

Terminale

Mathématiques - spécialité

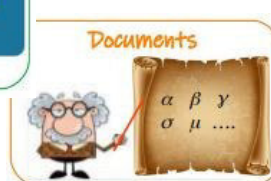
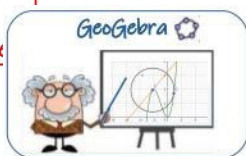
Programme 2020

Fiches d'exercices et de cours à compléter

Auteur : Pierre Lux – version 2023

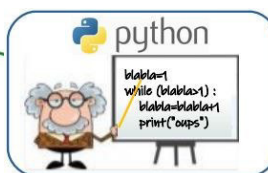
Toutes les corrections sont consultables en ligne

<http://pierrelux.net>



- 1 : Suites pages 1 à 24
- 2 : Dénombrement pages 25 à 38
- 3 : Droites et plans dans l'espace pages 39 à 53
- 4 : Limites de fonctions pages 54 à 69
- 5 : Dérivation : compléments pages 70 à 83
- 6 : Continuité pages 84 à 96
- 7 : Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace pages 97 à 106
- 8 : Logarithme népérien pages 107 à 126
- 9 : Représentations paramétriques et équations cartésiennes pages 127 à 145
- 10 : Succession d'épreuves indépendantes - Schéma de Bernoulli pages 146 à 155
- 11 : Les fonctions sinus et cosinus pages 156 à 168 *
- 12 : Équations différentielles – Primitives pages 169 à 178
- 13 : Intégrales pages 179 à 199 *
- 14 : Transformations de variables aléatoires - Concentration - Loi des grands nombres pages 200 à 210 *

* **Thèmes ne pouvant faire l'objet d'une évaluation lors de l'épreuve écrite**



Chapitre 1 - RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère la proposition $P(n)$ dépendant d'un entier n : « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 »
(On rappelle qu'un nombre est multiple de 11 lorsqu'il s'écrit sous la forme $11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$)
Vérifions que cette proposition est vraie pour les entiers $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Pour $n = 0$:

Pour $n = 1$:

Pour $n = 2$:

Pour $n = 3$: $10^3 - (-1)^3 = 1\,000 - (-1) = 1\,000 + 1 = 1\,001 = 11 \times 91$

Pour $n = 4$: $10^4 - (-1)^4 = 10\,000 - 1 = 9999 = 11 \times 909$

On pourrait continuer ainsi les vérifications, mais quel que soit le nombre de vérifications effectuées, on ne peut pas affirmer que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n .

Pour justifier que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n , démontrons le résultat suivant :
Si la proposition est vraie pour le rang n , alors elle est vraie pour le rang suivant $n + 1$.

Pour cela, supposons que la proposition est vraie pour un rang n (n étant un entier naturel fixé).
Alors pour cet entier naturel n , on a :

$10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 c'est-à-dire

On veut alors démontrer que la proposition est vraie pour $n + 1$ c'est-à-dire que

Puisque $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire :
 $10^n = 11 \times k + (-1)^n$

$$\Rightarrow 10 \times 10^n = 10 [11 \times k + (-1)^n]$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} =$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} =$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} =$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} =$$

k étant un entier, le nombre $k' = 10k + (-1)^n$ est aussi un entier.

On a donc démontré que : $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$, $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc démontré le caractère **héréditaire** de la proposition :
Si la proposition est vraie pour un entier n , alors elle est vraie pour l'entier suivant $n + 1$.

On peut alors observer que : puisqu'elle est vraie pour 0, elle est vraie pour 1, puisqu'elle est vraie pour 1, elle est vraie pour 2

Il apparaît alors "clairement" que la proposition est vraie pour tous les entiers n de $\mathbb{N}$.

En assimilant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à une échelle sur laquelle on voudrait monter, le principe du raisonnement qui vient d'être fait est le suivant :

- si on sait monter sur le premier barreau de l'échelle
- et si l'on sait passer d'un barreau au barreau suivant,
- alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle.

Le type de raisonnement ainsi effectué est appelé **raisonnement par récurrence**. Il est basé sur la propriété suivante :

2) PROPRIÉTÉ

Propriété :

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**)

et si pour tout entier $n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ (**hérédité**)

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Remarque :

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait **un axiome** des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.

En géométrie un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : "Par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée".

3) DANS LA PRATIQUE

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $2^n \geq n + 1$

Soit $P(n)$ la proposition : « 2^n est supérieur ou égal à $n + 1$ »

Initialisation :

pour $n = 0$, on a :

On pourrait vérifier sans difficulté la proposition $P(n)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ cela peut être utile pour la compréhension, mais c'est sans utilité pour le raisonnement.

Hérédité :

Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n .

On a donc : (HR)

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

On a :

Ainsi $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$

La proposition $P(n + 1)$ est alors vérifiée.

Conclusion :

L'hypothèse " $P(n)$ est vraie" s'appelle
l'hypothèse de récurrence.

Chapitre 1 - LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite (u_n) , c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n) .

cas 1

Intuitivement, si « u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note :

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et « si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note :

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

Remarque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, « les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L ».

On note :

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple :

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1, cas 2, cas 4)

2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

• Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où k est un réel donné)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 5n^2$

• **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

• **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

• **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, (v_n) garde un signe constant.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant négative.

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

3) LIMITES ET COMPARAISON

Propriété :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) .	
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	

Preuve du premier point : exigible

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n - \sin(n)$

Propriété :

- Soit une suite (u_n) croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à L .
- Soit une suite (u_n) décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs ou égaux à L .

Preuve du premier point :

Raisonnons par l'absurde :

Supposons, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > L$.

Considérons alors l'intervalle ouvert centré sur L : $I =]L - (u_{n_0} - L); L + (u_{n_0} - L)[=]2L - u_{n_0}; u_{n_0}[$.

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n > n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et $u_n \notin I$.

On a donc trouvé un intervalle ouvert contenant L qui ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang n .

La supposition de départ est donc fausse et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq L$.

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement : *admis*

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

4) LIMITE DE LA SUITE (q^n) où $q \in \mathbb{R}$

Propriété :

- | | |
|---|--|
| <p>Soit $q \in \mathbb{R}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ • Si $q = 1$, alors pour tout n, $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ | <ul style="list-style-type: none"> • Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ • Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente |
|---|--|

Preuve du troisième point : *exigible*

- Soit $a > 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier n , $(1+a)^n \geq 1 + na$

Soit $P(n)$ la proposition : « $(1+a)^n \geq 1 + na$ »

Initialisation :

Hérédité :

Supposons que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier naturel fixé n .

On a donc : $(1+a)^n \geq 1 + na$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

On a :

La proposition $P(n+1)$ est alors vérifiée.

Conclusion :

On a donc démontré par récurrence que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

c'est-à-dire que : $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- Montrons que si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque :

On en déduit facilement la limite d'une suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

Exemple :

Soit (v_n) La suite définie par $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$ où $u_n = 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

5) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

Définition :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leq M$.
 - Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geq m$.
 - Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Propriété : admise

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarques :

- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- Si une suite est majorée par M , sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à M .

Propriété :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve du premier point : exigible

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel strictement positif.

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarque :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

On peut citer comme exemple la suite (u_n) définie par $u_n = ((-1)^n + 1)n$

Les différents cas possibles :

Suites divergentes

Cas 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ Tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Cas 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ Tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Cas 3 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Cas 4 : Aucun des trois cas ne se produit.

Suites convergentes

Opérations sur les limites :

$k \times u_n$
(où k est un réel donné)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

$u_n + v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Forme indéterminée

$u_n \times v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$

$\frac{u_n}{v_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$\pm \infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$\pm \infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$

Limites et comparaison :

Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI) :

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

• Soit une suite (u_n) croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à L .

• Soit une suite (u_n) décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs ou égaux à L .

Théorème des gendarmes :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

Limites d'une suite géométrique :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

On en déduit facilement la limite d'une suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

ATTENTION :

La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.

Convergence de suites monotones :

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Raisonement par récurrence**Ex 1-1 : Vrai ou faux**

- 1) Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n .
- 2) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=1$.
- 3) Si une propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=0$.
- 4) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors elle est héréditaire.
- 5) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.
- 6) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.
- 7) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.
- 8) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

Ex 1-2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Ex 1-3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$.

(u_n) est une suite définie par $u_0 \in I$ et, telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

2) On suppose que f est croissante sur I . Discuter, suivant les valeurs de u_0 et u_1 , du sens de variation de la suite (u_n) .

3) Que peut-on dire du sens de variation de la suite (u_n) lorsque f est décroissante sur I ?

Comportement global d'une suite

Ex 1-4 : Vrai ou faux

- 1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.
- 2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.
- 3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4$
- 4) Si $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4$, alors (u_n) est décroissante.
- 5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.
- 6) Si pour tout entier n , $0 < u_n \leq 4$, alors :
 - a) (u_n) est minorée par 4 .
 - b) (u_n) est minorée par 0,
 - c) (u_n) est minorée par 1.
 - d) 5 est un majorant de (u_n)
 - e) (u_n) est bornée.
 - f) (u_n) admet une infinité de majorants.

7) Une suite est toujours soit minorée, soit majorée.

8) Un majorant d'une suite est toujours un terme de la suite.

9) Une suite croissante est toujours minorée.

10) Une suite minorée est toujours croissante.

11) Une suite croissante n'est pas majorée.

12) Si pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq n+1$

- a) (u_n) est minorée.
- b) (u_n) est majorée.
- c) (u_n) est monotone.

13) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

- a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.
- c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.
- d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

14) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

15) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

Ex 1-5 : Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

- 1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.
- 2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.
- 3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.
- 4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+5}{4x+1}$
- 5) $u_n = 7^{n-3}$
- 6) $u_n = 2n - 5$

7) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

5) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

8) $u_n = \frac{1}{n+1}$

9) $u_0 = 8$, $u_1 = 10$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 22$...

6) $u_n = \frac{n^2}{3^n}$

10) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 21$, $u_3 = 85$...

Ex 1-6 : Étudier la monotonie

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3n + 5$

2) $u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

7) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$ (Aide : étudier une fonction)

3) $u_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

4) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 2n$

8) $u_n = \frac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$ (Aide : étudier une fonction)

4) $u_n = 3 - 4 \sin(5n)$

5) $u_n = \frac{3^n}{4} - 1$

6) $u_n = 1 - \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}$ (pour $n > 1$)

Ex 1-7 : Suites bornées

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1$

2) $u_n = \frac{(-1)^n}{5} + 4$

3) $u_n = \frac{n^2}{n^2 + 2}$

7) $u_n = \left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(3 - \frac{4}{n} \right)$ (pour $n > 1$)

8) $u_n = \frac{3 + \sin n}{2 - \sin n}$

2) Soit la proposition (P2) : « toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée »

a) (P2) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P2) est-elle vraie ?

Ex 1-10 : Suite positive à partir d'un certain rang

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-8 : Vrai ou faux

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

2) S'il existe un intervalle ouvert ne contenant pas une infinité de terme de la suite (u_n) , alors (u_n) ne converge pas vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n \geq 100$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

4) Si tout intervalle de la forme $] -\infty; B[$, où $B \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n \geq 100$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

Ex 1-9 : Logique

1) Soit la proposition (P1) : « toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée »

a) (P1) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P1) est-elle vraie ?

Opérations sur les limites

Ex 1-11 : Utiliser les opérations sur les limites

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n = -2n^2 + \frac{e}{n}$

2) $u_n = 300 - n^2 \sqrt{2}$

3) $u_n = \left(2 + \frac{3}{n}\right) \left(5 - \frac{1}{n^3}\right)$

$$4) \quad u_n = \frac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$$

$$5) \quad u_n = \frac{n+2}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$$

$$6) \quad u_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{5-\frac{2}{n^2}}$$

$$7) \quad u_n = \frac{5n^2}{10 - \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(5 + \frac{1}{n}\right)}$$

Ex 1-12 : Lever une indétermination

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

$$1) \quad u_n = \frac{n^5}{5} - \frac{n^2}{2} - e$$

$$2) \quad u_n = \frac{1}{2}n^4 - 2n^3 + 5n^2 - \frac{1}{4}$$

$$3) \quad u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 4}$$

$$4) \quad u_n = \frac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$$

$$5) \quad u_n = \sqrt{n} - n$$

$$6) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$$

$$7) \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Ex 1-13 : Trouver des suites

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite $+\infty$ telles que :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 1$

d) $u - v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, telles que :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 1$

d) uv n'a pas de limite.

Ex 1-14 : Raisonement par l'absurde

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente. Soit (w_n) la suite définie par

$$w_n = u_n + v_n.$$

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2 + 1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 1-15 : Théorème de comparaison ou d'encadrement

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n = \frac{3 \sin(n)}{n^2}$

2) $u_n = \frac{3 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$

3) $u_n = 3(-1)^n + n$

4) $u_n = \frac{2 \cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n = \frac{5n + (-1)^{n+1}}{2n + (-1)^n}$

6) $u_n = -3n^3 + 3 \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Ex 1-16 : Avec la fonction exponentielle

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel

$$n, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$$

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n \leq 1$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n , $0 < u_{n+1} \leq \frac{e}{n+2}$

3) Montrer que la suite (u_n) converge.

Ex 1-17 : Séries

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Limite d'une suite géométrique**Ex 1-18 :**

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

2) $u_n = 1,00001^n$

3) $u_n = 3 + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{4}\right)^k$

7) $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n = \frac{e^n - 4^n}{4^n - 1}$

9) $u_n = \frac{2^{n+1} + 5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-19 : Nombre rationnel

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3,777777 \dots$ (n chiffres 7)
 $u_1 = 3,7$, $u_2 = 3,77$...

Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que $2,47474747\dots$ est un nombre rationnel.

2) Montrer que (u_n) est décroissante.

Convergence de suites monotones

Ex 1-20 : Vrai ou faux

1) Si (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n , $u_n > 2$, alors $L > 2$.

2) Si (u_n) est une suite positive telle que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq n$, alors la suite (u_n) converge.

3) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

4) Toute suite croissante et minorée est convergente.

5) Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

6) Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

7) Toute suite convergente est monotone.

8) Toute suite qui converge vers 0 est soit croissante et négative, soit décroissante et positive.

Ex 1-21 : Étudier une suite monotone minorée

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3.$$

1) Montrer que la suite est minorée par 5.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Ex 1-22 : Étudier une suite décroissante non minorée

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -(u_n)^2 + u_n - 1$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante.

2) Montrer que (u_n) n'est pas minorée. (raisonnement par l'absurde)

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$

3) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Ex 1-23 :

(u_n) est la suite définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1) Étude de la convergence de (u_n) .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4$.

c) En déduire la limite de (u_n) .

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

Ex 1-24 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n!$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2) Détermination de la limite de (u_n) .

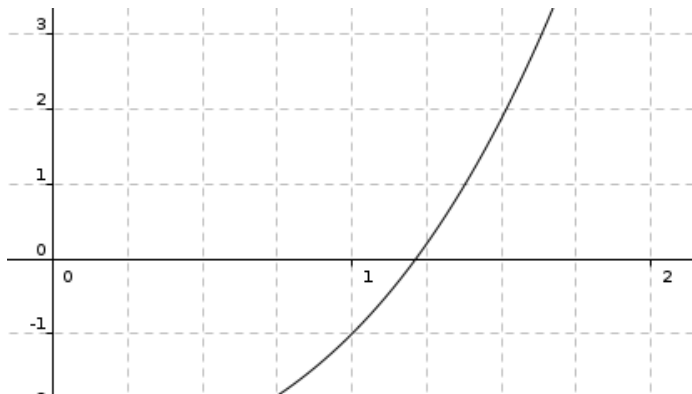
a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

2) Montrer que (u_n) n'est pas majorée.

3) En déduire la limite de (u_n) .

Algorithme – Python**Ex 1-25 : Méthode de Newton-Raphson****1) Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A.

Déterminer l'abscisse x_1 de A.

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) Mise en place de l'algorithme :

Revenons sur le cas général.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.

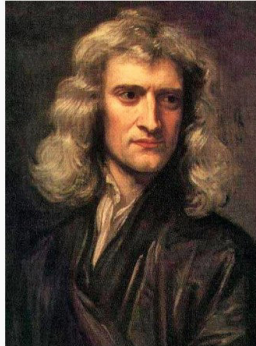
On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels $x_1, x_2, x_3 \dots$ de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n=10$.

<pre> 1 from math import * 2 3 N=int(input("N=")) 4 x_0=float(input("x_0=")) 5 6 def f(x): 7 return (.....) 8 9 def f_prime(x): 10 return (.....) 11 12 def MethodeNewton(x_0, N): 13 x=..... 14 for i in range(.....): 15 x.append(.....) 16 return x 17 18 print(MethodeNewton(x_0,N)) </pre>	Isaac Newton  Portrait d'Isaac Newton âgé de 46 ans par Godfrey Kneller (1689)
--	--

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p .

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```

1 from math import *
2
3 x_0=float(input("x_0="))
4 p=float(input("p="))
5
6 def f(x):
7     return (.....)
8
9 def f_prime(x):
10    return (.....)
11
12 def MethodeNewton(x_0,p):
13    x=.....
14    i=.....
15    x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
16    while (.....>p):
17        i=.....
18        x.append(.....)
19    return x
20
21 print(MethodeNewton(x_0,p))

```

3) Application :

Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près : (puis donner ces valeurs approchées)

- de π

- de e

- de $\sqrt{2}$

- du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2=x+1$)

Attention :

Dans le cas où l'équation $f(x)=0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution. Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas ...

Testez le programme [MethodeNewton.py](#) (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Newton.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 1-26 : Baccalauréat S Amérique du Sud nov 2019 – Ex 1-4



Récurrence - variations - limites - suite géométrique - Algorithme de seuil

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3 - \frac{10}{u_n + 4} \\ u_0 &= 5 \end{cases}$$

Partie A :

- Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
- En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
 - Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n \neq 1$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

- Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
- À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```

u ← 5
n ← 0
Tant que u ≥ 1,01
    n ← n + 1
    u ← 3 - 10 / (u + 4)
Fin du Tant que
    
```

- Traduire cet algorithme en Python

Ex 1-27 : Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019 – Ex 1-4

Récurrence - variations - limites - suite géométrique - Tableur - Algorithme de seuil



On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30} .

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) .
3. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , $u_n < 10^{-18}$.
 - a. Justifier l'existence de n_0
 - b. Écrire en Python un algorithme permettant de trouver n_0 , puis déterminer n_0 .

Ex 1-28 : Baccalauréat S Métropole sept 2018 – Ex 1-4

Récurrence - variations - limites – théorème de convergence – Calculatrice - Algorithme de seuil



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .
 - a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
 - b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
 - a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
 - a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 - b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Écrire en Python un algorithme permettant de trouver le plus petit entier n_0 , tel

que $u_n > 10^6$, puis déterminer n_0 .

Ex 1-29 : Baccalauréat S Métropole sept 2019 – Ex 1-4

Récurrence - variations - limites – théorème des gendarmes – représentation graphique

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie AOn considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

Partie BOn considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0, 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini?

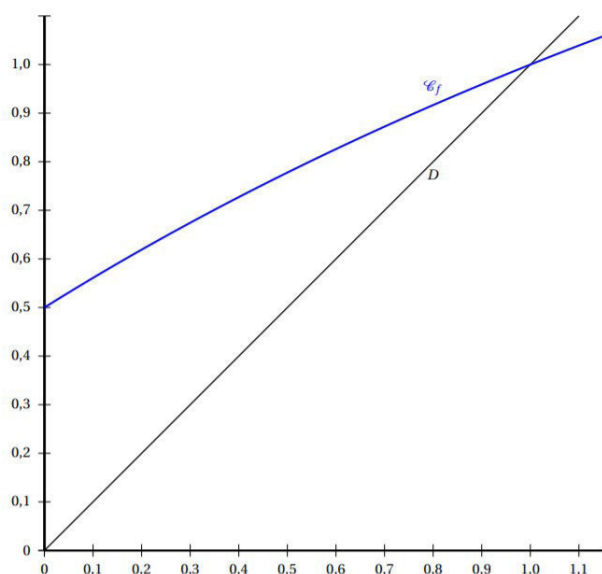
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n).$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.



Chapitre 2 -DÉNOMBREMENT

1) PRINCIPE ADDITIF

Définition :

Soit A un ensemble fini . Le nombre d'éléments de A s'appelle **le cardinal de A** et est noté $\text{Card}(A)$.

Propriété : admise

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles deux à deux disjoints, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$$

Rappel :

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Remarque : Si des ensembles forment une partition d'un autre ensemble, ils sont alors deux à deux disjoints.

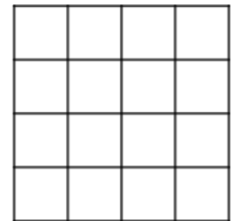
Ainsi, si A est une partie d'un ensemble E, alors $\text{card}(\bar{A}) =$

Exemple : Combien y a-t-il de carrés sur la figure ci-contre?

On note E l'ensemble de tous ces carrés et A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés 1, 2, 3 et 4 carreaux.

Les sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 constituent une partition de E (puisque'ils n'ont pas d'éléments en commun et que leur réunion est égale à E).

D'après le principe additif, on a :



Remarque : Si A et B sont quelconques (c'est-à-dire pas nécessairement disjoints), alors :

$$\text{Card}(A \cup B) =$$

2) PRODUIT CARTÉSIEN

Définition :

Soit A et B deux ensembles finis et non vides.

Le produit cartésien de A par B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ formés d'un élément x de A suivi d'un élément y de B.

On définit de la même façon le produit cartésien de 3, 4, ..., n ensembles.

Ce qui consiste à distribuer tous les éléments de A par rapport à chaque élément de B.

On peut écrire : $A \times B = \{(x; y), x \in A \text{ et } y \in B\}$

Exemple : Soit $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{a; b\}$.

On a $A \times B =$

Remarques :

- $A \times B \neq B \times A$: l'ordre d'un produit cartésien est important
- Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, alors
- Le produit d'un ensemble infini par un ensemble infini est infini. ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ représente l'ensemble de tous les couples de nombres réels)

Définition :

Soit A est un ensemble fini et non vide et k est un entier naturel non nul.

On note : $A^k = A \times A \times \dots \times A$ (k facteurs)

Les éléments de A^k sont des couples, des triplets, des quadruplets ...
De façon générale, on parle de **k-uplet** (ou **k-listes**) ordonnés.

Les coordonnées dans le plan ou dans l'espace offrent de bons exemples d'emploi.

Exemple : On dispose de trois dés tétraédriques (un bleu, un rouge, un jaune) dont les faces sont marquées de 1 à 4.

On jette les trois dés et on note dans l'ordre le résultat obtenu sur le dé bleu, puis rouge, puis jaune.

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$ alors, A^3 est l'ensemble de tous les résultats possibles.

3) PRINCIPE MULTIPLICATIF

Propriétés :

- Soit A et B deux ensembles finis et non vides . On a alors $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Soit A un ensemble fini et non vide et k un entier naturel non nul.
Si $\text{Card}(A) = n$, alors $\text{card}(A^k) = n^k$.

Résultat immédiat en utilisant la distributivité

Exemple : On reprend l'exemple précédent . $\text{Card}(A^3) =$

Il y a donc 64 résultats possibles pour l'expérience envisagée.

Dans la pratique, ce principe s'applique souvent en utilisant un schéma à cases :

Si une situation comporte k étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$

Exemple : Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

D'après le principe multiplicatif, on a :

Lettre 1	Lettre 2	Chiffre

Nombres de possibilités

Exemple : Nombre de parties d'un ensemble à n éléments (Exemple à connaître)

Soit A un ensemble tel que $\text{card}(A) = n$. Combien de parties différentes contient A ?

Il suffit pour chaque élément de se poser la question appartient-il (noté 1) ou non (noté 0) à la partie choisie.

D'après le principe multiplicatif, on a :

Élément 1	Élément 2	...	Élément n

Nombres de possibilités

4) ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

Définition :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leq n$.

Un arrangement de k éléments choisis parmi n est un k -uplet d'éléments distincts de A.

Exemple : Soit un ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

un arrangement de 3 éléments de A sera par exemple

$(1; 4; 4)$ n'est pas un arrangement, c'est un 3-uplet (un triplet) dont les éléments qui le composent ne sont pas distincts.

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leq n$.

Le nombre d'arrangements de k éléments de A est : $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$.

On le note A_n^k .

A_n^k est le produit de k entiers consécutifs décroissant à partir de n .

Preuve :

Ce résultat se montre facilement avec un schéma à cases :

D'après le principe multiplicatif, on a :

Élément 1	Élément 2	...	Élément k

Nombres de possibilités

Exemple :

Remarque : On utilise les arrangements en cas de choix successifs de p éléments pris parmi n , sans répétition.

Définition :

Soit un ensemble A de cardinal n .

Une permutation de A est un arrangement de A ayant n éléments.

Exemple : Soit un ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Définition :

On note $n!$ (lire « **factorielle n** ») le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

Par convention, on pose $0! = 1$.

On a alors $A_n^k =$

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal n .

Le nombre de permutations de A est $n!$.

Immédiat, car une permutation est un arrangement de A ayant n éléments.

Remarque : On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition.

5) COMBINAISONS

Définition :

Soit A un ensemble de cardinal n .

Une partie à k éléments de A est **une combinaison** de k éléments de A .

Exemple : Soit un ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Remarque : Le fait d'utiliser des accolades signifie que l'ordre d'écriture n'est pas important.

Propriété :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leq n$.

Le nombre de combinaisons de k éléments de A est : $\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

On le note $\binom{n}{k}$ (notation que nous utiliserons) ou parfois C_n^k .

$\binom{n}{k}$ se lit “ k parmi n ”.

On l'appelle **coefficient binomial**.

Preuve :

Dénombrons les arrangements de k éléments d'un ensemble fini A de cardinal n .

Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de A à k éléments (il y a $\binom{n}{k}$ choix de telles parties)
- La façon d'ordonner les k éléments de la partie choisie (il y a $k!$ façons)

On en déduit que : $A_n^k = k! \binom{n}{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$

Exemple : Soit un ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Remarque : L'ensemble des parties d'un ensemble A à n éléments est constitué des parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ..., n éléments.

Ainsi le nombre de parties de A est $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Or nous avons déjà vu que le nombre de parties de A est 2^n .

On en déduit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n , et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 - De plus, si $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Preuve : deuxième point exigible

Pour chacune de ces propriétés, deux démonstrations sont proposées : une démonstration par le calcul et une démonstration par une méthode combinatoire.

• **Démonstration par une méthode combinatoire :**

$\binom{n}{k}$ représente le nombre parties de k éléments d'un ensemble A à n éléments.

Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire.

Et le complémentaire d'une partie à k éléments comporte $n-k$ éléments.

Donc dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à $n-k$ éléments et il y en a $\binom{n}{n-k}$.

Démonstration par le calcul : $\binom{n}{n-k} =$

• **Démonstration par une méthode combinatoire :**

Soit A un ensemble à $n+1$ éléments avec $n \geq 1$.

Soit a un élément fixé de A. Remarquons que les parties à $k+1$ éléments de A se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas a (il y en a $\binom{n}{k+1}$), car fabriquer une telle partie revient à choisir $k+1$ éléments parmi n .

- celles contenant a (il y en a $\binom{n}{k}$), car fabriquer une telle partie revient à choisir k éléments parmi n .

Or ces deux catégories constituent une partition de l'ensemble des parties à $k+1$ éléments de A.

D'après le principe additif, on a donc :

Démonstration par le calcul :

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leq n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :

« Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

Cardinal de A :

Soit A un ensemble fini . Le nombre d'éléments de A s'appelle le **cardinal de A** et est noté **Card(A)**.

Principe additif :

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles deux à deux **disjoints**, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n).$$

Si A et B ne sont pas disjoints, alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

$$A \times B = \{(x; y), x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Produit cartésien :

Soit A et B deux ensembles finis et non vides.

Le produit cartésien de A par B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ formés d'un élément x de A suivi d'un élément y de B. On définit de la même façon le produit cartésien de 3, 4, ..., n ensembles.

Attention : $A \times B \neq B \times A$

k-uplet :

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ représente l'ensemble de tous les couples de nombres réels

Soit A est un ensemble fini et non vide et k est un entier naturel non nul.

On note : $A^k = A \times A \times \dots \times A$ (k facteurs)

Les éléments de A^k sont **des couples, des triplets, des quadruplets ...**

De façon générale, on parle de **k-uplet** (ou **k-listes**) ordonnés.

Si une situation comporte k étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$

Principe multiplicatif :

• Soit A et B deux ensembles finis et non vides . On a alors $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

• Soit A un ensemble fini et non vide et k un entier naturel non nul.

Si $\text{Card}(A) = n$, alors $\text{Card}(A^k) = n^k$.

Dans la pratique :

Ce principe s'applique souvent en utilisant **un schéma à cases** :

Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Exemple :

D'après le principe multiplicatif, on a :

Lettre 1	Lettre 2	Chiffre
26	25	9

Nombres de possibilités $26 \times 25 \times 9 = 5850$

On utilise les arrangements en cas de choix successifs de p éléments pris parmi n , sans répétition.

Arrangements :

Soit un ensemble A de cardinal n et un entier $k \leq n$.

Un arrangement de k éléments choisis parmi n est un k -uplet d'éléments distincts de A.

Factorielle :

On note $n!$ (lire **factorielle n**) le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

Par convention, on pose $0! = 1$.

$$A_n^k$$

Le nombre d'arrangements de k éléments de A est : $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. On le note A_n^k .

Permutation :

Une permutation de A est un arrangement de E ayant n éléments.

Le nombre de permutations de A est $n!$.

On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition.

Combinaisons :

Soit A un ensemble de cardinal n .

Une partie à k éléments de A est **une combinaison** de k éléments de A.

Coefficient binomial : $\binom{n}{k}$

se lit " k parmi n "

Le nombre de combinaisons de k éléments de A est : $\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

On le note $\binom{n}{k}$ (notation que nous utiliserons) ou parfois C_n^k .

Coefficients binomiaux :

• Pour tout entier naturel n , et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

• De plus, si $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Triangle de Pascal :

Avec une Ti-nspire

Menu>Probabilités>Combinaisons

$$nCr(6,2) = 15$$

Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$\binom{k}{n}$ n'est défini que pour $k \leq n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.

Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$

Principe additif

Ex 2-1 : Livres de mathématiques

1) Amine a dans sa bibliothèque 50 livres de mathématiques en français et 40 livres de mathématiques en anglais (et aucun dans une autre langue).

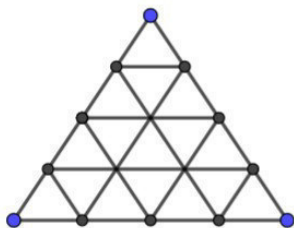
Combien de livres de mathématiques Amine peut-il choisir ?

2) Zineb possède 30 livres de mathématiques en français.

Déterminer le nombre n de livres mathématiques français qui peuvent être consultés dans les deux bibliothèques.

Ex 2-2 : Nombre de triangles

Déterminer le nombre
de triangles.



Produit cartésien – principe multiplicatif

Ex 2-3 : Nombre de menus

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Ex 2-4 : Garde robe

Une femme a dans sa garde-robe 5 jupes, 6 chemisiers et 3 vestes.

Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.

De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Ex 2-5 : Poignées de main

Deux équipes de foot de 14 et 16 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Combien de poignées de main ont été échangées ?

k-uplet

Ex 2-6 : QCM

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 20 questions.

Pour chaque question, on propose 3 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Ex 2-7 : Système binaire et octet



En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.

Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Ex 2-8 : Numéros de téléphone

1) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

2) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas les chiffres 0 et 1 ?

Arrangements

Ex 2-9 : Podium



A l'occasion d'une compétition sportive groupant 12 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.

Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

Ex 2-10 : Pièces bonnes ou mauvaise – événement contraire

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises.

On prélève quatre pièces de manière successive.

De combien de façon différentes peut-on en prélever 4 pièces dans les cas suivants :

1) les 4 pièces sont bonnes

2) Une au moins d'entre elles est mauvaise.

Ex 2-11 : L'ensemble des nombres de 4 chiffres – évènement contraire

Soit Q l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de Q .

2) Dénombrer les éléments de Q :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 3 et 9

Ex 2-12 : Code d'entrée d'un immeuble – évènement contraire

Le code d'entrée d'un immeuble est constitué d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 0 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 0 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Permutations et anagrammes

Ex 2-13 : Liste de passage

Dans une classe de terminale de 29 élèves, chaque élève doit être interrogé individuellement par le professeur de mathématique .
Il faut établir une liste de passage.

Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ?

Ex 2-14 : Anagrammes de « LOGARITHME »

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot LOGARITHME ?

Définition : un anagramme est un mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot. (Une anagramme de gare est rage.)

Ex 2-15 : Anagrammes de « MATRICE »

1) Dénombrer les anagrammes du mot MATRICE

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot MATRICE :

a) commençant et finissant par une consonne

b) commençant et finissant par une voyelle

c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle

d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

Ex 2-16 : Anagrammes de « COMPLEXE » , « MATHEMATIQUES » ...

1) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot COMPLEXE ?

2) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?

3) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

Combinaisons

Ex 2-17 : Groupe de 3

Les élèves de Terminale (il y a 27 élèves dans la classe) doivent écrire un programme en Python par groupe de 3.

De combien de manières peut-on former ces groupes ?

Ex 2-18 : Loto

Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?



Ex 2-19 : Tournoi sportif

Un tournoi sportif compte 10 équipes .

Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois.

Combien doit-on organiser de matchs ?

Ex 2-20 : Chats et chiens

De combien de façons différentes peut-on choisir 4 chiens et 3 chats parmi 12 chiens et 7 chats ?

Ex 2-21 : Délégués de classe

Dans une classe de 30 élèves, on compte 17 garçons et 13 filles.

On procède à l'élection des délégués de classe.

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Ex 2-22 : Club de procrastination

Camille et Alexandre font partie d'un club de procrastination de 20 membres.

On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à une conférence.

1) Combien de groupes de 5 membres peut-on constituer ?

2) Dans combien de ces groupes peut figurer Camille ?

3) Camille et Alexandre ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 membres peut-on constituer de telle façon que Camille et Alexandre ne se retrouvent pas ensemble ?

Ex 2-23 : Fort en programmation

Dans une classe de terminale , on compte 12 élèves très forts en Python parmi les 30 élèves de la classe.

Pour un devoir en groupe à faire sur ordinateur, le professeur décide de faire des groupes de 4 élèves.

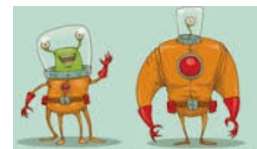
1) Quel est le nombre de groupes différents possibles ?

2) Quel est le nombre de groupes ne contenant aucun élève très fort en Python ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un élève très fort en Python ?

Ex 2-24 : Groupe d'extraterrestres

On constitue un groupe de 7 extraterrestres choisis parmi 25 martiens et 32 saturniens.



1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 7 extraterrestres ?

2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :

a) uniquement des martiens

b) des extraterrestres de la même planète

c) au moins un martien et au moins un saturnien

b) deux paires distinctes

c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs.
Exemple : 3 rois et 2 as)

d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré)

Dénombrements divers

Ex 2-25 : Poker

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32.

Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main"



1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) un carré

Ex 2-26 : Au cinéma

Quatre garçons et deux filles s'assoient dans une rangée de 6 places au cinéma.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Quel est le nombre de dispositions possibles si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre ?

3) Quel est le nombre de dispositions possibles si chaque fille est intercalée entre deux garçons ?

4) Quel est le nombre de dispositions possibles si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre ?

Ex 2-27 : Dans une urne : tirages successifs et simultanés

Une urne contient 5 boules vertes (numérotées de 1 à 5) et 4 boules jaunes (numérotées de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 boules de l'urne, sans remettre la boule tirée. Calculer les probabilités des événements :

a) A : «tirer 3 boules vertes»

b) B : «ne tirer aucune boule verte »

c) C : «tirer au plus 2 boules vertes»

d) D : «tirer exactement 1 boule jaune»

2) On tire maintenant simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Python



Ex 2-28 : Triangle de Pascal

1) On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```
1 pa=[1,2,1]
2 na=pa+[1]
3 print(na)
```

Que fait ce programme ?

2) On aimerait obtenir la ligne $na=[1,3,3,1]$ du triangle de Pascal.

On constate que pour $na[0]$ et $na[3]$, il n'y a rien à faire.

Comment obtenir $na[1]$ et $na[2]$ à partir de la liste pa ?

3) Compléter le programme ci- dessous qui permet de générer le triangle de Pascal :

```
1 def Pascal(n):
2     pa=[1]
3     for k in range(n):
4         na= .....
5         for i in range ( ..... ):
6             .....
7         pa=na
8     return(pa)
9
10 n=int(input("n="))
11 for i in range(.....):
12     print(.....)
```

Remarque :

On retrouve les mêmes résultats dans les deux parties.

En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même d'un point de vue probabilité.

Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou une combinaison, les questions 1) et 2) fournissent le même résultat si on a conservé le même mode de comptage.

4) Tester ce programme pour $n=10$.

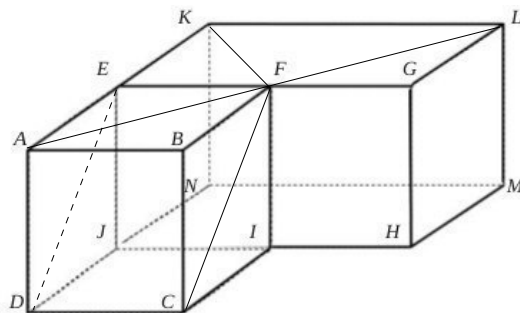
Chapitre 3 - VECTEURS , DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Avant tout, rappelons une propriété fondamentale :

Tout théorème de géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

Les exemples de ce chapitre se réfèrent à la figure ci-contre

$ABCDEFIJ$ est un cube
 $EGHJKLMN$ est un parallélépipède rectangle tel que $HM = CI$ et $JH = 2JI$



1) POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

A) POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

d et d' sont non coplanaires	d et d' sont coplanaires	
Aucun plan ne les contient toutes les deux.	Elles sont sécantes.	Elles sont parallèles.

Exemple :

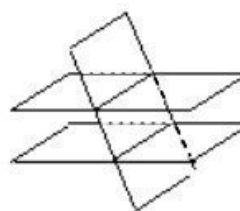
- Les droites (AB) et (HN) sont
- Les droites (AB) et (JH) sont
- Les droites (AL) et (KF) sont

B) POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus 	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	
	Il existe deux droites sécantes de P_1 et deux droites sécantes de P_2 parallèles deux à deux.	

Propriété d'incidence :

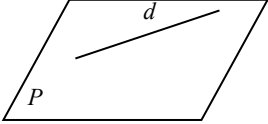
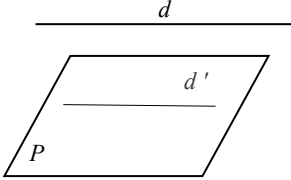
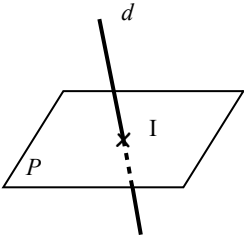
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles.



Exemple :

- Les plans (EKL) et (EGJ) sont
- Les plans (EKL) et (JNM) sont
- Le plan $(CDEF)$ coupe les plans parallèles $(AEJD)$ et $(BFIC)$ suivant

C) POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

d et P sont parallèles		d et P sont sécants
 d est contenue dans P	 d est strictement parallèle à P	

Exemple :

2) VECTEURS DE L'ESPACE

Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Lorsque $A \neq B$, la **direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) , le **sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **longueur** ou **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $|\overrightarrow{AB}|$, est la distance AB .
Lorsque $A = B$, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$...
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point $\vec{M}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

A) VECTEURS ÉGAUX

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- $ABCD$ est un parallélogramme, c'est à dire $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
(Si A , B , C et D sont alignés, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati)

B) RÈGLES DE CALCUL

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

- **RELATION DE CHASLES :**

Exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} =$

- **RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME :**

Exemple : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} =$

- **OPPOSÉ D'UN VECTEUR :**

Exemple : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{FE}$

- **MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL :**

Pour tous réels a et b , et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$, $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$, $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$, $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ etc ...

C) VECTEURS COLINÉAIRES

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits colinéaires.
Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$
- Dire que les points A , B et C (distincts) sont alignés revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$.

D) TRANSLATION

Comme dans le plan, on peut définir une translation dans l'espace.

Définition :

Soit $\vec{u}$ vecteur de l'espace.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation de l'espace notée souvent $t_{\vec{u}}$ qui à tout point M de l'espace associe le point M' , tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Exemple :

- I' est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$
- F est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$

3) INTERPRÉTATION VECTORIELLE DES DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

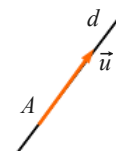
A) DROITES

Définition :

Soit d une droite. On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d .

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

$(A; \vec{u})$ représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.



Remarques :

- La droite $(A; \vec{u})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k \vec{u}$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$.

Conséquence :

- Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

B) PLANS

PLAN DÉTERMINÉ PAR TROIS POINTS

Propriété :

Soit A , B et C trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$

Preuve :

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

- Le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de (ABC) . Ainsi, pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$

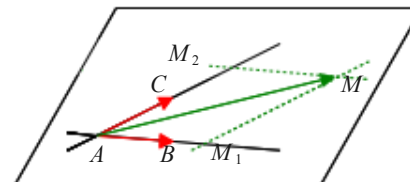
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$.

On note M_1 et M_2 les points définis par $\overrightarrow{AM_1} = x \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2} = y \overrightarrow{AC}$

L'égalité $\overrightarrow{AM_1} = x \overrightarrow{AB}$ prouve que M_1 est sur (AB) , donc dans le plan (ABC) . De même M_2 est sur (AC) , donc dans le plan (ABC) .

D'autre part on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$, donc AM_1MM_2 est un parallélogramme.

Les sommets A , M_1 et M_2 sont dans le plan (ABC) , il en est donc de même pour le quatrième sommet M .



On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINÉAIRES

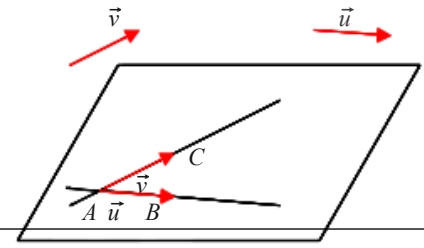
Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On note $(A; \vec{u}, \vec{v})$ ce plan

$(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Vocabulaire à connaître :

- On dit :
 - que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC) ,
 - ou qu'ils définissent **la direction** du plan (ABC) ,
 - ou que le plan (ABC) est **dirigé** par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
 - ou que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** des vecteurs du plan (ABC) .
- Si on peut écrire un vecteur $\vec{w}$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$, on dit que $\vec{w}$ s'exprime comme **une combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- La seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale au vecteurs nul est celle (dite triviale) dont tous les coefficients sont nuls. On dit que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **linéairement indépendants**.



Remarque :

Si $\vec{u'}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v'}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan $(A; \vec{u'}, \vec{v'})$ est le même que le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Exemple : Les plan $(A; \overrightarrow{DN}, \overrightarrow{KL})$ et $(A; \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$ sont

Conséquences :

- Deux plans ayant même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.
- Une droite d et un plan P sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur $\vec{w}$ de d est un vecteur du plan P , ce qui signifie que l'on peut exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P .

4) DÉCOMPOSITION DE VECTEURS

A) VECTEURS COPLANAIRES

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$, de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'un point O quelconque et les points $A, B, C, \dots$, définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}, \overrightarrow{OC} = \vec{w}, \dots$, sont coplanaires.

Cette définition ne dépend pas du point O choisi.

Remarques :

- Deux vecteurs sont toujours
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$,

Exemple : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

Propriété :

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Preuve :

Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB) .

Par définition, dire que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire $C \in (OAB)$... ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

Remarque : Si trois vecteurs sont non coplanaires, alors aucun des trois ne peut se décomposer en fonction des deux autres.

B) VECTEURS NON COPLANAIRES – BASE DES VECTEURS DE L'ESPACE

Propriété :

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que : $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

Preuve :

Existence :

Soit A, B, C, D et M des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AM}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sinon $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient coplanaires.

Ainsi A, B et C définissent un plan dont $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère.

La parallèle à la droite (AD) passant par M , dirigée par $\vec{w}$, qui n'est pas un vecteur du plan (ABC) , puisque $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, est sécante à ce plan en un point H .

$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{HM} = z\vec{w}$, où z est un réel, et H appartient au plan (ABC) ,

donc $\overrightarrow{AH} = x\vec{u} + y\vec{v}$ (x et y réels)

Comme $\vec{t} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, on obtient l'existence d'un triplet $(x; y; z)$ de réels tels que

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

Unicité :

On suppose que l'on a deux écritures : $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$

On a alors $(x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v} + (z - z')\vec{w} = \vec{0}$.

Supposons que l'une des trois différences n'est pas nulle, par exemple $(z - z') \neq 0$.

On obtient :

$$\vec{w} = \frac{x - x'}{z - z'}\vec{u} + \frac{y - y'}{z - z'}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient alors coplanaires ... ce qui n'est pas possible.

On en déduit que $z = z'$ et de la même façon que $x = x'$ et $y = y'$.

Remarques :

- Encore une fois, on dit que l'on a décomposé le vecteur $\vec{t}$ sous la forme d'une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.
- $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** et forment **une base** des vecteurs de l'espace.

5) REPÈRES DE L'ESPACE

Propriété et définitions :

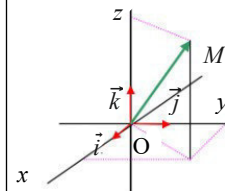
Soit O un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace.

A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On dit que $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou que

x, y et z sont respectivement **l'abscisse**, **l'ordonnée** et **la cote** du point M .



Exemple :

Dans le repère $(J; \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JE}, \overrightarrow{JF})$, on a

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Propriétés :

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, $A(x; y; z)$ et $B(x'; y'; z')$ deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
- Le milieu I de AB a pour coordonnées

Tout théorème de géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace

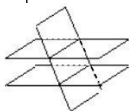
Positions relatives de deux droites :

d et d' sont non coplanaires	d et d' sont coplanaires	
Aucun plan ne les contient toutes les deux.	Elles sont sécantes.	Elles sont parallèles.
Leur intersection est vide.	Elles ont un seul point en commun.	Elles sont strictement parallèles ou confondues.

Positions relatives de deux plans :

Propriété d'incidence :

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles.



P_1 et P_2 sont parallèles	P_1 et P_2 sont sécants	
P_1 et P_2 confondus $P_1 = P_2$ 		
	P_1 et P_2 sont strictement parallèles Il existe deux droites sécantes de P_1 et deux droites sécantes de P_2 parallèles deux à deux.	Leur intersection est une droite.

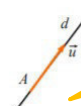
Positions relatives d'une droite et d'un plan :

On définit les **vecteurs de l'espace** comme les vecteurs du plan. Les propriétés et les règles sont identiques.

d et P sont parallèles	d et P sont sécants	
d est contenue dans P Une droite d est parallèle à un plan P si, et seulement si, il existe une droite d' de P parallèle à d .	d est strictement parallèle à P	Leur intersection est un point unique.

Interprétation vectorielle des droites de l'espace :

Soit d une droite. On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d . Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. $(A; \vec{u})$ représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.



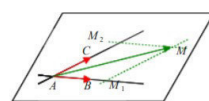
Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Interprétation vectorielle des plans de l'espace :

Deux plans ayant même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.

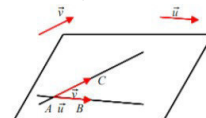
Plan défini par trois points :

Soit A , B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.



Plan défini par un point et un couple de vecteurs non colinéaires :

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. On note $(A; \vec{u}, \vec{v})$ ce plan. $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



- On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) , ou qu'ils définissent la **direction** du plan (ABC) , ou que le plan (ABC) est **dirigé** par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** des vecteurs du plan (ABC) .
- Si on peut écrire un vecteur $\vec{w}$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$, on dit que $\vec{w}$ s'exprime comme une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- La seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale au vecteur nul est celle (dite triviale) dont tous les coefficients sont nuls. On dit que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **linéairement indépendants**.

Vocabulaire à connaître :

Droites et plans parallèles :

Une droite d et un plan P sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur $\vec{w}$ de d est un vecteur du plan P , ce qui signifie que l'on peut exprimer $\vec{w}$ comme une **combinaison linéaire** de deux vecteurs directeurs de P .

Vecteurs coplanaires :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ..., de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'un point O quelconque et les points A , B , C , ..., définis par $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$, $\vec{OC} = \vec{w}$, ..., sont coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Propriété :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que : $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** et forment une **base** des vecteurs de l'espace.

Base des vecteurs de l'espace :

Repère de l'espace :

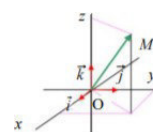
x , y et z sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M .

Soit O un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace.

A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On dit que $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Propriété :

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, $A(x; y; z)$ et $B(x'; y'; z')$ deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$.
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{cases}$
- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$.
- Le milieu I de AB a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$.

Positions relatives

Ex 3-1 : Vrai ou faux

Dans l'espace :

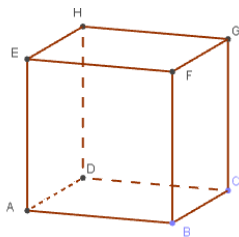
- 1) Trois droites concourantes (qui se coupent en un même point) sont coplanaires.
- 2) Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles.
- 3) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
- 4) Une droite et un plan parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
- 5) Une droite et un plan parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

Pour les exercices 2, 3 et 4, on considère le cube ci-dessous :

Ex 3-2 : Entre deux droites

Dans chacun des cas, donner la position des droites :

- 1) (AB) et (CG)
- 2) (AF) et (GH)
- 3) (AC) et (FH)
- 4) (CE) et (DF)
- 5) (BH) et (AE)



Ex 3-3 : Entre une droite et un plan

Dans chacun des cas, donner la position de la droite et du plan :

- 1) (AB) et (CDH)
- 2) (AC) et (BDF)
- 3) (BG) et (CDE)
- 4) (AG) et (CFH)
- 5) (BC) et (FAD)
- 6) (AB) et (ACD)

Ex 3-4 : Entre deux plans

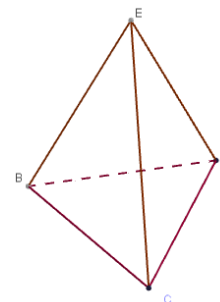
Dans chacun des cas, donner la position des plans :

- 1) (ABC) et (EGH)
- 2) (ABG) et (CDE)
- 3) (CAF) et (DGH)
- 4) (FHC) et (BDE)
- 5) (FAH) et (BCG)

Ex 3-5 : Dans un tétraèdre

Dans chacun des cas, étudier les positions des droites et plans.

- 1) (EB) et (CD)
- 2) (EC) et (BCD)
- 3) (EBC) et (ECD)
- 4) (EC) et (BD)



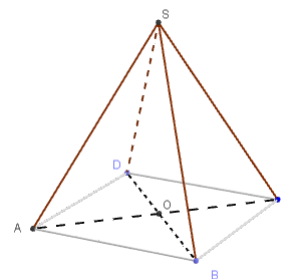
Ex 3-6 : Dans une pyramide – intersections

Soit SABCD une pyramide à base carrée.

O est le centre du carré ABCD.

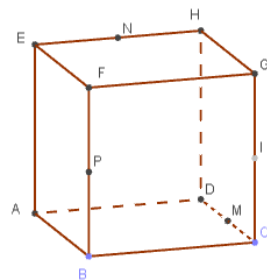
- 1) Déterminer l'intersection de (SAB) et (SBC).
- 2) Déterminer l'intersection de (SAC) et (SBD).
- 3) Étudier la position de (SB) et (AC).
- 4) Déterminer l'intersection de (SAB) et (SCD).

On pourra utiliser le **théorème du toit** . (cf ex 3-13)



Ex 3-7 :

Dans le cube ci-contre, M, N et P sont les milieux respectifs de [CD], [EH] et [BF]. Dans chacun des cas, étudier les positions relatives de :



1) (MN) et (GH)

2) (MP) et (DF)

3) (NP) et (CDG)

4) (EM) et (BFG)

5) (AMN) et (BCG)

6) (MPG) et (ADE)

Ex 3-8 : Droites coplanaires

Dans le cube de l'Ex 3-7 on note I le milieu de [CG]. Dire si les droites sont coplanaires ou non ?

1) (BC) et (EH)

2) (AG) et (BH)

3) (AG) et (EI)

4) (BH) et (EI)

Ex 3-9 : Utilisation des symboles mathématiques

On considère le cube de l'Ex 3-7 .

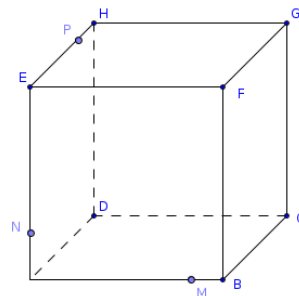
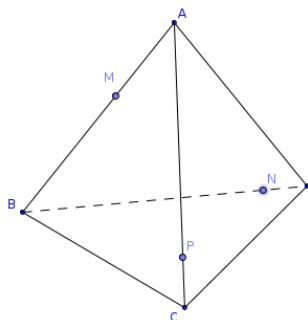
Compléter, en utilisant les symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ et $\not\subset$.

- 1) N ... (EH) 2) A ... (EPM) 3) (BM) ... (ABC) 4) (PD) ... (EFD)
5) B ... (EGP) 6) M ... (NDC) 7) (MN) ... (EHD) 8) F... (ENG)

Ex 3-10 : Sections de solides

Dans chacun des cas, déterminer la section du solide par le plan (MNP).

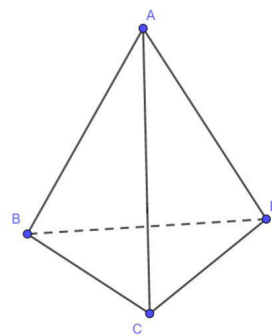
C'est à dire (quand elles existent) les intersections avec chacune des faces du solide donné.



Ex 3-11 : Intersections et points alignés

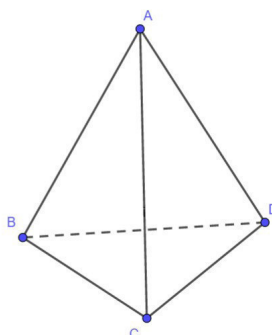
Soit un tétraèdre ABCD, de sommet A. Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [AB] et [AC] de telle sorte que (IJ) et (BC) ne soient pas parallèles.

1) Déterminer l'intersection de (IJ) et de (BCD).



2) En déduire l'intersection des plans (DIJ) et (BCD).

3) Que devient cette intersection si (IJ)//(BC) ?



4) Soit maintenant un point K sur [AD] , de telle sorte que (IK) et (BD) ne soient pas parallèles.

On note M, N et P les intersections respectives de (IJ) et (BC), de (IK) et (BD) et de (JK) et (CD).

Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

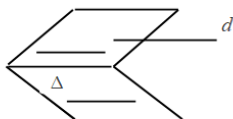
Ex 3-12 : Droites parallèles

Dans un cube ABCDEFGH, le point M appartient à l'arête [AB] et le point N est l'intersection de la droite (AD) avec le plan (FHM).

Démontrer que $(FH) \parallel (MN)$.

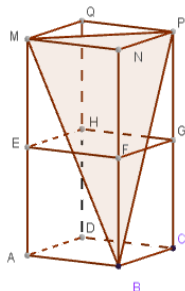
Théorème du toit

Si P et P' sont deux plans sécants et parallèles à une droite d , alors l'intersection de P et P' est parallèle à d .



Ex 3-13 :

Soit le parallélépipède suivant constitué de deux cubes superposés.



1) Déterminer l'intersection du plan (MPB) avec la droite (NG).

2) Déterminer l'intersection du plan (MPB) avec la droite (EN).

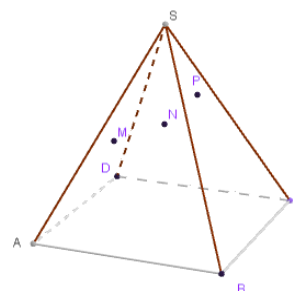
3) En déduire l'intersection du plan (MPB) avec le plan (ENG)

4) Démontrer que l'intersection obtenue à la question 3 est parallèle à la droite (EG).

Ex 3-14 :

Soit la pyramide SABCD dont la base est un parallélogramme.

M et N appartiennent au plan (SAB) et P appartient au plan (SBC).



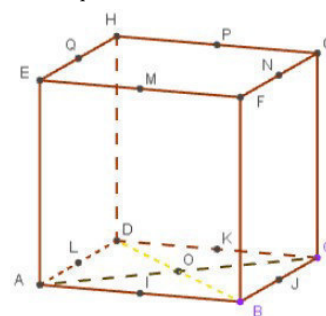
1) Déterminer l'intersection des plans (SAB) et (SCD) et l'intersection des plans (MNP) et (SAB).

2) En déduire l'intersection des plans (MNP) et (SCD).

3) Construire la section de la pyramide par le plan (MNP).

Vecteurs de l'espace

Dans les exercices 15 à 17, on considère la figure suivante. Sur chaque arête, on a indiqué le milieu de celle-ci.



Ex 3-15 : vecteur égaux - translations

1) Dans chaque cas, donner deux vecteurs égaux au vecteur donné :

a) $\vec{BF}$

b) $\vec{BC}$

c) $\vec{BM}$

d) $\vec{IL}$

e) $\vec{OL}$

2) Dans chaque cas, déterminer :

a) l'image de D par la translation de vecteur $\vec{AF}$.

b) l'image de I par la translation de vecteur $\vec{LP}$.

c) l'image de D par la translation de vecteur $\vec{PN}$.

Ex 3-16 : Trouver le point manquant – combinaisons linéaires

Compléter les égalités suivantes en utilisant les points de la figure :

- 1) $\vec{A...} = \frac{1}{2} \vec{AD}$ 5) $\vec{B...} = \vec{BC} + \vec{BF}$ 9) $\vec{B...} = \frac{1}{2} \vec{BC} + \vec{CG}$
- 2) $\vec{I...} = -\vec{IA}$ 6) $\vec{...H} = \vec{BD} + \vec{BF}$ 10) $\vec{A...} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{BF} - \vec{BA}$
- 3) $\vec{B...} = 2 \vec{EQ}$ 7) $\vec{B...} = \vec{BA} + \vec{DH}$ 11) $\vec{B...} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BF}$
- 4) $\vec{H...} = -2 \vec{BI}$ 8) $\vec{B...} = \vec{CK} + \vec{DH}$ 12) $\vec{L...} = \vec{HG} - \frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{CP}$

Ex 3-17 : Décomposer un vecteur dans une base

Décomposer les vecteurs $\vec{AC}$, $\vec{BP}$, $\vec{AG}$ et $\vec{MC}$ dans la base $(\vec{DA}, \vec{DH}, \vec{DC})$

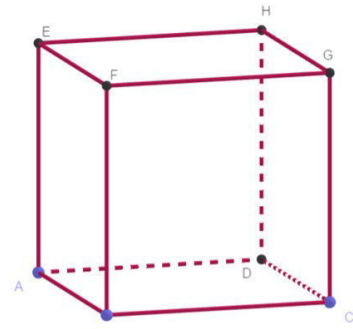
Ex 3-18 : Relation de Chasles

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.
Montrer que $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{DC}$

Ex 3-19 : Représenter des combinaisons linéaires

Sur la figure ci-dessous, représenter les points :

- a) I défini par $\vec{AI} = \vec{BF} + \frac{1}{2} \vec{BC}$
- b) J défini par $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AE}$
- c) K image de I par la translation de vecteur $\vec{EB}$
- d) L défini par $\vec{DL} = \frac{1}{2} \vec{DA} + \frac{1}{2} \vec{DC} + \frac{1}{2} \vec{DH}$
- e) M image de C par la translation de vecteur $\frac{3}{4} \vec{AE}$



Points alignés, parallélisme

Ex 3-20 : Alignement

Soit A, B et C trois points non alignés et les points D et E définis par :

$$\vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AB} \text{ et } \vec{BE} = 3 \vec{AC} - 2 \vec{AB}$$

En exprimant les vecteurs $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, montrer que C, D et E sont alignés.

Ex 3-21 : Parallélisme de droites et vecteurs directeurs

Dans le triangle ABC, I est le milieu du segment [AC] et les points D et E sont définis par $\vec{AD} = 3 \vec{AB}$ et $\vec{BE} = 2 \vec{BC}$.

1) Exprimer les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{DE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.

2) En déduire que $\vec{BI}$ est un vecteur directeur de (DE).
Que peut-on en déduire pour les droites (BI) et (DE) ?

Ex 3-22 : Points alignés

Dans l'espace, on considère les points A, B, C, D et E tels que

$$\vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AB} - \frac{2}{3} \vec{BC} \text{ et } \vec{AE} = x \vec{AB} + \vec{BC}.$$

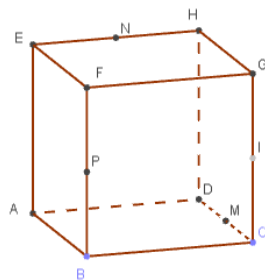
Déterminer la valeur du réel x pour que les points A, D et E soient alignés.

Vecteurs coplanaires – bases des vecteurs de l'espace

Ex 3-23 :

On considère la figure suivante.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils coplanaires ?



2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires.

3) Démontrer que $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FH}$ forment une base.

4) Montrer que les points M, P et un point quelconque Q sont coplanaires.

5) Montrer que $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

6) Montrer que $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

7) Déterminer la décomposition des vecteurs ci-dessous dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

a) $\overrightarrow{DG}$

b) $\overrightarrow{BH}$

c) $\overrightarrow{AG}$

Ex 3-24 : Bases des vecteurs de l'espace

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}.$$

1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Peut-on trouver des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$?

3) Peut-on dire que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs ?

Ex 3-25 : Points coplanaires ?

Soit un tétraèdre ABCD, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1) Déterminer la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.

2) Démontrer que $2\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JI}$.

3) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$?

4) Que peut-on en déduire pour les points D, I, J et F ?

Ex 3-26 : Parallélisme de plans et vecteurs directeurs

Soit un tétraèdre ABCD et les points E et F définis par :

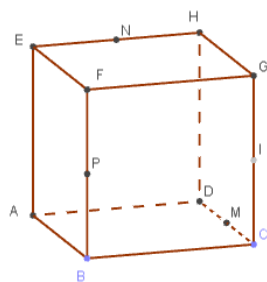
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1) En exprimant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$, démontrer que A, E et F ne sont pas alignés.

2) Démontrer que les plans (BCD) et (AEF) sont parallèles.

Repères de l'espace

Dans les exercices 27 à 29, on considère la figure suivante.



Ex 3-27 : Calculs de coordonnées

Dans le cube ci-contre, M, N, P et I sont les milieux respectifs de [CD], [EH], [BF] et [CG].

On considère le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées :

1) Des points E, P, I et B.

2) Des vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BH}$.

3) Du centre de la face EHDA.

4) Du centre Ω du cube.

5) Du vecteur $\overrightarrow{t} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ et du vecteur $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

Ex 3-28 : Milieux et points alignés

Déterminer les coordonnées des points S et T milieux respectifs des segments [NP] et [HB].

Les points S, T et C sont-ils alignés ?

Ex 3-29 : Recherche des coordonnées d'un point

Déterminer les coordonnées du point Q défini par $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{BG}$

Dans les exercices qui suivent, on considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace

Ex 3-30 : Droite et plan parallèles ?

Soit les points $A(-2;2;-1)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;0;0)$, $D(0;-4;1)$ et $E(-2;-1;-2)$

1) Montrer que A, B et C définissent un plan.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ et celles du vecteur $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

3) Que peut-on en déduire pour ces deux vecteurs et pour la droite (DE) ?

Ex 3-31 : Droite et plan parallèles ?

Soit les points $A(2;3;-1)$, $B(1;3;4)$, $C(0;1;-3)$, $D(2;0;0)$ et $E(-2;-2;8)$.

1) Montrer que A, B et C définissent un plan.

2) Peut-on trouver deux réels x et y tels que $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

3) Que peut-on en déduire pour la droite (DE) ?

Ex 3-32 : Points coplanaires ?

Soit les points $A(0;1;-1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$ et $D(7;3;-1)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

3) Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?

Ex 3-33 : Base des vecteurs de l'espace ?

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Peut-on trouver deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$?

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont linéairement indépendants . Forment-ils une base des vecteurs de l'espace ?

Ex 3-34 : Points coplanaires ?

Dans chacun des cas, étudier si les points sont coplanaires ou non .

1) A (4;5;2) , B(-3;-1;7) , C(9;5;-3) et D(1;2;0) .

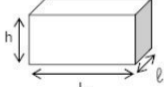
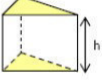
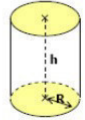
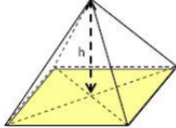
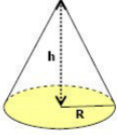
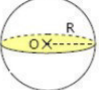
2) A (1;2;3) , B(1;3;2) , C(2;1;3) et D(2;3;1)

Ex 3-35 : Droites parallèles ou sécantes ?

Soit les points A (2;1;5) , B(4;2;4) , C(3;3;5) et D(0;3;7) .
1) Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles.

2) Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.

Volume de quelques solides

Le cube  Volume = c^3	Le pavé droit (parallélépipède rectangle)  Volume = $L \times l \times h$	Le prisme droit  Volume = aire de la base $\times h$	Le cylindre (de révolution)  Volume = $\pi \times R^2 \times h$
La Pyramide  Volume = $\frac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$	Le cône de révolution  Volume = $\frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$	La sphère – La boule  Volume = $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$	

Les cinq polyèdres réguliers convexes (solides de Platon)

Tétraèdre	Hexaèdre ou Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
				

Chapitre 4 - LIMITES DE FONCTIONS

1) LIMITE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

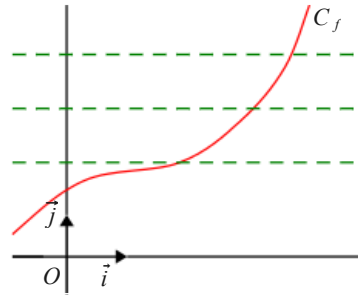
A) LIMITE INFINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ où a est un réel.
Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, « les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande,

Remarques :

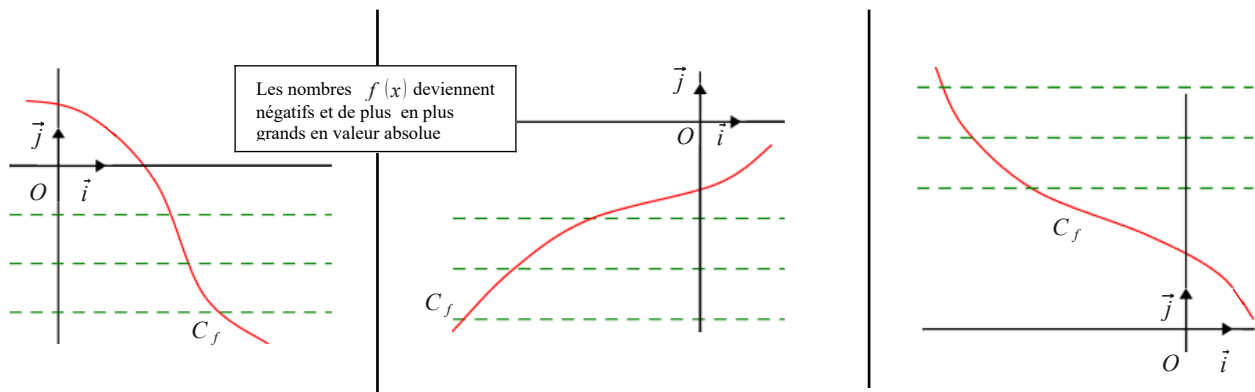
- De manière plus mathématique (moins intuitive ...) :
Tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout réel $M > 0$, il existe un réel m tel que, si $x > m$, alors $f(x) \in]M; +\infty[$

- On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exemples à connaître : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On définit de la même façon ...



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b]$

Remarque :

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :

B) LIMITE FINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ où a est un réel et soit L un réel donné.

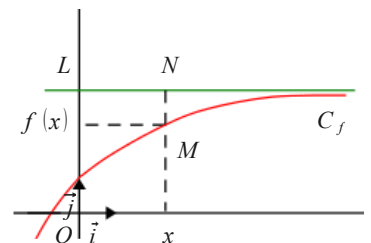
- Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, « les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

- On dit que la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0. La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y = L$.



Remarque :

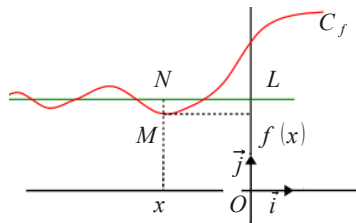
De manière plus mathématique (moins intuitive ...) :

Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'il soit) il existe un réel m tel que, si $x > m$, alors $f(x) \in]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$.

On définit de la même façon :

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $-\infty$.

Exemples à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

La courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Remarque :

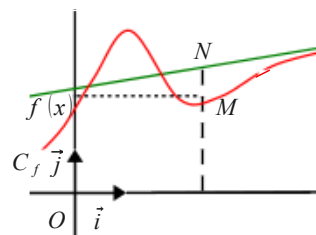
Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$...)

C) ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition :

Soit a ($a \neq 0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère. Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad (\text{respectivement} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0)$$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :

Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe possède une asymptote. (c'est le cas de la fonction carrée)

2) LIMITE EN a (avec a réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a \in D_f$
- ou a est une borne de D_f

A) LIMITE INFINIE EN a ET ASYMPTOTE VERTICALE

Définition :

Soit f une fonction.

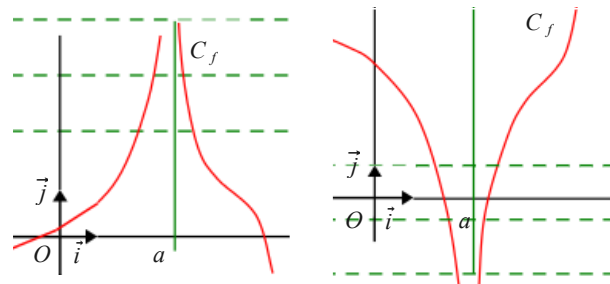
- Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , « **les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut** ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f .



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe C_f finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

Remarque :

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites « d'un seul côté de a ».

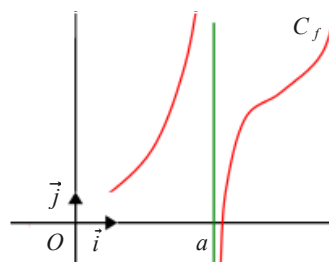
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a** et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.



Dans ce cas

B) LIMITE FINIE EN a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation en première.
La notion de limite finie en a est identique ...

Définition :

Soit f une fonction telle que a soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df et soit L un réel donné.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a « les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L ».

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive ...) :
Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $(\varepsilon > 0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$.

- On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée ... et des composées de ces fonctions.

Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

Exemples : $\lim_{x \rightarrow 3} \sin(3x + 4) =$, $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 3} =$

Attention : Comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite finie en tout point de leur ensemble de définition. (la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes...)

3) OPÉRATION SUR LES LIMITES

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f$ et $\lim g$ les limites de f et de g , toutes les deux en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- Limite de kf (où k est un réel donné)**

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

- Limite de $f + g$**

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

• **Limite de $f \times g$**

$\lim f$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f \times g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h : x \mapsto (x+2)\sqrt{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

• **Limite de $\frac{f}{g}$**

$\lim f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où la limite de g n'est pas nulle

Cas où la limite de g est nulle

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^-$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \mapsto \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Propriété : admise

Soit f , g et h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.
Chacune des lettres a , b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ et si $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

Dans la pratique, on cherche d'abord la limite b de h en a , puis la limite de g en b .

Preuve intuitive : cas où a , b et c sont des réels.

On a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$. Ainsi, lorsque x tend vers a , les nombres $h(x)$ se rapprochent de b .

Posons $h(x) = X$. On a alors $f(x) = g(X)$.

Lorsque les nombres X tendent vers b , alors les nombres $g(X)$ se rapprochent de c , puisque $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} g(h(x)) = c$

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Remarque :

Le procédé est identique pour une suite définie par $u_n = g(v_n)$. (par exemple la suite définie par $u_n = \sqrt{2n^2 - 3n + 5}$)

5) THÉORÈMES DE COMPARAISON

A) THÉORÈME DES GENDARMES

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement : *admis*

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]b; +\infty[$ où b est un réel et soit L un réel donné.

Si pour tout $x \in]b; +\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$ et en un réel a .

Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{\cos x}{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

B) COMPARAISON À L'INFINI

Propriété :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]b; +\infty[$ où b est un réel.

- Si pour tout $x \in]b; +\infty[$ $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in]b; +\infty[$ $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$.

Preuve :

Soit $M > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, il existe donc un réel m tel que, si $x > m$, alors $g(x) \in]M; +\infty[$.

Or $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que, si $x > m$, alors $f(x) \in]M; +\infty[$.

Ce résultat est vrai pour tout réel $M > 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple :

Soit $f(x) = x - \sin x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6) RETOUR SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

A) LIMITES EN L'INFINI

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Preuve : exigible

•

•

B) CROISSANCE COMPARÉE

Propriété :

Pour tout entier naturel n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Preuve : exigible

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}}$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

x	
$f'_n(x)$	
f_n	

Remarque :

- En prenant $n=0$, on retrouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- En prenant $n=1$, on obtient une limite importante $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Pour tout réel $M > 0$, les nombres $f(x)$ finissent par se retrouver dans l'intervalle $]M; +\infty[$

Limites infinie en l'infini :

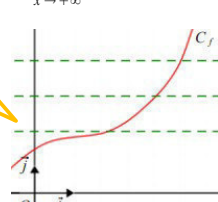
Géométriquement :

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, la courbe finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :

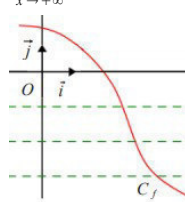
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



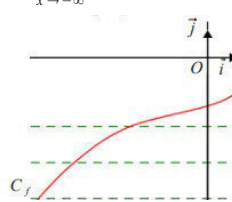
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



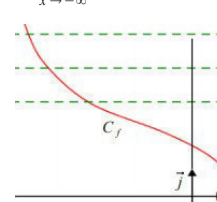
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

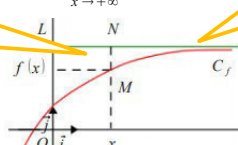
De la même façon

Limites finie en l'infini :

Géométriquement :

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0. La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y = L$.

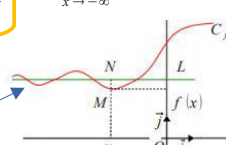
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$

Pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$

Asymptote horizontale :

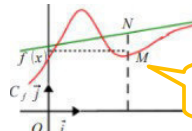
La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$. (ou en $-\infty$)

Asymptote oblique :

(hors programme, mais intéressant)

Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est **asymptote oblique** à C_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

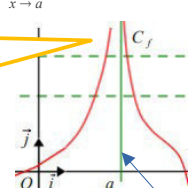
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad (\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0)$$



La distance MN tend vers 0

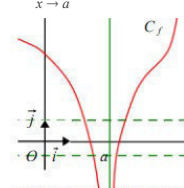
Limite infinie en un réel a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



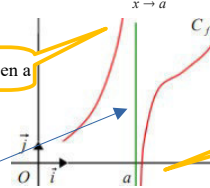
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



Limite à gauche en a

Limite à droite en a

f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures à a
 f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures à a

Asymptote verticale :

la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f

Limite finie en un réel a :

$a \in D_f$ ou est une borne de D_f

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Pour tout $(\varepsilon > 0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$

Continuité en a :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, on dit que la fonction f est **continue en a**.

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée ...et des composées de ces fonctions.

Opérations sur les limites :

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Attention aux formes indéterminées : « $+\infty - \infty$ » « $0 \times \infty$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ » « $\frac{0}{0}$ »

Limite d'une fonction composée :

Soit f , g et h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$. Chacune des lettres a , b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ et si $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

Dans la pratique : Soit $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
Posons $X = 2x^2 - 3x + 5$. On a alors $f(x) = \sqrt{X}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

On en déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème des gendarmes :

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$ et en un réel a . Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]b; +\infty[$ où b est un réel et soit L un réel donné.

Si pour tout $x \in]b; +\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI) :

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]b; +\infty[$ où b est un réel.

• Si pour tout $x \in]b; +\infty[$ $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Si pour tout $x \in]b; +\infty[$ $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Limites de fonctions

Ex 4-1 : Vrai ou faux

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors :
- a) Il existe un réel x tel $f(x) > 10^9$
- b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$
- c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x > m$, alors $f(x) > A$
- d) $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $x > m \Rightarrow f(x) > 10^4$
- 2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -0,001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m; +\infty[$ sur lequel f est strictement négative.
- 4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Ex 4-2 : Comprendre la définition

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle ... finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \dots$ »

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Ex 4-3 : Conjecturer une limite – piéger la calculatrice

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto 10^{-3}x^2 - 10^2x$

2) $g : x \mapsto \frac{3x^2 - 2}{10^3x - 4}$

3) $h : x \mapsto 10x^3 - 0,01x^4$

Ex 4-4 : Limite et position relative par rapport à une droite

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y=1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Limite en a (avec a réel)

Ex 4-5 : Comprendre la définition

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle ... finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \dots$ »

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +4$
- c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

Ex 4-6 : Vrai ou faux

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d : y = -1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d: y = -1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, alors $d: x = -1$ est asymptote verticale à C.

Ex 4-7 : Conjecturer une limite

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f: x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ex 4-8 : Asymptotes

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

Opérations sur les limites

Ex 4-9 : Vrai ou faux

1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ex 4-10 : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + x + \frac{1}{x} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x^2} + 3x \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x^2} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(3x - 1 + \frac{1}{x-4} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$

9) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4 - x^2 + \frac{4}{4-x^2} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{2}{1-2x} \right)$

Ex 4-11 : Formes indéterminées

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = -\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$

c) $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 4-12 : Logique

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = 0$, il faut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2) Pour que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = 0$, il suffit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Ex 4-13 : Fonctions polynômes

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme

$P(x) = -8x^3 + 14x^2 + 8x + 4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

$Q(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{x^3}{2}$ et $R(x) = 1 - 4x + 5x^2$

Ex 4-14 : Fonctions rationnelles

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle

$f(x) = \frac{3x+2}{4x^2-5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 5}{2x^3 - 5} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{(x-5)^4}{(3x^2 - 5)^2}$$

3) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Ex 4-15 : Changement de forme - Asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par $f(x) = \frac{6x - 25}{2x - 8}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq 4$,

$$f(x) = a + \frac{b}{2x - 8}.$$

Ex 4-16 : Asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Ex 4-17 : Déterminer a , b et c ...

Soit $f: x \mapsto a + \frac{b}{x - c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	-1	-4	$-\infty$	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner.

2) À partir de l'expression $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

Ex 4-18 : Lever l'indéterminée

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{x+2}$

Limite d'une fonction composée

Ex 4-19 : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + 2x^2 - 7}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}+2}$

Ex 4-20 : Lever l'indéterminée

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 3})$ (factoriser par x)

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 3})$ (factoriser par x)

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$ (penser à l'expression conjuguée)

Théorèmes de comparaison

Ex 4-21 : Vrai ou faux

1) Si pour tout réel $x \leq 0$, $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2) Si pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3) Si pour tout réel $x \geq 1$, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Ex 4-22 : Limite par encadrement

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \neq 0$,

$$3 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2}.$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-23 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x^2} \geq \frac{1}{5}$ et $\frac{g(x)}{x} \geq \frac{1}{5}$.

Quelle(s) limite(s) peut-on déduire pour les fonctions f et g ?

Ex 4-24 : Deux méthodes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

1) Déterminer une fonction g telle que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Retrouver cette limite en utilisant la limite d'une fonction composée.

Ex 4-25 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x ,
 $x \leq f(x) \leq x+1$.

1) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Peut-on grâce aux hypothèses dire si f admet une limite en 0 et si oui laquelle ?

2) Déterminer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-26 :

Soit f la fonction définie sur $[5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geq 5$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leq x-5 \leq x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Avec la fonction exponentielle

Ex 4-27 : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^x - 4x^4 + x - 5$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^4}{2x^3 - 5e^x}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2x$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x^4}{2 - 5e^x}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 - 2x + 1}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 4-28 : Baccalauréat S centres étrangers juin 2011 – Ex 4-4 (extrait)

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, leur tracé est donné en annexe.

1. Étude des fonctions f et g

- Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
- Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

Ex 4-29 : Baccalauréat S Asie juin 2010 – Ex 4-4 (extrait)

Calculs de limites avec la fonction exp - asymptote

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?

Ex 4-30 : Baccalauréat S Polynésie sept 2010 – Ex 4-4 (extrait)

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g .
3. Donner le tableau de variations de g .

Partie A : Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathcal{C}_n$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
 - a. Étudier le sens de variation de f_0 .
 - b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
 - a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x .
 - b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
 - c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geq 2$
 - a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x , on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

- b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- c. Calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Ex 4-31 : Baccalauréat S centres étrangers juin 2009 – Ex 4-4 (extrait)

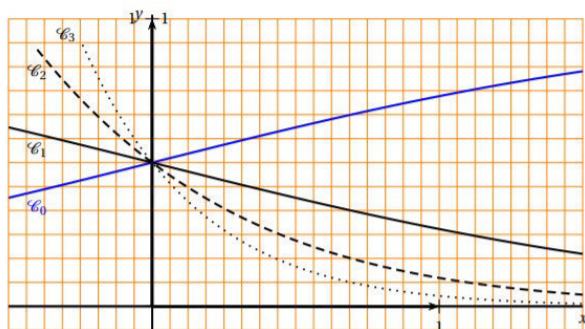
Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit n un entier naturel.

On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Chapitre 5 - DÉRIVATION : COMPLÉMENTS

Dans ce chapitre j'utilise déjà les fonctions $\ln$, $\cos$ et $\sin$ qui seront étudiées en détail plus tard.

1) LA NOTATION : $v \circ u$

Définition :

Soit une fonction v , définie de E dans F , et une fonction u , définie de F dans G , la **composée** de v et u (on dit aussi la composée de v suivie de u) est la fonction définie de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre $v(u(x))$

On note $v(u(x)) = (v \circ u)(x)$

On lit « v rond u »

Exemple : Soit les fonctions v et u définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x - 1$ et $u(x) = x^2$

Les fonctions v et u étant définies sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour $v \circ u$ et $u \circ v$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(v \circ u)(x) = \quad \quad \quad \text{et} \quad (u \circ v)(x) =$$

Exemple : Soit les fonctions v et u définies respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ par $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = -x$

$$\bullet \quad x \in D_{v \circ u} \Leftrightarrow$$

Pour tout $x < 0$, on a :

$$(v \circ u)(x) =$$

$$\bullet \quad x \in D_{u \circ v} \Leftrightarrow$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$(u \circ v)(x) =$$

Remarques :

- En général (sauf exception), on a $v \circ u \neq u \circ v$ et les ensembles de définition peuvent être totalement différents.

- On peut composer une fonction avec elle-même : on note $f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3$

- On admet le résultat bien pratique et très intuitif : « la composée de deux fonctions croissantes est croissante »

Propriété : admise

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J .

Alors la fonction f définie par $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I , on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Remarque : Cette propriété est proposée sur un intervalle. Elle reste vraie sur des réunions d'intervalles.

Quelques situations classiques : (présentées sans les problèmes de définition et de dérivabilité)

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = [u(x)]^n$ (n un entier non nul)	$f'(x) = n u'(x) [u(x)]^{n-1}$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x^3}$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x^2 + 1)^5$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = v(u(x))$ où $v : x \mapsto \sin x$ et $u : x \mapsto \frac{1}{x}$

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $v'(x) =$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $u'(x) =$

(Pour tout $x \neq 0$, on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$... Dans la pratique, quand la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$, cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) =$

2) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Sa fonction dérivée f' s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f .

Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f'' . f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f .

Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit **la fonction dérivée n -ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemple : $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

3) FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES

A) DÉFINITIONS

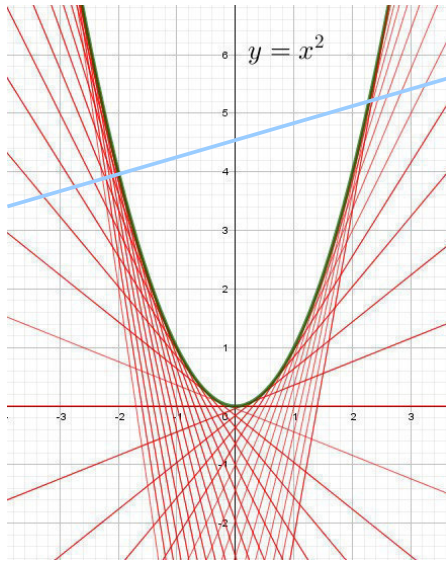
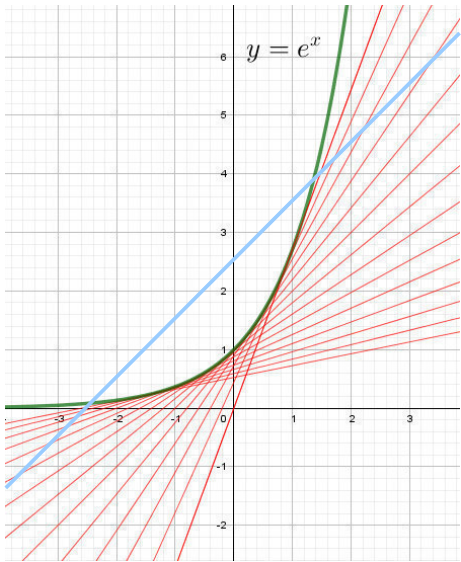
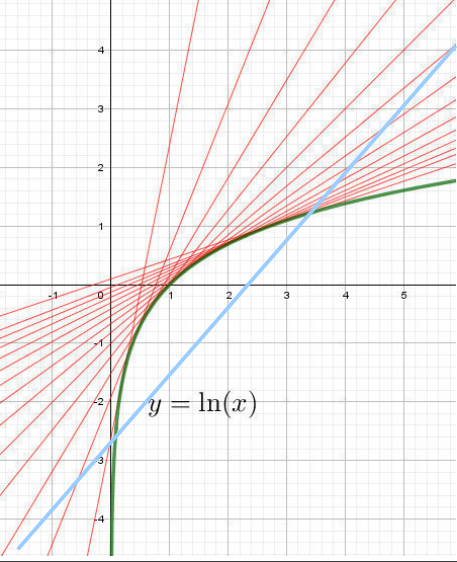
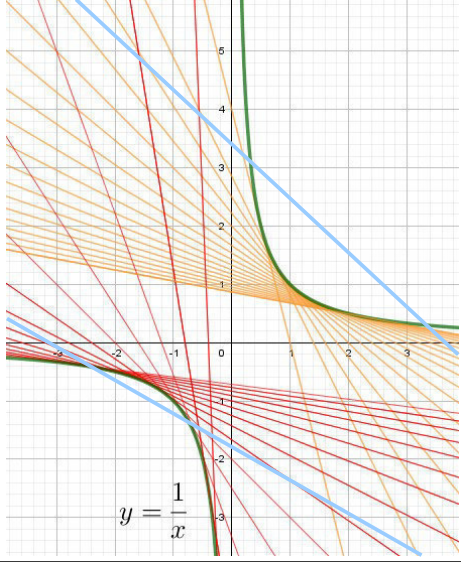
Définition :

- Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.
- Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.

Autre définition :

- Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est	La fonction $f : x \mapsto e^x$ est
	
La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est	La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est
	

B) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I** .
- f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I** .

C) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE SECONDE

La dérivée de la dérivée étant la dérivée seconde, on en déduit facilement cette nouvelle propriété ...

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I** .
- f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I** .

Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I , alors on dit que f est **deux fois dérivable** sur I .

Preuve : exigible

Montrons que si la dérivée seconde f'' est positive sur un intervalle I , alors la courbe représentative C_f de f est au-dessus de chacune de ses tangentes, ce qui signifie que f est convexe.

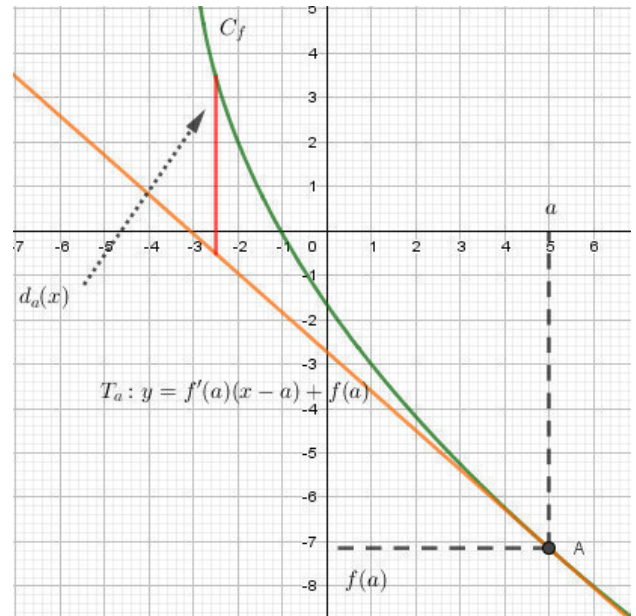
Soit $a \in I$, $A(a; f(a))$ un point de C_f et $T_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ la tangente à C_f au point A.

On note, pour tout $x \in I$:

$$g_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{et} \quad d_a(x) = f(x) - g_a(x) =$$

d_a est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $d_a'(x) =$

x	
$d_a'(x)$	
d_a	



On en déduit que C_f est au-dessus de la tangente T_a .

Ceci étant vrai, pour tout réel $a \in I$, on en peut donc dire que C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

4) POINT D'INFLEXION

A) DÉFINITION

Définition :

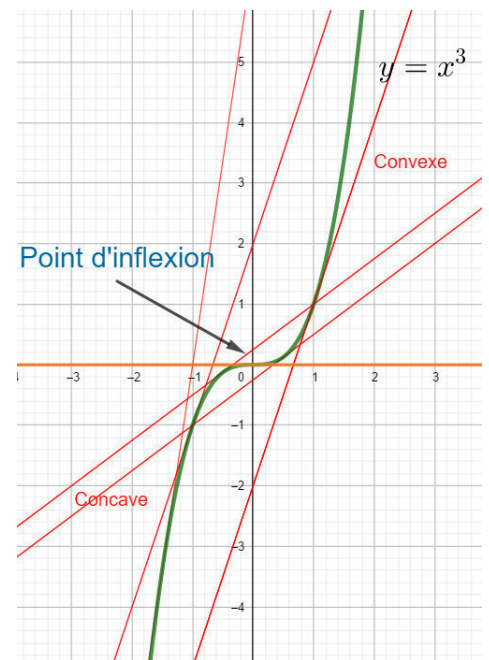
Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente

B) LIEN AVEC LA CONVEXITÉ

Propriété :

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.



Exemple : Mise en évidence par le calcul du point d'inflexion de la fonction $f: x \mapsto x^3$.

La fonction cube est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a : $f'(x) = 3x^2$
 f' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x sa dérivée seconde est $f''(x) = 6x$

La fonction change de convexité en 0, la courbe admet donc un point d'inflexion qui est l'origine du repère.

En général $v \circ u \neq u \circ v$

$$f \circ f = f^2, f \circ f \circ f = f^3$$

La composée de v et u :

Soit une fonction v , définie de E dans F , et une fonction u , définie de F dans G , **la composée** de v et u (on dit aussi la composée de v suivie de u) est la fonction définie de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre $v(u(x))$. On note $v(u(x)) = (v \circ u)(x)$

On lit « v rond u »

Dérivée :

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J . Alors la fonction f définie par $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I , on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Quelques situations classiques :

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = [u(x)]^n$ (n un entier non nul)	$f'(x) = n u'(x) [u(x)]^{n-1}$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

Dérivée n -ième :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première (ou d'ordre 1) de f .

Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f'' . f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f .

Par itération, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit **la fonction dérivée n -ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Fonction convexe :

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I :

• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

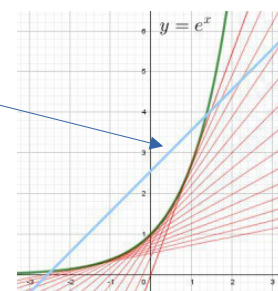
• si sa représentation graphique est entièrement **située au-dessus de chacune de ses tangentes**.

Lien avec la dérivée :

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I** .

Lien avec la dérivée seconde :

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I** .



Fonction concave :

Une fonction f , définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I :

• si sa représentation graphique est entièrement **située au-dessus de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

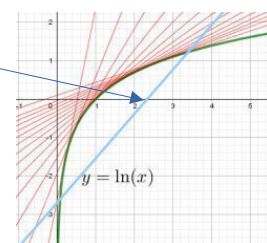
• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses tangentes**.

Lien avec la dérivée :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I** .

Lien avec la dérivée seconde :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I** .



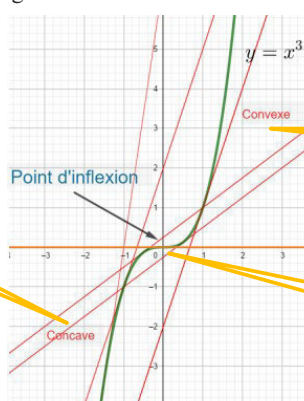
Point d'inflexion :

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Lien avec la dérivée :

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.



$$f'' < 0$$

$$f'' > 0$$

La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 0.

Nombre dérivé d'une fonction en un réel a : quelques rappels

Ex 5-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

2) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a .

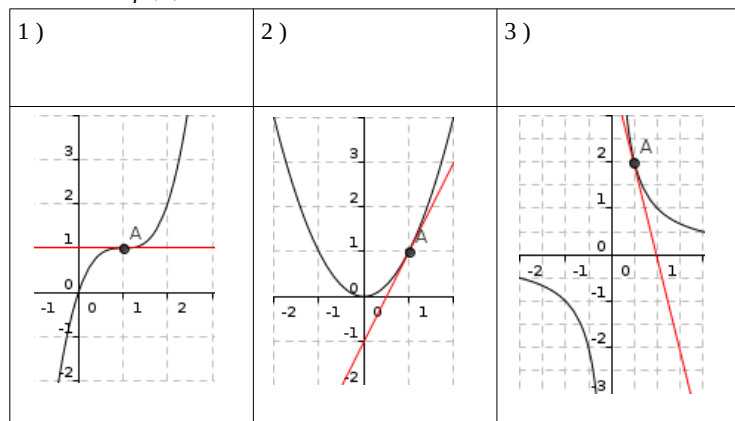
3) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

4) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ex 5-2 : Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .

Déterminer $f'(a)$.



Ex 5-3 : Calculer le nombre dérivé

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f: x \mapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f: x \mapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f: x \mapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f: x \mapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f: x \mapsto |x-5|$, $a=3$

Formules de dérivation : quelques rappels**Ex 5-4 :**

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel.

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Dérivable sur :
1)	$f: x \mapsto k \quad (k \in \mathbb{R})$		
2)	$f: x \mapsto x$		
3)	$f: x \mapsto \sqrt{x}$		
4)	$f: x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)		
5)	ku		
6)	$u+v$		
7)	uv		
Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$			
8)	$\frac{1}{v}$		
9)	$\frac{u}{v}$		

Compléter :

Toute fonction polynôme est dérivable sur ...

Toute fonction rationnelle est dérivable sur ...

La notation $f \circ g$ ou $v \circ u$

Pour les exercices concernant les composées de fonctions, il faut toujours en premier lieu déterminer l'ensemble de définition de $f \circ g$ avant de donner une expression de $f \circ g(x)$

Ex 5-5 : Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

On considère les fonctions :

$$f: x \mapsto \frac{1}{x-3} \quad \text{et} \quad g: x \mapsto x+4$$

1) Déterminer $f \circ g$.

2) Déterminer $g \circ f$.

Ex 5-6 : La notation f^2

Dans chacun des cas ci-dessous définir f^2

1) $f: x \mapsto x$

2) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

3) $f: x \mapsto 4x-3$

Attention : Ne pas confondre cette notation avec la puissance d'une fonction pour la multiplication des fonctions.
Par exemple, $\sin^2$ désigne couramment le carré de la fonction sinus.
Généralement, le contexte de l'exercice, nous évite de faire cette confusion malheureuse.

Ex 5-7 : Trouver u et v

Dans chacun des cas, déterminer l'expression des fonctions v et u telles que $f = v \circ u$.

Dans cet exercice, on ne tient pas compte des ensembles de définition.

1) $f : x \mapsto \frac{4}{x-3} + 5$

2) $f : x \mapsto (2x-5)^2 - 3$

3) $f : x \mapsto -\frac{1}{(3-x)^2}$

4) $f : x \mapsto \sqrt{3x-5}$

5) $f : x \mapsto 3\sqrt{x}-5$

6) $f : x \mapsto e^{2x-5}$

7) $f : x \mapsto 2e^x - 5$

8) $f : x \mapsto e^{-x}$

Ex 5-8 : Dérivées de fonctions composées

Sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité, déterminer dans chacun des cas de l'exercice 7 les dérivées des fonctions u , v puis f .

1) $f : x \mapsto \frac{4}{x-3} + 5$: $v(x) = 4x + 5$ et $u(x) = \frac{1}{x-3}$

2) $f : x \mapsto (2x-5)^2 - 3$: $v(x) = x^2 - 3$ et $u(x) = 2x - 5$

3) $f : x \mapsto -\frac{1}{(3-x)^2}$: $v(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $u(x) = 3 - x$

4) $f : x \mapsto \sqrt{3x-5}$: $v(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = 3x - 5$

5) $f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 5$: $v(x) = 3x - 5$ et $u(x) = \sqrt{x}$

6) $f : x \mapsto e^{2x-5} : v(x)=e^x \text{ et } u(x)=2x-5$

7) $f : x \mapsto 2e^x-5 : v(x)=2x-5 \text{ et } u(x)=e^x$

8) $f : x \mapsto e^{-x} : v(x)=e^x \text{ et } u(x)=-x$

c) $h(x)=\sqrt{x} \text{ sur } [1;3]$

d) $i : x \mapsto (-2x+1)^3 \text{ sur } \mathbb{R}$

Dérivées successives

Ex 5-9 : Dérivées successives

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée. Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f : x \mapsto x^4-3x^3+2 \text{ sur } \mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0;+\infty[$

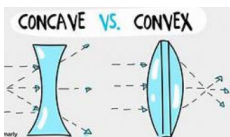
2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation. On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$...

Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

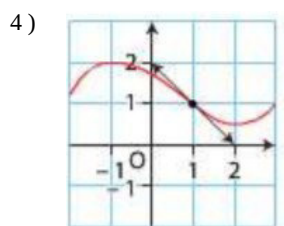
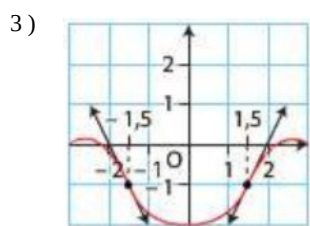
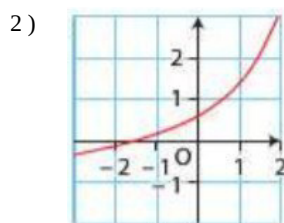
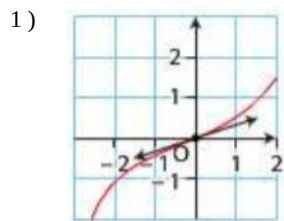
Convexité, concavité, points d'inflexion

Ex 5-10 : À partir d'une courbe

Pour chaque courbe, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. Préciser les éventuels points d'inflexion.



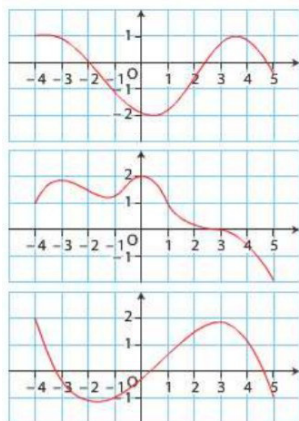
On considère que le comportement de la courbe se poursuit de manière identique en dehors de la fenêtre.



Ex 5-11 : À partir d'une courbe

Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4; -2]$ et sur $[4; 5]$
- f' s'annule au moins trois fois
- la représentation graphique de f admet quatre points d'inflexion.



Ex 5-12 : À partir d'un tableau de variation de f'

Voici le tableau de variation de la fonction f' d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	2	1

- 1) Déterminer le sens de variation de f
- 2) Déterminer la convexité de f
- 3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-13 : À partir du tableau de signe de f''

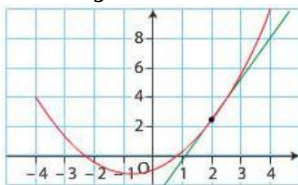
Voici le tableau de signe de la fonction f'' d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- 1) Déterminer le sens de variation de f'
- 2) Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses des éventuels points d'inflexion.
- 3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-14 : Position par rapport aux tangentes et inégalités

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

2) Pourquoi peut-on étendre ce résultat à $\mathbb{R}$?

3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \geq \frac{11}{4}x - 3$

4) Montrer alors que $x^2 \geq 4x - 4$

Ex 5-15 : Position par rapport aux tangentes et inégalités

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

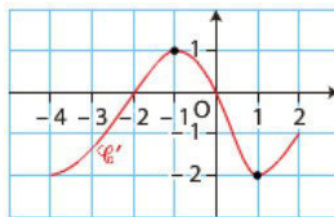
1) Rappeler la convexité de f .

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) En déduire que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Ex 5-16 : Convexité à partir de la courbe représentative de f'

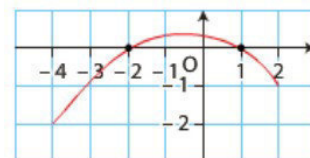
Dans un repère, on a tracé la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f' dérivable sur un intervalle $[-4; 2]$.
Déterminer, par lecture graphique, la convexité de f .



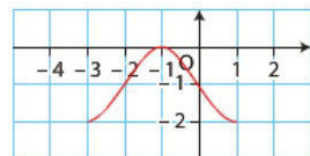
Ex 5-17 :

Dans chacun des cas, déterminer la convexité de la fonction et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1) f est une fonction deux fois dérivable sur $[-4; 2]$ dont la dérivée f'' est représentée ci-contre.



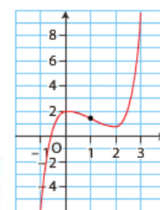
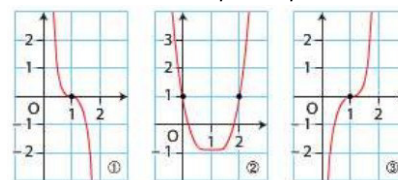
2) g est une fonction deux fois dérivable sur $[-3; 1]$ dont la dérivée g'' est représentée ci-contre.



Ex 5-18 : Lien entre les représentations graphiques de f et f''

Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1; 3]$.

Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente celle de la fonction dérivée seconde f'' de f ?



Étude du signe de f'' pour déterminer la concavité

Ex 5-19 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-20 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+2x^3+12x^2-8x-6$

1) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-21 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+1$

1) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-22 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}+7$

1) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-23 : Position par rapport aux tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$.

On note C_f sa courbe dans un repère.

Étudier la position des tangentes à C_f en 4 et en -4 par rapport à la courbe C_f .

Ex 5-24 : Famille de fonctions

Pour tout entier n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{1+e^x}+nx$$

On note C_n la courbe représentative de f_n .

Montrer que C_n admet un point d'inflexion pour tout entier n .

Ex 5-25 : Au moins deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx$ où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$.

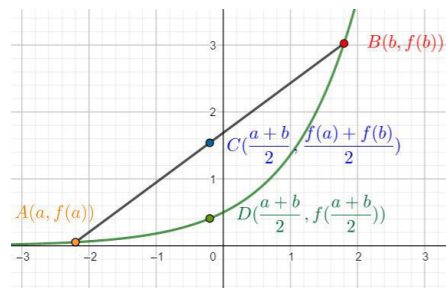
Déterminer à quelle condition la courbe représentative C_f de f dans un repère admet au moins deux points d'inflexion.

Ex 5-26 : Position par rapport aux sécantes et moyenne

1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, compléter les propriétés suivantes que nous allons seulement conjecturer.

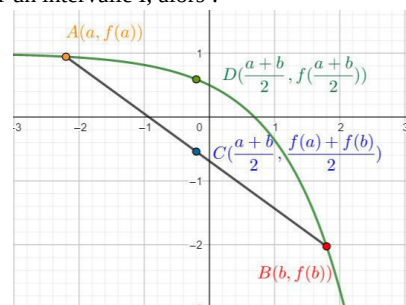
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I , alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq$$



- Si f est une fonction concave sur un intervalle I , alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq$$



2) Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$.

Dans chaque cas, démontrer l'inégalité en étudiant la convexité d'une fonction bien choisie.

a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

c) $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$

d) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 5-27 : Baccalauréat ES Métropole juin 2014 - Ex 5-4

Fonction exp – TVI - Convexité

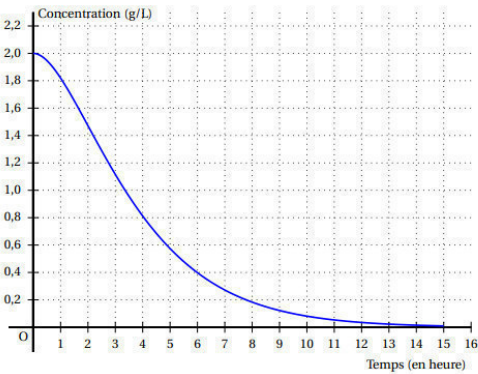
On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

- 1. la concentration à l’instant initial ;
- 2. l’intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.



B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l’intervalle $[0 ; 15]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d’heures écoulées depuis l’instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

- 1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
- 2. Justifier que l’équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l’intervalle $[0;15]$.
- 3. Déterminer un encadrement de α d’amplitude un dixième.
- 4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver ((x+2)*exp(-0.5*x))	$\exp(-0.5x) - 0.5 * \exp(-0.5x) * (x+2)$
2	deriver (exp(-0.5*x) - 0.5 * exp(-0.5*x) * (x+2))	$-\exp(-0.5 * x) + 0.25 * \exp(-0.5 * x) * (x+2)$
3	factoriser (-exp(-0.5 * x) + 0.25 * exp(-0.5 * x) * (x+2))	$(0.25 * x - 0.5) * \exp(-0.5 * x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l’intervalle $[0 ; 15]$ et préciser l’abscisse d’un éventuel point d’inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

- 1. On estime que le médicament n’est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
- 2. Au bout de combien d’heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Chapitre 6 - CONTINUITÉ

1) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

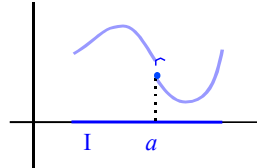
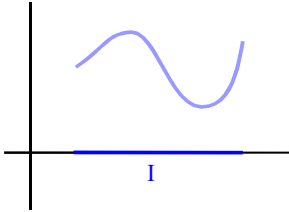
- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est continue en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I , si f est continue en tout réel a de I .

Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$$

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle I sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.

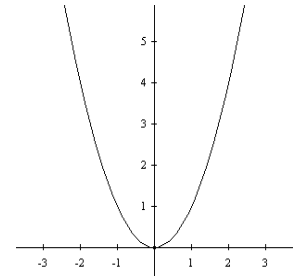
Une fonction n'est pas continue en un réel a lorsque la courbe a une discontinuité en a , elle fait un "saut".



Exemple 1 :

- La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout réel a de $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

On peut le justifier en démontrant que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a .



Exemple 2 :

- Considérons la fonction $x \mapsto E(x)$ appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x .

$$E(2,5) = \quad E(-2,4) = \quad E(1,9999) = \quad E(2) =$$

Si n est un nombre entier, alors $E(n) =$ et pour tout $x \in [n; n+1[$, on a $E(x) =$

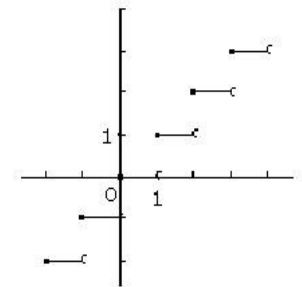
Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$

En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, $E(x)$ n'est pas très proche de $E(n)$.

La fonction "**Partie entière**" est une fonction dite "**en escalier**".

La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

Notations courantes : - calculatrices : $\text{int}(x)$ $\text{floor}(x)$ $\text{partEnt}(x)$ $\text{int } x$
- tableur : $\text{ent}()$



2) FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques :

- Les démonstrations de ces propriétés se font en utilisant les propriétés des limites.
- La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.
- Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

3) DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I .

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Preuve : non exigible

Si f est dérivable en a , alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Posons $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$

Il est alors immédiat que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0$

De plus, on a $f(a+h) - f(a) - f'(a) \times h = h \varepsilon(h)$ donc $f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + h \varepsilon(h)$

Les propriétés sur les limites permettent d'affirmer que $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + f'(a) \times h + h \varepsilon(h)) = f(a)$

Donc : $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La fonction f est donc continue en a

Attention :

La réciproque de la propriété est fausse :

4) IMAGE D'UNE SUITE CONVERGENTE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Définition :

Soit (u_n) une suite et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n) .

L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{n^2+1}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour tout entier naturel n , on a $u_n \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}$, par

Propriété :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel L et soit I un intervalle tel que $L \in I$ et pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en L , la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre $f(L)$.

Exemple : Retour sur l'exemple précédent

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$

Par ailleurs, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc

Ainsi la suite $(f(u_n))$ converge vers

Propriété : suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et soit une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel $L \in I$ alors $L = f(L)$.

Preuve : *non exigible*

(u_n) converge vers L , on a donc

On a aussi

, on a le résultat voulu, c'est à dire $f(L) = L$

5) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

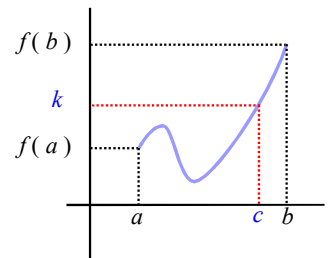
Propriété : *admise*

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et a et b deux réels de I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a **au moins** une solution c comprise entre a et b .



6) FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE – COROLLAIRE DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

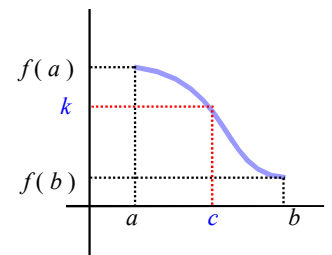
Propriété : *Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème des bijections*

Soit f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$), il existe **un et un seul** réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a **une unique** solution c comprise entre a et b .



Preuve : *non exigible*

La fonction f étant définie et continue sur $[a; b]$, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'appliquer et justifie l'existence d'au moins un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Supposons que f est strictement croissante sur $[a; b]$.

Soit $x \in [a; b]$

- si $x > c$, on a $f(x) > f(c)$ donc $f(x) > k$, donc $f(x) \neq k$
- si $x < c$, on a $f(x) < f(c)$ donc $f(x) < k$, donc $f(x) \neq k$

Donc pour tout $x \neq c$, on a $f(x) \neq k$

L'équation $f(x) = k$ a donc c pour unique solution dans $[a; b]$.

On raisonne de même dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a; b]$.

Remarques :

- Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle .

Par exemple :

- Si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a ; b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]a ; b]$.
- Si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $] -\infty ; a[$.

Attention : Si f est strictement décroissante il ne faut pas oublier d'inverser les bornes de l'intervalle image.

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et si $f(a) \leq k \leq f(b)$, alors l'équation $f(x)=k$ a une solution et une seule sur $[a ; b]$.
- Les théorèmes précédents permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.

On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton).

Continuité :

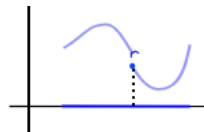
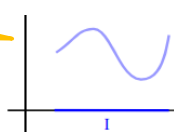
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle I sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.

Dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

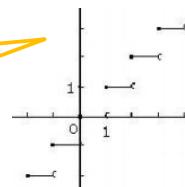
- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est **continue en a** , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I , si f est **continue** en tout réel a de I .



Une fonction n'est pas continue en un réel a lorsque la courbe a une discontinuité en a , elle fait un "saut".

Un exemple fameux de fonction non continue :

La fonction "Partie entière" (qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x) est une fonction dite "en escalier". La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.



Fonctions de référence :

La plupart des fonctions qui seront étudiées en terminale seront des fonctions continues.

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies. La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Dérivabilité et continuité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I .
Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

La réciproque de la propriété est fausse :
la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Image d'une suite convergente par une fonction continue :

Soit (u_n) une suite et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n) .

L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel L et soit I un intervalle tel que $L \in I$ et pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en L , la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre $f(L)$.

Propriété :

Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

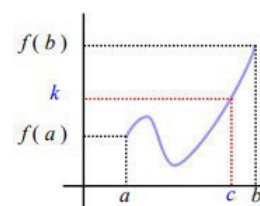
Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et soit une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) **converge** vers un réel $L \in I$ alors $L = f(L)$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et a et b deux réels de I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

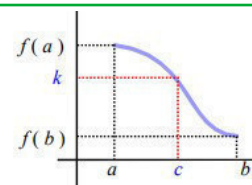


Corollaire du TVI :

Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle

Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$ si f est strictement décroissante), il existe **un unique réel** c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Attention :

Ces théorèmes permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions d'une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.

On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton)

Avec une Tinspire :



$$\text{Define } f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

Terminé

$$\text{nSolve}(f(x)=0, x, 1, 2)$$

1.46557123188

donne une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1; 2]$

Continuité : maîtriser le coursEx 6-1 : Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Si f est continue sur I , alors :

- 1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de C .
- 2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.
- 3) C se trace sans lever le crayon.
- 4) L'intervalle I est fermé.
- 5) La fonction inverse est continue sur $] -\infty; 0[$
- 6) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- 7) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalleEx 6-2 :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$ sur $I =]-\infty; 3[$

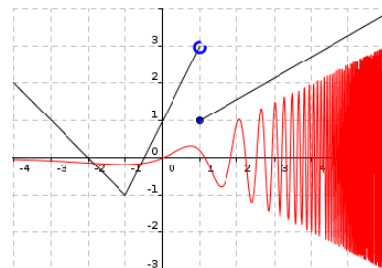
2) $f : x \mapsto 2|x| + \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$

3) $f : x \mapsto \frac{3x^3}{1-3x}$ sur $I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

4) $f : x \mapsto |2x-3|$ sur $I = \mathbb{R}$

Continuité et représentation graphiqueEx 6-3 :

- 1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4; 6]$.

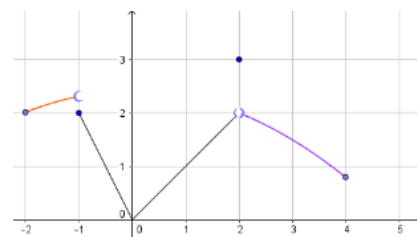


- 2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.
 f est-elle continue sur $]0; 1]$?

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon. Que peut-on conclure ?

Ex 6-4 :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.



- 1) La fonction f est-elle dérivable :

en -1,5 :

en 0 :

en 2 :

- 2) La fonction f est-elle continue :

sur $[-2; 2]$:

sur $[-2; -1]$:

sur $[-2; -1[$:

- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$. la fonction f est-elle continue en 2 ?

Ex 6-5 : Avec GeoGebra

Soit a un entier et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_a(x) = x^2 - ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ f_a(x) = -x^2 + 8x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1) Conjecturer avec GeoGebra, l'entier a tel que la fonction f_a soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer la conjecture précédente.

Avec la fonction partie entière

On note E la fonction partie entière.

Ex 6-6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = E\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1) Tracer la courbe représentative de f avec l'outil de votre choix. Que peut-on conjecturer sur $\mathbb{R}^+$?

2) Démontrer la conjecture précédente.

3) Que peut-on en déduire au sujet de la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$?

Ex 6-7 :

Soit les fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$ par $f(x) = x|x|$ et $g(x) = (2x+1)|x|$.

1) Tracer les courbes représentatives de f et de g avec l'outil de votre choix.

2) f et g sont-elles continues ?

3) Que peut-on conjecturer graphiquement au sujet de la dérivabilité en 0 de f et de g ?

4) Démontrer les deux conjectures précédentes.

5) La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ?

Peut-on énoncer une règle concernant la dérivabilité du produit d'une fonction dérivable par une fonction non dérivable ?

Image d'une suite convergente par une fonction continue

Ex 6-8 : limite de $f(u_n)$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par :

$$v_n = e^{\frac{n+1}{n-1}}$$

1) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $v_n = f(u_n)$

2) Déterminer la limite de (v_n) .

Ex 6-9 : limite de $f(u_n)$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par :

$$v_n = \sin\left(\frac{\pi n^2 - 3}{n^2 + 3}\right)$$

1) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel , $v_n = f(u_n)$

2) Déterminer la limite de (v_n) .

Ex 6-10 : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

2) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, puis déterminer L.

Ex 6-11 : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, puis déterminer L.

Théorème des valeurs intermédiaires – Théorème des bijections**Ex 6-12 : Maîtriser le cours - Vrai ou faux**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1) Si f change de signe sur I , alors f s'annule sur I .

2) Si $I=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I , alors f s'annule sur I .

3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I , alors f est continue sur I .

4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I , alors f est strictement monotone sur I .

Ex 6-13 : Au moins une solution

Montrer que l'équation (E): $\frac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $I=[0;4]$.

Ex 6-14 : Une unique solution - utiliser Solve() et nSolve()

Dans chacun des cas, montrer que l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle I et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} en utilisant les fonctions de Xcas ou de la calculatrice :

- **Solve()** : fonction de calcul formel .

Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)

- **nSolve()** : fonction fournissant une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson.

Par nature, cette fonction ne peut retourner qu'une seule solution même s'il en existe plusieurs. Elle peut aussi ne rien retourner du tout (plus exactement, elle retourne 'false'), voire retourner un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode de Newton ne converge pas.

Suivant l'outil utilisé (Xcas, Mathematica, Ti-Nspire ...), il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée ou la valeur initiale pour appliquer la méthode de Newton-Raphson.

1) (E): $\sqrt{1-x}=x$ sur $I=[0;1]$

2) (E): $5xe^{-x}=1$ sur $I=[1;+\infty[$

Ex 6-15 : Signe de $f(x)$

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.
- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4
- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 6-16 : Signe de $f(x)$

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 3	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 6-17 : Signe de $f(x)$

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 4	$\searrow$ $-\infty$	$\searrow$ 0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;3[$?
A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 6-18 : $f(x)=k$: discussion suivant les valeurs de k

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 3	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 1

1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Ex 6-19 : Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-\infty$	3	$-\infty$

Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .

Ex 6-20 : Existence d'au moins une solution

Soit f une fonction définie et continue sur $I=[0;1]$, telle que pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha\in I$, tel que $f(\alpha)=\alpha$.

Ex 6-21 : Discuter suivant les valeurs de n

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$.

Discuter suivant les valeurs de n et de a , le nombre de solutions de l'équation $x^n=a$.

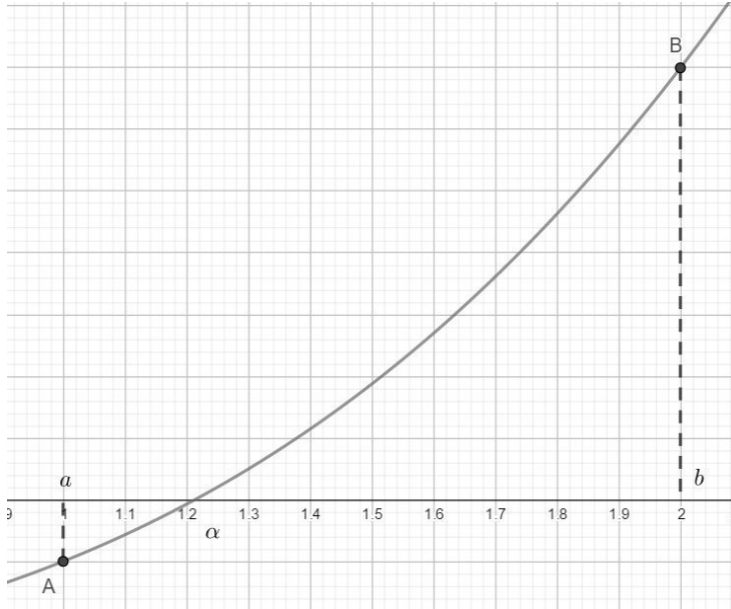
Algorithme – Python



Ex 6-22 : Méthode de la sécante

1) Introduction :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On montre facilement grâce au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dont nous allons déterminer une valeur approchée par la méthode de la sécante.

On considère les points $A(1; f(1))$ et $B(2; f(2))$

Étape 1 :

Tracer le segment $[AB]$: il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1 , puis placer le point $A_1(x_1; f(x_1))$.

Étape 2 :

Tracer le segment $[A_1B]$: il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2 , puis placer le point $A_2(x_2; f(x_2))$.

Et ainsi de suite ...

En notant x_n l'abscisse du point A_n , on définit ainsi une suite (x_n) de réels de $[a; b]$ et on admet (grâce à la convexité) que pour tout entier naturel n , $f(x_n) \leq 0$.

2) Mise en place de l'algorithme :

Revenons sur le cas général.

Soit f une fonction strictement croissante, continue et convexe sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

On considère les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$

On note C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer une équation de la droite $(A_n B)$

b) En déduire que $x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$

c) Démontrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.

d) En déduire que (x_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Tester ce programme et comparer avec la méthode de Newton. (chapitre suite : Ex 6-25)

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

3) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs de la suite (x_n) jusqu'à $n=20$.

```

1 N=int(input("N="))
2 a=float(input("a="))
3 b=float(input("b="))
4
5 def f(x):
6     return (.....)
7
8
9 def Methodesecante(a,b, N):
10    x=.....
11    for i in range(.....):
12        x.append(.....)
13    return x
14
15 print(Methodesecante(.....))

```

```

1 from math import *
2
3 p=float(input("p="))
4 a=float(input("a="))
5 b=float(input("b="))
6
7 def f(x):
8     return (.....)
9
10 def Methodesecante(a,b,p):
11     x=.....
12     i=.....
13     x.append(.....)
14     while (.....):
15         i=i+1
16         x.append(.....)
17     return x
18
19 print(Methodesecante(.....))

```

Chapitre 7 - PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

1) REPÈRES ET BASES ORTHONORMÉS DE L'ESPACE

Définition :

Un repère $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de l'espace est dit **orthonormé** lorsque les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires **et** que $OI = OJ = OK = 1$.

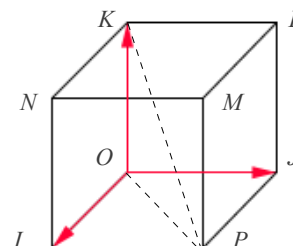
On dit aussi la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est **orthonormée**.

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fournit un modèle de repère orthonormé de l'espace.

Remarque :

Lorsque le repère $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point O et contenu dans le plan défini par les deux autres axes.

Par exemple, la droite (OK) est perpendiculaire à toute droite du plan (OIJ) passant par O .



Propriétés :

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$,

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors : $||\vec{u}|| =$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, alors :

$$AB =$$

C'est une extension des propriétés vues dans le plan

Preuve :

- On note M le point tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

Les coordonnées de $\vec{OM}$ sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $||\vec{u}||^2 = OM^2$

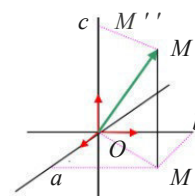
Puisque le repère est orthonormal, le triangle $OM'M$ est rectangle en M' .

Donc $OM'^2 = a^2 + b^2$ et $M'M^2 = OM''^2 = c^2$

On en déduit, d'après le théorème de Pythagore que :

$$||\vec{u}||^2 = OM^2 = OM'^2 + OM''^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ puis } ||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- $AB = ||\vec{AB}|| \dots$: le résultat découle de ce que nous venons de montrer



Exemple : Dans le cube ci-dessus, on a $P(1; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$.

On en déduit que $PK =$

2) PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

A) DÉFINITION

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.

Les démonstrations dans le plan et dans l'espace étant souvent très similaires et la plupart des résultats ayant été vus en classe de Première, ils sont rappelés et étendus à l'espace sans démonstration.

Définition : Formules de polarisation

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. **Le produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par l'un des formules de polarisation ci-dessous :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$\text{ou encore } \vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Remarque :

Pour tout vecteur de l'espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| ||\vec{u}|| = ||\vec{u}||^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :

$$\vec{AB}^2 =$$

B) EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque . On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

C) PRODUIT SCALAIRE ET COSINUS

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires, c'est à dire qu'il existe A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan P contenant A , B et C .

La définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan P et on en déduit que l'expression du produit scalaire établie avec le cosinus dans le plan est encore valable dans l'espace.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Remarques :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

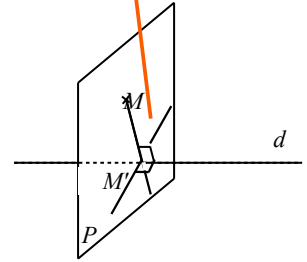
D) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite de l'espace.

La projection orthogonale sur la droite d est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M .

M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite d .



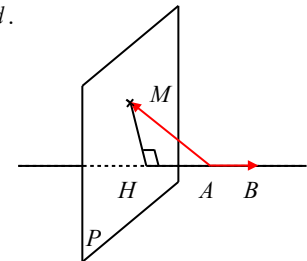
Remarques :

- Si M appartient à la droite d , M est invariant par la projection orthogonale sur d . (c'est à dire M' et M sont confondus)
- Si M n'appartient pas à la droite d , la droite d est perpendiculaire à la droite (MM') qui est incluse dans le plan P .
- MM' est la plus courte distance de M à un point de d , On dit que MM' est **la distance** de M à la droite d .

Propriété :

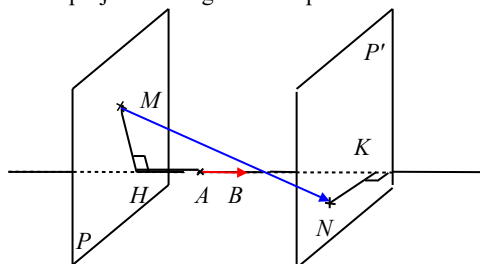
Soit A , B et M trois points de l'espace tels que A et B sont distincts.

Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) , alors on a :



Remarques :

- Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\overrightarrow{AM}$ par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB) .
- Si M et N sont des points de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB) , alors on a :



cc

E) RÈGLES DE CALCUL

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, on a :

- **Symétrie:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Remarque : Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) =$$

3) ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A) DROITES ORTHOGONALES – VECTEURS ORTHOGONAUX

Définition :

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note : $d \perp d'$
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits orthogonaux. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Remarques :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de d et d' , alors : $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- L'adjectif "perpendiculaire" ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires).
Dans la suite du chapitre, on parlera, pour simplifier, de droites orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :

Orthogonal ou perpendiculaire ?

On utilise le mot perpendiculaire quand il y a une intersection non vide, ce qui est forcément le cas entre une droite et un plan, ou entre deux plans.

Il faut être plus prudent dans le cas de deux droites.

Remarque :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Conséquences de la définition :

Propriétés :

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

ATTENTION : Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace.

Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

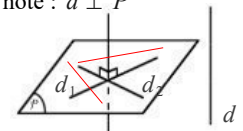
B) DROITE ORTHOGONALE À UN PLAN

Définition et propriété :

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On note : $d \perp P$



Preuve : « Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. »

Soit une droite d orthogonale à un plan P ; elle est donc orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Soit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{u}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1 , d_2 et d .

On a $d_1 \perp d \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{u} = 0$

Et $d_2 \perp d \Rightarrow \vec{v}_2 \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$

Soit Δ une droite du plan P dirigée par un vecteur directeur $\vec{w}$.

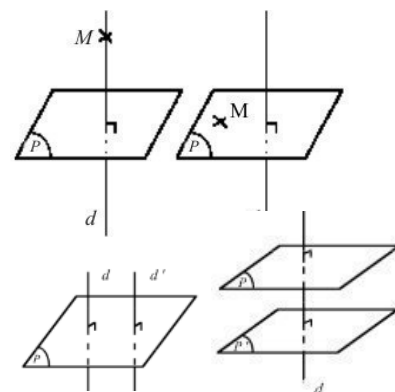
d_1 et d_2 étant sécantes, les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs directeurs de P .

Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$.

On a alors $\vec{w} \cdot \vec{u} = a\vec{v}_1 \cdot \vec{u} + b\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$, ce qui prouve que $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et donc que d et Δ sont orthogonaux.

Quelques propriétés :

- Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.



Remarques :

- En fait, il faut retenir que la relation d'orthogonalité ne lie pas seulement une droite et un plan, mais une famille de plans tous parallèles entre eux à une famille de droites toutes parallèles entre elles.
- Pour montrer qu'une droite d est orthogonale à un plan P , il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de d est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de P .
- Un plan P est perpendiculaire à un plan Q ($Q \perp P$), s'il existe une droite de P orthogonale à Q .

C) VECTEUR NORMAL À UN PLAN

Définition :

Un **vecteur normal** à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale au plan P .

Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan P , alors ils sont colinéaires.

Remarques :

- Deux plans de vecteurs normaux orthogonaux sont
- On peut entièrement définir un plan par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan. Il s'agit de l'ensemble des points M de l'espace telle que

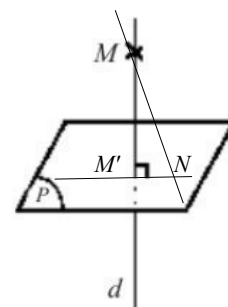
4) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN

Définition :

Soit P un plan de l'espace.

La **projection orthogonale sur le plan P** est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection du plan P et de la droite perpendiculaire à P passant par M .

M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur le plan P .



Remarque : Si M appartient au plan P , M est invariant par la projection orthogonale sur P .

Propriété-définition :

Soit P un plan de l'espace, M un point de l'espace et M' sont projeté orthogonal sur le plan P .

MM' est la plus courte distance de M à un point de P , On dit que MM' est la **distance** de M au plan P .

Preuve : exigible

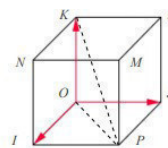
Repères et bases orthonormées de l'espace :

Propriétés :

Dans un repère orthonormé, $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$

Un repère $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de l'espace est dit **orthonormé** lorsque les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et que $OI=OJ=OK=1$. On dit aussi la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est **orthonormée**.

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$



Produit scalaire dans l'espace :

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.

Carré scalaire :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

Pour deux points A et B :

$$\overline{AB}^2 = \|\overline{AB}\|^2 = AB^2$$

Formules de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

ou encore

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Dans un repère orthonormé

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Avec le cosinus

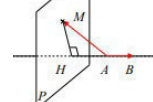
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

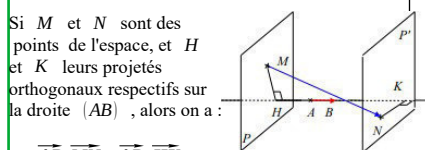
Projection

Soit A , B et M trois points de l'espace tels que A et B sont distincts. Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) , alors on a :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$



Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\overline{AM}$ par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB) .



$$\overline{AB} \cdot \overline{MN} = \overline{AB} \cdot \overline{HK}$$

Si M et N sont des points de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB) , alors on a :

Règles de calcul :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, on a :

- Symétrie:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéarité:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Orthogonal ou perpendiculaire ?

On utilise le mot **perpendiculaire** quand il y a une intersection non vide, ce qui est forcément le cas entre une droite et un plan, ou entre deux plans. Il faut être plus prudent dans le cas de deux droites.

Droites orthogonales :

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires. On note : $d \perp d'$

Conséquences :

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

ATTENTION : Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace.

Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

Vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits **orthogonaux**. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$. Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

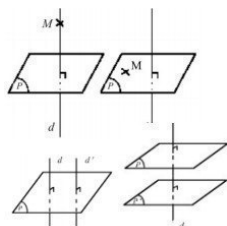
Pour montrer qu'une droite d est orthogonale à un plan P , il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de d est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de P .

Droite orthogonale à un plan :

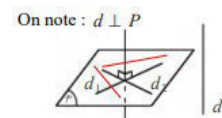
Propriétés :

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



- Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.



Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan, alors ils sont colinéaires.

Vecteur normal à un plan :

Un **vecteur normal** à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale au plan P .

Propriété :

Deux plans de vecteurs normaux orthogonaux sont perpendiculaires.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

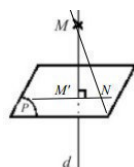
Projection orthogonale :

Si M appartient au plan P (ou à la droite d), M est invariant par la projection orthogonale sur P .

Soit P un plan de l'espace.

La **projection orthogonale sur le plan P** est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection du plan P et de la droite perpendiculaire à P passant par M .

M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur le plan P .

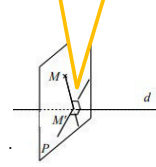


Sur une droite

Soit d une droite de l'espace.

La **projection orthogonale sur la droite d** est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M .

M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite d .



Distances :

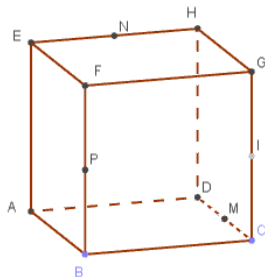
MM' est la plus courte distance de M à un point de P . On dit que MM' est la **distance** de M au plan P .

MM' est la plus courte distance de M à un point de d . On dit que MM' est la **distance** de M à la droite d .

Produit scalaire dans l'espace

Pour les exercices 1 à 4, on considère le cube ci-dessous de côté a .

M, N, P et I sont les milieux respectifs de [CD], [EH], [BF] et [CG].



Ex 7-1 : Vrai ou faux

- | | |
|--|---|
| 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$ | |
| 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$ | 7) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = a^2 \sqrt{6}$ |
| 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GE}$ | 8) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 2a^2$ |
| 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ | 9) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ |
| 5) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{FH}^2$ | 10) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ |
| 6) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ | 11) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ |

Ex 7-2 : Calculer en projetant ...

Calculer en projetant orthogonalement l'un des vecteurs sur la droite portant l'autre vecteur ou éventuellement sur un plan contenant l'autre vecteur.

- 1) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG}$
- 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PG}$
- 3) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DI}$
- 4) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$

Ex 7-3 : Calculer en utilisant un repère ...

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Calculer :

1) $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{PN}$

2) $\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{PM}$

3) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$

Ex 7-4 : Trouver un angle

En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DI}$, déterminer $\cos \widehat{NDI}$, et déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de $\widehat{NDI}$.

On peut utiliser le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Pour les exercices 5 à 8, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ex 7-5 : Triangle rectangle

Soit $A(3;4;-2)$, $B(1;6;0)$ et $C(-2;2;1)$

Montrer que le triangle ABC est rectangle et indiquer en quel point.

Ex 7-6 : Triangle isocèle

Soit $M(3;-4;-2)$, $N(-1;3;2)$ et $P(7;-1;3)$

Démontrer que MNP est isocèle et déterminer à 10^{-1} près tous les angles du triangle.

Ex 7-7 : Parallélogramme

Soit $E(-3;2;1)$, $F(1;-1;3)$, $G(5;1;-3)$ et $H(1;4;-5)$

Montrer que EFGH est un quadrilatère puis déterminer sa nature.

Démontrer une orthogonalité sans les vecteurs

Ex 7-8 : Vrai ou faux

Dans l'espace :

- 1) Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles entre elles.
- 2) Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.
- 3) Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.

Ex 7-9 : Entre deux droites

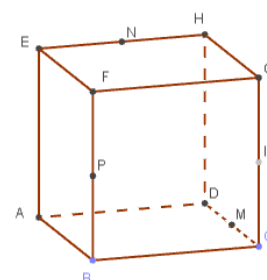
Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que les droites sont orthogonales :

1) (FG) et (AB)

2) (HG) et (FG)

3) (EB) et (GD)

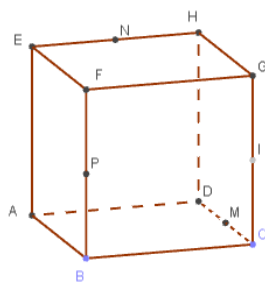
4) (NF) et (HD)



Ex 7-10 : Entre une droite et un plan

Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que la droite et le plan sont orthogonaux :

1) (AB) et (BFG)



2) (DG) et (BCE)

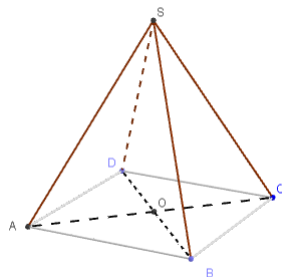
3) (AF) et (CEH)

4) (MI) et (CHE)

Ex 7-11 : Dans une pyramide à base carrée

Soit la pyramide SABCD régulière à base carrée ci-contre . On note I le milieu de [BC].

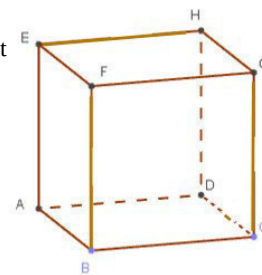
1) Démontrer que les droites (SO) et (BC) sont orthogonales.



2) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (SOI).

Ex 7-12 : En utilisant la trigonométrie

Soit un cube ABCDEFGH de côté 4 cm et le point O centre du carré EFGH.



1) Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (HFB).

2) Calculer $\tan \widehat{HDO}$ et $\tan \widehat{DBH}$.

3) En déduire que les droites (HB) et (DO) sont orthogonales.

4) Démontrer que les droites (HD) et (EG) sont orthogonales.

5) En déduire que la droite (EG) est orthogonale au plan (HFB), puis orthogonale à la droite (HB).

6) Démontrer que la droite (HB) est orthogonale au plan (DEG).

Démontrer une orthogonalité avec les vecteurs

Dans la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ex 7-13 : Trouver a et b

Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Ex 7-14 : Droites perpendiculaires – droites orthogonales

Soit les points $A(0;4;2)$, $B(-1;-3;-2)$, $C(1;1;1)$ et $D(2;2;-1)$

1) Les droites (AB) et (BD) sont-elles perpendiculaires ?

2) Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

Ex 7-15 : *Projeté orthogonal sur une droite – distance d'un point à une droite*

Soit les points $A(0; -1; 3)$ et $B(-1; 2; 5)$.

1) Montrer que le point $H(1;-4;1)$ est le projeté orthogonal du point $C(5;-2;0)$ sur la droite (AB) .

2) En déduire la distance du point C à la droite (AB).

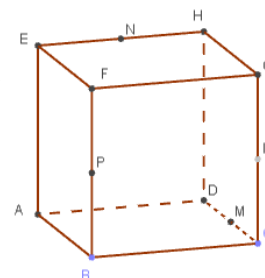
Ex 7-16 : Plan médiateur

Définition :

Dans l'espace, le **plan médiateur** d'un segment est constitué des points équidistants des extrémités de ce segment. Il s'agit du plan passant par le milieu du segment et orthogonal à ce segment.

Dans le cube ABCDEFGH :

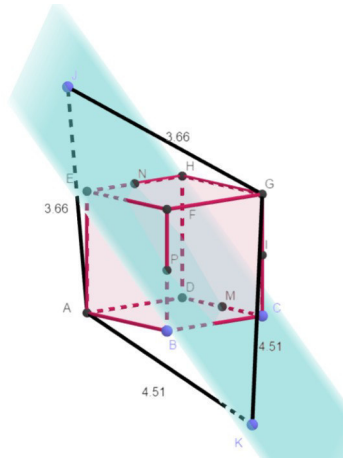
1) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.



2) Démontrer que (DF) est perpendiculaire à (BEG).

3) (BEG) est-il le plan médiateur de [DF] ?

4) Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et G.



5) On note I le milieu de [PN] .

a) Montrer que les vecteurs $\vec{MI}$ et $\vec{PN}$ sont orthogonaux.

b) En déduire l'aire du triangle MNP.

Ex 7-17 : Distance d'un point à un plan – volume d'un tétraèdre

Rappel : le volume d'un tétraèdre est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$

Dans un cube ABCDEFGH de côté 1, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

On considère le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

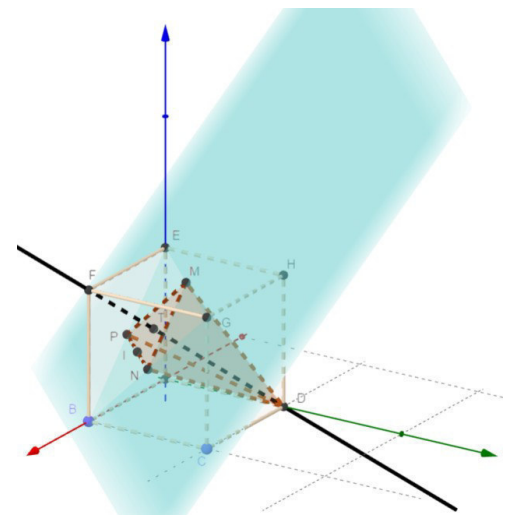
1) Calculer les produits scalaires $\vec{DF} \cdot \vec{MP}$ et $\vec{DF} \cdot \vec{NP}$.

2) Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

3) Soit T le point d'intersection de (DF) et (MNP).
Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur (DF).

4) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\vec{DF} \cdot \vec{DN}$,
déterminer la distance du point D au plan (MNP)

6) En déduire le volume du tétraèdre DMNP.



Chapitre 8 - LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) DÉFINITION

Rappel :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $b \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel a tel que $e^a = b$.

On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\begin{aligned} \ln :]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarques :

- La fonction $\ln$ est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$ | <ul style="list-style-type: none">$\ln 1 = 0$$\ln e = 1$ |
|--|---|

Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

2) PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ | <ul style="list-style-type: none">$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$ |
|--|---|

Preuve :

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

- $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$. Or si $e^y = x$, alors $y = \ln x$. On a donc $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$
- $e^{-\ln a} =$
- $e^{\ln a - \ln b} =$
- $\ln(a) =$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n \ln a} =$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction $\ln$ est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18,42$

Preuve :

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Raisonnons par l'absurde :

Supposons que $\ln a \geq \ln b$

La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$ donc $a \geq b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $\ln a \geq \ln b$.

On a donc $\ln a < \ln b$

On en déduit que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété :

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Preuve : exigible

Soit $x > 0$ et $a > 0$.

Déterminons $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$

En posant $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$, on obtient :

Or on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$

$$\text{Donc } \lim_{X \rightarrow A} \frac{e^X - e^A}{X - A} = \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} =$$

La fonction $\ln$ est donc dérivable en a , pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que la fonction $\ln$ est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

En supposant la fonction $\ln$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

(et en acceptant les abus de notation pour faciliter)

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- Soit $M > 0$.

Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x > M \Leftrightarrow x > e^M$

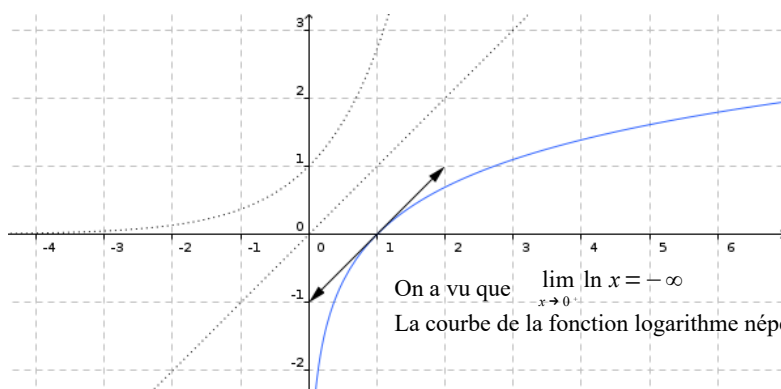
Ainsi, si $x > e^M$ on a $\ln x > M$

Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$+\infty$

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a vu que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

Propriété : (en plus)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuve :

Par définition du nombre dérivé en 1, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

Preuve :

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

Or on sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

OU (sans utiliser la fonction exponentielle)

On peut écrire pour tout $x > 0$: $\ln x < x$ (trivial graphiquement) et donc $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, c'est à dire $\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$.

Pour $x > 1$, on a alors :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

Pour $n > 1$, on peut écrire : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ *exigible*

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

Pour $n > 1$, on peut écrire : $x^n \ln x = x^{n-1} x \ln x$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Preuve :

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$

Lien avec la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0; +\infty[$. On dit que la fonction exponentielle est une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$. C'est-à-dire que pour tout $b \in]0; +\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a = b$. On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

- Pour tout réel x **strictement positif**, on a $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$

La croissance de la fonction $\ln$ est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18,42$

Étude de la fonction logarithme népérien :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conséquences :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$

Continuité et dérivabilité :

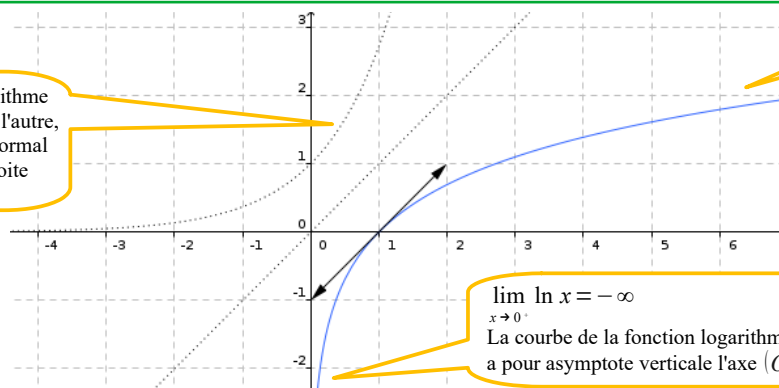
La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Limites :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (hors programme)
- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (en particulier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ (en particulier $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

Représentation graphique :

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy) .

Dérivée de $\ln(u(x))$:

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Calculatrices et Python :

Attention



Il existe une autre fonction notée $\log$ (logarithme décimal) définie par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Certaines calculatrices ou Python utilise la notation $\log$ pour parler de $\ln$ et la notation $\log_{10}$ pour parler du logarithme décimal. Soyez prudent !

En python $\log(x)$ retourne $\ln(x)$ et $\log(x,10)$ retourne $\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \log_{10}(x)$

Définition - propriétés algébriques**Ex 8-1 : QCM**

Plusieurs réponses sont possibles.

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x = 3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x = -3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x = 3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x = -3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x = \frac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x = m$ où $m \in \mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x = e^m$

g) L'équation $e^x = m$ où $m \in \mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x = \ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b) = \ln(a) \times \ln(b)$

b) $\ln(ab) = \ln(a) \ln(b)$

c) $\ln(a-b) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) $\ln(ab^5) = \dots$

a) $5 \ln(ab)$

b) $5(\ln(a) + \ln(b))$

c) $5 \ln(a) \ln(b)$

d) $\ln(a) + 5 \ln(b)$

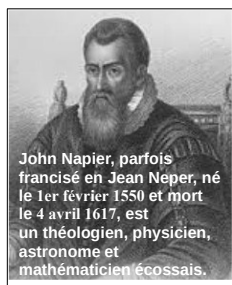
4) $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \dots$

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2 \ln(a)$

d) 0



5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a) - \ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 8-2 : Calculs avec les formules

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)} - e^{\ln(7)}$

2) $3e^{\ln(5)} + 5e^{-\ln(3)}$

3) $\ln(2\sqrt{3}) + 2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\frac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$

5) $\frac{\ln(125)}{\ln(25)}$

6) $\frac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$

7) $\ln(1+e^x) - x - \ln(1+e^{-x})$

Ex 8-3 : Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^x - 2)(e^{2x} - 8) = 0$

2) $(e^{x-1} - 3)^2 = 0$

3) $(e^{x^2+2x+5} + e^{-x})(3e^x + 4) = e$

4) $8 - 4e^{\ln(0,5) \times x + 1} > 0$

5) $e^{3x+5} < 3e^x$

6) $(2e^x - 10)(5 - e^x) < 0$

Ex 8-4 :

Compléter ...

1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point

A(ln2 ; ...) et B(... ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x) \leq 0$ est ...

3) Si $e^a = b$ ($b > 0$), alors $\ln(\dots) = \dots$

4) $\forall x \in \dots$, $\ln(e^x) = x$

5) $\forall x \in \dots$, $e^{\ln(x)} = x$

6) $\forall x \in \dots$, $\ln(x) > 0$

Ex 8-5 : Calculs

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

b) $\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$

c) $\frac{\ln 64}{\ln 81} + \frac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^3}\right)$

c) $\frac{\ln(e^4)}{(\ln(e^3))^2}$

3) Calculer :

a) $\ln 3 + \ln 9 + \ln 27$

b) $\ln(\sqrt{5}-2) + \ln(\sqrt{5}+2)$

Ex 8-6 : Vrai ou faux

Justifier

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln(x^3) = 3\ln(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x}) - 4x = \ln(e^{4x} + e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 8-7 : QCM

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est :

a) $]1; +\infty[$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^-$ e) $\mathbb{R}^{++}$ f) $]0; +\infty[$

2) La fonction $\ln$:

- a) est strictement positive sur $\mathbb{R}^{++}$.
- b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{++}$.
- c) est strictement positive sur $]1, +\infty[$.
- d) est égale à sa dérivée.
- e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction $\ln$.

- a) La droite $\Delta: y=0$ est une asymptote à C .
- b) C coupe l'axe des abscisses.
- c) C admet une tangente de coefficient directeur -2 .
- d) C et la courbe de la fonction $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d: y=x$.

Ex 8-8 : Limites

Associer chaque limite au résultat qui convient :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$	•	• 1
$\lim_{x \rightarrow 0+} x^n \ln x \quad n \in \mathbb{N}^*$	•	• $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x$	•	• 0
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$	•	• n'existe pas
$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x}$	•	• $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	•	• -1

Ex 8-9 : Déterminer une limite

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3}{x} - 4x - 3x^2 \ln x \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x^3 - \frac{5 \ln x}{x^5} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln x - \frac{1}{\ln x} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow 1-} \left(\ln x - \frac{1}{\ln x} \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{\ln x} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x + \ln x)^2$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3 - e^x)$

8) $\lim_{x \rightarrow \ln 3-} \ln(3 - e^x)$

9) $\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\ln(x-1) \left(\ln 2 - \frac{1}{x} \right) \right)$

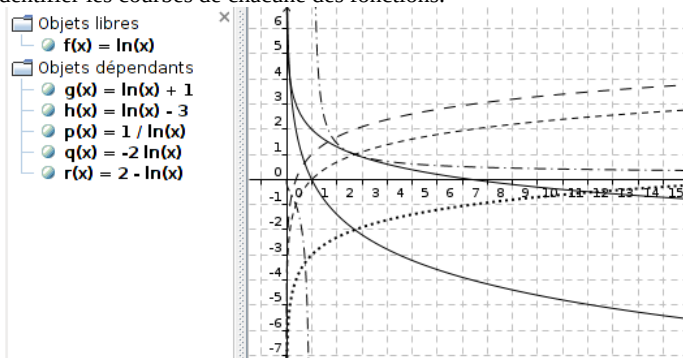
10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x-1) \left(\ln 2 - \frac{1}{x} \right) \right)$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{3x-6}{7x} \right)$

12) $\lim_{x \rightarrow 2+} \ln \left(\frac{3x-6}{7x} \right)$

Ex 8-10 : A partir de la courbe représentative de la fonction $\ln$

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 8-11 : Variations sans calculer la dérivée

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x) + \ln(2), \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{5} \quad \text{et} \quad h(x) = 1 - 3 \ln(x)$$

Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions à partir de celui de la fonction $\ln$.

Ex 8-12 : Dérivées

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

$$1) \quad f(x) = \frac{3x}{\ln(x)} \quad \text{sur} \quad I =]1; +\infty[$$

$$2) \quad f(x) = x^2 \ln(x) - \ln(3) \quad \text{sur} \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$3) \quad f(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1} \quad \text{sur} \quad I =]e; +\infty[$$

$$4) \quad f(x) = (\ln x)^2 - \frac{1}{\ln x} \quad \text{sur} \quad I =]1; +\infty[$$

Ex 8-13 : Tangente à la courbe

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction $\ln$ en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

Ex 8-14 : Signe d'une fonction grâce au sens de variation

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$

2) $f(x) = x \ln x + e$

Ex 8-15 : Déterminer une limite comportant une forme indéterminée

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x \ln x)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 5x \ln x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln 2}{x} + \ln x \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{2x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 5)}{e^x}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e \ln x)$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - e \ln x)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$$

Ex 8-16 : Déterminer une limite avec le nombre dérivé

$$\text{Déterminer } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{x-1}$$

Ex 8-17 : Inéquations comportant q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier n tel que :

$$1) \quad 3 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,01$$

$$2) \quad 1 - 1,25^n < 0,99$$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n = q_0 \cdot 0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Ex 8-18 : Avec des suites

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1) Déterminer la limite de la suite u .

2) $\forall n \neq 0$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) En déduire la limite de S_n .

Fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$

Ex 8-19 : Maîtriser le cours - Vrai ou faux

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(u(x)) > 0$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

5) $\ln(u(x)) \geq \ln 5 \Leftrightarrow x \geq 5$

3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$

6) $\ln(u(x)) \leq 5 \Leftrightarrow 0 < u(x) \leq e^5$

Ex 8-20 : Résoudre une équation ou une inéquation comportant $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5) = -3$

3) $\ln(7x+2) \geq \ln(3-x)$

4) $\ln(e^{2x} - 25) \geq 0$

5) $\ln((x+1)(x-2)) \geq \ln 18$

6) $\ln(1-x^2) - \ln(x-3) \geq 0$

Ex 8-21 : Signe d'une fonction

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = (x-3)\ln(x-1)$ définie sur $]1; +\infty[$

2) $g(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln(x-1)}$ définie sur $]1; 2[\cup]2; +\infty[$

3) $h(x) = \ln\left(\frac{e^x - 3}{e^x - 1}\right)$ définie sur $]1; 2[\cup]2; +\infty[$

Ex 8-22 : Ensemble de définition

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x) = \ln(x^2) - 3$

2) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

3) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

$$4) f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$$

$$5) f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Ex 8-23 : Tableau de variations

Donner le tableau de variations des fonctions ci-dessous :

$$1) f(x) = (\ln x)^2 - \ln(x^2) \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$$

$$2) f(x) = (1-x)\ln(1-x) \text{ sur } I =]-\infty; 1[$$

$$3) f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right) \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

Ex 8-24 : Avec Xcas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)$

1	<code>f(x):=2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)</code>
	<code>x -> 2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)</code>
2	<code>deriver(f(x),x);</code>
	<code>-2*x*ln(x^2+1)+2*x</code>
3	<code>a:=f(sqrt(e-1));simplifier(a);b:=f(sqrt(e^2-1));simplifier(b)</code>
	<code>(-exp(1)+2*(exp(1)-1), exp(1)-2, -2*exp(2)+2*(exp(2)-1), -2)</code>
4	<code>solve(f(x)=0);</code>
	<code>"Unable to isolate x in -ln(x^2+1)*x^2-ln(x^2+1)+2*x^2"</code>
5	<code>nSolve(f(x)=0,x=0);nSolve(f(x)=0,x=2)</code>
	<code>(0.0, 1.9802913)</code>

Répondre aux questions ci-dessous, en utilisant les résultats ci-dessus fourni par le logiciel de calcul formel Xcas.

1) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α .

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .

3) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction logarithme décimal

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)

Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note $\log$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k = \frac{1}{\ln 10}$, il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative. Les formules sont identiques à celles de la fonction logarithme népérien :

$$\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log(a \times b) = \log a + \log b, \log \frac{1}{a} = -\log a,$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a \text{ et } \log a^n = n \log a$$

Ex 8-25 : Vrai ou faux

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $\log(e) = 1$ | 4) $\log(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 10$ |
| 2) $\log(10^{-5}) = -5$ | 5) $\log(x) = -3 \log(5) \Leftrightarrow x = \frac{1}{125}$ |
| 3) $\log(10^2 \times 10^3) = 5$ | 6) $(\log(x))' = \log(e) \ln(x)$ |

Ex 8-26 : Niveau sonore

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ où } I \text{ est l'intensité sonore exprimé en } W/m^2, \text{ et où } I_0$$

est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.

On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.

1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.

Quel est le niveau sonore de deux lave-linges identiques ?

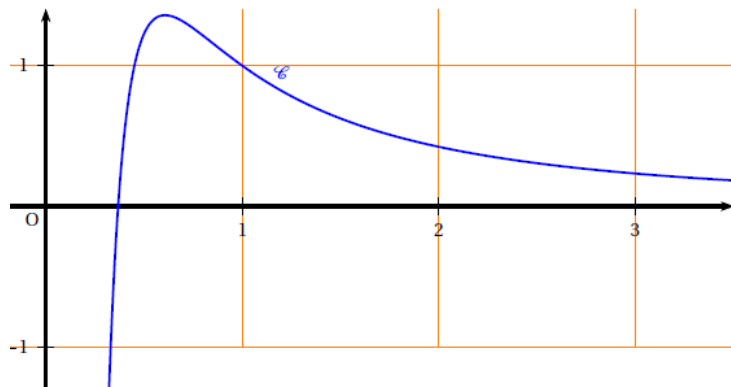
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

EN ROUTE VERS LE BAC**Ex 8-28 :** Baccalauréat S – Amérique du nord 30 mai 2013 – Ex 8-4

Fonction ln – étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :

1. a. Étudier la limite de f en 0.
 b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
 c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

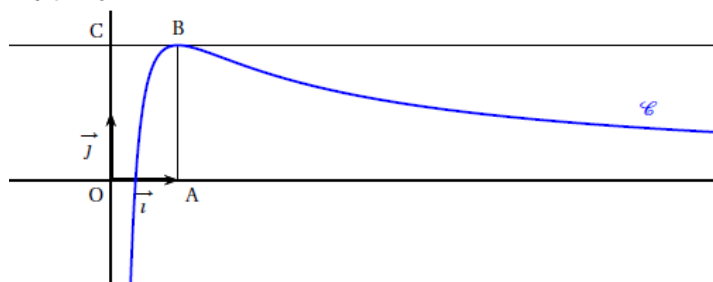
$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

- b. Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
 En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
 b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ex 8-29 : Baccalauréat S – Métropole 20 juin 2013 – Ex 8-2

Fonction $\ln$ – utiliser une représentation graphique – étude de fonction – corollaire du TVI – algorithme

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.
c. En déduire les réels a et b .
2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.
c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1[$.
b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
from math import *

def f(x):
    y=2/x+2*log(x)/x
    return (y)

a=0
b=1
while (b-a)>0.1:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<1:
        a=m
    else:
        b=m
print ("a=",a,"b=",b)
```

- a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b - a$					
m					

- b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

Ex 8-30 : Baccalauréat S – Antilles Guyane 11 septembre 2014 – Ex 8-3

Fonction ln – résolution d'une équation

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

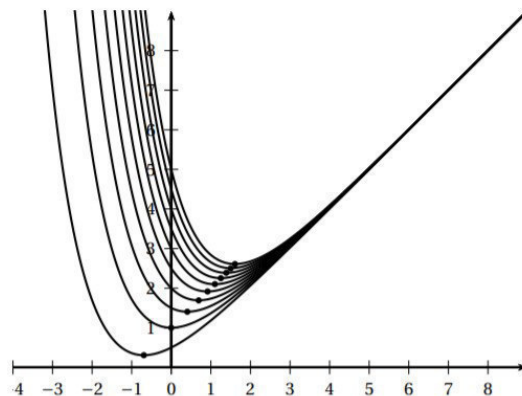
2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Ex 8-31 : Baccalauréat S – Liban 5 juin 2017 – Ex 8-3

Problème ouvert - Fonction exp - ln - alignement

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k .

Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

Ex 8-32 : Baccalauréat S – Antilles Guyane 6 sept 2018 – Ex 8-4

Suites – fonction ln – fonction exp

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n \leq e^2.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

- b. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

- c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .

- d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0 .

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$. »

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

Chapitre 9 - REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Dans ce cours, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Propriété :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à d si, et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + k \lambda \\ y = y_A + k \beta \\ z = z_A + k \gamma \end{cases}$$

Preuve :

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

M appartient à d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont colinéaires, si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k \vec{u}$.

Ce qui se traduit par :

Remarque :

A chaque réel k correspond un unique point M de la droite.

Réciproquement, à chaque point M de la droite correspond un unique réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k \vec{u}$.

Définition :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = x_A + k \lambda \\ y = y_A + k \beta \\ z = z_A + k \gamma \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ est une \underline{représentation paramétrique} de la droite } d.$$

Le paramètre k peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x , y et z .
On utilise aussi souvent la lettre t .

Remarques :

- Si λ , β et γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases} x = a + k \lambda \\ y = b + k \beta \\ z = c + k \gamma \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par le point de coordonnées $(a; b; c)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
- Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.
- Représentations paramétriques d'un segment et d'une demi-droite :
Soit A et B deux points distincts de l'espace.
En considérant le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, l'appartenance d'un point M au segment $[AB]$ ou bien à la demi-droite $[AB)$ s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :
 - pour le segment, il suffit de remplacer dans le système : « $k \in \mathbb{R}$ » par
 - pour la demi-droite $[AB)$, il suffit de remplacer dans le système : « $k \in \mathbb{R}$ » par

2) ÉQUATIONS DE PLANS

Propriété :

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

Propriété :

- Tout plan admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a , b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à P .

- **Réciproquement :**

Soit a , b , c et d des réels tels que l'un au moins des réels a , b et c n'est pas nul.

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Si a , b et c sont nuls simultanément, deux cas se présentent :

- $d = 0$, et alors la relation $ax + by + cz + d = 0$ est toujours vérifiée

- $d \neq 0$, et alors la relation $ax + by + cz + d = 0$ n'est jamais vérifiée

Preuve : exigible

- Soit P un plan, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

• Réciproquement :

Soit a , b , c et d des réels tels que l'un au moins des réels a , b et c n'est pas nul.

On considère l'ensemble E des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ et on note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On considère, par exemple, que $a \neq 0$. Le point $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ est un point de E .

Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace, on a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + \frac{d}{a}; y; z \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax + by + cz + d$

L'ensemble E est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est à dire la plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan, alors $k(ax + by + cz + d) = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, est aussi une équation de ce plan.

- Si $d \neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère. On peut alors toujours choisir une équation de la forme

- Lorsque P est un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées, il admet comme vecteur normal l'un des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, et on a alors :

- tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation du type

- tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation du type

- tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation du type

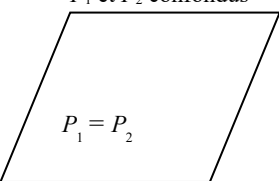
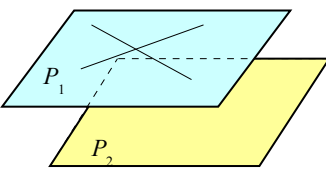
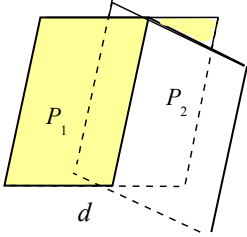
3) POSITIONS RELATIVES, ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

A) POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

Soit P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ et $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. On peut savoir à priori si les deux plans sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non.

En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations. Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite d , intersection de P_1 et P_2 .

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système $(S): \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus  $P_1 = P_2$	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires Les suites (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnelles		$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires Les suites (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas proportionnelles

Remarques :

- On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de la droite d .
- La démarche géométrique permet de prévoir à priori le nombre de solutions.

B) POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d la droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$.

On peut savoir à priori si d est sécante ou parallèle à P suivant que $\vec{n}$ est orthogonal ou non à $\vec{u}$.

En particulier, si d coupe P , leur point d'intersection I a pour coordonnées $(x; y; z)$ solution du système $(S): \begin{cases} x = x_A + t \alpha \\ y = y_A + t \beta \\ z = z_A + t \gamma \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de d et P et indique l'ensemble des solutions du système (S) .

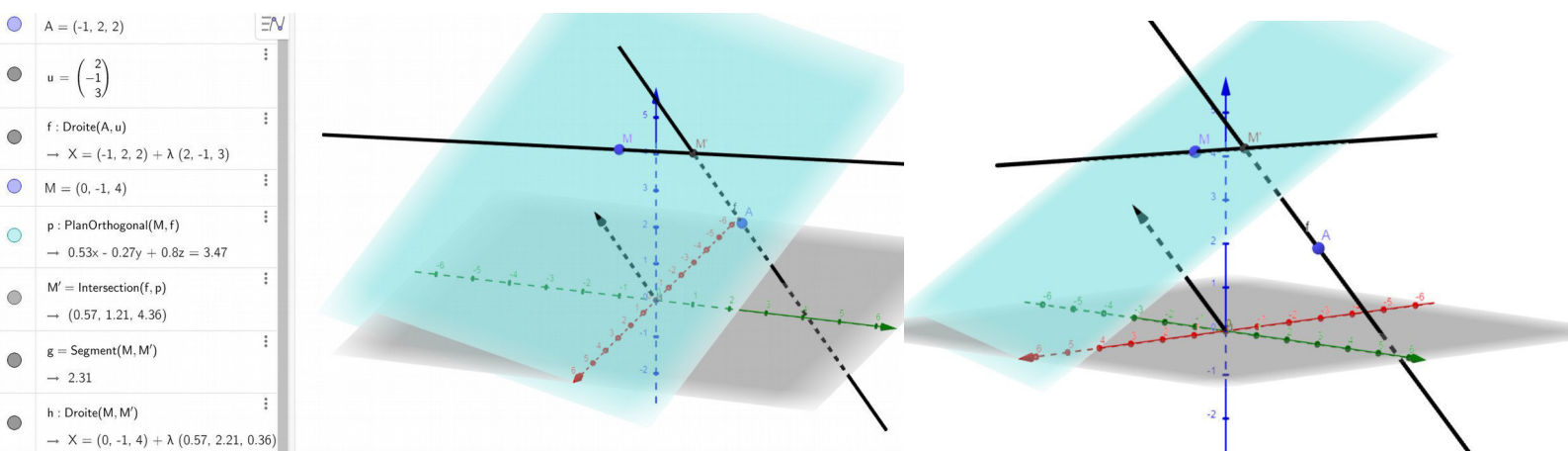
B) COORDONNÉES DU PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN POINT SUR UNE DROITE

Exemple 2 : Dans un repère orthonormal, on considère le point $M(0;-1;4)$ et la droite d passant par $A(-1;2;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal M' du point M sur la droite d .

Une équation paramétrique de la droite droite d est

Ci-dessous : deux vues du problème réalisées avec GeoGebra.



C) FORMULE POUR CALCULER LA DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace et P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

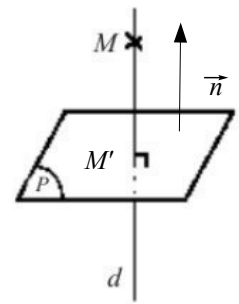
$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P .

On calcule $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n}$ de deux façons différentes :

Façon 1: (avec les coordonnées)

On a $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x_{M'} - x_M \\ y_{M'} - y_M \\ z_{M'} - z_M \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'où :

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = a(x_{M'} - x_M) + b(y_{M'} - y_M) + c(z_{M'} - z_M) = -ax_M - by_M - cz_M + ax_{M'} + by_{M'} + cz_{M'}$$



Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ colinéaires (car ils sont tous les deux orthogonaux à P) . On a alors :

$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\vec{n}\|$ ou $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = -\|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\vec{n}\|$ selon que $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés ou non.

On obtient donc :

On en déduit donc que la distance du point M au plan P est $\frac{|ax_M + by_M + cz_M - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Revenons à l'exemple 2 :

En appliquant cette formule, on obtient que la distance de M au plan P est :

Ce résultat correspond bien au résultat fourni par GeoGebra.

On peut aussi calculer la longueur MM' , on obtiendra le même résultat.

Dans ce cours, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à d si, et seulement si il existe un réel k tel que : $\begin{cases} x = x_A + k \lambda \\ y = y_A + k \beta \\ z = z_A + k \gamma \end{cases}$

Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

Le paramètre k peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y et z . On utilise aussi souvent la lettre t .

$\begin{cases} x = x_A + k \lambda \\ y = y_A + k \beta \\ z = z_A + k \gamma \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ est **une représentation paramétrique** de la droite d .

Pour représenter un segment, ou une demi-droite, il suffit par exemple de choisir $k \in [0; 1]$ ou $k \in \mathbb{R}^+$, suivant le vecteur directeur et le point choisis.

Interprétation géométrique d'un système :

Si λ, β et γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases} x = a + k \lambda \\ y = b + k \beta \\ z = c + k \gamma \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par le point de coordonnées $(a; b; c)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Équations de plan :

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Un plan admet une infinité d'équations

On peut faire un parallèle avec les équations de droites dans le plan.

• Tout plan admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à P .

• **Réciproquement :** Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

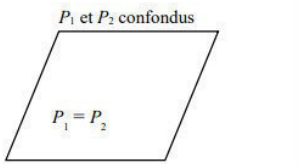
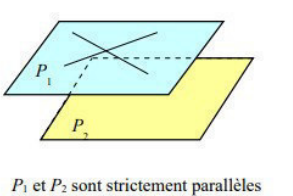
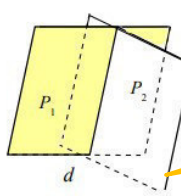
Plans parallèles à l'un des plans de coordonnées :

- tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation du type $z = k$
- tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation du type $x = k$
- tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation du type $y = k$

Positions relatives de deux plans :

Soit P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

Le tableau ci-contre résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système $(S) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

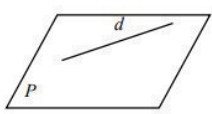
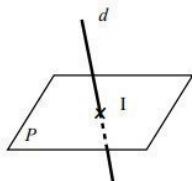
P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
		
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires Les suites (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnelles		$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires Les suites (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas proportionnelles
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x; y; z)$ coordonnées de l'une des deux équations		(S) n'admet aucune solution
		(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x; y; z)$ coordonnées des points de d

On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de la droite d .

Positions relatives d'une droite et d'un plan :

Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Le tableau ci-contre résume les différentes positions de d et P et indique l'ensemble des solutions du système $(S) : \begin{cases} x = x_A + t \lambda \\ y = y_A + t \beta \\ z = z_A + t \gamma \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

d et P sont parallèles	d et P sont sécants
	
d est contenue dans P	d est strictement parallèle à P
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x; y; z)$ coordonnées des points de d	(S) n'admet aucune solution
	(S) a une unique solution : $(x_I; y_I; z_I)$ coordonnées de I

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Ex 9-1 : Vrai ou faux ?

Soit la droite $d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) d passe par $A(-1;0;2)$

2) d a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) d passe par $B(1;-3;-1)$

4) d a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) d est parallèle à $d' : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 1 + 3k \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

6) d coupe l'axe des ordonnées.

7) d coupe l'axe des cotes au point $C(3;-6;0)$.

Ex 9-2 : Éléments caractéristiques

Donner les éléments caractéristiques des droites suivantes :

1) $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $d' : \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 1 - 3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Ex 9-3 : Droite, segment, demi-droite

Soit $A(2;1;4)$, $B(1;0;-2)$, $C(-2;0;0)$ et $D(0;5;6)$

Donner des représentations paramétriques de la droite (AB), du segment [CD] et de la demi-droite [BC).

Ex 9-4 : Appartient ou pas ?

Soit $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Dire si les points suivants appartiennent ou pas à la droite d :

$A(2;-1;-3)$

$B(0;-3;6)$

$C(1;-3;3)$

$D(3;1;-3)$

Ex 9-5 : Droites sécantes ?

Soit $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = -s \\ z = -1 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' ne sont pas parallèles.

2) Donner deux points A et B de la droite d .

3) Donner deux points C et D de la droite d' .

4) Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

5) Que peut-on en déduire pour ces deux droites ?

Ex 9-6 : Avec le centre de gravité

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(2;1;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle OBC.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).

3) Quelle est la valeur du paramètre correspondant à chacun des points suivants :

A ?

le milieu M de [AG] ?

le symétrique S de M par rapport à A ?

Ex 9-7 : Avec le milieu d'un segment

1) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(6;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite d' passant par le point $B(3;-3;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) Montrer qu'il existe $C \in d$ et $D \in d'$ tels que le milieu de [CD] soit le point $I(1;-2;3)$.

Ex 9-8 : Droites confondues

$$\text{Soit } d: \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -3 + t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d': \begin{cases} x = 9 + 10t \\ y = -5 - 2t \\ z = -8 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites d et d' sont confondues.

Ex 9-10 : Droites sécantes

$$\text{Soit } d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites d et d' sont sécantes.

Ex 9-9 : Droites parallèles

$$\text{Soit } d: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d': \begin{cases} x = 1 - 9t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

Ex 9-11 : Droites non coplanaires

$$\text{Soit } d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d': \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 8 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Ex 9-12 : Droites concourantes

On considère les droites : $d_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $d_2: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2t \\ z = -5-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et $d_3: \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

2) Montrer que $B(-1;2;3)$ n'appartient pas au plan défini par les droites d et d' .

3) À tout point M de paramètre t de d , on associe la fonction f définie par $f(t) = BM^2$.

Calculer $f(t)$ et déterminer la valeur t_0 pour laquelle $f(t)$ est minimale.

Que représente le point H de paramètre t_0 de d ?

2) Ces droites sont-elles coplanaires ?

Ex 9-13 : Minimum d'une fonction pour déterminer le projeté orthogonal

Soit $d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -3-4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = 4+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Ex 9-14 : Droites orthogonales mais pas perpendiculaires

Soit $A(-1;0;2)$, $B(1;1;3)$, $C(-2;1;4)$ et $D(0;1;0)$.

1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont orthogonales, mais pas perpendiculaires.

Ex 9-15 : Droites perpendiculaires et donc orthogonales

Soit $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;-2)$, $C(0;1;-4)$ et $D(2;-1;-2)$.

1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires et déterminer leur point d'intersection.

Équations de plans

Ex 9-16 : Vrai ou faux

Soit le plan $P: x-2y+z-2=0$.

- 1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur 2) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal
- 3) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal 4) P passe par $A(0;0;2)$

Ex 9-17 : Équation cartésienne d'un plan : point et vecteur normal

Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- 1) $A(2;-1;3)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 2) $A(1;5;0)$ et $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j}$

Ex 9-18 : Équation cartésienne d'un plan : trois points

Soit les points $A(1;5;0)$, $B(2;0;-1)$ et $C(0;3;4)$.

- 1) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

2) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Ex 9-19 : Projeté orthogonal

Soit le plan $P: -5x + y - z - 6 = 0$ et le point $A(-6; 2; -1)$.
Démontrer que $B(-1; 1; 0)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.

Position relative de deux plans

Ex 9-20 : Plans perpendiculaires

Dans chacun des cas, après avoir déterminé des vecteurs normaux aux plans P et Q, déterminer leur position relative :

1) $P: -x - y + 2z - 5 = 0$ et $Q: 2x + 4y - 3z = 0$

2) $P: x - 2y + z - 4 = 0$ et $Q: -3x + y - 4z - 2 = 0$

3) $P: x - 2y + 3 = 0$ et $Q: 2x + y - 3z - 5 = 0$

4) $P: x = -1$ et $Q: z = 2$

Ex 9-21 : Intersection de deux plans

Dans chacun des cas, démontrer que les plans P et Q sont sécants, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection puis donner un vecteur directeur de cette droite.

1) $P: 2x - 3y + z - 4 = 0$ et $Q: x + 2y - z + 1 = 0$

2) $P: x-3y+2z-5=0$ et $Q: 2x+y+7z-1=0$

2) Déterminer une équation cartésienne du plan R parallèle au plan P et passant par le point $A(-2; 0; 3)$

Position relative d'une droite et d'un plan

Ex 9-23 : Vrai ou faux

Soit la droite $d: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan $P: 2x-y-3z+10=0$

1) d et P sont parallèles 2) d et P sont perpendiculaires.

3) Leur point d'intersection a pour paramètre $t=0$ sur la droite. 4) Leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1; -1; 3)$

Ex 9-24 : Intersection d'une droite et d'un plan

Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection, quand il existe, de la droite d et du plan P :

1) $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $P: 5x-y+2z=0$

Ex 9-22 : Plans parallèles

Soit les plans $P: -2x+4y-3z+2=0$ et $Q: x-2y+\frac{3}{2}z-5=0$.

1) Montrer que les plans P et Q sont parallèles.

2) $d: \begin{cases} x=1-2k \\ y=1+k \\ z=3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et $P: x-y+z+1=0$

3) $d: \begin{cases} x=1+s \\ y=2+s \\ z=s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \text{ et } P: x+y-2z-3=0$

4) $d: \begin{cases} x=1-s \\ y=2+s \\ z=3s+9 \end{cases}, s \in \mathbb{R} \text{ et } P: z=0$

Ex 9-25 : Étudier la position relative d'une droite et d'un plan

Soit les points $A(0; -1; -1)$ et $B(1; 0; 0)$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Étudier la position relative de cette droite avec chacun des plans
 $P: -3x+y+2z+3=0$, $Q: 2x-3y+z-3=0$ et $R: -x+2y-3z+3=0$

Intersection de deux droites

Ex 9-26 : Droites sécantes

Soit les droites $d: \begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d': \begin{cases} x=4-5t \\ y=3-2t \\ z=-1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

Ex 9-27 : Droites parallèles

Soit les droites $d: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Démontrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

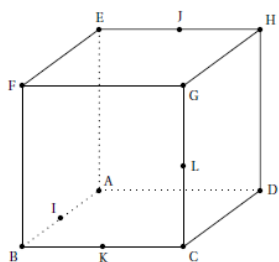
On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
- Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M .
- Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
- Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
- Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 9-28 : Baccalauréat S – Liban 27 mai 2015 – Ex 9-1

Repère – équations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – produit scalaire – volume – droites sécantes

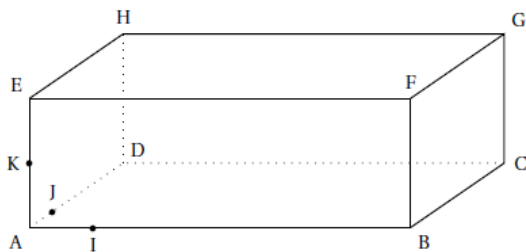


Ex 9-29 : Baccalauréat S – Polynésie 12 juin 2015 – Ex 9-1

Repère – équations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – section

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.

I, J et K sont les points tels que $\vec{AI} = \frac{1}{6}\vec{AB}$, $\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD}$, $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en annexe à rendre avec la copie). On ne demande pas de justification.*

Ex 9-30 : Baccalauréat S – Métropole 22 juin 2015 – Ex 9-2

Repère – équations de droites et de plans – droites non coplanaires – distance minimale

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$, $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0,8t; 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel?
 b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
 Lequel? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
 c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point $E(11; -1; 5)$.
 d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes?
2. a. Montrer que $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
 b. À quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale?*

Ex 9-31 : Baccalauréat S – Pondichéry 27 avril 2017 – Ex 9-5

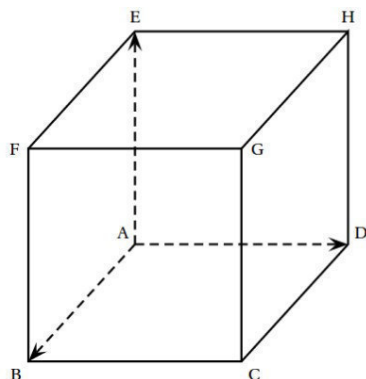
Équations de plans – section

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



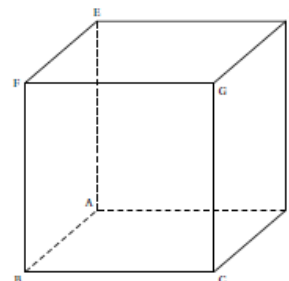
Ex 9-32 : Baccalauréat S – Centres étrangers 13 juin 2012 – Ex 9-1 (en partie)

Repère – équations paramétriques – intersection de droites – parallélogramme – milieu

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
- Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

- Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

- Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

Ex 9-33 : Baccalauréat S – Amérique du nord 30 mai 2014 – Ex 9-3 (en partie)

Repère – équations paramétriques – intersection de droites – section

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

$$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}.$$

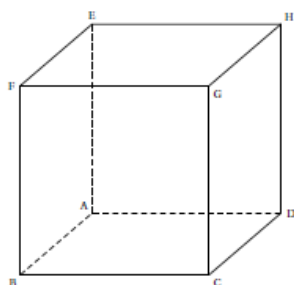
Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
Construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.



Chapitre 10 – SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES – SCHÉMA DE BERNOULLI

1) SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n \in \mathbb{N}^*$) épreuves aléatoires $E_1, E_2, \dots, E_n$ successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes** . Dans ce cas :

- **L'univers des issues possibles** est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, où pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, Ω_k est l'univers de l'épreuve E_k .
- **Une issue** de la succession d'épreuves est un n -uplet $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, où i_k est une issue de E_k .

Remarque : Lors de tirages successifs avec remise, les épreuves sont indépendantes.

Exemple : On jette successivement une pièce de monnaie non truquée, puis un dé équilibré. Ces deux épreuves sont indépendantes.

On s'intéresse à la probabilité p d'obtenir un face, puis un nombre pair.

En notant $M = \{P, F\}$ et $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, les univers respectifs des deux épreuves, on peut représenter toutes les issues à l'aide du produit cartésien :

On en utilisant un arbre :

Dans les deux cas la description de toutes les issues est intéressante, mais ce travail peut très vite devenir bien laborieux.

Nous pouvons, d'après le principe multiplicatif, dénombrer 12 issues équiprobables, dont 3 favorables, ce qui donne :

Nous pouvons aussi utiliser la propriété ci-dessous :

Propriété : *admise*

Lors de la répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1; i_2; \dots; i_n)$ est le produit des probabilités de chacune des issues du n -uplet.

Exemple :

On obtient directement la probabilité cherchée :

2) SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités : l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\bar{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

L'éventualité S correspond au "succès" de l'expérience, $\bar{S}$ étant alors "l'échec".

La loi d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est donnée par le tableau ci dessous :

issue	S	$\bar{S}$
probabilité	p	$1 - p$

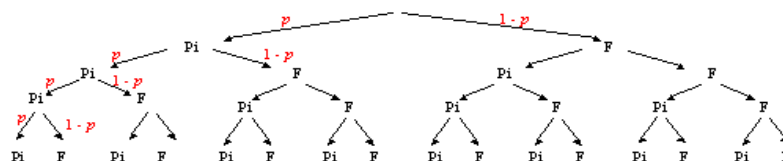
Exemple : la preuve qui se généralise à partir de cette exemple est exigible

On jette une pièce de monnaie.

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont P_i : "Pile" et F : "Face".

Notons $P(P_i) = p$ et $P(F) = 1 - p$ (si la pièce est équilibrée, on a $P(P_i) = \frac{1}{2}$ et $P(F) = \frac{1}{2}$).

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce. On peut traduire la situation par un arbre pondéré.



L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(P_i ; P_i ; F ; P_i)$ est

Il y a possibilités d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers. Ainsi la probabilité de l'événement obtenir trois pile est :

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a $X(\Omega) =$ et on a justifié que $P(X=3) =$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque : On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès)

3) LOI BINOMIALE

On généralise facilement le résultat précédent :

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p .

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :

pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0 ; 1 ; \dots ; n\}$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Cette loi est souvent notée $B(n ; p)$

Propriété : admise

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et pour variance $V(X) = np(1-p)$

Succession d'épreuves indépendantes :

On considère n (où $n \in \mathbb{N}^*$) épreuves aléatoires $E_1, E_2, \dots, E_n$ successives.

Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**. Dans ce cas :

- **L'univers des issues possibles** est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, où pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, Ω_k est l'univers de l'épreuve E_k .

- **Une issue** de la succession d'épreuves est un n -uplet $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, où i_k est une issue de E_k .

Lors de tirages successifs avec remise, les épreuves sont indépendantes.

Propriété :

Lors de la répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1; i_2; \dots; i_n)$ est le produit des probabilités de chacune des issues du n -uplet.

Schéma de Bernoulli :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités : l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\bar{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

La loi d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p est donnée par le tableau ci dessous :

On écrit Bernoulli et non Bernoulli

issue	S	$\bar{S}$
probabilité	p	$1 - p$

L'éventualité S correspond au "succès" de l'expérience, $\bar{S}$ étant alors "l'échec"

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Loi binomiale :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p .

Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :

pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

On dit que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p**

L'ensemble de ses valeurs est $\{0; 1; \dots; n\}$

. Cette loi est souvent notée $B(n; p)$

Espérance et variance :

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Calculatrice :

Les calculatrices de lycée permettent de calculer directement $P(X = a)$ et $P(X \leq a)$.

Aujourd'hui, on ne s'amuse plus à faire à la main ce type de calcul.

Voilà un exemple avec une Ti-nspire pour calculer $P(X = 5)$ et $P(X \leq 5)$ où X suit la binomiale $B(20; 0,4)$



$P(X = 5)$

Menu>Probabilités>Distributions>Binomiale DdP

1.1	*Classeur	DEG	X
binomPdf(20,0.4,5)		0.074647019529	
binomCdf(20,0.4,0,5)		0.125598972723	

$P(X \leq 5)$

Menu>Probabilités>Distributions>Binomiale FdR

Ex 10- 4 : Arbre pondéré

1) Dans une crèche, un jeu de construction en bois de 50 pièces comporte 20 cubes, 10 cylindres et 20 parallélépipèdes droits.

Un enfant choisit au hasard une pièce du jeu puis la repose dans la baril où est rangé le jeu . Il recommence l'opération. Représenter les deux expériences à l'aide d'un arbre pondéré.

- 2) Sur les pièces cubes est gravé le chiffre 5, sur les cylindres le chiffre 2 et sur les pavés le chiffre 3.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la somme des deux chiffres obtenus.

Une urne contient 6 boules blanches et deux boules vertes indiscernables au toucher . On tire successivement et au hasard trois boules avec remise.

- 1) En utilisant le produit cartésien, lister les issues possibles.
- 2) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches.

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

- 1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.
- 2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égale à $\frac{2}{3} \times \frac{19}{29}$.
- 3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$
- 4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale

Ex 10-5 : Probabilités conditionnelles

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boules jaunes. Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

- 1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

3) Déterminer la probabilité de l'événement J : «Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

Ex 10-6 : Simuler une succession d'épreuves indépendantes



On aimerait simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer 10 fois de manière successive et avec remise une boule dans une urne contenant 1 boule portant le numéro 1, 4 boules portant le numéro 3 et 5 boules portant le numéro 2.

Compléter le programme ci-dessous qui permet de simuler et d'afficher 20 fois cette expérience.

```

1 from random import random
2 def simul():
3     b=[]
4     for i in range(10):
5         a=.....
6         if (a<=.....):
7             b.append(.....)
8         else:
9             if (a>=.....):
10                b.append(.....)
11            else:
12                b.append(.....)
13    return(.....)
14
15 for i in range(.....):
16    print(.....)

```

Épreuve de Bernoulli

Ex 10-7 : Vrai ou faux

Les expériences suivantes correspondent-elles à des épreuves de Bernoulli.

1) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

2) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on s'intéresse à la parité du résultat obtenu.

3) Pour jouer à « pile ou face », on lance deux pièces de monnaie et on note le nombre de « pile » obtenu .

4) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note la couleur de la boule obtenue.

5) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note si la couleur de la boule obtenue se retrouve dans le drapeau français.

Schéma de Bernoulli - Loi binomiale

Ex 10-8 : Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale

Dire lesquelles des expériences 1 et 2 correspondent à des schémas de Bernoulli et lesquelles des variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Expérience 1 :

On lance dix fois un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lors d'un lancer, si le numéro qui apparaît est 1 alors c'est un succès, sinon c'est un échec.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ces séries de 10 lancers et Y la variable aléatoire telle que si le lanceur a eu plus de 7 succès il gagne 10€ sinon il perd 5€.

Expérience 2 :

On lance une pièce, on note F si face apparaît et P si pile apparaît.

- Si le résultat du lancer est F alors on tire une boule de l'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire

- Si le résultat du lancer est P alors on tire une boule de l'urne 2 contenant une boule blanche et une boule bleue.

Ex 10-9 : Définir les paramètres de la loi binomiale

Dans chacun des cas, justifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

1) À Genève en 2008, l'institut de recherche sur les allergies et l'asthme a annoncé qu'un vaccin contre l'allergie aux chats a été testé avec succès sur des souris. En effet le vaccin guérit l'allergie chez les souris dans 88% des cas. Un laboratoire a testé le vaccin sur une population de 30 souris allergiques. Chaque matin un laborantin prélève trois souris de l'échantillon pour effectuer des analyses, prélèvement que l'on considère comme étant avec remise.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de souris saines prélevées par le laborantin.

1) Quelle propriété géométrique observe-t-on ?

2) Justifier cette propriété.

Problèmes : loi binomiale, espérance, écart type

Ex 10-15 : Burj Khalifa

Burj Khalifa, gratte ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï, compte 57 ascenseurs. La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,006. On considère que les pannes sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné. X suit la loi binomiale de paramètres 57 et 0,006. Calculer et interpréter :



1) $P(X=2)$

2) $P(X \leq 2)$

3) $E(X)$

Ex 10-16 : Singe et clavier

Un singe tape 300 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « Z ».

1) Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X .

2) Calculer et interpréter :

a) $P(X=20)$

b) $P(X \leq 20)$

c) $E(X)$

Ex 10-17 : Composants électroniques

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3} .

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement deux résistances défectueuses »

b) « le lot contient au plus trois résistances défectueuses »

c) « le lot contient au moins quatre résistances défectueuses »

3) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X . Interpréter l'espérance dans le cadre de l'énoncé.

Ex 10-18 : Lecteurs MP3 – Gain algébrique (D'après Bac S – Polynésie juin 2009)

Après fabrication, les lecteurs MP3 d'une entreprise (dont 6 % sont défectueux) subissent quatre contrôles successifs indépendants pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros.

Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .

Aide : Utiliser la variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté.

2) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G . Donner une interprétation de ce résultat.

Ex 10-19 : Parc de centrales nucléaires

Un défenseur du nucléaire informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4} .



La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est d'environ 10^{-2} ». Cette réponse est-elle correcte ?

Ex 10-20 : QCM

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.

Pour chaque question quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.

Un candidat répond au hasard aux 8 questions de ce QCM.

On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=8)$ et $P(N=4)$ à 10^{-4} près.

3) Donner la loi de probabilité de N .

4) Calculer l'espérance mathématique de N .

5) Que dire d'un QCM noté +1 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

6) On fait la supposition qu'une note négative est possible. On note le QCM de la manière suivante :

– a pour une mauvaise réponse et + b pour une bonne réponse

On note G la variable aléatoire correspondant à la note obtenue.

Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0 ?

Ex 10-21 : Jeu de grattage

Dans un jeu de grattage, un joueur a 5 % de chance de gagner.
Un joueur décide de jouer n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$) de façon indépendante.

1) Déterminer la probabilité p_n de gagner au moins une fois.



2) Écrire en python un programme qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,7$.

3) Déterminer cette valeur.

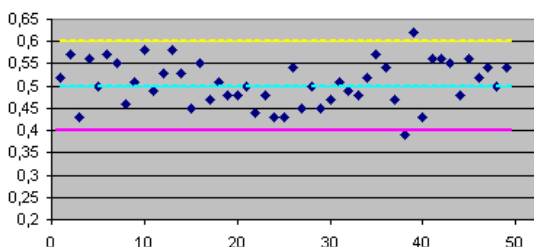
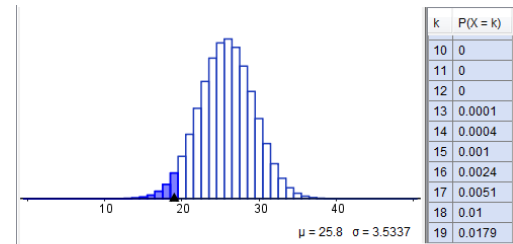
Échantillonnage - Intervalle de fluctuation**Définition :**

Soit a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

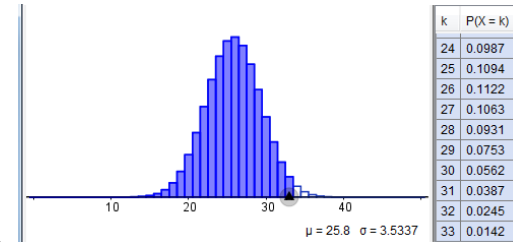
L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.

Règle de décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse :

Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, l'hypothèse sur la valeur de la proportion p de la population est acceptable, sinon l'hypothèse est rejetée au seuil de 95 %.

**Ex 10-22 : Comparaison avec $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en seconde.**

On considère la loi binomiale $B(50; 0,516)$. Avec GeoGebra, on obtient :



Justifier que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle $[0,38; 0,66]$.

Comparer avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en seconde.

Ex 10-23 : Déterminer l'intervalle de fluctuation

1) Compléter l'algorithme ci-dessous permettant de trouver les entiers a et b , puis l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour une loi binomiale de paramètres n et p . (On prendra $n < 100$)

```

1 from math import factorial
2
3 def binomial( ..... ):
4     return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))*p**k*(1-p)**(n-k)
5
6 n=int(input("n="))
7 p=float(input("p="))
8 s=.....
9 a=.....
10 k=.....
11 while ( ..... ):
12     s=.....
13     if (s>5/200 and a==0):
14         a= .....
15         k= .....
16         b= .....
17 print("l'intervalle de fluctuation à 95 % est [",a,";",b,""])
```

- 2) a) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(50;0,42)$ est l'intervalle $[0,28; 0,56]$.
- b) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(80 ; 0,42)$ est l'intervalle $[0,3125;0,525]$.
- c) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale $B(100 ; 0,42)$ est l'intervalle $[0,32; 0,52]$.
- d) Que peut-on constater ?

3) Une société fabrique des boîtes en plastique de deux couleurs : des vertes et des bleues.

La fabrication est automatisée et la machine est réglée à un niveau de 42 % de boîtes vertes et 58 % de boîtes bleues, correspondant à la demande du marché.

Un test est fait sur un échantillon de 80 boîtes prélevées au hasard.

a) L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes. La machine est-elle dérégulée au seuil de 95 % ?

b) À partir de combien de boîtes bleues et de boîtes vertes obtenues sur un échantillon de 80 boîtes doit-on penser que la machine s'est dérégulée ?

4) a) Que doit-on modifier dans l'algorithme pour avoir un test au seuil de α %, ce qui correspond à l'intervalle :

$$\left[\left(1 - \frac{100 - \text{seuil}}{200} \right); \frac{100 - \text{seuil}}{200} \right]$$

Ex 10-24 : Intervalle de fluctuation

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,12.

1) Déterminer, en utilisant la calculatrice ou un algorithme, l'intervalle I_{100} de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de pannes pour un échantillon de 100 téléviseurs.

2) Une association de consommateurs effectue un test sur 100 personnes ayant ce modèle de téléviseur.

Dans cet échantillon, 17 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat.

Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur ?

3) L'association pense maintenant effectuer un test sur 500 personnes. Déterminer l'intervalle I_{500} de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 500 téléviseurs. Interpréter.

b) Faire tourner l'algorithme pour des seuils de 90 %, 95 % et 99 % . Que peut-on constater ?

Chapitre 11 - LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1) RAPPELS

A) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)					
$\sin x$					
$\cos x$					

Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

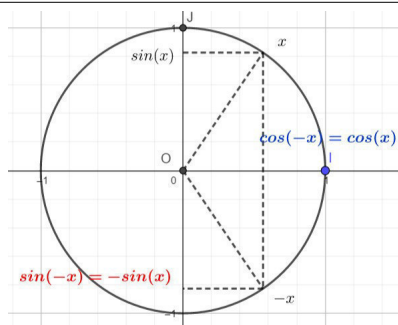
B) QUELQUES PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$,
-
-
-

On note $\cos^2 x = (\cos(x))^2$ et $\sin^2 x = (\sin(x))^2$



2) DÉFINITION

Définition :

- La **fonction cosinus**, notée $\cos$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$
- La **fonction sinus**, notée $\sin$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$

3) PARITÉ

On a vu que pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. On en déduit que :

Propriété :

- La fonction $\cos$ est
- La fonction $\sin$ est

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

- La représentation graphique de la fonction $\cos$ admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.
- La représentation graphique de la fonction $\sin$ admet donc l'**origine du repère** pour **centre de symétrie**.

4) PÉRIODICITÉ

On a vu aussi que pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On dit que :

Propriété :

Les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période

Interprétation graphique dans un repère :

Il suffit de représenter ces courbes sur un intervalle d'amplitude 2π , puis on complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

5) VARIATIONS SUR $[0; \pi]$

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

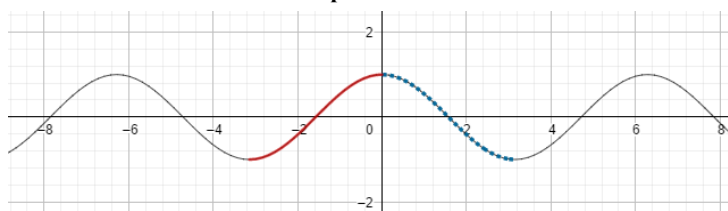
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos			

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin			

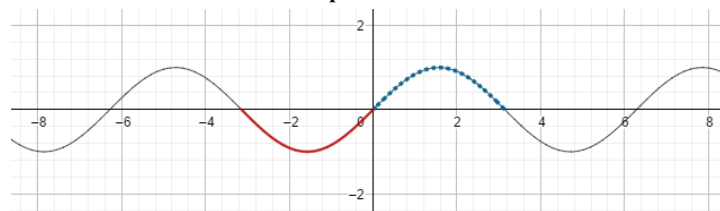
6) COURBES REPRÉSENTATIVES

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0; \pi]$
- La fonction cos est paire. On complète la courbe sur $[-\pi; \pi]$, en utilisant la symétrie d'axe (Ox) .
- La fonction sin est impaire. On complète la courbe sur $[-\pi; \pi]$, en utilisant la symétrie de centre O.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Courbe représentative de la fonction cos



Courbe représentative de la fonction sin



7) DÉRIVÉES

Propriété : admise

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

Remarque :

On retrouve les variations des fonctions sin et cos sur $[0; \pi]$, en étudiant le signe de la dérivée de chacune de ces fonctions :

$$\bullet \quad \forall x \in [0; \pi], \sin x \geq 0 \text{ et donc } \cos'(x) \leq 0 \dots$$

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos x \geq 0 \text{ et donc } \sin'(x) \geq 0 \dots \\ \bullet \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \cos x \leq 0 \text{ et donc } \sin'(x) \leq 0 \dots \end{array} \right.$$

Définition :

On appelle **radian** (*rad*) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.

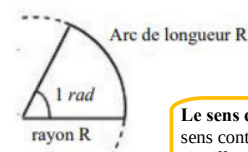
CALCULATRICE :



Il faut bien choisir l'unité : **degré** ou **radian**

Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles

mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$



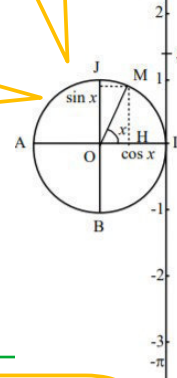
Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'enroulement de la droite numérique :

À tout réel x , on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels. Ce point M est unique.

- L'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- L'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



Lien avec les formules dans un triangle rectangle :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = \cos x \quad \text{et} \quad \sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = \sin x$$

Valeurs remarquables :

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

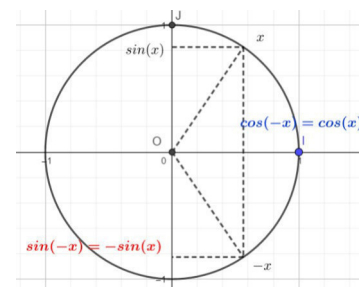
Astuce :
- On écrit 0, 1, 2, 3, 4 dans chacune des cases
- puis on applique la racine carrée
- et on divise par 2

C'est les mêmes résultats que pour le sin, mais dans l'autre sens

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$



On note :

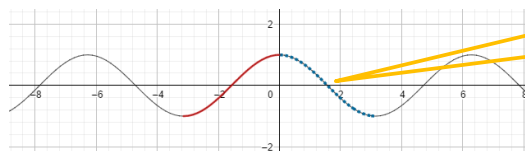
$$\cos^2 x = (\cos(x))^2$$

$$\sin^2 x = (\sin(x))^2$$

La fonction cosinus :

- La **fonction cosinus**, notée $\cos$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$
- La fonction $\cos$ est **paire**. (La représentation graphique de la fonction $\cos$ admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie)
- La fonction $\cos$ est **périodique** de période 2π (Il suffit de représenter la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π , puis on complète la courbe en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$))

Grâce au cercle trigonométrique, on voit que la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0; \pi]$



Parité :

$$\cos(-x) = \cos x$$

Périodicité :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Dérivée :

$$\cos'(x) = -\sin x$$

La fonction sinus :

- La **fonction sinus**, notée $\sin$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$
- La fonction $\sin$ est **impaire**. (La représentation graphique de la fonction $\sin$ admet donc l'origine du repère pour centre de symétrie)
- La fonction $\sin$ est **périodique** de période 2π (Il suffit de représenter la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π , puis on complète la courbe en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$))

Ces deux courbes s'appellent des **sinusoïdes**

Parité :

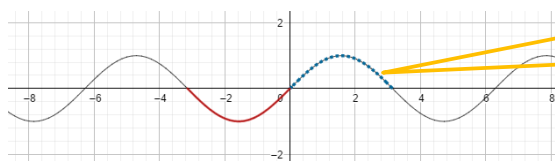
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Périodicité :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Dérivée :

$$\sin'(x) = \cos x$$



Grâce au cercle trigonométrique, on voit que la fonction $\sin$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ puis décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$

Fonctions paires, impaires et périodiques

Ex 11-1 : Symétrie

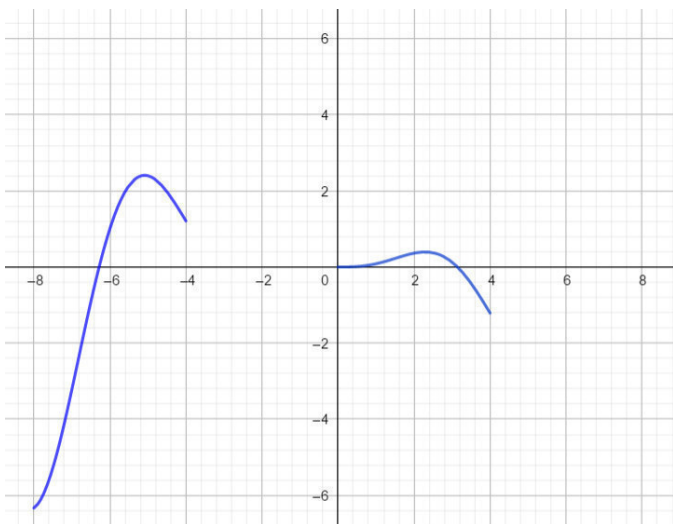
En utilisant une symétrie éventuelle de la représentation graphique, indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

$f(x) = \sin x$		$f(x) = x \cos x$	
$f(x) = \cos x$		$f(x) = \cos x \sin x$	
$f(x) = e^{\cos x}$		$f(x) = (\sin(x))^3$	
$f(x) = \sin(\ln(x))$		$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$	
$f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$		$f(x) = \cos x + \sin x$	

Ex 11-2 :

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur $[-8; 8]$ est partiellement représentée ci-contre.

Sachant que f est impaire, compléter le tracé de C_f .



Ex 11-3 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 3x^2$

1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

Ex 11-4 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$

1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

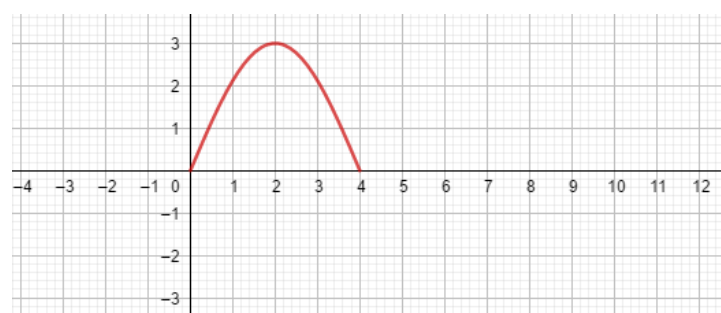
Ex 11-5 : Étudier la parité et la périodicité – compléter la courbe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

1) Vérifier que la fonction f est périodique de période 8.

2) Étudier la parité de f .

3) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4; 12]$ à partir du tracé de f sur $[0; 4]$.
En déduire le tracé de f sur $[-4; 12]$.



Ex 11-6 : Étudier la parité et la périodicité – retrouver la courbe

1) Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, étudier la parité et la périodicité.

a) $f_1 : x \mapsto \cos(2x)$

b) $f_2 : x \mapsto 2\sin(x)-1$

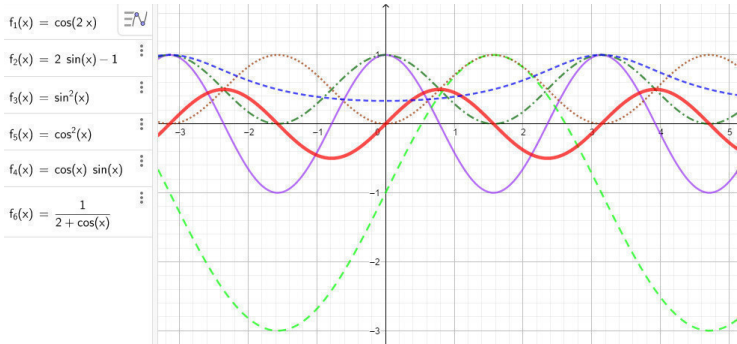
c) $f_3 : x \mapsto \sin^2 x$

d) $f_4 : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$

e) $f_5 : x \mapsto \cos^2 x$

f) $f_6 : x \mapsto \frac{1}{2+\cos x}$

2) En utilisant les résultats précédents, associer chaque fonction à sa représentation graphique.

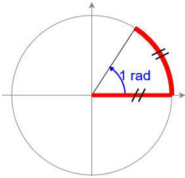


Quelques rappels de trigonométrie

Ex 11-7 : Valeurs remarquables

Compléter le tableau ci-dessous :

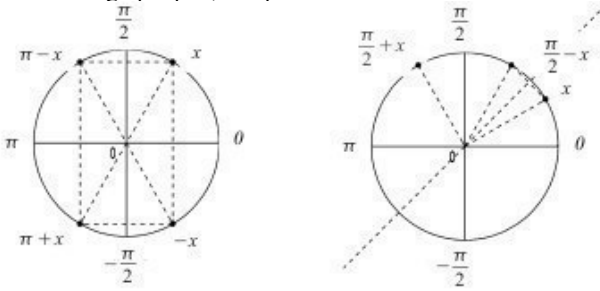
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					



Ex 11-8 : formules à connaître et surtout à retrouver

1) Compléter . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) =$

2) En utilisant ces graphiques, compléter :



$$\cos(-x) = \quad \sin(-x) = \quad \cos(\pi-x) =$$

$$\sin(\pi-x) = \quad \cos(\pi+x) = \quad \sin(\pi+x) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$$

Ex 11-9 : Formules usuelles (anciennement au programme)

On admet que $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

En utilisant ce résultat, associer les formules ci-dessous :

Formules d'addition

$\sin(a-b)$		$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b)$		$\sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\cos(a-b)$	→	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a+b)$		$\sin a \cos b + \sin b \cos a$

En déduire les formules de duplication :

$$\sin(2a) =$$

$$\cos(2a) =$$

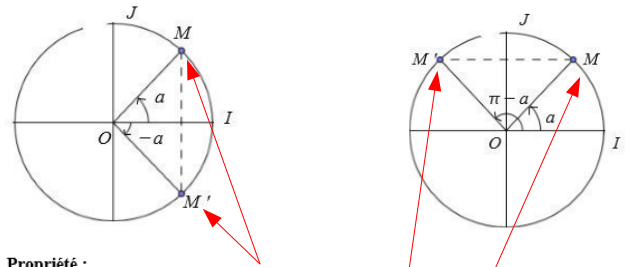
et les formules de linéarisation :

$$\cos^2(a) =$$

$$\sin^2(a) =$$

Ex 11-10 : Déterminer les réels correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus

Méthode :



Propriété :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M' , symétriques par rapport à (OI) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus. On retrouve la formule des angles associés :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $[0; \pi]$

Propriété :

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M' , symétriques par rapport à (OJ) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même sinus. On retrouve la formule des angles associés :

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $\sin x = 0$

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $2\cos x = 1$

6) $\cos x + \sin x = 7$

7) $\cos x + 3 = 2$

8) $4\sin x = -2$

Ex 11-11 : Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :
(Vérifier graphiquement avec la calculatrice)

1) $\cos(2x) = \cos(3x - 1)$

2) $\sin(3x) = \sin(x + 2)$

3) $\cos(3x) = \sin(x)$

Ex 11-12 : Inéquation

Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\cos(\alpha) < \frac{1}{2}$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

2) $\cos(\alpha) < \frac{1}{2}$ et $\alpha \in [0; 2\pi[$

3) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

4) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in [0; 2\pi[$

Dérivées

Ex 11-13 :

Dans chacun des cas déterminer la dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x) = 3\cos x - 5\sin x + x$

2) $f(x) = 3x \cos x$

3) $f(x) = \sin x \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

4) $f(t) = \cos^2 t$

5) $f(t) = \frac{2}{\sin t}$

6) $f(p) = 2p \cos p - \cos 3$

7) $f(r) = \frac{2\cos r - 4}{\sin r}$

8) $f(t) = (3\cos t - 2)^3$

Ex 11-14 : Nombres dérivés et limites

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{3t}$$

Primitives

Ex 11-15 :

Dans chacun des cas déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée.

1) $f(x) = 3\cos x - 5\sin x + x$

2) $f(x) = \sin x \cos x$

3) $f(x) = 12\cos^2 x \sin x$

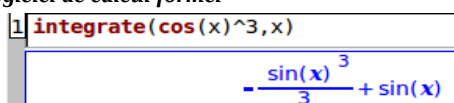
4) $f(x) = \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

5) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 3}$

6) $f(x) = \frac{2 \cos x}{(\sin x + 3)^2}$

Ex 11-16 : Avec un logiciel de calcul formel

Xcas fournit le
résultat suivant :
Justifier ce résultat.



`integrate(cos(x)^3, x)`

$$-\frac{\sin(x)^3}{3} + \sin(x)$$

Ex 11-17 : Avec des fonctions auxiliaires

1) Déterminer les dérivées des fonctions g et h définies par
 $g(x) = x^2 \sin x$ et $h(x) = -2x \cos x$

2) Déterminer la dérivée de la fonction $u = g - h$

3) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par
 $f(x) = x^2 \cos x$

Utiliser les variations des fonctions cos et sin

Ex 11-18 : Variations de fonctions sans calculer la dérivée

1) Déterminer les variations de la fonction f définie par
 $f(x) = 5 - 2 \sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) Déterminer les variations de la fonction g définie par
 $g(x) = 2 \cos(x) - 1$ sur $[-\pi; \pi]$.

Ex 11-19 : Encadrements

1) Dans chacun des cas, encadrer $\cos a$:

a) $\frac{\pi}{3} \leq a \leq \frac{5\pi}{6}$

b) $-\frac{3\pi}{4} \leq a \leq 0$

2) Dans chacun des cas, encadrer $\sin a$:

a) $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{3}$

b) $\frac{3\pi}{4} \leq a \leq \frac{5\pi}{4}$

Ex 11-20 : Variations de fonctions en calculant la dérivée

Dans chacun des cas, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle I donné.

1) $f(x) = 2\cos x + 5x - 5$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2 - 4x + 4\sin x$ sur $I = [0, \pi]$

3) $f(x) = \sin x \cos x$ sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Ex 11-21 : Théorèmes de comparaison ...

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3\cos x + 1$

1) Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 4$

2) Résoudre les équations $f(x) = x - 2$ et $f(x) = x + 4$

3) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1) et 2).

4) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

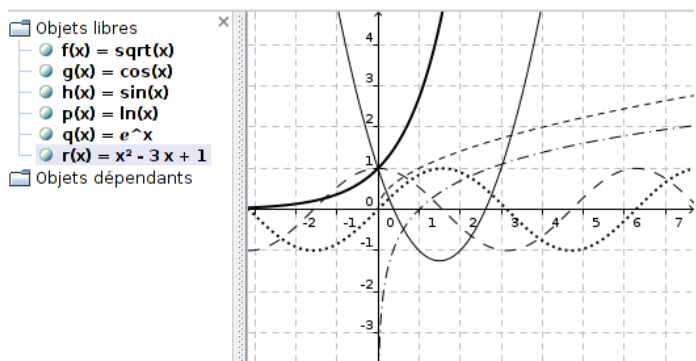
5) La fonction f est-elle bornée ?

6) Étudier les variations de la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Connaître les courbes des fonctions cos et sin

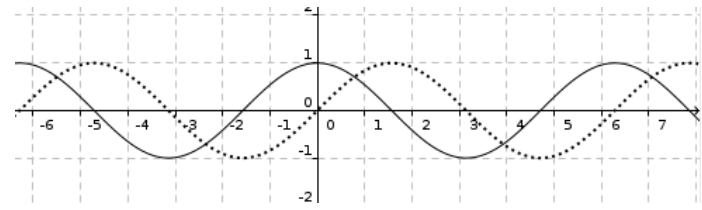
Ex 11-22 :

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 11-23 : Résolutions graphiques d'équations

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :



a) $\cos x = 1$

b) $\sin x = 1$

c) $\cos x = 0$

d) $\sin x = 0$

e) $\cos x = \sin x$

f) $\sin x = x$

Ex 11-24 : La courbe de la fonction sin et la droite d'équation $y=x$

Soit C la courbe de la fonction sinus et T la tangente à C au point d'abscisse 0.

1) Déterminer une équation de T .

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$

3) Calculer $f(0)$ et en déduire la position de T par rapport à C.

Autres fonctions trigonométriques

Ex 11-25 :

1) Encadrer $f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$, et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Dans chaque cas, montrer que f est de signe constant :

a) $f(x) = \cos(3x) + 2$

b) $f(x) = 5 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$

Ex 11-26 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1) Étudier la parité de f .

2) Démontrer que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

4) Établir le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

2) Justifier les limites précédentes.

Ex 11-27 : La fonction tangente

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

3) Démontrer que f est périodique de période π .

4) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.

Divers

Ex 11-28 : Limites et théorèmes de comparaison

1) Conjecturer les limites suivantes à partir de l'outil de votre choix.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \sin x + 4x - 5)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin x}{x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{9 - x^2}$

Ex 11-29 : Avec une suite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \frac{\pi}{5} \cos(2\pi x)$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

1) Prouver que la suite (u_n) est croissante.

2) La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}^+$?

Chapitre 12 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - PRIMITIVES

1) LA NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Définitions :

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f .
L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y' , y'' ...
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde.
- Quand une équation est de la forme $y + ay' + by'' + \dots = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.

Exemple : Si on monte en série une diode, une bobine et une résistance, l'équation différentielle qui caractérise l'intensité est $i' + \frac{R}{L}i = 0$

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

Remarques :

- Voilà donc un exemple d'équation différentielle : On cherche une fonction y , telle que $y' = f$.
- La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.
- De nombreuses fonctions n'admettent pas de primitives.
- On admet ici, mais nous le démontrerons dans le chapitre sur les intégrales que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Preuve :

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
Donc G est une primitive de f sur I .
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.
La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

Soit f une fonction admettant des primitives sur I .
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

Preuve :

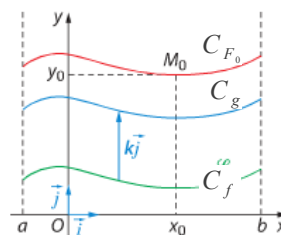
$$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$$

Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs

Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0; y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Par ailleurs, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$)		
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)		
$f(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = \cos(x)$		
$f(x) = \sin(x)$		
$f(x) = e^x$		

On retiendra aussi le tableau suivant :

Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I , on a :

Une fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -1$)	
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	

3) ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Une équation linéaire du premier ordre **homogène** est une équation linéaire de la forme $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + ay = 0$ d'inconnue la fonction y , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

On démontre facilement que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$.

Remarques :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$.

Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, ...

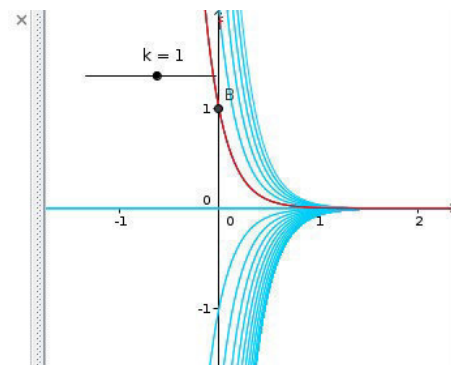
L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k .

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=1$.

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Objets libres
 $k = 1$
 Objets dépendants
 $B = (0, 1)$
 $f(x) = e^{(-5x)}$



Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 5$

Propriété : Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant (preuve en exercice)

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k e^{-5x} + \frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k : $k=10$, $k=9$, ...

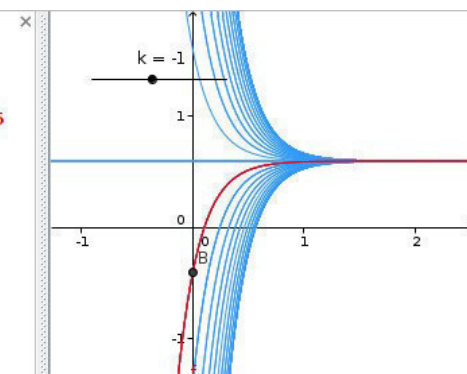
L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0) = -0,4$.

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale donnée

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Objets libres
 $k = -1$
 Objets dépendants
 $B = (0, -0.4)$
 $f(x) = -e^{(-5x)} + 3/5$



Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 3$ telle que $f(0) = 1$.

4) UN AUTRE EXEMPLE : ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE (non exigible)

On considère uniquement les équations linéaires homogènes du second ordre du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction y , c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

Remarque :

Dans un circuit RC en électricité, l'écriture entre la tension et l'intensité aboutit à une équation du type $U''(t) + \frac{1}{RC} U(t) = 0$

Propriété : Un exemple d'équation linéaire du second ordre homogène

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x) \text{ (où } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R})$$

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$ (où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$)

On a admis que ces fonctions sont les seules solutions possibles. Il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions.
Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = k_1 \cos(5x) + k_2 \sin(5x)$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f''(x) + 25f(x) =$$

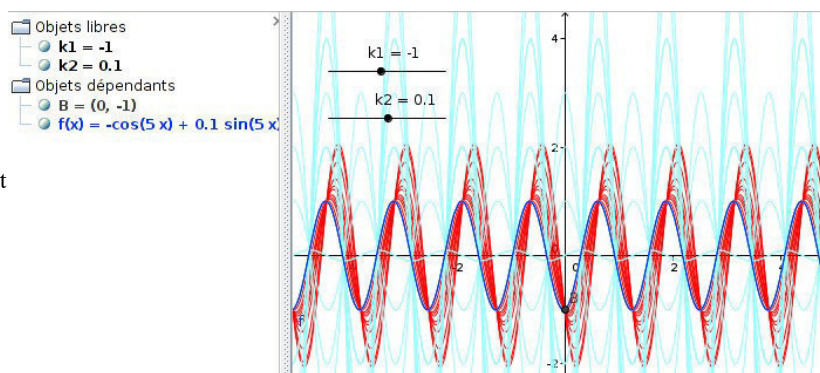
Remarque :

L'équation différentielle $y'' + 25y = 0$ peut aussi se noter $f''(x) + 25f(x) = 0$ ou encore $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 25y(x) = 0$.

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k_1 et k_2 .

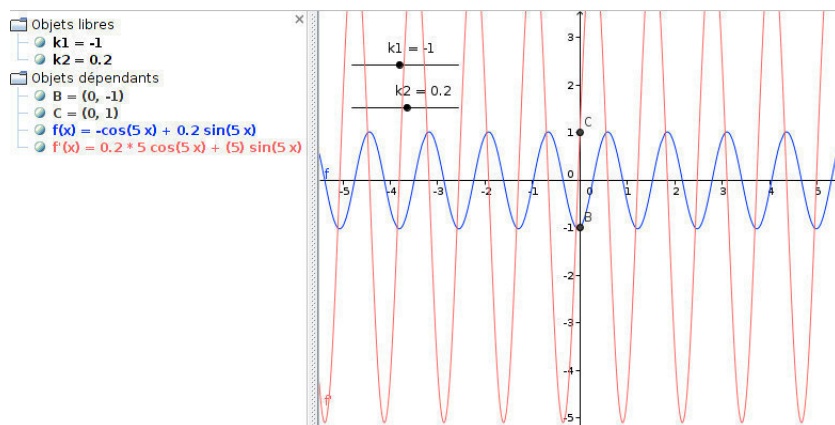
L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k_1 et k_2 .

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0) = -1$.



Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions f et f' .

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.



Propriété : Solution vérifiant des conditions initiales données

Pour tous réels x_0 , y_0 et z_0 , l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$

Remarque :

Dans les problèmes liés à une expérience physique, les conditions imposées par l'expérience sont généralement les conditions à l'instant $t = 0$ (Position et vitesse à l'instant $t = 0$ par exemple)

Autre écriture des solutions :

Les représentations précédentes sont périodiques et ont une forme de sinusoïde. On peut donc imaginer une autre écriture des solutions.

En effet, pour faciliter l'exploitation d'une solution d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}^*$), on est souvent amené à l'écrire sous la forme $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$.

La transformation qui permet de passer d'une écriture à l'autre est admise.

Cette deuxième écriture est souvent privilégiée dans les problèmes de physique. (φ est appelé le déphasage)

Primitives :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

L'usage est d'utiliser la majuscule correspondante pour noter une primitive d'une fonction.

Lien entre deux primitives :

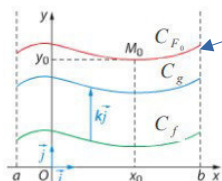
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet **une infinité** de primitives.

Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Condition initiale et unicité :

Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$



- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I

Fonctions	Primitives ($k \in \mathbb{R}$)	Intervalle
$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$

On retrouve la même formule en posant $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Règles de calculs :

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

Attention :

Dans de nombreuses situations, on ne sait pas calculer une primitive. (Même si elle existe)

Une fonction de la forme	... admet pour primitive sur I les fonctions :
$u' e^u$	$e^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$	$-\frac{1}{u}$

En plus du cours

L'inconnue est souvent notée y et les dérivées successives sont notées y' , y'' ...

Équations différentielles :

L'équation différentielle $y' + 5y = 0$ peut aussi se noter $f'(x) + 5f(x) = 0$ ou encore $\frac{dy(x)}{dx} + 5y(x) = 0$

Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction f .

- Quand une équation est de la forme $y + ay' + by'' + \dots = 0$, on dit qu'elle est **linéaire**.
- Une **équation du premier ordre** est une équation qui ne contient que la fonction et au moins sa fonction dérivée.
- Une **équation du second ordre** est une équation qui ne contient que la fonction, sa fonction dérivée et au moins sa dérivée seconde. (Hors programme en terminale)

Équations différentielles du premier ordre :

Équation linéaire du premier ordre homogène :

La somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = k e^{-ax} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ (où $a \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Pour tout couple de réel $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Essayez donc ... ça marche

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant :

Méthode générale :

Hors programme, mais ... tellement importante !

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Primitives

Ex 12-1 : $y' = f$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 2$

b) $y' = e^x - 1$

c) $y' = x^2$

2) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$, des fonctions f , g et h définies par :

a) $f(x) = 2$

b) $g(x) = e^x - 1$

c) $h(x) = x^2$

Ex 12-2 : Déterminer les primitives

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

2) $f(x) = -\frac{5}{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$

3) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{3}e^x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 12-3 : Déterminer une primitive vérifiant une condition

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x) = 3e^x + x^2 + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 0$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1) = 4$

Ex 12-4 : Primitives de la fonction racine carrée

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .

En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 12-5 : Primitives de fonctions composées

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = x^3(x^4 + 1)^8$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $I = \mathbb{R}^+$

3) $f(x) = 5e^{2x-3}$ sur $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I = \mathbb{R}^+$

5) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \left(x^5 - \frac{1}{6}\right)(x^6 - x)^4$ sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^6}$ sur $I =]\sqrt{2}; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Ex 12-6 : Un cas compliqué

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du premier ordre homogènes

Ex 12-7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 3y = 0$

2) $y' + 2y = 0$

3) $2y' - y = 0$

Ex 12-8 : Avec une condition initiale

Soit l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + y = 0$

1) Résoudre l'équation (E_0) .

2) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Équation linéaire du premier ordre avec second membre constant

Ex 12-9 : Découverte d'une propriété fondamentale

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 5$

1) Résoudre l'équation $(E_0) : y' - 2y = 0$

2) Trouver une solution particulière y_p de $(E) : y' - 2y = 5$.

3) Montrer que si y_0 est solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y' - 2y = 0$, alors $y_0 + y_p$ est solution (E) .

4) Inversement montrer que, si y est une autre solution de l'équation (E) , alors $y - y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) .

On en déduit la propriété suivante, que nous pouvons généraliser :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

5) En appliquant cette propriété, résoudre l'équation (E).
Vérifiez que ce résultat correspond bien à la formule donnée dans le cours pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Ex 12-10 : Appliquer la formule du cours

Soit l'équation différentielle (F): $3y' - 2y = \ln 2$

1) En appliquant la formule du cours, résoudre l'équation (F).

2) Déterminer la solution g de (F) qui vérifie la condition initiale $g(0) = 1$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre non constant

Pour les ex11 et 12 on appliquera la propriété déjà montrée sur un exemple :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Ex 12-11 :

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = x^2 - x - 1$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' - y = 0$.

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 1$

Ex 12-12 : Avec un peu de trigonométrie

On considère l'équation différentielle :

(E): $y' - 3y = \sin x$

1) Résoudre l'équation sans second membre associé : (E_0): $y' - 3y = 0$

2) Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie par : $p(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E)

3) En déduire les solutions de (E).

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 12-13 : Baccalauréat S – Extrait de Métropole juin 2003

Équations différentielles

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante : Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$(E) \quad g'(t) = ag(t) \left[1 - \frac{g(t)}{M} \right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E') \quad y' + ay = \frac{a}{M}.$$
 b. Résoudre (E').
 c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).
2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.
 - a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.
 - b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

Chapitre 13 - INTÉGRALES

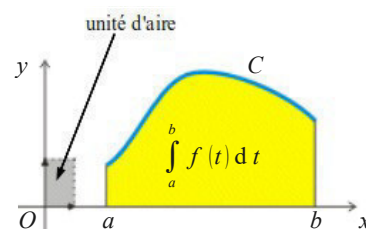
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)dt$ ".

- La variable t est appelée variable "muette".

On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

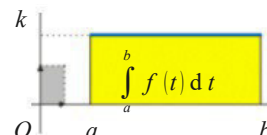
Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2 .

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a; b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :

- Si $a=b$, alors

- Pour $k > 0$, . Le domaine D est un rectangle.

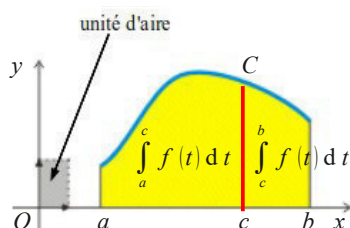


B) RELATION DE CHASLES

Propriété : admise

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés : admise

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

D) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$:

- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors
- si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \leq b$ on peut intégrer l'inégalité $f \leq g$ sur $[a; b]$.

Preuve : *preuve de la deuxième propriété.*

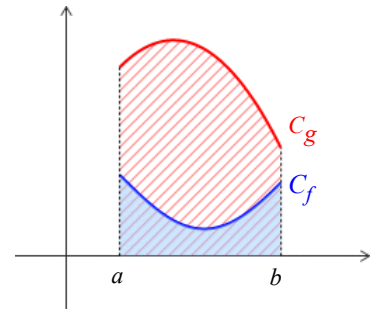
Pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$

$a \leq b$, la propriété précédente permet donc d'affirmer que $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$

Ainsi $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :



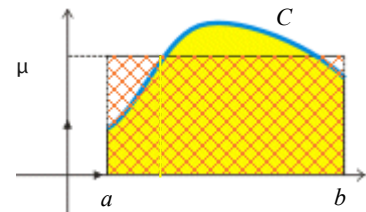
E) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Le nombre μ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b .

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b - a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t) dt$.



2) ÉTUDE DE $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Preuve : *idée de preuve (Cas où f est croissante) exigible*

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans $[a; b]$ par $T(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$

Si $h > 0$, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ correspond à l'aire

(Si $h < 0$, on raisonne de même avec $F(x_0) - F(x_0 + h)$)

Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$

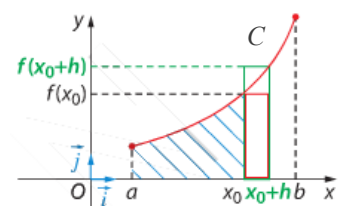
On a alors :

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0 , on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f(x_0)$$

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.



Remarque :

Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I .

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve : exigible

On a vu que $x \mapsto H(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Soit F une primitive de f sur I , on a donc : $F(x) = H(x) + k = \int_a^x f(t) dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Donc $F(a) =$ _____ et $F(b) =$ _____

Ainsi $F(b) - F(a) =$ _____

Remarque : On note aussi $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve : idée de preuve (Cas d'un intervalle fermé en admettant que f a un minimum)

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ et que f admet un minimum m sur $[a; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a; b]$.

On définit alors la fonction F sur $[a; b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$

F est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout $x \in [a; b]$: $F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a; b]$.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE**Théorème-définition :**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors, pour tous réels a et b de I , la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t) dt$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b , on a : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt =$ _____

On en déduit que :

4) INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Preuve : exigible

On sait que u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ de dérivées u' et v' continues sur $[a; b]$. On en déduit que $u'v + uv'$ est continue sur $[a; b]$. On sait aussi que $(uv)' = u'v + uv'$.

On peut donc dire que uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a; b]$. On a alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) + u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Remarque :

On applique cette formule lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de deux fonctions à condition que $\int_a^b u'(x) v(x) dx$ soit plus facile

à calculer que $\int_a^b u(x) v'(x) dx$, ce qui est le cas par exemple dans les situations suivantes :

- une fonction polynôme u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction polynôme u et une fonction logarithme
- une fonction exponentielle u et une fonction sinus ou cosinus
- une fonction sinus ou cosinus u et une fonction exponentielle

Il faut parfois répéter plusieurs fois cette méthode.

Exemple :

Calculer $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$

Ce qui donne

u et v sont bien dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les dérivées u' et v' sont bien continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx =$$

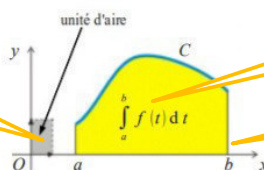
Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour comprendre la notation, on peut imaginer que l'on fait la « somme » de a à b des rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur se rapprochant de zéro notée dt .

On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f , et on note $\int_a^b f(t) dt$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan (appelée **domaine**) limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 2 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm²



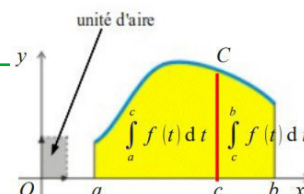
La variable t est appelée "muette". On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable.

a et b sont les bornes de l'intégrale

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel $c \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$



Bornes inversées :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad (\text{en effet par extension de la relation de Chasles : } \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0)$$

Linéarité de l'intégration :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. On a :

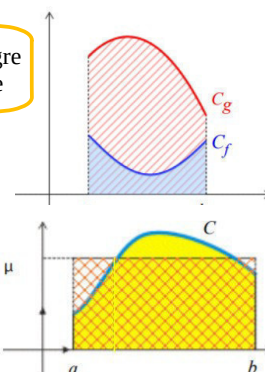
$$\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

Positivité et ordre :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$:

- Si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

On dit qu'on intègre l'inégalité positive



Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b .

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Théorème fondamental :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

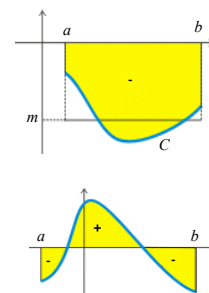
Pour tous réels a et b de I , la différence $[F(t)]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

Interprétation graphique :

On dit parfois que $\int_a^b f(t) dt$ est l'**aire algébrique** du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a; b]$, et négative si f est négative sur $[a; b]$.

Si f est une **fonction continue et négative** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Si f est une **fonction continue qui change de signe** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Intégration par partie :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Intégrale d'une fonction continue et positive
Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 13-1 : Vrai ou faux

- 1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.
- 2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.
- 3) Le résultat de $\int_a^b f(x)dx$ dépend de x .
- 4) Si f est une fonction positive et si $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ peut être strictement négative.

Ex 13-2 :

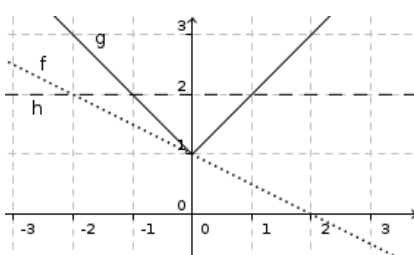
Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a; b]$, puis calculer son intégrale sur $[a; b]$.

- 1) $f(x) = 3x - 1$ sur $[2; 5]$

- 2) $f(x) = |x - 3|$ sur $[1; 4]$

Ex 13-3 : À partir d'une représentation graphique

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1; 1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



Ex 13-4 : Avec une fonction affine par morceaux

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2; 4]$.

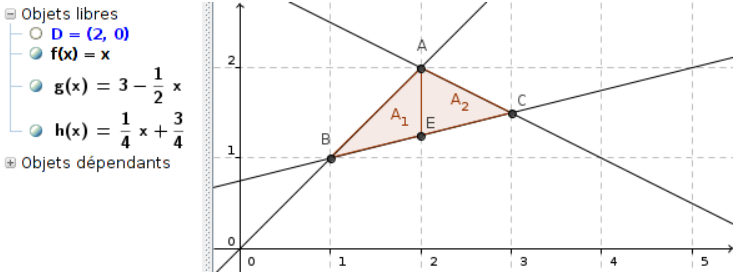
- 2) Déterminer $\int_{-2}^4 f(x)dx$

Ex 13-5 : Avec un demi-cercle

- Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
- 1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.
- 2) Montrer que C_f est un demi-cercle.

3) Déterminer $\int_{-1}^1 f(x)dx$

Ex 13-6 :



- 1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

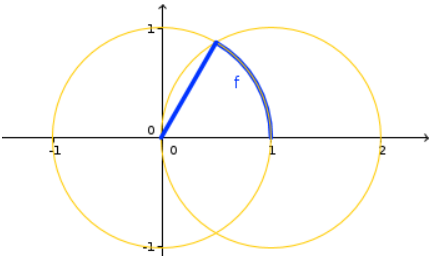
2) En calculant $\int_1^2 f(x)dx$ et $\int_1^2 h(x)dx$ déterminer l'aire A_1 .

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

Ex 13-7 :

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)

Déterminer $\int_0^1 f(x)dx$



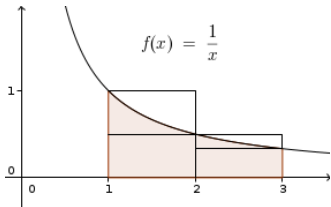
Ex 13-8 : Algorithmme : sommes de Riemann

On considère l'algorithmme ci-dessous :



1	a=float(input("a="))	lire,a,b,p
2	b=float(input("b="))	s1 ← 1
3	p=float(input("p="))	s2 ← 0
4	s1=1	n ← 0
5	s2=0	tant que (s1-s2)>p faire
6	n=1	n ← n+1
7	while (s1-s2>p):	s1 ← 0
8	n=n+1	s2 ← 0
9	s1=0	Pour i allant de 0 à n-1
10	s2=0	s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
11	for i in range(0,n):	s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
12	s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)	Fin pour
13	s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)	Fin tant que
14	print(s1)	Afficher s1,s2
15	print(s2)	

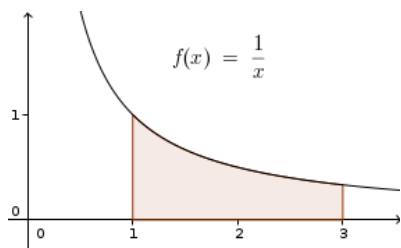
- 1) On choisit $p=0,1$.
- Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?



À quoi correspond cette aire ?

La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme.
Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s_1 et s_2 .

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s_1 et s_2 au début de l'algorithme

4) Faire tourner le programme et déterminer ce qu'il renvoie pour $p=0,01$

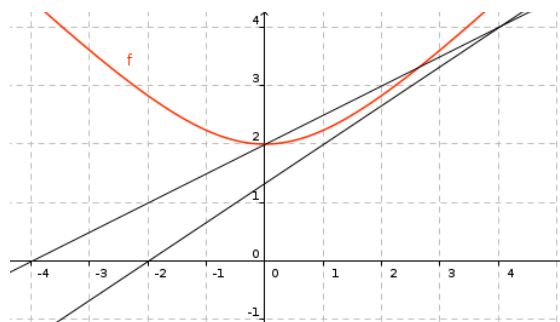
Propriétés de l'intégrale

Ex 13-9 : Encadrer une intégrale

1) Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $1 \leq e^{x^2} \leq e$, puis en déduire un encadrement de $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$

2) Démontrer que pour tout $x \in [0;8]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 3$, puis en déduire un encadrement de $J = \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$.



En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$

Ex 13-10 : Encadrer une intégrale - Relation de Chasles

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = e^{x^3}$.

On pose $I = \int_{-1}^1 e^{x^3} dx$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$.
En déduire un encadrement de I .

3) Démontrer que :

- $\forall x \in [-1; 0]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$
- $\forall x \in [0; 1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I.

On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 ... et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I ... l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'Ex 13-8 !

Ex 13-11 : Valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n; n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n; n+1]$, $e^{-(n+1)} \leq e^{-x} \leq e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive

Ex 13-12 :

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$

2) $\int_{-1}^1 x^4 (x^5 - 1)^2 dx$

3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}} du$

4) $\int_0^1 e^x (e^x + 9)^3 dx$

Ex 13-13 : Décomposition en éléments simples

Soit f la fonction définie sur $I = [0; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$

1) Démontrer que f est continue et positive sur $I = [0; 5]$.

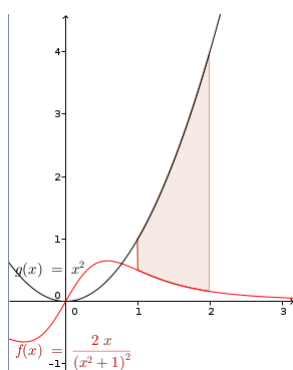
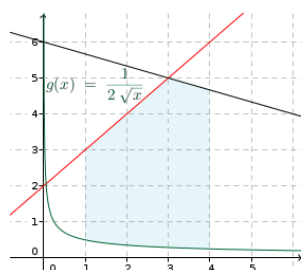
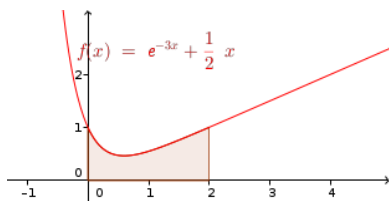
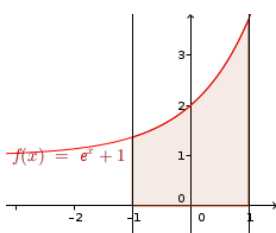
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

3) En déduire $\int_0^5 f(x) dx$

Ex 13-14 : Calculs d'aires

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

Remarque : $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$



Ex 13-15 : Interprétation de Xcas

```
g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)
```

(t -> 3*exp((-3)*t), x -> $\int_0^x g(t) dt$, -exp(-3*x)+1, 1)

Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Ex 13-16 : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = e^{-t^2}$.

Pour tout $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1) La fonction F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$. (On fera apparaître un taux d'accroissement)

Ex 13-17 : Une primitive de la fonction ln

Soit F et G deux fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$ et $G(x) = x \ln(x) - x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $F(x) = G(x) + k$.

3) Calculer k .

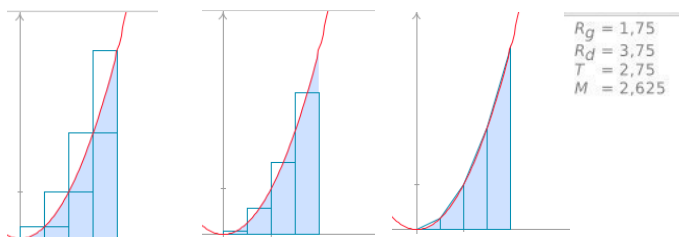
4) Calculer $\int_1^e \ln(t) dt$



Ex 13-18 : Différentes méthodes d'approximation

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\int_1^2 x^2 dx$.

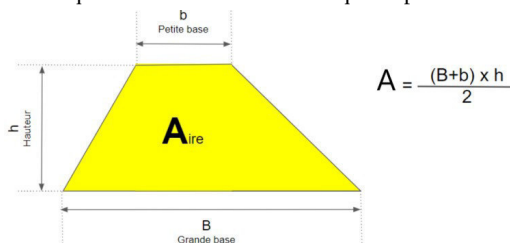
1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente.

2)

Rappel :



Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il applique la méthode des trapèzes (avec 10 trapèzes) à $\int_1^2 x^2 dx$.

```

1 def f(x):
2     return ( ..... )
3
4 def MethodeTrapeze(f, a, b, N):
5     pas = .....
6     x = .....
7     Aire = .....
8     for i in range(N):
9         AireTrapeze = .....
10        Aire = .....
11        x = .....
12    return Aire
13
14 print(MethodeTrapeze(f, 1,2,10))
    
```

3) Calculer $\int_1^2 x^2 dx$ et comparer avec l'approximation obtenue.

4) a) Tester le programme [MethodeTrapeze.py](#) (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode des trapèzes dessinée avec 10 trapèzes.

b) Modifier le programme pour visualiser la méthode des trapèzes avec 12 trapèzes pour calculer $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1 dx$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 13-19 : Vrai ou faux

1) Si f est une fonction négative et si $a < b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.

2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.

3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.

4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ est fausse.

Ex 13-20 : Propriétés de l'intégrale

Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$, f et g des fonctions continues sur $[a; b]$.

On pose $I = \int_a^b f(x) dx$ et $J = \int_a^b g(x) dx$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a f(x) dx$

2) $\int_a^b f(x) - g(x) dx$

3) $c \in [a; b]$, $\int_b^c g(x) dx - \int_a^c g(x) dx$

4) $\int_a^b -3x + \frac{2}{3}g(x) dx$

Ex 13-21 : Calculer une intégrale avec une primitive

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

$$1) \int_{-2}^2 \frac{e^x - 1}{(e^x - x)^2} dx$$

$$2) \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \ln(x) dx$$

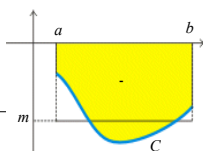
$$3) \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$$

Ex 13-22 : Calculs d'aires

Propriété :

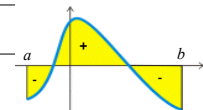
Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On dit parfois que $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a; b]$, et négative si f est négative sur $[a; b]$.

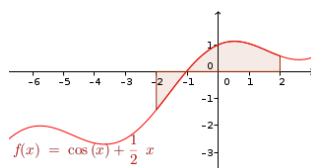
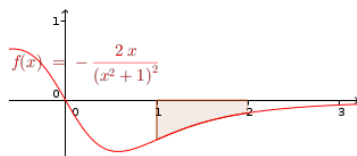


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

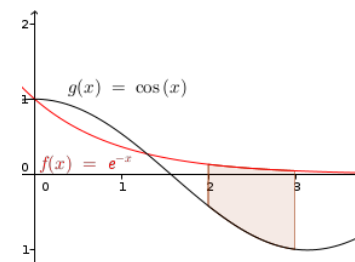
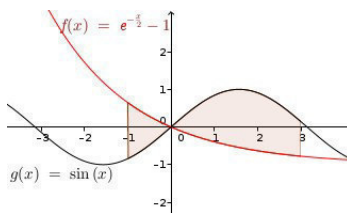


Remarques :

- Comme on le verra plus tard $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$

- En translatant du vecteur $k \vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, tout devient positif ... En utilisant

$$\int_a^b f(x) + k dx - \int_a^b g(x) + k dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx, \text{ tout devient simple !}$$



Ex 13-23 : Décomposition en éléments simples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

1) Déterminer quatre réels a , b , c et d tels que, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+2}$$

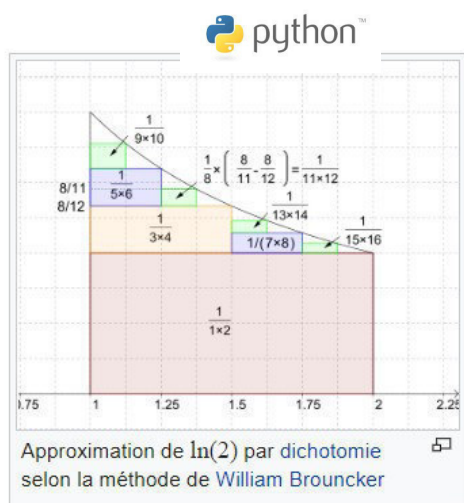
2) En déduire $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Ex 13-24 : Un encadrement de de $\ln 2$

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) a) En déduire que $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) Déterminer un encadrement du réel $\ln(2)$

Ex 13-25 : Une approximation de $\ln(2)$ - Algorithme de Brouncker

En 1668, [William Brouncker](#) publie le développement en série de $\ln(2)$, résultat qu'il a établi dès 1657 en découpant l'aire sous l'hyperbole en rectangles venant boucher les trous par [dichotomie](#) :

$$\ln(2) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{(2k+1) \times (2k+2)} + \dots$$

En utilisant cette formule, compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin d'obtenir une approximation de $\ln(2)$ pour $k=100$:

```

1 def Brouncker ( N ):
2     Ln_2 = .....
3     .....
4     Ln_2 = .....
5     return Ln_2
6
7 print(Brouncker(100))

```

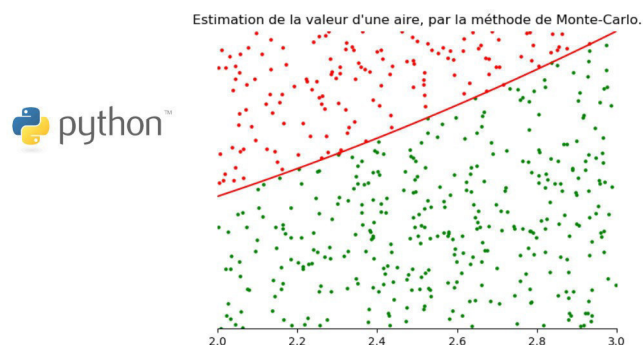
Ex 13-26 : Une approximation de $\ln(2)$ - Méthode Monte-Carlo

Exemple pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 dx$

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres.

- On définit un rectangle R de cotés $[2;3] \times [0; y_{\max}]$ tel que $0 \leq x^2 \leq y_{\max}$ pour tout $2 \leq x \leq 3$

- On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.



1) Déterminer $y_{\max}$

2) Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de la fonction carrée ?

3) Que nous dit la loi des Grands Nombres ?

4) Le programme ci-dessous écrit en Python permet d'appliquer la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de $\int_2^3 x^2 dx$ avec $n=1000$.

```

1 import random
2
3 def f(x):
4     return (x**2)
5
6 def MethodeMonteCarlo(f, a, b, yMax, n):
7     compteur = 0
8     for i in range(n):
9         x = random.uniform(a,b)
10        y = random.uniform(0,yMax)
11        if (f(x) >= y):
12            compteur = compteur + 1
13
14    Aire = yMax * (b - a) * compteur / n
15    return Aire
16 print(MethodeMonteCarlo(f, 2,3,9,1000))

```

a) Testez le programme [MethodeMonteCarlo.py](#) (à consulter sur les corrections de pierrelux.net : ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Monte-Carlo et vérifier qu'on obtient une bonne approximation de $\frac{19}{3}$.

b) Modifier quelques lignes de ce programme pour obtenir une approximation de $\ln(2)$.

Ex 13-27 : Étude d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

1) a) Calculer I_1 .

b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par 1.

Que peut-on en déduire ?

2) a) Établir que pour tout $n > 0$, $I_n = 1 - J_n$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$.

c) En déduire que pour tout $n > 0$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n > 0$, la fonction F_n , définie par $F_n(x) = \frac{x}{n} \ln(1+x^n)$ est dérivable sur $[0; 1]$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $n > 0$, $J_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} K_n$.

c) Étudier les variations et le signe de la fonction F , définie par $F(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0; 1]$.

En déduire que pour tout $n > 0$, $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(I_n - 1) + \ln(2))$

Ex 13-28 : La constante d'Euler

Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n)$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer, en encadrant la fonction inverse sur l'intervalle $[k; k+1]$, que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

3) Établir, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right)$$

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
Sa limite que l'on ne cherchera pas à déterminer, est appelée la constante d'Euler.

Intégration par parties**Ex 13-29 : Avec une intégration par parties**

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant une intégration par parties :

1) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

2) $\int_{-1}^1 x e^x \, dx$

3) $\int_2^4 x \ln x \, dx$

4) $\int_1^e \ln x \, dx$

5) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$

Ex 13-30 : Avec deux intégrations par parties

Déterminer les intégrales ci-dessous en effectuant deux intégrations par parties successives :

1) $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) \, dx$

$$2) \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

Ex 13-31 : Avec deux intégrations par parties et en résolvant une équation

1) Déterminer $\int_0^\pi \cos x e^x dx$ en effectuant deux intégrations par parties successives.

2) a) En posant $u(x)=\sin x$ et $v'(x)=\sin(x)$, expliquer le problème de cette méthode pour le calcul de $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

b) Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la formule de trigonométrie : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Essayez ...

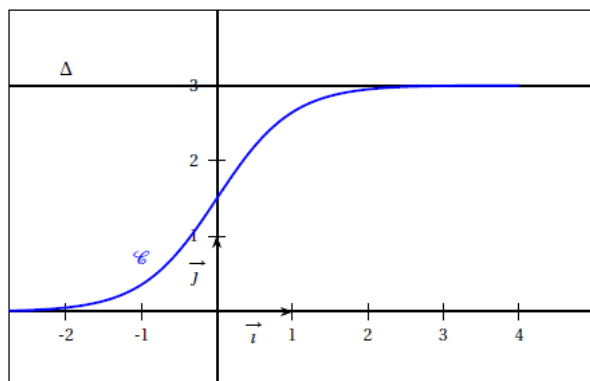
EXERCICES DE TYPE BAC*(Les intégrales ne sont plus au programme du bac)***Ex 13-32 :** Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - Ex 13-1

Avec la fonction exp – théorème des bijections – intégrales – domaines – aires

Partie ASoit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie BSoit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

- Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
- On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
- Soit a un réel strictement positif.
 - Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.
 - Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.
 - On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ f(x) & \leq y \leq 3 \end{cases}$$
 Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

Ex 13-33 : Baccalauréat S Métropole juin 2006 - Ex 13-2

Avec la fonction exp – suites – intégrales – intégration par parties pour mettre en place une relation – domaines – aires

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer?
 - Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

- Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
 - Calculer I_1 , puis I_2 .
 - Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.
3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

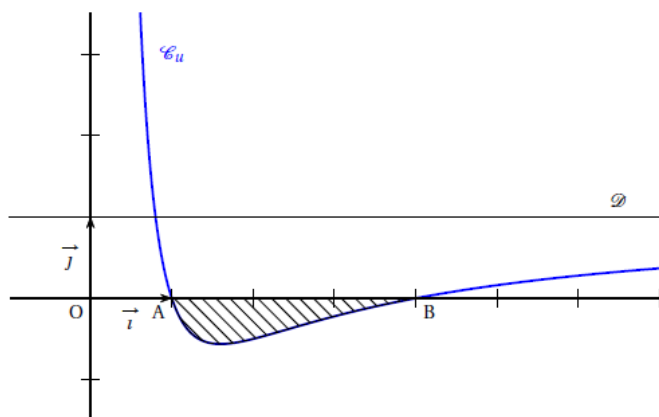
Ex 13-34 : Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - Ex 13-1Avec la fonction $\ln$ – domaines – aires – théorème des bijections**Partie A**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathcal{C}_u$ passe par les points $A(1; 0)$ et $B(4; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a .
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Ex 13-35 : Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004 - Ex 13-2

Avec la fonction $\ln$ – intégration par parties pour mettre en place une relation

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a .
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

- b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Chapitre 14 - TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES

1) TRANSFORMATIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

A) TRANSFORMATION AFFINE

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.

On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X .

La variable aléatoire $Y = aX + b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve : non exigible

On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X . On note $p_i = P(X = x_i)$ (pour i allant de 1 à n)

On a alors $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ et $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$

$$\bullet \quad E(aX + b) = \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b) =$$

$$\text{Or } E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = 1. \text{ On en déduit que } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b)^2 - E(aX + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i a^2 x_i^2 + p_i 2abx_i + p_i b^2) - (a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= \end{aligned}$$

$$\text{Or } 2ab \sum_{i=1}^n p_i x_i = 2abE(X) \text{ et } b^2 \sum_{i=1}^n p_i = b^2 \times 1 = b^2 \text{ Ainsi } V(aX + b) = a^2 \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2 \right) + 2abE(X) + b^2 - 2abE(X) - b^2 = a^2 V(X)$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,7$ et soit $Y=2X-3$

On a $E(X)=6 \times 0,7=4,2$ et $V(X)=6 \times 0,7 \times (1-0,7)=1,26$

On a donc :

$$E(Y) = \quad \quad \quad \text{et } V(Y) =$$

B) SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Définition :

Soit X et Y deux variables aléatoires.

$X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y .

Exemple :

Si $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ et $Y(\Omega) = \{10; 20\}$ alors $(X+Y)(\Omega) =$

Propriété : *admise*

Soit X et Y deux variables aléatoires . On a :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Cette propriété et $E(aX)=aE(X)$ caractérise

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,7$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$.

$X+Y$ est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0,1,2,\dots,16\}$ et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=6\times 0,7+10\times 0,2=6,2$

Propriété : *admise*

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes** . On a :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

- On parle alors de

- Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$

2) INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF

Propriété : *admise*

Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif . On a :

$$P(|X-E(X)|\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}$$

- δ est la lettre grecque

- La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de $E(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

- $[E(X)-\delta; E(X)+\delta]$ est

Remarque : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

Cas particulier : $\delta=2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X .

On obtient $P(|X-E(X)|\geq 2\sigma(X))\leq\frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}\Rightarrow$

Ce qui signifie que la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs s'écartant de son espérance d'au moins le double de son écart type est inférieure à $\frac{1}{4}$.

3) LOI DES GRANDS NOMBRES : LE CAS PARTICULIER DE LOI BINOMIALE

Propriété : *admise*

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p .

Pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , associée à la i -ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire . On a donc $P(X_i=1)=p$

- La variable aléatoire $S_n=\sum_{i=1}^n X_i=X_1+X_2+\dots+X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.

- S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Définition et propriété : admise

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n , on obtient :

$$P(|S_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

Remarques : En utilisant l'évènement contraire on obtient :

et

4) LOI DES GRANDS NOMBRES**Définition:**

Soit n expériences aléatoires identiques et indépendantes et $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires toutes de même loi associées à ces expériences.

On note à nouveau $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$

Théorème : la loi des grands nombres

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.

On répète n fois cette expérience de manière indépendante.

On obtient alors un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, suivant toute la même loi et donc d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} \quad (\text{inégalité de concentration})$$

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand le taille de l'échantillon tend vers l'infini. Ce qui s'écrit de manière mathématiques $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Transformation affine de variables aléatoires :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.

On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X . La variable aléatoire $Y = aX + b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

Espérance et variance :

$$\text{On a : } E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Somme de deux variables aléatoires :

Soit X et Y deux variables aléatoires.

$X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs toutes les sommes possibles des valeurs de X et de Y .

Espérance :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Cette propriété et $E(aX) = aE(X)$ caractérise la linéarité de l'espérance.

Variance :

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à deux expériences aléatoires telles que les conditions de réalisation sont **indépendantes**. On a :

Variables aléatoires indépendantes

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, on peut avoir $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire et δ un réel strictement positif. On a :

Delta minuscule

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

$[E(X) - \delta; E(X) + \delta]$ est **un intervalle de fluctuation**.

En utilisant l'évènement contraire on obtient :

$$P(|X - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Loi des grands nombres et loi Binomiale :

On considère **un schéma de Bernoulli** constitué de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p .

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , associée à la i -ème épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 dans le cas contraire.

On a donc $P(X_i = 1) = p$

- La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves.

- S_n suit **la loi binomiale** de paramètres n et p .

Moyenne empirique :

On appelle **moyenne empirique** des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

La probabilité que les valeurs prises par S_n s'écartent d'au moins δ de son espérance np est d'autant plus petite que δ est grand.

Soit δ un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n et M_n , on obtient :

$$P(|S_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Loi des grands nombres :

Soit une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience.

On répète n fois cette expérience **de manière indépendante**.

On obtient alors **un échantillon** de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, suivant toute la même loi et donc d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Inégalité de concentration :

Pour tout réel δ strictement positif, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Ce qui s'écrit de manière mathématiques $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

Linéarité de l'espérance**Ex 14-1 : Appliquer la linéarité**

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=5$ et $V(X)=1$ et Y une autre variable aléatoire telle que $E(Y)=0$ et $V(Y)=2$.

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

1) $Z=2X-7$

2) $T=X+Y$

3) $U=-3Y$

4) $W=\frac{3(X-1)}{4}$

Ex 14-2 : Avec la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,2$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,1$.

1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire $X+Y$.

2) Calculer $E(X+Y)$

Ex 14-3 : Avec des variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On sait que $V(X)=3$ et $V(Y)=5$

Justifier que l'on peut calculer $V(X+Y)$ et donner cette valeur.

Ex 14-4 : Lancer de trois dés et moyenne

On lance trois fois un dé équilibré. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire donnant la valeur de la face supérieure du dé obtenue au i -ème lancer.

1) Déterminer la loi de X_1 , puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$

2) On note $S_3=X_1+X_2+X_3$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de S_3 ?

b) Calculer si possible $E(S_3)$ et $V(S_3)$.

3) On note $M_3=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

a) Quelles sont les valeurs possibles de M_3 ?

b) Calculer si possible $E(M_3)$ et $V(M_3)$.

Ex 14-5 : Lancer de neuf dés et variable aléatoire de gain

On considère un jeu consistant à lancer 9 fois un dé.

À chaque lancer, on gagne 10 euros si on obtient « 1 » ou « 2 » et 5 euros sinon.

La participation au jeu est 60 euros.

1) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, on note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeurs la somme gagnée au i -ème lancer.

Déterminer pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ la loi de X_i et calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$

2) On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (il peut être négatif).

a) Exprimer G en fonction des variables aléatoires X_i .

b) Calculer le gain que l'on peut espérer et interpréter le résultat.

3) Déterminer la variance de G .

Ex 14-6 : Variances et indépendance

Quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4, sont placées dans une urne.

On tire une boule dans l'urne, on ne la remet pas, puis on tire une deuxième boule.

On appelle X_i pour $i \in \{1, 2\}$, la variable aléatoire qui associe au i -ème tirage le numéro de la boule tirée.

1) Les deux tirages sont-ils indépendants ?

2) Déterminer la loi de X_1 .

3) a) En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de $X_1 + X_2$

b) En déduire $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$

4) Déterminer $E(X_1)$, puis en déduire $E(X_2)$.

5) La loi de X_2 est-elle équirépartie ?

6) Calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$, puis comparer $V(X_1 + X_2)$ avec $V(X_1) + V(X_2)$

Ex 14-7 : Produit de variables aléatoires et espérance

Quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4, sont placées dans une urne.

On tire une boule dans l'urne, on ne la remet pas, puis on tire une deuxième boule.

On appelle X_i pour $i \in \{1, 2\}$, la variable aléatoire qui associe au i -ème tirage le numéro de la boule tirée.

1) a) Déterminer la loi de $X_1 \times X_2$ et son espérance.

c) Comparer $E(X_1 \times X_2)$ et $E(X_1) \times E(X_2)$

b) A-t-on $E(X_1 \times X_2) = E(X_1)E(X_2)$?

2) On considère maintenant, qu'avant de tirer la deuxième boule, on remet la première dans le sac.

a) Les deux tirages sont-ils indépendants ?

b) Déterminer la loi de $X_1 \times X_2$ et son espérance.

Inégalités et valeurs absolues

Ex 14-8 : Exprimer sous la forme $(|X - a| \geq \delta)$

Soit X une variable aléatoire.

Exprimer les événements ci-dessous sous la forme $(|X - a| \geq \delta)$

1) $(X - 4 \geq 4 \text{ ou } X - 4 \leq -4)$

2) $(X - a \geq 5 \text{ ou } X - a \leq -5)$

3) $(X \geq 4 \text{ ou } X \leq 0)$

4) « La distance entre X et 3 est supérieure ou égale à 1 »

5) $((X - 1)^2 \geq 25)$

Ex 14-9 : Avec l'événement contraire

Soit X une variable aléatoire.

Exprimer l'événement contraire à l'aide d'une valeur absolue.

1) $(2 \leq X \leq 6)$

2) $(-1 < X < 7)$

3) $(2 + X > 3 > -2 + X)$

Concentration-Loi des grands nombres

Ex 14-10 : Application directe

Soit X une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 8.

1) Donner une majoration de $P(|X - 40| \geq 5)$

2) En déduire une minoration de $P(35 < X < 45)$

3) Donner une majoration de la probabilité que X s'écarte de son espérance d'au moins 10.

Ex 14-11 : Écarts de X à $E(X)$ de quelques $\sigma(X)$

Soit X une variable aléatoire . Déterminer une majoration de chaque probabilité suivante :

1) a) $P(|X - E(X)| \geq \sigma(X))$

b) $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X))$

c) $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X))$

2) Déterminer un entier naturel n tel que la probabilité que X s'éloigne de $E(X)$ de n fois son écart type soit inférieure à 1 %.

3) Quel constat peut-on faire ?

Ex 14-12 : Trouver un intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 50.

1) Trouver un entier $\delta > 0$, tel que $P(|X - 10| \geq \delta) \leq 0,2$

2) En déduire un intervalle de fluctuation au seuil de 80 %.

3) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 90 %.

Ex 14-13 : En lançant 6 fois une pièce

On lance 6 fois une pièce équilibrée .

Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient pile au i -ème lancer et 0 dans la cas contraire.

On note $S_6 = X_1 + X_2 + \dots + X_6$

1) Justifier que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, X_i suit une loi de Bernoulli, puis calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

2) En déduire $E(S_6)$ et $V(S_6)$

3) Comment aurait-on pu retrouver directement ce résultat ? Que représente S_6 ?

4) Déterminer un majorant de $P(|S_6 - 3| \geq 2)$, puis interpréter le résultat.

5) On note $M_6 = \frac{S_6}{6}$

a) Que représente M_6 ?

b) Déterminer $E(M_6)$ et $V(M_6)$.

c) Calculer $P\left(\left|M_6 - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{3}\right)$

Ex 14-14 : En lançant 1000 fois une pièce : déterminer une taille d'échantillon

1) On lance 1000 de suite aléatoirement une pièce non truquée. Montrer que l'événement « la moyenne de FACE est strictement comprise entre 0,45 et 0,55 » a une probabilité supérieure à 0,9

2) Combien de fois faut-il lancer une pièce non truquée afin d'être certain à 99 % que la moyenne de FACE est comprise entre 0,45 et 0,55.

Ex 14-15 : Enquête dans une ville : déterminer une taille d'échantillon

Dans une ville de 30000 habitants lors d'une consultation sur la rénovation de la piscine municipale, 70 % des personnes consultées ont émis un avis positif.

On interroge aléatoirement n (où $n \in \mathbb{N}^*$) personnes et on note X_i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la i ème personne interrogée est favorable au projet et 0 dans le cas contraire.

1) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, donner la loi de X_i , puis son espérance et sa variance.

2) On note M_n la moyenne empirique des variables aléatoires X_i , où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,05 et un risque de 0,1.

b) De même, déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,01 et un risque de 0,05.

Interpréter ce résultat.

Ex 14-16 : Tester un dé : déterminer une taille d'échantillon

On aimerait savoir si un dé à six faces est truqué.

Pour cela, nous allons en particulier nous intéresser à l'apparition du chiffre « 1 » et on note p la probabilité d'obtenir « 1 ».

On lance n (où $n \in \mathbb{N}^*$) fois le dé et on note M_n la moyenne empirique d'apparition du chiffre « 1 » et S_n le nombre de fois où l'on a obtenu 1 au cours des n lancers.

1) Exprimer M_n en fonction de S_n .

2) En déduire l'espérance et la variance de M_n .

3) On suppose que le dé n'est pas truqué.

4) On lance le dé de l'expérience N fois et on obtient une moyenne de 0,15. Que peut-on conclure ?

Ex 14-17 : 421

Une école organise un jeu pour financer un voyage. Chaque participant doit verser 9 euros pour participer. Le jeu consiste à lancer trois dés non truqués. Si le résultat est un 421, il gagne 99 euros.

1) Déterminer la probabilité de faire un 421.

2) On note G_i le gain algébrique du i -ème participant.

Donner la loi de G_i , puis calculer son espérance et sa variance.

3) On pose $M_n = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_n}{n}$

Soit δ un réel strictement positif. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n - E(M_n)) \geq \delta$

4) On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'école après la participation de n personnes.

a) Exprimer X_n à l'aide des variables aléatoires G_i

b) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$

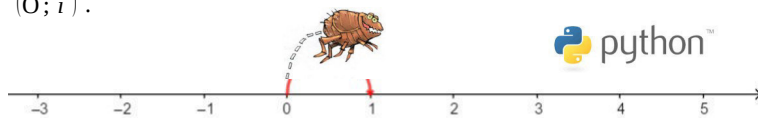
5) On suppose que 200 personnes vont participer.

Donner une minoration de la probabilité que le gain algébrique de l'association soit strictement compris entre 800 et 1600 euros.



Simulation - Python**Ex 14-18 : Simulation d'une marche aléatoire**

Une puce se déplace de manière aléatoire sur une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$.



Au départ, elle se trouve à l'origine du repère et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement, soit d'un saut(+1) vers la droite, soit d'un saut (-1) vers la gauche.

Après n sauts, on note D_n le nombre de fois où la puce a effectué un saut vers la droite et X_n l'abscisse de la puce.

1) a) Déterminer la loi de D_n .

b) Exprimer l'espérance et la variance de D_n en fonction de n .

c) Exprimer X_n en fonction de n et de D_n .

d) Déterminer l'espérance et la variance de X_n .

2) a) Compléter la fonction $X(n)$ écrite en python ci-dessous, afin qu'elle simule la variable aléatoire X_n .

```
1 from math import *
2 from random import *
3
4 def X(n):
5     x=.....
6     for i in range(.....):
7         a=.....
8         if a<..... :
9             x=.....
10        else:
11            x=x+1
12        return(x)
13
```

b) Compléter la fonction $Moy(n,N)$ écrite en python ci-dessous, afin qu'elle revoie la moyenne de X_n suite à une simulation d'un échantillon de taille N de X_n .

```
14 def moy(n,N):
15     s=.....
16     for j in range(.....):
17         s=.....
18     return(.....)
19
```

c) Lors d'une simulation de K échantillons de taille N de X_n , on obtient K moyennes : $m_1, m_2, \dots, m_K$.

Compléter la fonction $propor(n,N,K,delta)$ écrite en python ci-dessous, afin qu'elle revoie la proportion de moyennes supérieures en valeur absolue à un réel $delta$ donné, suite à une simulation K échantillons de taille N de X_n .

```
20 def propor(n,N,K,delta):
21     m=.....
22     for k in range(K):
23         if ..... :
24             m=.....
25     return(.....)
```

3) a) On exécute 20 fois $proportion(1000,100,1000,2)$

```
26 for i in range(20):
27     print(propor(100,100,1000,2))
```

On obtient :

0.05 0.039 0.054 0.05 0.036 0.043 0.04 0.049 0.05 0.036
0.055 0.048 0.045 0.047 0.053 0.04 0.047 0.042 0.057 0.042

Interpréter les résultats obtenus.

b) Dans un échantillon de taille 100, on note M_{100} la moyenne des 100 valeurs prises par X_{100} .

Déterminer l'espérance $E(M_{100})$ et l'écart type $\sigma(M_{100})$ de M_{100} .

c) Démontrer que pour tout réel $\delta > 0$, on a $P(|M_{100}| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2}$

En déduire que $P(|M_{100}| \geq 2\sigma(M_{100})) \leq \frac{1}{4}$

d) Interpréter le résultat obtenu.

Définition et notation :

Il existe **une unique** fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$
 Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**

Attention :
il y a deux conditions

Notation e^x :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2,718$
 La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b , on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.

$$e^b \neq 0 \quad \text{et} \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\text{Si } n \text{ est un entier relatif : } e^{na} = (e^a)^n$$

Lien avec les suites géométriques :

Pour tout réel a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

Étude de la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle croît très vite
 (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "**croissance exponentielle**", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide. C'est le cas en ce moment avec la covid-19.

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$

$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

$$a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$$

$$a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$$

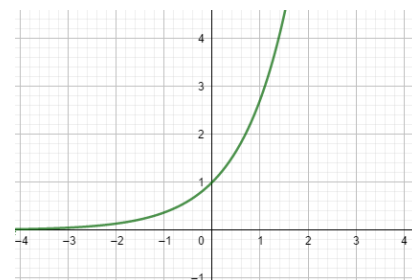
Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;e)$

- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

- L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$



Croissance comparée :

Pour tout entier naturel n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

• En prenant $n=0$, on retrouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• En prenant $n=1$, on obtient une limite importante $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Fonction du type

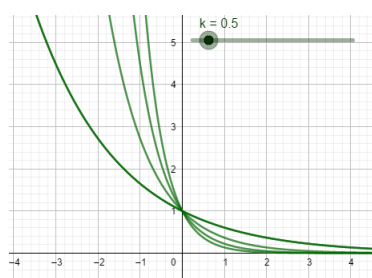
$$f(x) = e^{u(x)} :$$

Dérivée : $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$ (dérivable sur le même ensemble que u)

Exemples importants :

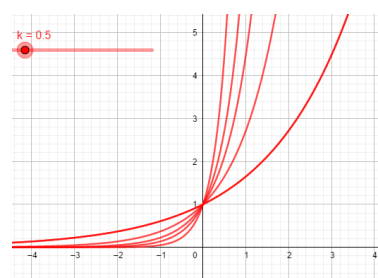
Soit k un réel strictement positif.

$$f_k : x \mapsto e^{-kx}$$



Décroissance exponentielle

$$g_k : x \mapsto e^{kx}$$



Croissance exponentielle



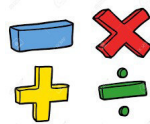
majuscules	minuscules	
	α	alpha
	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
	ϵ	epsilon
	ζ	zêta
	η	êta
Θ	θ	thêta
	ι	iota
	κ	kappa
Λ	λ	lambda
	μ	mu
	ν	nu
χ	χ	xi ou ksi
	$\omicron$	omicron
Π	π	pi
	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
	τ	tau
	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
	ξ	chi ou khi
	ψ	psi
Ω	ω	omega

Ne sont indiquées que les capitales utilisées en sciences . Les autres, identiques à des lettres de l'alphabet latin, ne sont pas utilisées.

La lettre omicron, identique à notre lettre o, n'est pas utilisée en sciences.

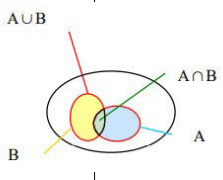
Créer un programme	- On va à la ligne après chaque instruction. - On peut séparer plusieurs instructions sur la même ligne en les séparant par « ; »	
Saisir une variable	- A=input("A=") si A est une chaîne de caractère (c'est le type par défaut) type str : Chaîne de caractères	
Il existe aussi d'autres types numériques : type long : Entier compris entre - inf et 2 147 483 647 ou entre 2 147 483 648 et + inf type complex : Nombre complexe Pour connaître tous les types ... https://fr.wikiversity.org/wiki/Python/Les_types_de_base	- A=float(input("A=")) si A est un flottant type float : Valeur spécifiée avec un point dans le programme (exemple : a=2.0) permettant une approximation de nombre réel - A=int(input("A=")) si A est un entier type int : Entier compris entre -2 147 483 648 et 2 147 483 647 (codage sur 32 bits soit 4 octets)	
Afficher	- print(A) affiche la valeur de la variable A - print("Vive les maths") affiche le texte Vive les maths - On peut aussi mélanger texte et variable : print("la valeur de A est ",A)	
Affecter	B=A affecte la valeur A ou le contenu de la variable A à la variable B	
Écrire un commentaire	Les commentaires s'écrivent après le signe #	
Opérations élémentaires	addition + soustraction - multiplication * puissance **	division / reste de division entière % (9%2 donne 1) quotient de division entière // (9//2 donne 4)
Tester ...	A==B (égal) A!=B (différent) A>B (supérieur) A<B (inférieur) A>=B (supérieur ou égal) A<=B (inférieur ou égal)	
Et / Ou	A and B / A or B	
Si ... Sinon Si ... Sinon	if condition C1 : instruction A1 elif condition C2 : instruction A2 else : instruction A3	C'est le décalage vers la droite qui indique les instructions faisant partie de la structure conditionnelle. Il n'y a pas d'instruction de fin. Il en est de même pour for , while et def .
Boucle Pour	for i in range(1,n+1) : instruction A la variable i parcourt tous les entiers de 1 à n	- for i in range(n): la variable i parcourt tous les entiers de 0 à n-1 - for i in range(m,n): la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 - for i in range(m,n,p): la variable i parcourt tous les entiers de m à n-1 avec un pas de p.
Boucle Tant que	while condition : instruction A	
Fonctions	Def exemple(a,b ...): instruction ... y=... return(y)	a,b,... sont les arguments de la fonction exemple On peut aussi retourner plusieurs valeurs : return(x,y,z,...)
Insérer un module	Un module est une bibliothèque comportant un ensemble de fonctions. Je présente ci-dessous les modules utilisés au lycée.	
Opérations mathématiques : math Toutes les fonctions du module math https://www.afpy.org/doc/python/3.5/library/math.html	from math import * On peut aussi importer uniquement la fonction souhaitée : from math import sqrt Le module math, contient les définitions de nombreuses fonctions mathématiques telles que sin , cos , tan , sqrt , pi ...	
Nombres aléatoires : random Toutes les fonctions du module random https://docs.python.org/fr/3.5/library/random.html	from random import * Le module random contient les définitions de nombreuses fonctions faisant référence au hasard telles que : - uniform(a,b) qui retourne un nombre aléatoire compris entre a et b - randint(a,b) qui retourne un entier aléatoire compris entre a et b	
Graphiques : pylab Bases du module pylab http://matplotlib.free.fr/bases.html	from pylab import * Le module pylab contient de nombreuses fonctions graphiques, ce qui en fait un outil très puissant pour créer des graphiques scientifiques. Ce module possède aussi les fonctions usuelles du module math , il n'est donc pas utile d'importer aussi celle-ci lorsqu'on utilise pylab. On peut aussi utiliser une version plus légère : matplotlib.pyplot . Mais celui-ci ne possède pas les fonctions du module math.	
Listes et chaînes de caractères	A=[] permet de définir la liste vide A A.append(x) ajoute la valeur x à la liste (Si la liste était définie jusqu'au 10 ème terme, x sera le 11ème terme)	
Longueur	len(A) renvoie la longueur de la liste ou de la chaîne de caractères A	
Extraire	A[k] renvoie le k+1 ème élément de la liste ou de la chaîne de caractères A. Attention A[0] est le premier terme de la liste.	
Concaténer	"mathé "+"matiques" donne la chaîne de caractères "mathématiques" [1,2,3,4]+[5,6,7,8] donne la liste [1,2,3,4,5,6,7,8]	

Quelques symboles mathématiques à connaître



<http://pierrelux.net>

Exemples

Symbole d'implication	$A \Rightarrow B$	A implique B Si A alors B B est nécessaire à A A est suffisant pour B	Ce symbole est censé exprimer l'idée que A est vraie entraîne que B aussi.	$x=2 \Rightarrow x^2=4$
Symbole d'équivalence	$A \Leftrightarrow B$ $A \text{ ssi } B$	A équivaut à B A si et seulement si B	Il s'agit d'une implication dans les deux sens : A implique B et B implique A	$x=2$ ou $x=-2$ $\Leftrightarrow x^2=4$
Quantificateur universel	$\forall x, P(x)$	Quel que soit x ; pour tout x	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour tout x	$\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 + \frac{1}{x+1} > 0$
Quantificateur existentiel	$\exists x, P(x)$	Il existe x tel que...	La propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un x .	$\exists x \in \mathbb{R}, (x-2) (x-3) > 0$
Symbole d'appartenance	$x \in E$	x appartient à E x est élément de E E contient x	Pour un ensemble E donné, ce symbole signifie qu'il contient l'élément x .	$A \in \mathcal{d}$ $2 \in]-3; 5[$
Symbole de non-appartenance	$x \notin E$	x n'appartient pas à E	Négation de l'appartenance de x à E .	$-5 \notin \mathbb{N}$
Symbole d'inclusion	$A \subset B$	A est inclus dans B A est un sous-ensemble de B A est une partie de B B contient A	Pour deux ensembles A et B donnés, ce symbole signifie que tous les éléments de A sont éléments de B .	$] -2; 5[\subset] -3; 8[$
Symbole de non-inclusion	$A \not\subset B$	A n'est pas inclus dans B	Négation de l'inclusion de A dans B , c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B .	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$
Ensemble vide	$\emptyset$	Ensemble vide	Ensemble qui ne comporte aucun élément	$]3; 1[\cap]5; 2[+ \infty = \emptyset$
Singleton, paire, ensembles finis Accolades $\{ \dots \}$	$\{x\}$ $\{x, y\}$ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	Singleton x Paire x, y Ensemble $x_1, x_2, \dots, x_n$	Ensemble dont l'unique élément est x Ensemble dont les seuls éléments sont x et y Ensemble dont les n éléments sont $x_1, x_2, \dots, x_n$.	L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=4$ est $S=\{-2; 2\}$ L'ordre n'est pas important. On aurait pu écrire $\{2; -2\}$
Couple, Triplet, n-uplet Parenthèses $(\dots)$	(x, y) (x, y, z) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Couple x, y Triplet x, y, z n-uplet $x_1, x_2, \dots, x_n$	Représentation d'une collection d'objets occupant chacun une place précise , au sens où contrairement à un ensemble fini, l'ordre et la répétition des objets n'est pas anodine.	Le point de coordonnées $(5; 7)$ n'est pas le point de coordonnées $(7; 5)$.
Réunion $A \cup B$		A union B Réunion de A et B	Ensemble contenant les éléments de A ou B et seulement ceux-là. Les éléments en commun à A et B sont dans la réunion. On dit que le ou mathématique est inclusif .	$] -7; 8[\cup] -3; 10[=] -7; 10[$
Intersection $A \cap B$		A inter B Intersection de A et B	Ensemble contenant les éléments en communs de A et B et seulement ceux-là.	$] -7; 8[\cap] -3; 10[=] -3; 8[$
Somme	$\sum_{i=1}^n$	Somme de $i=1$ à $i=n$	On avance de 1 en 1, c'est à dire : 1,2,3,4,5 ..., n	$\sum_{i=3}^7 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$
Association	$f: x \mapsto f(x)$	fonction f qui à x associe le nombre $f(x)$	Attention, il ne faut pas utiliser la flèche $\rightarrow$	$f: x \mapsto x^2$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels**.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou **nombres entiers**)

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

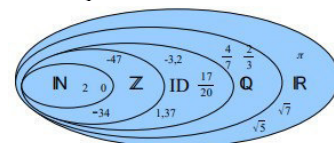
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels privé de 0.

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0. $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs. $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des réels négatifs.

$\mathbb{R}^{**}$ est l'ensemble des réels strictement positifs. $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R} - \{2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2

$\mathbb{R} - \{2; 5, 2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{2; 5, 2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2 et 5,2