}{5 - u_n} \leq \frac{5}{2} \text{ car } \frac{11}{5} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$$

D'après le principe, on a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leq \frac{5}{2}$ **2) Montrer que :**

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n}, \text{ puis en}$$

déduire que la suite (u_n) est convergente**Rappel :** Suite croissante ; décroissante➤ $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante➤ $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante➤ $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante

➤ Toute suite croissante et majorée est CV

Toute suite décroissante et minorée est CV

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -1 + \frac{8}{5 - u_n} - u_n \\ &= \frac{-(5 - u_n) + 8 - u_n(5 - u_n)}{5 - u_n} \\ &= \frac{3 + u_n - u_n(5 - u_n)}{5 - u_n} \\ &= \frac{3 + u_n + u_n^2 - 5u_n}{5 - u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{5 - u_n} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n} \end{aligned}$$

$$\text{Car } (u_n - 1)(u_n - 3) = u_n^2 - 4u_n + 3$$

$$1 < u_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow u_n - 1 > 0 \text{ et } \frac{5}{2} \leq 5 - u_n < 4$$

$$\Rightarrow u_n - 1 > 0 \text{ et } 5 - u_n > 0$$

$$u_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow u_n - 3 < -\frac{1}{2} \Rightarrow u_n - 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{5 - u_n} < 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n < 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissanteLa suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente**3) Soit (v_n) la suite définie par :**

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et de raison $\frac{1}{2}$ **Rappel :** Suite géométrique**Définition :** $V_{n+1} = q V_n$ V_n en fonction de n : $V_n = V_p \times q^{n-p}$ Cas particulier : $V_n = V_0 \times q^n$

$$\text{On a : } u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5 - u_n} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 1}{3 - \frac{3 + u_n}{5 - u_n}} \\ &= \frac{\frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{5 - u_n}}{\frac{3(5 - u_n) - 3 - u_n}{5 - u_n}} = \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - 1)}{3 - u_n} = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Et : } v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{3 - \frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{9+2^n}{3+2^n}$, puis calculer la limite de (u_n)

Soit n un entier naturel,

On a (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = 3$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times (q)^{n-0} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Rightarrow v_n(3 - u_n) = u_n - 1 \\ &\Rightarrow 3v_n - u_n v_n - u_n = -1 \\ &\Rightarrow u_n(-v_n - 1) = -3v_n - 1 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{-3v_n - 1}{-v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} \Rightarrow u_n = \frac{\frac{9}{2^n} + 1}{\frac{3}{2^n} + 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{9 + 2^n}{3 + 2^n} \end{aligned}$$

Calculer la limite de (u_n)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9 + 2^n}{3 + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car: } -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$$

a) Montrer que $S_n = (n+1) \ln\left(\frac{3}{\sqrt{2^n}}\right)$

Rappel : Suite arithmétique

Définition : $U_{n+1} - U_n = r$

Terme général : $U_n = U_p + (n-p)r$

Cas particulier : $U_n = U_0 + nr$

$$\triangleright S_n = U_p + \dots + U_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2}$$

$$\triangleright \text{Cas particulier : } 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1ère méthode

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

On a (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{Donc } w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} v_n\right)$$

$$\text{Donc } w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(v_n)$$

$$\text{Donc } \ln(v_{n+1}) = -\ln(2) + \ln(v_n)$$

Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\ln(2)$ et $w_0 = \ln(v_0) = \ln(3)$

$$S_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$$

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = \frac{(n+1)(w_0 + w_n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(\ln(3) + \ln(3) - n\ln(2))}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(2\ln(3) - \ln(2^n))$$

$$= (n+1) \left(\frac{\ln(9) - \ln(2^n)}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{9}{2^n}\right) \right) = (n+1) \ln\left(\frac{3}{\sqrt{2^n}}\right)$$

2ème méthode

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2^n}$$

$$S_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2^0}\right) + \ln\left(\frac{3}{2^1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{3}{2^n}\right)$$

$$= \ln(3) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2^2) + \dots + \ln(3) - \ln(2^n)$$

$$= \ln(3) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(3) - 2\ln(2) + \dots + \ln(3) - n\ln(2)$$

$$= \ln(3) + \ln(3) + \ln(3) + \dots + \ln(3) - \ln(2) - 2\ln(2) - \dots - n\ln(2)$$

$$= (n+1)\ln(3) - \ln(2)(1 + 2 + \dots - n)$$

$$= (n+1)\ln(3) - \frac{(n+1)n\ln(2)}{2}$$

$$= (n+1)\ln(3) - \frac{(n+1)\ln(2^n)}{2}$$

$$= (n+1) \left(\frac{2\ln(3) - \ln(2^n)}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{\ln(9) - \ln(2^n)}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{9}{2^n}\right) \right) = (n+1) \ln\left(\frac{3}{\sqrt{2^n}}\right)$$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln \left(\frac{3}{\sqrt{2^n}} \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \left(\ln(3) - \frac{1}{2} n \ln(2) \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1) \left(\frac{\ln(3)}{n} - \frac{1}{2} \ln(2) \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\ln(3)}{n} - \frac{1}{2} \ln(2) \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{\ln(3)}{n} - \frac{1}{2} \ln(2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3)}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Correction de l'exercice 2 (3 points)

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1) a) Ecrire z_A la forme trigonométrique

On a $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc $z_A = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
 $= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

✓ Vérifier que $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} \frac{z_B}{z_A} &= \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i + i - 1}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

b) Montrer $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ et déduire la forme exponentielle de z_B .

Rappel :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

- $|e^{i\theta}| = 1$; $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$
- $zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$; $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Formule de MOIVRE

➤ $(z)^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{z_B}{z_A} &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}i = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= (1 + \sqrt{3}) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

On a $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}z_A$
 $= (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
 $= \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$
 $= \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) En déduire l'écriture algébrique de z_C

On a : $z_B = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

Donc : $z_B = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})z_C$

Donc : $z_C = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}z_B$

Donc : $z_C = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$

Donc : $z_C = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}i$

d) Montrer que O ; B et C sont alignés

$$\text{On a } z_B = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } z_B = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})z_C$$

$$\text{Donc } \frac{z_B}{z_C} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$$

$$\text{Donc } \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R}$$

Donc les points O ; B et C sont alignés

2) On note B_1 l'image du point B par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et C_1

l'image du point C par la rotation R

a) Déterminer b_1 l'afixe du point B_1 et en déduire la nature du triangle OBB_1

Rappel :

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$\text{On a : } R(B) = B_1$$

Donc :

$$\begin{aligned} b_1 - z_0 &= z_{B_1} = e^{-\frac{\pi}{6}i}(z_B - z_0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{3} + i) \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)i + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 4}{2} + \frac{-2}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } b_1 = \sqrt{3} + 2 - i$$

$$\text{On a : } R(B) = B_1$$

$$\text{Donc } \begin{cases} OB = OB_1 \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB_1}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle OBB_1 est isocèle en O

b) En déduire que le point B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$

$$\text{On a : } z_{B_1} = \sqrt{3} + 2 - i = \overline{z_B}$$

Donc B_1 est le symétrique du point B par rapport à $(O, \vec{u})$.

c) Montrer $|z_c - z_B| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$ et que

$$(\overrightarrow{B_1 C_1}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

Rappel 1 :

Soit la rotation de centre O et d'angle θ

La rotation conserve les distances :

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $A'B' = AB$

Propriété fondamentale de rotation

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$

Rappel 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\checkmark (\vec{u}, \vec{u}) = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark (\vec{u}, -\vec{u}) = \pi + k(2\pi)$$

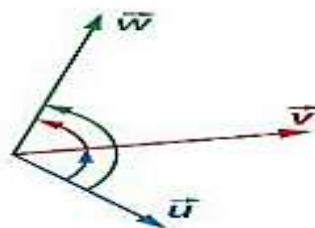


$$\checkmark (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\checkmark (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\checkmark (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$\checkmark (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



Montrons que $|z_c - z_B| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$ et que

$$\overrightarrow{(B_1 C_1, CB)} \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

On a $R(B) = B_1$ et $R(C) = C_1$

Donc $BC = B_1 C_1$

Donc $|z_c - z_B| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$

Car la rotation conserve les distances

On a $R(B) = B_1$ et $R(C) = C_1$

D'après la propriété fondamentale de la

rotation on a : $\overrightarrow{(BC, B_1 C_1)} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$

$$\text{Donc } \overrightarrow{(B_1 C_1, BC)} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{(B_1 C_1, CB)} \equiv \pi + \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{(B_1 C_1, CB)} \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{(B_1 C_1, CB)} \equiv \frac{7\pi}{6} - 2\pi [2\pi]$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{(B_1 C_1, CB)} \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$

tels que $|\bar{z} - 1 - i| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$

Rappel : Ensemble des points $M(z)$

➤ l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$|z - z_A| = r$ est un cercle de centre $A(z_A)$

et de rayon r ; $r > 0$

$$|\bar{z} - 1 - i| = |z_{C_1} - z_{B_1}| \Leftrightarrow |\bar{z} - 1 - i| = B_1 C_1$$

$$\Leftrightarrow |\bar{z} - 1 + i| = B_1 C_1$$

$$\Leftrightarrow |z - (1 - i)| = B_1 C_1$$

$$\Leftrightarrow |z - z_A| = B_1 C_1$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$|\bar{z} - 1 - i| = |z_{C_1} - z_{B_1}|$ est le cercle de centre

A et de rayon $R = B_1 C_1$

Correction de l'exercice 3 (3points)

On considère les points

$A(1, 0, -1), B(1, 3, 5), C(-7, 2, 2)$ et

$H(-1, 4, 3)$

1) a) Déterminer les coordonnées du

vecteur $\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC}$ que les points B ; C et H forment un plan

Rappel : Expression analytique du produit

$$\text{vectoriel : } \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 5\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k}$$

On a $\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs

$\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{HC}$ ne sont pas colinéaires donc les

points H et B et C ne sont pas alignés

D'où les points H et B et C forment un plan

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est

$$x - 2y - 2z + 15 = 0$$

Rappel : Le vecteur $\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC}$ est un vecteur normal au plan (HBC)

Soit $M(x; y; z) \in (HBC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normale

au plan (HBC)

$$\text{Donc } (HBC): 5 \times x - 10 \times y - 10z + d = 0$$

$$\text{Donc } (HBC): 5x - 10y - 10z + d = 0$$

Et on a $B(1, 3, 5) \in (HBC)$ donc on remplace

$$B \text{ dans } 5 - 30 - 50 + d = 0$$

$$\text{Donc } -75 + d = 0 \text{ donc } d = 75$$

$$\text{D'où } (HBC): 5x - 10y - 10z + 75 = 0$$

$$\text{Donc } (HBC): x - 2y - 2z + 15 = 0$$

c) Montrer que H est le projeté orthogonale de A sur le plan (HBC)

$A(1, 0, -1), B(1, 3, 5), C(-7, 2, 2)$ et $H(-1, 4, 3)$

On a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 4 - 8 = 0$$

Donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BH}$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 + 8 = -4 = 0$$

Donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HC}$

D'où $\overrightarrow{AH} \perp (HBC)$

Et on a $H \in (HBC)$

Donc H est le projeté orthogonale de A sur le plan (HBC)

2) On considère l'ensemble (S) des points

$M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$$

a) Montrer que (S) est une sphère et préciser son centre I et son rayon R

1ère méthode

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 2^2 + z^2 - 2z + 1^2 = 2^2 + 1^2 - 1$$

$$\text{Donc (S): } (x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2^2$$

Donc (S) est une sphère de centre

$I(0; 2; 1)$ et de rayon $R = 2$

2ème méthode

On pose $a = 0; b = -4; c = -2$ et $d = 1$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = (-4)^2 + (-2)^2 - 4 \times 1 = 16 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre

$$I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$$

Donc $I(0; 2; 1)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

b) Déterminer la position relative de la sphère (S) et le plan (HBC)

Rappel : DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient (P) : $ax + by + cz + d = 0$ un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point

La distance de point A au plan(P) est :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a (HBC): $x - 2y - 2z + 15 = 0$ et

$I(0; 2; 1)$

$$d(I; (HBC)) = \frac{|-4 - 2 + 15|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

Donc $d(I; (HBC)) = 3 > R = 2$

Donc le plan (HBC) et la sphère (S) ne sont pas sécante

3) Soit $J(0, 0, 1)$

a) Montrer que la droite (AJ) est tangente à (S)

Rappel :

Distance d'un point Ω à une droite (D)

(Δ) la droite qui passe par D et de vecteur directeur $\vec{u}$ et Ω un point de l'espace Alors

$$d(\Omega; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega D} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\text{On a } d(I; (AJ)) = \frac{\|\vec{IJ} \wedge \vec{AJ}\|}{\|\vec{AJ}\|}$$

Et On a $A(1, 0, -1)$ et $I(0; 2; 1); J(0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} \vec{IJ} \wedge \vec{AJ} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|\vec{IJ} \wedge \vec{AJ}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Et on a : } \|\vec{AJ}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Donc } d(I; (AJ)) = \frac{\|\vec{IJ} \wedge \vec{AJ}\|}{\|\vec{AJ}\|} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

Donc $d(I; (AJ)) = R$

Donc la droite (AJ) est tangente à (S)

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et la sphère (S)

1^{ère} méthode :

On a $J \in (AJ)$ et on a $J \in (S)$

Donc la droite (AJ) est tangente à (S) en J

2^{ème} méthode :

Tu peux résoudre le système :

$$\begin{cases} (AJ) : \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} & (t \in \mathbb{R}) \\ (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- ✓ Quatre jetons blancs marqués 0 ;
- ✓ Trois jetons rouges marqués 7 ;
- ✓ Deux jetons blancs marqués 2 ;
- ✓ Un jeton rouge marqué 5

On tire simultanément 4 jetons du sac.

a) Calculer la probabilité de A ; B et C

Il y a $C_{10}^4 = 210$ tirages distincts possibles.

Donc $\text{car}(\Omega) = 210$

A : "Les quatre jetons tirés sont identiques "

A n'est réalisé que lorsque les 4 jetons portent le numéro 0 , il n'y a qu'une possibilité

$$\text{Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{car}(\Omega)} = \frac{1}{210}$$

B : "Avec les jetons tirés on peut former le nombre 2000."

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^3}{210} = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}$$

C : "Au moins un jeton porte un numéro différent des autres."

Au moins un jeton porte un numéro différent des autres.

Le contraire est "tous les jetons ont le même numéro", qui n'est réalisé que pour le numéro 0.

$$p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

b) Sachant que les jetons tirés sont blancs, calculer alors la probabilité de B

Soit D : les jetons tirés sont blancs

Il y a 6 jetons blancs.

$$\text{Donc } p(D) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

On a : $p(B \cap D) = p(B)$ car on ne peut former 2000 qu'avec des jetons blancs.

$$\text{Donc } p_D(B) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B)}{p(D)} = \frac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}} = \frac{8}{15}$$

3) On établit la règle du jeu suivante :

- ✓ Si le joueur peut former le nombre 7000 il gagne 75 dirhams
- ✓ Si le joueur peut former le nombre 2000 il gagne 25 dirhams
- ✓ Si le joueur peut former le nombre 0000 il perd 15 dirhams
- ✓ Pour tous les autres tirages, il perd 5 dirhams.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Montrer que $p(X = 75) = \frac{2}{35}$

$$\text{Pour 7000 : } p(X = 75) = \frac{C_3^1 \times C_4^3}{210} = \frac{12}{210} = \frac{2}{35}$$

b) Etablir la loi de probabilité de X

$$\text{Pour 2000 on a : } p(X = 25) = p(B) = \frac{4}{105}$$

$$\text{Pour 0000 : } p(X = -15) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$$

Pour les autres on a :

$$\begin{aligned} p(X = -5) &= 1 - \left(\frac{2}{35} + \frac{4}{105} + \frac{1}{210} \right) \\ &= 1 - \frac{12 + 8 + 1}{210} = \frac{189}{210} \end{aligned}$$

Donc la loi de X est :

-15	-5	25	75
$\frac{1}{210}$	$\frac{189}{210}$	$\frac{4}{105} = \frac{8}{210}$	$\frac{2}{35} = \frac{12}{210}$

c) Calculer l'espérance mathématique de X

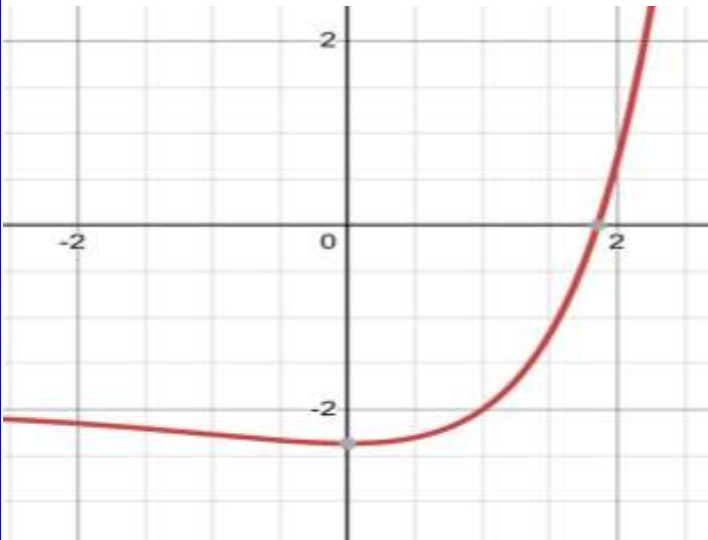
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i p_i \\ &= \frac{-15 - 945 + 200 + 900}{210} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Correction du problème (08 points)

A) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x-1)e^{x-1} - 2$$

Et (Ch) ci-contre son graphe dans un repère orthonormé



1) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , appartient à l'intervalle $[1, 6; 2]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On a la fonction g est continue et strictement croissante sur $[1, 6; 2]$.

Et on a $h(1, 6) = -0,906$ et $h(2) = 0,718$

Or $h(1, 6) \times g(2) < 0$.

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1, 6; 2]$ et $\alpha = 1,84$

2) Déterminer graphiquement le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$

On a la courbe (Ch) est en dessous de la droite (Ox) sur l'intervalle $]1; \alpha[$,

Donc $\forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0$

Et on a la courbe (Ch) est en dessus de la droite (Ox) sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$,

Donc $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Donc

$\forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

x	1	α	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

3) Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :
 $g(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)]$

a) Montrer que pour tout réel $x > 1, g'(x) = \frac{h(x)}{x-1}$

$$\text{Rappel : } (e^u)' = u' e^u ; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Soit $x > 1$,

$$g'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{(x-1)e^{x-1} - 2}{x-1} = \frac{h(x)}{x-1}$$

b) Étudier le sens des variations de g sur $]1; +\infty[$

On a $\forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $]1; \alpha[$,

Et on a $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$

c) En déduire le signe de g sur $]1; +\infty[$.

x	1	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Donc $g(\alpha)$ est une valeur minimale de g sur $]1; +\infty[$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) \geq g(\alpha)$

$$\text{Et } g(\alpha) = e^{\alpha-1} - 2[1 + \ln(\alpha-1)] = 0,665 > 0$$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) > 0$

B) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} & \text{si } x > 1. \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1}$$

On pose $t = x-1$ donc ; $x = t+1$

On a si $x \rightarrow 1^+$ alors $t \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2t\ln(t) + e^t = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} t\ln(t) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^t = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$$

Donc la fonction f est continue à droite en 1

2) Montrer que f n'est pas dérivable à droite de 1 puis interpréter le résultat géométriquement

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 2(x-1)\ln(x-1) - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1 - 2(x-1)\ln(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - 2\ln(x-1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} - 2\ln(t) = +\infty\end{aligned}$$

Car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

Par conséquent (C_f) admet une demi-tangente vertical en $A(1,1)$ dirigée vers le haut

3)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t)}{e^t} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1}\end{aligned}$$

On pose $t = x - 1$ donc $x = t + 1$

On a si $x \mapsto +\infty$ alors $t \mapsto +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t \ln(t) + e^t\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 \left(\frac{\ln(t)}{t} - \frac{e^t}{t^2} \right) = +\infty$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Montrons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t)}{e^t} = 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \ln(t)}{e^t t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 \ln(t)}{\frac{e^t}{t^2} t} = 0$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

b) Montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1}}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 2t \ln(t)}{t + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t \left(1 - 2 \frac{t \ln(t)}{e^t} \right)}{t \left(1 + \frac{1}{t} \right)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} \times \frac{\left(1 - 2 \frac{t \ln(t)}{e^t} \right)}{1 + \frac{1}{t}} = +\infty$$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t)}{e^t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$

c) En déduire la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4)a) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = g(x)$

La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ car c'est une somme de deux fonctions dérivable sur $]1; +\infty[$.

Rappel : $(uv)' = u'v + uv'$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Soit $x \in]1; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= [e^{x-1} - 2(x-1)\ln(x-1)]' \\ &= e^{x-1} - 2 \left[\ln(x-1) + (x-1) \times \frac{(x-1)'}{x-1} \right] \\ &= e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)] \\ &= g(x)\end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]1; +\infty[$

On a pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = g(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations de f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\parallel$ 1	$\nearrow +\infty$

5) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique en précisant son abscisse

On a $f'(x) = g(x)$

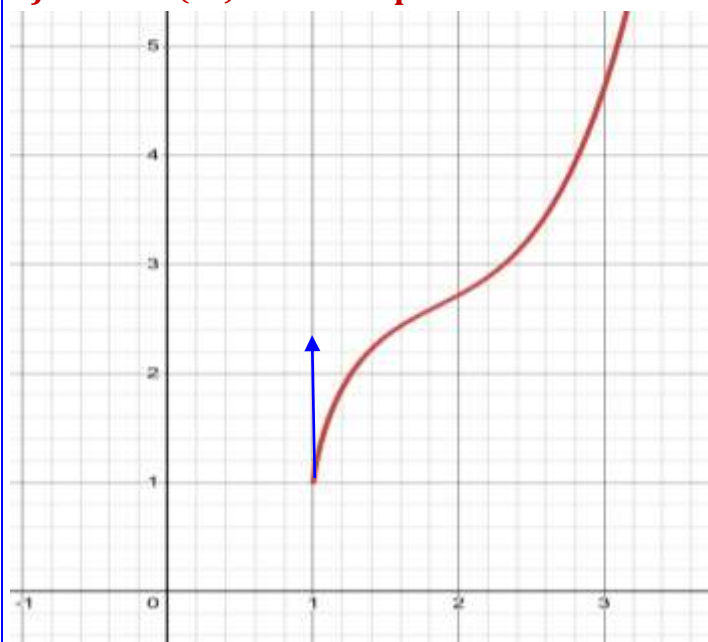
Donc $f''(x) = g'(x)$

On a d'après la partie B) le tableau de signe suivant :

x	1	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse α

6) Tracer (Cf) dans le repère orthonormé

7)a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

On a la fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$

Donc la fonction f est continue sur $]1; +\infty[$

Et la fonction f est continue à droite de 1

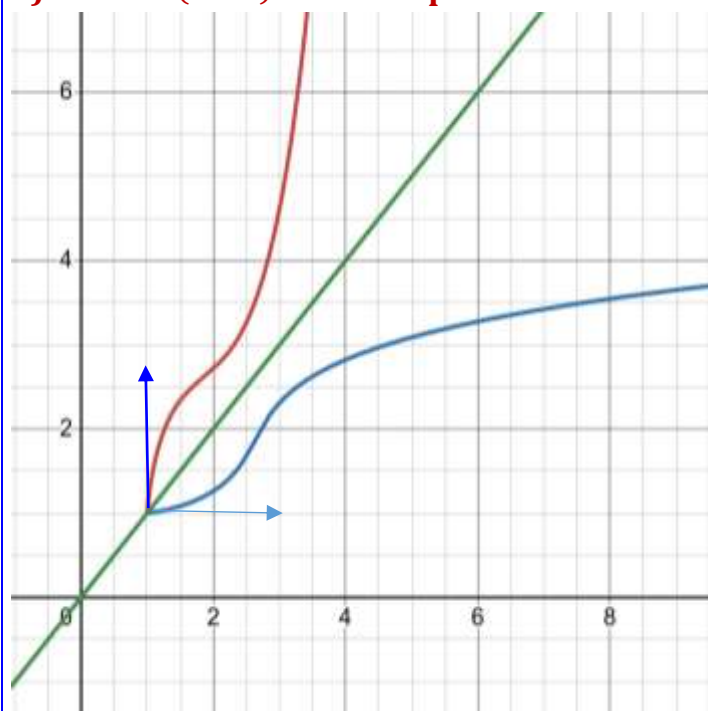
Donc la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$

Et on a la fonction f est strictement

croissante sur $[1; +\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque

f^{-1} , définie sur $J = f([1; +\infty[) = [1; +\infty[$

b) Tracer (Cf⁻¹) dans le repère orthonormé8) a) Calculer $\int_2^3 e^{x-1} dx$

$$\int_2^3 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_2^3 = e^2 - e$$

b) Vérifier que $\frac{x^2-2x}{x-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ puis

montrer que $\int_2^3 \frac{x^2-2x}{x-1} dx = \frac{3}{2} - \ln(2)$

$$\int_2^3 \frac{x^2-2x}{x-1} dx = \int_2^3 \left(x - 1 - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x - \ln(x-1) \right]_2^3$$

$$= \frac{9}{2} - 3 - \ln(2) - \frac{2^2}{2} + 2 + \ln(1) = \frac{3}{2} - \ln(2)$$

a) Par une intégrale par partie montrer

que $I = \int_2^3 2(x-1) \ln(x-1) dx = 4\ln(2) - \frac{3}{2}$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 2x-2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x^2 - 2x \end{cases}$

$$I = [(x^2 - 2x) \ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx$$

$$= [(x^2 - 2x) \ln(x-1)]_2^3 - \left(\frac{3}{2} - \ln(2) \right)$$

$$= (9 - 6) \ln(2) - 0 - \left(\frac{3}{2} - \ln(2) \right)$$

$$= (9 - 6) \ln(2) - 0 - \left(\frac{3}{2} - \ln(2) \right)$$

$$= 3\ln(2) - \frac{3}{2} + \ln(2) = 4\ln(2) - \frac{3}{2}$$

c) En déduire en fonction de α l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 2$

On a la courbe (C) est en dessus de la droite de (Ox) sur l'intervalle $[2, 3]$

Donc $\forall x \in [2, 3]: |f(x)| = f(x)$

$$A = \int_2^3 |f(x)| dx \times u.a$$

$$= \int_2^3 e^{x-1} dx - \int_2^3 2(x-1) \ln(x-1) dx \times u.a$$

$$= \left(e^2 - e - 4\ln(2) + \frac{3}{2} \right) \text{cm}^2$$

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 2

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient**
- ✓ **L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique- Suite numérique	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(2, 0, -3)$; $B(1, -2, -2)$ et $C(1, 1, 1)$

On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z + 7 = 0.$$

1) Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{6}$.

2) Soit (Δ) la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}$

c) Montrer que la droite (Δ) est tangente à (S) en $B(1, -2, -2)$.

3) Soit P le plan d'équation $(P): x - y - z - 8 = 0$

a) Montrer que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon r

b) Déterminer les coordonnées de H le centre du cercle (C)

4) a) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on a

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = -9x + 3y - 3z + 9, \text{ puis déduire une équation cartésienne du plan (ABC)}$$

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que $d(M; (ABC)) = \sqrt{11}$

Exercice 2 (3 points) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A; B et C d'affixes respectives :

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i ; b = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

1) a) Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique et montrer que $b^{25} = b$

b) Montrer que : $2b^3 = a$ et que : $b^2 \bar{c} = 1$

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et B' l'image du point B par la rotation R

a) Montrer que le point B' est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$

b) Montrer l'affixe du point A' l'image du point A par R est $a' = 2b$

c) Montrer $|a - b| = |a' - b'|$ et que $(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$

3) Soit d l'affixe du point D l'image de C par la translation T de vecteur $-\vec{u}$

a) Montrer que : $d = -1 + b^2$

b) Montrer que $\frac{d}{b^{25}} = b - \bar{b}$, puis déduire la nature du triangle OBD

Exercice 3 (3 points) :

Une urne U_1 contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 et une urne U_2 contient quatre boules portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher

On choisit au hasard l'un des urnes et on tire simultanément deux boules de cette urne

On considère les événements suivants :

A: " Les boules tirées portant des nombres impairs "

B: " Les boules tirées portant des nombres pairs "

C: " Une boule porte un nombre pair et l'autre porte un nombre impaire "

D: " La somme des numéros portant par les boules est égale 4 "

1 1) a) Montrer que $P(A) = \frac{23}{60}$ et que $P(B) = \frac{1}{12}$ et calculer $P(C)$

0,5 b) Montrer que les événements B et D ne sont pas indépendantes

2) On vide le contenu des deux urnes dans une seule urne U_3 puis on tire **simultanément** deux boules de l'urne U_3

Soit X la variable aléatoire associée au produit des numéros portés par les deux boules tirées.

0,25 a) Justifier que les valeurs prises par la variable X sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 6

1,25 b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

Problème (11 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité : 1cm)

0,5 1) Montrer que f est continue en 0

0,75 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 c) Etudier la position relative de la droite $(\Delta): y = x$ et (C_f) sur $]0, +\infty[$

الصفحة 4	M2-25	الامتحان التجريبي للباكالوريا - 2025 - النموذج 02 - مادة الرياضيات - مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية	ذ. فيصل
0,5	4)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ puis étudier la convexité de (Cf) sur $]0, +\infty[$		
0,5	b) En déduire le sens de variations de f' puis le signe de f' sur $]0 ; +\infty[$		
0,5	c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$		
	5)a) Montrer que pour tous $x \in]-\infty; 0[$ on a :		
0,5	$f'(x) = \frac{e^x(1 - 2e^x)}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}}$		
0,5	b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse		
	6) Tracer (Cf) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$		
1	7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-\ln 2; 0]$		
0,25	a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J à déterminer		
0,25	b) Tracer (Cg^{-1}) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$		
	c) Montrer que pour tous $x \in J$, on a :		
0,5	$g^{-1}(x) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2} \right)$		
	8) Soit $a \in]0, \frac{1}{e-1}[$ on désigne par S_a l'aire de la surface plan limitée par la droite (Δ) , la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = \frac{1}{e-1}$		
0,5	a) Montrer $\int_a^{\frac{1}{e-1}} \frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{e-1} - \ln \left(\frac{e}{e-1} \right) - a + \ln(a+1)$		
	b) Par une intégration par partie montrer que :		
0,75	$\int_a^{\frac{1}{e-1}} x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln(e-1) + \frac{2-e}{e-1} + a^2 - a - a.f(a) + \ln(1+a) \right]$		
0,5	c) Calculer $\lim_{a \rightarrow 0^+} S_a$		
	C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$		
0,5	1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$		
0,25	2) Montrer que la suite (U_n) est croissante		
0,75	3) Déduire que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)		

Correction de l'exercice 1 (3points)

Soient les points $A(2, 0, -3)$; $B(1, -2, -2)$ et $C(1, 1, 1)$

On considère l'ensemble (S) des points

$M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z + 7 = 0.$$

1) Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{6}$.

Rappel :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que :

(S) : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est un sphère si $D = a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

➤ Son centre est le point $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$

Son rayon est $r = \frac{\sqrt{D}}{2}$

1ère méthode

On pose $a = -4$; $b = 0$; $c = 6$ et $d = 7$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = (-4)^2 + 6^2 + 0^2 - 4 \times 7 = 24 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre

$$A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$$

Donc $A(2; 0; -3)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$$

2ème méthode

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + z^2 + 6z + 3^2 = 2^2 + 3^2 - 7$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z + 3)^2 = 6$$

Donc (S) est une sphère de centre

$$A(2; 0; -3) \text{ et de rayon } R = \sqrt{6}$$

2) Soit (Δ) la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

On a la droite (Δ) passant par le point

$B(1, -2, -2)$ et de vecteur directeur

$\vec{u}(1, -1, -1)$ donc :

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = -2 - 1 \times t \\ z = -2 - 1 \times t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Donc } (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = -2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ est une}$$

représentation paramétrique de (Δ)

b) Déterminer les coordonnées du vecteur

$$\vec{AB} \wedge \vec{u}$$

Rappel : Expression analytique du produit

$$\text{vectoriel : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

On a $A(2, 0, -3)$ et $B(1, -2, -2)$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$$

c) Montrer que la droite (Δ) est tangente à (S) en $B(1, -2, -2)$.

Rappel : Distance d'un point à une droite (D)

(D) la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et Ω un point de l'espace

$$\text{Alors } d(\Omega; (D)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\text{On a } \vec{AB} \wedge \vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$$

$$\text{Donc } d(A; (\Delta)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} = R$$

Donc la droite (Δ) est tangente à (S)

On a $B \in (\Delta)$

Et on a $B(1, -2, -2) \in (S)$ car :

$$1 + 4 + 4 - 4 - 12 + 7 = 0$$

Donc la droite (Δ) est tangente à (S) en B

3) Soit P le plan d'équation

$$(P): x - y - z - 8 = 0$$

a) Montrer que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon r

Rappel: DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN
Soient $(P): ax + by + cz + d = 0$ un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point

La distance de point A au plan (P) est :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a $A(2, 0, -3)$ le centre de (S)

$$\begin{aligned} d(A; (P)) &= \frac{|2 - 0 + 3 - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < R = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Donc $d(A; (P)) < R$

Donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{6}^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Déterminer les coordonnées de H le centre du cercle (C)

Rappel: Pour déterminer les coordonnées de H le point de contact on résout le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (P): ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

$(x; y; z)$ les coordonnées de H vérifie le système

$$\begin{cases} (IH): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -3 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (P): x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } 2 + t + t + 3 + t - 8 = 0$$

$$\text{Donc } 3t - 3 = 0 \text{ donc } t = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{On remplace } t = 1 \text{ donc } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -4 \end{cases} ;$$

$$\text{Donc } H(3, -1, -4)$$

4) a) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on a

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = -9x + 3y - 3z + 9$$

On a $A(2, 0, -3)$; $B(1, -2, -2)$ et $C(1, 1, 1)$

Donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -9\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} &= \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z+3 \end{pmatrix} \\ &= -9(x-2) + 3y - 3(z+3) \\ &= -9x + 3y - 3z + 9 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = -9x + 3y - 3z + 9$$

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$\text{Donc } (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

Donc une équation cartésienne de (ABC)

$$\text{est: } -9x + 3y - 3z + 9 = 0$$

$$\text{Donc } 3x - y + z - 3 = 0$$

c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que $d(M; (ABC)) = \sqrt{11}$

$$\begin{aligned} d(M; (ABC)) &= \sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{|3x - y + z - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{11} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x - y + z - 3|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |3x - y + z - 3| = 11$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + z - 3 = -11 \text{ ou } 3x - y + z - 3 = 11$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + z + 8 = 0 \text{ ou } 3x - y + z - 14 = 0$$

Donc l'ensemble des points M de l'espace tel que $d(M; (ABC)) = \sqrt{11}$ et la réunion de deux plans (P_1) et (P_2) d'équations

$$3x - y + z + 8 = 0 \text{ et } 3x - y + z - 14 = 0$$

Correction de l'exercice 2 (3points)

On considère les points A ; B et C d'affixes respectives : $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$$b = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

1)a) Écrire le complexe a sous forme trigonométrique et montrer que $b^{25} = b$

$$\text{On a } |a| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

Rappel : Formule de MOIVRE

$$(z)^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\begin{aligned} b^{25} &= \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^{25} = e^{i\frac{25\pi}{12}} = e^{i\frac{24\pi + \pi}{12}} = e^{i(2\pi + \frac{\pi}{12})} \\ &= e^{i\frac{\pi}{12}} = b \end{aligned}$$

b) Montrer que : $2b^3 = a$ et que : $b^2 \bar{c} = 1$

$$\text{On a } 2b^3 = 2 \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = a$$

$$\text{Donc } 2b^3 = a$$

$$\text{On a } c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } b^2 \bar{c} &= \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^2 \overline{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6})} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } b^2 \bar{c} = 1$$

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

et B' l'image du point B par la rotation R

a) Montrer que le point B' est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$

Rappel :

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \end{aligned}$$

$$R(B) = B' \Leftrightarrow b' - o = e^{-\frac{\pi}{6}} i (b - o)$$

$$\Leftrightarrow b' = e^{-\frac{\pi}{6}} b$$

$$\Leftrightarrow b' = \bar{c} b$$

$$\text{Et on a } b^2 \bar{c} = 1 \text{ donc } \bar{c} = \frac{1}{b^2}$$

$$\text{Donc : } b' = \frac{1}{b^2} \times b = \frac{1}{b} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = e^{-i\frac{\pi}{12}} = \bar{b}$$

$$\text{On a : } b' = \bar{b}$$

Donc B' est le symétrique du point B par rapport à $(O, \vec{u})$.

b) Montrer l'affixe du point A' l'image du point A par R est $a' = 2b$

$$R(A) = A' \Leftrightarrow a' - o = e^{-\frac{\pi}{6}} i (a - o)$$

$$\Leftrightarrow a' = e^{-\frac{\pi}{6}} a \Leftrightarrow a' = \bar{c} a$$

$$\text{Donc } a' = \bar{c} a$$

$$\text{On a } 2b^3 = a \text{ et } b^2 \bar{c} = 1$$

$$\text{Donc } a' = 2\bar{c}b^3 = 2 \times b^2 \bar{c} \times b = 2b$$

$$\text{Donc } a' = 2b$$

c) Montrer $|a - b| = |a' - b'|$ et que

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

Rappel 1 :

Soit la rotation de centre O et d'angle θ

La rotation conserve les distances :

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $A'B' = AB$

Propriété fondamentale de rotation

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

$$\text{Alors } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$$

Rappel 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\checkmark (\vec{u}, \vec{u}) = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark (\vec{u}, -\vec{u}) = \pi + k(2\pi)$$

$$\checkmark (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\checkmark (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\checkmark (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

✓ Relation de CHELS

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

On a $R(B) = B'$ et $R(A) = A'$

Donc $AB = A'B'$

Donc $|a - b| = |a' - b'|$

Car la rotation conserve les distances

Montrons que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$

On a $R(B) = B'$ et $R(A) = A'$

D'après la propriété fondamentale de la

rotation on a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi + \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{7\pi}{6} - 2\pi [2\pi]$

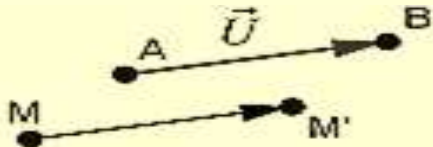
Donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$

3) a) Soit d l'axe du point D l'image du point C par la translation T de vecteur $-\vec{u}$ montrer que : $d = -1 + b^2$

Rappel : Translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$

Soit $M'(z')$ l'image de point $M(z)$ par

translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$



l'écriture complexe du translation $T_{\vec{u}}$

$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

$T_{-\vec{u}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = -\vec{u}$

$$\Leftrightarrow d - c = -1$$

$$\Leftrightarrow d = -1 + c$$

$$\Leftrightarrow d = -1 + c$$

On a :

$$b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= c$$

Donc $d = -1 + b^2$

b) Montrer que : $\frac{d}{b^{25}} = b - \bar{b}$, puis déduire la nature du triangle OBD

$$\frac{d}{b^{25}} = \frac{-1 + b^2}{b}$$

$$= \frac{-1}{b} + \frac{b^2}{b}$$

$$= \frac{-1}{b} + b$$

$$= b - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

$$= b - e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$= b - \bar{b}$$

On a $\frac{d}{b} = b - \bar{b}$

$$= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} - \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2i \sin \frac{\pi}{12}$$

Rappel : Cas particulier $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$z = a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$ et $|z| = a$

$z = -a \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi [2\pi]$ et $|z| = a$

$z = ib \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $|z| = b$

$z = -ib \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $|z| = b$

En déduire la nature du triangle OBD

On a $\frac{d}{b} = 2i \sin \frac{\pi}{12}$

Donc $\arg\left(\frac{d-o}{b-o}\right) \equiv \arg\left(2i \sin \frac{\pi}{12}\right) [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car $\sin \frac{\pi}{12} > 0$

Et on a $\left|\frac{d}{b}\right| = \left|2i \sin \frac{\pi}{12}\right|$

Donc $\left|\frac{d}{b}\right| = \left|2 \sin \frac{\pi}{12}\right|$

Donc $OB \neq OD$

Donc le triangle OBD est rectangle en O

Correction de l'exercice 3 (3points)

Une urne U_1 contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 et une urne U_2 contient quatre boules portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2. On choisit au hasard l'un des urnes et on tire simultanément deux boules de cette urne

1) Montrer que $P(A) = \frac{23}{60}$

A: " Les boules tirées portant des nombres impairs "

On a la probabilité de choisir au hasard l'un des urnes est : $\frac{1}{2}$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^2}{C_5^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 3}{5 \times 4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4 \times 3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{12} = \frac{23}{60}$$

2) Montrer que $P(B) = \frac{1}{12}$

B: " Les boules tirées portant des nombres pairs "

$$P(B) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$$

3) Calculer $P(C)$

C: " Une boule porte un nombre pair et l'autre porte un nombre impair "

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_5^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_4^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5 \times 4} + \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{15}$$

4) Montrer que les événements B et D ne sont pas indépendantes

D: " La somme des numéros portant les boules est 4 " (1 ; 3) ou (2 ; 2)

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_5^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5 \times 4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4 \times 3} = \frac{3}{20} + \frac{1}{12} = \frac{7}{30}$$

$B \cap D$: " Les boules tirées portant des nombres pairs et la somme des numéros est 4

$$P(B \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$$

On a $P(B) \times P(D) \neq P(B \cap D)$

Donc les événements B et D ne sont pas indépendantes

2) On vide le contenu des deux urnes dans une seule urne U_3 puis on tire simultanément deux boules de l'urne U_3

Soit X la variable aléatoire associée au produit des numéros portés par les deux boules tirées.

a) Justifier que les valeurs prises par la variable X sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 6

On a l'urne U_1 contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 et l'urne U_2 contient quatre boules portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2

Donc l'urne U_3 contient 9 boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3

(X = 1) : « le produit des numéros est égale à 1 » (1 ; 1)

(X = 2) : « le produit des numéros est égale à 2 » (2 ; 1)

(X = 3) : « le produit des numéros est égale à 3 » (3 ; 1)

(X = 4) : A : « le produit des numéros est égale à 4 » (2 ; 2)

(X = 6) : A : « le produit des numéros est égale à 6 » (2 ; 3)

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

(X = 1) : « le produit des numéros est égale à 1 » (1 ; 1)

$$P(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36}$$

(X = 2) : « le produit des numéros est égale à 2 » (2 ; 1)

$$P(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_9^2} = \frac{15}{36}$$

(X = 3) : « le produit des numéros est égale à 3 » (3 ; 1)

$$P(X = 3) = \frac{\text{Card}(X = 3)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_1^1}{C_9^2} = \frac{5}{36}$$

(X = 4) : A : « le produit des numéros est égale à 4 » (2 ; 2)

$$P(X = 4) = \frac{\text{Card}(X = 4)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$$

(X = 6) : A : « le produit des numéros est égale à 6 » (2 ; 3)

$$P(X = 6) = \frac{\text{Card}(X = 6)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_9^2} = \frac{3}{36}$$

D'où le tableau de loi de X

x_i	1	2	3	4	6
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$

Correction du problème (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{e^x - e^{2x}} = \sqrt{e^0 - e^0} = f(0)$$

D'où f est continue à gauche de 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0 \times \ln(1) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où f est continue à droite de 0

D'où f est continue en 0

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis

interpréter le résultat géométriquement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{e^x(1 - e^x)}{x^2}} = -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{e^x}{x} = +\infty$$

Interprétation géométrique :

(Cf) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis

interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{On pose } X = \frac{1}{x} \text{ donc } x = \frac{1}{X}$$

$$\text{Or } x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Interprétation géométrique :

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e^x - e^{2x}} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

Donc la droite (Ox) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position relative de la droite (Δ): $y = x$ et (Cf) sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$f(x) - x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$$

$$= x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

$$f(x) - x \geq 0 \Rightarrow x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \geq 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 \geq e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq e - 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{e - 1}$$

x	0	$\frac{1}{e-1}$	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
La position relative de (Cf) (Δ)	La courbe (Cf) est en dessus de (Δ)	le point $A\left(\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1}\right)$ est point d'intersection de (Cf) et (Δ)	(Δ) est en dessous de (Cf)

4)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$:

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$, puis étudier la convexité de (Cf) sur $]0, +\infty[$

La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions

Donc la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \text{ et } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{et } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Donc } f''(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\text{On a } \forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Donc la courbe (Cf) est concave sur $]0, +\infty[$

b) En déduire le sens de variations de f' puis le signe de f' sur $]0; +\infty[$

$$\text{On a } \forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Donc la fonction f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Comme f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ alors

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0$$

Remarque : (Autre méthode)

Tu peux dresser le tableau de variations de f' comme suit :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		-
$f'(x)$	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\text{On a } f'([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \right[=]0; +\infty[$$

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) \in]0, +\infty[$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0$$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

$$\text{On a } \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$x \in [1, +\infty[\Rightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(1) \text{ car } f \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \ln(2)$$

$$\Rightarrow x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq \ln(2)$$

$$\Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \ln(2) \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq 2$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

5)a) Montrer que

$$\forall x \in]-\infty; 0[: f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x-e^{2x}}}$$

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]-\infty; 0[$

Soit $x \in]-\infty; 0[$

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}} = \frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}}$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse

On a f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{Et on a } \forall x \in]-\infty; 0[: f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}}$$

Donc le signe de f' sur $]-\infty; 0[$ dépend de signe de $1 - 2e^x$

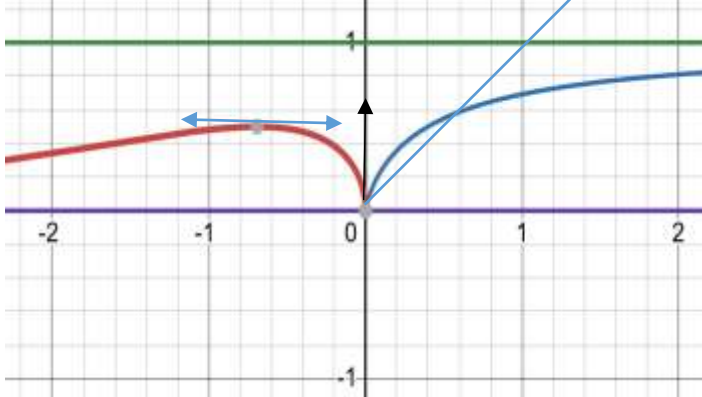
$$1 - 2e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2e^x \Leftrightarrow \frac{1}{2} > e^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) > x \Leftrightarrow -\ln(2) > x$$

x	$-\infty$	-ln2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		1/2		$+\infty$	
	0			0	

$$f(-\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

6) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé



7) Soit g la restriction de f sur $I = [-\ln 2; 0]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer

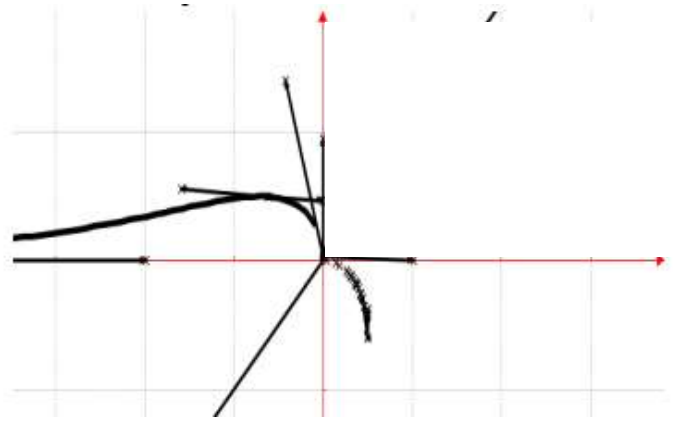
La fonction g est dérivable sur $[-\ln 2; 0[$ donc elle est continue sur $[-\ln 2; 0]$

Et on a g est continue à droite de 0 donc g est continue sur $I = [-\ln 2; 0]$

Et on a la fonction g est strictement décroissante sur I donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

b) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le repère orthonormé



c) Montrer que $\forall x \in J, g^{-1}(x) = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2} \right)$

Soient $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $y \in [-\ln 2; 0]$

tel que $g^{-1}(x) = y$

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{e^y - e^{2y}} = x \\ &\Leftrightarrow e^y - e^{2y} = x^2 \Leftrightarrow e^y - e^{2y} - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2y} - e^y + x^2 = 0 \Leftrightarrow (e^y)^2 - e^y + x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - t + x^2 = 0 \text{ avec } t = e^y; (*) \end{aligned}$$

On a $\Delta = 1 - 4x^2 > 0$

$x \leq \frac{1}{2}$ donc $x^2 \leq \frac{1}{4}$ donc $-4x^2 \geq -1$ donc $\Delta \geq 0$

$$(*) \Leftrightarrow t = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2} \text{ ou } t = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2} \text{ avec } t = e^y$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2} \text{ ou } e^y = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2} \right) \text{ ou } y = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2} \right)$$

On a $g(0)=0$ donc $g^{-1}(0) = 0$

$$\text{Donc } \forall x \in J, g^{-1}(x) = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2} \right)$$

8) Soit $a \in]0, \frac{1}{e-1}[$ on désigne par S_a l'aire de la surface plan limitée par la droite (Δ), la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = \frac{1}{e-1}$

a) Montrer $\int_a^{\frac{1}{e-1}} \frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - a + \ln(a+1)$

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{1}{e-1}} \frac{x}{x+1} dx &= \int_a^{\frac{1}{e-1}} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int_a^{\frac{1}{e-1}} 1 - \frac{1}{x+1} dx \\ &= [x - \ln(x+1)]_a^{\frac{1}{e-1}} \\ &= \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{1}{e-1} + 1\right) - a + \ln(a+1) \\ &= \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - a + \ln(a+1) \end{aligned}$$

b) Par une intégration par partie montrer que :

$$\int_a^{\frac{1}{e-1}} x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln(e-1) + \frac{2-e}{e-1} + a^2 - a - a \cdot f(a) + \ln(1+a) \right]$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)} \\ v(x) = \frac{-1}{x} x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{1}{e-1}} x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) dx &= \frac{1}{2} [x \cdot f(x) - x^2]_a^{\frac{1}{e-1}} + \frac{1}{2} \int_a^{\frac{1}{e-1}} \frac{x}{x+1} dx \\ &= 0 - \frac{1}{2} a \cdot f(a) + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - a + \ln(a+1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 - a \cdot f(a) + \frac{1}{e-1} - \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - a + \ln(a+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 - a \cdot f(a) + \frac{1}{e-1} - 1 + \ln(e-1) - a + \ln(a+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 - a \cdot f(a) + \frac{1}{e-1} - 1 + \ln(e-1) - a + \ln(a+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2-e}{e-1} + \ln(e-1) + a^2 - a - a \cdot f(a) + \ln(a+1) \right] \end{aligned}$$

c) Calculer $\lim_{a \rightarrow 0^+} S_a$

$$\text{On a : } S_a = \int_a^{\frac{1}{e-1}} |f(x) - x| dx = \int_a^{\frac{1}{e-1}} (f(x) - x) dx$$

$$\text{Donc } S_a = \int_a^{\frac{1}{e-1}} x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) dx$$

$$\text{Donc } \lim_{a \rightarrow 0^+} S_a = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\frac{2-e}{e-1} + \ln(e-1) + \underbrace{a^2 - a}_0 - \underbrace{a \cdot f(a)}_0 + \underbrace{\ln(a+1)}_0 \right]$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} S_a = \frac{1}{2} \left[\frac{2-e}{e-1} + \ln(e-1) \right]$$

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

➤ Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$ et

montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$.

f est strictement croissante sur l'intervalle

$$\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Car ; } f\left(\frac{1}{e-1}\right) &= \frac{1}{e-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{e-1}}\right) \\ &= \frac{1}{e-1} \ln(1 + e - 1) = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

On a d'après la question 3)c)

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right] : f(x) - x \geq 0$$

$$\text{Et on a } u_n \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

$$\text{Donc } f(u_n) - u_n \geq 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

3) Dédire que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

• (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{e-1}$ donc convergente.

• f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$ car elle est dérivable sur I

$$\begin{aligned} f\left(\left[0; \frac{1}{e-1}\right]\right) &= \left[f(0); f\left(\frac{1}{e-1}\right)\right] \\ &= \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \subset \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \end{aligned}$$

$$\bullet \quad u_0 = \frac{1}{e} \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} = e$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{e-1}$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est $\frac{1}{e-1}$

10	1
1	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025 النموذج 3



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M1-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 03

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	3points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) une suite tel que $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

0,5

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n \leq 1$

0,75

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente

0,25

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 2(\frac{1}{u_n} - 1)$

0,75

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}: u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

0,75

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}: S_n = 2^{n+1} + n$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(2; 2; 2)$; $B(2; 4; 0)$ et $C(6; 2; -2)$ et (S) la sphère de centre $\Omega(3; 3; 3)$ et de rayon $r = \sqrt{3}$

0,5

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ que les points ABC forment un plan

0,5

b) Vérifier que $x + y + z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5

2) a) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (ABC) et vérifier que $A \in (S)$

0,5

b) Déterminer le triplet des coordonnées du point de contact de (ABC) et (S)

3) Soit $M(a; b; c)$ un point du plan (ABC) tels que $a; b; c$ sont des réels

0,25

a) Montrer que $\Omega M \geq r$

0,75

b) En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

Exercice 3 (3 points) :

0,5

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ **B)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; b = 2 + \sqrt{3} + i ; c = \bar{b} \text{ et } d = b^{12}$$

0,5

1) Ecrire a sous forme exponentielle puis montrer que $|b| = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$ **2)** Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

a) Montrer que B est l'image du point C par la rotation R

0,25

b) Montrer que $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

0,5

3) Soit e l'affixe du point E l'image de B par la translation T de vecteur $\vec{v}$

0,5

a) Montrer que $\frac{d}{e-b} = i(8 + 4\sqrt{3})^6$

0,25

b) En déduire que les droites (BE) et (OD) sont perpendiculaires

0,5

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|\bar{z} - 2 - \sqrt{3} - i| = 5$ **Exercice 4 (3 points) :**

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2

; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 , ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »**B** : « Le produit de deux numéros égale à 4 »

1

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$, puis calculer $P(B)$

0,5

2) Est-ce que les événements A et B sont indépendantes ?**3)** On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisation de l'événement A.

0,5

a) Montrer que $P(X = 1) = \frac{4}{9}$, puis calculer $P(X = 0)$

0,5

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

0,5

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Problème (8 points) :

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x \ln x$$

- 0,25 **1)** Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = 1 + \ln(x)$
0,5 **2)** Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; +\infty[$
0,5 **3)** En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f la fonction numérique définie :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + x \ln x} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2cm

- 0,5 **1) a)** Montrer que $D_f = [0; +\infty[$
0,25 **b)** Montrer que la fonction f est continue à droite en 0
0,5 **2)** Montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement
0,75 **3) a)** Montrer que f est dérivable à droite de 0 puis en déduire que (C) admet une demi-tangente (T) d'équation $y = x$ au point O
0,5 **b)** Montrer que la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $[0; 1]$ et au-dessous de (T) sur l'intervalle $[1; +\infty[$
0,5 **4) a)** Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[): f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$
0,5 **b)** Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$ en justifiant votre réponse
0,5 **5)** Tracer (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
0,25 **6)** Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation (E): $1 - 2x + x \ln x = 0$, en justifiant votre réponse

7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

- 0,5 **a)** Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
0,75 **b)** Tracer (Ch^{-1}) la courbe de h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8) Soit A l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

- 0,25 **a)** Justifier que $(\forall x \in]0, +\infty[): f(x) \leq 1$
0,5 **b)** Montrer que $(\forall x \in [1; e]): 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$
0,5 **c)** Montrer que $4(e - 1) + 4 \ln(\frac{2}{1+e}) \leq A \leq 4(e - 1)$

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) une suite tel que

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq 1$

Rappel : Raisonement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition tel que $n \geq n_0$

Pour montrer la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- Pour $n = n_0$ on vérifie que $P(n)$ est vraie
- Pour n un entier fixé tel que $n \geq n_0$

On suppose que La proposition $P(n)$ est vraie et on montre que $p(n+1)$ est vraie

- Alors $\forall n \geq n_0 : P(n)$ devient vraie

➤ Pour $n=0$ on a $0 < u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ qui est vrai

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $0 < u_n \leq 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq 1$.

$$\begin{aligned} * \quad u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n}{2 - u_n} - 1 \\ &= \frac{u_n - (2 - u_n)}{2 - u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{2 - u_n} \end{aligned}$$

On a $u_n \leq 1$ donc $-u_n \geq -1$

Donc $2 - u_n \geq 1$ donc : $2 - u_n \geq 0$

On a $u_n \leq 1$ donc $u_n - 1 \leq 0$

Donc $2(u_n - 1) \leq 0$

$$\text{Donc : } \frac{2(u_n - 1)}{2 - u_n} \leq 0$$

Donc $u_{n+1} - 1 \leq 0$

Donc $u_{n+1} \leq 1$. (*)

** Et on a $u_n > 0$ et $2 - u_n > 0$

Donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} > 0$ (**)

De (*) et (**) on déduit que $0 < u_{n+1} \leq 1$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 1$$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente

Rappel : Suite croissante ; décroissante

➤ $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante

➤ $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

➤ $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante

➤ Toute suite croissante et majorée est convergente

➤ Toute suite décroissante et minorée est convergente

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2 - u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(2 - u_n)}{2 - u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - u_n}{2 - u_n} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2 - u_n} \end{aligned}$$

On a $u_n - 1 \leq 0$ et $u_n > 0$ et $2 - u_n > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 &= \frac{1}{\frac{u_n}{2 - u_n}} - 1 = \frac{2 - u_n}{u_n} - 1 \\ &= \frac{2}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} - 1 = \frac{2}{u_n} - 2 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \end{aligned}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$,

1ère méthode

On a $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

Pour $n = 0$ on a $\frac{1}{u_1} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$

Pour $n = 1$ on a $\frac{1}{u_2} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right)$

.....

Pour $n - 2$ on a $\frac{1}{u_{n-1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_{n-2}} - 1\right)$

Pour $n - 1$ on a $\frac{1}{u_n} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_{n-1}} - 1\right)$

En multipliant les égalités terme à terme

$$\text{Donc } \frac{1}{u_n} - 1 = 2^n \left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{u_n} - 1 = 2^n(2 - 1) \quad \text{Donc } \frac{1}{u_n} = 2^n + 1$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

2^{ème} méthode

Rappel: (V_n) suite géométrique

Définition : $V_{n+1} = q V_n$

V_n en fonction de n : $V_n = V_p \times q^{n-p}$

Cas particulier : $V_n = V_0 \times q^n$

On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ pour tout $(n \in \mathbb{N})$

Et on a $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} = 2 v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique et de raison 2 et $v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

Donc $v_n = v_0 \times (q)^{n-0} = (2)^n$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{(2)^n + 1}, \text{ car } v_n = (2)^n$$

Calculer la limite de (u_n)

Rappel:

- $-1 < q < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1} + 1} = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : S_n = 2^{n+1} + n$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Rappel:

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$S_n = 1 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; \quad q \neq 1$$

On a $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\frac{1}{u_n} = 2^{n+1}$ donc

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$= 2^0 + 1 + 2^1 + 1 + \dots + 2^n + 1$$

$$= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + 1 \times (n + 1) = 2^{n+1} + n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} + n = +\infty$$

Correction de l'exercice 2 (2,5 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé

Soient les points $A(2; 2; 2)$; $B(2; 4; 0)$

et $C(6; 2; -2)$ et (S) la sphère de centre

$\Omega(3; 3; 3)$ et de rayon $r = \sqrt{3}$

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ que les points A, B, C forment un plan

Rappel: Expression analytique du produit

$$\text{vectoriel : } \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Donc } \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A et B et C ne sont pas alignés

D'où les points A et B et C forment un plan

c) Vérifier que $x + y + z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

Donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

Donc $(ABC): 1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$

Donc $(ABC): x + y + z + d = 0$

Et on a $A(2, 2, 2) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A dans $2 + 2 + 2 + d = 0$ donc $6 + d = 0$ donc $d = -6$

D'où $(ABC): x + y + z - 6 = 0$

2) a) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) et que $A \in (S)$

Rappel:

DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a $\Omega(3; 3; 3)$ et $(ABC): x + y + z - 6 = 0$

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|3 + 3 + 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Donc $d(\Omega; (ABC)) = \sqrt{3} = r$

Donc (ABC) est tangent à la sphère (S)

Montrons que $A \in (S)$

$$\text{On a } \overrightarrow{A\Omega} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Donc } A\Omega = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Donc $A \in (S)$

b) Déterminer le triplet des coordonnées de point de contact de (ABC) et (S)

1^{ère} méthode

On a $A \in (S)$ et $A \in (ABC)$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2^{ème} méthode

Rappel:

Pour déterminer les coordonnées de H on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = x_{\Omega} + at \\ y = y_{\Omega} + bt \\ z = z_{\Omega} + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (P): ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

$(x; y; z)$ les coordonnées de H vérifie le

$$\text{système} \begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC): x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } 3 + t + 3 + t + 3 + t - 6 = 0$$

$$\text{Donc } 3t + 3 = 0$$

$$\text{Donc } t = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\text{On remplace } -1 \text{ dans } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases};$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} x = 3 - 1 = 2 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Donc $H(2; 2; 2)$

Donc $H=A$

3) Soit $M(a; b; c)$ un point du plan (ABC) tels que a ; b ; et c sont des réels

a) Montrer que $\Omega M \geq r$

On a $M(a; b; c)$ un point du plan (ABC)

$$\text{Donc } a + b + c - 6 = 0$$

On a $d(\Omega; (ABC)) = \Omega A = r$ la plus petite distance entre Ω et (ABC) car A la projection orthogonale de Ω sur (ABC)

$$\text{Donc } \Omega M \geq \Omega A$$

$$\text{Donc } \Omega M \geq r$$

b) En déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

$$\text{On a } \Omega M = \sqrt{(a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2}$$

$$\text{Donc } \Omega M^2 = (a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2$$

$$\text{Donc } \Omega M^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 6(a+b+c) + 27$$

Et on a $M(a; b; c)$ un point du plan (ABC)

$$\text{Donc } a + b + c - 6 = 0$$

$$\text{Donc } a + b + c = 6$$

$$\text{Donc } \Omega M^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 36 + 27$$

$$\text{Donc } \Omega M^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 9$$

$$\text{Et on a } \Omega M \geq \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \Omega M^2 \geq 3$$

$$\text{Donc } a^2 + b^2 + c^2 - 9 \geq 3$$

$$\text{Donc } a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$$

Correction de l'exercice 3 (3,5 points) :**A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation**

(E): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

Rappel Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ tels que a, b et c sont des réels
Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors l'équation (E) a deux racines complexes conjuguées

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ tel que : } z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1}$$

(E): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$= -1 < 0$$

Alors l'équation (E) a deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

et $z_2 = \overline{z_1}$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

B) On considère les points A ; B ; C et D

d'affixes respectifs $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$$b = 2 + \sqrt{3} + i ; c = \bar{b} \text{ et } d = b^{12}$$

1) Ecrire a sous forme exponentielle puis

montrer que $|b| = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|b| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

2) R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

a) Montrer que B est l'image de C par R

Rappel :

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M'} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Montrons que $b = ce^{i\frac{\pi}{6}}$

$$ce^{i\frac{\pi}{6}} = \bar{b}a = (2 + \sqrt{3} - i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{3} + i + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3} + i$$

$$= b$$

Donc $R(C) = B$

b) Montrer que $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

Rappel :

• $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

• $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$

• $z = a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi] \text{ et } |z| = a$

On a $R(C) = B$ donc $b = ca$

Donc $\arg(b) \equiv \arg(ca) [2\pi]$

Donc $\arg(b) \equiv \arg(c) + \arg(a) [2\pi]$

Donc $\arg(b) \equiv \arg(\bar{b}) + \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc $\arg(b) \equiv -\arg(b) + \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Comme $\operatorname{Re}(b) > 0$ et $\operatorname{Im}(b) > 0$

Alors $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

3) Soit e l'affixe du point E l'image de B par la translation T de vecteur $\vec{v}$

Rappel : Translation de vecteur $\vec{u}(z_u)$

Soit $M'(z')$ l'image de point $M(z)$

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U} \Leftrightarrow z' = z + z_u$$

a) Montrer que $\frac{d}{e-b} = i(8 + 4\sqrt{3})^6$

On a $T(B) = E$ donc $\overrightarrow{BE} = \vec{v}$ donc $e - b = i$

$$\frac{d}{e-b} = \frac{b^{12}}{i} = \frac{ib^{12}}{i^2} = -ib^{12}$$

$$= -i \left(\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^{12}$$

$$= -i \left(\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \right)^{12} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^{12}$$

$$= -(8 + 4\sqrt{3})^6 i e^{i\frac{\pi}{12} \times 12}$$

$$= -(8 + 4\sqrt{3})^6 i e^{i\pi}$$

$$= i(8 + 4\sqrt{3})^6 \text{ car } e^{i\pi} = -1$$

b) En déduire que les droites (BE) et (OD) sont perpendiculaires

$$\text{On a } \frac{d}{e-b} = i(8 + 4\sqrt{3})^6$$

$$\text{Donc } \arg\left(\frac{d}{e-b}\right) \equiv \arg(i(8 + 4\sqrt{3})^6)[2\pi]$$

Donc

$$\arg\frac{d}{e-b} \equiv \arg(i) + \arg((8 + 4\sqrt{3})^6)[2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} + 0[2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc les droites (BE) et (OD) sont perpendiculaires

4) Déterminer l'ensemble des points M

d'affixe z qui vérifie $|\bar{z} - 2 - \sqrt{3} - i| = 5$

Rappel : Ensemble des points M(z)

l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$|z - z_A| = r$ est un cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r ; $r > 0$

$$|\bar{z} - 2 - \sqrt{3} - i| = 5 \Leftrightarrow |\bar{z} - b| = 5$$

$$\Leftrightarrow |\bar{z} - \bar{c}| = 5$$

$$\Leftrightarrow |\overline{z - c}| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z - c| = 5$$

$$\Leftrightarrow CM = 5$$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z est un le cercle de centre C et de rayon 5

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$, puis calculer $P(B)$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des arrangements sans répétitions de deux boules parmi dix boules contenues dans le sac

Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$$

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

$$\text{Donc } \text{Card}(A) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$$

$$\text{Par suite } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{30}{90}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

B : « Le produit de deux numéros égale à 4 »
donc (2 ; 2) ou (1 ; 4)

$$\text{Donc } \text{Card}(B) = A_2^2 + 2 \times (A_1^1 \times A_4^1) = 2 + 8 = 10$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{10}{90}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}$$

2) Est-ce que les événements A et B sont indépendantes ?

$A \cap B$ « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs et le produits égale à 4 »

donc (2 ; 2)

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_2^2}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$$\text{Et on a : } p(A) \times p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \neq p(A \cap B)$$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendantes

3) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisation de l'événement A.

Rappel : La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$,

Notation : $X \rightarrow B\left(3; \frac{1}{3}\right)$

Donc on a : $(\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}) :$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

a) Montrer que : $P(X = 1) = \frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1} \\ &= \frac{3!}{1!2!} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

$$P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

✓ L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

✓ La variance de la variable aléatoire X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= npq = np(1 - p) = E(X) \cdot (1 - p) \\ &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Problème (9 points) :

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x \ln x$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = 1 + \ln(x)$$

On a g est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une somme et produit des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; +\infty[$

Soit $x \in]0, \frac{1}{e}]$

$$x \in]0, \frac{1}{e}] \Rightarrow x \leq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln x \leq \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow \ln x \leq -\ln(e) \Rightarrow \ln x \leq -1$$

$$\Rightarrow \ln x + 1 \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow g \text{ est décroissante sur }]0, \frac{1}{e}]$$

Soit $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$

$$x \in [\frac{1}{e}; +\infty[\Rightarrow x \geq \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x \geq \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow \ln x \geq -\ln(e) \Rightarrow \ln x \geq -1$$

$$\Rightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow g \text{ est croissante sur } [\frac{1}{e}; +\infty[$$

3) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

1^{ère} méthode :

On a la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; +\infty[$ donc g admet une valeur minimale en $\frac{1}{e}$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 1 - \frac{1}{e}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0 \text{ car } 1 - \frac{1}{e} > 0$$

2^{ème} méthode :

Soit $x \in]0, \frac{1}{e}]$

$$x \in]0, \frac{1}{e}] \Rightarrow x \leq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right) \text{ car } g \text{ est décroissante}$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow g(x) > 0 \text{ car } 1 - \frac{1}{e} > 0$$

Soit $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$

$$x \in [\frac{1}{e}; +\infty[\Rightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right) \text{ car } g \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow g(x) > 0 \text{ car } 1 - \frac{1}{e} > 0$$

D'où $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) f la fonction tel que : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+x \ln x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que $D_f = [0; +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } 1 + x \ln x \neq 0) \text{ ou } x = 0$$

On a $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \neq 0$

Donc $D_f =]0; +\infty[\cup \{0\}$

Donc $D_f = [0; +\infty[$

b) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x \ln x} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à droite en 0

2) Montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale de (C) au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que f est dérivable à droite de 0 puis en déduire que (C) admet une demi-tangente (T) d'équation $y = x$ au point 0

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(1 + x \ln x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + x \ln x} \\ &= 1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Donc f est dérivable à droite de 0

Donc (C) admet une demi-tangente (T) au point 0 d'équation

$$y = f'_d(0)(x - 0) + f(0)$$

Donc $(T): y = x$

b) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $[0; 1]$ et au-dessous de (T) sur l'intervalle $[1; +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}f(x) - x &= \frac{x}{1 + x \ln x} - x \\ &= \frac{x - x - x^2 \ln x}{1 + x \ln x} \\ &= \frac{-x^2 \ln x}{1 + x \ln x}\end{aligned}$$

On a $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$ d'après A)3)

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; 1 + x \ln x > 0$

Soit $x \in [0; 1]$

$x \in [0; 1] \Rightarrow x \leq 1$

$$\Rightarrow \ln x \leq 0$$

$$\Rightarrow -x^2 \ln x \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - x \geq 0$$

Donc (C) est au-dessus de (T) sur $[0; 1]$

Soit $x \in [1; +\infty[$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x \geq 1$

$$\Rightarrow \ln x \geq 0$$

$$\Rightarrow -x^2 \ln x \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - x \leq 0$$

Donc (C) est au-dessous de (T) sur $[1; +\infty[$

4) a) Montrer que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[): f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$$

Rappel

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$
- Pour tout x de $]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et $(uv)' = u'v + uv'$

La fonction $f: x \mapsto \frac{x}{1+x \ln x}$ est dérivable sur

$]0, +\infty[$ car la fonction $x \mapsto 1 + x \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (Produit)

et $\forall x \in]0; +\infty[; 1 + x \ln x \neq 0$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1 \times (1 + x \ln x) - x(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x})}{(1 + x \ln x)^2} \\ &= \frac{1 + x \ln x - x \ln x - x}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{1 - x}{(1 + x \ln x)^2}\end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$ en justifiant votre réponse

On a $\forall x \in]0; +\infty[; (1 + x \ln x)^2 > 0$

Donc le signe de f' est le signe de $1 - x$ qui s'annule en 1 d'où le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

5) Tracer (T) et la courbe (C) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$



6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation

$$(E): 1 - 2x + x \ln x = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow 1 - 2x + x \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + x \ln x = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1 + x \ln x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

D'après le graphe de f on a la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe la courbe (C) en deux points donc l'équation (E) admet deux solutions

7) Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J à déterminer

On a $\forall x \in [1; +\infty[; h(x) = f(x)$

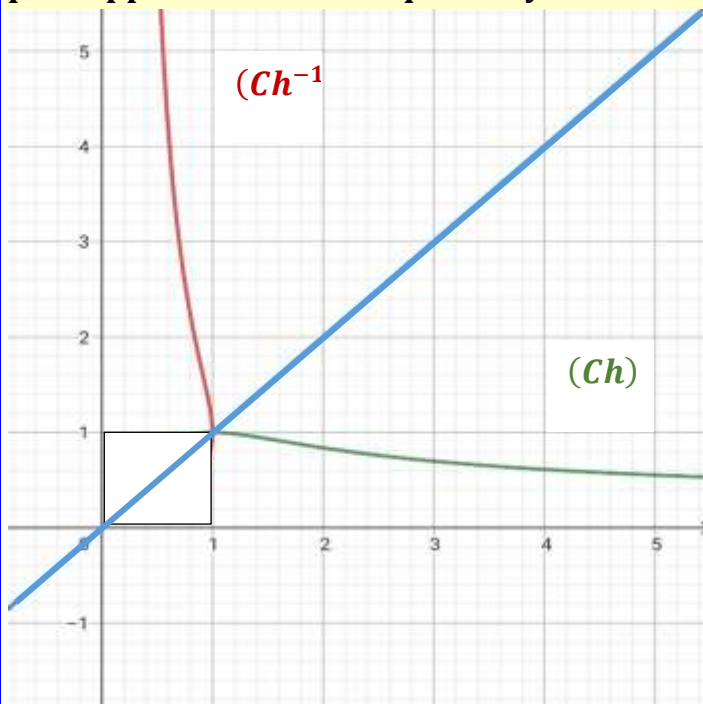
- La fonction h est continue sur $[1; +\infty[$. car f est dérivable sur $[1; +\infty[$.
- La fonction h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. car strictement décroissante est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = f([1; +\infty[=]0; 1]$

b) Tracer (Ch^{-1}) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Rappel :

Les courbes de h et de h^{-1} sont symétriques par rapport la droite d'équation $y=x$



8) Soit A l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

a) Justifier que $(\forall x \in]0, +\infty[): f(x) \leq 1$

D'après le tableau de variations de f on a 1 est une valeur maximale de f sur $]0, +\infty[$
Donc $(\forall x \in]0, +\infty[): f(x) \leq 1$

b) Montrer que $(\forall x \in [1; e]): 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

Soit $x \in [1; e]$

$$x \in [1; e] \Rightarrow x \leq e$$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq \ln(e)$$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \ln(x) \leq x \text{ car } x > 0$$

$$\Rightarrow 1 + x \ln(x) \leq 1 + x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x \ln(x)} \text{ car } 1 + x \ln(x) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1+x \ln(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x-1}{1+x} \leq f(x)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$$

Donc $(\forall x \in [1; e]): 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

c) Montrer que

$$4(e-1) + 4 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 4(e-1)$$

On a $A = \int_1^e |f(x)| dx \times u.a$ et $u.a = 4cm^2$

Et $(\forall x \in [1; e]): f(x) > 0$

Donc $A = \int_1^e f(x) dx \times 4cm^2$

Et on a $(\forall x \in [1; e]): 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$

Donc $\int_1^e 1 - \frac{1}{1+x} dx \leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e 1 dx$

Donc $[x - \ln(1+x)]_1^e \leq \int_1^e f(x) dx \leq [x]_1^e$

$e - \ln(1+e) - 1 + \ln 2 \leq \int_1^e f(x) dx \leq e - 1$

Donc $(e-1) + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \int_1^e f(x) dx \leq (e-1)$

D'où $4(e-1) + 4 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 4(e-1)$

1

10

****4

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج الرابع



RRRRRRRRRRRRRRRR

M4-24

3h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)

الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 04

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1$$

0,5 **1)** Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

0,5 **2)** Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$

0,5 **3)** Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente

0,5 **4)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

0,25 **5)** En déduire la limite de (u_n)

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

0,5 **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

0,25 **b)** En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère dans l'espace les points : $A(1; 0; 1) ; B(0; -4; 4)$

; $C(3; -4; 5)$, et la sphère (S) dont une équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$$

0,25 **1)a)** Montrer que (S) est de centre $\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon 3

0,5 **b)** Vérifier que $A \in (S)$ puis écrire une équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) en A .

0,5 **2) a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$ et calculer la surface du triangle ABC

0,5 **b)** En déduire que $2x - 5y - 6z + 4 = 0$ est une équation du plan (ABC)

0,25 **c)** Montrer que (ABC) et (P) sont orthogonaux

0,5 **d)** Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera son centre H et son rayon

0,5 **3)** Montrer que (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 3 (3 points) :

On considère dans le repère complexe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

les points $A(a) ; B(b) ; C(c)$ et $D(d)$ tel que : $a = i$;

$$b = 2\sqrt{3} - i ; c = \sqrt{3} + 2i \text{ et } d = \sqrt{3} - 2i$$

1) Soit la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $M(z')$ l'image de $M(z)$ par R

0,5 **a)** Montrer que l'écriture complexe R est : $z' = -iz - 1 + i$

0,5 **b)** Vérifier que $c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$ est l'affixe du point C' l'image de point C par la rotation R

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = \sqrt{3}$

0,5 **a)** Montrer que D est l'image du point C' par l'homothétie h

0,5 **b)** Vérifier que $\frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}i$ puis en déduire $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

0,5 **a)** Déterminer l'image du point D par la translation t

0,5 **b)** Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est un rectangle

Exercice 4 (3 points) :

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotés : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.

On tire au hasard, successivement et sans remise 3 jetons du sac.

On considère les événements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3 »

B : « Le premier jetons porte le numéro 2 »

1) a) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

b) Calculer $P_B(A)$.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2) Soit X la variable aléatoire associée à la somme des numéros portés par les trois jetons tirés.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X .

Problème (8 points) :

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x)$$

0,5 **1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$**

0,5 **2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g**

0,5 **3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$**

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

Et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 1 cm)

0,5 **1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique**

0,5 **2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$**

0,5 **3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

0,5 **b) Dresser le tableau de variation de f , en justifiant votre réponse**

0,5 **c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $A(1; 1)$**

0,5 **4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , définie sur un intervalle J que l'on précisera**

0,5 **5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)**

1,5 **6) Tracer (T) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$**

0,5 **7) a) Montrer que $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx = 6$**

0,5 **b) Par une intégration par parties montrer que : $\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx = 3e^4 - e^2$**

0,5 **c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites $x=e^4$ et $x=e^2$**

Solution de l'exercice 04 : (3 points)

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1$$

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

- Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > 0$
Donc la proposition est vraie pour $n = 0$
➤ Soit n un entier naturel
Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

$$* \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{3u_n}{4 + u_n}$$

Et on a : $u_n > 0$

donc $3u_n > 0$ et $4 + u_n > 0$

$$\text{Donc } \frac{3u_n}{4+u_n} > 0$$

Donc $u_{n+1} > 0$.

D'après le principe de récurrence, on a
 $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

2) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$

Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{3}{4} u_n &= \frac{3u_n}{4 + u_n} - \frac{3}{4} u_n \\ &= \frac{4 \times 3u_n - 3(4 + u_n)u_n}{4(1 + u_n)} \\ &= \frac{12u_n - 12u_n - u_n^2}{4(1 + u_n)} \\ &= \frac{-u_n^2}{4(1 + u_n)} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{3}{4} u_n \leq 0$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$$

2^{ème} méthode : (l'encadrement)

On a : $u_n > 0$ donc $4 + u_n \geq 4$

$$\text{Donc : } \frac{1}{4 + u_n} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{4 + u_n} \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc : } \frac{3u_n}{4 + u_n} \leq \frac{3}{4} u_n ; \text{ car } u_n > 0$$

$$\text{D'ou : } u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$$

3) Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{on a : } u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n \text{ et } u_n > 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n \leq u_n \text{ car } \frac{3}{4} < 1$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante

Remarque : On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

4) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n$ il suffit de montrer que $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

1^{ère} méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ montrons que

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

On a $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $\frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

Et on a d'après la question précédente

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$$

Donc $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

D'où: $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

➤ D'après le principe de récurrence, on a
 $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

2ème méthode :

On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

Pour $n=0$ on a : $u_1 \leq \frac{3}{4}u_0$

Pour $n=1$ on a : $u_2 \leq \frac{3}{4}u_1$

...

Pour $n=2$ on a : $u_{n-1} \leq \frac{3}{4}u_{n-2}$

Pour $n=1$ on a : $u_n \leq \frac{3}{4}u_{n-1}$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on trouve :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \frac{3}{4}u_0 \times \frac{3}{4}u_1 \times \dots \times \frac{3}{4}u_{n-1} \times \frac{3}{4}u_n$$

C-à-dire : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

1) Déduite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et on a : $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Pour $n=0$ on a : $u_0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$

Pour $n=1$ on a : $u_1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^1$

...

Pour $n=2$ on a : $u_{n-2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

Pour $n=1$ on a : $u_{n-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

On somme les inégalités terme à terme, on trouve :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Rappel $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; q \neq 1$

Donc : $S_n \leq \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{3}{4}}$

Donc : $S_n \leq \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$
 et $-1 < \frac{3}{4} < 1$

Solution de l'exercice 02 (3 Points)

On considère dans l'espace les points :

$A(1; 0; 1); B(0; -4; 4); C(3; -4; 5)$, et la sphère (S) dont une équation cartésienne:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$$

1) a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(2; -2; 3)$ et son rayon 3

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

1^{ère} méthode :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 4y + 2^2 + z^2 - 6z + 3^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 - 8$$

$$\text{Donc } (S): (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

Donc (S) est une sphère de centre

$\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon $R=3$

2^{ème} méthode

On pose $a = -4; b = 4; c = -6$ et $d = 8$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d =$$

$$(-4)^2 + 4^2 + (-6)^2 - 4 \times 8 = 36 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de

centre $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$

Donc $\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Vérifier que $A(1; 0; 1) \in (S)$ puis écrire une équation cartésienne du plan (P)

tangente à (S) en A .

1^{ère} méthode :

$$\text{On a : } 1^2 + 0^2 + 1^2 - 4 + 0 - 6 + 8 = 0$$

Donc $A(1; 0; 1) \in (S)$

2^{ème} méthode

$$\Omega A = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Donc $\Omega A = R$ donc $A(1; 0; 1) \in (S)$

Une équation cartésienne du plan (P)

tangente à (S) en A .

Soit $M(x; y; z)$ est un point de (Q)

$$\text{Donc } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sont}$$

orthogonaux, car $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à (P)

$$\text{Donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Donc } -(x-1) + 2y - 2(z-1) = 0$$

$$\text{Donc } -x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Une équation cartésienne de (P) est :

$$x - 2y + 2z - 3 = 0$$

2) a) Montrer que :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$ et calculer la surface du triangle ABC

Rappel: Expression analytique du produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge \vec{V} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

On a $A(1; 0; 1); B(0; -4; 4); C(3; -4; 5)$, donc

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k} \end{aligned}$$

Calculer la surface du triangle ABC

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16 + 100 + 144} = \sqrt{260} \text{ ua}$$

b) En déduire que $2x - 5y - 6z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Rappel: Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

Donc le vecteur $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ est

normale au plan (ABC)

$$\text{Donc } (ABC): 2 \times x - 5 \times y - 6 \times z + d = 0$$

$$\text{Donc } (ABC): 2x - 5y - 6z + d = 0$$

Et on a $A(1, 0, 1) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A Donc $2 - 0 - 6 + d = 0$ donc $-4 + d = 0$ donc $d = 4$

D'où $(ABC): 2x - 5y - 6z + 4 = 0$

b) Montrer que (ABC) et (P) sont orthogonaux

On a $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

Et $\vec{\Omega A} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

$$\vec{n} \cdot \vec{\Omega A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - 10 + 12 = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{\Omega A}$ sont orthogonaux

D'où les plans (ABC) et (P) sont orthogonaux

c) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera son centre H et son rayon

Rappel : DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN
Soient $(P): ax + by + cz + d = 0$ un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point

La distance de point A au plan (P) est :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|(2 \times 2) + (5 \times 2) - (6 \times 3) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-6)^2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{9}}$$

$$= 0 < R = 3$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de même rayon que (S)

donc $r = \sqrt{R^2 - 0^2} = R = 3$

Et comme $d(\Omega; (ABC)) = 0$ donc le centre de cercle (Γ) est $\Omega(2; -2; 3)$ le centre de (S)

3) Montrer que (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC

On a le cercle (Γ) est de centre $\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon $R = 3$ et :

Et comme $d(\Omega; (ABC)) = 0$ donc $\Omega \in (ABC)$

$$\Omega A = \sqrt{(1-2)^2 + (0+2)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3 \text{ donc } A \in (\Gamma)$$

$$\Omega B = \sqrt{(0-2)^2 + (-4+2)^2 + (4-3)^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3 \text{ donc } B \in (\Gamma)$$

$$\Omega C = \sqrt{(3-2)^2 + (-4+2)^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3 \text{ donc } C \in (\Gamma)$$

D'où (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC

Solution de l'exercice 03 (3 Points)

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$

les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ et $D(d)$ tel que :

$a = i$; $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{3} + 2i$ et $d = \sqrt{3} - 2i$

2) Soit la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

et $M(z')$ l'image de $M(z)$ par R

a) Montrer que l'écriture complexe R est :

$$z' = -iz - 1 + i$$

Rappel :

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ donc

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M'} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - a)$$

$$\Leftrightarrow z' - i$$

$$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) (z - i)$$

$$\Leftrightarrow z' - i = -i(z - i)$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 1 + i \text{ car } i^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 1 + i$$

b) Vérifier que $c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$ est l'affixe du point C' l'image de C par la rotation R

$$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic - 1 + i$$

$$\Leftrightarrow c' = -i(\sqrt{3} + 2i) - 1 + i$$

$$\Leftrightarrow c' = -i\sqrt{3} + 2 - 1 + i$$

$$\Leftrightarrow c' = -i\sqrt{3} + 2 - 1 + i \text{ car } i^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$$

$$\Leftrightarrow c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$$

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = \sqrt{3}$

a) Montrer que D est l'image du point C' par l'homothétie h

Rappel :

Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k
 $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par l'homothétie h de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k , alors l'écriture complexe de l'homothétie h

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$h(C') = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \sqrt{3} \overrightarrow{AC'} \\ \Leftrightarrow z' - a = \sqrt{3}(c' - a) \\ \Leftrightarrow z' = \sqrt{3}(-i\sqrt{3} + 1 + i - i) + i \\ \Leftrightarrow z' = \sqrt{3}(1 - i\sqrt{3}) + i \\ \Leftrightarrow z' = \sqrt{3} - 3i + i \\ \Leftrightarrow z' = \sqrt{3} - 2i \\ \Leftrightarrow z' = d$$

Donc D est l'image du point C' par l'homothétie h

a) Vérifier que $\frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}i$

1ère méthode :

$$\frac{d-a}{c-a} = \frac{\sqrt{3}-2i-i}{\sqrt{3}+2i-i} = \frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i} \\ = \frac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}^2+1^2} \\ = \frac{-4i\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}i$$

2ème méthode

$$\text{On a : } d-a = \sqrt{3}-2i-i = \sqrt{3}-3i \\ \text{Et : } -\sqrt{3}i(c-a) = -\sqrt{3}i(\sqrt{3}+2i-i) \\ = -\sqrt{3}i(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}-3i$$

$$\text{Donc } d-a = -\sqrt{3}i(c-a)$$

$$\text{Donc } \frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}i$$

$$\text{On a } \frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}i$$

$$\text{Donc } \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) \equiv \arg(-\sqrt{3}i)[2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

a) Déterminer l'image du point D par la translation t

$$t(D) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow z' - d = c - a \\ \Leftrightarrow z' = c - a + d \\ \Leftrightarrow z' = \sqrt{3} + 2i - i + \sqrt{3} - 2i \\ \Leftrightarrow z' = 2\sqrt{3} - i \\ \Leftrightarrow z' = b$$

$$\text{Donc } t(D) = B$$

b) Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est un rectangle

$$\text{On a } t(D) = B \text{ donc } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$$

Donc le quadrilatère $ACBD$ est un

parallélogramme et on a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc le quadrilatère $ACBD$ est un rectangle

Solution de l'exercice 04 (2 Points)

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotés : 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 2 ; 2.

On tire au hasard, successivement et sans remise 3 jetons du sac.

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des arrangements de trois boules parmi dix boules

Donc le nombre des possibilités est :

$$\text{Card}(\Omega) = A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

1) a) Montrer que : $P(A) = \frac{7}{20}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3 » (1 ; 1 ; 1) ou (2 ; 1 ; 0)

$$\text{Donc } \text{Card}(A) = A_3^3 + 6(A_2^1 \times A_3^1 \times A_1^1) \\ = 3 \times 2 + 6 \times 3 \times 2 = 42$$

$$\text{Par suite } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{42}{120} = \frac{7}{20}$$

: « Le premier jetons porte le numéro 2 » 1ère méthode : (2 ; ? ; ?)

$$\text{Donc } \text{Card}(B) = A_2^1 \times A_5^2 = 2 \times 5 \times 4 = 40$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

2ème méthode :

(2 ; 2 ; 1) ou (2 ; 1 ; 1) ou (2 ; 1 ; 0) ou 2 ; 2 ; 0

$$\text{Card}(B) = 2(A_2^2 \times A_3^1) + A_2^1 \times A_3^2 \\ + 2(A_2^1 \times A_3^1 \times A_1^1) + 2(A_2^2 \times A_1^1) \\ = 12 + 12 + 12 + 4 = 40$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

b) Calculer $P_B(A)$. On a : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A \cap B$: "La somme des numéros obtenus est égale à 3 et Le premier jetons porte le numéro 2" donc $(2; 1; 0)$

$$\text{Donc } P(A \cap B) = \frac{2(A_2^1 \times A_3^1 \times A_1^1)}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

$$\text{D'où } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

c) Les événements A et B sont-ils

indépendants ? On a : $P_B(A) \neq P(A)$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

2) Soit X la variable aléatoire associée à la somme des numéros portés par les trois jetons tirés.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable X .

✚ $(X = 3)$: A : « La somme des numéros est égale à 3 » $(1; 1; 1)$

✚ $(X = 4)$: « La somme des numéros est égale à 4 » $(2; 1; 1)$

✚ $(X = 5)$: « La somme des numéros est égale à 5 » $(2; 2; 1)$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X .

✚ $(X = 3)$: A : « La somme des numéros est égale à 3 » $(1; 1; 1)$

$$P(X = 3) = P(A) = \frac{1}{5}$$

✚ $(X = 4)$: « La somme des numéros est égale à 4 » $(2; 1; 1)$

Le coefficient d'ordre est : $\frac{3!}{1! \times 2!} = 3$

$$P(X = 4) = \frac{\text{Card}(X = 4)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3 \times (A_2^1 \times A_4^2)}{120} = \frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

✚ $(X = 5)$: « La somme des numéros est égale à 5 » $(2; 2; 1)$

Le coefficient d'ordre est : $\frac{3!}{1! \times 2!} = 3$

$$P(X = 5) = \frac{\text{Card}(X = 5)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3 \times (A_2^2 \times A_4^1)}{120} = \frac{3 \times 2 \times 4}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Solution de problème : (8 points)

A) Soit g une fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$

Donc $g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0; +\infty[$; par

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x} = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) + 1 + \ln(x)}{x} = -\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche

infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme des fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

Rappel : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1 + 1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Dresser le tableau de variation de f

On a : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$

-∞ 

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ; 1)

(T): $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 1 \times (x - 1) + 1$

(T): $y = x$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$
- La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque

f^{-1} , définie sur $J = f(]0, +\infty[)$

$J = f(]0, +\infty[)$

$=]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$; (On prend

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)

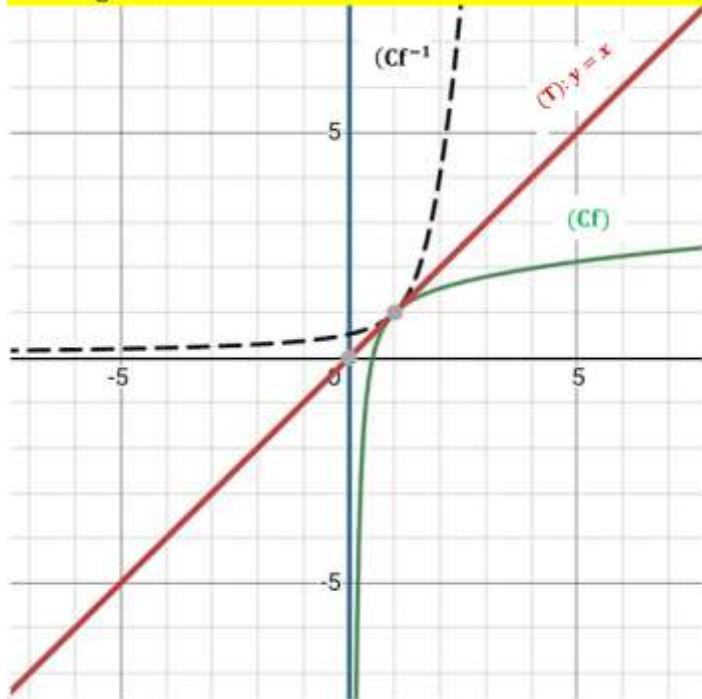
- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en particulier $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on particulier sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- Et on a $f(1) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$ donc $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf⁻¹) dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)
(Cf) et (Cf⁻¹) sont symétrique par rapport à la droite (T): $y = x$

Remarque pour bien tracer (Cf⁻¹)

- La droite d'équation $x = 0$ est asymptotes verticale à (Cf) donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptotes horizontale à (Cf⁻¹)
- la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$; donc la courbe (Cf⁻¹) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



7) a) Calculer $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx$

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x} \times \ln(x) dx \\ &= \int_{e^2}^{e^4} (\ln x)' \ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{e^2}^{e^4} \\ &= \frac{(\ln e^4)^2}{2} - \frac{(\ln e^2)^2}{2} \\ &= \frac{(4 \ln e)^2}{2} - \frac{(2 \ln e)^2}{2} \\ &= \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6 \end{aligned}$$

b) Par une intégration par parties calculer

$$\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} F &= [x \ln(x)]_{e^2}^{e^4} - \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x} \times x dx \\ &= [x \ln(x)]_{e^2}^{e^4} - \int_{e^2}^{e^4} 1 dx \\ &= e^4 \ln(e^4) - e^2 \ln(e^2) - [x]_{e^2}^{e^4} \\ &= 4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2 \\ &= 3e^4 - e^2 \end{aligned}$$

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (Cf), la droite (Ox) et les droites $x=e^2$ et $x=e^4$

Justifions que la fonction f est positive sur $[e^2, e^4] \subset [\alpha; +\infty[$

Soit $x \in [\alpha; +\infty[$

On a $x \geq \alpha$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Donc $f(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in [e^2, e^4]: |f(x)| = f(x)$

$$A = \int_{e^2}^{e^4} |f(x)| dx \times u.a = \int_{e^2}^{e^4} f(x) dx \times u.a$$

$$= \int_{e^2}^{e^4} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} dx \cdot \text{cm}^2$$

$$= \left(\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx \right.$$

$$\left. + \int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx + \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x} dx \right) \text{cm}^2$$

$$= (3e^4 - e^2 + 6 + [\ln(x)]_{e^2}^{e^4}) \text{cm}^2$$

$$= (3e^4 - e^2 + 6 + \ln e^4 - \ln e^2) \text{cm}^2$$

$$= (3e^4 - e^2 + 6 + 4 - 2) \text{cm}^2$$

$$= (3e^4 - e^2 + 8) \text{cm}^2$$

الصفحة 2	M2-24	الامتحان التجريبي للباكالوريا – 2025 – النموذج 5 - مادة الرياضيات – مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية – خيار	ذ.فيصل
	Exercice 1 (6 points) : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé, considérons les points $A(a) ; B(b) ; C(c) ; D(d)$ tel que : $a = 1 + i ; b = \bar{a} ; c = -1 + i$ et $d = -a$		
0,75	1) a) Déterminer la forme trigonométrique de a et c et vérifier que $OA = OC$		
0,5	b) En déduire que les points $A ; B ; C$ et D appartenant au même cercle (C) et déterminer le centre et le rayon du cercle (C)		
0,5	2) a) Montrer que $b - a = i(c - a)$ et déduire la nature du triangle ABC		
0,5	b) Déduire que B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$		
0,5	c) Déterminer l'image du point B par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AC}$		
0,5	d) Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré		
	3) On considère le point E d'afixe $e = 1 + 2i$		
0,25	a) Vérifier que $\frac{b-a}{e-a} = -2$		
0,5	b) En déduire que B est l'image de E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2		
	4) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, six boules portant les nombres complexes $a ; b ; c ; d ; 1$ et -1 et quatre boules portant les nombres complexes $i ; -i ; -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$		
	On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne		
0,25	a) Calculer $P(A)$ où A: " Les boules tirées portant des nombres réels "		
0,5	b) Calculer $P(B)$ où B: " Les boules tirées portant des nombres complexes dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ "		
0,5	c) Calculer $P(C)$ où C: " Parmi les boules tirées au moins une boule portant un nombre complexe dont le module est égale à $\sqrt{2}$ "		
0,75	d) Calculer $P_B(A)$; la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé . Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse ?		
	Exercice 2 (3 points) : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(-1, 0 ; 1)$ et $B(1 ; 2 ; 0)$ et le plan (P) d'équation $2x + 2y - z + 3 = 0$		
0,25	1) a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P)		
0,25	b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)		
0,5	2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$		
0,25	a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)		
0,75	b) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I (On ne demande pas de déterminer les coordonnées de I)		
	c) Montrer que la droite (AB) est tangente à la sphère (S) au point $C(0 ; 1 ; \frac{1}{2})$		
	3) Soit (Q) le plan parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J (On ne demande pas de déterminer les coordonnées de J)		
0,5	a) Montrer que les points I ; Ω et J sont alignés		
0,5	b) En déduire que $\overrightarrow{\Omega I} . \overrightarrow{\Omega J} = -\frac{9}{4}$		

Problème (11 points) :

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}.$$

1) Montrer que $g'(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

2) Vérifier que : $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}.$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$

2) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$ (On prend : $f(2) \simeq 2.4$ et $f(3) \simeq 2.8$)

b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

5) Construire (D); (Δ) et (C) dans le même repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

6) a) Montrer que la fonction $x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $2 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question II) 4. b))

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Correction de l'exercice 1 (6 points) :

On considère les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$

$D(d)$ tel que : $a = 1 + i$; $b = 1 - i$;

$c = -1 + i$ et $d = -1 - i$

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de a et c et vérifier que $OA=OC$

$$|a| = |c| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$c = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$OA = |a| = \sqrt{2} \text{ et } OB = |b| = \sqrt{2} \text{ donc}$$

$$OA = OC$$

b) Dédire que les points A ; B ; C et D appartenant au même cercle (C) en déterminant le centre et le rayon de (C)

$$\text{On a } |a| = |b| = |c| = |d| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } OA = OC = OB = OD$$

Donc A ; B ; C et D appartenant au même cercle (C) de centre O et le rayon $\sqrt{2}$

2)a) Montrer que $b - a = i(c - a)$

et déduire la nature du triangle ABC

$$b - a = 1 - i - (1 + i) = -2i \text{ et } i(c - a) = i(-1 + i - (1 + i)) = i(-2) = -2i$$

$$\text{Donc } b - a = i(c - a)$$

$$\text{On a } b - a = i(c - a)$$

$$\text{Donc } |b - a| = |i(c - a)|$$

$$\text{Donc } |b - a| = |i| |i(c - a)|$$

$$\text{Donc } |b - a| = |c - a| \text{ car } |i| = 1$$

$$\text{Donc } AB = AC$$

$$\text{Et on a } b - a = i(c - a) \text{ donc } \frac{b-a}{c-a} = i$$

$$\text{Donc } \arg \left(\frac{b-a}{c-a} \right) \equiv \arg(i) [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

donc le triangle ABC est isocèle rectangle en A

b) Dédire que le point B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{On a : } b - a = i(c - a)$$

$$\text{Donc } b - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a) \text{ car } e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Donc le point B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) Déterminer l'image du point D par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Soit $B'(b')$ l'image de B par T

$$T(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow b' - b = c - a$$

$$\Leftrightarrow b' = c - a + b$$

$$\Leftrightarrow b' = -1 + i - 1 - i + 1 - i$$

$$\Leftrightarrow b' = -1 - i$$

$$\Leftrightarrow b' = d$$

$$\text{Donc } T(B) = D$$

d) Dédire que le quadrilatère ABDC est un carré

On a $T(B) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ donc ABDC est un parallélogramme

Et on a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc ABDC est un rectangle

Et on a $AB = AC$ donc ABDC est un losange

D'où ABCD est un carré

3) On considère le point E d'affixe $e = 1 + 2i$

a) Montrer que $\frac{b-a}{e-a} = -2$ puis déduire que les points A ; B et E sont alignés

$$\frac{b-a}{e-a} = \frac{1-i-1-i}{1+2i-1-i} = \frac{-2i}{i} = -2$$

b) Dédire que le point B est l'image du point E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

$$\text{On a } \frac{b-a}{e-a} = -2$$

$$\text{Donc } b - a = -2(e - a)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} = -2 \overrightarrow{AE}$$

Donc le point B est l'image du point E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

5) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, six boules portant les nombres complexes $a; b; c; d; 1$ et -1 et quatre boules portant les nombres complexes $i; -i; -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne

a) Calculer $P(A)$ où A " Les boules tirées portant des nombres réels "

A " $1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$ "

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{15}$$

Donc $P(A) = \frac{2}{15}$

b) Calculer $P(B)$ où B : " Les boules tirées portant des nombres complexes dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ "

$$a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$b = 1 - i = \bar{a} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$c = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$d = -1 - i = \bar{c} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}e^0 \text{ et } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ et } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

B " $a; 1; b; \sqrt{2}; i; -i$ "

$$P(B) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{6 \times 5}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}$$

Donc $P(B) = \frac{1}{3}$

c) Calculer $P(C)$ où C : " Parmi les boules tirées au moins une boule portant un nombre complexe dont le module est égale à $\sqrt{2}$ "

C " $a; b; c; d; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$ "

$\bar{C}$ " $i; -i; -1; 1$ "

$$P(\bar{C}) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = P(A)$$

Donc $P(C) = 1 - P(A)$

$$= \frac{13}{15}$$

d) Calculer $P_B(A)$; la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé .

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap B$: Les boules tirées portant des nombres réels dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$A \cap B: \{1; \sqrt{2}\}$

Donc

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{1}{45}$$

Donc

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{15}$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse ?

Rappel :

Indépendance de deux événements

* On dit que les événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

* Les événements A et B sont indépendants si et seulement $P_A(B) = P(B)$; avec $P(A) \neq 0$

On a $P_B(A) \neq P(A)$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points

$A(-1, 0, 1)$; $B(1, 2, 0)$ et le plan (P) d'équation $2x + 2y - z + 3 = 0$

1) a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P) : $2x + 2y - z + 3 = 0$

On a $\overrightarrow{AB}(2, 2, -1)$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

Rappel : DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a; b; c)$

Une représentation paramétrique de (D)

$$(D): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

On a la droite (AB) passe par $B(1, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2, 2, -1)$

$$\text{Donc } (AB): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$$

$$(S): (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$$

$$(S): (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

b) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

On a $\Omega(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et (P) $2x + 2y - z + 3 = 0$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2x_\Omega + 2y_\Omega - z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 1 - \frac{3}{2} + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = r$$

Donc la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

c) Montrer que la droite (AB) est tangente à la sphère (S) au point C $(0; 1; \frac{1}{2})$

Rappel :

Position relative d'une sphère et une droite

Soit (S) une sphère de centre Ω et d rayon R et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}(\alpha; \beta; \gamma)$

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersections de (S) et (Δ), on résout le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta): \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (S): (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2 \end{cases}$$

(x; y; z) les coordonnées de C vérifie le

$$\text{système } \begin{cases} (AB): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Donc } (1 + 2t - 1)^2 + (2 + 2t - \frac{1}{2})^2 + (-t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc } (2t)^2 + (\frac{3}{2} + 2t)^2 + (-t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc } 4t^2 + \frac{9}{4} + 6t + 4t^2 + t^2 + t^2 + 3t + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc } 9t^2 + 9t + \frac{9}{4} = 0$$

$$\text{Donc } t^2 + t + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Donc } (t + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\text{Donc } t + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Donc } t = -\frac{1}{2}$$

Donc la droite (AB) est tangente à la sphère (S) en un point C

$$\text{On remplace } t = -\frac{1}{2} \text{ dans } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases} \text{ pour}$$

trouver C

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 1 - 1 \\ y = 2 - 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} ; \text{ donc } C(0; 1; \frac{1}{2})$$

- 3) Soit (Q) le plan parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J
a) Montrer que les points I ; Ω et J sont alignés

On a la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont colinéaires

Et on a le plan (Q) est parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

D'où les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

Donc les points I ; Ω et J sont alignés

- b) En déduire que $\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega J} = -\frac{9}{4}$

1^{ère} méthode :

On a les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

De sens opposés donc $(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J}) \equiv \pi [2\pi]$

$$\cos(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J}) = -1$$

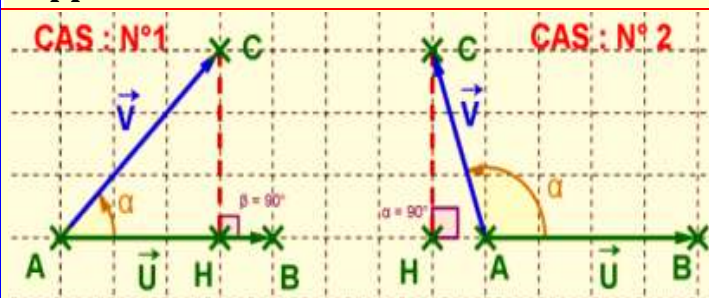
$$\text{Donc } \overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega J} = \Omega I \times \Omega J \times \cos(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega J})$$

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Car } \Omega I = \Omega J = r = \frac{3}{2}$$

2^{ème} méthode :

Rappel :



Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens opposé alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

On a les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

De sens opposés donc :

$$\overrightarrow{\Omega I} \cdot \overrightarrow{\Omega J} = -\Omega I \times \Omega J = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

Problème (11 points) :

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$.

- 1) Montrer que $g'(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est produit de deux fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 - [(2x \times e^{-x}) - (x^2 + 1)e^{-x}] \\ &= (x^2 - 2x + 1)e^{-x} \\ &= (x - 1)^2 e^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \geq 0 \text{ et } e^{-x} > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : g'(x) > 0$$

Donc d est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

- 2) Vérifier que : $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

$$\text{On a } g(0) = 1 - (0 + 1)e^0 = 0$$

➤ Sur l'intervalle $[0; +\infty[$

On a g est str croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

➤ Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

On a g est str croissante sur $]-\infty; 0]$ donc

$$x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Conclusion : (le tableau de signe de g)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	-	0	+

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{(x^2 + 2x + 3)}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{2}{\frac{e^x}{x}} + \frac{3}{e^x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{e^x} + \frac{2}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{3}{\frac{e^x}{x}} - (x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + \frac{2}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{3}{e^x} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) - y &= x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x} - x + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 3)e^{-x} \\ &= (x^2 + 2x + 1 + 2)e^{-x} \\ &= ((x + 1)^2 + 2)e^{-x}\end{aligned}$$

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0 \text{ et } ((x + 1)^2 + 2) > 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) - y > 0$$

Tu peux étudier le signe de $x^2 + 2x + 3$ en utilisant le discriminant delta

Donc la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$

2) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + 2x + 3)e^{-x} + x - 1 \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 3)}{e^x} + \frac{xe^x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+; \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{xe^x} = -\infty\end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-; \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une produit et somme des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= [x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}]' \\ &= 1 + (2x + 2) \times e^{-x} - (x^2 + 2x + 3) \times e^{-x} \\ &= 1 - (x^2 + 2x + 3 - 2x - 2)e^{-x} \\ &= 1 - (x^2 + 1)e^{-x} = g(x)\end{aligned}$$

b) En déduire que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty; 0]$

$$\text{On a } f'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Donc le signe de f' est celui de g

D'après la partie A) on a

(le tableau de signe de g)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	-	0	+

D'où la fonction f est décroissante sur $] - \infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	2	$+\infty$

4) Soient h la fonction définie $\mathbb{R}$ sur $h(x) = f(x) - x$ et la droite $(\Delta) : y = x$
 a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$

(On prend $f(2) \simeq 2.4$ et $f(3) \simeq 2.8$)

La fonction h est dérivable sur $[2; 3]$ car c'est une somme des fonctions dérivable sur $[2; 3]$ donc elle est continue sur $[2; 3]$

Soit $x \in [2; 3]$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= g(x) - 1 \\ &= -(x-1)^2 e^{-x} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [2; 3]: h'(x) < 0$$

Donc h est str décroissante sur $[2; 3]$

$$h(2) \simeq f(2) - 2 \simeq 2.4 - 2 \simeq 0.4$$

$$h(3) \simeq f(3) - 3 \simeq 2.8 - 3 \simeq -0.2$$

$$\text{Donc } h(2) \times h(3) < 0$$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$

b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

On a $h(\alpha) = 0$

➤ Sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

h est str décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ donc

$$x \geq \alpha \Leftrightarrow h(x) \leq h(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow h(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$$

Donc (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

➤ Sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$

On a h est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$ donc

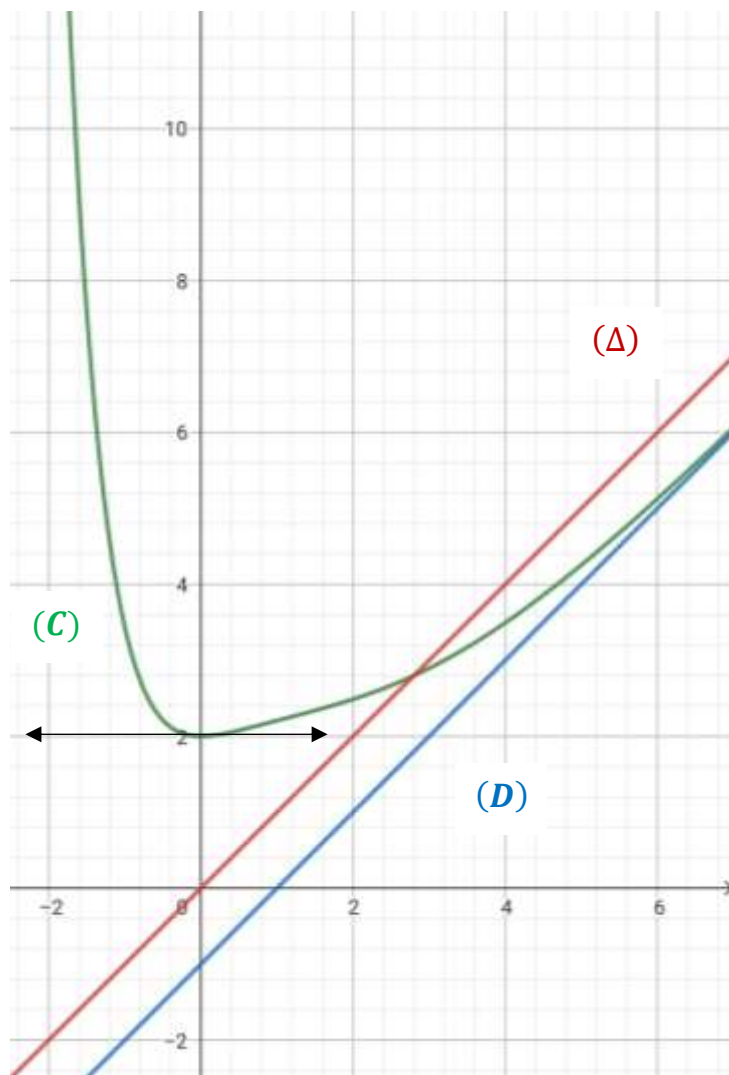
$$x \leq \alpha \Leftrightarrow h(x) \geq h(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow h(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$$

Donc (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$

5) Construire (D) ; (Δ) et (C) dans le même repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.



6)a) Montrer que la fonction

$K: x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $k: x \rightarrow -x^2 e^{-x}$ sur $[0, 1]$

La fonction K est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $[0, 1]$

Soit $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} H'(x) &= [(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]' \\ &= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

Donc $K: x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $k: x \rightarrow -x^2 e^{-x}$

b) Dédurre que : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

On a $H: x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $h: x \rightarrow -x^2 e^{-x}$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= -[(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_0^1 \\ &= -5e^{-1} + 2 \\ &= \frac{2e - 5}{e} \end{aligned}$$

c) Par intégration par parties , montrer que

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= -2e^{-1} + 1 \\ &= \frac{e - 2}{e} \end{aligned}$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a d'après la partie II) 1) la courbe (C) est en dessus de la droite (D); $y = x - 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$

Donc $\forall x \in [0, 1]: |f(x) - y| = f(x) - y$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |f(x) - y| dx \times u.a \\ &= \int_0^1 f(x) - y dx \times u.a \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 3)e^{-x} dx . cm^2 \\ &= 2 \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + 3 \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= \left(\frac{2(e-2)}{e} + \frac{2e-5}{e} - 3[e^{-x}]_0^1 \right) cm^2 \\ &= \left(\frac{2e-4}{e} + \frac{2e-5}{e} - \frac{3}{e} + 3 \right) cm^2 \\ &= \left(\frac{7e-12}{e} \right) cm^2 \end{aligned}$$

III) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $2 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n=0$ on a $u_0 = 2$ donc $2 \leq u_0 \leq \alpha$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $2 \leq u_n \leq \alpha$ et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2; \alpha[$

et $2 \leq u_n \leq \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \leq u_n \leq \alpha &\Rightarrow f(2) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \\ &\Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq \alpha \end{aligned}$$

Car $f(2) \simeq 2.4 > 2$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 \leq u_n \leq \alpha$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante (On pourra utiliser le résultat de la question II) 4. b))

Soit n un entier naturel,

On a: $(\forall x \in [2; \alpha]): f(x) - x \geq 0$

D'après 4)b)

et $u_n \in [2; \alpha]$ d'après III) 1)

Donc on pose $x = u_n$,

On trouve $f(u_n) - u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} \geq u_n$;

D'où la suite (u_n) est croissante

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2; \alpha]$; car elle est dérivable sur $]2; \alpha[$
- $f([2; \alpha]) = [f(2); f(\alpha)] \subset [2; \alpha]$
Car $f(2) \simeq 2.4 > 2$ et $f(\alpha) = \alpha$
- $u_0 \in [2; \alpha]$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[2; \alpha]$

$$f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

Donc la limite de la suite (u_n) est α

1

9

*****6

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك

الدولية 2025

النموذج 6

RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M6-24



3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 06

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	4 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{3 + U_n}{5 - U_n} \text{ et } U_0 = 2$$

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 < U_n < 3$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-3)}{5-u_n}$, puis en déduire que la suite (u_n) est convergente

3) Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{U_n-1}{3-U_n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et de raison $\frac{1}{2}$

c) Calculer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) Calculer la limite de (u_n)

4) Est-ce que le nombre $\frac{3}{2}$ est un terme de la suite (u_n) , justifier votre réponse ?

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(3; -2; 2)$, $B(-1; 6; 4)$ et $C(5; 4; 4)$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$

1) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C puis en déduire que C appartient à (S)

2) Montrer que l'équation de sphère (S) est :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 21$$

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) au point C

4) Soit (Δ) la droite passant par le point $D(4; 3; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; 3)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Montrer que $d(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{11}$ où Ω est le centre de (S)

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S) s'il existe

5) Soit le plan $(Q): x - 4y + 2z + d = 0$

Trouver les valeurs de d pour que (Q) soit tangente à (S)

Exercice 3 (3 points) :

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points $A(a)$ et $B(b)$ tel que

$$a = \sqrt{6} + i\sqrt{6}; b = \bar{a}$$

0,25

1) Ecrire a sous forme trigonométrique

0,25

2) Montrer que $a^8 + b^8$ est un nombre réel

3) Soit R la rotation qui transforme $M(z)$ en $M(z')$ tel que :

$$z' = iz + 2\sqrt{6}(1 - i)$$

0,25

a) Déterminer ω l'angle de point Ω le centre de rotation R et l'angle de R

0,5

b) Montrer que B est l'image de point A par la rotation R

c) Soit c l'angle du point C l'image de B par la rotation R

$$\text{Vérifier que } c = 3\sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

0,5

0,5

d) Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ puis en déduire la nature du triangle ABC

4) Soit D l'image de C par la translation T de vecteur $\overrightarrow{BA}$

0,25

a) Déterminer d'angle de point D par la translation T

0,5

b) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 10 boules : cinq boules rouges, trois jaunes et deux boules vertes, sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules de ce sac

1) On considère les événements suivants:

A : " Les trois boules sont de la même couleur "

B : " Les trois boules sont chacune de couleur différente "

C : " Parmi les boules tirées, il y a au moins une boule verte "

D : " Les trois boules portant deux couleurs "

0,5

1) a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

b) Montrer que : $P(C) = \frac{8}{15}$

0,5

0,5

c) Montrer que $P(D) = \frac{79}{120}$

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de couleurs obtenus.

0,25

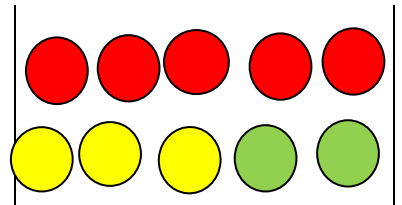
a) Vérifier que les valeurs de X sont 1 ; 2 ; 3.

0,5

b) Montrer que $P(X = 2) = \frac{79}{120}$

0,75

c) Déterminer la loi de probabilité de X



Problème (8 points) :

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x + \ln x$$

Et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé (Unité 1cm)

1) a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$.

(On donne $g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4$)

2) Déduire que $(\forall x \in]0; \alpha]): g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\alpha; +\infty]): g(x) \geq 0$

3) a) Calculer l'intégrale $A = \int_{\alpha}^1 g(x) dx$, en fonction de α

b) Interpréter géométriquement le nombre A

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(Unité 2cm)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$ et dresser le tableau de variations de f

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

4) Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On donne $\alpha \approx 0.25$)

C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(h^{-1})'(0)$

Solution d'exercice 01 (3 Points)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \text{ et } u_0 = 2$$

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$1 < u_n < 3$$

➤ Pour $n=0$ on a $1 < u_0 = 2 < 3$ qui est vrai.

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 < u_n < 3$ et montrons que

$$1 < u_{n+1} < 4.$$

$$* \quad u_{n+1} - 1 = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 1$$

$$= \frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{5 - u_n}$$

$$= \frac{2u_n - 2}{5 - u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n}$$

On a $u_n < 3$ donc $-u_n > -3$

Donc $5 - u_n > 2$ donc $5 - u_n > 0$

Et $u_n > 1$ donc $2(u_n - 1) > 0$

$$\text{Donc : } \frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n} > 0$$

Donc $u_{n+1} - 1 > 0$

Donc $u_{n+1} > 1$. (*)

$$\begin{aligned} * \quad u_{n+1} - 3 &= \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 3 \\ &= \frac{3 + u_n - 3(5 - u_n)}{5 - u_n} \\ &= \frac{4u_n - 12}{5 - u_n} = \frac{4(u_n - 3)}{5 - u_n} \end{aligned}$$

Et on a $u_n < 3$ Donc $u_n - 3 < 0$

donc $4(u_n - 3) < 0$ Et $5 - u_n > 0$;

$$\text{Donc } \frac{4(u_n - 3)}{5 - u_n} < 0$$

Donc $u_{n+1} - 3 < 0$

Donc $u_{n+1} < 3$ (**)

De (*) et (**) on déduit que $1 < u_{n+1} < 3$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n < 3$$

2) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n}, \text{ puis en}$$

déduire que la suite (u_n) est convergente

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3 + u_n}{5 - u_n} - u_n \\ &= \frac{3 + u_n - u_n(5 - u_n)}{5 - u_n} \\ &= \frac{3 + u_n + u_n^2 - 5u_n}{5 - u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{5 - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n} \end{aligned}$$

$$\text{Car } (u_n - 1)(u_n - 3) = u_n^2 - 4u_n + 3$$

$$1 < u_{n+1} < 3 \Rightarrow (u_n - 3) < 0 \text{ et } (u_n - 1) > 0$$

$$0 \text{ et } 5 - u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{5 - u_n} < 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n < 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

3) Soit (v_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$$

a) Montrer que (v_n) est une suite

géométrique et de raison $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 1}{3 - \frac{3 + u_n}{5 - u_n}} \quad , \text{ d'après la question 1) } \\ &= \frac{\frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{5 - u_n}}{\frac{3(5 - u_n) - (3 + u_n)}{5 - u_n}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)}$$

$$= \frac{1(u_n - 1)}{2(3 - u_n)} = \frac{1}{2} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

c) Calculer u_n en fonction de n pour tout n

Soit n un entier naturel,

On a La suite (v_n) est géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2} \text{ et } v_0 = 1$$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times (q)^{n-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Rightarrow v_n(3 - u_n) = u_n - 1$$

$$\Rightarrow 3v_n - u_n v_n - u_n = -1$$

$$\Rightarrow u_n(-v_n - 1) = -3v_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-3v_n - 1}{-v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

d) Calculer la limite de (u_n)

$$\text{On a: } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1$$

4) Est-ce que le nombre $\frac{3}{2}$ est un terme de la suite (u_n) , justifier votre réponse ?

$$u_n = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -n \ln(2) = -\ln(3)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{N}$$

Donc $\frac{3}{2}$ n'est pas un terme de la suite (u_n)

Solution d'exercice 02 (3 points)

On considère les points $A(3; -2; 2)$,

$B(-1; 6; 4)$ et $C(5; 4; 4)$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$

1) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C puis en déduire que C appartient à (S)

$$\text{On a } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0$$

Donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux

Donc le triangle ABC est rectangle en C

On a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ et on sait que l'ensemble des point M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et la sphère de diamètre $[AB]$

D'où C appartient à (S)

2) Montrer que l'équation de sphère (S) est :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 21$$

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$M(x; y; z) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-6 \\ z-4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) + (y+2)(y-6) + (z-2)(z-4) = 0$$

$$+ (z-2)(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3x - 3 + y^2 - 6y + 2y - 12 + z^2 - 4z - 2z + 8 = 0$$

$$+ z^2 - 4z - 2z + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = -7$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 = -7$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 21$$

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) au point C

$$\text{On a (S): } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 21$$

Donc (S) est une sphère de centre

$\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon $R = \sqrt{21}$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega C} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal (P)

Comme $\overrightarrow{\Omega C} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur

normal au (P), une équation cartésienne de (P) est de la forme $4x + 2y + z + d = 0$

Le point $C(5; 4; 4)$ appartient au plan, donc

$$4 \times (5) + 2 \times (4) + (4) + d = 0$$

$$\text{Donc } 32 + d = 0 \text{ et donc : } d = -32.$$

$$\text{D'où (P): } 4x + 2y + z - 32 = 0$$

4) Soit (Δ) la droite passante par le point $D(4; 3; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; 3)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Montrer que $d(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{11}$ où Ω est le centre de (S)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega D} \wedge \vec{u} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 3\vec{i} - 10\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \|\overrightarrow{\Omega D} \wedge \vec{u}\| &= \sqrt{3^2 + (-10)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{110} \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } d(\Omega; (\Delta)) &= \frac{\|\overrightarrow{\Omega D} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{10}} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S) s'il existe

$$\text{On a : } d(\Omega; (\Delta)) < R$$

Donc la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points E et F

On résoudre le système suivant pour déterminer leurs coordonnées :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 21$$

$$\text{Donc } (4+t-1)^2 + (3-2)^2 + (2+3t-3)^2 = 21$$

$$\text{Donc } (3+t)^2 + (1)^2 + (3t-1)^2 = 21$$

$$\text{Donc } 9 + 6t + t^2 + 1 + 9t^2 - 6t + 1 - 21 = 0$$

$$\text{Donc } 10t^2 - 10 = 0$$

$$\text{Donc } t^2 = 1$$

$$\text{Donc } t = \sqrt{1} \text{ ou } t = -\sqrt{1}$$

$$\text{Donc } t = 1 \text{ ou } t = -1$$

Donc la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points E et F

$$\text{On remplace } t = -1 \text{ dans } \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 4 - 1 \\ y = 3 \\ z = 2 - 3 \end{cases} \quad \text{donc } E(3; 3; -1)$$

$$\text{On remplace } t = 1 \text{ dans } \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 4 + 1 \\ y = 3 \\ z = 2 + 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E(5; 3; 3)$$

5) Soit le plan (Q): $x - 4y + 2z + d = 0$

Trouver les valeurs de d pour que (Q) soit tangente à (S)

Rappel: DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a (Q) soit tangente à (S)

$$\text{Donc } d(\Omega; (P)) = R = \sqrt{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{|1 - 8 + 6 + d|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \sqrt{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{|-1+d|}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$$

$$\text{Donc : } |d - 1| = 21$$

$$\text{Donc : } d - 1 = 21 \text{ ou } d - 1 = -21$$

$$\text{Donc : } d = 22 \text{ ou } d = -20$$

Solution d'exercice 03 (3 points)

On considère dans le repère complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$) les points $A(a)$ et $B(b)$ tel que $a = \sqrt{6} + i\sqrt{6}; b = \bar{a}$

1) Ecrire a sous forme trigonométrique

$$|a| = \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{6} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2) Montrer que $a^8 + b^8$ est un nombre réel

On a $a = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = \bar{a} = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc :

$$\begin{aligned} a^8 + b^8 &= (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{4}})^8 + (2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 \\ &= (2\sqrt{3})^8 e^{i\frac{\pi}{4} \times 8} + (2\sqrt{3})^8 e^{-i\frac{\pi}{4} \times 8} \\ &= (2\sqrt{3})^8 e^{2\pi i} + (2\sqrt{3})^8 e^{-2\pi i} \\ &= (2\sqrt{3})^8 (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) \\ &\quad + (2\sqrt{3})^8 (\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) \\ &= (2\sqrt{3})^8 (1 + 0) + (2\sqrt{3})^8 (1 + 0) \\ &= 2(2\sqrt{3})^8 \end{aligned}$$

Donc que $a^8 + b^8$ est un nombre réel

3) Soit R la rotation qui transforme $M(z)$ en $M(z')$ tel que :

$$z' = iz + 2\sqrt{6}(1 - i)$$

a) Déterminer le centre et l'angle de rotation R

Soit $\Omega(\omega)$ le centre de R donc $R(\Omega) = \Omega$

$$\begin{aligned} R(\Omega) = \Omega &\Leftrightarrow \omega = i\omega + 2\sqrt{6}(1 - i) \\ &\Leftrightarrow \omega - i\omega = 2\sqrt{6}(1 - i) \\ &\Leftrightarrow \omega(1 - i) = 2\sqrt{6}(1 - i) \\ &\Leftrightarrow \omega = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' &= iz + 2\sqrt{6}(1 - i) \Leftrightarrow z' - 2\sqrt{6} = iz - i2\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow z' - 2\sqrt{6} = i(z - 2\sqrt{6}) \\ &\Leftrightarrow z' - 2\sqrt{6} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 2\sqrt{6}) \end{aligned}$$

Donc R est la rotation de centre $\Omega(2\sqrt{6})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Montrer que B est l'image de point A par la rotation R

$$\begin{aligned} R(A) = M' &\Leftrightarrow z' = ia + 2\sqrt{6}(1 - i) \\ &\Leftrightarrow z' = i(\sqrt{6} + i\sqrt{6}) + 2\sqrt{6} - 2i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow z' = i\sqrt{6} - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow z' = \sqrt{6} - i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow z' = \bar{a} \\ &\Leftrightarrow z' = b \end{aligned}$$

D'où B est l'image de point A par la rotation R

b) Soit c l'affixe du point C l'image de B par la rotation R Vérifier que $c = 3\sqrt{6} - i\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} R(B) = C &\Leftrightarrow c = ib + 2\sqrt{6}(1 - i) \\ &\Leftrightarrow c = i(\sqrt{6} - i\sqrt{6}) + 2\sqrt{6} - 2i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow c = i\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow c = 3\sqrt{6} - i\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow c = 3\sqrt{6} - i\sqrt{6} \end{aligned}$$

c) Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ puis en déduire la nature du triangle ABC

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{c-b} &= \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{6} + i\sqrt{6}}{3\sqrt{6} - i\sqrt{6} - \sqrt{6} + i\sqrt{6}} = \frac{2i\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \\ &= i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{c-b} = i &\Rightarrow \left| \frac{a-b}{c-b} \right| = |i| \text{ et } \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \\ &\equiv \arg(i) [2\pi] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|a-b|}{|c-b|} = 1 \text{ et } \arg \frac{a-b}{c-b} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{CB} = 1 \text{ et } \overrightarrow{(BC, BA)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow BA = BC \text{ et } \overrightarrow{(BC, BA)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ Le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

4) Soit D l'image de C par la translation T de vecteur $\overrightarrow{BA}$

a) Déterminer d d'affixe de point D

$$T_{\overrightarrow{BA}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow d = a - b + c$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{6} + i\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow d = 3\sqrt{6} + i\sqrt{6}$$

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré

On a D l'image de C par la translation T de vecteur $\overrightarrow{BA}$ donc

$$T_{\overrightarrow{BA}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

$$\text{De plus on a } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le quadrilatère ABCD est un rectangle

De plus on a $BA = BC$

D'où Donc le quadrilatère ABCD est un carré

Solution d'exercice 0 (2 points)

On tire

simultanément 3

boules de ce sac

parmi 10 boules

On considère les

événements suivants :

1) a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix boules

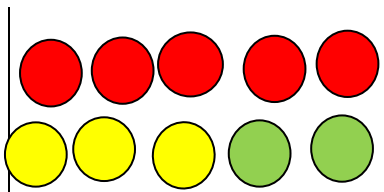
Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

A: " Les trois boules sont de la même couleur"

$$\text{Card}(A) = C_3^3 + C_5^3 = 1 + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 11$$

$$\text{Par suite } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{11}{120}$$



B "Les trois boules sont chacune de couleur différente"

$$\text{Donc } \text{Card}(B) = C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1 = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

b) Montrer que : $P(C) = \frac{8}{15}$

C "Parmi les boules tirées, il y a au moins une boule verte"

L'événement contraire de B est $\bar{C}$ « Aucune boule tirée n'est verte

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{Card}(\bar{C}) &= C_8^3 \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \\ &= 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(\bar{C}) &= \frac{\text{Card}(\bar{C})}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{56}{120} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } p(C) &= 1 - p(\bar{C}) \\ &= 1 - \frac{7}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

c) Montrer que $P(D) = \frac{79}{120}$

Deux couleurs obtenues dans les trois boules

Donc l'événement contraire de D est (A ou B)

$$\text{Donc } P(D) = 1 - (P(A) + P(B))$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{120} + \frac{30}{120} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{41}{120} \right)$$

$$= \frac{79}{120}$$

2) Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage, le nombre de couleurs obtenue

a) Déterminer les valeurs de X

✚ $(X = 1)$: Un couleurs donc les trois boules sont de la même couleur donc c'est l'événement A

✚ $(X = 2)$: Deux couleurs obtenues dans les trois boules

✚ $(X = 3)$: Trois couleurs donc Les trois boules sont chacune de couleur différente" donc c'est l'événement B

b) Montrer que $P(X = 2) = \frac{79}{120}$

On a $(X = 2)$: Deux couleurs obtenues dans les trois boules

Donc l'événement contraire de $(X = 2)$ est $(X = 1)$ ou $(X = 3)$

Donc $P(X = 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 3))$

$$= 1 - (P(A) + P(B))$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{120} + \frac{30}{120} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{41}{120} \right)$$

$$= \frac{79}{120}$$

c) Déterminons la loi de probabilité de variable aléatoire X .

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{11}{120}$$

$$P(X = 2) = \frac{79}{120}$$

$$P(X = 3) = p(B) = \frac{1}{4}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité de variable aléatoire X .

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

Solution du problème (8 points)

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x + \ln x$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x + \ln x = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x + \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a ;

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que

$$\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (\text{On donne } g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4)$$

On a g est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$

Et on a g est strictement croissante sur

$]0; +\infty[$. De plus

$$g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[$$

Donc $0 \in g(]0; +\infty[)$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

Vérifions que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$

On a g est continue sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

Et g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

$$\text{ET: } g\left(\frac{1}{5}\right) = -0,4$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} = \ln(e) - \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$$

3) Dédurre le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

On distingue deux cas ;

$x \in]0; \alpha]$ et $x \in [\alpha; +\infty[$

Soit : $x \in]0; \alpha]$

$$x \in]0; \alpha] \Rightarrow x \leq \alpha$$

et g est str croissante sur $]0; \alpha]$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [\alpha; +\infty[$

$$x \in [\alpha; +\infty[\Rightarrow \alpha \leq x$$

et g est str croissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\Rightarrow g(\alpha) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

3)a) Calculer l'intégrale $A = \int_{\alpha}^1 g(x) dx$, en fonction de α

$$A = \int_{\alpha}^1 g(x) dx = \int_{\alpha}^1 1 + x + \ln x dx$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 \ln x dx$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \int_{\alpha}^1 \ln x dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$A = \frac{3}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + [x \ln(x)]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= \frac{3}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \ln(\alpha) - [x]_{\alpha}^1$$

$$= \frac{3}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \ln(\alpha) - 1 + \alpha$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \ln(\alpha)$$

b) Interpréter géométriquement le nombre A

$$\text{On } A = \int_{\alpha}^1 g(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \ln(\alpha)$$

$$\text{et } (\forall x \in [\alpha; +\infty[): g(x) \geq 0$$

C'est l'aire en cm^2 de la surface plan limitée par la droite (Ox) , la courbe (C_g) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 1$

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \ln x}{1+x} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\frac{1}{x} + 1}$$

$$= +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \ln x}{1+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

la courbe (Cf) admet une demis tangente verticale au point A(0 ; 0) dirigée vers le bas

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

On la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

$$(uv)' = u'v + uv' ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(4 \ln x + 4x \times \frac{1}{x})(x+1) - (4x \ln x \times 1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x \ln x + 4 \ln x + 4x + 4 - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \ln x + 4x + 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Dédire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

On a : pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

et $(x+1)^2 > 0$

Donc le signe de f' est le signe de g sur $]0; +\infty[$

Et on a d'après la partie A) le signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$-\infty$
g(x)	-	0	+

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrons que $f(\alpha) = -4\alpha$

$$\text{On a : } f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha}$$

Et d'après la partie A) le α est solution de l'équation $g(x) = 0$

$$\text{Donc } g(\alpha) = 0 \text{ donc } 1 + \alpha + \ln(\alpha) = 0$$

$$\text{donc } 1 + \alpha = -\ln(\alpha)$$

$$\text{Donc : } f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\alpha \ln \alpha}{-\ln(\alpha)} = -4\alpha$$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0		-4α	$+\infty$

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} ;$$

$$(u^n)' = nu' u^{n-1} ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{Donc : } f''(x)$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 4(\ln x + x + 1) \times 2 \times 1}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 8(\ln x + x + 1)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1) - 8(\ln x + x + 1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{\frac{4(1+x)^2}{x} - 4\left(\frac{2x\ln x + 2x^2 + 2x}{x}\right)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{4[x^2 + 2x + 1 - (2x\ln x + 2x^2 + 2x)]}{x(x+1)^3}$$

$$\text{Donc : } f''(x)$$

$$= \frac{4[x^2 + 2x + 1 - 2x\ln x - 2x^2 - 2x]}{x(x+1)^3}$$

$$\text{Donc : } f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

Il est clair que le signe de f'' dépend de signe de $1 - x^2 - 2x \ln x$

1ère méthode

$$\text{On a : } 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Et on a : } -2x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

on dresse le tableau de signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x^2$	+	0	-
$-2x \ln x$	+	0	-

Soit $x \in]0; 1]$

$$\text{Donc } 1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$$

$$\text{Donc } f''(x) \geq 0$$

Soit $x \in [1; +\infty[$

$$\text{Donc } 1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$$

$$\text{Donc } f''(x) \leq 0$$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1

Donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

2ème méthode

$$x \in]0; 1] \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0$$

$$x \in]0; 1] \Rightarrow -2x \leq 0 \text{ et } \ln(x) \leq 0 \Rightarrow -2x \ln x \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; 1] : 1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$$

$$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 0$$

$$x \in [1; +\infty[\Rightarrow -2x \leq 0 \text{ et } \ln(x) \geq 0 \Rightarrow -2x \ln x \leq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in [1; +\infty[: 1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

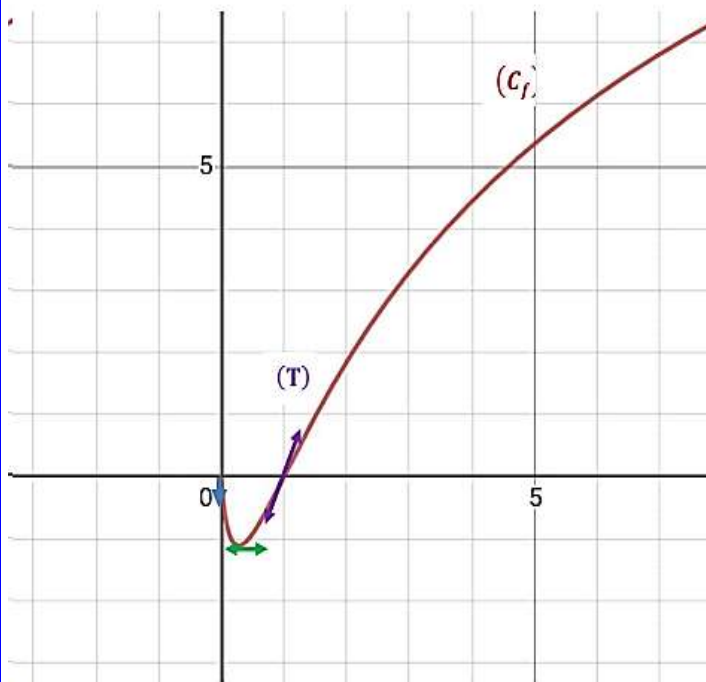
$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 2 \times (x - 1) + 0 ,$$

$$\text{Donc } (T): y = 2x - 2$$

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

On a $\alpha \approx 0.25$ donc $f(\alpha) = -4\alpha \approx -1$



C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

$$\text{Donc } \forall x \in [\alpha; +\infty[: h(x) = f(x)$$

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J à déterminer

➤ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$

On particulier sur $[\alpha; +\infty[$ donc h est continue sur $[\alpha; +\infty[$.

➤ La fonction f est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc la fonction h est str croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = h([\alpha; +\infty[)$

$$\begin{aligned} J = h([\alpha; +\infty[) &= [h(\alpha); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[\\ &=]-4\alpha, +\infty[\end{aligned}$$

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

$$\text{On a : } h(1) = 0 \text{ donc } h^{-1}(0) = 1$$

La fonction h est dérivable en 1 et on a :

$$h'(1) = 2 \neq 0$$

Donc la fonction h^{-1} est dérivable en 0 et

On a :

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$

1

10

*****7

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج 7



RRRRRRRRRRRRRRRR

M7-24

3h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)

الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 07

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	4 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 0,25 1) Calculer u_1
- 0,5 2) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 1 > 0$.
- 0,5 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$
- 0,75 4) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
- 0,5 5) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
- 0,25 6) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 0,25 7) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = e^{u_n} + \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(1; 2; 3)$; $B(2; 1; 3)$; $C(2; -2; 0)$;

$D(2; 0; 2)$ et $E(-4; 6; 2)$ et (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$x(x - 2) - y(2 - y) + z(z - 8) + 14 = 0$$

- 0,5 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ puis en déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés
- 0,25 b) Vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 0,5 2) a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; 1; 4)$ et de rayon $R=2$
- 0,5 b) Calculer $d(\Omega; (ABC))$ et déduire que le plan (ABC) coupe (S) suivant un cercle de rayon r à déterminer
- 0,5 c) Déterminer le triplet de coordonnées du point H centre du cercle (C)
- 0,25 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE)
- 0,5 b) Montrer que la droite (DE) est tangente à la sphère (S) en un point K en déterminant leurs coordonnées

Exercice 3 (4 points) :

- 0,25 **A) 1)** On pose : $u = 1 - \sqrt{2} - i$, Vérifier que $|u| = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
- 0,5 **2)** Montrer que $(1 + i)u = -\sqrt{2} \times \bar{u}$
- 0,5 **3)** Dédire que $2 \arg(u) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$
- B)** On considère les points E ; F et G d'affixes respectifs :
- $z_E = 1 + i$ et $z_F = 1 - i$ et $z_G = -i\sqrt{3}$
- 1)** Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2 , montrer que :
- 0,5 $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$
- 2)** R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et A l'image du point G et C est l'image de N par R , Montrer que : $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$
- 3)** T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ et B l'image du point N et D est l'image de G par T, Montrer que : $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = (2 - \sqrt{3})i$
- 0,5 **4)a)** Montrer que E est le milieu de [AC] et [BD]
- 0,75 **b)** Vérifier que $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$; puis en déduire que quadrilatère ABCD est un losange

Exercice 4 (2 points) :

Un sac S_1 contient 4 boules rouges et 2 boules noires.

Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise trois boules de S_1

a) Calculer $P(A)$, où A " Obtenir trois boules rouge "

b) Calculer $P(B)$, où B " Obtenir au plus deux boules rouge "

2) Maintenant on choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule de ce sac.

On considère les événements :

S_1 : « choisir le sac S_1 » ; S_2 : « choisir le sac S_2 »

R : « Obtenir une boule rouge »

N : « Obtenir une boule noire ».

a) Calculer la probabilité de choisir le sac S_1 et obtenir une boule rouge.

b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.

c) Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

Problème (8 points) :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} e^{x-1} & : x < 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

(C_f) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm

1) Montrer que la fonction f est continue en 1

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ puis interpréter les résultats géométriquement

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(Tu peux poser $t = \sqrt{x}$)

c) Dédire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que f est dérivable au point d'abscisse 1 et que $f'(1) = 0$

b) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[- \{0\}) : f'(x) = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$

et que $(\forall x \in]1; +\infty[) : f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x}$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ en justifiant votre réponse

4) a) Justifier que le point $A(1; 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

b) Montrer que et que $(\forall x \in]1; +\infty[) :$

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x) - 1)}{x^2}$$

c) Montrer que $B(e; 0)$ est un point inflexion de (C_f)

5) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J (à déterminer)

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$

6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) a) Montrer $H: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \ln(x)$ sur $]1; +\infty[$ puis en déduire que:

$$\int_1^e \ln(x) dx = 1$$

b) Par une intégration par partie montrer que:

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Solution d'exercice 01 (3 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \text{ pour}$$

tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1

$$u_1 = \frac{5u_0}{2u_0 + 3} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2 + 3} = \frac{10}{7}$$

2) Montrer par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 1 > 0.$$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$, qui est vraie

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n - 1 > 0$ et montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 \\ &= \frac{5u_n - (2u_n + 3)}{2u_n + 3} \\ &= \frac{3u_n - 3}{2u_n + 3} \\ &= \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} \end{aligned}$$

On a $u_n - 1 > 0$ donc $3(u_n - 1) > 0$

Et on a $u_n > 1$ donc $2u_n + 3 > 5$ donc $2u_n + 3 > 0$

Donc $\frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 1 > 0$$

1) Montrer que :

$$2) \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 - \frac{3}{5}(u_n - 1) &= \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} - \frac{3}{5}(u_n - 1) \\ &= 3(u_n - 1) \left(\frac{1}{2u_n + 3} - \frac{1}{5} \right) \\ &= 3(u_n - 1) \left(\frac{5 - 2u_n - 3}{5(2u_n + 3)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3(u_n - 1)(2 - 2u_n)}{u_n + 2} \\ &= \frac{6(u_n - 1)(1 - u_n)}{5(2u_n + 3)} \end{aligned}$$

Et on a $u_n - 1 > 0$ donc $1 - u_n < 0$ et

$$5(2u_n + 3) > 0$$

$$\text{Donc } \frac{6(u_n - 1)(1 - u_n)}{5(2u_n + 3)} \leq 0 ;$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 - \frac{3}{5}(u_n - 1) \leq 0$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

2^{ème} méthode : (l'encadrement)

On a d'après la question 1) : $u_{n+1} - 1$

$$= \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3}$$

En a $u_n \geq 1$ c-à-dire $2u_n \geq 2$

$$\text{Donc } 2u_n + 3 \geq 5$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2u_n + 3} \leq \frac{1}{5} \text{ et on a } 3(u_n - 1) > 0$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2u_n + 3} \times 3(u_n - 1) \leq \frac{1}{5} \times 3(u_n - 1)$$

$$\text{DONC : } \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

$$\text{D'où } u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

Soit n un entier naturel,

$$\text{On a } u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1) \text{ et } u_n - 1 > 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1) \leq u_n - 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 \leq u_n - 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \leq u_n$$

D'où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

On a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

4) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

1^{ère} méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a

$$u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$ montrons que

$$u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}.$$

$$\text{On a } u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\text{Donc } \frac{3}{5}(u_n - 1) \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

Et on a d'après la question précédente

$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1) \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

D'après le principe de récurrence, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

2^{ème} méthode :

$$\text{On a ; } (\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_n - 1)$$

$$\text{Pour } n=0 \text{ on a : } u_1 - 1 \leq \frac{3}{5}(u_0 - 1)$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ on a : } u_2 - 1 \leq \frac{3}{5}(u_1 - 1)$$

....

$$\text{Pour } n-2 \text{ on a : } u_{n-1} - 1 \leq \frac{3}{5}(u_{n-2} - 1)$$

$$\text{Pour } n-1 \text{ on a : } u_n - 1 \leq \frac{3}{5}(u_{n-1} - 1)$$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on trouve :

$$\begin{aligned} (u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_n - 1) \\ \leq \frac{3}{5}(u_0 - 1) \frac{3}{5}(u_1 - 1) \dots \frac{3}{5}(u_{n-1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{C-à-dire : } u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n (u_0 - 1) \text{ . D'où}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

5) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{On a } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 1 > 0$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\text{Et on a : } -1 < \frac{3}{5} < 1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

Donc d'après théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

6) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = e^{u_n} + \ln(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La fonction $x \mapsto e^x + \ln(x)$ est continue en 1

car c'est une somme de deux fonctions

continues en 1 et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^1 + \ln(1) = e$$

Solution d'exercice 02 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, Soient les points

$A(1; 2; 3); B(2; 1; 3); C(2; -2; 0);$

$D(2; 0; 2)$ et $E(-4; 6; 2)$ et (S) l'ensemble

des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$$

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A et B et C ne sont pas alignés

b) En déduire que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normale

au plan (ABC)

On a le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normale au plan

(ABC)

Donc (ABC): $1 \times x + 1 \times y - 1 \times z + d = 0$ est une équation cartésienne de (ABC)

Donc (ABC): $x + y - z + d = 0$

Et on a $A(1; 2; 3) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A

Donc $1 \times 3 + 1 \times 2 - 1 \times 3 + d = 0$

Donc $0 + d = 0$ donc $d = 0$

Donc (ABC): $x + y - z = 0$

2) a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; 1; 4)$ et de rayon $R=2$

1^{ère} méthode :

$x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$

Donc $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 8z + 14 = 0$

Donc $x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 + z^2 - 8z + 4^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 - 14$

Donc (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 2^2$

Donc (S) est une sphère de centre

$\Omega(1; 1; 4)$ et de rayon $R = 2$

2^{ème} méthode

On a $x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$

Donc $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 8z + 14 = 0$

On pose

$a = -2$; $b = -2$; $c = -8$ et $d = 14$

$a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$= (-2)^2 + (-2)^2 + (-8)^2 - 4 \times 14$
 $= 16 > 0$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre

$\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$

Donc $\Omega(1; 1; 4)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

b) Calculer $d(\Omega; (ABC))$ et déduire que le plan (ABC) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon r à déterminer

On a (ABC): $x + y - z = 0$ et $\Omega(1; 1; 4)$ donc :

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc $d(\Omega; (ABC)) = \frac{2}{\sqrt{3}} < R = 2$

D'où le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon r et: $r = \sqrt{R^2 - d^2} =$

$$\sqrt{2^2 - (\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

c) Déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (C)

La droite (ΩH) est perpendiculaire au plan

(ABC) donc le vecteur $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})(1; 1; -1)$

est directeur à la droite (ΩH)

Soit $M(x; y; z) \in ((\Omega H))$

Donc $((\Omega H)) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, est une

représentation paramétrique de la droite (D)

($x; y; z$) les coordonnées de H vérifie le

système $\begin{cases} (\Omega H) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC) : x + y - z = 0 \end{cases}$

Donc $(1 + t) + (1 + t) - (4 - t) = 0$ donc

$3t - 2 = 0$ d'où $t = \frac{2}{3}$

on remplace t dans $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$, on

trouve $\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ z = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$ donc $H(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{10}{3})$

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE)

La droite (DE) passant par D (2 ; 0 ; 2) et E(-4 ; 6 ; 2) les deux points donc le vecteur

$\overrightarrow{ED}(6; -6; 0)$ est directeur à la droite (DE)

Soit $M(x; y; z) \in (DE)$

Donc (DE) : $\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -6t \\ z = 2 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (DE)

b) Montrer que la droite (DE) est tangente à la sphère (S) en un point K en déterminant leurs coordonnées

On résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \text{(DE)} : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -6t \\ z = 2 \end{cases} & (t \in \mathbb{R}) \\ \text{(S)} : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$(2 + 6t - 1)^2 + (-6t - 1)^2 + (2 - 4)^2 = 4$$

$$\text{Donc } (1 + 6t)^2 + (6t + 1)^2 + (-2)^2 = 4$$

$$1 + 12t + 36t^2 + 1 + 12t + 36t^2 + 4 - 4 = 0$$

$$\text{Donc } 72t^2 + 24t + 2 = 0$$

$$\text{Donc } 2(36t^2 + 12t + 1) = 0$$

$$\text{Donc } 36t^2 + 12t + 1 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 36 \times 1 = 144 - 144 = 0$$

Donc $36t^2 + 12t + 1 = 0$ admet une unique solution $t = -\frac{12}{2 \times 36} = -\frac{1}{6}$

Donc la droite (DE) est tangente à la sphère (S) en un point K

On remplace $t = -\frac{1}{6}$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 2 - 6 \times \frac{1}{6} = 1 \\ y = 6 \times \frac{1}{6} = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Donc } K(1; 1; 2)$$

Solution d'exercice 04 (3 points)

A) 1) On pose : $u = 1 - \sqrt{2} - i$; calculer $|u|$

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2) Montrer que $(1 + i)u = -\sqrt{2} \times \bar{u}$

$$\begin{aligned} (1 + i)u &= (1 + i)(1 - \sqrt{2} - i) \\ &= 1 - \sqrt{2} - i + i - i\sqrt{2} + 1 \\ &= 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad (*) \\ -\sqrt{2} \times \bar{u} &= -\sqrt{2} \times (1 - \sqrt{2} + i) \\ &= -\sqrt{2} + 2 - i\sqrt{2} \quad (**) \end{aligned}$$

De (*) et (**) on a : $(1 + i)u = -\sqrt{2} \times \bar{u}$

3) Dédurre que $\arg(u) \equiv \frac{3\pi}{8} [\pi]$

$$\begin{aligned} (1 + i)u &= -\sqrt{2} \times \bar{u} \Leftrightarrow \arg[(1 + i)u] \\ &\equiv \arg[-\sqrt{2} \times \bar{u}] [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg(1 + i) + \arg(u) \\ &\equiv \arg(-\sqrt{2}) + \arg(\bar{u}) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + \arg(u) \\ &\equiv \arg(-\sqrt{2}) + \arg(\bar{u}) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arg(u) \equiv \pi - \arg(u) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow 2 \arg(u) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\Leftrightarrow 2 \arg(u) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{aligned}$$

B) On considère les points E ; F et G d'affixes respectifs :

$$z_E = 1 + i \text{ et } z_F = 1 - i \text{ et } z_G = -i\sqrt{3}$$

1) Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2, montrer que : $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$

$$\begin{aligned} h(F) = N &\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = 2 \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow z_N - z_G \\ &= 2(z_F - z_G) \\ &\Leftrightarrow z_N = 2(z_F - z_G) + z_G \\ &\Leftrightarrow z_N = 2(1 - i + i\sqrt{3}) - i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_N = 2 - 2i + 2i\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_N = 2 - 2i + i\sqrt{3} \\ &= 2 + i(\sqrt{3} - 2) \end{aligned}$$

2) R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et A

l'image de G et C est l'image de N par R

Montrer que : $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$

$$R(G) = A \Leftrightarrow z_A - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_G - z_O)$$

$$\Leftrightarrow z_A = i z_G \quad ; \text{ car } e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\Leftrightarrow z_A = -\sqrt{3}$$

$$R(N) = C \Leftrightarrow z_C = i z_N$$

$$\Leftrightarrow z_C = i(2 + i(\sqrt{3} - 2))$$

$$\Leftrightarrow z_C = 2i - (\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3} + 2i$$

3) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe

$2i$ et B l'image du point N et D est l'image

de G par T

Montrer que : $z_B = 2 + i\sqrt{3}$

et $z_D = (2 - \sqrt{3})i$

$$T(N) = B \Leftrightarrow \vec{NB} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_N = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_B = z_{\vec{u}} + z_N$$

$$\Leftrightarrow z_B = 2i + 2 + i(\sqrt{3} - 2)$$

$$= 2 + i\sqrt{3}$$

$$T(G) = D \Leftrightarrow \vec{GD} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_D - z_G = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_D = z_{\vec{u}} + z_G$$

$$\Leftrightarrow z_D = 2i - i\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})i$$

4)a) Montrer que E est le milieu de [AC] et [BD]

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_C}{2} &= \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} \\ &= \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i = z_E \end{aligned}$$

Donc E est le milieu de [AC]

$$\begin{aligned} \frac{z_B + z_D}{2} &= \frac{2 + i\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i}{2} \\ &= \frac{2 + i\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3}i}{2} = 1 + i \\ &= z_E \end{aligned}$$

E est le milieu [BD]

b) Vérifier que $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$; puis en déduire que

quadrilatère ABCD est un losange

$$z_C - z_E = (2 - \sqrt{3} + 2i) - (1 + i)$$

$$= 1 - \sqrt{3} + i \quad ; (**)$$

$$i(z_B - z_E) = i(2 + i\sqrt{3} - 1 - i)$$

$$= 2i - \sqrt{3} - i + 1$$

$$= 1 - \sqrt{3} + i \quad ; (*)$$

Donc de (*) et (**) on a : $z_C - z_E = i(z_B - z_E)$

$$\text{Donc : } \frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$$

- On a : [AC] et [BD] sont de même milieu donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Et on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{(EB; EC)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc les droites (EB) et (EC) sont perpendiculaires

Donc ABCD est un losange

Solution d'exercice 4 (2 points)

Un sac S_1 contient 4 boules rouges et 2 boules noires.

Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise trois boules de S_1

a) Calculer $P(A)$, où A "Obtenir trois boules rouge"

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_4^3}{A_6^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{5}$$

b) Calculer $P(B)$, où B "Obtenir au plus deux boules rouge"

$(R; \bar{R}; \bar{R})$ ou $(R; R; \bar{R})$

1ère méthode :

On a l'événement contraire de B est l'événement A donc

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2ème méthode :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3(A_4^1 \times A_2^2) + 3(A_4^2 \times A_2^1)}{A_6^3} = \frac{4}{5}$$

2) On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule

On considère les événements :

S_1 : « choisir le sac S_1 »

S_2 : « choisir le sac S_2 »

R : « Obtenir une boule rouge »

N : « Obtenir une boule noire ».

Rappel de cours :

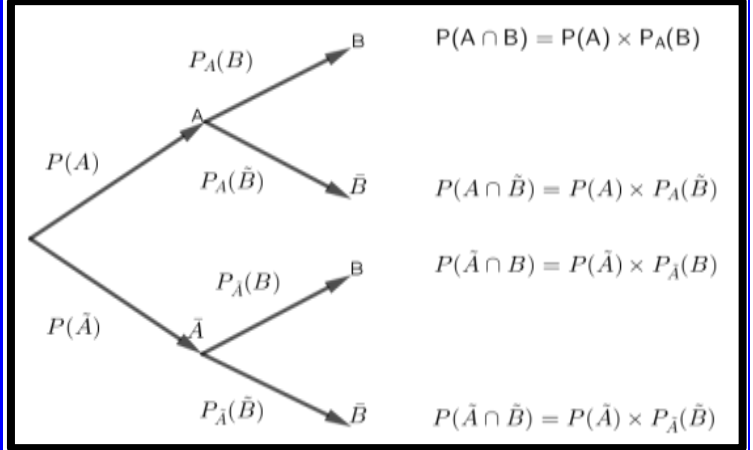
➤ Probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

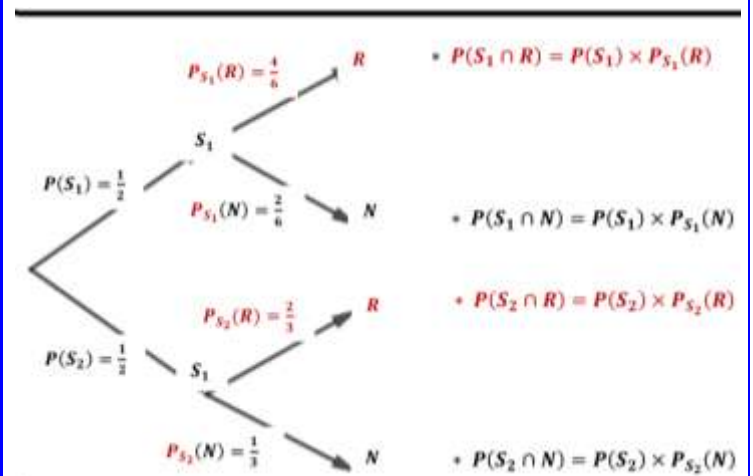
➤ Loi des probabilités totales :

On a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$,

Donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.



Shématisons d'abord l'expérience



Le sac S_1 contient 4 boules rouges et 2 boules noires.

Le sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.

a) Calculer la probabilité de choisir le sac S_1 et obtenir une boule rouge :

$$P(S_1 \cap R) = P(S_1) \times P_{S_1}(R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(S_1 \cap R) + P(S_2 \cap R) \\ &= P(S_1) \times P_{S_1}(R) + P(S_2) \times P_{S_2}(R) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c) Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

$$\begin{aligned} P_N(S_1) &= \frac{P(N \cap S_1)}{P(N)} = \frac{P(S_1) \times P_{S_1}(N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{6}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution du problème :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} e^{x-1} & : x < 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1

$$\text{On a } f(1) = 1 - (\ln 1)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - (\ln x)^2 = 1 - 0 = 1 = f(1)$$

Donc f est continue à droite de 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} e^{x-1} = \frac{1}{1} e^0 = 1 = f(1)$$

Donc f est continue à gauche de 1

D'où f est continue en 1

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ puis

interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{x-1} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$$

Interprétation géométrique :

La droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{x-1} = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x-1} = e^{-1} > 0$$

Interprétation géométrique :

La droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f)

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-1} \times \frac{1}{x} \times e^x = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Interprétation géométrique :

La droite d'équation $y = 0$ c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ (Tu peux poser } t = \sqrt{x} \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (\ln x)^2 = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\text{On pose } X = \sqrt{x} \text{ donc } x = X^2 ; \text{ or } x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\ln x)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

c) Dédurre la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (C_f) admet un branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que f est dérivable au point d'abscisse 1 et que $f'(1) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(\ln x)^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln(x)}{x - 1} \times \ln(x) = 0 \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} e^{x-1} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1 + 1 - x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x(x-1)} + \frac{1-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \times \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{t+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{t+1} ; \text{ j'ai poser } t = x - 1 \\ &= (1 \times 1) - 1 \\ &= 0 ; \text{ car } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et

$$f'_g(1) = 0$$

On a $f'_d(1) = f'_g(1) = 0$ donc **f est dérivable au point d'abscisse 1 et que $f'(1) = 0$**

b) Montrer que :

$$(\forall x \in]-\infty; 1[- \{0\}): f'(x) = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$$

$$\text{et que } (\forall x \in]1; +\infty[): f'(x) = \frac{-2\ln x}{x}$$

On a la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$

Soit $x \in]-\infty; 1[- \{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x} e^{x-1} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' e^{x-1} + \frac{1}{x} (e^{x-1})' \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{x-1} + \frac{1}{x} e^{x-1} = -\frac{1}{x^2} e^{x-1} + \frac{x}{x^2} e^{x-1} \\ &= \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2} \end{aligned}$$

Soit $x \in]1; +\infty[$

On a la fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - (\ln x)^2)' \\ &= 0 - 2\ln'(x)(\ln x)^1 = -\frac{2\ln x}{x} \end{aligned}$$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$

Soit $x \in]-\infty; 1[- \{0\}$

On a $x < 1$ donc $x - 1 < 0$

et on a $e^{x-1} > 0$ et $x^2 > 0$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur

$]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$

Soit $x \in]1; +\infty[$

On a $x > 1$ donc $\ln(x) > 0$

$$\text{Donc } f'(x) = -\frac{2\ln x}{x} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur

$]1; +\infty[$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	
$f(x)$	0 	$+\infty$ 	$-\infty$

4) a) Justifier que le point $A(1; 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

On a $f'(1) = 0$ donc f' s'annule et ne change pas de signe en 1. Donc le point $A(1; 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

b) Montrer que et que $(\forall x \in]1; +\infty[)$:

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x)-1)}{x^2}$$

Soit $x \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{(-2\ln(x))'x + 2\ln x \times (x)'}{x^2} \\ &= \frac{-2 \times \frac{1}{x} \times x + 2\ln x}{x^2} = \frac{2\ln(x) - 2}{x^2} \\ &= \frac{2(\ln(x) - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

c) Montrer que $B(e; 0)$ est un point d'inflexion de (C_f)

Soit $x \in]1; +\infty[$ on a $f''(x) = \frac{2(\ln(x)-1)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2(\ln(x)-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$

Donc f'' s'annule et change de signe en e donc le point $B(e; f(e))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

5) Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J (à déterminer)

- g est dérivable sur $]1; +\infty[$ donc elle est continue sur $]1; +\infty[$
 - La fonction g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$
- Donc g admet une fct réciproque g^{-1} , définie sur $J = g(]1; +\infty[)$

$$J = g(]1; +\infty[)$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(1) \right[=]-\infty; 1[$$

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$ cherchons $y \in [1; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 1 - (\ln y)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow (\ln y)^2 = 1 - x$$

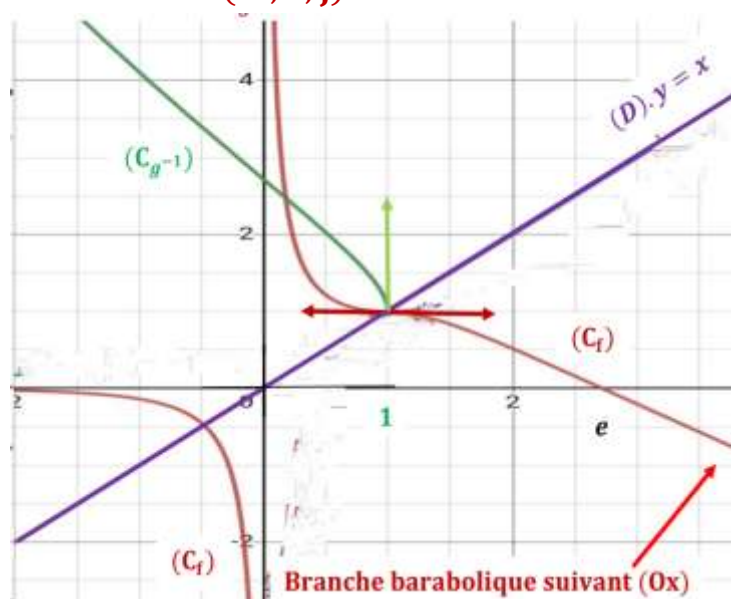
$$\Leftrightarrow |\ln(y)| = \sqrt{1-x};$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \sqrt{1-x}, \text{ car } y > 1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\sqrt{1-x}}$$

D'où : $g^{-1}(x) = e^{\sqrt{1-x}}$; pour tous $x \in]-\infty; 1[$

6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



7)a) Montrer $H: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \ln(x)$ et déduire que: $\int_1^e \ln(x) dx = 1$

On a fonction H est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$H'(x) = (x \ln(x) - x)' = \ln(x) + x - x = \ln(x)$$

Donc $H: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \ln(x)$ sur $]1, +\infty[$

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e = e \ln(e) - e - (0 - 1) = 1$$

b) Par I.P.P montrer que

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

Posons

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$= [x (\ln x)^2]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln(x)}{x} \times x dx$$

$$= (e - 0) - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - (2 \times 1) = e - 2$$

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Soit $x \in [1, e]$

$$\text{Donc } x \leq e \text{ donc } \ln(x) \leq 1$$

$$\text{Donc } (\ln x)^2 \leq 1 \text{ donc } 1 - (\ln x)^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } f(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in [1, e]: |f(x)| = f(x)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x)| dx \times u.a = \int_1^e f(x) dx \times u.a \\ &= \int_1^e 1 - (\ln x)^2 dx . cm^2 \\ &= \left(\int_1^e 1 dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx \right) cm^2 \\ &= ([x]_1^e - (e - 2)) cm^2 \\ &= (e - 1 - (e - 2)) cm^2 = 1 cm^2 \end{aligned}$$

1

10

*****8

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج 8



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M8-24

3h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)

الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 08

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Soit (U_n) une suite tel que $U_0 = 4$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1}$

- 0,5 **1)** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 2$
- 0,75 **2)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{U_n + 1}$ puis en déduire que la suite (U_n) est convergente
- 3)** Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$
- 0,5 **a)** Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$
- 0,25 **b)** Calculer (V_n) en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 0,5 **c)** déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = \frac{4n+12}{2n+3}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 5)** Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = V_0 U_0 + \dots + V_n U_n$
- 0,5 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points : $A(1; 1; 0)$; $B(0; 2; 0)$; $C(0; 0; 3)$.

- 0,5 **1) a)** Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés
- 0,25 **c)** Vérifier que $3x + 3y + 2z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2)** Soit (D) la droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}(6; 6; 4)$
- 0,25 **a)** Montrer que (D) et (ABC) sont orthogonaux
- 0,25 **b)** Déterminer une représentation paramétrique de (D)
- 0,5 **c)** Déterminer les coordonnées de point H l'intersection de (ABC) et (D)
- 3)** Soit (S_α) la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \alpha = 0$
- Avec α est un réel strictement positif.
- 0,5 **a)** Déterminer en fonction de α , le centre Ω et le rayon R de la sphère (S_α) .
- 0,75 **b)** Déterminer la valeur de α pour la quelle le plan (ABC) est tangente à la sphère (S_α)

Exercice 3 (3 points) :

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points $A(a); B(b); C(c)$ et $D(d)$ tels que : $a = -4$; $b = -1 + i\sqrt{3}$; $c = -ib$ et $d = (1 - i)b$

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de b

b) En déduire la forme trigonométrique de c

2) Soit la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'image de points B par la rotation R

b) En déduire la nature du triangle OBC

3) Vérifier que $c = d - b$

4) Montrer que le quadrilatère $OCDB$ est un carré

5) a) Montrer que : $b - a = \sqrt{3}c$

b) En déduire que les points $A; B$ et D sont alignés

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 9 boules :

Cinq boules rouges numérotées 0;1;1;1;2 et **quatre** boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de ce sac

1) On considère les événements suivants:

A : " Obtenir 3 boules portant des numéros pairs"

B "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3

C "Obtenir 3 boules vertes"

a) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{21}$ et que $P(B) = \frac{5}{14}$

b) Montrer que : $P(B \cap C) = \frac{1}{42}$ et en déduire que $P_B(C) = \frac{1}{15}$

c) Les événements C et B sont-ils indépendants, justifier votre réponse ?

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des numéros obtenus.

a) Justifier que les valeurs de X sont 0; 1; 2; 4

b) Montrer que $P(X = 0) = \frac{7}{12}$

c) Calculer $P(X = 1)$, puis déterminer la loi de probabilité X

Problème (8 points) :

A) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1 - x)e^{2-x} + 1$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = (x - 2)e^{2-x}$

3) Dresser le tableau de variations de g puis montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$$

B) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 2 + x e^{2-x}$$

(C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité: 1cm)

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) en précisant leur point d'intersection

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

5) a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(2; 2)$

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $0 < \alpha < 1$

7) Construire (T) ; (Δ) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8) a) Par une intégration par partie calculer $\int_0^2 x e^{2-x} dx$

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites $x=0$ et $x=2$

Solution d'exercice 01 (3 points)

Soit (U_n) une suite tel que $U_0 = 4$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1}$$

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}):$

$$U_n > 2$$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 4 > 2$, qui est vraie

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{5U_n - 4}{U_n + 1} - 2 \\ &= \frac{5U_n - 4 - 2(u_n + 1)}{U_n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 6}{U_n + 1} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{U_n + 1} \end{aligned}$$

On a $u_n > 2$

Donc $u_n + 1 > 3$

Donc $u_n + 1 > 0$

Et on a $u_n > 2$

Donc $u_n - 2 > 0$

Donc $3(u_n - 2) > 0$ Donc $\frac{3(u_n - 2)}{U_n + 1} > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$ donc $u_{n+1} > 2$

D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

4) Mq $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{U_n + 1}$ puis

en déduire que la suite (U_n) est convergente

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5U_n - 4}{U_n + 1} - u_n \\ &= \frac{5u_n - 4 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} \\ &= \frac{5u_n - 4 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{-(u_n^2 - 4u_n + 4)}{u_n + 1} \\ &= \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1} < 0 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente

2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $V_n = \frac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

Rappel :

(U_n) arithmétique

Définition :

$$U_{n+1} - U_n = r$$

U_n en fonction de n

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

Cas particulier :

$$U_n = U_0 + nr$$

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{3}{3(u_n - 2)} \\ &= \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} \\ &= \frac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{2}$$

b) Calculer (V_n) en fonction de n

Soit n un entier naturel,

On a suite (v_n) est arithmétique de raison

$$r = \frac{1}{3} \text{ et } v_0 = \frac{1}{2}$$

Donc $v_n = v_0 + r(n - 0)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = \frac{4n+12}{2n+3}$ et
déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$

Soit n un entier naturel,

Et on a : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$ donc :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \Rightarrow u_n - 2 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\frac{12}{6} + \frac{4}{6}n}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{4n + 12}{2n + 3}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n + 12}{2n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(4 + \frac{12}{n})}{n(2 + \frac{3}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(4 + \frac{12}{n})}{(2 + \frac{3}{n})} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{n} = 0$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$

Notation et rappel :

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=0}^n u_k v_k$$

$$\sum_{k=0}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$

(U_n) arithmétique

Somme des termes

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=p}^n U_k = U_p + \dots + U_n \\ &= \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2} \end{aligned}$$

Cas particulier :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + \dots + U_n \\ &= \frac{(n + 1)(U_0 + U_n)}{2} \end{aligned}$$

Soit n un entier naturel,

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \Rightarrow v_n(u_n - 2) = 1 \Rightarrow u_n v_n - 2v_n$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow u_n v_n = 1 + 2v_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n (1 + 2v_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n 1 + 2 \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k$$

$$= (n + 1)$$

$$+ 2 \frac{(n - 0 + 1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k$$

$$= (n + 1) + (n + 1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = (n + 1)(1 + 1 + \frac{1}{3}n)$$

$$= \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \frac{1}{3}(n + 1)(6 + n)$$

$$= \frac{n^2 + 7n + 6}{3}$$

Solution d'exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère

orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points : $A(1; 1; 0)$;

$B(0; 2; 0)$; $C(0; 0; 3)$.

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

Rappel : Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A ; B et C ne sont pas alignés

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

Donc (ABC): $3x + 3y + 2z + d = 0$

Et on a $A(1, 1, 0) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A dans :

$$3x + 3y + 2z + d = 0$$

Donc : $3 + 3 + 0 + d = 0$ donc $d = -6$

Donc (ABC): $3x + 3y + 2z - 6 = 0$

2) Soit (D) la droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}(6; 6; 4)$

a) Montrer que : $(D) \perp (ABC)$

$$\text{On a : } \vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer

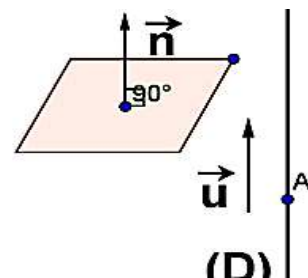
que $\vec{u} = 2 \vec{n}$

Donc les vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont

colinéaires

Donc $(D) \perp (ABC)$



b) Déterminer une représentation paramétrique de (D)

On a (D) la droite passant par le point

$A(1; 1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6; 6; 4)$

donc

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 1 + 6t \\ z = 4t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

c) Déterminer les coordonnées de point H l'intersection de (ABC) et (D)

On a (D) et (ABC) sont sécantes en $H(x; y; z)$

alors les coordonnées $(x; y; z)$ vérifie

$$\text{le système : } \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 1 + 6t \\ z = 4t \\ 3x + 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Donc on remplace $x = 1 + 6t$; $y = 1 + 6t$ et $z = 4t$ dans

$$3x + 3y + z - 6 = 0$$

On trouve : $3(1 + 6t) + 3(1 + 6t) + 2(4t) - 6 = 0$

Donc $3 + 18t + 3 + 18t + 8t - 6 = 0$

Donc $44t = 0$ donc $t = 0$ donc

$$\begin{cases} x = 1 + 6 \times 0 \\ y = 1 + 6 \times 0 \\ z = 4 \times 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc (D) et (ABC) sont sécantes en $H(1; 1; 0)$

3)a) Déterminer en fonction de α , le centre Ω et le rayon R de la sphère (S_α) .

Rappel : L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que :

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est une sphère si $D = a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

➤ Son centre est le point $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right)$

➤ Son rayon est $r = \frac{\sqrt{D}}{2}$

$$(S_\alpha) : x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \alpha = 0$$

On pose $a = -1$; $b = -2$; $c = 0$ et $d = \frac{5}{4} - \alpha$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$= (-1)^2 + (-2)^2 - 4 \times \left(\frac{5}{4} - \alpha \right)$$

$$= 5 - 5 + 4\alpha = 4\alpha > 0 \text{ car } \alpha > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de

$$\text{centre } \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right)$$

Donc $\Omega \left(\frac{1}{2}; 1; 0 \right)$ et de rayon

$$R = \frac{\sqrt{4\alpha}}{2} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{2} = \sqrt{\alpha}$$

b) Déterminer la valeur de α pour la quelle le plan (ABC)

est tangente à la sphère (S_α)

Rappel : DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient $(P) : ax + by + cz + d = 0$

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned} d(\Omega; (ABC)) &= \frac{\left| \frac{3}{2} + 3 - 6 \right|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2}} \\ &= \frac{\left| -\frac{3}{2} \right|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{22}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{22}} \end{aligned}$$

Le plan (ABC) est tangente à la sphère (S_α)

$$\text{Donc : } d(\Omega; (ABC)) = R$$

$$\text{Donc } \frac{3}{2\sqrt{22}} = \sqrt{\alpha}$$

$$\text{Donc } \alpha = \frac{9}{4 \times 22} = \frac{9}{88}$$

Solution d'exercice 03 (3points)

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ et $D(d)$ tels que : $a = -4$; $b = -1 + i\sqrt{3}$; $c = -ib$ et $d = (1 - i)b$

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de b

$$|b| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} b &= -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

b) En déduire la forme trigonométrique de c

$$\begin{aligned} c &= -ib = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \end{aligned}$$

2) Soit la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'image de points B par la rotation R

$$O a : c = -ib$$

$$\begin{aligned} c &= -ib \Leftrightarrow c = e^{-i\frac{\pi}{2}} b \Leftrightarrow c - o = e^{-i\frac{\pi}{2}} (b - o) \\ &\Leftrightarrow R(B) = C \end{aligned}$$

b) En déduire la nature du triangle OBC

$$R(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc triangle OBC est rectangle et isocèle en O

3) Vérifier que $c = d - b$

$$d - b = (1 - i)b - b = b(1 - i - 1) = -ib = c$$

4) Montrer que $OCDB$ est un carré

$$\text{On a } c = d - b \text{ donc } c - o = d - b$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$$

Donc le quadrilatère $OCDB$ est un parallélogramme

$$\text{De plus on a } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le quadrilatère $OCDB$ est un rectangle

$$\text{De plus on a } OB = OC$$

D'où Donc le quadrilatère $OCDB$ est un carré

3) a) Montrer que : $b - a = \sqrt{3} c$

$$\text{On a : } b - a = -1 + i\sqrt{3} - (-4) \\ = 3 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Et } \sqrt{3} c = \sqrt{3} (-ib) = -i\sqrt{3}(-1 + i\sqrt{3}) \\ = 3 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } b - a = \sqrt{3} c$$

b) En déduire que les points A ; B et D sont alignés

$$\text{On a } b - a = \sqrt{3} c \text{ et } c = d - b$$

$$\text{Donc } b - a = \sqrt{3} (d - b)$$

$$\text{Donc } \frac{b-a}{d-b} = \sqrt{3}$$

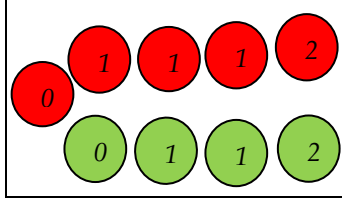
Donc les points A ; B et D sont alignés

Solution d'exercice 03 (3 points)

Une urne contient 9 boules :

Cinq boules rouges numérotées 0;1;1;1;2 et quatre boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de ce sac



a) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{21}$ et que $P(B) = \frac{5}{14}$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix boules

Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

A : " Obtenir 3 boules portant des numéros pairs"

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{84} = \frac{C_4^1}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Montrer que $P(B) = \frac{5}{14}$

B "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3(1 ; 1 ; 1) ou (0 ; 1 ; 2)

$$\text{Donc : } \text{Card}(B) = C_5^3 + (C_2^1 \times C_2^1 \times C_5^1) \\ = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} + 2 \times 2 \times 5 = 10 + 20 = 30$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

b) Montrer que : $P(B \cap C) = \frac{1}{42}$

$B \cap C$ " Obtenir 3 boules vertes dont la somme des numéros est égale à 3" (0 ; 1 ; 2)

$$\text{Donc : } \text{Card}(B \cap C) = C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 \\ = 2$$

$$\text{Par suite } p(B \cap C) = \frac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} \\ = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

En déduire que $P_B(C) = \frac{1}{15}$

$$P_B(C) = \frac{p(B \cap C)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{5}{14}} \\ = \frac{1}{42} \times \frac{14}{5} = \frac{1}{15}$$

c) Les événements C et B sont-ils indépendants, justifier votre réponse ?

On a $P_B(C) = \frac{1}{15}$ et

$$p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{84} = \frac{C_4^1}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Donc $P_B(C) \neq p(C)$

D'où les événements C et B ne sont pas indépendants

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des numéros obtenus.

a) Justifier que $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$.

(X = 0) " Le produit des trois numéros obtenus est 0" (0 ; 0 ; 0)

(X = 1) " Le produit des trois numéros est 1" (1 ; 1 ; 1) "

(X = 2) " Le produit des trois numéros est 1" (2 ; 1 ; 1) "

(X = 4) " Le produit des trois numéros est 1" (2 ; 2 ; 1) "

b) Montrer que $P(X = 0) = \frac{7}{12}$

$(X = 0)$ " Le produit des trois numéros est 0 " $(0; \bar{0}; \bar{0})$ ou $(0; 0; \bar{0})$

$$\begin{aligned} \text{Card}(X = 0) &= (C_2^1 \times C_7^2) + (C_2^2 \times C_7^1) \\ &= 2 \times \frac{7 \times 6}{2} + 1 \times 7 = 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(X = 0) &= \frac{\text{Card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{49}{84} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

c) Calculer $P(X = 1)$, puis déterminer la loi de probabilité X

$(X = 1)$ " Le produit des trois numéros est 1 " $(1; 1; 1)$ "

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_5^3}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{84} \\ &= \frac{5}{42} \end{aligned}$$

$(X = 2)$ " Le produit des trois numéros est 1 " $(2; 1; 1)$ "

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_5^2}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{20}{84} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

$(X = 4)$ " Le produit des trois numéros est 1 " $(2; 2; 1)$ "

$$p(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^2 \times C_5^1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{84}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité de variable aléatoire X .

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{84}$

Solution du problème (8 points)

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^{2-x} + 1$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^{2-x} + 1$$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^{2-x} + 1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{2-x} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} - xe^{2-x} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{e^x} - \left(e^2 \times \frac{x}{e^x} \right) + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{e^x} - \left(e^2 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) + 1$$

$$= 1$$

$$\left(\text{Car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{e^x} = 0 \right)$$

$$\left(\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \right)$$

2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad g'(x) = (x - 2)e^{2-x}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 \times e^{2-x} + (1 - x) \times (-e^{2-x}) + 0 \\ &= -e^{2-x} - (1 - x)e^{2-x} \\ &= -e^{2-x} - e^{2-x} + xe^{2-x} \\ &= -2e^{2-x} + xe^{2-x} \\ &= (x - 2)e^{2-x} \end{aligned}$$

3) Dresser le tableau de variations de gOn a $\forall x \in]-\infty; 2]; x - 2 \leq 0$ et $\forall x \in [2; +\infty[; x - 2 \geq 0$, donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1 $+\infty$	$g(2) = 0$	

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) \geq 0$ Le nombre 0 est une valeur minimale de la fonction g sur $\mathbb{R}$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) \geq 0$ **B) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$f(x) = x - 2 + x e^{2-x}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 + x e^{2-x} = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + x e^{2-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \left(e^2 \times \frac{x}{e^x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \left(e^2 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$$

$$\left(\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \right)$$

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = g(x)$ La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ La fonction $x \mapsto e^{2-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ Donc la fonction $x \mapsto x e^{2-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ La fonction $x \mapsto x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ D'où la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - 0 + (1 \times e^{2-x} + x \times (-e^{2-x})) \\
 &= 1 + e^{2-x} - x e^{2-x} \\
 &= e^{2-x}(1 - x) + 1 = g(x)
 \end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de fSoit $x \in \mathbb{R}$; On a : $f'(x) = g(x)$ D'après la partie A) : $g(x) \geq 0$ Donc $f'(x) \geq 0$ D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) a) Montrer que la droite**(Δ) : $y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$**

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + x e^{2-x} - (x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \times \frac{x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \right)$$

Donc la droite (Δ) : $y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ **b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ)**On a : $f(x) - (x - 2) = x e^{2-x}$ Et comme $e^{2-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - (x - 2)$ est le signe de x qui s'annule en 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$	-	0	+
La position relative de (C_f) et la droite (Δ)	La courbe (C_f) est en dessous de (Δ)	le point B(0; -2) est point d'intersection de (C_f) et (Δ)	(Δ) est en dessus de (Δ)

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 + x e^{2-x}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2}{x} + e^{2-x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

5) a) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(2; 2)$

$$\text{On a : } f''(x) = g'(x) = (x - 2)e^{2-x}$$

$$\text{On a } \forall x \in]-\infty; 2]; x - 2 \leq 0 \text{ et } \forall x \in [2; +\infty[; x - 2 \geq 0, \text{ donc :}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

On a : f'' s'annule et change de signe en 2 donc le point $A(2; f(2))$ c-à-dire $A(2; 2)$ est un point d'inflexion de (C_f)

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point 2

$$(T): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$\text{On a : } f'(2) = g(2) = 0 \text{ et } f(2) = 2$$

$$\text{Donc : } (T): y = 2$$

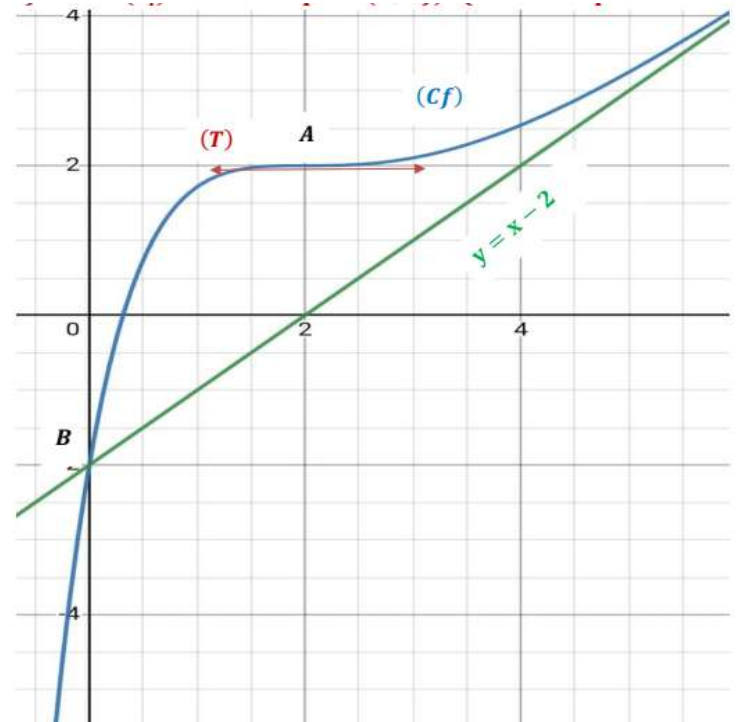
6) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ Donc $0 \in f(\mathbb{R})$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

- La fonction f est continue sur $[0; 1]$
- f est strictement croissante sur $[0; 1]$
- Et : $f(0) = -2$ et $f(1) = e - 2$
- Donc $f(0) \times f(1) < 0$ Donc : $\alpha \in]0, 1[$

7) Tracer (C_f) dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



8) a) Par IPP calculer $\int_0^2 x e^{2-x} dx$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2-x} \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{2-x} \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$\int_0^2 x e^{2-x} dx = [-x e^{2-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{2-x} dx \\ = -2e^0 + 0 - [e^{2-x}]_0^2 \\ = -2 - e^0 + e^2 = -3 + e^2$$

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites $x=0$ et $x=2$

On a (C_f) est en dessus de (Δ) ; $y = x$ sur l'intervalle $[0, 2]$

D'après la question B)3)b)

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 2]: |f(x) - y| = f(x) - y$$

$$A = \int_0^2 |f(x) - y| dx \times u.a \\ = \int_0^2 f(x) - y dx \times u.a \\ = \int_0^2 x - 2 + x e^{2-x} - (x - 2) dx \cdot \text{cm}^2 \\ = \int_0^2 x e^{2-x} dx \cdot \text{cm}^2 \\ = -3 + e^2 \cdot \text{cm}^2 = (e^2 - 3) \text{cm}^2$$

1

10

*****9

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج 9



RRRRRRRRRRRRRRRR

M8-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 09

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3,5 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

0,5 **1)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \sqrt{3}$

0,5 **2)** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

0,25 **3)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

0,75 **4)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$

0,5 **5)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$.

0,25 **6)** En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

0,25 **7)** Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique telle que :

$w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\lim_{n \in \mathbb{N}} (w_n)$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(-1; 0; 1)$; $B(1; -1; 0)$; $C(0; 1; 1)$

0,25 **1) a)** Montrer que les points A ; B et C forment un plan

0,25 **b)** Montrer que $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5 **c)** Montrer que : $x - y + 3z - 2 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

0,75 **a)** Montrer que le plan (ABC) coupe (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon r et le centre

0,5 **b)** Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le milieu du segment $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB)

0,25 **c)** Montrer que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires

0,5 **d)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plans (P) et (ABC)

Exercice 3 (3,5 points) :

0,5

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ **B) On considère dans le repère complexe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) , le point A(a) tels que**

$$a = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et le point C(c) le milieu du segment } [OA]$$

0,75

1) Déterminer la forme trigonométrique de a et en déduire la forme trigonométrique de c **2) Soit la rotation R de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et soit b l'affixe du point B l'image de A par la rotation R**

0,5

a) Vérifier que $b - c = -ic$ et en déduire la nature du triangle OBC

0,5

b) Montrer que $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

0,75

c) Montrer que l'ensemble des point M d'affixe z tels que $|2z - a| = 1$ est le cercle circonscrit au triangle OAB**Exercice 9 (3 points) :****A) Un sac S_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.****On tire au hasard et simultanément deux boules du sac S_1** **Soient les deux évènements suivants :****A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »****B : « Obtenir au plus une boule noires »**

0,5

1) Calculer $P(A)$ la probabilité d'évènements A :

0,5

2) Calculer $P(B)$ la probabilité d'évènements B :**B) Considérons un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et deux noires.****On tire une boule de S_1 si elle est noire on la met dans S_2 , puis on tire une boule de S_2 et si elle est rouge on l'écart à coté puis on tire une boule de S_2** **Soient les deux évènements suivants :** **R_1 : « La boule tirée de S_1 est rouge »** **N_1 : « La boule tirée de S_1 est noire »** **R_2 : « La boule tirée de S_2 est rouge »** **N_2 : « La boule tirée de S_2 est noire ».**

0,75

1) Montre que $P(R_2) = \frac{27}{50}$

0,5

2) En déduire $P(N_2)$

0,75

3) Sachant que la boule tirée de S_2 est rouge , quelle est la probabilité que la boule tirée de S_1 soit rouge

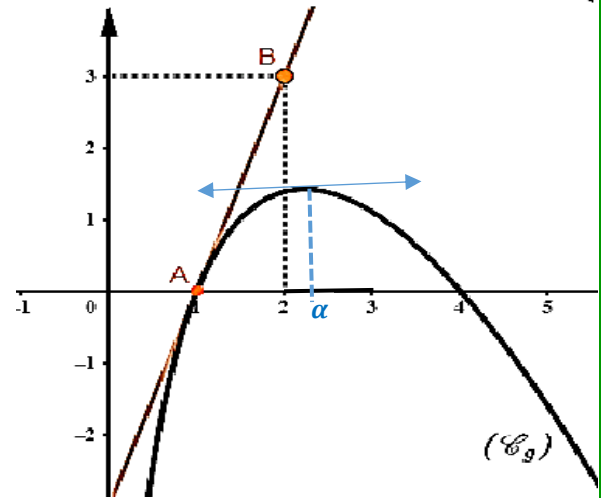
Problème (8 points) :

A) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = (ax + b)\ln x$, avec a et b deux réels ; et
soit (C_g) son graphe dans un repère

orthonormé

La droite (AB) est la tangente à (C_g) au point

$A(1; 0)$



1) Déterminer graphiquement le sens de variations de g sur $]0; +\infty[$

2) Déterminer graphiquement ;

$g(4)$; $g'(\alpha)$ et $g'(1)$

3) Calculer $g(4)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b

4) Dédire que $g(x) = (4 - x)\ln x$ pour tout x de $]0; +\infty[$

5) justifier graphiquement que :

$$\forall (x \in [1; 4]) ; g(x) \geq 0 \text{ et } (\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : g(x) \leq 0$$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x \quad \text{et } f(0) = 0$$

Et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm

1) Montrer que f est continue à droite en 0

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) En déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

4) a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = -g(x)$

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[1; 4]$ et strictement croissante sur $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

5) Montrer (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse α

6) Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On donne $f(1) \cong 3.75$; $f(4) \cong 0.9$ et que $\alpha = 2,4$)

7) Soit la fonction h définie sur $[1; e]$ par :

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x \text{ et } (C_h) \text{ son graphe dans le repère } (O; \vec{i}; \vec{j})$$

a) Montrer que : $\forall x \in [1; e] ; f(x) - h(x) \leq 0$

b) Par une intégration par parties montrer que

$$\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx = \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}$$

c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Solution d'exercice 01 (3 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \text{ pour}$$

tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \sqrt{3}$$

➤ Pour $n=0$ on a $0 < u_0 = 1 < \sqrt{3}$ donc la PV pour $n = 0$

➤ Supposons que $0 < u_n < \sqrt{3}$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \sqrt{3}$.

On a $u_n > 0$

Donc $u_n + 2 > 0$ et $2u_n + 3 > 0$

$$\text{Donc : } \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} > 0$$

Donc $u_{n+1} > 0$ (*)

$$\begin{aligned} * \quad \sqrt{3} - u_{n+1} &= \sqrt{3} - \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(u_n + 2) - (2u_n + 3)}{u_n + 2} \\ &= \frac{\sqrt{3}u_n - 3 - 2u_n + 2\sqrt{3}}{u_n + 2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(u_n - \sqrt{3}) - 2(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 2)(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2} \end{aligned}$$

On a $u_n < \sqrt{3}$ donc $u_n - \sqrt{3} < 0$

Donc $(\sqrt{3} - 2)(u_n - \sqrt{3}) > 0$

Car $\sqrt{3} - 2 < 0$

Donc $\sqrt{3} - u_{n+1} > 0$

Donc $u_{n+1} < \sqrt{3}$ (**)

Donc $u_{n+1} > 2$.

De (*) et (**) on a $0 < u_{n+1} < \sqrt{3}$

D'après le principe de récurrence, on a

$\forall n \in \mathbb{N} : a \quad 0 < u_n < \sqrt{3}$

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - u_n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2u_n + 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} \end{aligned}$$

On a $u_n < \sqrt{3}$ donc $u_n^2 < 3$

Donc $0 < 3 - u_n^2$ donc $\frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} > 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante

3) En déduire que la suite (u_n) convergente

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc elle est convergente

3) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$$

Soit n un entier naturel,

$$\text{On a d'après 1): } \sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - u_n)}{u_n + 2}$$

1ère méthode : (la différence)

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n) \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - u_n)}{u_n + 2} - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n) \\ &= (\sqrt{3} - u_n) \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= (\sqrt{3} - u_n) \left(\frac{4 - 2\sqrt{3} - u_n - 2}{2(u_n + 2)} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{3} - u_n)(2 - 2\sqrt{3} - u_n)}{2(u_n + 2)} \end{aligned}$$

On a $0 < u_n < \sqrt{3}$ donc $2(u_n + 2) > 0$

Et $\sqrt{3} - u_n \geq 0$

En a la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$ c-à-dire $u_n \geq 1$

Donc $-u_n \leq -1$

Donc $2 - 2\sqrt{3} - u_n \leq 1 - 2\sqrt{3}$

Donc $2 - 2\sqrt{3} - u_n \leq 0$

Donc $\frac{(\sqrt{3} - u_n)(2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - u_n)}{2(u_n + 2)} \leq 0 ;$

Donc $\sqrt{3} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n) \leq 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$

2ème méthode : (l'encadrement)

On a d'après 1):

$$\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - u_n)}{u_n + 2}$$

En a (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$

C-à-dire $u_n \geq 1$

Donc $u_n + 2 \geq 3$

$$\text{Donc : } \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3}$$

Et on a $u_n < \sqrt{3}$

donc $\sqrt{3} - u_n > 0$

$$\text{D'où : } \frac{(\sqrt{3} - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{Donc } \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{(2 - \sqrt{3})}{3}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{D'où } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{Car } \frac{(2 - \sqrt{3})}{3} < \frac{1}{2}$$

4) Montrer que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1).$$

1ère méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $\sqrt{3} - u_0 = \sqrt{3} - 1$

$$\text{Et } \left(\frac{1}{2}\right)^0 (\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)$$

Donc $\sqrt{3} - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (\sqrt{3} - 1)$ qui est vraie

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $\sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$

$$\text{Et mq que } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{On a } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{3} - 1).$$

Et on a d'après la question précédente

$$\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{Donc } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{3} - 1).$$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$$

2ème méthode :

$$\text{On a ; } (\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{Pour } n=0 \text{ on a : } \sqrt{3} - u_1 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_0)$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ on a : } \sqrt{3} - u_2 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_1)$$

...

...

....

$$\text{Pour } n-2 \text{ on a : } \sqrt{3} - u_{n-1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_{n-2})$$

$$\text{Pour } n-1 \text{ on a : } \sqrt{3} - u_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_{n-1})$$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on trouve :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - u_1)(\sqrt{3} - u_2) \dots (\sqrt{3} - u_n) \\ & \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_0) \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_1) \dots \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{C-à-dire : } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - u_0)$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$$

5) Dédute une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a $u_n < \sqrt{3}$ donc $\sqrt{3} - u_n > 0$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}); 0 < \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{Et on a : } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc d'après théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3} - u_n = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$$

6) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique telle que

$w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$\lim_{n \in \mathbb{N}} (w_n)$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$ et la fonction $f: x \mapsto \ln(x)$

Et continue en $\sqrt{3}$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(\sqrt{3}) = \ln(\sqrt{3})$$

Solution d'exercice 02 (3 points)

Soient les points

$A(-1; 0; 1); B(1; -1; 0); C(0; 1; 1)$

1) a) Montrer que les point A ;B et C formant un plan

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A ; B et C ne sont pas alignés

Donc les point A ;B et C formant un plan

b) Montrer que $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) donc il suffit de montrer que :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

Donc $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c) Montrer que : $x - y + 3z - 2 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

$$\text{Donc } (ABC): x - y + 3z + d = 0$$

Et on a $A(-1; 0; 1) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A dans :

$$x - y + 3z + d = 0$$

$$\text{Donc : } -1 - 0 + 3 + d = 0 \text{ donc } d = -2$$

$$\text{Donc } (ABC): x - y + 3z - 2 = 0$$

2) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

a) Montrer que le plan (ABC) coupe (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon r et le centre

On a la sphère (S) de centre $O(0; 0; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$ et $(ABC): x - y + 3z - 2 = 0$

$$d(O; (ABC)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}} < 2$$

Donc le plan (ABC) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{11}} = \sqrt{\frac{40}{11}}$$

Le point H le centre de cercle (C) est intersection du plan (ABC) et la droite (OH) de vecteur directeur

$(x; y; z)$ les coordonnées de H

$$\text{vérifie } \begin{cases} (OH): \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - t \\ z = 0 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC): x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } t + t + 9t - 2 = 0$$

$$\text{Donc } 11t = 2$$

$$\text{Donc } t = \frac{2}{11} \text{ on remplace dans}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = -\frac{2}{11} \\ z = \frac{6}{11} \end{cases}$$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par I le milieu du segment [AB] et perpendiculaire à la droite (AB)

$$A(-1; 0; 1); B(1; -1; 0)$$

Le plan (P) de vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Et passant par le point I $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Soit $M(x; y; z) \in (P)$

$$\text{Donc } (P): x - y - z + d = 0$$

Et on a $A\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in (P)$ donc on remplace les coordonnées de I dans $x - y - z + d = 0$

Donc : $0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + d = 0$ donc $d = 0$

Donc (P): $x - y - z = 0$

c) Vérifier que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$$

Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc (P) $\perp$ (ABC)

d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plans (P) et (ABC)

(P) et (R) sont sécantes suivant une droite (D) définie par les deux équations des plans (P) et (ABC) donc :

$$(D): \begin{cases} (ABC): x - y + 3z - 2 = 0 \\ (P): x - y - z = 0 \end{cases}$$

On pose par exemple $y = t$

$$\text{Donc } \begin{cases} x - t + 3z - 2 = 0 \\ x - t - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x + 3z = t + 2 \\ x - z = t \end{cases}$$

On cherche à exprimer x et z en fonction de t
J'ai choisi la méthode de GRAMER

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} t+2 & 3 \\ t & -1 \end{vmatrix} = -(t+2) - 3t = -4t - 2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & t+2 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - (t+1) = -1$$

$$\text{Donc : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4t - 2}{-4} = \frac{1}{2} + t$$

$$\text{et } z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Donc une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plans

$$(P) \text{ et } (ABC) \text{ est } (D): \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = t \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

Solution d'exercice 03 (3,5 points)

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 < 0$$

Alors l'équation (E) a deux racines

complexes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{et } z_2 = \overline{z_1}$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

B) On considère dans le repère complexe

(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) , le point A(a) tels que

$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le point C(c) le milieu du segment [OA]

1) Déterminer la forme trigonométrique de a et en déduire la forme trigonométrique de c

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

On a C(c) le milieu du segment [OA]

$$\text{Donc } c = \frac{0+a}{2} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

3) Soit la rotation R de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et soit b l'affixe du point B l'image de A par la rotation R

a) Vérifier que $b - c = -ic$ et en déduire la nature du triangle OBC

$$R(A) = B \Leftrightarrow b - c = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - c)$$

$$\Leftrightarrow b - c = -i(a - c)$$

$$\Leftrightarrow b - c = -i\left(a - \frac{1}{2}a\right)$$

$$\Leftrightarrow b - c = -i\left(\frac{1}{2}a\right)$$

$$\Leftrightarrow b - c = -ic$$

On a $b - c = -i(c - 0)$

$$\text{Donc } |b - c| = |-i(c - 0)|$$

$$\text{Donc } |b - c| = |-i||c - 0|$$

$$\text{Donc } |b - c| = |c - 0|$$

$$\text{Donc } BC = OC ; (*)$$

On a $b - c = -ic$ donc $b - c = i(0 - c)$

$$\text{Donc : } \frac{b - c}{0 - c} = i$$

$$\frac{b-c}{0-c} = -i \Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{0-c}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{(\overline{CO}; \overline{CB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad ; (**)$$

De (*) et (**) on a : le triangle OBC est isocèle et rectangle en C

a) Montrer que $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

On a $b-c = -ic$ donc $b = -ic + c$

Donc $b = c(1-i)$

Donc : $|b| = |c(1-i)|$

$$= |c|(1-i)| = \frac{1}{2} \times \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a $b = c(1-i)$

Donc $\arg(b) \equiv \arg(c(1-i))[2\pi]$

$$\equiv \arg(c) + \arg(1-i)[2\pi]$$

$$\equiv \arg(c) + \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} + \arg\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)i\right)\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

b) Montrer que l'ensemble des point M d'affixe z tels que $|2z-a|=1$ est le cercle circonscrit au triangle OAB

$$|2z-a|=1 \Leftrightarrow \left|2\left(z-\frac{a}{2}\right)\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \left|z-\frac{a}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z-C|=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow MC=\frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble des point M d'affixe z tels que $|2z-a|=1$ est le cercle (C) de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$

On a $OC = |c| = \frac{1}{2}$ donc $O \in (C)$

Et $AC = |c-a| = \left|\frac{1}{2}a-a\right| = \left|\frac{1}{2}a\right| = \frac{1}{2}$

Car $|a|=1$ donc $A \in (C)$

Et $BC = |c-b| = |ic| = |c| = \frac{1}{2}$ donc $B \in (C)$

D'où (C) est le cercle circonscrit au triangle OAB

Solution d'exercice 04 (3 points)

A) Un sac S_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires.

On tire au hasard et simultanément deux boules du sac S_1

1) Calculer $P(A)$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des combinaisons de deux boules parmi cinq boules donc le

nombre des possibilités est $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »

(R ; R) ou (N ; N)

$$\text{Donc : } \text{Card}(A) = C_2^2 + C_3^2 = 1 + 3 = 5$$

$$\text{Par suite } p(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2) Calculer $P(B)$

B : « Obtenir au plus une boule noires »

$\bar{B}$: « Obtenir deux boules noires »

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{C_3^2}{10} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

B) Considérons un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et deux noires.

Rappel de cours :

➤ Probabilité conditionnelle :

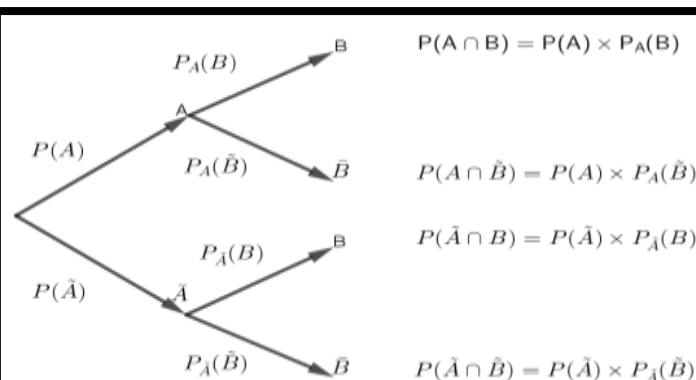
La probabilité de l'événement B sachant que de l'événement A est réalisé est le nombre

noté $P_A(B)$ défini par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

➤ Loi des probabilités totales :

On a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$,

Donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.



Le sac S_1 contient **2 boules rouges** et 3 boules noires.

Le sac S_2 contient **3 boules rouges** et 2 boules noires.

On tire une boule de S_1 si elle est noire on la met dans S_2 , puis on tire une boule de S_2 et si elle est rouge on l'écarte à côté puis on tire une boule de S_2

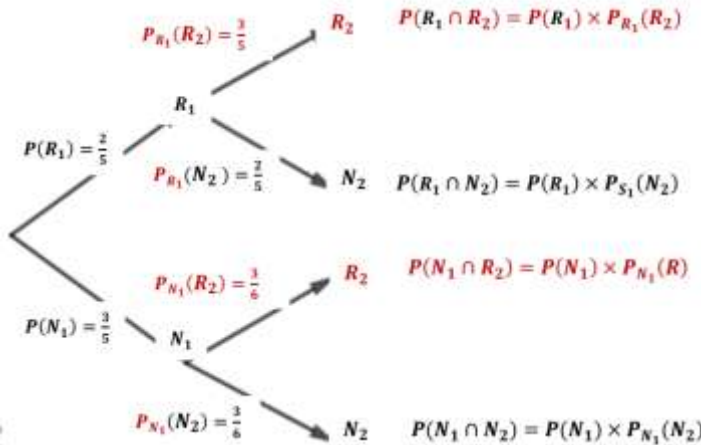
R_1 : « La boule tirée de S_1 est rouge »

N_1 : « La boule tirée de S_1 est noire »

R_2 : « La boule tirée de S_2 est rouge »

N_2 : « La boule tirée de S_2 est noire ».

Schématisons l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré



1) Montre que $P(R_2) = \frac{27}{50}$

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(R) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{25} + \frac{3}{10} = \frac{12}{50} + \frac{15}{50} = \frac{27}{50} \end{aligned}$$

2) En déduire $P(N_2)$

On a l'événement N_2 est l'événement contraire de l'événement R_2 donc :

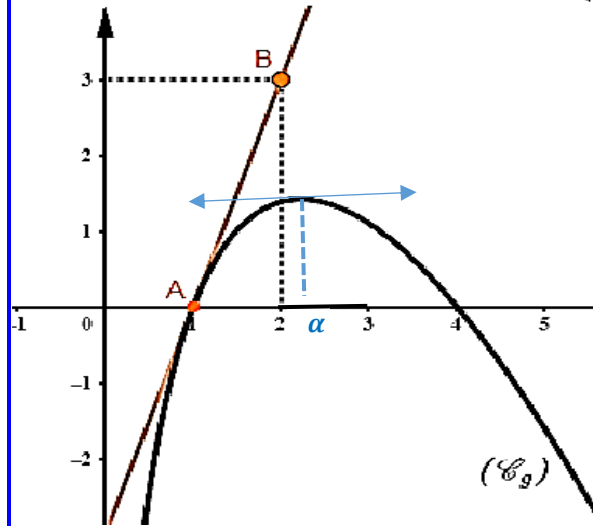
$$P(N_2) = 1 - P(R_2) = 1 - \frac{27}{50} = \frac{23}{50}$$

3) Sachant que la boule tirée de S_2 est rouge, quelle est la probabilité que la boule tirée de S_1 soit rouge

$$\begin{aligned} P_{R_2}(R_1) &= \frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{27}{50}} = \frac{6}{25} \times \frac{50}{27} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Solution du problème (8 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = (ax + b)\ln x$, avec a et b deux réels ; La droite (AB) est la tangente à (C_g) au point $A(1; 0)$



1) Déterminer graphiquement le sens de variations de g sur $]0; +\infty[$

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

2) Déterminer graphiquement :

$$g(4); g'(\alpha) \quad g'(1)$$

$$\text{On a : } g(4) = 0$$

$g'(\alpha) = 0$ car la fonction admet un extremum en $g'(\alpha)$

Déterminons $g'(1)$

1ère méthode :

Rappel : La tangente en $A(a; f'(a))$ est de vecteur directeur $\vec{u}(1; f'(a))$

$$\text{Donc } g(1) = 3$$

Car le vecteur $\vec{u}(1; 3)$ est un vecteur directeur de (AB)

2ème méthode :

$g'(1)$ est la pente de la droite (AB)

La tangente (AB) en 1 passant par les deux points en $A(1; 0)$ et $B(2; 3)$ donc

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ &= \frac{3 - 0}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

3) Calculer $g(4)$ et $g'(1)$ en fonction de a et b

$$g(4) = (4a + b)\ln(4)$$

$$\text{Soit } x \in]0; +\infty[$$

$$g'(x) = [(ax + b)\ln x]' \\ = a\ln x + \frac{(ax+b)}{x}$$

$$\text{Donc } g'(1) = a\ln(1) + \frac{a+b}{1} = a + b$$

4) Dédurre que $g(x) = (4 - x)\ln x$ pour tout x de $]0; +\infty[$

$$\text{On a } g(4) = (4a + b)\ln(4) \text{ et } g(4) = 0$$

$$\text{Donc } (4a + b)\ln(4) = 0$$

$$\text{Donc } 4a + b = 0 \text{ donc } b = -4a$$

$$\text{Et on a } g'(1) = a + b \text{ et } g'(1) = 3$$

$$\text{Donc } a + b = 3$$

$$\text{Donc } a - 4a = 3 \text{ et } a + b = 3$$

$$\text{Donc } -3a = 3 \text{ et } a + b = 3$$

$$\text{Donc } a = -1 \text{ et } a + b = 3$$

$$\text{Donc } -1 + b = 3 \text{ donc } b = 4$$

$$\text{D'où } a = -1 \text{ et } b = 4$$

$$\text{Donc } g(x) = (4 - x)\ln x$$

5) justifier graphiquement que :

$$\forall (x \in [1; 4]) ; g(x) \geq 0$$

$$\text{et } (\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : g(x) \leq 0$$

On a la courbe (C_g) est en dessus d'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; 4]$

$$\text{Donc } \forall (x \in [1; 4]) ; g(x) \geq 0$$

On a la courbe (C_g) est en dessous d'axe des abscisses sur les intervalles $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : g(x) \leq 0$$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x \\ \text{et } f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x - 4\right)x \ln x = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}x^2 + 4x = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - 4\right) = -4$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{4}{x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x}\right)\ln x \right] = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{4}{x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x}\right)\ln x \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[-\frac{1}{4} + \frac{4}{x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x}\right)\ln x \right] \\ = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

b) En déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis

interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left[-\frac{1}{4}x + 4 + \left(\frac{1}{2}x - 4\right)\ln x \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}x + 4 + \left(\frac{1}{2}x - 4\right)\ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - 4\right) = -4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale au point 0 dirigée vers le

4)a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = -g(x)$

On a : $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 4x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

D'où la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \right]' \\ &= -\frac{1}{2}x + 4 + (x - 4) \ln x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \times \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}x + 4 + (x - 4) \ln x + \frac{1}{2}x - 4 \\ &= (x - 4) \ln x = -(4 - x) \ln(x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[1; 4]$ et strictement croissante sur $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

On a $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = -g(x)$

Et $\forall (x \in [1; 4]) ; g(x) \geq 0$

Donc $\forall (x \in [1; 4]) ; -g(x) \leq 0$

Donc $\forall (x \in [1; 4]) ; f'(x) \leq 0$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1; 4]$

Et $(\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : g(x) \leq 0$

Donc $(\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : -g(x) \geq 0$

Donc $(\forall x \in]0; 1] \cup [4; +\infty[) : f'(x) \geq 0$

Donc strictement croissante sur $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

x	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$f(1)$	$f(4)$	$+\infty$		

5) Montrer (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse α

Soit $x \in]0; +\infty[$

On a $f'(x) = -g(x)$

Donc $f''(x) = -g'(x)$

Et on a la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

Donc la fonction g' s'annule et change de signe en α

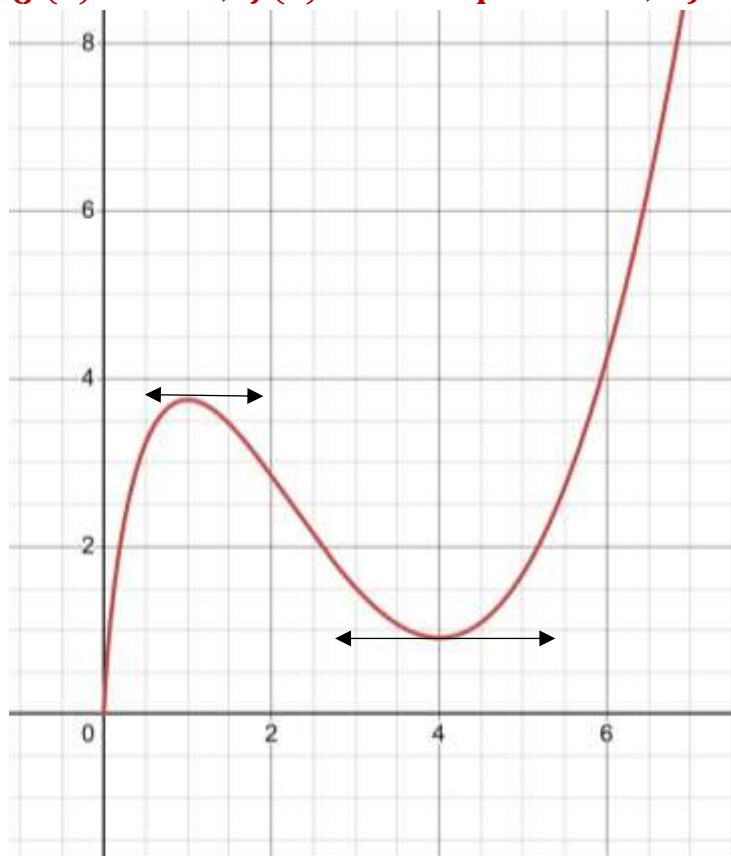
Donc la fonction $-g'$ s'annule et change de signe en α

Donc la fonction f'' s'annule et change de signe en α

D'où (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse α

6) Construire (C_f) dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$

$(f(1) \cong 3.75 ; f(4) \cong 0.9$ et que $\alpha = 2,4$)



7) Soit la fonction h définie sur $[1; e]$ par :

$h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$ et (C_h) son graphe dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

a) Montrer que : $\forall x \in [1; e]; f(x) - h(x) \leq 0$

Soit $x \in [1; e]$

$$f(x) - h(x) =$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x + \frac{1}{4}x^2 - 4x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x$$

$$= \frac{1}{2}x(x - 8) \ln x$$

On a $x \geq 1$

Donc $\frac{1}{2}x \geq 0$ et $\ln x \geq 0$

Et $x \leq e$

Donc $(x - 8) \leq 0$

Et $\ln x \geq 0$

Donc $\forall x \in [1; e]; f(x) - h(x) \leq 0$

b) Par une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx = \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}$$

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx$$

Posons

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right) \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{6}x^2 - 2x \, dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2\right) \ln(x) \right]_1^e - \left[\left(\frac{1}{18}x^3 - x^2\right) \right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{6} - 2e^2 - \frac{e^3}{18} + e^2 + \frac{1}{18} - 1$$

$$= \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}$$

c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Soit $x \in [1; e]$

$$\text{On a } A = \int_1^e |f(x) - h(x)| \, dx \times u.a$$

Et on a $f(x) - h(x) \leq 0$

Donc $|f(x) - h(x)| = h(x) - f(x)$

$$A = \int_1^e |f(x) - h(x)| \, dx \times u.a$$

$$= \int_1^e h(x) - f(x) \, dx \times u.a$$

$$= \int_1^e -\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx \cdot \text{cm}^2$$

$$= - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \ln x \, dx \cdot \text{cm}^2$$

$$= - \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18} \text{cm}^2$$

$$= \frac{18e^2 + 17 - 2e^3}{18} \text{cm}^2$$

المملكة المغربية
 ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ

 وزارة التربية الوطنية
 والتعليم الأولي والرياضة
 ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ
 ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⴰⴽⴷⴰⵢⵜ

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 10

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(0; -1; 1)$ et $B(-1; 1; 3)$ et $C(0; 1; 5)$

0,5 **1) a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et déduire que les points A et B et C forment un plan

0,5 **b)** Vérifier que $2x + 2y - z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 **2)** Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 12z + 22 = 0$

0,5 **a)** Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -1; -6)$ et de rayon $R = 4$

0,5 **b)** Calculer $d(\Omega; (ABC))$ et déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{7}$

0,5 **3) a)** Déterminer la représentation paramétrique de (D) passant par le point Ω est orthogonale au plan (ABC)

0,5 **b)** Déterminer le triplet de coordonnées du point H centre du cercle (C)

Exercice 2 (3 points) :

Une urne contient 3 boules rouges 4 vertes et 2 boules noires indiscernables au toucher. **On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne**

On considère les deux événements :

A "Obtenir trois boules de même couleurs"

B "Les boules tirées de couleur différentes deux à deux"

C "Obtenir au moins une boule verte"

1 **1)** Montrer que $P(A) = \frac{5}{84}$; $P(B) = \frac{2}{7}$ et $P(C) = \frac{37}{42}$

1 **2)** Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage par le nombre de boules noirs restantes dans l'urne

a) Vérifier que les valeurs de X sont 0 ; 1 ; 2

b) Montrer que $P(X = 2) = \frac{35}{84}$

c) Déterminer la loi de probabilité de X

d) Montrer que $E(X)$ l'espérance mathématique de X est $\frac{4}{3}$

Exercice 3 (3 points) :

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{6})z + 16 = 0$

0,25 **1)** Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

0,5 **2)** En déduire les solutions de (E)

B) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé, considérons les

points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $D(d)$ tel que : $a = \sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$; $b = -2\sqrt{6}$; $c = \bar{a}$

0,25 **1) a)** Montrer que $a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)c$

0,25 **b)** Montrer que A est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{6}$

0,25 **c)** En déduire que $2 \arg(a) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$

2) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

0,5 **a)** Montrer que $d = 2\sqrt{2}$ est l'abscisse du point D l'image de C par T

0,5 **b)** Vérifier que $c - b = i(a - b)$ puis en déduire la nature du triangle ABC

0,5 **c)** Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré

Problème (11 points) :

A) Soit g défini sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$

0.75 **1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = xe^x$**

0.75 **2) Dresser le tableau de variations de g puis montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$**

0.5 **3) Vérifier que $(\forall x \in]0; 1[) : g(x) - x = (x - 1)(e^x - 1)$ puis en déduire que $(\forall x \in]0; 1[) : g(x) < x$**

B) Soit une suite (U_n) tel que :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = g(U_n)$$

0.5 **1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 1$**

0.25 **2) Montrer que (U_n) est décroissante (Utiliser A)3))**

0.75 **3) Déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite**

C) Soit f une fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 2)(e^x + 1)$$

(C_f) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm

0.5 **1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$**

0.5 **2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = g(x)$**

0.5 **b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse**

0.5 **3) a) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$**

0.5 **b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $\mathbb{R}$**

0.75 **4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$**

0.5 **5) a) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 0**

0.25 **b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0**

0.25 **6) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse 2**

0.25 **7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J (à déterminer)**

0.75 **b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 puis montrer $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{e^2 + 1}$**

1 **8) Tracer (T) ; (Δ) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$**

0.75 **9) a) Par une intégration par partie montrer que : $\int_0^2 (x - 2) e^x dx = 3 - e^2$**

0.75 **b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.**

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points

$A(0; -1; 1)$ et $B(-1; 1; 3)$ et $C(0; 1; 5)$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et déduire que les points A et B et C ne sont pas alignés

Rappel : Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A et B et C ne sont pas alignés

D'où les points A et B et C forment un plan

b) Vérifier que $2x + 2y - z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

Donc (ABC): $2 \times x + 2 \times y - z + d = 0$

Donc (ABC): $2x + 2y - z + d = 0$

Et on a $A(0, -1, 1) \in (ABC)$, on remplace les coordonnées de A dans $0 - 2 - 1 + d = 0$ donc $-3 + d = 0$ donc $d = 3$

Donc (ABC): $2x + 2y - z + 3 = 0$

2) a- Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -1; -6)$ et de rayon $R=4$

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 12z + 22 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 2y + 1^2 + z^2 + 12z + 6^2 = 1^2 + 1^2 + 6^2 - 22$$

$$\text{Donc (S): } (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 4^2$$

Donc (S) est une sphère de centre

$\Omega(1; -1; -6)$ et de rayon $R=4$

2ème méthode

On pose $a = -2$; $b = 2$; $c = 12$ et $d = 22$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$= (-2)^2 + 2^2 + 12^2 - 4 \times 22$$

$$= 64 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre

$$\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$$

Donc $\Omega(1; -1; -6)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

b-calculer $d(\Omega; (ABC))$ et déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $r=\sqrt{7}$

Rappel : DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient (P): $ax + by + cz + d = 0$

un plan et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de

La distance de point A au plan (P) est :

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|2 - 2 + 6 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \sqrt{9}$$

$$< R = 4$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4^2 - 9} = \sqrt{7}$$

3)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

Rappel : DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite qui passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur

$\vec{U}(a; b; c)$

Une représentation paramétrique de (D)

$$(D): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

La droite (D) et perpendiculaire au plan (ABC) donc le vecteur

$\vec{n}(2; 2; -1)$ est directeur à la droite (D)

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 2 \times t \\ y = -1 + 2 \times t \\ z = -6 - 1 \times t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

Donc (D): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -6 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (D)

b- Déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (C)

(x;y;z) les coordonnées de H

$$\text{vérifie} \begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -6 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (P): 2x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$2(1 + 2t) + 2(-1 + 2t) - (-6 - t) + 3 = 0$$

$$\text{Donc } 9t + 9 = 0 \text{ donc } t = -\frac{9}{9} = -1$$

on remplace $t = -1$ dans

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -6 - t \end{cases};$$

$$\text{On trouve} \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = -6 + 1 = -5 \end{cases},$$

Donc $H(-1; -3; -5)$

Solution de l'exercice 02 (2 Points)

On tire

simultanément trois

boules de l'urne

L'univers Ω associé à cette expérience

aléatoire est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi 9 boules

Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^3$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}$$

$$= 84$$

1) Montrer que $P(A) = \frac{5}{84}$; $P(B) = \frac{2}{7}$ et

$$P(C) = \frac{37}{42}$$

A "obtenir trois boules de même couleurs"

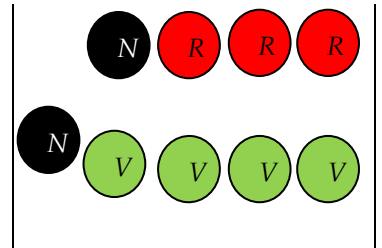
(VVV) ou (RRR)

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^3 + C_4^3}{84}$$

$$= \frac{1 + 4}{84}$$

$$= \frac{5}{84}$$



B'' Les boules tirées de couleur différentes deux à deux "

$$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{84}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 4}{84}$$

$$= \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

C'' obtenir au moins une boule verte''

L'événement contraire de B est :

$\bar{C}$ « Aucune boule tirée n'est verte »

Donc $\text{Card}(\bar{C}) = C_5^3$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

Par suite $p(\bar{C}) = \frac{\text{Card}(\bar{C})}{\text{Card}(\Omega)}$

$$= \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

Enfin : $p(C) = 1 - p(\bar{C})$

$$= 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

2) Soit X la variable aléatoire qui relie chaque éventualité par le nombre de boules noirs restantes dans l'urne

a) Déterminer les valeurs de $P(X = i)$

$(X = 0)$: Aucune boule noire restantes dans l'urne

$(X = 1)$: Une boule noire restantes dans l'urne

$(X = 2)$: Deux boule noire restantes dans l'urne

b- Montrer que $P(X = 2) = \frac{35}{84}$

$(X = 2)$: Deux boule noire restantes dans l'urne

Donc aucune boule noir tirée parmi les trois boules

$$P(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_7^3}{84} = \frac{35}{84}$$

c) Déterminons la loi de probabilité de variable aléatoire X.

On a : $\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$

$$P(X = 0) = \frac{\text{Card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^2 \times C_7^1}{84} = \frac{7}{84}$$

$$P(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^2}{84} = \frac{42}{84}$$

$$P(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_7^3}{84} = \frac{35}{84}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité de variable aléatoire X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{84}$	$\frac{42}{84}$	$\frac{35}{84}$

d) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_4 p_4$$

$$= 0 \times \frac{7}{84} + 1 \times \frac{42}{84} + 2 \times \frac{35}{84} = \frac{112}{84} = \frac{4}{3}$$

Solution de l'exercice 03 (4Points)

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{6})z + 16 = 0$$

1) Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

$$\Delta = (-2(\sqrt{2} - \sqrt{6}))^2 - 4 \times 16$$

$$= 4(6 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2) - 64$$

$$= 4(8 - 2\sqrt{12}) - 64$$

$$= 32 - 8\sqrt{12} - 64$$

$$= -32 - 8\sqrt{12}$$

Et d'autre part :

$$\Delta = -4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$$

$$= -4(6 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2)$$

$$= -4(8 + 2\sqrt{12}) = -32 - 8\sqrt{12}$$

$$\text{Donc } \Delta = -4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$$

2) En déduire les solutions de (E)

$$\text{On a } \Delta = -4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 < 0$$

Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjugués sont :

$$z_1 = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})i}{2}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

$$\text{Et } z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{2} - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

B) Dans le plan complexe rapporté au

repère orthonormé, considérons les

points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $D(d)$ tel que :

$$a = \sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i ; b = -2\sqrt{6} ; c = \bar{a}$$

3) a) Montrer que $a = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)c$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)c = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(\sqrt{2} - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i)$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)(\sqrt{2} - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i)$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{18} - (\sqrt{6} - \sqrt{18})i + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i + \sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$= -\frac{1}{2}(2\sqrt{6} - \sqrt{18} + \sqrt{2} + (\sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{18})i)$$

$$= -\frac{1}{2}(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2})i)$$

$$= -\frac{1}{2}(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + (-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})i)$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i = a$$

b) Montrer que A est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{On a } a &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)c \\ &= \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}i\right)c \\ &= \left(\cos \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}i\right)c \\ &= e^{i\frac{7\pi}{6}}c \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a - 0 = e^{i\frac{7\pi}{6}}(c - 0)$$

Donc A est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{6}$ b) En déduire que $2 \arg(a) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$

$$\text{On a } a = e^{i\frac{7\pi}{6}}c \text{ donc } a = e^{i\frac{7\pi}{6}}\bar{a}$$

$$\text{Donc } \arg(a) \equiv \arg(e^{i\frac{7\pi}{6}}\bar{a}) [2\pi]$$

$$\text{Donc } \arg(a) \equiv \arg(e^{i\frac{7\pi}{6}}) + \arg(\bar{a}) [2\pi]$$

$$\text{Donc } \arg(a) \equiv \frac{7\pi}{6} - \arg(a) [2\pi]$$

$$\text{Donc } 2\arg(a) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

4) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ a) Montrer que $d = 2\sqrt{2}$ est l'abbixe du point D l'image de C par T

$$T(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow d - c = a - b$$

$$\Leftrightarrow d = a - b + c$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i + 2\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

$$\Leftrightarrow d = 2\sqrt{2}$$

b) Vérifier que $c - b = -i(a - b)$ puis en déduire la nature du triangle ABC

$$i(a - b) = -i(\sqrt{2} - \sqrt{6} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i + 2\sqrt{6})$$

$$= ((\sqrt{6} - \sqrt{2})i + (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i2\sqrt{6})$$

$$= (-\sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2} + \sqrt{6} - i2\sqrt{6})$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

$$c - b = \sqrt{2} - \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i + 2\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{6} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

$$\text{Donc : } c - b = i(a - b)$$

En déduire la nature du triangle ABC

$$c - b = -i(a - b) \Rightarrow \frac{c - b}{a - b} = -i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{c - b}{a - b} \right| = |-i| \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c - b}{a - b}\right) \equiv \arg(-i)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{c - b}{a - b} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c - b}{a - b}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BA} = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow BC = BA \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle et rectangle en C

a) Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré

On a $T(C) = D$ donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

Donc OABC est un parallélogramme

Et on a $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc ABCD est un rectangle

De plus on a : $BC = BA$ donc le quadrilatère OABC est un carré

Solution du problème (11 Points)

A) Soit g défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = xe^x - e^x + 1$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis

montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = xe^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x + 1 = 1$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - e^x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(x - 1) + 1 = +\infty$$

$$(\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x - e^x + 0 = e^x + xe^x - e^x$$

2) Dresser le tableau de variations de g puis montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } (\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = xe^x$$

Et on a $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ et

$\forall x \in]-\infty; 0] ; x \leq 0$ et $\forall x \in [0; +\infty[; x \geq 0$,

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	1	$g(0) = 0$	$+\infty$

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \geq 0$

Le nombre 0 est une valeur minimale de la fonction g sur $\mathbb{R}$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$$

3) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[) : g(x) < x$

Soit $x \in]0; 1[$

$$\begin{aligned} g(x) - x &= xe^x - e^x + 1 - x \\ &= e^x(x - 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)(e^x - 1) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x \in]0; 1[&\Rightarrow 0 < x \quad \text{et} \quad x < 1 \\ &\Rightarrow e^0 < e^x \quad \text{et} \quad x - 1 < 0 \\ &\Rightarrow 1 < e^x \quad \text{et} \quad x - 1 < 0 \\ &\Rightarrow 0 < e^x - 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(e^x - 1) < 0 \\ &\Rightarrow g(x) - x < 0 \\ &\Rightarrow g(x) < x \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0; 1[) : g(x) < x$

B) Soit une suite (U_n) tel que :

$$U_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = g(U_n)$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 1$

Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$

➤ Pour $n=0$ on a $0 < u_0 = 1/2 < 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

On sait que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$ et $0 < u_n < 1$

$$\begin{aligned} \text{Donc ; } 1 < u_n < 1 &\Rightarrow g(0) < g(u_n) < g(1) \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 1$$

2) Montrer que (u_n) est décroissante

Soit n un entier naturel,

On a: $(\forall x \in]0; 1[): g(x) < x$, d'après A)3)

et $u_n \in]0; 1[$ d'après B)1)

On pose $x = u_n$, on trouve $g(u_n) \leq u_n$

Donc: $u_{n+1} \leq u_n$; d'où la suite (u_n) est décroissante

3) Dédurre que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]0; 1[$; car elle est dérivable sur $]0; 1[$
- $g(]0; 1[) =]g(0); g(1)[=]0; 1[\subset]0; 1[$
- $u_0 = 1/2 \in]0; 1[$

La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(e^x - 1) = 0$$

car $g(x) - x$ déjà calculé

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Donc la limite de la suite (u_n) est 0 car la suite (u_n) est décroissante

D) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (x-2)(e^x + 1)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(e^x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x + (x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - 2e^x + (x-2)$$

$$= -\infty$$

Car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)(e^x + 1)$$

$$= +\infty$$

(Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$)

2) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}): f'(x) = g(x)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un produit des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 \times (e^x + 1) + (x-2) \times e^x$$

$$= e^x + 1 + xe^x - 2e^x$$

$$= xe^x - e^x + 1$$

$$= g(x)$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a: $f'(x) = g(x)$

D'après la partie A): $g(x) \geq 0$

Donc $f'(x) \geq 0$

D'où la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) a) Montrer que la droite $(\Delta): y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(e^x + 1) - (x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x + (x-2) - (x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - 2e^x$$

$$= 0$$

Car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-2) = 0;$$

donc la droite $(\Delta): y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f(x) - (x - 2) = (x - 2)e^x$ et comme $e^x > 0$

Donc le signe de $f(x) - (x - 2)$ est le signe de x qui s'annule en 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$	-	0	+
La position relative de (C_f) et la droite (Δ)	La courbe (C_f) est en dessous de (Δ)	le point $B(2; 0)$ est point d'intersection de (C_f) et (Δ)	(Δ) est en dessus de (Δ)

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 2)(e^x + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right) = +\infty \\ \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

5) a) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 0

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f''(x) = g'(x) = xe^x$

On a $e^x > 0$ et $\forall x \in]-\infty; 0]; x \leq 0$ et $\forall x \in [0; +\infty[; x \geq 0$ donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

On a : f'' s'annule et change de signe en 0 donc le point $A(0; f(0))$ c-à-dire $A(0; -4)$ est une point d'inflexion de (C_f)

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) au point d'abscisse 0

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

On a : $f'(0) = g(0) = 0$ et $f(0) = -4$

$$\text{Donc : } (T): y = -4$$

6) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse 2

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(e^x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ car } e^x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Donc (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse 2

7) a) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} définie sur J (à déterminer)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que $J = f(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$

On a : $f(2) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 2$

Et on a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable en 2

$$\text{Et } f'(2) = g(2) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

$$\text{Donc } f'(2) \neq 0$$

D'où f^{-1} est dérivable en 0 et

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{e^2 + 1}$$

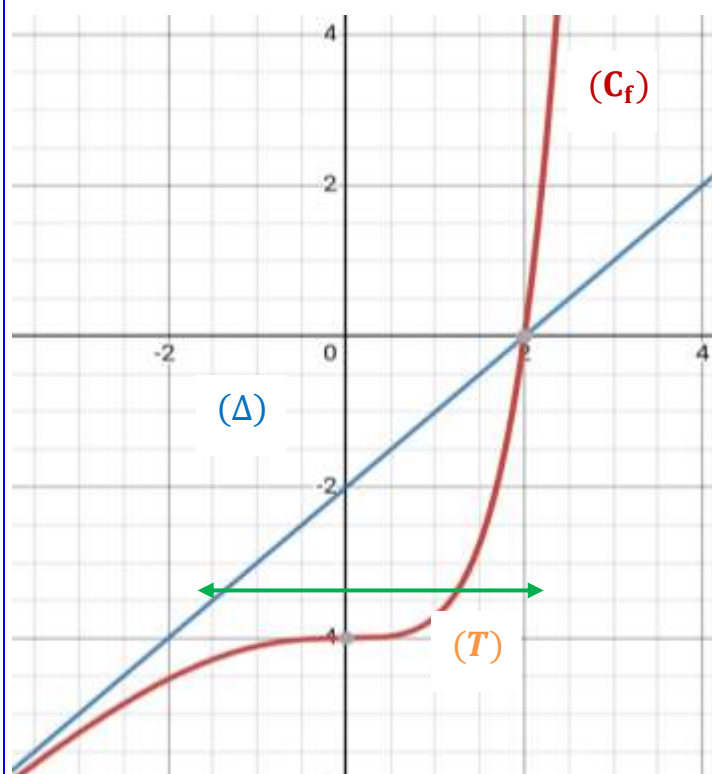
8) Tracer (T) ; (Δ) et (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$	-	0	+
La position relative de (C_f) et la droite (Δ)	La courbe (C_f) est en dessous de (Δ)	le point $B(2; 0)$ est point d'intersection de (C_f) et (Δ)	(Δ) est en dessus de (Δ)



9)a) Par une intégration par partie montrer que :

$$\int_0^2 (x - 2) e^x dx = 3 - e^2$$

Posons $\begin{cases} u(x) = x - 2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x - 2) e^x dx &= [(x - 2) e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2 - [e^x]_0^2 \\ &= 2 - e^2 + 1 \\ &= 3 - e^2 \end{aligned}$$

b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

On a (C_f) est en dessous de (D) ; $y = x$ sur l'intervalle $[0, 2]$

Donc $\forall x \in [0, 2]: |f(x) - y| = y - f(x)$ d'après la question C)3)b)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - y| dx \times u.a \\ &= \int_0^2 y - f(x) dx \times u.a \\ &= \int_0^2 (x - 2) - [(x - 2)(e^x + 1)] dx \cdot cm^2 \\ &= \int_0^2 (x - 2) - [(x - 2)e^x + (x - 2)] dx \cdot cm^2 \\ &= \int_0^2 -(x - 2)e^x dx \cdot cm^2 \\ &= -(3 - e^2) cm^2 \\ &= (e^2 - 3) cm^2 \end{aligned}$$

1

10

***** 10

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 11



3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 11

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 4	Calcul d'une limite et intégrale	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, Suite numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0$

0,5 **1)** Montrer que (S) est une sphère S de centre $\Omega(-\frac{1}{2}; 0; 0)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Soit (P) le plan d'équation : $y + z - 1 = 0$.

0,75 **a)** Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) en un point H

b) Déterminer les coordonnées de point H .

3) Soit (Q) le plan d'équation : $2x - y + z + 1 = 0$.

0,25 Montrer que : $(P) \perp (Q)$

0,5 **4)** Soit (D) la droite d'intersection de (P) et (Q) , vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

0,75 **5)** Montrer que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en un point à déterminer.

Exercice 2 (3 points) :

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - (\sqrt{3} - 1)z + 2 = 0$

0,5 **1)** Vérifier que $\Delta = -(1 + \sqrt{3})^2$

0,25 **2)** En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E)

B) On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$

les points $A(a); B(b); C(c)$ et $D(d)$ tel que : $a = 1 - i$;

$$b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right); c = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \text{ et } d = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0,5 **1) a)** Déterminer la forme exponentielle de a et d , puis vérifier que : $c = da$

0,5 **b)** En déduire que $c = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$

0,25 **c)** Montrer que $c^6 = 8i$

0,5 **2)** Montrer que le point C est l'image de point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0,5 **3)** Vérifier que $a + b = c$ puis en déduire que le quadrilatère $OACB$ est un losange

Exercice 3 (3 points) :

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité.

On choisit au hasard un(e) élève.

On considère les événements suivants :

F : L'élève choisit est une fille

G : L'élève choisit est un garçon

C_{sc} : L'élève choisit est inscrit au club Cyber sécurité

C_{sp} : L'élève choisit est inscrit au club Sport

C_{env} : L'élève choisit est inscrit au club Environnement

- 0,75 1) Vérifier que $P(C_{sc}) = \frac{1}{5}$ puis calculer $P(C_{sp})$ et $P(C_{env})$
- 0,75 2) Montrer que la probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est $\frac{3}{5}$
- 0,5 3) En déduire la probabilité que l'élève choisit(e) soit un garçon
- 1 4) Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, montrer que la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est $\frac{7}{20}$

Exercice 4 (3 points) :

Soit g une fonction définit sur $I = [0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$

(C_h) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On donne ; $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

- 0,5 1) Vérifier que $\forall x \in I ; h'(x) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1)$
- 0,5 2) Montrer que h est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
- 0,75 2) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[): \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2} < -\frac{1}{2x}$
- 0,5 3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2}$
- 0,75 4) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (Ch) , la droite (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Problème (8 points) :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

0,5

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

0,5

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

0,5

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

0,5

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

(C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité: 1cm)

0,5

1) Montrer que f est continue à droite de 0

0,5

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

0,75

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

0,5

4)a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$$

0,5

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

0,5

5) Etudier la convexité de la courbe (C_f)

1

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

0,5

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

0,75

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

0,5

3) Dédire que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère S de centre $\Omega(-\frac{1}{2}; 0; 0)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1^{ème} méthode

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0 = 0$$

$$x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

Donc (S) est une sphère de centre

$$\Omega(-\frac{1}{2}; 0; 0) \text{ et de rayon } R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2^{ème} méthode

On pose $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = -\frac{1}{4}$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = (1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4 \times \frac{1}{4} = 2 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de

$$\text{centre } \Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$$

Donc $\Omega(-\frac{1}{2}; 0; 0)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Soit (P) le plan d'équation : $y + z - 1 = 0$.

a) Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) en un point H

On a $\Omega(-\frac{1}{2}; 0; 0)$ et $(P): y + z - 1 = 0$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $d(\Omega; (P)) = R$

Donc (P) est tangent à la sphère (S) en H

b) Déterminer les coordonnées de point H

Le point H est l'intersection de la droite

(ΩH) de vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le vecteur

normal au plan (P) , donc une représentation paramétrique de la droite (ΩH) est

$$(\Omega H): \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$(x; y; z)$ les coordonnées de H vérifie le

$$\text{systeme } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{Donc } t + t - 1 = 0$$

$$\text{Donc } 2t = 1$$

$$\text{Donc } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } H \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) Soit (Q) le plan d'équation :

$2x - y + z + 1 = 0$. Montrer que : $(P) \perp (Q)$

On a $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan (P) et

$\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan (Q)

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ Donc $(P) \perp (Q)$

4) Soit (D) la droite d'intersection de

(P) et (Q) , Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On a $(P): y + z - 1 = 0$

Donc $1 - t + t - 1 = 0$ donc $(D) \subset (P)$

On a $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$ donc

$$2(-t) - (1 - t) + t + 1 = -2t + 2t = 0$$

Donc $(D) \subset (Q)$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une}$$

représentation paramétrique de (D)

5) Montrer que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en un point à déterminer.

On résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (D): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (S): x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (-t)^2 + (1-t)^2 + (t)^2 - t - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Donc } t^2 + 1 - 2t + t^2 + t^2 - t - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Donc } 3t^2 - 3t + \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{Donc } 3 \left(t^2 - t + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\text{Donc } t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Donc } t^2 - 2 \times \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Donc } \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

$$\text{Donc } t = \frac{1}{2}$$

Donc la droite (D) est tangente à la sphère (S) en un point K

On remplace $t = \frac{1}{2}$ dans $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ pour trouver K l'intersection de (D) et (S)

$$\text{Donc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } K = H \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 (3 points) :

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^2 - (\sqrt{3} - 1)z + 2 = 0$$

1) Vérifier que $\Delta = -(1 + \sqrt{3})^2$

$$\Delta = (-(\sqrt{3} - 1))^2 - 4 \times 2$$

$$= (3 - 2\sqrt{3} + 1) - 8$$

$$= (4 - 2\sqrt{3}) - 8$$

$$= -4 - 2\sqrt{3}$$

Et d'autre part :

$$\Delta = -(\sqrt{3} + 1)^2$$

$$= -(1 + 2\sqrt{3} + 3)$$

$$= -(4 + 2\sqrt{3})$$

$$= -4 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \Delta = \Delta = -(1 + \sqrt{3})^2$$

2) En déduire les solutions z_1 et z_2 de (E)

$$\text{On a } \Delta = \Delta = -(1 + \sqrt{3})^2 < 0$$

Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes conjugués sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3} - 1 + (1 + \sqrt{3})i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right)$$

B) On considère dans le repère complexe

les points A(a) ; B(b) ; C(c) et D(d) tel que :

$$a = 1 - i ; b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) ;$$

$$c = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \text{ et } d = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1) a) Déterminer la forme exponentielle de a et d , puis vérifier que : $c = da$

$$a = 1 - i$$

$$|a| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$a = 1 - i$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$d = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$d = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$da = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

$$= c$$

b) En déduire que $c = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

On a $c = da$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

c) Montrer que $c^6 = 8i$

$$c^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$$

$$= (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{\pi}{12} \times 6}$$

$$= 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 8i$$

2) Montrer que le point C est l'image de point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Montrons que $R(C) = A$

Donc montrons que $c - o = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - o)$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(a - o) = ae^{i\frac{\pi}{3}} = ad = c$$

Donc $R(C) = A$

3) Vérifier que $a + b = c$ puis en déduire que le quadrilatère OACB est un losange

$$a + b = 1 - i + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 + 2}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

$$= c$$

On a $a + b = c$

On a $a = c - b$

Donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

Donc le quadrilatère OACB est un parallélogramme

On a $R(C) = A$

$$\text{Donc } \begin{cases} \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle OAC est équilatéral

Donc $OA = AC$

Donc le quadrilatère OACB est un losange

Correction de l'exercice 3 (3 points) :

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité.

On choisit au hasard un(e) élève.

On considère les événements suivants :

F : L'élève choisit est une fille

G : L'élève choisit est un garçon

C_{sc} : L'élève choisit est inscrit au club Cyber sécurité

C_{sp} : L'élève choisit est inscrit au club Sport

C_{env} : L'élève choisit est inscrit au club Environnement

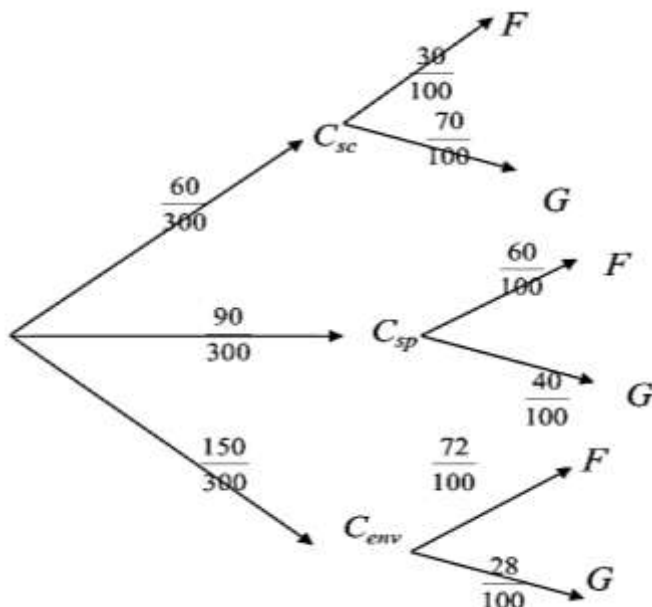
1) Vérifier que $P(C_{sc}) = \frac{1}{5}$ puis calculer $P(C_{sp})$ et $P(C_{env})$

$$P(C_{sc}) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$$

$$P(C_{sp}) = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$$

$$P(C_{env}) = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$$

2) Montrer que la probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est $\frac{3}{5}$



D'après la formule de la probabilité totale

$$\begin{aligned} P(F) &= P(C_{sc})P_{C_{sc}}(F) + P(C_{sp})P_{C_{sp}}(F) \\ &\quad + P(C_{env})P_{C_{env}}(F) \\ &= \frac{60}{300} \times \frac{30}{100} + \frac{90}{300} \times \frac{60}{100} + \frac{150}{300} \times \frac{72}{100} \\ &= \frac{180}{300} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3) En déduire la probabilité que l'élève choisit(e) soit un garçon

$$\begin{aligned} P(G) &= 1 - P(F) \\ &= 1 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

4) Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon, montrer que la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est $\frac{7}{20}$

$$\begin{aligned} P_G(C_{env}) &= \frac{P(G \cap C_{env})}{P(G)} \\ &= \frac{P(C_{env})P_{C_{env}}(G)}{P(G)} \\ &= \frac{\frac{150}{300} \times \frac{28}{100}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{150}{300} \times \frac{28}{100} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

Soit g une fonction définie sur

$$I = [0; +\infty[\text{ par } h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$$

(C_h) son graphe dans un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

(On donne ; $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

1) Vérifier que $\forall x \in I ; h'(x) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1)$

Soit : $x \in I ;$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1) \end{aligned}$$

2) Montrer que h est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

Soit : $x \in I ;$

$$x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \leq e^0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x} - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow h'(x) \leq 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

2) Montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) : \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2} < -\frac{1}{2x}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$x > 0$

et h est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

$$\Rightarrow h(x) < h(0)$$

$$\Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x < 0$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}x} < \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x < -\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2} < -\frac{1}{2x}$$

3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2}$

$$\text{On a : } (\forall x \in]0; +\infty[) : \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2} < -\frac{1}{2x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}x} - x}{x^2} = -\infty$$

4) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_h), la droite (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$\text{On sait que } A(f) = \int_0^1 |h(x)| dx \times u.a$$

On a d'après la question 2 : $\forall x \in I : h(x) < 0$

$$\text{Donc } |f(x)| = -f(x)$$

$$\text{Et on a } u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 2\text{cm}^2$$

$$A(f) = \int_0^1 -f(x) dx \times u.a$$

$$= 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x - 1 dx \times \text{cm}^2$$

$$= 2 \left[-2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{x^2}{4} - x \right]_0^1$$

$$= 2 \left[-2e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} - 1 + 2 \right] \text{cm}^2$$

$$= \left[\frac{5}{2} - 4e^{-\frac{1}{2}} \right] \text{cm}^2$$

Problème (8 points) :

A) Soit g la fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \text{ et } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{et } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

3) On a $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

$$\text{On a } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	0

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

$$\text{On a } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[=]0; +\infty[$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[: g(x) \in]0; +\infty[$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

B) 1) Montrer que f est continue en 0 à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0 \times \ln(1) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$

Or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Interprétation géométrique :

La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

4)a) Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

- La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- Donc La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$
- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$; (Polynome)
- Donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappels :

$$\begin{aligned}
 (uv)' &= u'v + uv' \quad \text{et} \quad [\ln(u)]' \\
 &= \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\
 &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{x + 1} \\
 &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$

c) On a : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

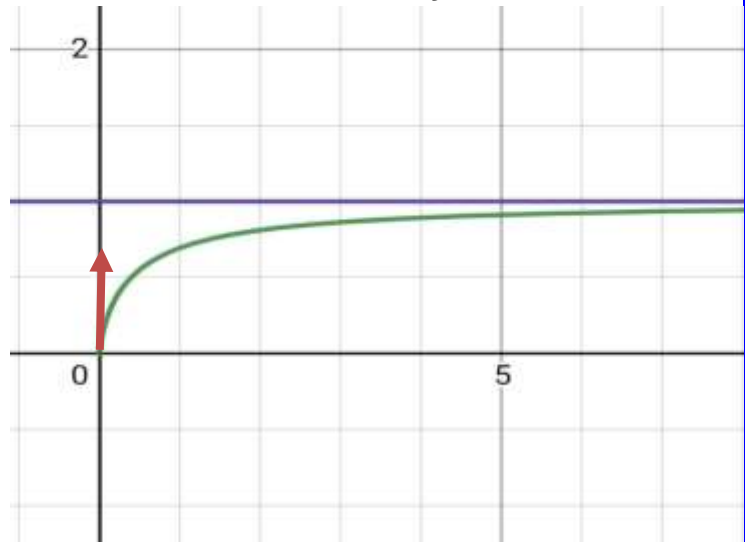
5) On a $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f''(x) = g'(x)$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la courbe (Cf) est concave sur $]0; +\infty[$

6) Tracer (Cf) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$



c)

1) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

➤ Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$.

f est strictement croissante sur l'intervalle

$$\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Car ; } f\left(\frac{1}{e-1}\right) &= \frac{1}{e-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{e-1}}\right) \\ &= \frac{1}{e-1} \ln(1 + e - 1) = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$$

$$2) u_{n+1} - u_n = u_n \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - u_n$$

$$= u_n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1 \right)$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq e - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} + 1 \geq e$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow u_n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$\Rightarrow$ la suite (u_n) est croissante

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

• (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{e-1}$ donc convergente.

• f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$ car elle est dérivable sur I

$$\begin{aligned} f\left(\left[0; \frac{1}{e-1}\right]\right) &= \left[f(0); f\left(\frac{1}{e-1}\right)\right] \\ &= \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \subset \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \end{aligned}$$

$$\bullet u_0 = \frac{1}{e} \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} = e$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{e-1}$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est $\frac{1}{e-1}$

1

7

*****5

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج 12



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M5-24

3h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)

الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé

Correction du modèle 12

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) une suite tel que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$ et $u_0 = 1$

- 0,5 **1)** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > -2$
- 0,5 **2)** Montrer que la suite (u_n) est convergente
- 3)** Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$
- 0,5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$
- 0,75 **b)** Calculer v_n puis u_n en fonction de n pour tout n dans $\mathbb{N}$
- 0,25 **c)** Déterminer la limite de la suite (u_n)
- 4)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$
- 0,5 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(1; 2; 1)$, $B(1; 3; 1)$ et $C(1; 0; 1)$ et (S) la sphère de centre $\Omega(-3; 0; 1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$

- 0,5 **1) a)** Montrer que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = -\vec{i} + \vec{k}$ puis en déduire que $x - z = 0$ est une équation cartésienne au plan (OAB) .
- 0,25 **b)** Calculer la surface du triangle OAB
- 0,5 **2) a)** Montrer que le plan (OAB) est tangente à la sphère (S) en un point H
- b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H
- 0,5 **3)** Soit (Δ) la droite passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 0; -2)$
- 0,25 **a)** Déterminer une représentation paramétrique de (Δ)
- 0,25 **b)** Déterminer une équation cartésienne de (S)
- 0,75 **c)** Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en déterminant les coordonnées de point de contact

Exercice 3 (4 points) :

On considère dans le repère complexe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

On considère les points $A(a) ; B(b) ; C(c)$ tel que

$$a = 1 + 2i ; b = 3 + 3i \text{ et } c = 4 + 5i$$

1) Ecrire b sous forme exponentielle puis vérifier que $b^8 \in \mathbb{R}$

2) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et d l'affixe du point D l'image de A par T

Vérifier que $d = 2 + 4i$

3) Montrer que $c - a = 3i(b - d)$ puis en déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaire

4) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange

5) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2 et e l'affixe de point E l'image de A par h

a) Vérifier que $e = -1 + i$

a) Déterminer le centre et le rayon de (C) le cercle circonscrit au triangle EBD

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2

; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 , ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

B : « Le produit de deux numéros égale à 4 »

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$,

2) Calculer $P(B)$

3) Est-ce que les événements A et B sont indépendantes ?

Problème (8 points) :

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x \ln x - x$$

Et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé (Unité 1cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \ln(x)$

3) Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$

5) a) Calculer l'intégrale $A = \int_1^e g(x) dx$, en fonction de α

b) Interpréter géométriquement le nombre A

B) f une fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x-1} \ln(x) - e^{x-1}$$

(C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

2) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x} e^{x-1}$

b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse

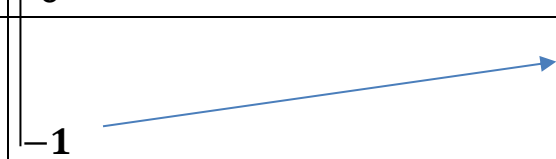
c) Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en 1

4) Soit h une fonction définie sur I par :

$$h(x) = 2x + x^2 \ln x - x^2 - 1$$

Et dont le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$h(x)$	-1	$+\infty$



a) Calculer $h(1)$ puis déterminer le signe de h sur $I =]0; +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f''(x) = \frac{h(x)}{x^2} e^{x-1}$

c) Etudier la convexité de (C_f) puis justifier que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 1

5) Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle J à déterminer

7) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution d'exercice 01 (3 Points)

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} \text{ et } u_0 = 1$$

1) Montrer par récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > -2$$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > -2$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n > -2$ et montrons que $u_{n+1} > -2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2 \\ &= 3 - \frac{9}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 5) - 9}{u_n + 5} = \frac{3u_n + 6}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} \end{aligned}$$

On a $u_n > -2$ donc $u_n + 5 > 3$

Donc $u_n + 5 > 0$

Et on a $u_n > -2$ donc $u_n + 2 > 0$

Donc $3(u_n + 2) > 0$

Donc $\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} > 0$ donc $u_{n+1} + 2 > 0$

Donc $u_{n+1} > -2$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > -2$$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5} \\ &= \frac{-4 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 5} \\ &= \frac{-(u_n^2 + 4u_n + 4)}{u_n + 5} \\ &= \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante

la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 donc elle est convergente

2)a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5}} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} - \frac{3}{3(u_n + 2)} \\ &= \frac{u_n + 5 - 3}{3(u_n + 2)} \\ &= \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$$

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n pour tout n dans $\mathbb{N}$

Soit n un entier naturel,

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{3}$

Donc $v_n = v_0 + r(n - 0)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n \\ &= \frac{1}{3}(1 + n) \end{aligned}$$

Et on a : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ donc :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n + 2} \Rightarrow u_n + 2 = \frac{1}{v_n} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{1}{v_n} - 2 \\ \Rightarrow u_n &= \frac{1}{\frac{1}{3}(1 + n)} - 2 \\ \Rightarrow u_n &= \frac{3}{1 + n} - 2 \end{aligned}$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + n} - 2 = -2$$

$$\text{; car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + n} = 0$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) = 1 \Rightarrow u_n v_n + 2v_n = 1$$

$$\Rightarrow u_n v_n = 1 - 2v_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n 1 - 2v_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n 1 - 2 \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = n + 1 - 2 \frac{(n - 0 + 1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = (n + 1) - (n + 1) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1 + n) \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = (n + 1) - (n + 1) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = (n + 1) \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}n \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k v_k = \frac{1}{3}(1 + n)(1 - n) = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

Solution d'exercice 02 (3 Points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(1; 2; 1)$, $B(1; 3; 1)$ et $C(1; 0; 1)$ et (S) la sphère de centre $\Omega(-3; 0; 1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$

a) Montrer que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = -\vec{i} + \vec{k}$ puis en déduire que $x - z = 0$ est une équation cartésienne au plan (OAB).

Rappel: Expression analytique du produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge \vec{V} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{On a } \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \wedge \vec{OB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Rappel:

Le vecteur $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ est un vecteur normal au plan (OAB)

Soit $M(x; y; z) \in (OAB)$

On a le vecteur $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale au plan (OAB)

Donc (OAB): $-x + 0 \times y + 1 \times z + d = 0$

Donc (OAB): $-x + z + d = 0$

Et on a $O(0, 0, 0) \in (OAB)$ donc on remplace les coordonnées de O dans $0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$

D'où (OAB): $-x + z = 0$

Donc (OAB): $x - z = 0$

b) Calculer la surface du triangle OAB

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| \quad ua = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad ua$$

2)a) Montrer que le plan (OAB) est tangente à la sphère (S) en un point H

On a (S) la sphère de centre $\Omega(-3; 0; 1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$

Et (OAB): $x - z = 0$ donc :

$$d(\Omega; (OAB)) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Donc: $d(\Omega; (OAB)) = R$

Donc le plan (OAB) est tangente à la sphère (S) en un point H

a) Déterminer les coordonnées du point de contact H

$(x; y; z)$ les coordonnées de H vérifie

$$\begin{cases} (\Omega H): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (OAB): x - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (-3 + t) - (1 - t) = 0$$

$$\text{Donc } 2t - 4 = 0$$

$$\text{Donc } t = 2 \text{ on remplace dans } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } H(-1; 0; -1)$$

3) Soit (Δ) la droite passant par le point C(1; 0; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 0; -2)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ)

On a (Δ) la droite passant par le point

C(1; 0; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 0; -2)$

$$\text{donc } (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

b) Déterminer une équation cartésienne de (S)

On a (S) la sphère de centre $\Omega(-3; 0; 1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$ donc :

Soit $M(x; y; z) \in (S)$

Donc

$$(S): (x - (-3))^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\text{Donc } (S): (x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 8$$

c) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) puis déterminer les coordonnées de point de contact

Soit $(x; y; z)$ les coordonnées de K

l'intersection de (S) et (Δ)

Donc $(x; y; z)$ vérifie

$$: \begin{cases} (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \\ (S): (x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (1 + 2t + 3)^2 + 0^2 + (1 - 2t - 1)^2 = 8$$

$$\text{Donc } (4 + 2t)^2 + 0^2 + (-2t)^2 = 8$$

$$\text{Donc } (4 + 2t)^2 + 4t^2 - 8 = 0$$

$$\text{Donc } 16 + 16t + 4t^2 + 4t^2 - 8 = 0$$

$$\text{Donc } 8t^2 + 16t + 8 = 0$$

$$\text{Donc } 8(t^2 + 2t + 1) = 0$$

$$\text{Donc } (t + 1)^2 = 0 \text{ donc } t = -1$$

Donc la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point K

On remplace $t = -1$ dans

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ pour trouver K}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \text{ donc } K(-1; 0; 3)$$

Exercice 03

On considère dans le repère complexe

$(0; \vec{u}; \vec{v})$ les points $A(a); B(b); C(c)$ tel que $a = 1 + 2i; b = 3 + 3i$ et $c = 4 + 5i$

1) Ecrire b sous forme trigonométrique

2) Vérifier que $d = 2 + 4i$ est l'affixe du point D l'image de A par la translation T de vecteur $\vec{BC}$

3) Vérifier que $c - a = 3i(b - d)$ puis en déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

4) Montrer que ABCD est losange

5) Soit e l'affixe de E l'image de A par l'homothétie h de centre B et de rapport 2

a) Vérifier que $e = -1 + i$

b) En déduire le centre et le rayon de (C) le cercle circonscrit au triangle EBD

Solution d'exercice 03 (3 Points)

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points $A(a); B(b); C(c)$ tel que $a = 1 + 2i; b = 3 + 3i$ et $c = 4 + 5i$

1) Ecrire b sous forme exponentielle puis vérifier que $b^8 \in \mathbb{R}$

$$|b| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$b = 3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + i \frac{3}{3\sqrt{2}} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$b^8 = \left(3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^8 = (3\sqrt{2})^8 e^{i\frac{\pi}{4} \times 8} = (3\sqrt{2})^8 e^{i2\pi}$$

$$= (3\sqrt{2})^8 (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi))$$

$$= (3\sqrt{2})^8 (1 + 0) = (3\sqrt{2})^8 \in \mathbb{R}$$

2) Vérifier que $d = 2 + 4i$ est l'abbre du point D l'image de A par la translation T de vecteur $\vec{BC}$

$$T(A) = D \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

$$\Rightarrow z_{\vec{AD}} = z_{\vec{BC}}$$

$$\Rightarrow d - a = c - b$$

$$\Rightarrow d = c - b + a$$

$$\Rightarrow d$$

$$= 4 + 5i - 3 - 3i + 1 + 2i$$

$$\Rightarrow d = 2 + 4i$$

3) Vérifier que $c - a = 3i(b - d)$

$$\text{On a : } c - a = 4 + 5i - 1 - 2i = 3 + 3i$$

$$\text{Et on a : } 3i(b - d) = 3i(3 + 3i - 2 - 4i)$$

$$= 3i(1 - i) = 3 + 3i$$

$$\text{Donc : } c - a = 3i(b - d)$$

$$\text{On a : } c - a = 3i(b - d)$$

$$\text{Donc : } \frac{c - a}{b - d} = 3i \text{ donc : } \arg\left(\frac{c - a}{b - d}\right)$$

$$\equiv \arg(3i)[2\pi]$$

$$\text{Donc : } (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaire

4) Montrer que le quadrilatère ABCD est losange

$$\text{On a } T(A) = D \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Et on a les diagonales du quadrilatère ABCD les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaire

Donc le quadrilatère ABCD est losange

5) Soit el'abbre de de point E l'image de A par l'homothétie h de centre B et de rapport 2

Vérifier que $e = -1 + i$

$$h(A) = E \Rightarrow \vec{BE} = 2\vec{BA}$$

$$\Rightarrow e - b = 2(a - b)$$

$$\Rightarrow e = 2(a - b) + b$$

$$\Rightarrow e = 2(1 + 2i - 3 - 3i) + 3 + 3i$$

$$\Rightarrow e = 2(-2 - i) + 3 + 3i$$

$$\Rightarrow e = -1 + i$$

6) En déduire le centre et le rayon de (C), le cercle circonscrit au triangle EBD

$$\text{On a : } \vec{BE}$$

$$= 2\vec{BA} \text{ donc A est le milieu du segment } [EB]$$

$$\text{Donc } AE = AB$$

$$\text{Et on a ABCD un losange donc } AB = AD$$

$$\text{D'où } AE = AB = AD$$

Donc les points B; E et D appartient au même cercle (C) de centre A et de rayon

$$r = AB = |b - a|$$

$$= |3 + 3i - 1 - 2i|$$

$$= |2 + i|$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

D'où le cercle (C) circonscrit au triangle EBD est de centre A et de rayon $\sqrt{5}$

Solution d'exercice 04 (2 points)

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$,

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des arrangements sans répétitions de deux boules parmi dix boules contenues dans le sac

Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$$

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

$$\text{Donc Card}(A) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$$

$$\text{Par suite } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

4) calculer $P(B)$

B : « Le produit de deux numéros égale à 4 »
donc (2 ; 2) ou (1 ; 4)

$$\text{Donc Card}(B) = A_2^2 + 2 \times (A_1^1 \times A_4^1) = 2 + 8 = 10$$

$$\text{Par suite } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

2) Est-ce que les événements A et B sont indépendantes ?

$A \cap B$ « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs et le produits égale à 4 »
donc (2 ; 2)

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_2^2}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$$\text{Et on a : } p(A) \times p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \neq p(A \cap B)$$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendantes

Solution du problème (8 points)

A) Soit g une fonction définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } g(x) = x \ln x - x + 1$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - x + 1 = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln x - 1) + 1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$$

2) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \ln(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une somme de deux fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \ln(x)$

3) Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$

On sait que $\forall x \in]0; 1]; \ln(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[; \ln(x) \geq 0$, donc :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	1 $+\infty$	$g(1) = 0$	

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$

Le nombre 0 est une valeur minimale de la fonction g sur $]0; +\infty[$

$$\text{Donc : } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$$

B) f une fonction définit sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x - 1) e^{x-1}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) e^{x-1} = -\infty$$

$$\text{Car: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$$

Interpréter le résultat géométriquement

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite

d'équation $x = 0$; c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

2) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) e^{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) e^x e^{-1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x - 1) e^{x-1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) \frac{e^x}{x} e^{-1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x} e^{x-1}$$

$x \mapsto \ln x - 1$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

$x \mapsto e^{x-1}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ car c'est une somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times e^{x-1} + (\ln x - 1) e^{x-1} \\ &= \frac{e^{x-1}}{x} + e^{x-1} \ln x - e^{x-1} \\ &= \frac{e^{x-1} + x e^{x-1} \ln x - x e^{x-1}}{x} \\ &= \frac{e^{x-1}(1 + x \ln x - x)}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} e^{x-1} \end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{g(x)}{x} e^{x-1}$$

$$\text{Et on a : } x > 0 \text{ et } e^{x-1}$$

$$> 0 \text{ et d'après la partie A): } g(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } f'(x) \geq 0$$

D'où la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) au point 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{On a : } f'(1) = \frac{g(1)}{1} e^{1-1} = 0$$

4) Soit h une fonction définie sur I par :

$$h(x) = 2x + x^2 \ln x - x^2 - 1$$

a) Calculer $h(1)$ puis déterminer le signe de h sur $I =]0; +\infty[$

$$h(x) = 2 + \ln 1 - 1^2 - 1 = 0$$

On distingue deux cas ; $x \in]0; 1]$ et $x \in [1; +\infty[$

Soit : $x \in]0; 1]$

$$x \in]0; 1] \Rightarrow x \leq 1$$

; h est strictement croissante sur $]0; 1]$

$$\Rightarrow h(x) \leq h(1)$$

$$\Rightarrow h(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [1; +\infty[$

$$x \in [1; +\infty[\Rightarrow 1 \leq x$$

et h est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

$$\Rightarrow h(1) \leq h(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq h(x)$$

On dresse le tableau de signe de h

x	0	1	$-\infty$
$h(x)$	-	0	+

b) Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[; f''(x) = \frac{h(x)}{x^2} e^{x-1}$$

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{e^{x-1} g(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^{x-1} g(x) + e^{x-1} g'(x)]x - e^{x-1} g(x)}{x^2} \\ &= \frac{[e^{x-1}(x \ln x - x + 1) + e^{x-1} \ln(x)]x - e^{x-1}(x \ln x - x + 1)}{x^2} \\ &= \frac{e^{x-1}(x^2 \ln x - x^2 + x + x \ln(x) - x \ln x + x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1}(2x + x^2 \ln x - x^2 - 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1} h(x)}{x^2}$$

c) Etudier la convexité de (C_f) puis justifier que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 1

$$\begin{aligned} \text{On a : } f''(x) &= \frac{e^{x-1} h(x)}{x^2} \text{ de plus } e^{x-1} \\ &> 0 \text{ et } x^2 > 0 \end{aligned}$$

Donc le signe de f'' est le signe de h d'où le tableau de concavité suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
La convexité de la courbe (C_f)	concave ∩	le point A(1;0) est point d'inflexion de (C_f)	convexe ∪

On a : f'' s'annule et change de signe en 1 donc le point $A(1; 0)$

est un point d'inflexion de (C_f)

5) Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1) e^{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \text{ car } e^{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(e; 0)$

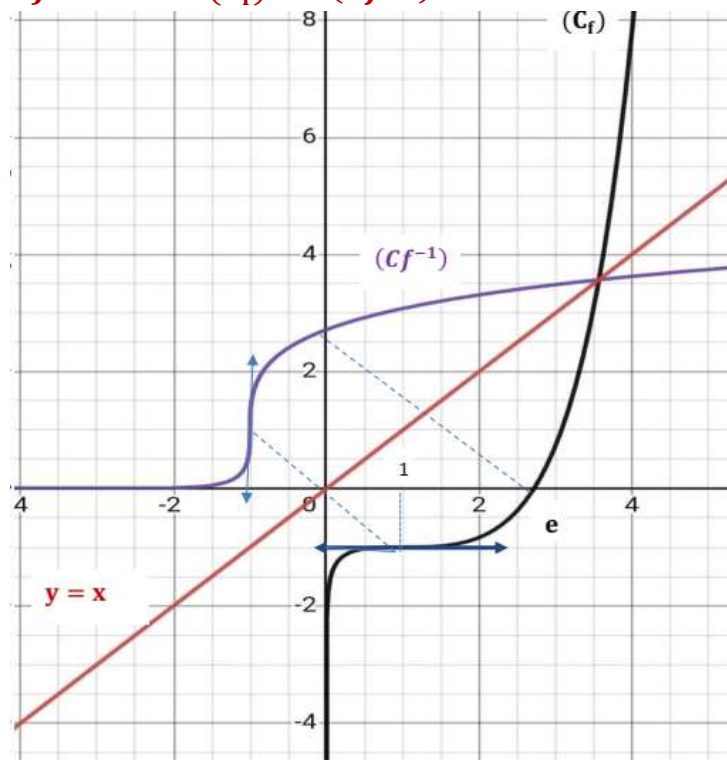
6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur J à déterminer

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Donc la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que $J = f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$

7) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$



1
10
30
Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 13



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M2-26

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 13

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	. Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et suites	11 points

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 0)$; $B(0; 1; 0)$; $C(0; 0; 1)$ et $D(1; 1; 1)$

- 0,25 **1) a)** Vérifier que les points A ; B et C formant un plan
- 0,25 **b)** Vérifier que $\overrightarrow{OD} (1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)
- 0,25 **c)** Vérifier que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) a)** Montrer que droite (OD) est perpendiculaire au plan (ABC) en un point Ω dont on déterminera les coordonnées
- 0,5 **b)** En déduire que si x, y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$ alors $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$
- 0,5 **3)** Soit (S) la sphère de centre O et de rayon 1
- 0,5 **a)** Vérifier que A ; B et C sont trois points de (S)
- 0,5 **b)** En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC
- 0,5 **4)** Montrer que la droite (OD) coupe la sphère (S) en deux points E et F dont on déterminera les coordonnées

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A ; B et C d'affixes respectifs $a = 1$; $b = -1$ et $c = 1 - i$

- 0,5 **1) a)** Ecrire c sous forme trigonométrique
- 0,5 **b)** Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A
- 2)** Pour tout point M différent de O, d'affixe le nombre complexe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$
- 0,5 **a)** Déterminer le nombre complexe z pour que les points M et M' soient confondues
- 0,5 **b)** On suppose que M différent des points A et B .
- Montrer que $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
- c)** Soit la droite (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$
- 0,75 Montrer que si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)
- d)** Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$;
- 0,75 Montrer que si M appartient au (C) alors les points A ; B et M' Sont alignés

Exercice 3 (2,5 points) :

Une urne contient 6 boules portant les numéros : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0, ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et avec remise quatre boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : « Obtenir quatre boules portant le numéro 0 »

B : « Obtenir deux boules portant le numéro 1 exactement »

- 1 **1)** Montrer que $P(A) = \frac{1}{81}$ et $P(B) = \frac{8}{27}$
- 2)** On tire au hasard, successivement et avec remise n boules de l'urne
- 0,75 **a)** Montrer que la probabilité p d'obtenir au moins une boule portant le numéro 1 est $p = 1 - \frac{1}{3^n}$
- 0,75 **b)** Déterminer le nombre minimal de tirages pour que $p > 0,999$

Problème (11 points) :

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - 4 + \sqrt{x}(2 + \ln(x))$

Voici le tableau de variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	-4	$g(\alpha)$	$+\infty$

On donne $\alpha \simeq 0,01$

1) Justifier que : $(\forall x \in]0; \alpha]) : g(x) < 0$

2) Calculer $g(1)$

2) En déduire que : $(\forall x \in [\alpha; 1]) : g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[) : g(x) \geq 0$

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$

Et (Cf) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité: 1 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

b) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que la courbe (Cf) coupe la droite (Δ) en deux points dont on déterminera les coordonnées

b) Montrer que (Cf) est en dessous de la droite (Δ) sur $[1; 4]$ et en dessus de la droite (Δ) sur les intervalles $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

4) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$ en justifiant votre réponse

c) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) > 0$ et interpréter le résultat géométriquement

5) Tracer (Δ) et (Cf) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

6) Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J que l'on précisera

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 4 puis montrer que $(h^{-1})'(4) = \frac{1}{2 + \ln(2)}$

c) Tracer (Ch^{-1}) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) a) Montrer que la fonction $x \rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1; 4]$

b) Par intégration par parties, montrer que $\int_1^4 (\sqrt{x} - 2) \ln(x) dx = \frac{26}{9} - \frac{16\ln(2)}{3}$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$

C) Soit (U_n) une suite numérique tel que : $U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < U_n < 4$

2) Montrer la suite (U_n) est décroissante

3) Déduire (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

On considère les points $A(1; 0; 0)$;
 $B(0; 1; 0)$; $C(0; 0; 1)$ et $D(1; 1; 1)$

1) a) Vérifier que les points A ; B et C formant un plan

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Donc } \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc A et B et C ne sont pas alignés

D'où les points A et B et C forment un plan

b) Vérifier que $\overrightarrow{OD}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) donc il suffit de montrer que :

$$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

Donc $\overrightarrow{OD} (1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c) Vérifier que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a $\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

$$\text{Donc } (ABC): 1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$$

$$\text{Donc } (ABC): x + y + z + d = 0$$

$$\text{Et on a } A(1, 0, 0) \in (ABC)$$

$$\text{Donc } 1 + d = 0 \text{ donc } d = -1$$

$$\text{D'où } (ABC): x + y + z - 1 = 0$$

2) a) Montrer que droite (OD) est perpendiculaire au plan (ABC) en un point Ω dont on déterminera les coordonnées

On a $\overrightarrow{OD} (1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Et on $\overrightarrow{OD} (1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (OD)

Donc (OD) est perpendiculaire au plan (ABC) en un point K

$(x; y; z)$ les coordonnées de Ω vérifie le

$$\text{système } \begin{cases} (OD): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC): x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } t + t + t - 1 = 0$$

$$\text{Donc } 3t = 1$$

$$\text{Donc } t = \frac{1}{3}$$

$$\text{On remplace } -1 \text{ dans } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases};$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \Omega \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$$

b) En déduire que si x ; y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$ alors $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

On a x ; y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$

Donc $M(x; y; z)$ appartient au plan (ABC)

$$\text{Donc } OM \geq O\Omega$$

$$\text{Donc } : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc } : x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

3) Soit (S) la sphère de centre O et de rayon 1
a) Vérifier que A ; B et C sont trois points de (S)

$$OA = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \text{ donc } A \in (S)$$

$$OB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \text{ donc } B \in (S)$$

$$OC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \text{ donc } C \in (S)$$

b) En déduire le centre et le rayon de (C) cercle circonscrit au triangle ABC

O On a A ; B et C sont trois points de (S)

Donc le plan (ABC) coupe (S) suivant le cercle circonscrit au triangle ABC

Et on a Ω est la projection orthogonale de O sur (ABC)

Donc le centre de (C) est de centre Ω et son rayon est

$$r = \Omega A = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Montrer que (OD) coupe la sphère (S) en deux points E et F dont on déterminera leurs coordonnées

$$\begin{cases} (OD): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (S): x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } t^2 + t^2 + t^2 - 1 = 0$$

$$\text{Donc } 3t^2 - 1 = 0$$

$$\text{Donc } t^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } t(t+1) = 0$$

$$\text{Donc } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc la droite (OD) coupe la sphère (S) en deux point

$$\text{Donc pour } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ on a } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Donc } E \left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{Donc pour } t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ on a } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Donc } F \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Correction de l'exercice 2 (3,5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on

considère les points A ; B et C d'affixes respectifs $a = 1$; $b = -1$ et $c = 1 - i$

1)a) Ecrire c sous forme trigonométrique

$$|c| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$c = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

b) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A

On a :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1-i-1}{-1-1} = \frac{1}{2} i$$

$$\text{Donc } \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{1}{2} i \right) [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A

2) Pour tout point M différent de O, d'affixe le nombre complexe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ **a) Déterminer le nombre complexe z pour que les points M et M' soient confondues**

$$M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

b) On suppose que M différent de A et B

Montrer que $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1}$$

$$= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2}$$

$$= \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$$

**c) Soit (Δ) le médiatrice du segment $[AB]$
Montrer que si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)**

M appartient à $(\Delta) \Rightarrow AM = BM$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 ; \text{car } M \neq A$$

$$\Rightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z'-1} = 1 ; \text{car } \frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BM'}{AM'} = 1$$

$$\Rightarrow BM' = AM'$$

$\Rightarrow M'$ appartient à (Δ)

d) Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$;

Montrer que si M appartient au (C) alors les points $A ; B$ et M' sont alignés

M appartient au cercle (C)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) \equiv \pi [2\pi] \text{ car } \frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{BM'}) \equiv \pi [2\pi]$$

$\Rightarrow$ les points $A ; B$ et M' sont alignés

Correction de l'exercice 3 (2,5 points) :

Une urne contient 6 boules portant les numéros : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 , ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et avec remise quatre boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

1) Montrer que $P(A) = \frac{1}{81}$ et $P(B) = \frac{8}{27}$

A : « Obtenir quatre boules portant le numéro 0 »

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{2^4}{6^4} = \frac{16}{1296} = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

B : « Obtenir deux boules portant le numéro 1 exactement » (1 ; 1 ; 0 ; 0)

$$\begin{aligned} \text{Card}(B) &= \left(\frac{4!}{2! \times 2!}\right) \times 4^2 \times 2^2 \\ &= 6 \times 16 \times 4 = 384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{384}{1296} = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

2) On tire au hasard, successivement et avec remise n boules de l'urne

a) Montrer que la probabilité p d'obtenir au moins une boule portant le numéro 1 est

$$p = 1 - \frac{1}{3^n}$$

On pose

C : Obtenir au moins une boule portant le numéro 1

$\bar{C}$: Aucune boule portant le numéro 1

$$p(\bar{C}) = \frac{\text{Card}(\bar{C})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

$$p = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{3^n}$$

b) Déterminer le nombre minimal de tirages pour que $p > 0,999$

$$p > 0,999 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3^n} > 0,999$$

$$\Rightarrow 0,001 > \frac{1}{3^n}$$

$$\Rightarrow 3^n > 1000$$

$$\Rightarrow n \ln(3) > \ln(1000)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(1000)}{\ln(3)}$$

$$\Rightarrow n > 6,2$$

Donc le nombre minimal de tirages pour que

$p > 0,999$ est $n = 7$

Problème (11 points) :

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 4 + \sqrt{x}(2 + \ln(x))$$

Voici le tableau de variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$ (On donne $\alpha \approx 0,01$)

x	0	α	$+$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	-4	$g(\alpha)$	$+\infty$

1) Justifier que : $(\forall x \in]0; \alpha]) : g(x) < 0$

$$\text{On a } g(]0; \alpha]) = [g(\alpha); \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[\\ = [g(\alpha); -4[$$

Donc $\forall x \in]0; \alpha]$ on a : $g(x) \in [g(\alpha); -4[$

Donc $\forall x \in]0; \alpha]$; $g(x) < 0$

2) Calculer $g(1)$

$$g(1) = 2 - 4 + (2 + \ln(1)) = 0$$

2) En déduire que : $(\forall x \in [\alpha; 1]) : g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[) : g(x) \geq 0$

Soit : $x \in [\alpha; 1]$

$x \in [\alpha; 1] \Rightarrow x \leq 1$ et g est str croissante sur $[\alpha; 1]$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Donc $(\forall x \in [\alpha; 1]) : g(x) \leq 0$

Soit : $x \in [1; +\infty[$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x \geq 1$ et g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

Donc $(\forall x \in [1; +\infty[) : g(x) \geq 0$

D'où le tableau de signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

B) Soit f une fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - 2 = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

• On pose $t = \sqrt{x}$ donc $x = t^2$

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(t)}{t} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

b) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{2\ln(x)}{x} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) - x \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que la courbe (Cf) coupe la droite (Δ) en deux points dont on déterminera les coordonnées

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = x \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ ou } x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

D'où la droite (Δ) coupe (Cf) en deux points Sont $A(1; 1)$ et $B(4; 4)$

b) Montrer que (Cf) est en dessous de la droite (Δ) sur $[1; 4]$ et en dessus de la droite (Δ) sur les intervalles $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) - y = (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$$

On dresse le tableau de signe de $f(x) - y$

x	0	1	4	$+\infty$	
$\sqrt{x}-2$	—	—	0	+	
$\ln(x)$	—	0	+	+	
$f(x)-y$	+	0	—	0	+

Donc (Cf) est en dessous de la droite (Δ) sur $[1; 4]$ et en dessus de la droite (Δ) sur les intervalles $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$

4) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une produit et somme des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x))' \\ &= 1 + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{x} \\ &= \frac{2x}{2x} + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{2x} + \frac{2\sqrt{x} - 4}{2x} \\ &= \frac{2x - 4 + \sqrt{x}(2 + \ln(x))}{2x} \\ &= \frac{g(x)}{2x} \end{aligned}$$

b) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$$

On a $2x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

A diagram illustrating a function's behavior. It shows a V-shaped path starting from $+\infty$ at $x=0$, descending to a minimum value of 1 at $x=1$, and then ascending back to $+\infty$ at $x=+\infty$. Arrows indicate the direction of the path.

c) En déduire que $(\forall x \in]0; +\infty[: f(x) > 0$

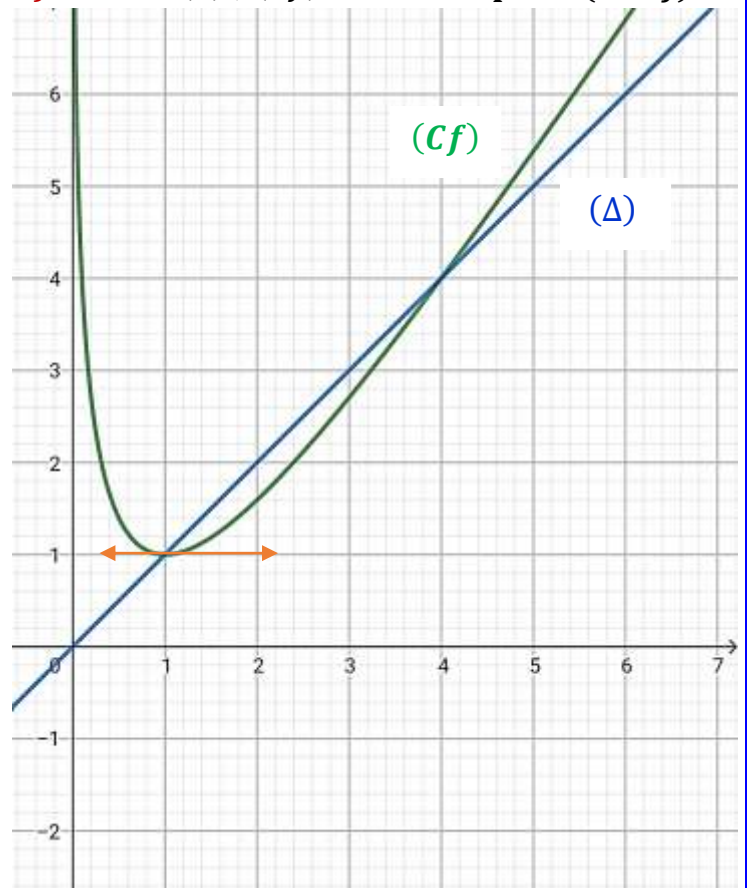
On a 1 est une valeur minimale de f sur $]0; +\infty[$ donc $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) \geq 1$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) > 0$

Interprétation géométrique

La courbe de f est située en dessus d'axe des abscisses sur $]0; +\infty[$

5) Tracer (Δ) ; (Cf) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



6) Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J que l'on précisera

➤ La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$
On particulier sur $[1; +\infty[$ donc h est continue sur $[1; +\infty[$.

➤ La fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc la fonction h est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = h([1; +\infty[)$

$$= [h(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)] = [1, +\infty[$$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 4 puis montrer que $(h^{-1})'(4) = \frac{1}{2+\ln(2)}$

On a : $h(4) = 4$ donc $h^{-1}(4) = 4$

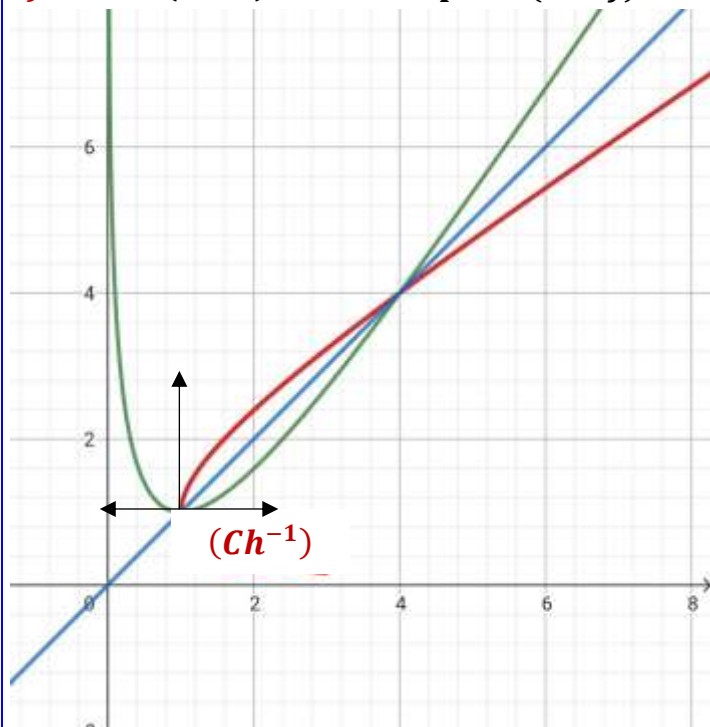
La fonction h est dérivable en 4 et on a :

$$\begin{aligned} h'(4) &= \frac{8-4+2(2+\ln(4))}{8} = \frac{8+2\ln(4)}{4} \\ &= \frac{8+4\ln(2)}{4} = 2 + \ln(2) \neq 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction h^{-1} est dérivable en 4 et

$$\text{on a : } (h^{-1})'(4) = \frac{1}{h'(4)} = \frac{1}{2+\ln(2)}$$

c) Tracer (Ch^{-1}) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



7)a) Montrer que la fonction $K: x \rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $k: x \rightarrow \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1; 4]$

La fonction K est dérivable sur $[1; 4]$ car c'est une somme et produits des fonctions dérivables sur $[1; 4]$

Soit $x \in [1; 4]$

$$\begin{aligned} K'(x) &= \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} \\ &= \sqrt{x} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

b) A l'aide d'une intégration par parties

montrer que $\int_1^4 (\sqrt{x} - 2) \ln(x) dx = \frac{26}{9} - \frac{16\ln(2)}{3}$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \sqrt{x} - 2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 (\sqrt{x} - 2) \ln(x) dx \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right) \ln(x) \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right)}{x} dx \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right) \ln(x) \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{x} - 2 dx \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right) \ln(x) \right]_1^4 - \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{16}{3} - 8 \right) \ln(4) - \left(\frac{4 \times 8}{9} - 8 - \frac{4}{9} + 2 \right) \\ &= -\frac{8\ln(4)}{3} + \frac{26}{9} \\ &= \frac{26}{9} - \frac{16\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$

La courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans l'intervalle $[1; 4]$
Donc $\forall x \in [1, 4]: |f(x) - x| = x - f(x)$

On a u. a = 1cm^2

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 |f(x) - y| dx \times \text{u. a} \\ &= \int_1^4 x - f(x) dx \cdot \text{cm}^2 \\ &= \int_1^4 -(\sqrt{x} - 2) \ln(x) dx \cdot \text{cm}^2 \\ &= - \int_1^4 (\sqrt{x} - 2) \ln(x) dx \cdot \text{cm}^2 \\ &= \left(\frac{16\ln(2)}{3} - \frac{26}{9} \right) \text{cm}^2 \end{aligned}$$

C) Soit (U_n) une suite numérique tel que :

$U_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < U_n < 4$

Pour $n=0$ on a $u_0 = 3$ donc $1 \leq u_0 \leq 4$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $1 \leq u_n \leq 4$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 4$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1; 4[$

et $1 < u_n < 4$

$$\begin{aligned} 1 < u_n < 4 &\Rightarrow f(1) < f(u_n) < f(4) \\ &\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 4 \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n < 4$$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Soit n un entier naturel,

On a : $(\forall x \in]1; 4[): f(x) - x \leq 0$ d'après 3)b) et $u_n \in]1; 4[$ d'après C)1)

Donc on pose $x = u_n$,

On trouve $f(u_n) - u_n \leq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$;

D'où la suite (u_n) est décroissante

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]1; 4[$; car elle est dérivable sur $]1; 4[$
- $f(]1; 4[) = [f(1); f(4)] =]1; 4[\subset]1; 4[$
- $u_0 \in]1; 4[$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

On a d'après 3)a)

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Donc la limite de la suite (u_n) est 1 car la suite (u_n) est décroissante

11

1

21

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 14



3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Sujet et correction d'examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 14

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 5	Calcul intégral	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	5,5 points

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

0,5 1) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$

0,5 b) Montrer que la suite (u_n) est convergente

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

0,5 a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1

0,75 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{n+1}{n+2}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_{n-1}) + \ln(u_n)$

0,5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \ln(n+2)$

0,25 b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 10$

Exercice 2 (3 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -1 ; b = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } c = -b$$

0,25 1) a) Ecrire b sous forme trigonométrique

0,5 b) Montrer que $d = \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ est l'affixe du point D l'image de B par la translation T de vecteur $\vec{OA}$

0,25 c) Montrer que OADB est un losange

2) Soit M un point du plan d'affixe $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Et (C) le cercle de centre O est de rayon 1

0,5 a) Vérifier que $M \in (C)$ puis en déduire que triangle MBC est rectangle en M

0,5 b) Soit S l'aire du triangle MBC, montrer que $S = \frac{1}{2} |e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}|$

0,25 4) a) Vérifier que $e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} (e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})})$

0,25 b) En déduire que $S = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

0,5 c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale

Exercice 3 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1) On considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$

0,5 **a)** Montrer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et déduire que $x + y + z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

0,5 **b)** Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre O et tangente à (ABC)

0,5 **c)** Déterminer les coordonnées de I le point de contact de (S) et (ABC)

2) Soit α un réel, on considère les points $E\left(-\alpha; \frac{2}{\sqrt{3}}; \alpha\right)$ et $F\left(-\alpha; -\frac{2}{\sqrt{3}}; \alpha\right)$ et (S_α)

l'ensemble des points M de l'espace tel que : $ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

0,5 **a)** Montrer que (S_α) est la sphère de diamètre $[EF]$

0,5 **b)** Montrer que pour tout réel α , la sphère (S_α) est tangente au plan (ABC)

c) On notera J le point de contact de (S_α) et de (ABC) ,

0,5 Déterminer la valeur α pour que $IJ = \sqrt{2}$

Exercice 5 (3 points) :

On considère un dé équitable cubique, de faces numérotées de 1 à 6, et une urne contenant six boules : une noire, deux rouges et trois vertes.

On suppose que les boules de l'urne sont indiscernables au toucher.

On lance le dé dans l'air et on écrit le chiffre obtenu sur sa face supérieure, si le chiffre est impair alors on tire une seule boule dans l'urne, si le chiffre est pair alors on tire simultanément deux boules dans l'urne »

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir un chiffre pair sur la face supérieure »

B : « Obtenir deux boules vertes exactement »

C : « Obtenir exactement une boule verte »

D : « Au moins une boule verte »

0,75 **1)** Calculer $p(A)$ puis montrer que $p(B) = \frac{1}{10}$

1 **2)** Montrer que $p(C) = \frac{11}{20}$ puis calculer $p(D)$

0,5 **3)** Sachant qu'on a obtenu un chiffre pair sur la face supérieure du dé, calculer la probabilité pour obtenir exactement une boule verte

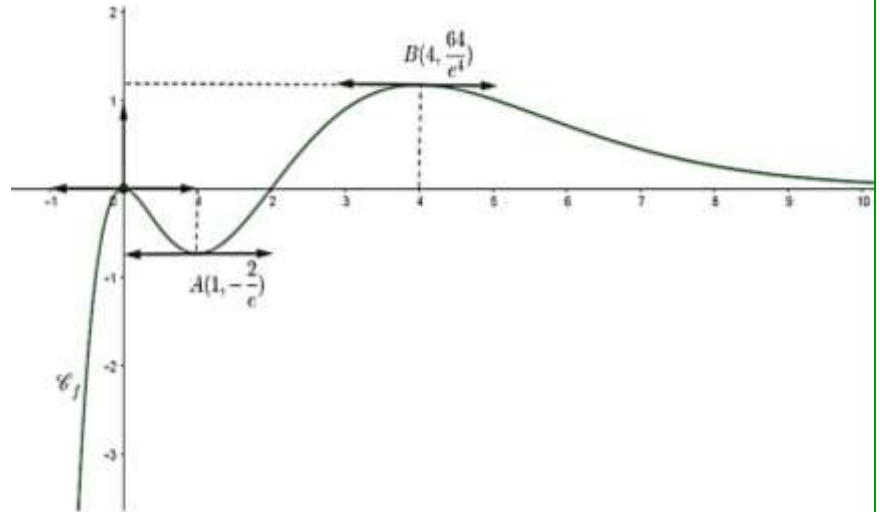
0,25 **4)** Est-ce que les événements A et C sont indépendants ? justifier votre réponse

5) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne.

0,5 Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé deux fois exactement ?

Exercice 5 (2,5 points) :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$
par : $g(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$,
(C_g) la courbe de la fonction
 g dans un repère orthonormé
($O ; \vec{i} ; \vec{j}$) (unité 1cm)



1) En utilisant le graphique

a) Déterminer

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $g'(1)$

b) Dresser le tableau de variations de g

2) a) Montrer que la fonction $x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la
Fonction $x \rightarrow -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 x^3 e^{-x} dx = \frac{4e-11}{e}$

3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_g) ; l'axe des
abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Problème (5,5 points) :

A) Soit h une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 3(\ln x)^3 + \ln x - 4$

1) Calculer h' sur $]0; +\infty[$ puis déduire que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2) Calculer $h(e)$ puis Déduire que : $(\forall x \in]0; e]); h(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [e; +\infty[); h(x) \geq 0$

B) Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{3(\ln x)^3 - \ln x + 2}{(\ln x)^2}$ et (C_f) son graphe dans un
repère orthonormé ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$) (Unité : 1 cm)

1) Vérifier que : $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ où D_f est l'ensemble de définition de f

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ puis interpréter les résultats

géométriquement ; (Remarquer que : $f(x) = 3 \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2}$)

5)a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{\ln(x)h(x)}{x(\ln x)^4}$

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]1; e]$ et strictement croissante
sur $]0; 1[$ et $[e; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur D_f

6)a) Montrer que pour tous x dans D_f :

$$3(\ln x)^3 - \ln(x) + 2 = (\ln x + 1)[3(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 2]$$

b) Déduire les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec (O_x)

7) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé ($O ; \vec{i} ; \vec{j}$) (Unité : 1 cm)

(On admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse 4,2)

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 2 > 1$ qui est vrai

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 1$ et montrons que

$$u_{n+1} > 1.$$

$$\begin{aligned} * \quad u_{n+1} - 1 &= \frac{2u_n - 1}{u_n} - 1 \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n} = \frac{u_n - 1}{u_n} \end{aligned}$$

On a $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$

$$\text{Donc : } \frac{u_n - 1}{u_n} > 0$$

D'où $u_{n+1} > 1$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n - 1}{u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n} \\ &= \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n} \\ &= \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} < 0 \end{aligned}$$

Car $u_n > 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$

Donc (u_n) est décroissante

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1

Soit n un entier naturel

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - v_n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1 \end{aligned}$$

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison 1

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{n+1}{n+2}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1$

Soit n un entier naturel

$$\text{On a } v_n = v_0 + r(n - 0) = 1 + n$$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{n + 2}{n + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2}{n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

$$\text{car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_{n-1}) + \ln(u_n)$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \ln(n + 2)$

$$S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_{n-1}) + \ln(u_n)$$

Soit n un entier naturel

$$\text{On a } u_n = \frac{n+2}{n+1} \text{ donc } \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\text{Donc } \ln(u_n) = \ln(n + 2) - \ln(n + 1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_{n-1}) + \ln(u_n) \\ &= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \dots + \ln(n + 1) \\ &\quad - \ln(n) + \ln(n + 2) - \ln(n + 1) \\ &= \ln(n + 2) - \ln(1) = \ln(n + 2) \end{aligned}$$

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 10$

$$S_n > 10 \Leftrightarrow \ln(n + 2) > 10$$

$$\Leftrightarrow n + 2 > e^{10} \Leftrightarrow n > e^{10} - 2$$

$$\Rightarrow n > 22024,5$$

Donc le plus petit entier naturel n tel que

$S_n > 10$ est 22025

Correction de l'exercice 2 (3 points) :

On considère les points A , B et C d'affixes

$$a = -1 ; b = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } c = -b$$

1) a) Ecrire b sous forme trigonométrique

$$|b| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

b) Montrer que $d = \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ est l'affixe du point D l'image de B par la translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$

$$\text{On a } T(B) = D \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$$

$$\text{Donc } d - b = a$$

$$\text{Donc } d = a + b$$

$$\text{Donc } d = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

c) Montrer que OADB est un losange

$$\text{On a } T(B) = D \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$$

Donc OADB est un parallélogramme

$$\text{Et on a } |a| = 1 \text{ et } |b| = 1$$

$$\text{Donc } OA = OB$$

Donc OADB est un losange

2) Soit M un point du plan d'affixe $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Et (C) le cercle de centre O est de rayon 1

a) Vérifier que $M \in (C)$ puis en déduire que le triangle MBC est rectangle en M

$$\text{On a } |z| = |e^{i\theta}| = 1$$

$$\text{Donc } OM = 1 \text{ donc } M \in (C)$$

$$\text{On a } c = -b \text{ donc } \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}$$

Donc O est le milieu du segment [BC]

Donc le cercle (C) est de diamètre [BC]

Et on a $M \in (C)$ donc le triangle ABC est rectangle en M

b) Soit S l'aire du triangle MBC, montrer que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right| \\ S &= \frac{1}{2} BM \times MC = \frac{1}{2} |z - b| |z - c| \\ &= \frac{1}{2} |(z - b)(z + b)| \\ &= \frac{1}{2} |z^2 - b^2| \\ &= \frac{1}{2} \left| (e^{i\theta})^2 - \left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{2i\theta} - e^{i\frac{3\pi}{2}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{2i\theta} - e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right| \text{ car } e^{i(\pi+x)} = -e^{ix} \end{aligned}$$

5) a) Vérifier que

$$e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})} \right)$$

$$\begin{aligned} A &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})} \right) \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})} \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{4} + \theta - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4} - \theta + \frac{\pi}{4})} = e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

b) En déduire que $S = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| e^{2i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \right| \left| e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})} \right| \\ &= \left| \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2} \right| \text{ car } \left| e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} \right| = 1 \end{aligned}$$

Rappel : Formule D'EULER

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{Donc } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2}$$

$$\text{Donc } S = \left| \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

$$\text{On a } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ donc } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

$$\text{D'où } S = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle S est maximale

On a $S = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ et $0 \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

On pose $X = \theta - \frac{\pi}{4}$ avec $0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}$

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction $X \mapsto \cos(X)$ est maximale lorsque $X = 0$

Donc la fonction $X \mapsto \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ est maximale lorsque $X = 0 = \theta - \frac{\pi}{4}$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

Correction de l'exercice 3 (3 points) :

1) On considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$

a) Montrer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et déduire que $x + y + z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

En déduire que $x + y + z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

Donc $(ABC): x + y + z + d = 0$

Et on a $A(0, 1, 1) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A Donc $1 + 1 + d = 0$

donc $2 + d = 0$ donc $d = -2$

D'où $(ABC): x + y + z - 2 = 0$

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre O et tangente à (ABC)

$$R = d(O; (ABC)) = \frac{|0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(S): (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\text{Donc } (S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$$

c) Déterminer les coordonnées de I le point de contact de (S) et (ABC)

$(x; y; z)$ les coordonnées de I vérifie le

$$\text{systeme} \begin{cases} (OI): \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC): x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } t + t + t - 2 = 0$$

$$\text{Donc } 3t - 2 = 0$$

$$\text{Donc } t = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

3) Soit α un réel, on considère les points

$$E\left(-\alpha; \frac{2}{\sqrt{3}}; \alpha\right) \text{ et } F\left(-\alpha; -\frac{2}{\sqrt{3}}; \alpha\right) \text{ et } (S_\alpha)$$

l'ensemble des points M de l'espace tel que : $ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

a) Montrer que (S_α) est la sphère de diamètre $[EF]$

Soit $M \in (S_\alpha)$

$$ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \Leftrightarrow ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot (\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF}) = 0$$

$$\Leftrightarrow ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot (\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF}) = 0$$

$$\Leftrightarrow ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$$

$$\Leftrightarrow ME^2 - \overrightarrow{ME}^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0, \text{ car } ME^2 = \overrightarrow{ME}^2$$

Donc S_α est la sphère de diamètre $[EF]$

b) Montrer que pour tout réel α , la sphère (S_α) est tangente au plan (ABC)

Soit Ω_α le centre de (S_α) et Soit R_α son rayon

On a Ω_α le centre de (S_α) est le milieu du segment $[EF]$ donc $\Omega_\alpha(-\alpha; 0; \alpha)$

$$R_\alpha = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$d(\Omega_\alpha; (ABC)) = \frac{|-\alpha + \alpha - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = R_\alpha$$

Donc pour tout réel α , la sphère (S_α) est tangente au plan (ABC)

c) On notera J le point de contact de (S_α) et de (ABC) ,

Déterminer la valeur α pour que $IJ = \sqrt{2}$

On a J le point de contact de (S_α) et de (ABC) $(x; y; z)$ les coordonnées de J vérifie le

$$\text{systeme} \begin{cases} (\Omega_\alpha J): \begin{cases} x = -\alpha + t \\ y = 0 + t \\ z = \alpha + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (ABC): x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } -\alpha + t + t + \alpha + t - 2 = 0$$

$$\text{Donc } 3t - 2 = 0 \quad \text{donc } t = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } J\left(\frac{2}{3} - \alpha; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} + \alpha\right) \text{ et on a } I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Donc } IJ = \sqrt{\alpha^2 + 0^2 + \alpha^2} = \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{2}|\alpha|$$

$$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

On considère un dé équilibré cubique, de faces numérotées de 1 à 6, et une urne contenant six boules : une noire, deux rouges et trois vertes.

On suppose que les boules de l'urne sont indiscernables au toucher.

On lance le dé dans l'air et on écrit le chiffre obtenu sur sa face supérieure, si le chiffre est impair alors on tire une seule boule dans l'urne, si le chiffre est pair alors on tire simultanément deux boules dans l'urne

On considère les événements suivants :

1) Calculer $p(A)$ et montrer que $p(B) = \frac{1}{10}$

A : « Obtenir un chiffre pair sur la face supérieure du dé »

Il y a trois faces paires parmi six

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B : « Obtenir deux boules vertes exactement

Pour obtenir deux boules vertes exactement il faut que le chiffre sur la face supérieure du dé soit pair

$$P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{10}$$

2) Montrer que $p(C) = \frac{11}{20}$ puis calculer $p(D)$

C : « Obtenir exactement une boule verte (Une face paire ; V ; $\bar{V}$ ou une face impaire ; V)

$$P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} + \frac{3}{6} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \\ = \frac{1}{2} \times \frac{9}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

D : « Au moins une boule verte »

$\bar{D}$: « Aucune boule verte »

(Une face paire ; $\bar{V}$; $\bar{V}$ ou une face impaire ; $\bar{V}$)

$$P(\bar{D}) = \frac{3}{6} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{3}{6} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \\ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \\ = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

3) Sachant qu'on a obtenu un chiffre pair sur la face supérieure du dé, calculer la probabilité pour obtenir exactement une boule verte

$C \cap A$: obtenir un chiffre pair sur le dé et obtenir exactement une boule verte

$C \cap A$: Une face paire ; V ; $\bar{V}$

$$P(C \cap A) = \frac{3}{6} \times \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\text{Donc : } P_A(C) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

4) Est-ce que les événements A et C sont indépendants ? justifier votre réponse

$$\text{On a } P_A(C) = \frac{3}{5} \text{ et } P(C) = \frac{11}{20}$$

$$\text{Donc } P_A(C) \neq P(C)$$

Donc les événements A et C ne sont pas indépendants

6) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne.

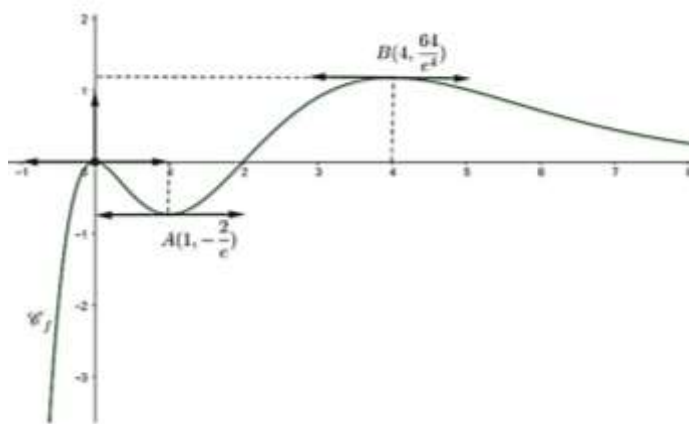
Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé deux fois exactement ?

$$P = C_3^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{3-2} = C_3^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^1$$

Correction de l'exercice 5 (3 points) :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$, avec a et b sont des réels et (C_g) la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1cm)



1) En utilisant le graphique

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $g'(1)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g'(1) = 0$

d) Dresser le tableau de variations de g

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	-
$g(x)$		0		$g(4)$		
	$-\infty$		$g(1)$		0	

2)a) Montrer que $x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $x \rightarrow -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

la fonction $k: x \rightarrow -x^2e^{-x}$ sur $[0, 1]$

La fonction K est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $[0, 1]$

Soit $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} H'(x) &= [(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]' \\ &= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \\ &= -x^2e^{-x} \\ &= k(x) \end{aligned}$$

Donc $K: x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $k: x \rightarrow -x^2e^{-x}$

b) En déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

On a $H: x \rightarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $h: x \rightarrow -x^2e^{-x}$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= -[(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_0^1 \\ &= -5e^{-1} + 2 \\ &= \frac{2e - 5}{e} \end{aligned}$$

c) A l'aide d'une intégration par parties

montrer que $\int_0^1 x^3 e^{-x} dx = \frac{6e-16}{e}$

Posons $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{-x} dx &= [-x^3 e^{-x}]_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + 3 \left(\frac{2e - 5}{e} \right) \\ &= -\frac{1}{e} + \frac{6e - 15}{e} \\ &= \frac{6e - 16}{e} \end{aligned}$$

3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = 0 \text{ et } x = 1$$

On a d'après la courbe (C) est en dessous de la droite (Ox) sur l'intervalle $[0, 1]$

Donc $\forall x \in [0, 1]: |f(x)| = -f(x)$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 -f(x) dx \times u.a \\ &= \int_0^1 -(2x^3 - 4x^2)e^{-x} dx \times u.a \\ &= 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx \times u.a \\ &= 4 \left(\frac{2e - 5}{e} \right) - 2 \left(\frac{6e - 16}{e} \right) cm^2 \\ &= \left(\frac{8e - 20 - 12e + 32}{e} \right) cm^2 \\ &= \left(\frac{12 - 4e}{e} \right) cm^2 \end{aligned}$$

Correction du problème (5 points) :**A) Soit une fonction h définie sur** **$]0; +\infty[$ par : $h(x) = 3(\ln x)^3 + \ln x - 4$** **1) Calculer h' sur $]0; +\infty[$ puis déduire que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$** **La fonction h est dérivable sur** **$]0; +\infty[$ comme somme des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$** **Rappel :**

$$(\ln(x))' = -\frac{1}{x}; (u^2)' = 2uu'$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 9(\ln x)'(\ln x)^2 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{9(\ln x)^2}{x} + \frac{1}{x} > 0 \end{aligned}$$

D'où la fonction h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ **2) Calculer $h(e)$ puis déduire que : $(\forall x \in]0; e]); h(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [e; +\infty[); h(x) \geq 0$** **On a $h(e) = 0$** **Soit : $x \in]0; e]$**

$$x \in]0; e] \Rightarrow x$$

 $\leq e$ et h est str croissante sur $]0; e]$

$$\Rightarrow h(x) \leq h(e)$$

$$\Rightarrow h(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [e; +\infty[$

$$x \in [e; +\infty[\Rightarrow e \leq x$$

et h est str croissante sur $[e; +\infty[$

$$\Rightarrow h(e) \leq h(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq h(x)$$

B) Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3(\ln x)^3 - \ln x + 2}{(\ln x)^2}$$

1) Vérifier que : $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (\ln x)^2 \neq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \neq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x > 0$$

Donc $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ **2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et interpréter le****résultat géométriquement**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\ln x)^3 - \ln x + 2}{(\ln x)^2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^2 = 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3(\ln x)^3 - \ln x + 2 = 2$$

Donc la droite d'équation $x = 1$, est une asymptote verticale à la courbe de f **b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(\ln x)^3 - \ln x + 2}{(\ln x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} = 0$$

Donc la droite d'équation $x = 0$, c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de f **c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ puis interpréter les résultats géométriquement**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{x} - \frac{1}{x \ln(x)} + \frac{2}{x (\ln x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (Ox) au voisinage de $+\infty$

5 a) Montrer que: $f'(x) = \frac{\ln(x)h(x)}{x(\ln x)^4}$

La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $]0; 1[$ car c'est une somme et quotient des fonctions dérivable sur $]1; +\infty[$ et $]0; 1[$

Rappel :

$$(\ln(x))' = -\frac{1}{x}; \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}; (u^2)' = 2uu'$$

Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2}\right)' \\ &= \frac{3}{x} + \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} - \frac{2((\ln x)^2)'}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} - \frac{2 \times \frac{2 \ln(x)}{x}}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{3}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{4 \ln(x)}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{3(\ln x)^4 + (\ln x)^2 - 4 \ln(x)}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{\ln(x) (3(\ln x)^3 + \ln x - 4)}{x(\ln x)^4} = \frac{\ln(x) h(x)}{x(\ln x)^4} \end{aligned}$$

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]1; e]$ et strictement croissante sur $]0; 1[$ et $[e; +\infty[$

Soit $x \in D_f$, on a $x(\ln x)^4 > 0$

x	0	1	e
	$+\infty$		
$\ln(x)$	-	0	+
$h(x)$	-	-	0
$f'(x)$	+	-	0

Donc f est strictement décroissante sur $]1; e]$ et str croissante sur $]0; 1[$ et $[e; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f

x	0	1	e
	$+\infty$		
$\ln(x)$	-	0	+
$g(x)$	-	-	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0

6a) Montrer que pour tous x dans D_f :

$$3(\ln x)^3 - \ln(x) + 2 = (\ln x + 1)[3(\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2]$$

$$\begin{aligned} A &= (\ln x + 1)[3(\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2] \\ &= 3(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 2 \ln(x) + 3(\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2 \\ &= 3(\ln x)^3 - \ln(x) + 2 \end{aligned}$$

b) Déduire les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec (O_x)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3(\ln x)^3 - \ln x + 2}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\ln x)^3 - \ln x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x + 1)[3(\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x + 1) = 0 \text{ ou } 3(\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x + 1) = 0 \text{ car } \Delta = 9 - 24 = -15 < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

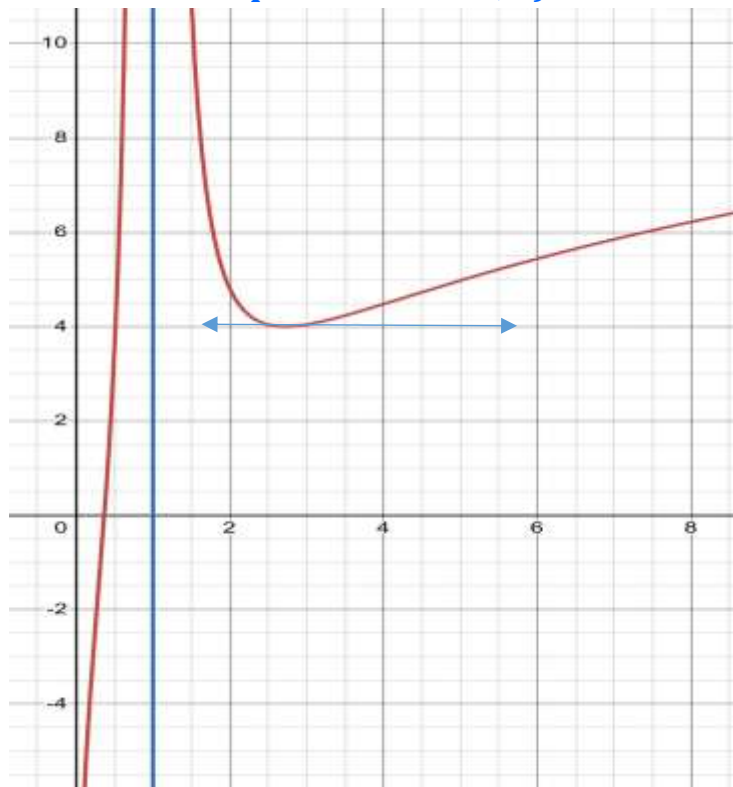
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Donc (C_f) coupe (O_x) en un seul point

$$A\left(\frac{1}{e}; 0\right)$$

7) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité : 1 cm)

(On admet que (C_f) admet une point d'inflexion unique d'abscisse 4,2)



1
12
25
Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 15



RRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 15

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 4	calcul de probabilités.	2,5 points
Exercice 5	Suite, calcul intégral	3,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	5,5 points

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

0,5

1) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

0,25

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$

0,5

c) Montrer que la suite est croissante et en déduire qu'elle est convergente

0,5

2) a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1} \right)$

0,5

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n-1}$, exprimer v_n en fonction de n

0,75

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$

0,75

Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3

2) On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$ et $C(2; 1; -1)$

0,5

a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

0,25

b) Montrer que $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5

c) Vérifier que $2x - 2y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

3) Soit la droite (D) passant par Ω est orthogonale au plan (ABC)

0,25

a) Montrer que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (D)

0,75

b) Montrer que (D) coupe la sphère (S) en deux points E et F dont on déterminera les coordonnées

Exercice 3 (3,5 points) :

- 0,75 **A)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
- B)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
- $$a = 4\sqrt{3} - 4i; \quad b = 4\sqrt{3} + 4i \quad \text{et} \quad c = -\sqrt{3} + i$$
- 1) a)** Ecrire b sous forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique de a
- 0,5 **b)** Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{b}{a}$, puis en déduire la nature du triangle OAB
- 0,75 **2)** Montrer que $d = 2i$ est l'affixe du point D l'image de C par la rotation R
- 0,5 d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre O
- 3)** Soit G le point d'affixe z_G tel que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$
- 0,25 **a)** Vérifier que $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$
- 0,5 **b)** Montrer que les points C ; D et G sont alignés
- 0,25 **c)** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 4\sqrt{3} - 6i| = 3$

Exercice 4 (2,5 points) :

Une urne contenant huit boules : quatre rouges portant les nombres 0 ; 1 ; -1 et 1, trois noirs portant les nombres 0 ; 0 et -1 et une boule verte 0

On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne »

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir exactement deux boules rouges »

B : « Obtenir trois boules dont la somme des nombres qui portent par les boules est nulle »

- 0,5 **1)** Calculer $p(A)$ et montrer que $p(B) = \frac{5}{16}$
- 0,75 **2)** Montrer que $p(A \cap B) = \frac{57}{512}$ puis en déduire $p(A \cup B)$
- 0,75 **3)** Sachant qu'on a obtenu trois boules dont la somme des nombres qui portent par les boules est nulle, calculer la probabilité pour obtenir exactement deux boules rouges
- 0,5 **4)** En déduire que les événement A et B ne sont pas indépendants

Exercice 5 (2,5 points) :

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 (1 - \ln x)$, (C_g) la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 1cm)

1) A partir de (C_g)

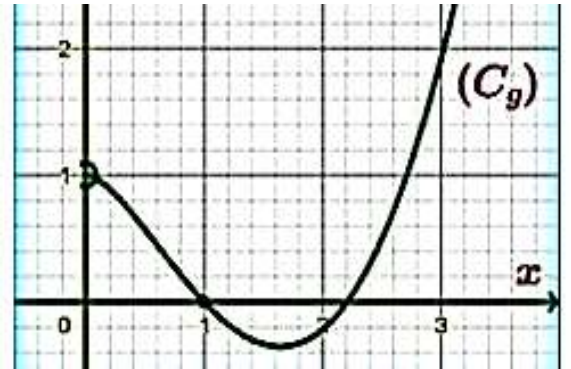
a) Justifier que l'équation $(E) : g(x) = 0$

admet une solution α tel que $2,2 < \alpha < 2,3$

(On donne $g(2,2) \approx -0,2$; $g(2,3) \approx 0,1$)

b) Résoudre graphiquement l'équation (E)

c) Déterminer le signe de g sur $]0 ; +\infty[$



2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^{\alpha} x^2 \ln(x) dx = \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) + \alpha^3 - 1}{9}$$

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

Problème (5,5 points) :

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + \ln(|e^x - 1|)$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 2cm)

1) Vérifier que $D_f = \mathbb{R}^*$ où est l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty ; 0[$

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(D) : y = 2x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (D) sur $]0 ; +\infty[$

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$,

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f en justifiant votre réponse

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0 ; \ln(2)[$

7) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Correction de l'exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1)a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

➤ Pour $n=0$ on a $1 < u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{3}$ qui est vrai

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 < u_n \leq \sqrt{3}$ et montrons que $1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

$$1 < u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) < \frac{1}{u_n} \leq -1 + (1 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) :$

$$u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$$

$$A = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$$

$$= u_n^2 - \sqrt{3}u_n - u_n + \sqrt{3}$$

$$= u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}$$

c) Montrer que la suite est croissante et en déduire qu'elle est convergente

Soit n un entier naturel

$$u_{n+1} - u_n = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})u_n - \sqrt{3} - u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}}{u_n}$$

$$= \frac{-[u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}]}{u_n}$$

$$= \frac{(1 - u_n)(u_n - \sqrt{3})}{u_n}$$

$$1 < u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow (1 - u_n) < 0 \text{ et } (u_n - \sqrt{3}) \leq 0 \text{ et } u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc elle est convergente

2) a) Vérifier que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1} \right)$$

Soit n un entier naturel

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} - 1} = \frac{(1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n} - 1}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{u_n}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{u_n}} = \frac{\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n}}{\frac{\sqrt{3}u_n - \sqrt{3}}{u_n}}$$

$$= \frac{u_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}u_n - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1} \right)$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1}$,

exprimer v_n en fonction de n

Soit n un entier naturel

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1} \right)$$

$$\text{Donc : } v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_n$$

Donc la suite est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = -1$$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$ et

calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n - 1} \Rightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow v_n u_n - v_n = u_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - \sqrt{3}}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3} - v_n}{1 - v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 0}{1 + 0}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\text{car : } -1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$$

Correction de l'exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère

orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$

tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$

Montrer que (S) est une sphère de centre

$\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3

1ère méthode :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 4z) = -5$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 1 + 9 + 4 - 5$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

L'ensemble (S) est la sphère de centre le point $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3.

2ème méthode :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$$

On pose $a = -2$; $b = 6$; $c = -4$ et $d = 5$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = (-2)^2 + 6^2 + (-4)^2 - 20 = 36 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre

$$\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$$

Donc $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2) On considère les points $A(1; 1; 1)$,

$B(1; 2; 3)$ et $C(2; 1; -1)$

a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Donc } \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc A et B et C ne sont pas alignés

D'où les points A et B et C forment un plan

b) Montrer que $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) donc il suffit de montrer que :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

c) Vérifier que $2x - 2y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale à (ABC)

Donc (ABC): $2 \times x - 2 \times y + 1 \times z + d = 0$

Donc (ABC): $2x - 2y + z + d = 0$

Et on a $A(1; 1; 1) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A dans $2 - 2 + 1 + d = 0$ donc $1 + d = 0$ donc $d = -1$

D'où (ABC): $2x - 2y + z - 1 = 0$

3) Soit la droite (D) passant par $D(0; -5; 0)$ est de vecteur directeur $\vec{u}(1; -4; -1)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite

On a la droite (D) passant par $\Omega(1; -3; 2)$

est orthogonale au plan (ABC)

Donc la droite (D) est dirigée par le vecteur

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc une représentation

paramétrique de (D) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Montrer que (D) coupe la sphère (S) en deux points E et F dont on déterminera les coordonnées

Résoudrons le système suivant :

$$\begin{cases} (D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$(1 + 2t)^2 + (-3 - 2t)^2 + (2 + t)^2 - 2(1 + 2t) + 6(-3 - 2t) - 4(2 + t) + 5 = 0$$

Donc :

$$1 + 4t + 4t^2 + 9 + 12t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2 - 2 - 4t - 18 - 12t - 8 - 4t + 5 = 0$$

$$\text{Donc } 9t^2 - 9 = 0$$

$$\text{Donc } t^2 = 1$$

$$\text{Donc } (t - 1)(t + 1) = 0$$

$$\text{Donc } t = 1 \text{ ou } t = -1$$

Donc la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points E et F

$$\text{Donc pour } t = 1 \text{ on a } \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = -3 - 2 = -5 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E(3; -5; 3)$$

$$\text{Pour } t = -1 \text{ on a } \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -3 + 2 = -1 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } F(-1; -1; 1)$$

Correction de l'exercice 2 (3 points) :**A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation**

$$(E): z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 64 = -64 < 0$$

Alors l'équation (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées

z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$\text{et } z_2 = \bar{z}_1 = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$S = \{4\sqrt{3} + 4i ; 4\sqrt{3} - 4i\}$$

B) On considère les points A, B et C d'affixes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i ; b = 4\sqrt{3} + 4i \text{ et } c = -\sqrt{3} + i$$

1) a) Ecrire b sous forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique de a

$$|b| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$b = 4\sqrt{3} + 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$a = \bar{b} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

b) Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{b}{a}$ puis en déduire la nature du triangle OAB

$$\frac{b}{a} = \frac{8e^{i\frac{\pi}{6}}}{8e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \Rightarrow \frac{|b - 0|}{|a - 0|} = 1 \Rightarrow \frac{OB}{OA} = 1 \Rightarrow OB = OA$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{b - 0}{a - 0}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Donc le triangle OAB est équilatéral

2) Montrer que $d = 2i$ est l'affixe du point D l'image de C par la rotation R d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre O

$$R(C) = D \Leftrightarrow d - z_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(c - z_0)$$

$$\Leftrightarrow d = e^{-i\frac{\pi}{3}} c$$

$$\Leftrightarrow d = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) c$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{1}{2}i(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{1}{2}i((\sqrt{3})^2 + (1)^2)$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{4}{2}i = 2i$$

3) Soit G un point d'affixe z_G tel que

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

a) Vérifier que $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow z_G - b + z_G - d - z_G = 0$$

$$\Leftrightarrow z_G = b + d$$

$$\Leftrightarrow z_G = 4\sqrt{3} + 4i + 2i$$

$$\Leftrightarrow z_G = 4\sqrt{3} + 6i$$

b) Montrer que les points C ; D et G sont alignés

$$\begin{aligned} \frac{z_G - d}{c - d} &= \frac{4\sqrt{3} + 6i - 2i}{-\sqrt{3} + i - 2i} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + 4i}{-\sqrt{3} - i} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{-(\sqrt{3} + i)} = -4 \end{aligned}$$

D'où les points C ; D et G sont alignés

Soit A le point d'affixe $2i$

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 4\sqrt{3} - 6i| = 3$

$$|z - 4\sqrt{3} - 6i| = 3 \Leftrightarrow |z - z_G|$$

$$\Leftrightarrow GM = 3.$$

D'où l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 3.

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

Une urne contenant huit boules : quatre rouges portant les nombres 0 ; 1 ; -1 et 1 , trois noirs portant les nombres 0 ; 0 et -1 et une boule verte 0

On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne »

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir exactement deux boules rouges »

B : « Obtenir trois boules dont la somme des nombres qui portent par les boules est nulle »

1) Calculer $p(A)$ et montrer que $p(B) = \frac{5}{16}$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des arrangements avec répétition de trois boules parmi huit boules

Donc le nombre des possibilités est :

$$\text{Card}(\Omega) = 8^3 = 512$$

A : « Obtenir exactement deux boules rouges

(R ; R ; $\bar{R}$)

$$\text{Donc Card}(A) = 3(4^2 \times 4^1) = 192$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{192}{512} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

B : « Obtenir trois boules dont la somme des nombres qui portent par les boules est nulle

(0 ; 0 ; 0) ou (0 ; 1 ; -1)

$$\begin{aligned} \text{Card}(B) &= 4^3 + 3! \times (4^1 \times 2^1 \times 2^1) \\ &= 64 + 96 = 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{160}{512} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

2) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{57}{512}$ puis en déduire $p(A \cup B)$

(A $\cap$ B) " Obtenir exactement deux boules rouges et la somme des nombres qui portent par les trois boules est nulle

((0 ; 0 ; $\bar{0}$) ou (1 ; -1 ; $\bar{0}$) ou (1 : 0 ; $\bar{-1}$)

Card (A $\cap$ B)

$$\begin{aligned} &= 3(1^2 \times 3^1) + 6(2^1 \times 1^1 \times 3^1) \\ &\quad + 6(2^1 \times 1^1 \times 1^1) \\ &= 9 + 36 + 12 = 57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{57}{512} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= \frac{192}{512} + \frac{160}{512} - \frac{57}{512} \\ &= \frac{295}{512} \end{aligned}$$

3) Sachant qu'on a obtenu trois boules dont la somme des nombres qui portent par les boules est nulle, calculer la probabilité pour obtenir exactement deux boules rouges

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{57}{512}}{\frac{160}{512}} \\ &= \frac{57}{160} \end{aligned}$$

4) En déduire que les événement A et B ne sont pas indépendants

$$\text{On a : } P_B(A) \neq P(A)$$

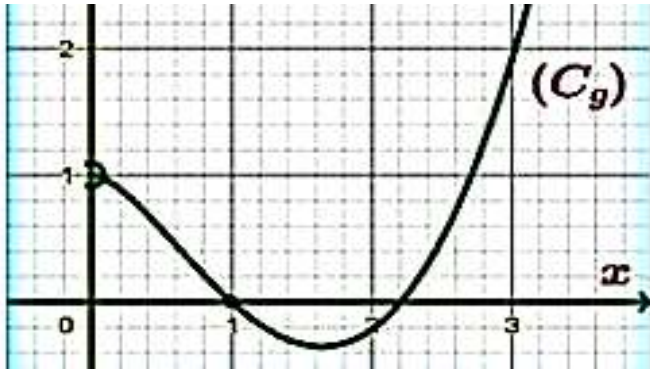
Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

Correction de l'exercice 5 (3 points) :

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^2 (1 - \ln x), (C_g) \text{ la courbe de}$$

la fonction g dans un repère orthonormé



$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 1cm)

1) A partir de (C_g)

a) Justifier que l'équation (E) : $g(x) = 0$ admet une solution α tel que $2, 2 < \alpha < 2, 3$ (On donne $g(2, 2) \approx -0, 2$; $g(2, 3) \approx 0, 1$)

On a la fonction g est continue sur l'intervalle $[2, 2; 2, 3]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[2, 2; 2, 3]$

$$\text{De plus } g(2, 2) \times g(2, 3) < 0$$

D'où l'équation (E) : $g(x) = 0$

admet une solution α tel que $2, 2 < \alpha < 2, 3$

b) Résoudre graphiquement l'équation (E)

On a (Ox) coupe (C_g) en deux points d'abscisses 1 et α donc :

$$S = \{1; \alpha\}$$

c) Déterminer le signe de g sur $]0 ; +\infty[$

x	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−	0 +

2) A l'aide d'une intégration par parties

$$\text{montrer que : } \int_1^\alpha x^2 \ln(x) dx = \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) + \alpha^3 - 1}{9}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned} \int_1^\alpha x^2 \ln(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^\alpha + \frac{1}{3} \int_1^\alpha x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^\alpha + \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^\alpha \\ &= \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) + \frac{\alpha^3}{9} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) + \alpha^3 - 1}{9} \end{aligned}$$

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

On a d'après la courbe (C) est en dessous de la droite (Ox) sur l'intervalle $[1, \alpha]$

$$\text{Donc } \forall x \in [1; \alpha]: |f(x)| = -f(x)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^\alpha -f(x) dx \times u. a \\ &= \int_1^\alpha -1 + x^2 (1 - \ln x) dx \times u. a \\ &= \int_1^\alpha x^2 - 1 dx - \int_1^\alpha x^2 \ln(x) dx \times u. a \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^\alpha - \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) + \alpha^3 - 1}{9} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{\alpha^3}{3} - \alpha - \frac{1}{3} + 1 - \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) + \alpha^3 - 1}{9} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3\alpha^3 - 9\alpha + 6 - 3\alpha^3 \ln(\alpha) - \alpha^3 + 1}{9} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{\alpha^3(2 - 3\ln(\alpha)) - 9\alpha + 7}{9} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Correction du problème (5 points) :

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + \ln(|e^x - 1|)$

1) Vérifier que $D_f = \mathbb{R}^*$

$$x \in D_f \Leftrightarrow |e^x - 1| > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |e^x - 1| = 1$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(|e^x - 1|) = -\infty$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|e^x - 1|) \\ &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc la droite $(\Delta') : y = x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty; 0[$

b) Soit $x \in]-\infty; 0[$

$$\text{Donc } |e^x - 1| = 1 - e^x$$

$$f(x) - x = \ln(|e^x - 1|) = \ln(1 - e^x)$$

$$\text{On a : } e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - e^x) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x < 0$$

Donc (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur $]-\infty; 0[$

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(D) : y = 2x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^x - 1| = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(|e^x - 1|) = +\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|e^x - 1|) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|\right) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|e^x|) + \ln\left(\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|\right) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln\left(\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|\right) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|\right) = \ln(1) = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Donc la droite $(\Delta) : y = 2x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C_f) et (D) sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) - 2x = \ln\left(\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|\right)$$

$$\frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^x} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{e^x}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2x < 0$$

Donc (C_f) est en dessous de la droite (Δ)

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln(|e^x - 1|) = -\infty$$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; donc la droite

d'équation $x = 0$, c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de f

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$]-\infty; 0[$ car c'est une composée et somme des fonctions dérivable sur $]-\infty; 0[$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f en justifiant votre réponse

Le tableau de variation de f

- $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow x = -\ln(2)$
- $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$ $+\infty$	$-\ln 2$	0	
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$e^x - 1$	$+$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-2\ln 2$	$-\infty$	$-\infty$

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= -\ln 2 + \ln(|e^{-\ln 2} - 1|) \\ &= -\ln 2 + \ln\left(|e^{\ln \frac{1}{2}} - 1|\right) \\ &= -\ln 2 + \ln\left(\left|\frac{1}{2} - 1\right|\right) \\ &= -\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -2\ln 2 \end{aligned}$$

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; \ln(2)[$

* f est dérivable sur $]0; \ln(2)[$ donc elle est continue sur $]0; \ln(2)[$

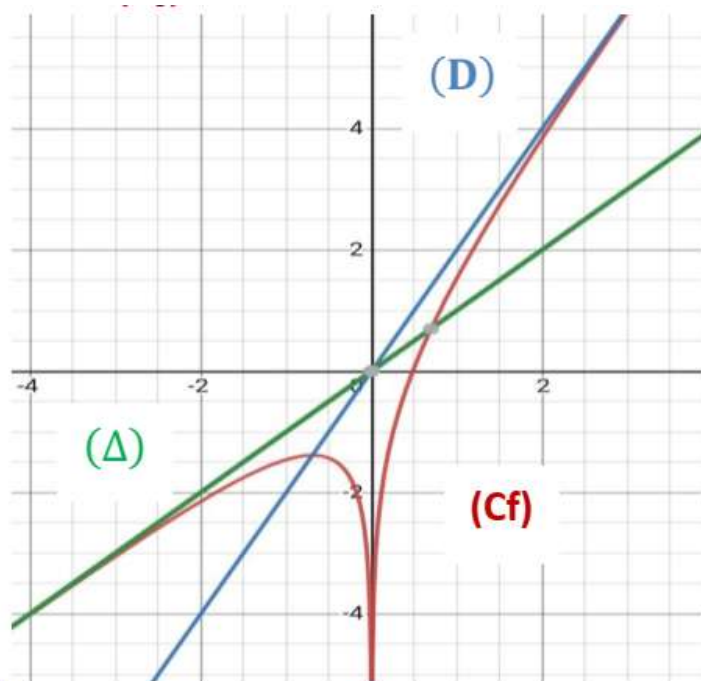
* f est strictement croissante sur $]0; \ln(2)[$

$$f(]0; \ln(2)[) =]-\infty; \ln(2)[$$

*Donc $0 \in f(]0; \ln(2)[)$

D'où $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in]0; \ln(2)[$

7) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



1

11

26

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 16



RRRRRRRRRRRRRRRR

M2-26

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 26

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Calcul de probabilités.	2,5 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Suites	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

Exercice 1 (2,5 points) :

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 , ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

B : « La somme de deux numéros portant les deux boules est égale à 4 »

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$, puis calculer $P(B)$

2) Calculer $P_A(B)$ et déduire que les événements A et B ne sont pas indépendantes

3) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé deux fois exactement ?

Exercice 2 (3,5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A ; B et C d'affixes respectifs

$a = \sqrt{3} + i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -2i$

1) a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique

b) En déduire que les points A ; B et C appartiennent au même cercle et déterminer son centre et son rayon

2) a) Montrer que $\frac{b-c}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis en déduire la nature du triangle ABC

b) Vérifier que le point O est le centre de gravité du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Montrer que A est l'image du point C par la rotation R

b) Déterminer l'image de A par la rotation R

4) a) Déterminer (D) l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

b) Montrer que l'image de (D) par la rotation R est la médiatrice du segment $[OB]$

Exercice 3 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; -3)$, $B(1; 2; -7)$ et $C(0; -5; 0)$

1) a) Montrer que les points O ; A et B ne sont pas alignés

b) Vérifier que $\vec{n}(1; -4; -1)$ est un vecteur normal au plan (OAB)

c) Vérifier que $x - 4y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3

b) Vérifier que le point C appartient à la sphère (S)

3) Soit la droite (Δ) passant par le point C est orthogonale au plan (OAB)

a) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ)

b) Montrer que (Δ) coupe (S) en deux points à déterminer leurs coordonnées

c) Soit H la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ)

Calculer la distance ΩH

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} = (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})$

c) Montrer que (u_n) est croissante et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3} - u_n)$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(\sqrt{3} - u_n)$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n \leq n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

b) De 3)a), en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Problème (8 points) :

A) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = xe^{-x} - 1$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) Montrer que $g'(x) = (1 - x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

4) En déduire que $g(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

B) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^{-x} - 1)^2$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement les résultats

3)a) Vérifier que $f'(x) = 2g'(x)g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

d) Déterminer une équation de la tangente (T) de la courbe (C) au point $A(0; 1)$

4) a) Construire (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation : $(E) : f(x) = m$

5)a) Montrer que la fonction $x \rightarrow -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + 2e^{-x}(x + 1) + x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et les droites d'équations $y = 1; x = 0$ et $x = 2$

Correction de l'exercice 1 (2,5 points) :

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4.

Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$ et calculer $P(B)$

L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des arrangements sans répétitions de deux boules parmi dix boules contenues dans le sac

Donc le nombre des possibilités est

$$\text{Card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$$

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

$$\text{Donc Card}(A) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{30}{90} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

B : « la somme de deux numéros égale à 4 »
donc (2 ; 2) ou (1 ; 3)

$$\begin{aligned} \text{Donc Card}(B) &= A_2^2 + 2 \times (A_1^1 \times A_3^1) \\ &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } p(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{8}{90} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

2) Calculer $P_A(B)$ et déduire que les événements A et B ne sont pas indépendantes

$A \cap B$ « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs dont la somme est égale à 4 »
donc (2 ; 2)

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{A_2^2}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{45} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

On a : $P_A(B) \neq P(B)$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendantes

3) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé deux fois exactement ?

Rappel : Epreuves répétées.

Soit A un événement associé à une expérience de probabilité p. On répète l'expérience n fois dans les mêmes conditions. Alors la probabilité de réaliser exactement k fois l'événement A est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P(C) &= C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-2} \\ &= C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= \frac{6}{27} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 (3,5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A ; B et C d'affixes respectifs

$$a = \sqrt{3} + i ; b = -\sqrt{3} + i \text{ et } c = -2i$$

1)a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique

$$|a| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$a = \sqrt{3} + i$$

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|b| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$b = -\sqrt{3} + i$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

On a $|a| = |b|$ donc $OA = OB$

b) Montrer que les points A ; B et C appartiennent au même cercle et déterminer son centre et son rayon

$$\text{On a } |a| = |b| = |c| = 2$$

$$\text{Donc } OA = OB = OC = 2$$

Donc les points A ; B et C appartiennent au même cercle de centre O et de rayon 2

2)a) Montrer que $\frac{b-c}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis en déduire la nature du triangle ABC

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{b-a} &= \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i} \\ &= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

La nature du triangle ABC

$$\text{On a } \frac{b-c}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left|\frac{b-c}{b-a}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| \text{ et } \arg\left(\frac{b-c}{b-a}\right) \equiv \arg(e^{-i\frac{\pi}{3}}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|b-c|}{|b-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{b-c}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow AC = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est équilatéral

b) Vérifier que le point O est le centre de gravité du triangle ABC

$$\text{Montrons que } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\text{On a } a + b + c = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i - 2i = 0$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Donc le point O est le centre de gravité du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Montrer que A est l'image du point C par la rotation R

Rappel :

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$ce^{i\frac{2\pi}{3}} = (-2i) \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2})}$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = a$$

$$\text{Donc } R(C) = A$$

b) Déterminer l'image de A par la rotation R

$$R(A) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}a$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z' = 2e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})}$$

$$\Leftrightarrow z' = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z' = b$$

$$\text{Donc } R(A) = B$$

4)a) Déterminer (D) l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

Rappel : Ensemble des points M(z)

- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = r$ est un cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r ; $r > 0$
- l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la droite (D) le médiatrice du segment [AB]

$$|z| = |z - \sqrt{3} - i| \Leftrightarrow |z - 0| = |z - (\sqrt{3} + i)|$$

$$\Leftrightarrow |z - o| = |z - a|$$

$$\Leftrightarrow OM = AM$$

Donc l'ensemble (D) est la médiatrice du segment [OA]

b) Montrer que l'image de (D) par la rotation R est la médiatrice du segment [OB]

On a $R(O)=O$ car O est le centre de R

Et on a $R(A)=B$

Donc l'image de la médiatrice du segment [OA] est la médiatrice du segment [OB]

Correction de l'exercice 2 (3 points) :

On considère les points $A(1; 1; -3)$, $B(1; 2; -7)$ et $C(0; -5; 0)$

1) a) Montrer que les points O ; A et B ne sont pas alignés

On a $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$,

Donc $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ ne sont pas colinéaires

Donc O et A et B ne sont pas alignés

b) Vérifier que $\vec{n} (1; -4; -1)$ est un vecteur normal au plan (OAB)

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires donc sont des vecteurs directeurs du plan (OAB) donc il suffit de montrer que : $\vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{OB}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 - 4 + 3 = 0$$

Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = 1 - 8 + 7 = 0$$

Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{OB}$

D'où $\vec{n} (1; -4; -1)$ est un vecteur normal au plan (OAB)

c) Vérifier que $x - 4y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

Soit $M(x; y; z) \in (OAB)$

On a le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normale à (OAB)

Donc (OAB): $1 \times x - 4 \times y - 1 \times z + d = 0$

Donc (OAB) : $x - 4y - z + d = 0$

Et on a $O(0; 0; 0) \in (OAB)$ donc on remplace les coordonnées de O dans $x - 4y - z + d = 0$ donc $0 + d = 0$ donc $d = 0$

D'où (OAB): $x - 4y - z = 0$

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3

1ère méthode :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 4z) = -5$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 1 + 9 + 4 - 5$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$$

L'ensemble (S) est la sphère de centre le point $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon 3.

2ère méthode :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$$

On pose $a = -2$; $b = 6$; $c = -4$ et $d = 5$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = (-2)^2 + 6^2 + (-4)^2 - 20 = 36 > 0$$

Donc l'ensemble (S) est une sphère de centre $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2})$. Donc $\Omega(1; -3; 2)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Vérifier que le point $C(0; -5; 0)$ appartient à la sphère (S)

$$0^2 + (-5)^2 + 0^2 - 0 - 30 - 0 + 5 = 30 - 30 = 0$$

Donc le point $C(0; -5; 0)$ appartient à la sphère (S)

3) Soit la droite (Δ) passant par le point C est orthogonale au plan (OAB)

a) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ)

On a la droite (Δ) passant par $C(0; -5; 0)$ est orthogonale au plan (OAB)

Donc la droite (Δ) est dirigée par le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc une représentation}$$

paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -5 - 4t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

b) Montrer que (Δ) coupe la sphère (S) en deux points E $(0; -5; 0)$ et F $(-1; -1; 1)$

Résoudrons le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = -5 - 4t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases} \\ (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$t^2 + (-5 - 4t)^2 + (-t)^2 - 2t + 6(-5 - 4t) + 4t + 5 = 0$$

Donc :

$$t^2 + 25 + 40t + 16t^2 + t^2 - 2t - 30 - 24t + 4t + 5 = 0$$

Donc $18t^2 + 18t = 0$ donc $18t(t + 1) = 0$

Donc $t(t + 1) = 0$ donc $t = 0$ ou $t = -1$

Donc la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux point

$$\text{Donc pour } t = 0 \text{ on a } \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc C $(0; -5; 0)$

$$\text{Pour } t = -1 \text{ on a } \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 + 4 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc D $(-1; -1; 1)$

c) Soit H la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ)

Calculer la distance ΩH

1ère méthode :

On a (Δ) coupe la sphère (S) en deux points

C $(0; -5; 0)$ et D $(-1; -1; 1)$

Donc le triangle ΩCD est isocèle en Ω

Donc la projection orthogonale de Ω sur la droite (Δ) est H le milieu du segment $[CD]$

Donc H $(-\frac{1}{2}; -\frac{6}{2}; \frac{1}{2})$ donc H $(-\frac{1}{2}; -3; \frac{1}{2})$

Et on a $\Omega(1; -3; 2)$, donc

$$\begin{aligned} \Omega H &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (-3 + 3)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + 0 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

2ème méthode :

$$\Omega H = d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega C} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$

Correction de l'exercice 4 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n},$$

1)a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$

Pour $n=0$ on a $1 < u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{3}$ qui est vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 < u_n \leq \sqrt{3}$ et montrons que $1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

$$1 < u_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < \frac{1}{u_n} \leq -1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) < \frac{1}{u_n} \leq -1 + (1 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

➤ D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leq \sqrt{3}$$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned}
 u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3} &= (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3}) \\
 A &= (u_n - 1)(u_n - \sqrt{3}) \\
 &= u_n^2 - \sqrt{3}u_n - u_n + \sqrt{3} \\
 &= u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

c) Montrer que la suite est croissante

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= (1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{u_n} - u_n \\
 &= \frac{(1 + \sqrt{3})u_n - \sqrt{3} - u_n^2}{u_n} \\
 &= \frac{u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}}{u_n} \\
 &= \frac{-[u_n^2 - (1 + \sqrt{3})u_n + \sqrt{3}]}{u_n} \\
 &= \frac{(1 - u_n)(u_n - \sqrt{3})}{u_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 < u_n \leq \sqrt{3} &\Rightarrow (1 - u_n) < 0 \text{ et } (u_n - \sqrt{3}) \\
 &\leq 0 \text{ et } u_n > 0 \\
 &\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \\
 &\Rightarrow (u_n) \text{ est croissante}
 \end{aligned}$$

En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ On a la suite (u_n) est croissanteDonc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \geq u_0$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2)a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} - u_{n+1} &= \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{u_n} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{u_n} - 1 = \frac{\sqrt{3} - u_n}{u_n} \\
 &= \frac{1}{u_n}(\sqrt{3} - u_n)
 \end{aligned}$$

$$\text{En a } u_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ c-à-dire } \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$\text{Et en a } \sqrt{3} - u_n \geq 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{u_n}(\sqrt{3} - u_n) \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3} - u_n)$$

$$\text{Donc } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3} - u_n)$$

b) En déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

➤ Pour $n=0$ on a :

$$\sqrt{3} - u_0 = \sqrt{3} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{Et } \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{Donc } \sqrt{3} - u_0 \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$ ➤ Soit n un entier naturel,

$$\text{Supposons que } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Et montrons que } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

$$\text{On a } \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3} - u_n) \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Et on a d'après la question précédente

$$\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}}(\sqrt{3} - u_n), \text{ donc}$$

$$\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3} - u_n) \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$\text{Donc: } \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

D'après le principe de récurrence, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{3} - u_n \geq 0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq \sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Et on a : $-1 < \frac{2}{1+\sqrt{3}} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3} - u_n = 0$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(\sqrt{3} - u_n)$

a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}): v_n \leq n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $\sqrt{3} - u_n \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Donc $\ln(\sqrt{3} - u_n) \leq \ln\left(\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ car la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$

Donc $\ln(\sqrt{3} - u_n) \leq \ln\left(\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^n\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Donc $v_n \leq n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

b) De 3)a), en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Rappel : Limite d'une suite et l'ordre

$$\begin{cases} v_n < w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

On a $v_n \leq n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Et on a $0 < \frac{2}{1+\sqrt{3}} < 1$

Donc $\ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) < 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Solution de problème (9 Points)

A) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x} - 1$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - 1$$

$$= -1$$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} - 1 = -\infty$$

Car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

2) Montrer que $g'(x) = (1-x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (xe^{-x} - 1)' \\ &= 1 \times e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

3) Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (1-x)e^{-x}$$

On a $e^{-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(1-x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$ 0 $-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e} - 1 \searrow$	-1

4) En déduire que $g(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $\frac{1}{e} - 1$ est une valeur maximale de g sur

$\mathbb{R}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \frac{1}{e} - 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) < 0$ car $\frac{1}{e} - 1 < 0$

B) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^{-x} - 1)^2$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter

géométriquement le résultat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - 1)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x))^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement les résultats

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{-x} - 1)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x))^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(xe^{-x} - 1)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(e^{-x})^2 - 2xe^{-x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x})^2 - 2e^{-x} + \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(e^x)^2} - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(e^x)^2} = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{e^x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc (C_f) admet branche parabolique de direction (O_y) Au voisinage de $+\infty$

3)a) Vérifier que $f'(x) = 2g'(x)g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((xe^{-x} - 1)^2)' \\ &= ((g(x))^2)' \\ &= 2g'(x)g(x) \end{aligned}$$

b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2g'(x)g(x)$$

D'après la partie A) on a

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-		-
$f'(x)$	-	0	+

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	1

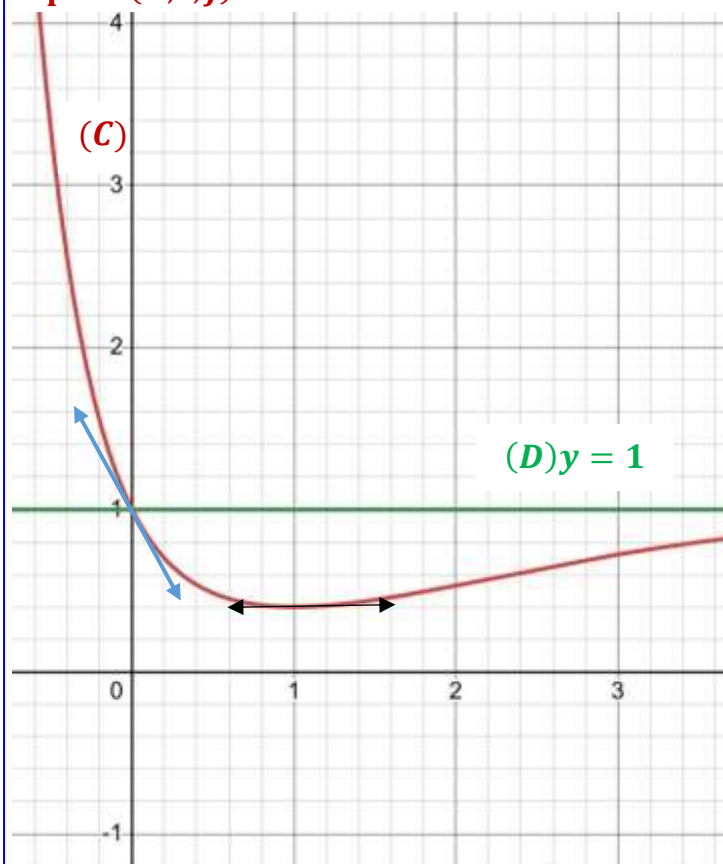
d) Déterminer une équation de la tangente (T) de la courbe (C) au point $A(0; 1)$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

On a $f'(0) = 2g(0)g'(0) = -2$ et $f(0) = 1$

Donc $(T): y = -2x + 1$

4) a) Construire (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation : (E): $f(x) = m$

Si $m < f(1)$ alors l'équation (E) n'admet pas des solutions

Si $m = f(1)$ ou $m \geq 1$, alors l'équation (E) admet une seule solution

Si $f(1) < m < 1$, alors l'équation (E) admet deux solutions

5) a) Montrer que la fonction H

$$x \rightarrow -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + 2e^{-x}(x + 1) + x$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme et produits des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{4}e^{-2x}(4x + 2) \\ &\quad - 2e^{-x}(x + 1) + 2e^{-x} + 1 \\ &= x^2(e^{-x})^2 + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \\ &\quad - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2e^{-x} + 1 \\ &= x^2(e^{-x})^2 - 2xe^{-x} + 1 \\ &= (xe^{-x} - 1)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et les droites d'équations $y = 1$; $x = 0$ et $x = 2$

La courbe (C) est en dessous de la droite d'équation $y = 1$ dans l'intervalle $[0; 2]$

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 2]: |f(x) - 1| = 1 - f(x)$$

$$\text{On a u. a} = 1\text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - y| dx \times \text{u. a} \\ &= \int_0^2 1 - f(x) dx \cdot \text{cm}^2 \end{aligned}$$

On a

$$x \rightarrow -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + 2e^{-x}(x + 1) + x$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

$$\text{Donc } x \rightarrow \frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) - 2e^{-x}(x + 1)$$

est une primitive de la fonction $1 - f(x)$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) - 2e^{-x}(x + 1) \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{13}{4}e^{-4} - 6e^{-2} - \frac{1}{4} + 2 \right) \text{cm}^2 \\ &= \left(\frac{13}{4}e^{-4} - 6e^{-2} + \frac{7}{4} \right) \text{cm}^2 \end{aligned}$$

14	1
1	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 17



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M1-25

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 17

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques+ Probabilités	6 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Prof Fayssal: 0681399067

Site: <https://elboutkhili.jimdofree.com/>

Exercice 1 (6 points) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$u_2 = \frac{8}{25} \text{ et } u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{4}, \text{ pour tout } n \geq 2$$

Partie I :

0,5

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \geq 2): u_n \leq \frac{5}{13}$

0,75

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ puis en déduire quelle est convergente

3) Soit (v_n) la suite définie par: $v_n = u_n - \frac{5}{13}$, pour tout $n \geq 2$

0,75

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et de raison $\frac{7}{20}$ puis calculer v_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$

0,5

b) En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$, puis calculer la limite de (u_n)

4) Pour tout $\forall n \geq 2$ on pose : $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$

0,5

Calculer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 2}$

Partie II: Un professeur de mathématiques propose à ses élèves de choisir entre deux types d'activités hebdomadaires : Atelier de résolution de problèmes et Jeux mathématiques

Chaque semaine, un élève doit choisir l'une des deux activités.

- La première semaine, 20% des élèves ont choisi l'atelier de résolution de problèmes, tandis que les autres ont choisi les jeux mathématiques.

Évolution des choix d'une semaine à l'autre :

- 25% des élèves ayant participé aux jeux mathématiques passent à l'atelier de résolution de problèmes la semaine suivante.
- 40% des élèves ayant participé à l'atelier de résolution de problèmes passent aux jeux mathématiques la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves entre ces deux activités au fil des semaines. Chaque semaine, un élève est choisi au hasard et interrogé sur son choix.

On considère les événements suivants :

A_n : l'événement « l'élève interrogé a choisi l'atelier de résolution de problèmes la n -ième semaine ».

p_n : la probabilité de cet événement.

0,75

1)a) Montrer que $p_2 = p(A_2) = \frac{8}{25}$ (Tu peux utiliser un arbre de probabilité)

0,75

b) Calculer $p_{A_2}(A_1)$. Est-ce que les événements A_1 et A_2 sont indépendantes ?

0,75

2)a) Montrer que : $p_{n+1} = \frac{7}{20}p_n + \frac{1}{4}$, pour tout $n \geq 2$

0,75

b) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 2}$ puis interpréter ce résultat.

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 2, 1)$, $B(0, -2, 4)$ et $C(2, 0, -4)$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{OA}$ et en déduire une équation cartésienne du plan (OBC) .

b) On note (P) le plan (OBC) .

Montrer que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O .

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$$

a) Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

b) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O de rayon $\sqrt{2}$.

3) a) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

b) En déduire que la droite (BC) est tangente à la sphère (S) .

4) On considère le point $H(1, -1, 0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et la sphère (S) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à (S) en H .

Exercice 3 (3 points) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A; B; C$ et D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{2}, z_B = 1 + i, z_C = 1 - i \text{ et } z_D = 2 + \sqrt{2}$$

1) a) Montrer que : $z_B - z_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_C - z_A)$

b) Écrire $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sous forme trigonométrique.

c) Montrer que: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et déterminer la nature du triangle ABC

d) Déterminer l'image de C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2) a) Montrer que $ACDB$ est un losange.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(1 + \sqrt{2} + i) [2\pi]$

c) En déduire que : $\arg(1 + \sqrt{2} + i) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

d) Montrer que $(1 + \sqrt{2} + i)^{2024}$ est un nombre réel

Problème (8 points) :**Partie I:**

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + x - 2x \ln(x)$.
Le tableau ci-dessous est le tableau de variation de g' la dérivée de g .

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	-		+
$g'(x)$			

- 1) Déterminer le signe de g' sur $]0; +\infty[$
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.
c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x) - (\ln(x))^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2 cm.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = 0$
- c) Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D): $y = x$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique I d'abscise 1
d) Ecrire l'équation de la tangente à (C_f) au point I .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 6; 0, 7]$.
- 5) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C_f) ; l'axe des abscisses les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.
a) Montrer que la fonction $x \rightarrow x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ puis calculer $\int_{\alpha}^1 \ln(x) dx$
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_{\alpha}^1 (\ln(x))^2 dx = \alpha(\ln(\alpha))^2 - 2 \int_{\alpha}^1 \ln(x) dx$$

c) Montrer que : $(\ln(\alpha))^2 = \alpha + \ln(\alpha)$.
d) En déduire que $\mathcal{A} = -8\alpha \ln(\alpha) + 2\alpha^2 + 12\alpha - 10 \text{ cm}^2$.

Solution de l'exercice 01 (6 Points)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite numérique

$(u_n)_{n \geq 2}$ définit par : $u_2 = \frac{8}{25}$

et $u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{4}$ pour tout $n \geq 2$

Partie I:

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \geq 2)$:

$$u_n \leq \frac{5}{13}$$

➤ Pour $n=2$ on a $u_2 = \frac{8}{25} \leq \frac{5}{13}$

La propriété est donc vraie pour $n = 2$

Soit n un entier naturel,

➤ Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

Supposons que $u_n \leq \frac{5}{13}$ et montrons

que $u_{n+1} \leq \frac{5}{13}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \frac{5}{13} &= \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{4} - \frac{5}{13} \\
 &= \frac{7}{20}u_n - \frac{7}{52} \\
 &= \frac{7}{20}\left(u_n - \frac{7}{52} \times \frac{20}{7}\right) \\
 &= \frac{7}{20}\left(u_n - \frac{5}{13}\right)
 \end{aligned}$$

On a $u_n \leq \frac{5}{13}$ donc $u_n - \frac{5}{13} \leq 0$

Donc $\frac{7}{20}\left(u_n - \frac{5}{13}\right) \leq 0$

et donc $u_{n+1} - \frac{5}{13} \leq 0$

D'où $u_{n+1} \leq \frac{5}{13}$

D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \geq 2)$: $u_n \leq \frac{5}{13}$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ puis en déduire quelle est convergente

Rappels :

➤ $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante

➤ $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

➤ Toute suite croissante et majorée est convergente

➤ Toute suite décroissante et minorée est convergente

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{4} - u_n \\
 &= \left(\frac{7}{20} - 1\right)u_n + \frac{1}{4} \\
 &= -\frac{13}{20}u_n + \frac{1}{4} \\
 &= -\frac{13}{20}\left(u_n - \frac{1}{4} \times \frac{20}{13}\right) \\
 &= -\frac{13}{20}\left(u_n - \frac{5}{13}\right)
 \end{aligned}$$

$$u_n \leq \frac{5}{13} \Rightarrow u_n - \frac{5}{13} \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{13}{20}\left(u_n - \frac{5}{13}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

On a la suite (u_n) est majorée par $\frac{5}{13}$ et croissante donc elle est convergente

3) Soit (v_n) la suite définit par $v_n = u_n - \frac{5}{13}$, pour tout $n \geq 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et de raison $\frac{7}{20}$ puis calculer v_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$

Rappel : (V_n) géométrique

Définition : $V_{n+1} = q V_n$

V_n en fonction de n on a : $V_n = V_p \times q^{(n-p)}$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{13} \\
 &= \frac{7}{20}\left(u_n - \frac{5}{13}\right)
 \end{aligned}$$

(déjà calculé dans la question 1))

$$= \frac{7}{20}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison

$q = \frac{7}{20}$ et de premier terme

$$v_2 = u_2 - \frac{5}{13} = \frac{8}{25} - \frac{5}{13} = \frac{104-125}{325} = \frac{-21}{325}$$

Donc $v_n = v_2 \times (q)^{n-2}$

$$\text{Donc } v_n = \frac{-21}{325} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2}$$

b) Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n) .

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

$$\text{On a } v_n = \frac{-21}{325} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2} \text{ et on a } v_n = u_n - \frac{5}{13}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{5}{13} + v_n \text{ donc } u_n = \frac{5}{13} - \frac{21}{325} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{13} - \frac{21}{325} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Car } -1 < \frac{7}{20} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2} = 0$$

4) Pour tout $\forall n \geq 2$ on pose :

$$S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Calculer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 2}$

$$\text{On a } u_n = \frac{5}{13} + v_n \text{ donc :}$$

$$S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$

$$= \frac{5}{13} + v_2 + \frac{5}{13} + v_3 + \dots + \frac{5}{13} + v_n$$

$$= \frac{5}{13} + \frac{5}{13} + \dots + \frac{5}{13} + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$= \frac{5}{13} \times (n - 2 + 1) + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$= \frac{5}{13} \times (n - 1) + v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{7}{20}}$$

$$= \frac{5}{13} \times (n - 1) - \frac{21}{325} \times \frac{1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1}}{\frac{13}{20}}$$

$$= \frac{5}{13} \times (n - 1) - \frac{21}{325} \times \frac{20}{13} \left(1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{5}{13} \times (n - 1) - \frac{21}{325} \times \frac{20}{13} \left(1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1}\right)$$

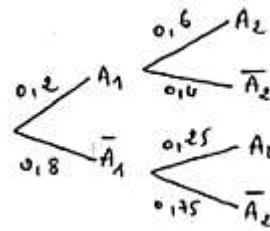
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{13} \frac{(n-1)}{n} - \frac{21}{325} \times \frac{20}{13} \frac{\left(1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1}\right)}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{13} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{21}{325} \times \frac{20}{13} \frac{\left(1 - \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1}\right)}{n}$$

$$= \frac{5}{13}$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{20}\right)^{n-1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Partie II 1)a) Montrer que $p_2 = p(A_2) = \frac{8}{25}$
(Tu peux utiliser un arbre de probabilité)



$$\begin{aligned} P_2 = P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1) \\ &= 0,6 \times 0,2 + 0,25 \times 0,8 \\ &= 0,32 = \frac{8}{25} \end{aligned}$$

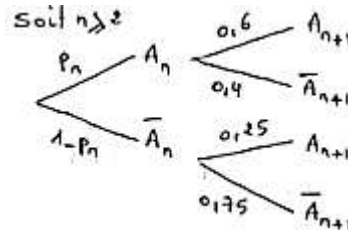
b) Calculer $p_{A_2}(A_1)$. Est que les événements A_1 et A_2 sont indépendantes

$$p_{A_2}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,32} = 0,375$$

$$\text{On a } p_{A_2}(A_1) \neq p(A_1)$$

Donc A_1 et A_2 ne sont pas indépendantes

2)a) Montrer que : $p_{n+1} = \frac{7}{20} p_n + \frac{1}{4}$



$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) \\ &= 0,6 \times P_n + 0,25(1 - P_n) \\ &= 0,6 \times P_n + 0,25 - 0,25P_n \\ &= 0,35P_n + 0,25 = \frac{7}{20} P_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 2}$ puis interpréter ce résultat.

$$\text{D'après la partie I on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{13}$$

Donc $\frac{5}{13} = 38,46\%$ des élèves vont choisir l'atelier de résolution de problèmes, (Quelle que soit la répartition initiale la probabilité p_n qu'un élève choisi au hasard participe à l'atelier de résolution de problèmes tend vers une valeur constante lorsque le nombre de semaine augmente)

1

10

3

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025
النموذج 18



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M3-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025 corrigé
Correction du modèle 18

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites	6 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	6 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Soit (U_n) une suite tel que : $U_0 = e^3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = \frac{1}{e^3} U_n + 1 - \frac{1}{e^3}$

1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > 1$

2) Montrer que la suite (U_n) est convergente

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_n - 1$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e^3}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n = \frac{e^3 - 1}{e^{3n}} + 1$ puis calculer la limite de la suite (U_n)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Déterminer la limite de S_n

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 4, 1)$, $B(1, 3, 0)$ et $C(2, -1, -2)$ et $\Omega(7, -1, 4)$.

1) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$

a) Montrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC)

b) En déduire que $2x - y + 3z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Déterminer les coordonnées du point H l'intersection de la droite (Δ) et le plan

(ABC)

4) Soit (C) le cercle de centre Ω et passant par A

a) Montrer que le rayon du cercle (C) est égal à 9

b) Calculer $d(\Omega; (\Delta))$ puis en déduire la position relative du cercle (C) et (Δ)

5) Soient (P) le plan d'équation $x + y + z = 0$ et (Q) le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$

a) Montrer que les plan (P) et (Q) sont sécantes

b) Vérifier que la droite (D) l'intersection de (P) et (Q) a pour représentation

paramétrique $(D) : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

c) En déduire que la droite (D) et le plan (ABC) sont parallèles

Exercice 3 (4 points) :

- 0,5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A ; B ; C$ et D d'affixes respectives
 $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i ; b = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} ; c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $d = 2b$
- 0,5 a) Vérifier que les points $O ; B$ et D sont alignés
- 0,5 b) Ecrire a et c sous forme trigonométrique
- 0,5 c) En déduire que $2b^3 = a$ et $b^2\bar{c} = 1$
- 3) Soit z' l'affixe du point M' l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$
- 0,5 a) Vérifier que $z' = \bar{c}z$
- 0,75 b) Déterminer l'image du point A par la rotation R puis en déduire la nature du triangle OAD
- 0,75 c) Montrer que $\frac{a-d}{b^2} = 2(b - \bar{b})$ puis en déduire que les droites (AD) et (OC) sont perpendiculaires

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher tels que deux jetons qui porte le nombre 1, trois jetons porte le nombre e , deux jetons le nombre e^2 , quatre jetons le nombre $\frac{1}{e}$, et un jetons le nombre $\frac{1}{e^2}$

On tire au hasard successivement et avec remise deux jetons de l'urne

- 0,5 1) Calculer la probabilité de l'événement A " tirer deux boules de même nombre "
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- On note par a le nombre lu sur le premier jeton et par b le nombre lu sur le deuxième jeton, à cette expérience aléatoire on associe le point M d'affixe $z = \ln a + i \ln b$
- 0,5 a) Calculer la probabilité de l'événement B " M appartient à l'axe des abscisses "
- 0,5 b) Calculer la probabilité de l'événement C "L'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est égale à $\frac{\pi}{4}$ "
- 0,5 c) Calculer la probabilité de l'événement D " M appartient au cercle trigonométrique "

Problème (08 points):

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x) - 2$

0,25 1) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \frac{x-1}{x(1+\sqrt{x})}$

0,25 2) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

0,25 3) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$

B) Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & : x \leq 0 \\ f(x) = x + 1 - \sqrt{x} \ln x & ; x > 0 \end{cases}$$

(C) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm

0,25 1) a) Justifier que $D_f =]-\infty; -\ln(2)[\cup]-\ln(2); +\infty[$ où D_f l'ensemble de définition de f

0,5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

0,25 c) Montrer que la fonction f est continue en 0

0,75 2) a) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et interpréter le résultat géométriquement

0,5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow (-\ln(2))^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-\ln(2))^-} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ puis montrer que la droite d'équation (Δ) d'équation

$y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,5 c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation (Δ) au voisinage de $+\infty$

0,5 4) a) Montrer que pour tout $x < 0$ et $x \neq -\ln(2)$: $f'(x) = \frac{(e^x - 1)(4e^x - 1)}{(2e^x - 1)^2}$

0,5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante $] -\infty; -\ln(4)[$ et strictement décroissante sur $] -\ln(4); -\ln(2)[$ et $] -\ln(2); 0[$

0,5 c) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

0,25 d) Dresser le tableau de variation de f sur D_f en justifiant votre réponse

0,5 5) Déterminer une équation de la tangente (T) de la courbe (C) au point $A(1; 2)$ puis justifier que A est un point d'inflexion de (C)

6) Soit h la fonction définie sur D_f par $h(x) = f(x) - x$ et ci-dessous son tableau de variation

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
$h(x)$	0	$+\infty$	1	$1 + \frac{2}{e}$	$-\infty$

0,25 a) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2; 2,5[$

0,75 b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\ln(2); \alpha[$ et en dessous de (Δ) sur les intervalles $] -\infty; -\ln(2)[$ et $[\alpha; +\infty[$

0,75 7) Construire la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On prend $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 4 \approx 1,4$ et $f(-\ln 4) = -1,8$)

0,25 8) a) Montrer que la fonction $x \rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ sur $[1; 2]$

0,5 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) dx$

0,25 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

10	1
2	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025 النموذج 19



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 19

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	calcul de probabilités.	2 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Suite, calcul intégral	5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (2 points) :

Une urne contient 3 boules rouges 4 vertes et 2 boules noires indiscernables au toucher

On tire simultanément trois boules de l'urne

On considère les deux événements :

A "obtenir **au plus** deux couleurs"

B" obtenir **au moins** une boule verte"

1 1) Calculer $P(A)$

1 2) Montrer que $P(B) = \frac{37}{42}$

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(-1, 1, 0)$; $B(0, 1, -1)$; $C(-1, 0, -1)$

et le plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}(2, 1, -1)$

0,5 1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P)

0,5 2) Montrer que $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5 3) Vérifier que les plans (ABC) et (P) sont orthogonaux

0,5 4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plans (ABC) et (P)

0,5 5) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-2, -2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{15}$

0,5 a) Calculer $d(\Omega; (P))$ et déduire que le plan (P) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon r à déterminer

0,5 b) Déterminer le triplet de coordonnées du point H centre du cercle (C)

Exercice 3 (4 points) :

0,5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

0,5 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A et B et C d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $c = \sqrt{3}$

0,5 a) Déterminer la forme algébrique de b

0,5 b) Déterminer la forme trigonométrique de a et montrer que a^{2022} est réel

0,75 c) Montrer que $\frac{a-c}{b-c} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et déterminer une mesure de l'angle $(\vec{CB}; \vec{CA})$

0,5 d) Déterminer la nature du triangle ABC

3) Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par R

0,25 a) Ecrire z' en fonction de z

0,5 b) Montrer que l'affixe de D l'image de B par la rotation R est $d = \sqrt{3} - i$

0,5 c) Montrer que ABCD est un losange

Exercice 4 (4 points) :

Soit h une fonction définie sur $I = [0; 3]$ par : $h(x) = x + x \left(\frac{1}{3}x - 1 \right) e^{x-3}$ et (C_h) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité: 1cm)

On donne le tableau de variation de h sur I

x	0	3
$h'(x)$		+
$h(x)$	$h(0)$	$h(3)$

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) \leq x$

2) Soit (U_n) la suite tel que : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ Pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq 3$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) Dédire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

3)a) Montrer $x \mapsto (x-1)e^{x-3}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{x-3}$ sur I puis

en déduire que: $\int_0^3 x e^{x-3} dx = \frac{2e^3+1}{e^3}$

b) Par une intégration par partie montrer que: $\int_0^3 x^2 e^{x-3} dx = \frac{5e^3-2}{e^3}$

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite $(D): y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Problème (7 points) :

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln(x)$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x dans $]0; +\infty[$; puis en déduire que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

2) Calculer $g(1)$ puis montrer que $\forall x \in]0; 1]: g(x) \geq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[): g(x) \leq 0$

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$

et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité: 1cm)

1) Montrer que f est continue à droite de 0

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

b) Interpréter le résultat géométriquement

4) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2g(x)}{(2x-\ln x)^2}$

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0; 1]$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$

7) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique d'abscisse 1, 7)

10	1
2	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 20



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 20

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 1	Nombres complexes	4 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Prof Fayssal: 0681399067

Site: <https://elboutkhili.jimdofree.com/>

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(2; 0; -2)$ et $C(-1; 1; 1)$.

- 0,75 **1) a)** Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés
 0,5 **b)** Montrer que $\vec{n}(1; 0; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)
 0,5 **c-** montrer que $x + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 0,5 **2)** Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$
- 0,5 **a.** Vérifier que le point A appartient à (Δ) .
 0,5 **b.** Montrer que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).
 0,5 **3)** Soit α un réel et $I_\alpha(1 + \alpha; 2; \alpha - 1)$ un point de (Δ) .
- 0,25 **a.** Montrer que $d(I_\alpha; (ABC)) = \sqrt{2}|\alpha|$.
 0,5 **b.** Soit (S_α) la sphère de centre I_α et de rayon $2\sqrt{2}$. déterminer suivant les valeurs de α la position relative de la sphère (S_α) et du plan (ABC) .
- 4)** a-pour quelles valeurs de α , le point B appartient à la sphère (S_α) .
 b -pour les valeurs de α trouvés dans la question 4-A caractériser l'intersection de (S_α) et le plan(ABC)

Exercice 2 (4 points) :

- 0,25 **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 10 = 0$.
 0,5 **2.** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et D d'affixes respectives $z_A = 4 + 2i$ et $z_D = 1 + 3i$.
- a.** Montrer que $(z_A - z_D) \overline{z_D} = -10i$.
b. Montrer que le triangle OAD est isocèle rectangle en D.
- 0,5 **3.** Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.
 Vérifier que le point A appartient à (C).
- 0,75 **4.** La droite (OD) coupe le cercle (C) en un point B tel que $\text{Re}(z_B) > 0$.
a. On pose $\alpha = z_B \overline{z_D}$. Justifier que α est un réel.
b. Montrer que $|\alpha| = 10\sqrt{2}$.
- 5.** Montrer que $z_B = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$.

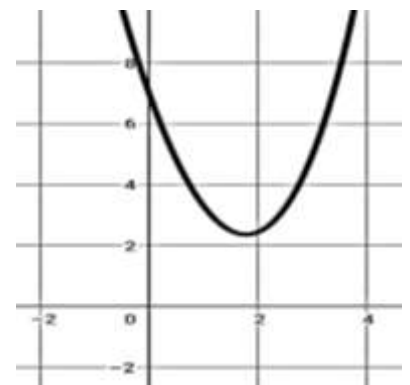
Exercice 3 (2 points) :

- 0,25 Une urne U_1 contient trois boules portant le nombre 1 et deux boules porte le
 0,25 numéro -1 et une porte le numéro 0 , et Une urne U_2 contient trois boules portant
 le nombre -1 et deux boules porte le numéro 0 et une porte le numéro 1. on
 0,5 suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.
 On choisit une urne des deux urnes puis On tire au hasard successivement sans
 remise 2 boules.
- 0,25 On considère l'évènement suivant : A : «la première boule tirée porte le numéro 1»
 0,75 B : « Obtenir deux boules dont la somme de leurs nombres est égale à -1 »
- 1.** Montrer que : $P(A) = \frac{1}{2}$ et que $P(B) = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que $P(C) = \frac{1}{3}$ avec C : « Obtenir deux boules dont la somme des
 nombres portée par eux égale à 0.

Problème (11 points) :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}$
(C_f) son graphe dans un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$) (Unité: 1cm)

- 0,75 1)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = -\infty$
- 0,75 b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- c) Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 2) a) Vérifier ($\forall x \in \mathbb{R}$) : $f(x) = x - \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}$
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (Tu peux poser $t = \frac{1}{2}x$)
- 0,5 c) Montrer que la droite (Δ) : $y = x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 0,5 d) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$ et que la droite (Δ) coupe (C_f) en un point unique $A(1; 1)$
- 0,5 3) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 6x + 5 + 2e^{\frac{1}{2}x}$
- 0,5 Le graphe ci-contre est la courbe de la fonction g sur $\mathbb{R}$
- 0,5 Justifier graphiquement que : ($\forall x \in \mathbb{R}$) : $g(x) > 0$
- 0,5 4)a) Montrer que ($\forall x \in \mathbb{R}$) : $f'(x) = \frac{1}{2}g(x)e^{-\frac{1}{2}x}$
- 0,5 b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
- 0,5 c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (On donne: $f(\frac{1}{2}) \approx 0,31$)
- 0,75 6) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = \frac{1}{4}(-x^2 + 10x - 17)e^{-\frac{1}{2}x}$
- 0,75 b) Dédire que (C_f) admet deux points d'inflexions (leur coordonnées ne sont pas demandés)
- 1 7) Tracer (Δ) et (C_f) dans ($O; \vec{i}; \vec{j}$) (On admet que (C_f) admet deux points d'inflexions sont $I(2, 2; 1, 7)$ et $J(7, 8; 7)$)
- 0,75 8) Soit h la fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par : $h(x) = f(x)$
- a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J à déterminer
- b) Tracer (Ch^{-1}) le graphe de h^{-1} dans le même repère
- 0,5 9)a) Montrer que : $H: x \rightarrow (2x^2 + 8x + 16)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de $h: x \rightarrow -x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$
- 0,5 b) Dédire la valeur de l'intégrale : $\int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx$
- c) Par une intégration par parties calculer $\int_{-2}^0 2xe^{-\frac{1}{2}x} dx$
- d) Dédire l'aire du domaine délimité par (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équation : $x = -2$ et $x = 0$
- 0,5 10) Soit (U_n) une suite tel que : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
- 0,5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq U_n \leq 2$
- 0,75 b) Montrer que (U_n) est décroissante (Utiliser B)2) d))
- c) Dédire que (U_n) est convergente et calculer sa limite



10

1

15

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 22



RRRRRRRRRRRRRRRRRR		M3-24	
3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 22

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(2, 1, 0)$ et $B(4, 2, 2)$. Soit (P) le plan passant par le point $C(1, 1, 1)$ et de vecteur normale $\vec{u}(2, 1, 2)$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$ et (Δ) la droite passante par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}(2, -2, 1)$.

- 0,5 1)a) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(3, \frac{3}{2}, 1)$ et son rayon est $R = \frac{3}{2}$
0,5 b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z + 10 = 0$ est l'équation cartésienne de la sphère (S)
0,75 2)a) Montrer que $2x + y + 2z - 5 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (P) et que $A \in (S)$.
0,5 b) Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) en A
0,25 3)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passante par le point B et de vecteur directeur $\vec{v}(2, -2, 1)$.
0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en B .

Exercice 2 (3 points) :

Un sac contient 5 boules numérotées 1;1;1;2;3

Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément deux boules

- 0,75 a) Calculer $P(A)$, où A est l'événement "Obtenir 2 boules portant le numéro 1"
0,75 b) Calculer $P(B)$, où B est l'événement "Obtenir une boule exactement qui porte le numéro 1"

2) On tire maintenant quatre boules de façon suivante :

On tire simultanément deux boules et ne les remettons pas dans le sac puis on tire simultanément deux boules

- 0,75 a) Calculer $P(C)$, où C : "Les deux premières boules portant le numéro 1"
0,75 b) Calculer $P(D)$, où D : "la somme des quatre numéros obtenus est égale à 7..

Exercice 3 (4 points) :

- 0,5 A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$
0,5 B) On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points $A(a); B(b)$ tel que :
0,5 $a = 2\sqrt{3} - 2i$; $b = 2\sqrt{3} + 2i$ et le point I le milieu du segment $[AB]$
0,5 1) a) Ecrire sous forme exponentielle les nombre complexe a et b
0,5 b) Déduire que $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
0,5 c) Déduire la nature du triangle OAB
0,5 2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$ et soit le point C l'image du point I par l'homothétie h
0,25 a) Montrer que l'abscisse du point C est $c = 4\sqrt{3}$
0,25 b) Déduire que I est le milieu du segment $[OC]$
0,5 3) Déduire que le quadrilatère $OACB$ est un losange

Problème (11 points) :

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - x + 1 - \ln(x)$$

1) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$ puis dresser le tableau des variations de g

3) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(\frac{1-x}{x}\right) \ln(x)$$

Et (Cf) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité: 1 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

3) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Dresser le tableau de signe de $(1-x)\ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$;

b) Déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) \leq x$

c) Déduire la position relative de (Cf) et (Δ)

5) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f , en justifiant votre réponse

c) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est tangente à (Cf) au point d'abscisse 1

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

(On donne : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,42$)

7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

8) Tracer (Δ) ; (Cf) et (Cf^{-1}) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

9) a) Calculer : $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} dx$

b) Par une intégration par parties calculer : $\int_e^{e^2} \ln(x) dx$

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (Cf) , la droite (Δ) et les droites $x=e$ et $x=e^2$

C) Soit (U_n) une suite tel que : $U_0 = \frac{23}{22}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$

2) Montrer la suite (U_n) est décroissante

3) Déduire (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

المملكة المغربية
 ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ

 وزارة التربية الوطنية
 والتعليم الأولي والرياضة
 ⴰⴳⴷⵓⴷ ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ
 ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 23

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Probabilité	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère les points $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-3;2;5)$ et Soit (P) un plan d'équation : $x - y - z + 2 = 0$

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

b) Montrer que $\vec{n}(1; 0; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Montrer que $(ABC) \perp (P)$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0.$$

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(0;1;1)$ et de rayon $R = 1$.

b) Calculer la distance du point Ω au plan (P) ,

c) Déterminer l'intersection du plan (P) et la sphère (S)

Exercice 1 (3,5 points) :

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

2. Dans le plan complexes (P) muni 'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixe respectifs : $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$

a. Ecrire a et b sous forme trigonométrique

b. Déduire que b^{2022} est un nombre réel négatif.

c. Montrer que : $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, puis en déduire la nature du triangle OAB.

3. Soient I le milieu du segment $[AB]$ et C l'image de I par l'homothétie h de centre O et de rapport $k = 2$

a. Montrer que : $z_I = 2\sqrt{3}$ et que : $z_C = 4\sqrt{3}$

b. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange, puis en déduire

que : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Exercice 3 (2,5 points) :

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 .

U_1 Contient quatre boules vertes et 2 boules rouges.

U_2 Contient quatre boules rouges et 2 boules jaunes.

U_3 Contient trois boules rouges et 2 boules vertes.

On prend une urne parmi les trois. Après on tire de cette urne choisis au hasard et simultanément deux boules.

1) Calculer la probabilité de choisir une urne U_i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

2) On considère les événements :

A : « tire une boule jaune et une boule rouge »

B : « tire deux boules ont même couleurs »

i) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

ii) Calculer $p(A \cap B)$.

iii) Déduire $p(A \cup B)$.

Problème (11 points) :

A) On considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); & \forall x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$)

1) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0+} h(x)$.

b) Calculer : $h'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h .

c) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

3) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement.

c) En utilisant la question 2, montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

4- a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (on pourra utiliser la question 2))

c) Dresser le tableau de variation de f .

5- Pour tout x de $]0; +\infty[$; on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = 2x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$, en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α , puis vérifier que : $\alpha \in]1; 2[$ (on prendra $\ln 2 = 0.7$ et $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α

6) Représenter graphiquement la courbe (C) .

7- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Construire la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\alpha^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$$

b) Calculer $\int_{\alpha}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$ (on remarque que : $\frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}$)

c) En déduire que l'aire délimitée par la courbe (C) et l'axe des abscisses et la droite de

l'équation $x=1$ et $x=\alpha$ est $A = -\frac{5}{24} + \frac{\alpha^3}{12} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \ln(1+\alpha) + \frac{\alpha^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \text{ cm}^2$

B) On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $0 < U_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < U_n < \alpha$

2) a) Montrer que : $g(]0; \alpha]) =]0; 1[$

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente. Et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

10

1

2

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 24



3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 24

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	calcul de probabilités.	2 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Suite, calcul intégral	5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

2-On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points A, B et C d'affixe respectives $a = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, b = \bar{a}$ et $c = a + b$.

a) Écrire le nombre a sous forme exponentielle.

b) En déduire a^{2022} est un nombre imaginaire pur.

3- Soit M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z' tel que M' est l'image de M par la rotation R du centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

a- Montrer que $z' = -iz$.

b- En déduire que B est l'image A de par la rotation R

4- Soit M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z' , tel que M' est l'image de M par la translation t tel que : $z' = z + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que $\vec{OA}$ est le vecteur de la translation t .

b) En déduire que C est l'image de B par la translation t .

5- Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$?

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les deux points $A(3; -3; 0)$ et $B(0; 0; 3)$ et soit k un réel strictement positif.

On note (E_k) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MA = kMB$

1) a) Déterminer la nature de (E_1) .

b) Montrer qu'une équation cartésienne de (E_1) est : $-2x + 2y + 2z + 3 = 0$.

2) a) Démontrer que (E_2) est une sphère de centre le point $I(-1; 1; 4)$ et de rayon $R = 2\sqrt{3}$.

b) Déterminer la position relative de (E_1) et (E_2) .

3) Soit J le milieu de $[OI]$.

a) Déterminer les coordonnées de J , puis Calculer : $\vec{JA} \wedge \vec{JB}$.

b) En déduire l'aire du triangle JAB .

4) On suppose désormais que k est différent de 1.

a) Démontrer que : $M \in E_k \Leftrightarrow (\vec{MA} - k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0$.

b) Déduire la nature de (E_k) .

Exercice 3 (4 points) :

On considère La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 1}$

1- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 4$

2- a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

b- En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3- On considère La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{5^n(u_n - 4)}{u_n}$

a- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante et déterminer cette constante.

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{4 \times 5^{n+1}}{5^{n+1} - 1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 4 (2 points) :

On considère un dé équilibré cubique, de faces numérotés de 1 à 6, et une urne contenant six boules : une noire, deux rouges et trois vertes.

On suppose que les boules de l'urne sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On lance le dé dans l'air et on écrit le chiffre obtenu sur sa face supérieure, si le chiffre est impair alors on tire une seule boule dans l'urne, si le chiffre est pair alors on tire simultanément deux boules dans l'urne »

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir un chiffre pair sur la face supérieure »

B : « Obtenir deux boules vertes »

C : « Obtenir exactement une boule verte sachant qu'on a obtenu un chiffre pair sur la face supérieure du dé »

1) Calculer $p(A)$ et montrer que $p(B) = \frac{1}{10}$

2) Calculer $p(C)$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités)

Problème (8 points) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (2x + 1)\ln(x) - 3x + 3$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité $\frac{1}{2}$ cm).

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3. a. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2x \ln(x) + 1 - x}{x}$.

La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f' la dérivée de la fonction f

b. En justifiant votre réponse. Déterminer le signe de f' sur $]0; +\infty[$.

c-donner le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

d- en justifiant votre réponse déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant l'abscisse du point d'inflexion.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β tel que $0.09 < \beta < 0.11$.

5. Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. on prend $(\alpha \approx 0,3$ et $f(\alpha) \approx 0,2$).

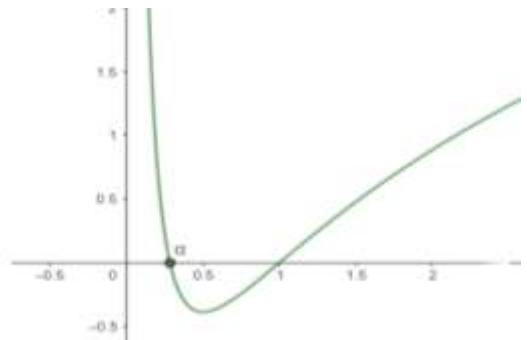
6. a. En utilisant une intégration par partie, calculer $\int_1^e (2x + 1)\ln(x)dx = \frac{e^2 + 3}{2}$

b. déduire l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

7. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = f(|x|)$.

a. Etudier la parité de la fonction g .

Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1

10

2

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 25



RRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 25

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	suite	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 \leq u_n \leq 4$.

0,5

2) Montrer que (u_n) est croissante.

0,5

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$.

0,75

4) En déduire que $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Et calculer $\lim u_n$.

0,75

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que $S_n \geq 4n - 2 + \frac{1}{2^n}$

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère les points $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-3;2;5)$ et Soit (P) un plan d'équation : $x - y - z + 2 = 0$

0,5

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

0,5

b) Montrer que $\vec{n}(1; 0; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) 1) Montrer que $(ABC) \perp (P)$.

0,75

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$.a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(0;1;1)$ et de rayon $R = 1$.

0,75

Calculer la distance du point Ω au plan (P) , puis déterminer l'intersection du plan (P) et la sphère (S) **Exercice 3 (4 points) :**

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = 3 + 2i ; b = \bar{a} \text{ et } c = 1$$

0,5

1) a) Ecrire le nombre $(a - c)$ sous la forme trigonométriqueb) En déduire que $(a - c)^4 = -64$

0,5

2) a) Montrer que $b - c = -i(a - c)$

0,5

b) Donner une interprétation géométrique du module de $\frac{b - c}{a - c}$

0,75

et de $\arg\left(\frac{b - c}{a - c}\right)$

c) En déduire que le point B est l'image du point A par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

0,5

d) Quelle est la nature du triangle ABC?

3) Soit M un point d'axe z et M' un point d'axe z' tel que M' est l'image de M par l'homothétie h de centre O et de rapport 5

0,25

a- Déterminer l'axe du point D image du point C par l'homothétie h

0,5

b- Montrer que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$

0,5

4) En déduire la nature du quadrilatère ADBC.

Exercise 4 (2 points) :

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A " Obtenir trois boules de même couleur "

B " Obtenir au moins une boule blanche "

C " Obtenir une boule de chaque couleur "

1 a) Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$; $p(C) = \frac{2}{7}$.

1 b) Calculer $p(B)$

Problème (8 points) :

Partie1 : On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)$.

0,5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)$ en déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$.

0,5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

0,5 2) a) Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[; g'(x) = -2x(\ln(x^2 - 1) - 1)$.

0,75 b) Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x^2 - 1) - 1 \geq 0$.

0,75 c) Donner le tableau de variations de g (N.B. : $g(\sqrt{e+1}) = e + 2$).

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[\sqrt{e+1}; +\infty[$.

0,5 (On admet que g est continue sur $]1; +\infty[$)

0,5 b) Montrer que $g(x) \geq 0$ sur $]1; \alpha]$ et $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$.

Partie2 : Soit f la fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$.

Et soit (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,75 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement.

0,75 3) a) Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x^2 - 1)}$.

0,5 b) Montrer que f est croissante sur $]1; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

0,5 c) Donner le tableau de variations de f .

0,25 4) Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement.

0,75 5) Construire (ζ_f) . (On admettra que $\alpha \approx 3,2$, $f(\alpha) \approx 0,69$, la courbe (ζ_f) possède un point d'inflexion dont l'abscisse est supérieure à 5).

Partie 3 :

0,5 1) Montrer que $(\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[); 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(x^2)}{x}$.

0,5 2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{\sqrt{2}}^{e^2} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{16 - (\ln(2))^2}{4}$

0,75 b) Déduire un encadrement de l'aire du domaine plan délimité par la courbe (ζ_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{2}$ et $x = e^2$

10

1

2

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2026

النموذج 26

RRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

المملكة المغربية
ROYAUME DU MAROC
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي والبحث العلمي
+٥٤٥٤٤٥٤+ ١ %٥X٤% ٥٥٤%٥
^ ٥٥٥٤٤^ ٥٤٤٤٥% ^ +%٤٤+

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 26

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	calcul de probabilités.	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Suite,	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher
Un dé non truqué porte les numéros 2-2-2-2-3-3



On considère l'expérience suivante : On jette une seule fois le dé , Si on obtient 2 On tire 2 boules successivement avec remise , Si on obtient 3 On tire simultanément 3 boules de l'urne.

Soient les évènements B : "les boules tirées sont blanches" et D : "obtenir 2 lorsqu'on jette le dé"

- 0,75 1) Calculer la probabilité de D
0,75 2) Calculer la probabilité de B sachant qu'On a obtenu 2 en jetant le dé
0,75 3) Calculer la probabilité de B
4) les événements D et B sont-ils indépendants ? justifier

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(2, 4, 1)$; $B(0, 2, 2)$ et $C(1, 2, 1)$

0,25 1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

0,25 b) Montrer que $\vec{n}(2; -1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5

c) Donner l'équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-1; 0; -1)$ et de rayon $R = 2$

0,5 a) Montrer que l'équation cartésienne de (S) s'écrit : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 2 = 0$

0,5 b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à (S)

0,5 3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 b) Déterminer les coordonnées de H le point de tangence de (ABC) et (S)

Exercice 3 (3 points) :

0,5 I- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$

II - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ et $b = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$

0,5 1) Montrer que $|a| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(a) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

0,25 2) a) Vérifier que $b = e^{-i\frac{\pi}{4}} \times a$

0,25 b) En déduire que $b = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$

0,5 c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) Soit c l'affixe du point C l'image de B par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

0,5 montrer que $c = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,5 4) Montrer que $\frac{a}{c} = i$, en déduire la nature du triangle OAC

Exercice 4 (3 points) :

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{12U_n - 4}{9U_n} \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N})$

- 0,25 1) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{2(3U_n - 2)}{9U_n}$.
- 0,5 2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > \frac{2}{3}$.
- 0,5 3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n = \frac{-(3U_n - 2)^2}{9U_n}$.
- b- Etudier la monotonie de la suite (U_n) puis déduire qu'elle est convergente.
- 0,75 4) Soit (V_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) V_n = \frac{3}{3U_n - 2}$
- 0,75 a. Montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison r et son premier terme et exprimer V_n en fonction de n .
- 0,75 b. Déduire U_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Problème (8 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^2 - x^3)e^{1-x}$ et soit (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm)

- 0,25 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- 0,5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- 0,5 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat
- 0,5 3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x)e^{1-x}$
- b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f
- 0,5 4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}, f''(x) = (x - 2)(-x^2 + 6x - 2)e^{1-x}$
- 0,5 b) Déterminer les abscisses des points d'inflexions de la courbe (C_f)
- 0,5 5) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses
- 0,75 6) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 1 7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1; 4]$.
- 0,5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J
- b) Calculer $(g^{-1})'(0)$
- 0,5 8) a) Montrer que la fonction $H : x \rightarrow -(x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$ est une primitive de la
- 0,75 fonction $h : x \rightarrow x^2 e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$
- b) En déduire que $\int_0^1 x^2 e^{1-x} dx = 2e - 5$
- 0,5 c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 x^3 e^{1-x} dx = 6e - 16$
- 0,75 d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les
- 0,5 droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

10	1
2	
Prof Fayssal	

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 27



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 27

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	calcul de probabilités.	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Suite, calcul intégral	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien .

Exercice 1 (3 points) :

I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 7 = 0$

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{3} + 2i \text{ et } d = \sqrt{3} - 2i$$

1- On pose : $u = \frac{1}{2\sqrt{3}}(c + a)$. Montrer que $u^{2019} = -1$

0,5 2- a)- Montrer que $\frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}i$

b)- En déduire que le triangle ADC est rectangle en A.

0,5 c)- Montrer que $b - d = \frac{1}{2}(c - d)$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés
0,5 et que le point B est le milieu du segment $[DC]$.

0,5 3- Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ADC est le point B et que son rayon est 2

4- Soient T la translation du vecteur $\vec{AC}$.

0,5 a- Montrer que l'affixe du point E l'image du point D par T est $e = 2\sqrt{3} - i$

0,5 b- En déduire que le quadrilatère $ACED$ est un rectangle.

Exercice 2 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 1- Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq 6$.

0,5 2- a)- Montrer que $u_{n+1} - 6 \leq \frac{2}{7}(u_n - 6)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 b)- En déduire que $0 \leq u_n - 6 \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

0,5 3- Soit $(v_n)_n$ la suite définie par : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 a)- Montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

0,5 b)- Vérifier que $u_n = \frac{v_n - 6}{v_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire à nouveau $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 3 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(0; -2; -2)$, $B(1; -2; -4)$, $C(-3; -1; 2)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

0,5 1. Montrer que le centre de la sphère est $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 5.

0,5 2. Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

0,5 3. Montrer que $\vec{n}(2; 2; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,75 4. Montrer que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC) .

0,5 5. Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

6. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est perpendiculaire au plan (ABC) .

0,5 b. Montrer que (Δ) coupe la sphère (S) en deux points $E\left(\frac{13}{3}; \frac{16}{3}; \frac{14}{3}\right)$ et $F\left(\frac{-7}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

0,5 c. Vérifier que F est le point de contact.

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient trois boules blanches numérotées 0 ; 1 ; 2 et deux boules noires numérotées 1 ; 2 (Toutes les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

A : " Obtenir deux boules portant le numéro 1 "

B : "la première boule tirée est blanche"

a-Montrer que : $p(A) = \frac{1}{10}$

b-Calculer $p(B)$ et montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$

c- Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Problème (8 points) :

Soit g une fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 \ln x - 2x - 1}{x^2}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2. Montrer que $(\forall x \in I); g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$, puis dresser le tableau de variations de g.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I, et que

$$\frac{51}{20} < \alpha < \frac{64}{20}$$

b. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout x de $]\alpha; +\infty[$ et $g(x) < 0$ pour tout x de $]0; \alpha[$.

II. Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 - x \ln x}{x e^x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement.

3. Vérifier que $\ln(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$ et que $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$.

4. a. Montrer que $(\forall x \in I); f'(x) = e^{-x} g(x)$.

b. Dédurre la monotonie de f sur I puis dresser le tableau de variations de f.

5. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

6. Construire la courbe (C_f) .

7. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Montrer que $H: x \mapsto e^{-x} \ln x$ est une primitive de f sur I.

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 3$ et $x = \lambda$.

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Dresser le tableau de variations de f^{-1} sur J.

c. Calculer $f(1)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{e}$

d. Montrer que $(f^{-1})' \left(\frac{1}{e} \right) = -e$.

1

410

21

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025
النموذج 28



RRRRRRRRRRRRRRRR

M2-24

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 28

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
------------	-------------------------	----------

Exercice 2	Nombres complexes	2 points
------------	-------------------	----------

Exercice 3	calcul de probabilités.	4 points
Exercice 4	Suites	3 points
Exercice 5	Suite, calcul intégral	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	6 points

الصفحة 2		M2-24	الامتحان التجريبي للباكالوريا - 2025 - النموذج 28 - مادة الرياضيات - مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار		ذ.فيصل
Exercice 1 (3 points) :					
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$					
On considère le plan (P) d'équation $x + y + z - 1 = 0$					
0,5	1) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(-1; -1; 0)$ et perpendiculaire au plan (P)				
0,5	b) Montrer que la droite (D) coupe le plan (P) au point $B(0; 0; 1)$				
0,25	2) (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 10 = 0$				
0,5	a) Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$				
	b) Montrer que la sphère (S) est coupe le plan (P) suivant un cercle de centre B dont on déterminera son rayon				
0,5	3) Soit (Q) le plan parallèle à (P) est passant par le point $C(2; 2; 3)$				
0,25	a) Montrer que C appartient à la droite (D) et que C à l'extérieur de la sphère (S)				
0,5	b) En déduire la position relative de la sphère (S) et le plan (Q)				
	c) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q)				
Exercice 2 (4 points) :					
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$					
Soit les points E ; F et G d'affixes respectifs $z_E = 1 + i$ et $z_F = 1 - i$ et $z_G = -i\sqrt{3}$					
0,5	1) Soit N l'image du point F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2				
	Montrer que : $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$				
0,75	2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et A l'image du point G et C est l'image de N par R, montrer que : $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$				
0,75	3) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ et B l'image de N et D est l'image de G par T, montrer que : $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = (2 - \sqrt{3})i$				
0,5	4)a) Montrer que E est le milieu de [AC] et [BD]				
0,75	b) Vérifier que $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$; puis en déduire la nature du triangle BCE				
0,75	c) Déduire que le quadrilatère ABCD est un carré				
Exercice 3 (2 points) :					
On jette trois fois un dé non truqué à six faces portant les chiffres de 1 à 6					
On lit les numéros des faces supérieurs et on les notes a ; b et c puis on forme l'équation du second degré (E): $ax^2 + bx + c = 0$					
On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire					
0,5	1) Soit A l'événement " -1 est solution de (E) et $b = 6$ " , montrer que $P(A) = \frac{5}{216}$				
0,5	2) Soit B l'événement " -2 est solution de (E) et $c = 4$ " , montrer que $P(B) = \frac{1}{108}$				
0,5	3) Soit C l'événement " La somme des solutions de (E) et leur produit est 1 "				
	Montrer que $P(C) = \frac{1}{72}$				
0,5	4) Soit D l'événement "L'équation admet une seule solution double et $b = 4$ "				
	Calculer $P(D)$				

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{e} \text{ et } u_{n+1} = \frac{e}{2} u_n - \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 0,5 1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \frac{1}{e-2}$
- 0,5 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2u_n + \frac{2}{2-e}$.
- 0,75 a) Montrer que la suite est géométrique de raison $\frac{e}{2}$
- 0,5 b) Déterminer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 0,75 c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{e-2} \left(1 - \left(\frac{e}{2} \right)^{n-1} \right)$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 5 (2,5 points) :

Soit g la fonction définie sur $I = [0; 1]$ par : $g(x) = e^x \ln(1 + e^x)$, et (C_g) la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1cm)

- 0,5 1) a) Vérifier que $(\forall x \in I): \frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$
- 0,5 b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$
- 0,75 2) Par une intégration par parties montrer $\int_0^1 g(x) dx$
- 0,75 3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Problème (6,5 points) :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 + xe^x - e^x}{e^x + 1}$$

- 0,75 (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1cm)
- 0,5 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 0,5 3) Soit la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$
- 0,5 a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) - y = \frac{(2-x)}{e^x+1}$
- 0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 0,5 c) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $\mathbb{R}$
- 0,75 4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}): f'(x) = \frac{(e^x-1+x) e^x}{(e^x+1)^2}$
- b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$
- 0,5 c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
- 1 5) a) Tracer (Δ) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 0,5 b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): f(x) \leq 1$
- 0,5 c) Discuter suivant les valeurs paramètre réel m le nombre des solutions de l'équation : $(E): e^x(x - 1 - m) = m - 1$

1

10

*****14

Prof
Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك
الدولية 2025
النموذج 29



RRRRRRRRRRRRRRRRRR

M14-24

3h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

7

المعامل

شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)

الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 29

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suite numérique	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	4 points
Exercice 3	Calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$u_0 = 19 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{9}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

0,5 1)a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 18$

0,75 b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4}(u_n - 18)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergent.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

0,5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et écrire v_n en fonction de n .

0,75 b) Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n) .

3) Soit (w_n) la suite numérique définie par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 Montrer que (w_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et sa limite.

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(-3; 0; 0)$; $B(1; 0; -2)$ et $C(-1; 1; 0)$

0,25 1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

0,25 b) Montrer que $\vec{n}(1; -2; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

0,5 c) Vérifier que $x - 2y + 2z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S_α) une sphère définie par l'équation cartésienne suivante :

$$(S_\alpha) : x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha y - 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

0,5 a) Montrer que le centre de la sphère (S_α) est : $\Omega_\alpha(0; -\alpha; \alpha)$ et son rayon $R = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$.

0,5 b) Calculer : $d(\Omega_\alpha, (ABC))$ en fonction de α

0,5 c) Déterminer la valeur de α pour laquelle le plan (ABC) est coupe la sphère (S_α) selon un cercle (C).

0,5 d) Déterminer le rayon r de cercle (C)

Exercice 3 (4 points) :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe

$$z_A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

- 1 a) Écrire z_A^2 sous forme Trigonométrique.
b) Déduire le module et un argument de z_A
c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 2 Soit le point B d'affixe z_B tel que OAB soit équilatéral et que :
 $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
a) Placer, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B.
b) Déterminer le module et un argument de z_B
- 3 Soit D le milieu du segment $[OB]$ et le point K tel que : $z_K = z_A - \frac{z_B}{2}$
a) Montrer que : $\frac{z_K}{z_K - z_A} = 1 - 2\frac{z_A}{z_B}$.
Et déduire que $\frac{z_K}{z_K - z_A}$ est imaginaire pur.
b) Montrer que $ODAK$ est un rectangle.
Et placer K et déduire le module et un argument de z_K .
- 4 Soit C le point d'affixe : $z_C = \frac{2z_A}{3}$
a) Calculer $\frac{z_{BK}}{z_{BC}}$. Montrer que B, C et K sont alignés.
b) Déduire une construction de C. Puis placer, alors, le point C.

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient : 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) Calculer les probabilités des deux évènements :

A : « Les trois boules tirées ont la même couleur »

B : « Obtenir au moins une boule blanche »

b) Montrer que $P_B(A) = \frac{2}{17}$

2) On tire maintenant une boule de l'urne.

Si cette boule est blanche, on la met de côté puis on tire une deuxième boule de l'urne. Si elle est noire, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne.

Montrer que : $P(C) = \frac{23}{49}$ o avec C : « Obtenir deux boules restantes dans l'urne »

Problème (8 points) :

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + 2x \ln(x)$

0,5

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

0,5

2) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = 3 + 2\ln(x)$ puis dresser son tableau de variations

0,5

3) En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

B) Soit f la fonction définie sur $I =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{(x - 1)^2}$$

Et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité: 1 cm)

0,75

1)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,25

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les résultats géométriquement

0,5

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter les résultats géométriquement

2)a) Montrer que : pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ on a :

0,5

$$f'(x) = \frac{(1 - x)g(x)}{x(x - 1)^4}$$

0,5

b) En déduire que f est strictement croissante $]0; 1[$ sur et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

0,5

c) Dresser le tableau de variation de f

0,5

3) Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement

1

4) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ puis tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5) a) Vérifier que $\forall x \in [2; 3] : \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ puis en déduire que

0,75

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)} dx = 2\ln 2 - \ln 3$$

0,5

a) Par une intégration par partie montrer que $\int_2^3 f(x) dx = 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}$

0,5

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites $x=2$ et $x=3$

10

1

2

Prof Fayssal

الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2025

النموذج 30



3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2025

Modèle 30

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 1	Nombres complexes	4 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1; 2; 7), B(2; 0; 2), C(3; 1; 3), D(3; -6; 1) \text{ et } E(4; -8; -4)$$

- 0,75 1 Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- 0,5 2 Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
- 0,5 (a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
- 0,5 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.
- 0,5 (c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
- 0,5 3 On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :
- 0,5
$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$
 où t est un nombre réel.
- 0,5 (a) La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
- 0,25 (b) Déterminer les coordonnées du point H, l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).
- 0,5 4) Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 2 (3 points) :

Partie I: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ . Soit A, B et C les points d'affixes a, b et c où $a = 5 + 5i, b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

- 0,25 1 Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ .
- 0,5 2 Soit D le point d'affixe $2 + 2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).
- 0,5 Partie II: (On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$). A tout point M du plan différent de O , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{20}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ représente le nombre conjugué de z .
- 0,75 1 Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
- 2 Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z . On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .
- (a) Vérifiez que $z + \bar{z} = 4$.
- (b) Exprimez $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et $\bar{z}$ et en déduire que $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$.
- (c) En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ . Placer M' sur la figure.

Exercice 3 (3 points) :

- 0,25 On considère la Suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-5+7u_n}{-1+3u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$
- 0,25 1 Vérifier que: $u_{n+1} - 1 = \frac{4(u_n-1)}{2+3(u_n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer par récurrence que: $u_n > 1$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$
- 0,5 2 Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{2}{1-u_n} + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 0,25 (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 0,75 (b) Montrer que $u_n = \frac{-5+v_n}{-3+v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et écrire u_n en fonction de n .
- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercise 4 (3 points) :

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1 On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

(a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :

- A. $\frac{1}{56}$
B. $\frac{1}{120}$
C. $\frac{1}{3}$

(b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

- A. $\frac{11}{56}$
B. $\frac{11}{120}$
C. $\frac{16}{24}$

2 On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

(a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

- A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

(b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est:

- A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3 On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note:

- R_1 l'évènement: "La première boule tirée est rouge" ;
- N_1 l'évènement: "La première boule tirée est noire" ;
- R_2 l'évènement: "La deuxième boule tirée est rouge";
- N_2 l'évènement: "La deuxième boule tirée est noire".

(a) La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

- A. $\frac{5}{8}$
B. $\frac{4}{7}$
C. $\frac{5}{14}$

(b) La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est:

- A. $\frac{16}{49}$
B. $\frac{15}{64}$
C. $\frac{15}{56}$

c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est:

- A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$

(d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

- A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

Problème (8points) :

Partie I:

On considère la fonction f définie par $f(x) = (1 - x)e^x + (1 + x)e^{-x}$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 (a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

On rappelle que $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

(b) Montrer que: $f(x) = f(-x)$ pour tout nombre réel x . Interpréter géométriquement ce résultat.

2 (a) Montrer que: $f'(x) = -x(e^x + e^{-x})$ pour tout nombre réel x .

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

(c) En déduire que: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \leq 2$.

3 (a) Montrer qu'il existe un réel unique α tel que: $f(\alpha) = 0$ et $\alpha > 1$.

(b) Montrer que: $e^{2\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$; en déduire que: $\alpha \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(c) Étudier le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel positif x . (On pourra utiliser $\ln x \leq x - 1$ pour tout nombre réel strictement positif x)

4 (a) Tracer la courbe $\mathcal{C}$

(b) Calculer en cm^2 la surface de la partie du plan délimitée par la courbe ($\mathcal{C}$) et l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie II:

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$g(x) = x(2 - \ln x) + \frac{2 + \ln x}{x}$$

1 (a) Montrer que: $g(e^x) = e^x(2 - x) + (2 + x)e^{-x}$ pour tout nombre réel x .

(b) En déduire que: $g'(e^x) = e^{-x}f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) En déduire que $g'(x) = \frac{1}{x}f(\ln x)$ pour tout nombre réel strictement positif x .

(d) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

2 (a) Montrer que: $g(e^\alpha) = e^\alpha + e^{-\alpha}$

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

(c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions u et v tels que: $\ln u < \alpha < \ln v$.