

ANALYSE

- **GENERALITES SUR LES FONCTIONS**
- **FONCTION LOGARITHME NEPERIEN**
- FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE**
 - **PRIMITIVES ET INTEGRATION**
 - **EQUATIONS DIFFERENTIELLES**
 - **SUITES NUMERIQUES**

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

✓ LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITE

Exercice 1 :

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x E \left(\frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} + x \right)$

d) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right)$

e) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x^2 - x} + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3\sqrt{-x + 1})$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x + 3 - \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4})$

j) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 1}$

2. Calculer les limites suivantes au voisinage de 0

a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{\tan^2 x}{x}$

d) $f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}$

e) $f(x) = \frac{x^3 \cos^3 x}{\sin^2 x}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m , la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f .

Exercice 3 :

Calculer suivant les valeurs de paramètre réel α , la limite de la fonction,

$$f(x) = \sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} - x\sqrt{x + 1}$$

quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 :

1. Démontrer que : $\forall x \in [1; +\infty[$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1.$$

En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},$
 $|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}.$

En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \rightarrow \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

Exercice 5 :

1. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
 2. En déduire les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

Exercice 6 :

1. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$
 2. En déduire les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$

Exercice 7 :

1. Étudier les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-2}{3x-1}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$

2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

- a) Déterminer son ensemble de définition D_f .

- b) Montrer que f est le prolongement par continuité en 1.
 c) Définir cette fonction g qui est le prolongement par continuité de f en 1.

✓ **THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES, MONOTONIE DE FONCTIONS**

Exercice 8 :

1. Démontrer que l'équation (E): $x^3 - 6x - 6 = 0$ a une unique solution réelle α .

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 9 :

- | | |
|---|---|
| 1. Démontrer que $(E): \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 = 0$ a trois solutions réelles. | 2. Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions. |
|---|---|

✓ **BRANCHES INFINIES****Exercice 10 :**

Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative (C_f) de la fonction f .

- a) $f(x) = x - \sqrt{x}$
 b) $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x$

- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$
 d) $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
 e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

✓ **INEGALITES DES ACCROISSEMENTS FINIS****Exercice 11 :**

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x - 4$

- | | |
|---|---|
| 1. Dresser le tableau de variation de f | 3. Montrer que $2 < \alpha < 3$ |
| 2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. | 4. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . |

Exercice 12 :

1. En appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction

$f: x \mapsto \sqrt{x+1}$, prouver que:

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

2. Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Déduisez – en un encadrement de $\sqrt{1,1}$ d'amplitude 10^{-2} près.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x}$ et l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Démontrer que f' est bornée sur I et $\forall x \in I$, on a:

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$$

Exercice 14:

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution positive r de l'équation

$$(E): x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

On définit la fonction,

$$f: [0,5 ; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

1. Montrer que r est solution de l'équation $f(x) = x$.

2. Montrer que $\forall x \in [0,5 ; 1]$
 $f(x) \in [0,5 ; 1]$
3. Montrer que pour tout élément x de $[0,5 ; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$
4. En déduire que $\forall x \in [0,5 ; 1]$,
 $|f(x) - r| \leq \frac{4}{9} |x - r|$

Exercice 15 :

Soit g la fonction définie

sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Démontrer que l'équation
 $(E): x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

3. Montrer que $\forall x \in [1 ; +\infty[$
 $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
4. En déduire que pour tout réel de $[1 ; +\infty[$ on a :
 $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

✓ **FONCTIONS BIJECTIVES, BIJECTION RECIPROQUE****Exercice 16 :**

On considère la fonction $f: [0 ; \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{\cos(\pi x)}$

Démontrer que f est une bijection de $[0 ; \frac{1}{2}]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

1. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . f^{-1} est-elle dérivable sur I ? Justifier.
2. Etablir le tableau de variation de f^{-1}
 - a) Expliciter $(f^{-1})'(x)$
 - b) Calculer de deux façons $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

Exercice 17:

On considère la fonction

$$f: [0 ; \pi[\rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $[0 ; \pi[$ sur un intervalle J à déterminer.

2. f^{-1} est-elle dérivable sur J ? Sinon sur quel ensemble l'est-elle?
3. Donner le tableau de variation de f^{-1} .
4. Expliciter $(f^{-1})'$.
5. Calculer de deux façons différentes $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 18 :

Soit la fonction de $]0 ; 2[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right).$$

1. Justifier que f est bijective.
2. Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}.$$

3. On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Etudier la dérivabilité de h sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
5. En déduire la forme explicite de h sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.

Exercice 19 :

1. Soit $f: [0; \pi] \rightarrow [0; 2]$

$$x \rightarrow 1 + \cos x$$

- a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur $[0; 2]$ et préciser son sens de variation.

- b) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}

2. $f: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \tan x$$

- a) Démontrer que f est une bijection
- b) Etablir le tableau de variation de f
- c) Expliciter $(f^{-1})'(x)$ et confirmer son sens de variation.

3. Soit $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$

$$x \rightarrow \sin x$$

- a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}
- b) Déterminer l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction :

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- c) De manière analogue, étudier la dérivabilité de la fonction réciproque de la fonction g définie de $[0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ par $g(x) = \cos x$ puis déterminer sa dérivée.

✓ **ETUDE DE FONCTIONS**

PROPOSE 1 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2-4}{(x-1)^2}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1.

- a) Déterminer l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D .
- b) On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de P sous forme de

trois facteurs de fonctions polynômes de degré 1.

c) Calculer la fonction dérivée de f . En déduire une expression de f' en fonction de la fonction polynôme P définie en 1.b).

d) Étudier le sens de variation de f .

e) Dresser le tableau de variation de f .

2.

a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout x de D , on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}.$$

b) Montrer que (C) possède une asymptote oblique (Δ) dont on déterminera une équation.

c) Préciser l'autre asymptote.

3.

a) Étudier les positions relatives de (C) et de (Δ) .

b) Tracer les courbes (C) et (Δ) .

4. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$(E_m): x \in \mathbb{R},$$

$$x^3 + (1-m)x^2 + 2mx - 4 - m = 0.$$

5. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 4}{(x-1)^2}.$$

On appelle (C') la courbe représentative de g dans le plan muni du repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Déterminer une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ vérifiée pour tout x différent de 1 et -1 .

b) Après avoir expliqué comment on obtient la courbe (C') à partir de la courbe (C) , tracer la courbe (C') dans le même repère que (C) .

PROPOSE 2 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$$

1. a/ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

b/ Étudier le sens de variation de la fonction f'

c/ Déduire un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2; 7]$

d/ Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f pour encadrer $f(x)$ pour tout x élément de $[2; 7]$.

2. a/ Étudier les variations de f

b / Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -2$

c/ Construire la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.

3. On considère les courbes (C_1) ; (C_2) et (C_3) représentatives des fonctions g, h et k ci – après définies.

$$(C_1): g(x) = (1-x)\sqrt{x+2}$$

$$(C_2): h(x) = (-x-5)\sqrt{-x-2}$$

$$(C_3): k(x) = (x+5)\sqrt{-x-2}$$

a) Exprimer $g(x), h(x)$ et $k(x)$ en fonction de $f(x)$

b) Montrer qu'on peut obtenir $(C_1), (C_2)$ et (C_3) à partir de (C) en précisant les transformations du plan à utiliser.

c) Construire $(C_1), (C_2)$ et (C_3) dans le même plan que (C) . On distinguera les courbes par différentes couleurs.

- | | |
|--|---|
| <p>4. On désigne par φ la restriction de f à l'intervalle $[-1; +\infty[$.</p> <p>a) Montrer que φ admet une application réciproque φ^{-1}.</p> <p>b) Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}.</p> | <p>c) Calculer $\varphi(0)$; $\varphi'(0)$ et $(\varphi^{-1})'(-\sqrt{2})$</p> <p>d) Construire la courbe (C') représentative de φ^{-1} dans le même plan.</p> |
|--|---|

PROPOSE 3 :

- | | |
|---|---|
| <p>1) f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :</p> $f(x) = x + \sqrt{ x^2 - 1 }.$ <p>a. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 ; donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.</p> <p>b. Etudier le sens de variation de f.</p> <p>c. Démontrer que la représentation graphique (C_f) de f admet deux asymptotes ; donner des équations de ces asymptotes.</p> <p>d. Construire (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).</p> <p>2) g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :</p> | <p>$f(x) = x - \sqrt{ x^2 - 1 }$. On désigne par (C_g) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).</p> <p>a. x étant un nombre réel, on considère les points $M(x; f(x))$ et $N(-x; g(-x))$. Déterminer le milieu du segment $[MN]$. Donner une interprétation géométrique et une illustration de ce résultat.</p> <p>b. En tenant compte de a. donner une méthode de construction de (C_g). Construire (C_g).</p> |
|---|---|

PROPOSE 4 :

- | | |
|--|--|
| <p>f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :</p> $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{ x^2 - 1 }}{x}.$ <p>1- Etudier la parité de f ; en déduire l'intervalle d'étude.</p> <p>2-</p> <p>a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.</p> <p>b) Quel est le signe de $f'(x)$.</p> | <p>(On peut poser si nécessaire $U = \sqrt{x^2 - 1}$.)</p> <p>3-</p> <p>a) x étant un nombre réel supérieur à 1, mettre $f(x)$ sous la forme :</p> $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \varphi(x), \text{ où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ |
|--|--|

b) En déduire une équation d'une asymptote à la représentation graphique (C_f) de f .

4- Construire (C_f) .

PROPOSE 5 :

A- Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan. Soit f_1 la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$f_1(x) = -2x + \sqrt{3(x^2 - 1)}.$$

1-

a) Etudier les variations de f_1 .

b) Soit (C_1) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que (C_1) admet deux droites asymptotes, passant l'une et l'autre par l'origine et déterminer la position de (C_1) par rapport à ces asymptotes.

c) Préciser les tangentes à (C_1) aux points d'abscisses -1 et 1 .

d) Construire (C_1) (On prendra comme unité : $2cm$).

2- Soit f_2 la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$f_2(x) = -2x - \sqrt{3(x^2 - 1)}.$$

a) Montrer que sa courbe représentative (C_2) est l'image de (C_1) par la symétrie de centre O .

b) Montrer que la courbe $(C_1) \cup (C_2)$ a pour équation :
 $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$.

c) Construire cette courbe que l'on notera (C) .

PROPOSE 6 :

On considère la fonction numérique

$$f \text{ définie par : } f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (C)$$

est sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1-

a) Déterminer D_f puis calculer les limites de f à ses bornes.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

c) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

d) Etudier le sens de variation de f .

e) Etudier les branches infinies de f .

f) Construire C .

2-

a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$. Démontrer que g est une bijection sur un ensemble J que l'on précisera.

b) Construire dans le même plan que (C) la courbe (C') représentative de g^{-1} . (g^{-1} est la bijection réciproque de g).

PROPOSE 7 :

A/ Soit la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

- a) Etudier les variations de g .
- b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B/

- 1- On considère la fonction f telle que : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

- a) Etudier les variations de f .
- b) Montrer que l'axe (OI) est une asymptote horizontale à (C) à $+\infty$; puis montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

- c) Construire la courbe (C) .

2-

- a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.
 - b) La bijection réciproque f^{-1} est-elle dérivable sur son ensemble de définition.
 - c) Donner le tableau de variation de f^{-1} .
 - d) Calculer $(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right)$ en utilisant la définition.
 - e) Représenter graphiquement f^{-1} dans le même repère que précédemment.
- 3- Donner une expression explicite de f^{-1} puis vérifier par calcul $(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right)$.

PROPOSE 8 :

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|4 - x^2|}. \text{ On}$$

appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité graphique 1,5cm.

1. a/ Déterminer l'ensemble de définition D de f
- b/ Etudier la dérivabilité de f aux points -2 et 2

c/ Que pouvez – vous dire de la courbe (C) aux points d'abscisse respectives -2 et 2 ?

2. Démontrer les équivalences logiques suivantes :

- a) $3\sqrt{x^2 - 4} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2]$
- b) $3\sqrt{4 - x^2} - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{6}{5}\right]$.

En déduire le signe de $f'(x)$.

3. a/ Calculer les limites aux bornes de D et dresser le tableau de variation de f

b/ Calculer la limite de $\left[f(x) - \frac{1}{5}x\right]$
 en $-\infty$ et la limite de $\left[f(x) - \frac{7}{5}x\right]$
 en $+\infty$. Que peut-on dire pour la
 courbe (C) ?

c/ Déterminer les points
 d'intersection de la courbe (C) avec
 les axes du repère.

d/ Tracer la courbe (C) .

4. Soit h la restriction de f à
 l'intervalle $] -\infty ; -2[$.

a) Démontrer que h admet une
 fonction réciproque h^{-1} dont on

précisera l'ensemble de définition
 et les variations.

b) Calculer la limite de $[h^{-1}(x) + 5x]$
 en $+\infty$ et déduire que la courbe (C')
 de h^{-1} dans le repère $(O ; I ; J)$
 admet une asymptote au voisinage
 de $+\infty$, à préciser.

c) Tracer (C')

d) Calculer $h^{-1}(0)$ à partir de 3.c/ et
 déterminer une équation de la
 tangente à (C') au point de
 coordonnées $(0 ; h^{-1}(0))$.

PROPOSE 9 :

Soit la fonction :

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}.$$

1. Montrer que l'ensemble de
 définition D de f est : $D = [-1; 1]$

2. Développer $(x + \sqrt{1 - x^2})^2$.

En déduire que $f(x) = |x + \sqrt{1 - x^2}|$
 sur D .

3. Etudier le signe de $x + \sqrt{1 - x^2}$
 sur $[-1; 1]$ puis expliciter $f(x)$
 sans le symbole de la valeur
 absolue.

4. Calculer les limites de f aux
 bornes de D .

5. Etudier la continuité de f au point
 d'abscisse $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Etudier la dérivabilité de f aux
 points d'abscisses $x = -1, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 et $x = 1$.

En donner une interprétation
 graphique pour chaque résultat.

7. Etablir le tableau de variation de f

8. Soit $\bar{f}$ la restriction de f à $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

Montrer que $\bar{f}$ applique

bijectivement $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ sur un
 intervalle K que l'on déterminera.

PROPOSE 10 :

Partie A

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

1. Dresser le tableau de variation de
 φ .

2. Déterminer l'image de $[1; 3]$ par φ
 puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ sur
 $[1; 3]$.

Partie B

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x-2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$, et on désigne par (C) , la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm .

- Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition D .
- En déduire que (C) admet une asymptote dont on donnera une équation.
- Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 3. Interpréter graphiquement ces résultats.
- Montrer que la dérivée est :

$$f'(x) = \frac{-\varphi(x)}{(x-2)^2 \sqrt{-x^2 + 4x - 3}}.$$
- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer (C) , son asymptote et les demi-tangentes éventuelles.

Partie C

- On pose

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

Comment peut-on déduire la courbe (C') de g de celle de f .
- Construire (C') dans le même repère.
- En déduire la construction de la courbe (T) d'équation :

$$y^2(x-2)^2 = x^2(-x^2 + 4x - 3)$$
- Soit t un paramètre réel et (Δt) la droite d'équation $y = tx$. Graphiquement, (Δt) coupe (T) en O et en deux points M et M' distincts de O .
- Ecrire une équation du second degré ayant pour solutions, les abscisses des points M et M' .
- Sans résoudre cette équation, montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à une droite fixe et que la distance MM' est indépendante de t .

PROPOSE 11 :

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Soit A , le point de coordonnées $(1; 0)$ et B le point de coordonnées $(-1; 0)$.

- Pour tout point H du segment $[AB]$, distinct de A et de B , on mène la perpendiculaire (D) à la droite (AB) . La droite (D) coupe le cercle (C) en M et en M' . on pose $\overline{OH} = x$. Calculer l'aire du triangle AMM' .

- Soit g la fonction définie sur $[-1; 1]$ par :

$$g(x) = (1-x) \sqrt{1-x^2}$$

et sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité graphique est de 4cm .

 - Etudier la dérivabilité de g en -1 et en 1 . En déduire les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses -1 et 1 .
 - Dresser le tableau de variation de g ; on précisera $g(0)$.

- | | |
|--|---|
| <p>c) Tracer la courbe (C).</p> <p>d) Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.</p> <p>e) Justifier que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions, une nulle et l'autre $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$. Déterminer un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.</p> | <p>f) Soit h la restriction de g sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.</p> <p>g) Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1}. Déterminer l'ensemble de définition de h^{-1} noté D.</p> <p>h) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur D.</p> |
|--|---|

PROPOSE 12 :

Soit la fonction : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \text{ et } (C_f)$$

sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère (O, I, J) .

- 1) Justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.

2) a/ Calculer la dérivée de f , étudier son signe puis en déduire le sens de variation de f .

b/ Dresser le tableau de variation.

- 3) Tracer (C_f) ; préciser les coordonnées des points où la tangente est parallèle à (OI) .

Proposé de corrigés

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Exercice 1 :

1. Calculons les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}} \right) = \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'axiome d'Archimède s'écrit :

$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$. Donc pour tout x non nul, on a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\bullet \quad \forall x > 0, \text{ on a : } 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1. \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\bullet \quad \forall x < 0, \text{ on a : } 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1. \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{c) } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} x^2 - 2x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)} \\
 \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) = 1} &\quad \text{car } \frac{2}{x} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \frac{1}{2}}$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right)$

$$\forall x > 0, \quad x - \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{x^2 - x^2 + x - 1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$= \frac{x - 1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

Et :

$$2x - \sqrt{4x^2 + x} = \frac{4x^2 - 4x^2 - x}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \frac{-x}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \frac{-1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \times \frac{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-4)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = -2}$$

e) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x^2}}$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|}$$

$$\boxed{\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x^2 - x + 1}} = +\infty}$$

f) $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3\sqrt{-x + 1}) = -\infty}$ car $-x + 1 \rightarrow +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x + 3 - \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}$

$$\sqrt{x^2 + x + 4} - 2 = \frac{x^2 + x + 4 - 4}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2}$$

$$x + 3 - \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9} = \frac{(x + 3)^2 - (2x^3 - 3x^2 + 9)}{x + 3 + \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}$$

$$= \frac{-2x^3 + 4x^2 + 6x}{x + 3 + \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x + 3 - \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} \times \frac{x + 3 + \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}{-2x^3 + 4x^2 + 6x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} \times \frac{x + 3 + \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}{-2x(x + 1)(x - 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} \times \frac{x + 3 + \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}}{-2(x - 3)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{4}{8}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x + 3 - \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 9}} = \frac{1}{8}}$$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

Posons : $4X = \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2X$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} &= \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2X\right)}{(4X)^2} \\
&= \frac{1 - \cos 2X}{16X^2} \\
&= \frac{2\sin^2 X}{16X^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2$$

Si $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ alors $X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{8} \times \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \frac{1}{8}} \quad \text{car} \quad \frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4-x+4}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}) = 0}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x-1}$$

Pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1}, \quad \forall x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x-1} = 2}$$

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x-1}{x-1}, \quad \forall x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin x}{x-1} = 2}$$

2. Calculons les limites au voisinage de 0

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Remarquons que : $f(x) = \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x}$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x} \right) = 0 \times 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \times \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= 0 \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{\tan x}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \times 1 \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1} \end{aligned}$$

$$d) \quad f(x) = \frac{\tan^2 x}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{x}{\cos^2 x} \\ &= 1 \times \frac{0}{1} \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0} \end{aligned}$$

$$e) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1} \end{aligned}$$

$$f) \quad f(x) = \frac{x^3 \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos^3 x}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2} \\ &= \frac{0 \times 1}{1} \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Calculons suivant les valeurs de m , les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = mx + \sqrt{x^2 - 1}$$

• Si $m = 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } x^2 - 1 \rightarrow +\infty$$

• Si $m < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} mx \rightarrow +\infty \\ x^2 - 1 \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(m + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ donc } m + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} &\rightarrow m + 1 \end{aligned}$$

Signe de $m + 1$

m	$-\infty$	-1	0
$m + 1$	$-$	0	$+$

Si $m < -1$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$

Si $m \in]-1 ; 0[$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } m = -1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{-x - \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

- Si $m > 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} mx \rightarrow +\infty \\ x^2 - 1 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(m - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ donc } m - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow m - 1$$

Signe de $m - 1$

m	0	1	$+\infty$
$m - 1$	$-$	0	$+$

Si $m \in]0 ; 1[$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$

Si $m > 1$ alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

Si $m = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$ car $x - \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow -\infty$

Exercice 3 :

Calculons suivant les valeurs de α la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} - x\sqrt{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + \alpha x^2 + x + 1) - x^2(x + 1)}{\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} + x\sqrt{x + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} + x\sqrt{x + 1}}$$

• Si $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} + x\sqrt{x + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{x + 1}}$$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$ car $\begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \\ x + 1 \rightarrow +\infty \end{cases}$

• Si $\alpha < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ \alpha - 1 < 0 \end{cases}$$

• Si $\alpha > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ \alpha - 1 > 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

1. Démontrons que : $\forall x \in$

$$[1 ; +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

$$x \in [1 ; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1$$

$$x + 1 \geq 2$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors : } \frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$$

D'autre part :

$$\forall x \in [1 ; +\infty[, x \leq x + 1. \text{ Soit}$$

$$\frac{x}{x+1} \leq 1$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in [1 ; +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1}$$

Déduisons – en – $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$\text{On a : } \forall x \in [1 ; +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1.$$

Alors :

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty. \text{ Donc}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty}$$

$$\text{On a : } \forall x \in [1 ; +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1.$$

Alors :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0}$$

2. Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\cos x + \sin x)^2 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\ &+ 2\sin x \cos x \end{aligned}$$

$$= 1 + \sin 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$$

$$0 \leq (\cos x + \sin x)^2 \leq 2$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}}$$

3. Dédisons les limites en $+\infty$

et en $-\infty$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$$

$$|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\cos x + \sin x}{x^2} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} = 0.$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

Exercice 5 :

1. Démontrons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\text{Posons : } X = \frac{x}{2}. \text{ Alors : } \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2X}{4X^2}.$$

Or : $2\sin^2 X = 1 - \cos 2X$. Il vient :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 ;$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \quad \text{car} \quad \frac{\sin X}{X} \rightarrow 1.$$

2. Dédisons alors les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \\ &= \frac{0}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = 0}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}{\frac{1 - \cos x}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} ; \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = -2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)(\cos x + 1)}{x \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -(1 + \cos x) \cdot \cos x \times \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \times \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x} = -1} \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} -(1 + \cos x) \rightarrow -2 \\ \cos x \rightarrow 1 \\ \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \times \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{|x|}}$$

Alors :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= - \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0 >} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 6 :

1. Démontrons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

Soit $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$. On a $\varphi(0) =$

1. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$$

$$= \varphi'(0)$$

Or φ est dérivable sur

$$]-1 ; +\infty[\text{ et } \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

2. Déduisons les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$$

Posons : $X = 3x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} = \frac{3}{2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$$

Posons : $X = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2} = \frac{1}{4}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$$

Posons : $X = \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + X} - 1}{X}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}$$

Exercice 7 :

1. Etudions les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{x^2 - 2x}{x}$
- $= \lim_{x \rightarrow 0 <} (x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0 <} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = -2$$

- $\lim_{x \rightarrow 0 >} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 >} \frac{x^2 + 2x}{x}$
- $= \lim_{x \rightarrow 0 >} (x + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0 >} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = 2$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-2}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{2}{x}}{3 - \frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-2}{3x-1} = \frac{7}{3}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

=

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$

Indication : Utiliser la méthode du taux de variation.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} = \frac{3}{2}$$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

a) Déterminons D_f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\}$$

$$D_f = [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

b) Montrons que f admet un prolongement par continuité en 1.

f n'est pas définie au point $x = 1$

et :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} ; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

f admet une limite en 1. D'où elle est prolongeable par continuité en 1.

c) Définition du
prolongement g de f en 1

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 8 :

1. Démontrons que $(E) : x^3 - 6x - 6 = 0$ admet une solution unique α .

Posons $f(x) = x^3 - 6x - 6$. $(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

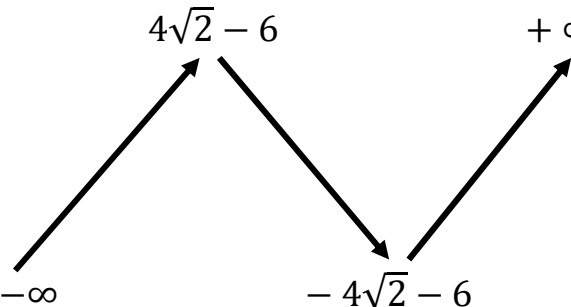
Tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f est strictement croissante sur $] -\infty ; -\sqrt{2}[$ et sur $] \sqrt{2} ; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $] -\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$4\sqrt{2} - 6 < 0$ et $-4\sqrt{2} - 6 < 0$. Donc f ne change pas de signe sur $] -\infty ; \sqrt{2}[$. Donc (E) n'a aucune solution sur cet intervalle.

Par contre f est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$ et $f([\sqrt{2} ; +\infty[) = [-6 - 4\sqrt{2} ; +\infty[$.

Or : $0 \in [-6 - 4\sqrt{2} ; +\infty[$. Donc : (E) admet une seule solution dans $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

D'où (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2. Déterminons une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Soit A une valeur approchée à 10^{-2} près.

On a : $|\alpha - A| \leq 10^{-2}$

$f(2) = -10$ et $f(3) = 3$.

$f(2) \times f(3) < 0$. Alors $2 < \alpha < 3$.

En utilisant la méthode par balayage on trouve respectivement : $2,8 < \alpha < 2,9$ et $2,84 < \alpha < 2,85$

$0 < \alpha - 2,84 < 0,01$. Soit : $|\alpha - 2,84| \leq 10^{-2}$

Soit : **$A = 2,84$** à 10^{-2} près.

Exercice 9 :

1. Démontrons que $(E) : \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 = 0$ a trois solutions.

Posons : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1$

$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$

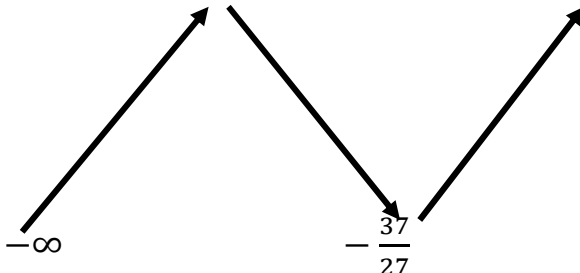
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}x^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^3 = +\infty$

f change de signe sur $\mathbb{R}$. Donc l'équation (E) admet au moins une solution.

Tableau de variation :

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = x \left(\frac{3}{4}x - 2 \right)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

- f est continue et strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ et $f(]-\infty ; 0]) =] -\infty ; 1]$ contenant 0. Donc l'équation (E) admet une seule solution $x_1 \in] -\infty ; 0]$.
- f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; \frac{8}{3}]$ et $f([0 ; \frac{8}{3}]) = [-\frac{37}{27} ; 1]$ contenant 0. Donc l'équation

(E) admet une seule solution $x_2 \in [0 ; \frac{8}{3}]$

- f est continue et strictement croissante sur $[\frac{8}{3} + \infty[$ et $f([\frac{8}{3} + \infty[) = [-\frac{37}{27} + \infty[$ contenant 0. Donc l'équation (E) admet une seule solution $x_3 \in [\frac{8}{3} + \infty[$.

2. Encadrement à 10^{-2} près des solutions

Indication : Utiliser la méthode par balayage en remarquant d'abord que :

$$-1 \leq x_1 \leq 0 ; 1 \leq x_2 \leq 2 \text{ et } 3 \leq x_3 \leq 4.$$

Résultats :

$$\boxed{-0,91 \leq x_1 \leq -0,90}$$

$$\boxed{1,19 \leq x_2 \leq 1,20}$$

$$\boxed{3,70 \leq x_3 \leq 3,71}$$

Exercice 10 :

Etudions les branches infinies des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - \sqrt{x}$
 $D_f = [0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \text{ car : } \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$$

Calculons alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$

Ensuite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$$

La courbe représentative (C) de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$.

b) $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 0\}$
 $D_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Calculons alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right) = -3$$

Ensuite calculons :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-3x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^2 - 1} + 2x)$$

=

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4 - 4x^2}{2\sqrt{x^2 - 1} - 2x}$$

=

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{2\sqrt{x^2 - 1} - 2x} = 0$$

**Donc la droite d'équation
y = -3x est asymptote oblique à
(C) en $-\infty$.**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

= $+\infty$ car

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \\ 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 2 \\ 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\text{Calculons alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = 1$$

Ensuite calculons :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x^2 - 1} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4 - 4x^2}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x} = 0$$

**Donc la droite d'équation y = x est
asymptote oblique à (C) en $+\infty$.**

$$c) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0\}$$

$$D_f =]-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

(Expression conjuguée)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ car } \frac{2}{x} \rightarrow 0$$

**La droite (Δ) : y = -1 est
asymptote horizontale à (C) en
 $-\infty$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Calculons alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1 = 2$$

$$\text{Ensuite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 \right)} = -1$$

La droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

d) $f(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$Df = \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0 \right\}$$

$$Df =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = -\infty$$

$$\text{car } \frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$$

Calculons alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

Ensuite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} \right) \quad (\text{expression conjuguée})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{x+1-x+1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right)} = 1 \text{ car } \frac{2x}{x-1} \rightarrow 2 \text{ et}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$$

Alors la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{car } \frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$$

Calculons alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

Ensuite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} \right) \quad (\text{expression conjuguée})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x+1-x+1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right)} = 1 \text{ car } \frac{2x}{x-1} \rightarrow 2 \text{ et}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$$

Alors la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ &= +\infty \text{ car } \\ &\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ x+1 \rightarrow 2 \\ x-1 \rightarrow 0 \text{ et } x-1 > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \rightarrow +\infty \end{cases}\end{aligned}$$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C).

$$\begin{aligned}\text{e) } f(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \\ Df &= \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{x^3}{x-1} \right. \\ &\quad \left. \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Df &=]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[\\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{x}{x-1}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{x-1}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors La droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{-1 + \frac{x}{x-1}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x-1}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors La droite d'équation
 $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à
 (C) en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$= +\infty$$

La droite d'équation $x = 1$ est
 asymptote verticale à la courbe
 (C).

Exercice 11 :

$$f(x) = x^3 - 3x - 4$$

1. Tableau de variation

f est une fonction polynôme. Donc

$$Df = IR$$

f est dérivable sur IR et $f'(x) =$
 $3x^2 - 3$

$f'(x) \geq 0$ sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
 Alors f est strictement croissante sur
 $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$.

$f'(x) \leq 0$ sur $[-1; 1]$. Alors f est
 strictement décroissante sur
 $[-1; 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

2. Montrons que (E): $f(x) = 0$
 admet une solution unique α
 dans IR .

f est continue sur $] -\infty ; 1]$ et
 $f(]-\infty ; 1]) =] -\infty ; -2]$. La
 fonction f ne change donc pas de
 signe sur $] -\infty ; 1]$.

D'autre part, f est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ puis $f([1 ; +\infty[) = [-6 ; +\infty[$ contenant 0. D'où l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $2 < \alpha < 3$

$$f(2) = -2 \text{ et } f(3) = 14.$$

$$f(2) \times f(3) < 0. \text{ D'où } 2 < \alpha < 3.$$

4. Signe de $f(x)$

$$f(x) \leq 0 \text{ si } x \in]-\infty ; \alpha]$$

$$f(x) \geq 0 \text{ si } x \in [\alpha ; +\infty[$$

Exercice 12 :

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$

Prouvons que $\forall x \in [0 ; \frac{1}{2}]$,

$$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$$

f est dérivable sur $[0 ; \frac{1}{2}]$, et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$x \in [0 ; \frac{1}{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit : } 1 \leq x+1 \leq \frac{3}{2}$$

$$1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ équivaut à :}$$

$$2 \leq 2\sqrt{x+1} \leq \sqrt{6}$$

$$\text{Alors on a : } \frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0 ; x]$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq$$

$$\frac{1}{2}(x-0) \text{ et } f(0) = 1.$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0 ; \frac{1}{2}], 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$$

2. Interprétation géométrique du résultat obtenu

Sur l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}]$, (C) est au

dessus de la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \text{ et en dessous de la}$$

$$\text{droite d'équation } y = 1 + \frac{x}{2}$$

3. Encadrement de $\sqrt{1,1}$

$$\text{On a : } 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

$$\text{Soit } 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

$$\text{Posons } x = 0,1$$

$$\text{Alors : } 1 + \frac{0,1}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1,1} \leq$$

$$1 + \frac{0,1}{2}$$

$$\boxed{1,04 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05}$$

Exercice 13 :

$$f(x) = \sqrt{1-x} \text{ et } I = [0 ; \frac{1}{2}]$$

Démontrons que pour tout $x \in I$,

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 1 - \frac{x}{2}$$

f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$x \in I \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \text{ On en}$$

déduit l'encadrement :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1.$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle

$[0 ; x]$ pour tout x de I , on a :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq -\frac{1}{2}(x-0) \text{ et } f(0) = 1$$

D'où

$$x \in I, 1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 1 - \frac{x}{2}$$

Exercice 14 :

On donne l'équation:

$$(E) : x^2 + x - 1 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. Montrons que r est solution de

l'équation $f(x) = x$

$$r \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow r^2 + r - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r(r+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{r+1} = f(r)$$

D'où r est solution de l'équation

$$f(x) = x$$

2. Montrons que $\forall x \in$

$$\left[\frac{1}{2} ; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$$

f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

On a : pour tout réel de l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2} ; 1\right], f'(x) < 0. \text{ Alors } f \text{ est}$$

strictement décroissante sur

$$\left[\frac{1}{2} ; 1\right]. \text{ Donc on a l'implication}$$

suivante :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}. \text{ or } \left[\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$$

$$\text{D'où } \forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right],$$

$$f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$$

3. Montrons que $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right],$

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

f' est dérivable sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, et

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}. \text{ Pour tout } x,$$

$f''(x) > 0$. Alors f' est strictement

croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$. On déduit

l'implication :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'(x)$$

$$\leq f'(1)$$

$$-\frac{4}{9} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{4} < 0.$$

$$\text{D'où } |f'(x)| \leq \frac{4}{9}, \forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$$

4. Déduisons – en que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right], |f(x) - r| \leq \frac{4}{9} |x - r|$$

On a : $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$,
 $r \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$ et $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$. En

appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a :
 $|f(x) - f(r)| \leq \frac{4}{9} |x - r|$ or
 $f(r) = r$.

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right], |f(x) - r| \leq \frac{4}{9} |x - r|$

Exercice 15 :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Démontrons que (E): $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution α sur $[1 ; +\infty[$.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

f est continue sur $[1 ; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et
 $f(1) = -1$. Alors $f([1 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$. Or $0 \in [-1 ; +\infty[$.

D'autre part, f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
 Alors f y est strictement croissante.

D'où l'équation (E) admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$.

2. Montrons que (E) $\Leftrightarrow g(x) = x$

$$(E) \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$(E) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = \frac{1}{x}$$

$$(E) \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x \in [1 ; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

D'où (E) $\Leftrightarrow g(x) = x$

3. Montrons que pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 g est dérivable sur pour $[1 ; +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$x \in [1 ; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } 2\sqrt{x} \geq 2. \text{ Alors } 2x\sqrt{x} \geq 2.$$

$$\frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}. \text{ alors } -\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq 0.$$

D'où pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4. Déduisons –en que pour tout $x \in [1 ; +\infty[$,

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

$$\text{On a } x \in [1 ; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

En appliquant les inégalités des accroissements finis, sachant que $\alpha \in [1 ; +\infty[$, on obtient :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \text{ or}$$

$$(E) \Leftrightarrow g(x) = x. \text{ Donc}$$

$$g(\alpha) = \alpha.$$

D'où pour tout $x \in [1 ; +\infty[$,

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Exercice 16 :

1. Démontrons que f réalise une bijection de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ vers un intervalle I .

f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et

$$f'(x) = \frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$$

$\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right], \cos^2 \pi x > 0$ et $\sin \pi x > 0$. Alors $f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. Elle réalise alors une bijection sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

De plus $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ car $\cos \pi x \rightarrow 0$ et $\cos \pi x > 0$.

D'où f réalise une bijection de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ vers $I = [1 ; +\infty[$

2. $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right], f'(x) \neq 0$.

Donc f est dérivable sur I .

3. a/ Tableau de variation de f^{-1}
 f^{-1} a le même sens de variation que f . Donc f^{-1} est strictement croissante sur I . On obtient alors :

x	0	$\frac{1}{2}$
$(f^{-1})'(x)$	+	
$f^{-1}(x)$	1	$+\infty$

b/ Expression de $(f^{-1})'(x)$

On a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[(f^{-1})(x)]}$$

$$f'(x) = \frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos \pi x} \Rightarrow \cos \pi x = \frac{1}{f(x)}$$

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 1$$

$$\sin \pi x = \sqrt{1 - \cos^2 \pi x}$$

$$= \sqrt{1 - \left[\frac{1}{f(x)}\right]^2}$$

alors :

$$\sin \pi x = \frac{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}{f(x)}$$

On obtient ensuite :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \pi \times \sin \pi x \times \frac{1}{\cos^2 \pi x} \\ &= \pi \times \frac{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}{f(x)} \times \left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right]^2 \\ &= \pi \times \frac{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}{f(x)} \times [f(x)]^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \pi \times f(x) \times \sqrt{[f(x)]^2 - 1}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} f'[(f^{-1})(x)] &= \\ \pi f[(f^{-1})(x)] \sqrt{[f[(f^{-1})(x)]]^2 - 1} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} f[(f^{-1})(x)] &= f \circ (f^{-1})(x) = x \\ &\text{(fonction bijective).} \end{aligned}$$

$$\text{Et donc : } f'[(f^{-1})(x)] = \pi \times x \times \sqrt{x^2 - 1}.$$

Enfin :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi x \sqrt{x^2 - 1}}$$

c/ Calculons $(f^{-1})'(\sqrt{2})$ de deux façons différentes.

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\pi \sqrt{2} \cdot \sqrt{2-1}}. \text{ Soit :}$$

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}}$$

Ou autrement :

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{2}))}$$

$$\text{On a : } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}. \text{ Alors :}$$

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\pi \sin \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}}$$

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}}$$

Exercice 17 :

$$f : [0 ; \pi[\rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x}$$

1. Démontrons que f réalise une bijection $[0 ; \pi[$ vers un intervalle J

f est dérivable sur $[0 ; \pi[$ et

$$f'(x) = -\frac{(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

Pour tout réel $x \in [0 ; \pi[$;

$(1 + \cos x)^2 > 0$ et $\sin x > 0$. Donc

$f'(x) > 0$. f est alors strictement croissante sur $[0 ; \pi[$. D'où elle réalise une bijection de $[0 ; \pi[$ vers

$$J = \left[f(0) ; \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \right[$$

$$J = \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

2. Dérivabilité de f^{-1} sur J

$$\forall x \in [0 ; \pi[; f'(x) > 0 \text{ et}$$

$$f'(0) = 0$$

Donc f^{-1} n'est pas dérivable sur J .

Elle est alors dérivable sur
 $J - \{f(0)\}$

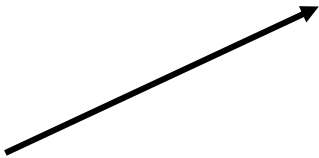
soit $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$

3. Tableau de variation de f^{-1}

f^{-1} est dérivable sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ et a
 le même sens de variation que f .

Donc elle est strictement croissante
 sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		+
$f^{-1}(x)$	0	π



4. Explicitons $(f^{-1})'(x)$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \sin x \times (f(x))^2$$

On a : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; soit $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{f(x)} - 1$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right)^2}$$

On écrit alors :

$$f'(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right)^2} \times (f(x))^2$$

Il vient alors que :

$$f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{f(f^{-1}(x))} - 1 \right)^2} \times (f(f^{-1}(x)))^2$$

Or $f(f^{-1}(x)) = x$. Ce qui nous conduit à :

$$f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} \times x^2$$

$$f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x}} \times x^2$$

$$f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \times x^2$$

$$f'(f^{-1}(x)) = x\sqrt{2x-1}$$

D'autre part, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Enfin :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$$

5. Calculons de deux manières $(f^{-1})'(2)$

- Utilisation de la question précédente :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{2\sqrt{2(2)-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

- Utilisation de la définition :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}\end{aligned}$$

On pose $f(x) = 2$. Ce qui donne : $\cos x = -\frac{1}{2}$

soit $x = \frac{2\pi}{3}$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2}}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 18 :

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2}(x - 1)$$

1. Justifions que f est bijective
 f est continue et dérivable sur
l'intervalle $]0 ; 2[$ et

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}(x - 1) \right]$$

$\forall x, f'(x) > 0$. Alors f est
strictement croissante sur $]0 ; 2[$.
D'où f est bijective sur $]0 ; 2[$.

2. Démontrons que f^{-1} est
dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}(x - 1) \right]$$

Pour tout x , $f'(x) \neq 0$ et

$$f(]0 ; 2[) =$$

$$\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right[$$

(f est une fonction croissante)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(x - 1)}{\cos \frac{\pi}{2}(x - 1)}$$

$$= -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}(x - 1) \rightarrow -1 \\ \cos \frac{\pi}{2}(x - 1) \rightarrow 0 \\ \cos \frac{\pi}{2}(x - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(x - 1)}{\cos \frac{\pi}{2}(x - 1)}$$

$$= +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}(x - 1) \rightarrow 1 \\ \cos \frac{\pi}{2}(x - 1) \rightarrow 0 \\ \cos \frac{\pi}{2}(x - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(]0 ; 2[) =]-\infty ; +\infty[$$

**D'où f^{-1} est définie et dérivable
sur $\mathbb{R}$.**

- Montrons que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$$

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}(x - 1) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} [1 + (f(x))^2] \end{aligned}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x \text{ car } f \text{ est bijective.}$$

Donc :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} [1 + (f \circ f^{-1}(x))^2]} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1 + x^2)} \end{aligned}$$

D'où :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$$

$$3. h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Dérivabilité de h .

$$Dh = \left\{ x \in Df^{-1} \text{ et } \frac{1}{x} \in Df^{-1} \right\}$$

$$x \in Df^{-1} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x} \in Df^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Donc } Dh = \mathbb{R}^*$$

$\forall x \in]0 ; 2[, f'(x) \neq 0$. Donc la
fonction $x \mapsto f^{-1}(x)$ est dérivable
sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x}$ existe et $f'\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$.

Donc la fonction $x \mapsto f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

D'où h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de deux fonctions dérivables.

- Calculons $h'(x)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f^{-1})'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &\quad \times (f^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right) \\ h'(x) &= \frac{2}{\pi(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \\ &\quad \times \frac{2}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\ h'(x) &= \frac{2}{\pi(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \times \frac{2x^2}{\pi(1+x^2)} \Rightarrow \\ &\quad \boxed{h'(x) = 0} \end{aligned}$$

4. Formule explicite de h

$h'(x) = 0 \Rightarrow h$ est une fonction constante.

Pour $x \in]-\infty ; 0[$, $h(x) =$

$$h(-1) = 2f^{-1}(-1)$$

Pour $x \in]0 ; \infty[$,

$$h(x) = h(1) = 2f^{-1}(1)$$

Or :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} h(x) = 1 & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ h(x) = 3 & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

ETUDE DE FONCTIONS

Proposé 1 :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{(x-1)^2}$$

1. a) Ensemble de définition de f

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)^2 \neq 0\} ;$$

$$Df = \mathbb{R} - \{1\}$$

Calculs de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

b) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$

on a : $p(2) = 0$

Factorisation de $p(x)$:

On pose :

$$p(x) = (x-2)(x^2 + bx + c)$$

La méthode des coefficients indéterminés ou la méthode de la division euclidienne permet d'avoir :

$$p(x) = (x-2)(x^2 - x + 4)$$

Enfin

$$p(x) = (x-2) \left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

c) Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^3}$$

d) Sens de variation

$f'(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty ; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1 ; 2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right]$. Donc f est strictement croissante sur

$\left]-\infty ; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$,
sur $]1 ; 2]$ et sur $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right]$
 $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2} ; 1\right[\cup \left[2 ; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2} ; 1\right[$ et sur $\left[2 ; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$	1	2	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$		$f(2)$	$f\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$	$+\infty$

2. a) Déterminons a, b, c et d

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$$

Par division euclidienne on obtient :

$$f(x) = x + 3 + \frac{5x-7}{(x-1)^2}$$

Donc **$a = 1$; $b = 3$;**

$c = 5$ et $d = -7$

b) Montrons que (C) possède une asymptote oblique (D)

on a : $f(x) - (x+3) = \frac{5x-7}{(x-1)^2}$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-7}{(x-1)^2} = 0$. D'où la droite d'équation

$(D): y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe (C)

d) L'autre asymptote est la droite verticale d'équation $x = 1$ car

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

3. a) Positions relatives de
(C) et (D)

$$f(x) - (x + 3) = \frac{5x-7}{(x-1)^2} \text{ et}$$

$$\forall x \in Df, (x-1)^2 > 0.$$

Donc $f(x) - (x + 3)$ a le signe de
 $5x - 7$.

x	$-\infty$	1	$\frac{7}{5}$	$+\infty$
$f(x) - (x + 3)$	$-$	$-$	0	$+$

(C) est en dessous de (D) sur $] -\infty ; 1[\cup] 1 ; \frac{7}{5}]$

(C) est au dessus de (D) sur $[\frac{7}{5} ; +\infty[$

b) Traçons la courbe représentative
(C) de f

$$4. (E) : x^3 + (1 - m)x^2 + 2mx - 4 - m = 0$$

$$f(x) = m$$

En déplaçant une règle
parallèlement à l'axe des abscisses
du bas vers le haut, on obtient le
nombre de points d'intersection de
(C) et la droite d'équation (D).

➤ Si $m \in]-\infty ; f(\frac{1-\sqrt{17}}{2})[$, (E)
admet trois solutions

$$x_1 < x_2 < 0 < x_3$$

➤ Si $m = f(\frac{1-\sqrt{17}}{2})$, (E) admet
deux solutions $x_1 < 0 < x_2$

➤ Si

$$m \in]f(\frac{1-\sqrt{17}}{2}) ; f(\frac{1+\sqrt{17}}{2})[,$$

(E) admet une seule solution

$$x_1 > 0$$

➤ Si $m = f(\frac{1+\sqrt{17}}{2})$, (E) admet
deux solutions $0 < x_1 < x_2$

➤ Si $m \in]f(\frac{1+\sqrt{17}}{2}) ; f(2)[$ (E)
admet trois solutions :

$$0 < x_1 < x_2 < x_3$$

➤ Si $m = f(2)$, (E) admet deux
solutions $0 < x_1 < x_2$

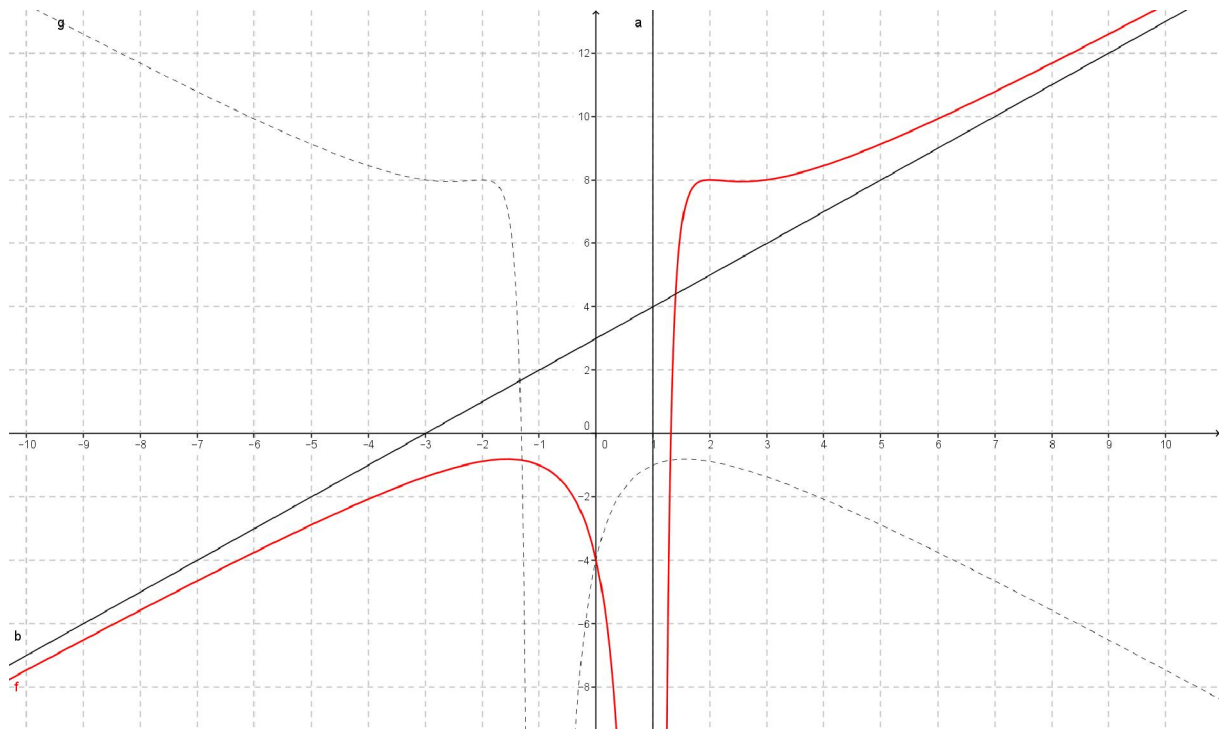
➤ Si $m \in]f(2) ; +\infty[$, (E) admet
une seule solution $x_1 > 0$

$$5. g(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 4}{(x+1)^2}$$

a) Relation entre f et g

$$g(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 4}{(x+1)^2} = f(-x)$$

$$b) \boxed{C'} = S_{(0)}(C)$$



Propose 2 :

- $f(x) = (x - 1)\sqrt{x + 2}$
 1. a) Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$

$Df = [-2 ; +\infty[$
 f est deux fois dérivable sur
 $]-2 ; +\infty[, et$

$$f'(x) = \sqrt{x + 2} + \frac{x - 1}{2\sqrt{x + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x + 3}{2\sqrt{x + 2}}$$

Ensuite :

$$f''(x) = \frac{3\sqrt{x + 2} - \frac{3x + 3}{2\sqrt{x + 2}}}{2(x + 2)}$$

$$f''(x) = \frac{3x + 9}{2(x + 2)\sqrt{x + 2}}$$

- b) Sens de variation de f'

$$\forall x \in]-2 ; +\infty[,$$

$$2(x + 2)\sqrt{x + 2} > 0. \text{ Donc } f''(x) \text{ a}$$

le signe de $3x + 9$.

$$x \in]-2 ; +\infty[\Leftrightarrow x > -2$$

$$3x + 9 > 3 > 0.$$

$$f''(x) > 0 \text{ sur }]-2 ; +\infty[.$$

**Donc f' est strictement croissante
 sur $]-2 ; +\infty[.$**

- c) Dédisons un encadrement de

$$f'(x) \text{ sur } [2 ; 7]$$

f' croissante. Donc si $2 \leq x \leq 7$

$$\text{alors } f'(2) \leq f'(x) \leq f'(7)$$

$$\frac{9}{4} \leq f'(x) \leq 4$$

- d) Encadrement de $f(x)$

$$\text{Soit } x \in [2 ; 7].$$

$$\text{On a : } \frac{9}{4} \leq f'(x) \leq 4. \text{ D'après les}$$

inégalités des accroissements finis

appliquées sur $[2 ; x]$, on a ;

$$\frac{9}{4}(x - 2) \leq f(x) - f(2)$$

$$\leq 4(x - 2)$$

$$\text{Or } 2 \leq x \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{9}{4}(x - 2) \\ 4(x - 2) \leq 20 \end{cases}$$

Alors on a :

$$\forall x \in [2 ; 7],$$

$$0 \leq f(x) - f(2) \leq 20$$

$$2 \leq f(x) \leq 22$$

2. a) Variations de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} x - 1 \rightarrow +\infty \\ x + 2 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

$$\forall x \in]-2 ; +\infty[, \sqrt{x+2} > 0.$$

donc $f'(x)$ a le signe de $x + 1$

- $\forall x \in]-2 ; -1[, x + 1 < 0.$

Donc f est strictement
décroissante sur $]-2 ; -1[$

- $\forall x \in]-1 ; +\infty[, x + 1 > 0.$

Donc f est strictement
croissante sur $]-1 ; +\infty[$

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

b) Dérivabilité de f en 2

$$\lim_{x \rightarrow -2 <} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2 <} \frac{(x-1)\sqrt{x+2}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2 >} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} x-1 \rightarrow -3 \\ \sqrt{x+2} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

f n'est pas dérivable en -2 mais sa
courbe représentative (C) admet en

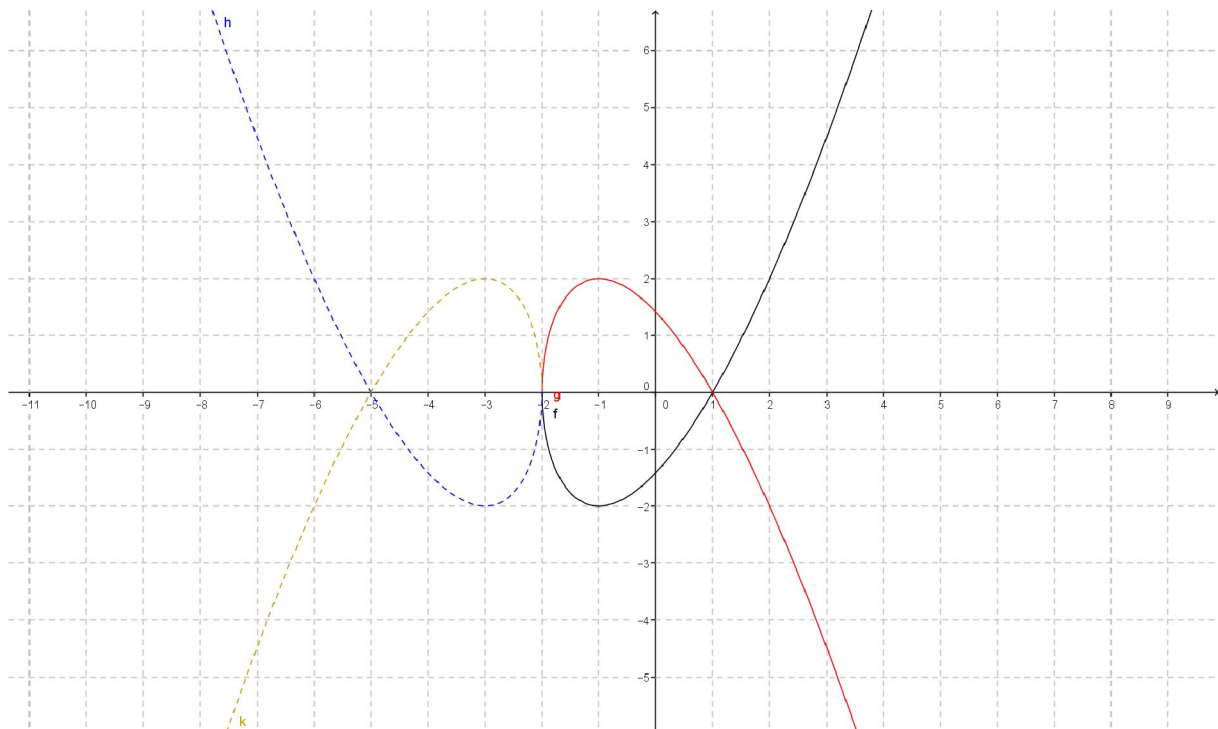
$x = -2$ une tangente verticale
dirigée vers le bas.

a) Construction de la courbe (C)

Branches infinies :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{x+2} = +\infty$$

**(C) admet une branche
parabolique de direction (OY)**



3. $(C_1): g(x) = (1-x)\sqrt{x+2}$
 $(C_2): h(x) = (-x-5)\sqrt{-x-2}$
 $(C_3): k(x) = (x+5)\sqrt{-x-2}$

a) Expression de
 $g(x), h(x)$ et $k(x)$ en
fonction de $f(x)$

On a : $g(x) = -f(x)$

$h(x) = f(-4-x)$

$k(x) = -f(-4-x)$

b) $(C_1) = S_{(OI)}(C)$

$(C_2) = S_{(\Delta)}(C)$ avec

$(\Delta): x = -2$

$(C_3) = S_{(OI)}(C_2)$

4. $\varphi(x) = f(x)$ sur $[-1 ; +\infty[$

a) Montrons que φ admet une
bijection réciproque notée φ^{-1}

La fonction f est strictement
croissante sur $[-1 ; +\infty[$. Elle est

donc monotone sur $[-1 ; +\infty[$.

D'où φ est bijective et donc admet
une bijection réciproque φ^{-1} définie
de $[2 ; +\infty[$ vers $[-1 ; +\infty[$

b) $D\varphi^{-1} = [-2 ; +\infty[$ et $\forall x \in$
 $]-1 ; +\infty[$, $\varphi'(x) \neq 0$ donc φ'
est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$

c) Calculons

- $\varphi(0) = f(0) = -\sqrt{2}$

- $\varphi'(0) = f'(0) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

- $(\varphi^{-1})(-\sqrt{2}) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(-\sqrt{2}))}$

$\varphi(0) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\varphi^{-1}(-\sqrt{2}) = 0.$

Alors :

$(\varphi^{-1})(-\sqrt{2}) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Proposé 3 :

1. $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

a) Dérivabilité de f en -1 et en 1 .

$$Df = IR$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	$x^2 - 1$

- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2}{x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en -1 mais sa courbe admet en $x = -1$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

- $$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet en $x = 1$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

b) Sens de variation de f

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ sur }]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$$

• f est dérivable sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$ et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2 - 1} > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $x + \sqrt{x^2 - 1}$.

$$\forall x \in]-\infty ; -1[, \quad x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} < -x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} + x < 0.$$

$$\text{Donc } f'(x) < 0$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $x > 0$ et $\sqrt{x^2 - 1}$. Donc $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

- f est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et sa dérivée $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in] -1 ; 1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{1-x^2} - x$.

$$\text{Posons : } \sqrt{1-x^2} - x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2} > x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \Rightarrow x \in] -1 ; 0] \quad \text{ou} \quad x \in \left[0 ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$$

$$\text{Donc } f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \left] -1 ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right[.$$

f est alors croissante strictement sur $\left] -1 ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1 \right[.$

c) Démontrons que (C) admet deux asymptotes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc l'axe (Ox) est asymptote horizontale à la courbe (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

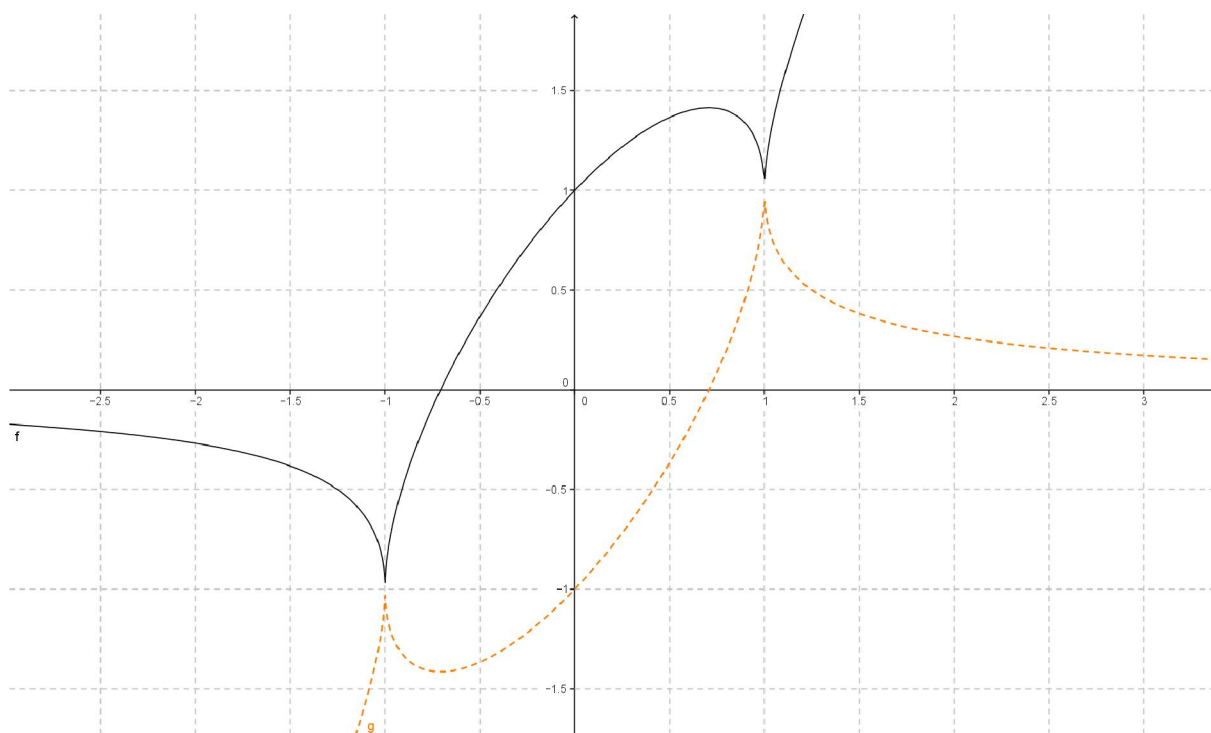
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$

d) Construction de la courbe (C) de la fonction f

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	0	-1	$\sqrt{2}$	1	$+\infty$



2. $g(x) = -x - \sqrt{|x^2 - 1|}$

$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right)$ et $N\left(\begin{smallmatrix} -x \\ g(-x) \end{smallmatrix}\right)$

a) Déterminons le milieu I du segment $[MN]$

On $g(x) = -f(-x)$ donc $I\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = O$. Les points M et N sont symétriques par rapport à O , origine du repère.

On en déduit que $(C') = S_O(C)$.

Proposé 4 :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$$

1. Etudions la parité de f

$$Df = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\} \Rightarrow Df = \mathbb{R}^* \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Donc f est une fonction impaire.

On peut donc réduire le domaine à un ensemble d'étude égal $Df \cap [0 ; +\infty[=]0 ; +\infty[$. **On complètera la représentation graphique par symétrie centrale de centre O .**

2. a) Dérivabilité de f en 1 et sur les intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$		$\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$\bullet f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{x+1}{x\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} x+1 \rightarrow 2 \\ x\sqrt{1-x^2} \rightarrow 0 \\ x\sqrt{1-x^2} > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{1}{2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}} \right)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} -(x+1) \rightarrow -2 \\ x\sqrt{x^2-1} \rightarrow 0 \\ x\sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases}$$

f n'est pas dérivable en $x = 1$ mais sa courbe (C) admet en ce point une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

- La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ comme une restriction de fonction dérivable et $\forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[; |x^2 - 1| > 0$ et $x \neq 0$.

Donc la fonction $x \mapsto -\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$ est dérivable sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ comme une somme de fonctions dérivables.

b) Signe de $f'(x)$

Posons $u = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\blacksquare x \in]0 ; 1[, f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0 ; 1[, f'(x) > 0$.

$$\blacksquare x \in]1 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$x \in]1 ; +\infty[\Leftrightarrow u \in]0 ; +\infty[\text{ et } u = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 = u^2 + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \sqrt{x^2 - 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow u^3 + u - 2 = (u - 1)(u^2 + u + 2) = 0$$

Soit $u - 1 = 0$ car $u^2 + u + 2 > 0$. On a alors : $x = \sqrt{2}$

$f'(x)$ a le même signe que $u - 1$ sur $]0 ; +\infty[$. On obtient le tableau de signe :

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+

$$\forall x \in]-1 ; \sqrt{2}], f'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [\sqrt{2} ; +\infty[, f'(x) \geq 0$$

3. $x > 1$

a) Mettons $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \varphi(x)$

$$\text{On a : } \varphi(x) = f(x) - \frac{x}{2} + 1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

b) Dédisons – en une asymptote à (C)

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \varphi(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

On conclut que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$.

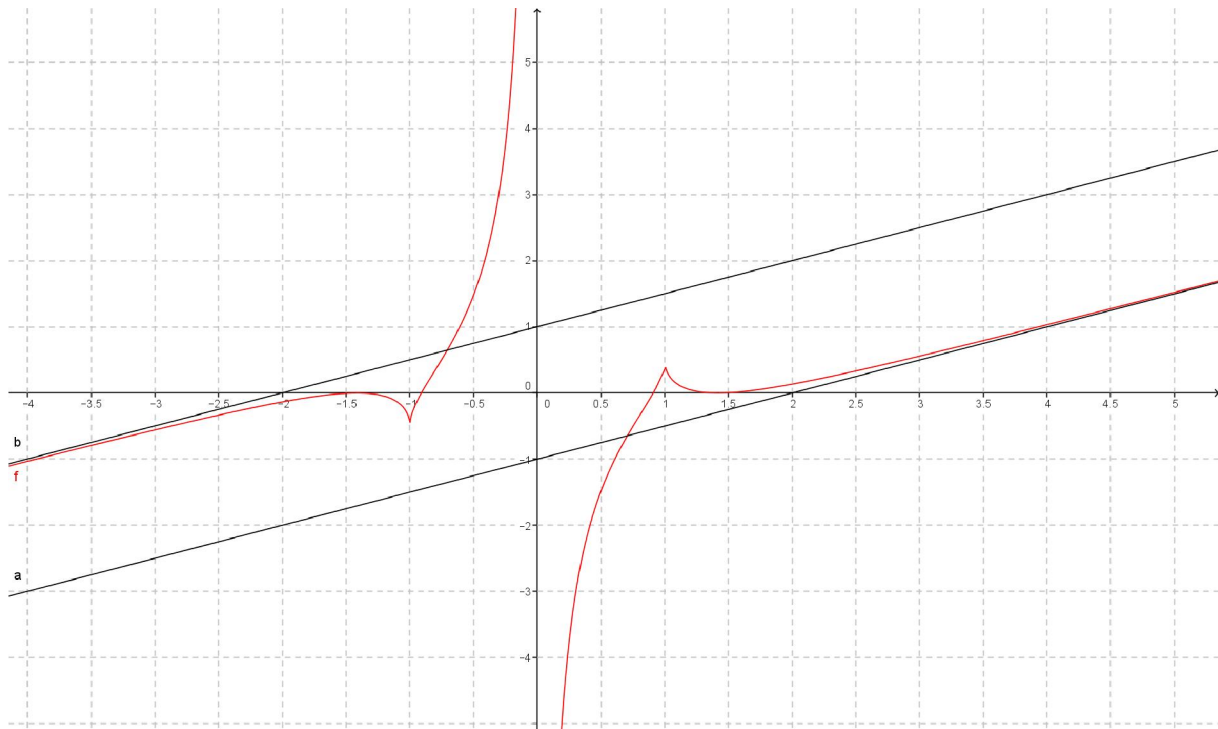
4. Construisons la courbe (C) de f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} \rightarrow 0 \\ -\sqrt{1-x^2} \rightarrow -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Tableau de variation :

x	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			$\frac{1}{2}$		$+\infty$	
	$-\infty$			0		



Proposé 7 :

$$A. g(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

a) Les variations de g

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

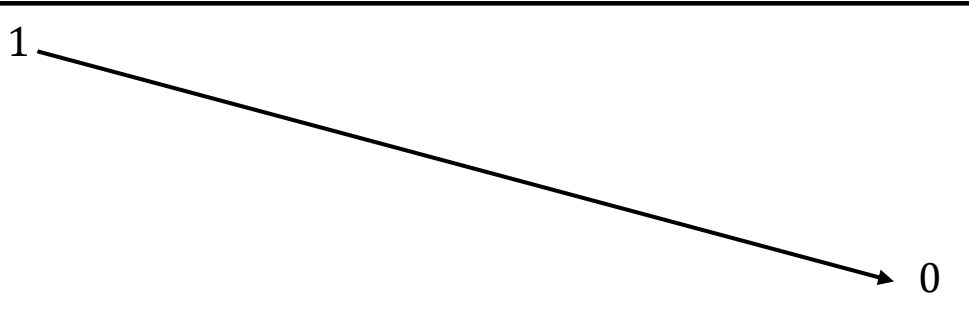
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = 0$$

$$g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2\sqrt{(x^2 + 1)^3} > 0. \text{ Donc } g'(x) < 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

g est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$—$	
$g(x)$		

b) Signe de $g(x)$

Du tableau de variation on lit : $g < \mathbb{R} > =]0 ; 1[$. Donc pour tout réel

$$x, \quad g(x) > 0.$$

$$B. \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

1.

a) Variations de f

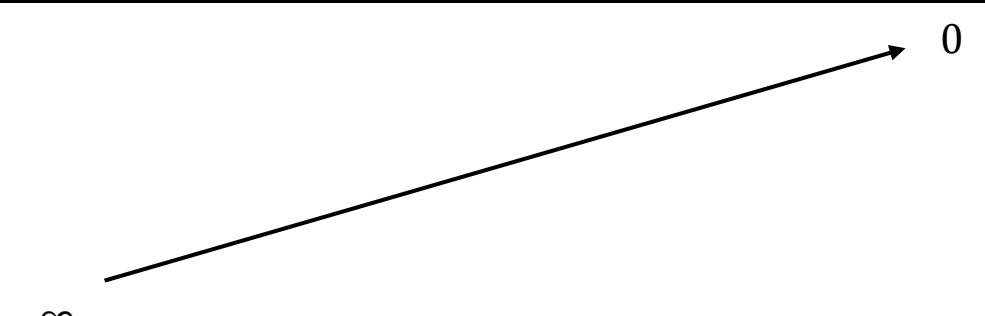
$$Df = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right) = -\infty$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g(x)$.

Donc d'après la partie A, **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$— —$	
$f(x)$		

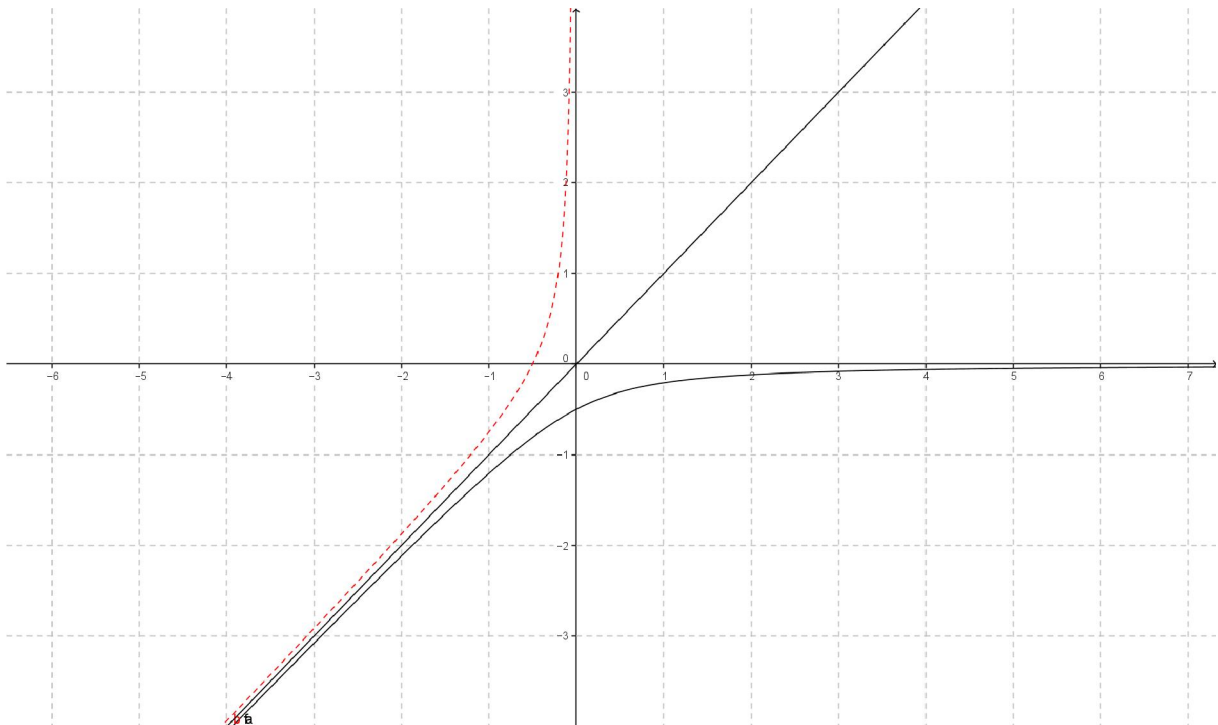
- b) Montrer que l'axe (OI) est asymptote horizontale à (C) de f
 $\lim_0 f = 0$. D'où l'axe (OI) est asymptote horizontale à (C) de f
Montrons que la droite d'équation $\Delta: y = x$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$

$$f(x) - x = -\frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0 \text{ car } x - \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow -\infty.$$

D'où la droite $\Delta: y = x$ est asymptote oblique à (C) .

- c) Construisons (C)



2. a) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J
 f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc monotone sur $\mathbb{R}$.

D'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J =]-\infty ; 0[$.

- b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable sur J .

- c) Tableau de variation de f^{-1}

f et sa bijection réciproque ont le même sens de variation. On obtient donc des variations de f , le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ 0
$(f^{-1})'(x)$	— —
$(f^{-1})(x)$	

d) Calculons $(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right)$

$$(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f' \left(f^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\boxed{(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f'(0)} = 2}$$

e) Représentation graphique de (C') de f^{-1}

3. Explicitons $f^{-1}(x)$

On résout l'équation d'inconnue x , $f(x) = y$

$$\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right) = y \quad \Rightarrow \quad x = y - \frac{1}{4y}$$

$$\text{On obtient alors } f^{-1}(x) = x - \frac{1}{4x}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}}$$

$$\text{On vérifie aisément que } \boxed{(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right) = 2}$$

Proposé 9 :

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}$$

1. Montrons que $Df = [-1 ; 1]$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0 \text{ et } 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} \geq 0\}$$

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1 ; 1]$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0 ; 1], \quad 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} &\geq 0 \\ \forall x \in [-1 ; 0], \quad 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} &\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - x^2} \leq -\frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -\frac{1}{2x} > 0 \\ 1 - x^2 \leq \frac{1}{4x^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \quad x \in [-1 ; 0[\\ &\Leftrightarrow -(2x^2 + 1)^2 \leq 0 \\ \text{D'où } \boxed{Df = [-1 ; 1]} \end{aligned}$$

2. Développons :

$$\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$$

Déduisons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \sqrt{\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{f(x) = |x + \sqrt{1 - x^2}|}$$

3. Signe de $x + \sqrt{1 - x^2}$

- $\forall x \in [0 ; 1], \quad x + \sqrt{1 - x^2} > 0$
- Résolvons $\forall x \in [-1 ; 0]$ l'équation $x + \sqrt{1 - x^2} < 0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} < -x &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ 1 - x^2 \leq x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1 ; 0] \\ x \in]-\infty ; 0] \\ x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[\end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in \left[-1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{x + \sqrt{1 - x^2} \leq 0 \quad \text{si } x \in \left[-1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$$

$$\boxed{x + \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \quad \text{si } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right]}$$

En conclusion :

$$\begin{cases} f(x) = -x - \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in \left[-1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ f(x) = x + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right] \end{cases}$$

4. Calculs de limites

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$$

5. Continuité de f en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

f est continue en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Dérivabilité de f en :

- $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-1 + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$$

f n'est pas dérivable en $x = -1$ mais (C) admet en ce point une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

- $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}^-} \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-x^2} - x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{1-x^2} + x} = 1$$

f n'est pas dérivable en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ mais la courbe (C) admet en ce point deux demi-tangentes de coefficient directeur -1 et 1

- $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$$

f n'est pas dérivable en $x = 1$ mais (C) admet en ce point une demi – tangente verticale dirigée vers le haut.

7. Tableau de variation

f est dérivable sur $] -1 ; 1[/ \left\{ -\frac{\sqrt{1}}{2} \right\}$ et

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}[\\ f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1[\end{cases}$$

$\forall x \in] -1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}[, f'(x) < 0. f$ est strictement décroissante sur $] -1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}[$.

$\forall x \in] -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0[, f'(x) > 0. f$ est strictement croissante sur $] -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0[$.

Réolvons $x \in [0 ; 1[, \sqrt{1-x^2} - x \leq 0$

$$\sqrt{1-x^2} - x \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0 ; 1[\\ x \geq 0 \Rightarrow x \in [0 ; +\infty[\\ 1-2x^2 \leq 0 \Rightarrow x \in]-\infty ; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty\right[\end{cases}$$

On a : $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right[$

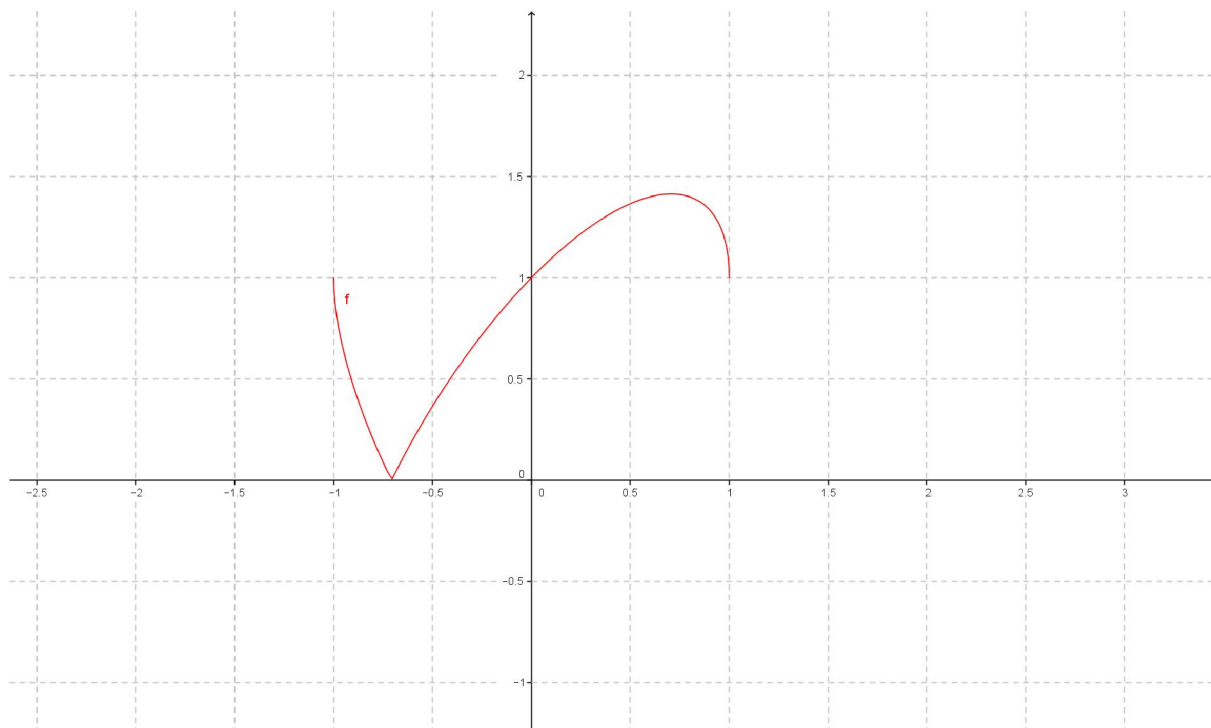
Donc : f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right[$ et strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Tableau de variation :

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	0	$\sqrt{2}$	1

8. La restriction $\bar{f}$ de f est une bijection car f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right]$.

Elle est définie de $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right]$ vers $K = [1 ; \sqrt{2}]$



FONCTION LOGARITHME NEPERIEN FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

• FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Petits entraînements :

Limites de fonctions comportant $\ln$:

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f .

1. $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

2. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$

3. $f(x) = \ln 3x - \ln(x+1)$

4. $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

5. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}$

7. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

8. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 2:

Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en 0.

1. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

2. $f(x) = \ln x + \ln^2 x$

3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

4. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

6. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

7. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$

8. $f(x) = x^2 \ln^3 x$

Exercice 3 :

Calculer dans chaque cas les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

b) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

c) $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

d) $f(x) = \frac{3x + \ln x}{x}$

e) $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$

f) $f(x) = \frac{2 \ln x - 3}{\ln x}$

g) $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$

Exercice 4 :

On donne la fonction f définie par : $f(x) = \ln(\ln x)$

- Montrer que le domaine de définition de la fonction f , est $D =]1 ; +\infty[$.
- Déterminer les limites en 1 et en $+\infty$.

Dérivée de fonctions comportant $\ln$:

Exercice 5 :

Calculer la fonction dérivée de f sur l'intervalle I .

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x \ln x$ sur $I =]0 ; +\infty[$ | c) $f(x) = [(\ln x)^3]$ sur $I =]0 ; +\infty[$ |
| b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$ | d) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ sur $I =]1 ; +\infty[$ |

Exercice 6 :

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis déterminer sa dérivée $f'(x)$.

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $f(x) = \ln(-x)$ | f) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ |
| b) $f(x) = \ln(2x+1)$ | g) $f(x) = \ln\left \frac{x-2}{x+4}\right $ |
| c) $f(x) = \ln\sqrt{x}$ | h) $f(x) = \cos(\ln x)$ |
| d) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 4)$ | |
| e) $f(x) = \ln\frac{2}{x}$ | |

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

Limites de fonctions comportant $\exp$:

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1-e^x}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ | e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ |

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$

Exercice 9 :

Trouver dans chaque cas l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes du domaine de définition.

a) $f(x) = 5xe^x$

b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = e^{2x} - e^x + 4$

d) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x) = x e^{\frac{1}{x-1}}$

Dérivée de fonctions comportant exp :

Exercice 10 :

a) $f(x) = 5xe^x$

b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

c)

$f(x) = e^{2x} - e^x + 4$

d) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x) = x e^{\frac{1}{x-1}}$

Fonctions comportant ln et exp :

Exercice 11 :

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = x^3 \cdot e^{-\sqrt{x}}$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12:

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$.
 On note (C) sa représentation graphique. Unité graphique 2cm.

1. a) Etudier les variations de la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $\Phi(x) = xe^x - 1$.

- b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

- c) Préciser le signe de $\Phi(x)$ suivant les valeurs de x .

2. a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f .
Dresser son tableau de variation.

c) Montrer que f admet un minimum $m = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Justifier que $2,32 \leq m \leq 2,34$.

3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. Déterminer $(T) \cap (Oy)$.

4. Tracer (C) et (T) .

Exercice 13:

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par:

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1$. on appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; I ; J)$ d'unité graphique $2cm$.

1. a) Etudier sur $]0 ; +\infty[$, le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = x^3 - 2\ln x + 1$.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) .

Etudier la position de (C) par rapport à (D) .

d) Construire (C) , (T) et (D) .

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 4]$,

$$f(x) = (7 - 3x)e^{-x}$$

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du

tableau seront données sous forme exacte.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;4]$.

b. Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :
 $F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0 ; 4]$.

b. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 4]$

5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle

$[0 ; 4]$ par : $f''(x) = (3x - 10)e^{-x}$.

a. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

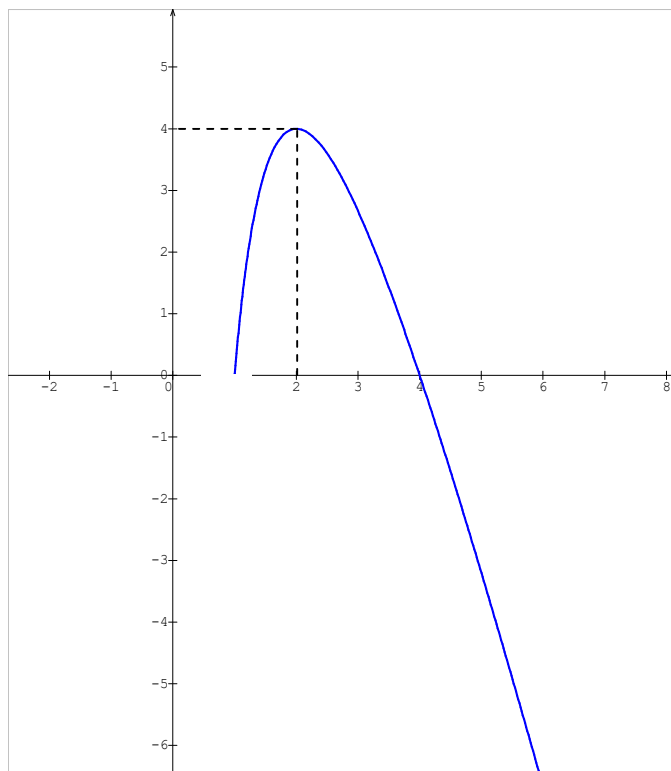
b. Montrer que la courbe représentative (C) de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 15 :

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$ par : $f(x) = ax + b - \frac{16}{x}$ où a et b sont des nombres réels. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$ et on note f' la fonction dérivée de f

sur cet intervalle. La courbe représentative de f donnée ci-dessous coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées $(2 ; 4)$.



1. a. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.

b. En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a.

déterminer les valeurs des réels a et b .

2. On admet que la fonction f est définie sur $[1 ; 6]$ par :

$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}$$

- a. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
 - b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$ en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.
 - c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$

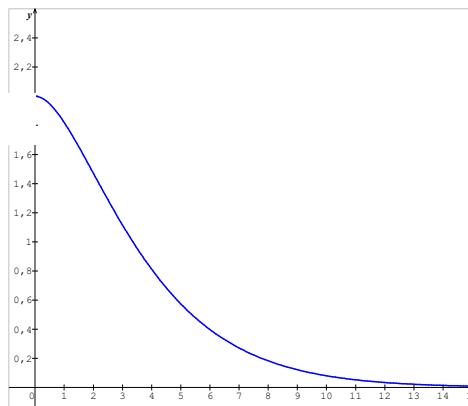
par : $F(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x$.

- a. Montrer que F est la primitive de la fonction f sur $[1 ; 6]$ telle que $F(1) = 0$.
- b. En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[1 ; 6]$, les valeurs seront arrondies au millième.

Exercice 16 :

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la

concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe suivante :



A/ Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. La concentration à l'instant initial ;
2. L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $f(x) = (x + 2)e^{0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
2. Justifier que l'équation

$f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 15]$.

3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et en la justifiant, répondre aux questions ci – dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Exercice 17 :

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1 - (x + 2)e^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

2. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

- a. Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
- b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x .

- c. En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation.
- d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
- e. Justifier que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- f. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Sens de variation de la fonction f
- a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- b. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
4. Construire la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

Exercice 18 :

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de g sur $[1; +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1; +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{e}$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.

- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1 ; +\infty[$.
 3. a. Montrer que, dans l'intervalle $[2 ; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α .
 - b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} près de α .

Fonctions exponentielles de base a et fonctions puissances**Exercice 19 :**

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$

- a) Montrer que g est la composée d'une fonction polynôme et d'une exponentielle de base a .
- b) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)^{0,4} \\ f(1) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) , la courbe

représentative de f .

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
2. Etudier f et tracer (C) .

PROPOSE 1 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Etudier les limites en $\frac{3}{2}$ et en $+\infty$.
Qu'en déduit-on pour la courbe représentative ?
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 2.

5. Construire (C) ainsi que la

tangente précédente.

PROPOSE 2 :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$$

1. a) calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- c) Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g\left(\frac{e}{2}\right)$. Dresser le tableau de variation de g .
- d) Calculer $g(e)$ et justifier que $g(x) \geq 0$ pour $x \geq e$
- e) Montrer que g s'annule sur $\left[\frac{1}{e}; \frac{e}{2}\right]$ pour une valeur unique α . Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; I; J)$ d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées. Tracer la courbe (C) de g . Placer en particulier les points d'abscisses α et e .

3. Soit f la fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{e} - x \ln x$.

- a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau des variations de f .
- b) Justifier que f est positive ou nulle sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]$

PROPOSE 3 :

Partie A

1. Etudier le sens de variation de la fonction h_1 définie par :

$h_1(x) = x - \ln x$. En déduire le signe de $h_1(x)$.

2. On définit sur

l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f_1 par $x \rightarrow \frac{x}{x - \ln x}$. Etudier les variations de f_1 .

3. On considère la fonction φ_1 sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = f_1(x); \forall x \in]0; +\infty[\\ \varphi_1(0) = 0 \end{cases}$$
- a) Montrer que φ_1 prolonge f_1 par continuité en 0.

b) Etudier la dérivabilité de φ_1 en 0. En donner une interprétation graphique.

c) Tracer (C_1) , la représentation graphique de φ_1 un repère orthonormé $(0, I, J)$.

Partie B : Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Etudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h_n(x) = x^n - \ln x$. En déduire pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $h_n(x) > 0$.

2. On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}$$

- a) On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g_n par :

$$g_n(x) = 1 + (1 - n)x^n - \ln x.$$

Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution notée a_n dans $]0; +\infty[$.

- b) Comparer a_n et 1. Quelle est la valeur de a_2 ?

- c) Démontrer que pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$ on a :

$$f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}.$$

- d) En déduire le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

3. Montrer que la fonction f_n admet

un prolongement par continuité φ_n en 0.

4. Etudier la dérivabilité de φ_n en 0. En donner une interprétation graphique.
5. Préciser la valeur $f_2(a_2)$ puis

tracer la représentation, graphique C_2 de φ_2 dans un repère, orthogonal. (Unité graphique 4 cm).

PROPOSE 4 :

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x.$$

- Étudier les variations de la fonction g . Préciser la valeur de $g(1)$.
- En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2.$$

- Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$).
 - Déterminer la limite de f en 0.

3.

- Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$.

- En utilisant la partie A-/, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. On nomme (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé : (unité graphique : 5cm). Tracer (C_f) .

Partie C :

- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0; 1[$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; 1[$ par $h(x) = f(x) - x$. On nomme α cette solution.

- Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0; 1[$. On nomme β cette solution.

3.

a) Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

b) En déduire un encadrement de α .

PROPOSE 5 :

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
 $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ où a et b sont des réels à déterminer. La fonction f est représentée par une courbe (C) dans un repère orthogonal d'unité 2cm en abscisse et 5cm en ordonnée. (C) passe par le point $A(0 ; 2)$ et admet un maximum au point d'abscisse 4.

- Calculer $f'(x)$
- Déterminer a et b

2. Par la suite, la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
 $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$.

- Déterminer la limite en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à (C) .
 - Etudier la position relative de (C) et Δ .
 - Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. Construire (C) et Δ

PROPOSE 6 :

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Etudier les limites en 0 et $+\infty$
 - Etudier le sens de variation de f
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0 ; +\infty[$. Vérifier que $1,7 < x_0 < 1,8$.

- (D) est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
 - Déterminer une équation de D sous la forme $y = ax + b$.
 - Etudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$.
 - En déduire la position relative (C) par rapport à (D) .
- Tracer la courbe (C) et (D)

PROPOSE 7 :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- Etudier les variations de g définie par $g(x) = x - 1 + \ln x$
- Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

3. Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f .
4. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe représentative.

PROPOSE 8 :

Soit f la fonction définie sur $I =]-2 ; +\infty[$ par :
 $f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$. On note (C) sa représentation graphique dans le repère $(O ; I ; J)$ d'unité 4cm.

Partie A : Etude de la fonction

1. Etude des variations de f'
 - a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
 - b) Etudier les variations de f' sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$
 - c) Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
2. Etude du signe de $f'(x)$
 - a) Montrer que sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[-0,6 ; -0,5]$
 - b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Etude des variations de f .
 - a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$
 - b) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .

Partie B : Position de la courbe (C) par rapport à ses tangentes.

Soit $x_0 \in]-2 ; +\infty[$. On appelle (T_{x_0}) la tangente à (C) au point d'abscisse x_0 . On note pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)].$$

1. Etude des variations de d
 - a) Vérifier que pour tout $x \in]-2 ; +\infty[$,
 $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
 - b) En utilisant la croissance de la fonction f' , donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x .
2. Déterminer les positions relatives de (C) et (T_{x_0}) .

Partie C : tracés dans le repère orthonormé (O ; I ; J)

1. Déterminer une équation de la tangente (T_0) au point d'abscisse 0. Tracer (T_0) .
2. Trouver x_0 pour que les tangentes (T_{x_0}) passent par l'origine du repère. Construire ces tangentes.

3. Tracer la courbe (C). On prendra

pour $\alpha \approx -0,54$ et $f(\alpha) \approx 0,8$.

PROPOSE 9 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 0.
2. Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f''(x) = \frac{(2x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$$

- a) Dresser le tableau de variation de f' sur $]0 ; +\infty[$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

c) Dédire le signe de la fonction dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f et que (C) est située en dessous de la droite d'équation $y = x + 1$.

4. Tracer soigneusement (C).

PROPOSE 10 :

La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{x^2-ax}$ où a est un réel donné.

1. Déterminer les valeurs de a correspondant aux cas suivants :

- a) $f_a(3) = 1$.
- b) $f_a(1) = 2$.

2. On pose $a = -1$. Soit g , la restriction de f_{-1} à $[0 ; +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Donner l'expression explicite de $g^{-1}(x)$ pour x donné.

3. Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un même repère.

PROPOSE 11 :

Partie A :

a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t - t - 1$. Quel est le minimum de g sur $\mathbb{R}$?

b) En déduire que pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$ et $e^t > t$.

Partie B :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$.

1. a) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$

b) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Expliquer pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f . On admet que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$.

3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 3cm , on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation :

$y = x^2 - 2x$ et (C) la courbe représentative de f .

Montrer que $f(x) - (x^2 - 2x)$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

a) Etudier les positions relatives des courbes $\mathcal{P}$ et (C)

4. Donner une équation de chacune des tangentes (D) et (D')

respectivement aux courbes $\mathcal{P}$ et (C) au point d'abscisse 0.

5. Tracer dans un repère $\mathcal{P}$, (C) (D) et (D') .

PROPOSE 12 :

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$$

Partie A :

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

On admet le résultat suivant

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

a) En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

c) Résoudre dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$, $1 - \ln(x-1) > 0$

d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$

e) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α

dans l'intervalle $[e+1 ; e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1 ; \alpha[$ et $]\alpha ; +\infty[$

2. φ est la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

a) Etudier la limite de φ en 1. On admet que φ admet pour limite 0 en $+\infty$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$

c) Démontrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1 ; \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

Partie B :

1. Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[; f(x) = \varphi(e^x)$.
2. En déduire :
 - a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0
 - b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

- c) Le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$
3. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[, f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$
4. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les arrondis au centième.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité graphique 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α .

PROPOSE 13 : R.O.C (Restitution Organisée des Connaissances)

Partie A : On désire démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Pour cela on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$

- a) Calculer $h'(x)$
- b) Résoudre $e^x - 1 \geq 0$. En déduire le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.
- c) Justifier que pour tout $x, e^x > x$.
- d) A l'aide d'un théorème de comparaison, retrouver la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$ et la fonction g définie par :

$$g(x) = xe^x - 1.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 5cm en abscisse et 2cm en ordonnées.

1. a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 1]$. Donner une valeur arrondie de cette solution à 0,1 près.
- c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$

c) Construire la courbe (C) de f

PROPOSE 14 : R.O.C

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; I; J)$ d'unité graphique 5cm.

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x^2}$ on appelle (Cf) et sa représentation graphique.

a) Montrer que pour tout réel positif x , $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f .

b) Etudier la limite en $+\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position relative de (Cf) par rapport à Δ .

e) Tracer (Cf) et Δ .

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle (Cg) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout réel x positif, $g'(x)$ a le même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de g .

b) Déterminer les positions relatives de (Cf) et (Cg) .

c) Tracer (Cg) dans le même repère que (Cf) . (on admettra que (Cg) a le même asymptote que (Cf) en $+\infty$).

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$; f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On notera α_n ce maximum.

2. On note S_n le point de (C_n) qui a pour abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que pour tout n , (C_n) passe par S_2 . Placer S_1 ; S_2 ; S_3 sur la figure.

3. Soit la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln \frac{x}{2}]}$

b) Etudier le sens de variation de g

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2

Proposé de corrigés

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Proposé 2 :

1. $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$

a) Calculons $g'(x)$

g est dérivable sur

$]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{2}{e} - \frac{1}{x} = \frac{2x-e}{ex}$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $ex > 0$. Donc $g'(x)$ a le signe de $2x - e$. Il vient alors que :

$g'(x) < 0$ si $x \in]0 ; \frac{e}{2}[$. g est alors strictement décroissante sur $]0 ; \frac{e}{2}[$

$g'(x) > 0$ si $x \in]\frac{e}{2} ; +\infty[$. g est alors strictement croissante sur $]\frac{e}{2} ; +\infty[$

b) Calcul de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{2x}{e} \rightarrow 0 \\ -\ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \end{cases}$$

c) Calculons

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e^2} \text{ et } g\left(\frac{e}{2}\right) = -1 + \ln 2$$

Tableau de variation de g

x	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{2}{e^2}$	$-1 + \ln 2$	$+\infty$

d) Calculons :

$g(e) = 0$. Or g est croissante sur $\left[\frac{e}{2} ; +\infty\right]$. Donc $x \geq e \Rightarrow g(x) \geq g(e)$.

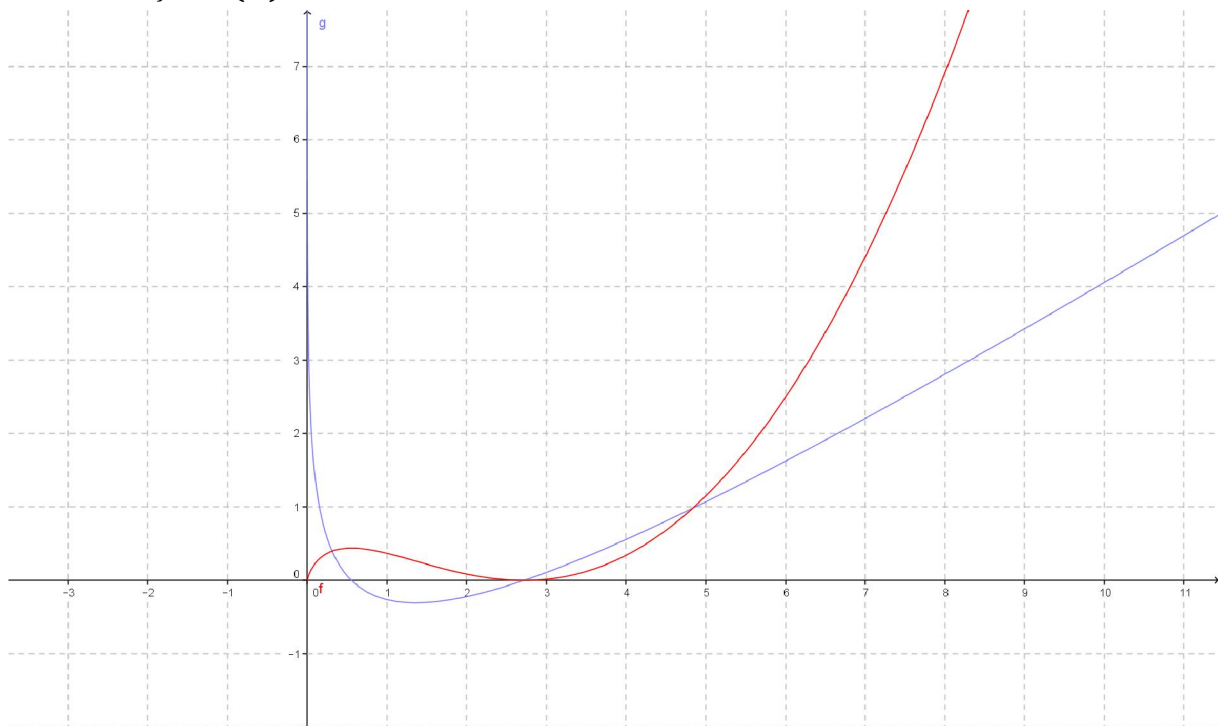
D'où $g(x) \geq 0$.

e) Montrons que g s'annule sur $\left[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}\right]$ pour une valeur unique α . On a $g\left(\frac{1}{e}\right) \times g\left(\frac{e}{2}\right) < 0$ et de plus la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle. D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}\right]$.

Encadrement de α à 10^{-2} près.

En utilisant la méthode par balayage on obtient $0,55 < \alpha < 0,56$.

2. Traçons (C)



3. $f(x) = \frac{x^2}{e} - x \ln x$

a) Vérifions que $f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2x}{e} - \left(\ln x + \frac{1}{x} \times x\right)$. D'où $f'(x) = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \frac{x^2}{e} \rightarrow 0 \\ x \ln x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

x	0	α	e	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

<

b) Justification

f admet un minimum nul sur $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right]$. D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{e} ; +\infty\right], f(x) \geq 0$.

Proposé 3 :

Partie A :

1. Etudions le sens de variation de h_1 définie par : $h_1(x) = x - \ln x$

h_1 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $h'_1(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\forall x \in]0 ; 1[, h'_1(x) < 0$. Donc h_1 est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$,
 $\forall x \in]1 ; +\infty[, h'_1(x) > 0$. Donc h_1 est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$

Déduisons le signe de h_1

$h_1(1) = \min h_1 = 1$. Donc $\forall x \in]0 ; +\infty[, h_1(x) > 0$

2. Etudions les variations de f_1

$$x \in]0 ; +\infty[, f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[, x - \ln x > 0$ (d'après la question 1). Donc $Df_1 =]0 ; +\infty[$

f_1 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est : $f'_1(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$.

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[, (x - \ln x)^2 > 0$. Donc $f'_1(x)$ a le signe de $1 - \ln x$.

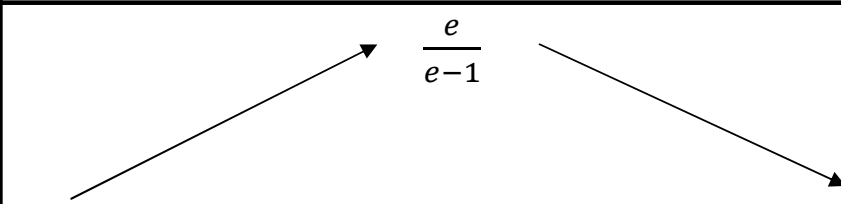
$\forall x \in]0 ; e], f'_1(x) \geq 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $]0 ; e]$

$\forall x \in [e ; +\infty[, f'_1(x) \leq 0$ donc f_1 est strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x \ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1$$

x	0	e	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$			

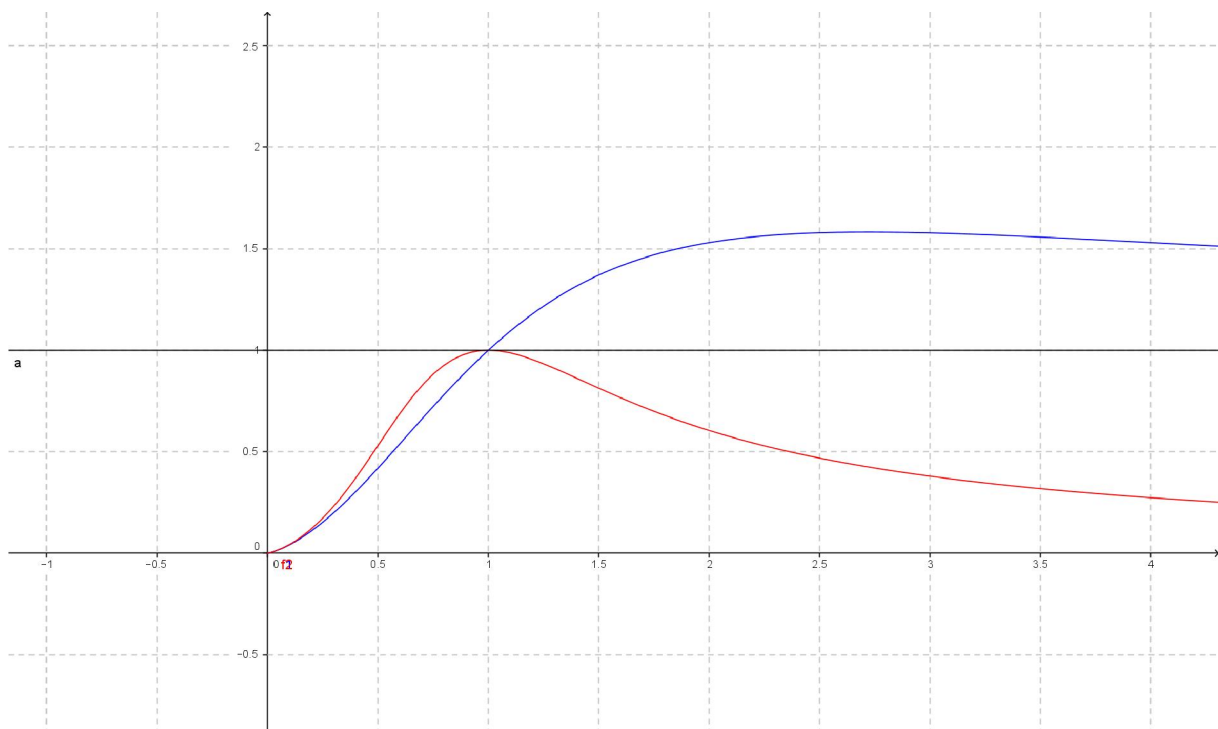
3. a) f n'est pas définie en 0 mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \varphi_1(0) = 0$. D'où φ_1 prolonge f_1 par continuité en 0.

b) Dérivabilité de φ_1 en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \ln x} = 0 \text{ car } \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ -\ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

(C) admet en $x = 0$ une tangente horizontale

c) Traçons la courbe (C) de f



Partie B

1. Sens de variation de h_n

$$h_n(x) = x^n - \ln x$$

$$D_{h_n} =]0 ; +\infty[$$

h_n est dérivable sur

$$]0 ; +\infty[\text{ et } h'_n(x) = \frac{nx^{n-1} - 1}{x}$$

$h'_n(x)$ a le signe de $nx^{n-1} - 1$.

Donc :

$$h'_n(x) \leq 0 \text{ si } x \in \left] 0 ; \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right].$$

h_n est strictement décroissante sur

$$\left] 0 ; \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right]$$

$$h'_n(x) \geq 0 \text{ si } x \in \left[\sqrt[n]{\frac{1}{n}} ; +\infty \right[.$$

$$2. f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}$$

$$a) g_n(x) = 1 + (1 - n)x^n - \ln x$$

Montrons que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = -\infty$$

De plus g_n est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$g'_n(x) = \frac{n(1 - n)x^{n-1} - 1}{x}$$

b) Comparons α_n et 1

$$\text{On a : } g_n(1) = 2 - n$$

$n \geq 2 \Leftrightarrow g_n(1) \leq 0$ et $g_n(\alpha_n) = 0$. Il vient : $g_n(1) \leq g_n(\alpha_n)$ or g_n est une fonction décroissante. Donc $\alpha_n \leq 1$

Valeur de α_2

$g_2(\alpha_2) = 0$ et $g_2(1) = 0$. Or g_2 est une fonction monotone. **Donc $\alpha_2 = 1$.**

h_n est strictement croissante sur

$$\left[\sqrt[n]{\frac{1}{n}} ; +\infty \right[$$

Déduisons que $h_n(x) > 0$

h_n admet sur $]0 ; +\infty[$, un minimum égal à :

$$h_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}(1 + \ln(n)).$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]0 ; +\infty[, h_n(x) \geq \frac{1}{n}(1 + \ln(n)).$$

$$\text{Or } \forall n \geq 2, \frac{1}{n}(1 + \ln(n)) > 0.$$

$$\text{D'où } h_n(x) > 0.$$

$$\forall x \in]0 ; +\infty[\text{ et } \forall n \geq 2,$$

$g'_n(x) < 0$. g_n est alors strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et $g_n(]0 ; +\infty[) = \mathbb{R}$ contenant 0.

D'où $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

c) Montrons que $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$

f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{(x^n - \ln x) - \left(nx^{n-1} - \frac{1}{x}\right)x}{(x^n - \ln x)^2} \\ &= \frac{1 + (1-n)x^n - \ln x}{(x^n - \ln x)^2} \\ f_n'(x) &= \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2} \end{aligned}$$

d) Sens de variation

$\forall x \in]0 ; +\infty[, (x^n - \ln x)^2 > 0$ donc $f_n'(x)$ a le signe de $g_n(x)$.
 D'après les questions précédentes on

a :

$g_n(x) \geq 0$ sur $]0 ; \alpha_n]$. **Donc f_n est croissante strictement sur**

$]0 ; \alpha_n]$

$g_n(x) \leq 0$ sur $[\alpha_n ; +\infty[$. **Donc f_n est strictement décroissante sur**

$[\alpha_n ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^n - \ln x}$$

Posons $X = \frac{1}{x}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{X^{n-1}} + X \ln X} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1} - \frac{\ln x}{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tableau de variation

x	0	α_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0 -
$f_n(x)$			

Montrons que f_n admet un prolongement par continuité en 0

f_n n'est pas définie en 0 mais elle admet une limite finie en 0 soit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$. D'où f_n admet un prolongement par continuité en 0, φ_n

$$\text{définie par } \begin{cases} \varphi_n(x) = f_n(x) & \forall x \neq 0 \\ \varphi_n(0) = 0 \end{cases}$$

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n - \ln x} = 0 \text{ car } \begin{cases} x^n \rightarrow 0 \\ -\ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Donc f_n est dérivable en 0. L'axe (Ox) est tangente à la courbe (C_n) en 0.

5. Traçons (C_2)

$$f_2(\alpha_2) = 1$$

Proposé 7 :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$$

1. Les variations de g

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

g est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{x+1}{x}$.

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, g'(x) > 0.$$

Donc g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$2. g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

Donc : $g(x) \leq 0$ si $x \in]0 ; 1]$

$$g(x) \geq 0 \text{ si } x \in [1 ; +\infty[$$

3. Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x} \right)' \ln x + \frac{x-1}{x} (\ln x)' \\ &= \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{x-1+\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$

Déduisons les variations de f

$f'(x)$ a le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Donc d'après la question 2, f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

4. Limites de f

$$\begin{aligned} \lim_0 f &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \\ \ln x \rightarrow -\infty \end{cases} \\ \lim_{+\infty} f &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{x-1}{x} \rightarrow 1 \\ \ln x \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

5. Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		— 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Courbe représentative :

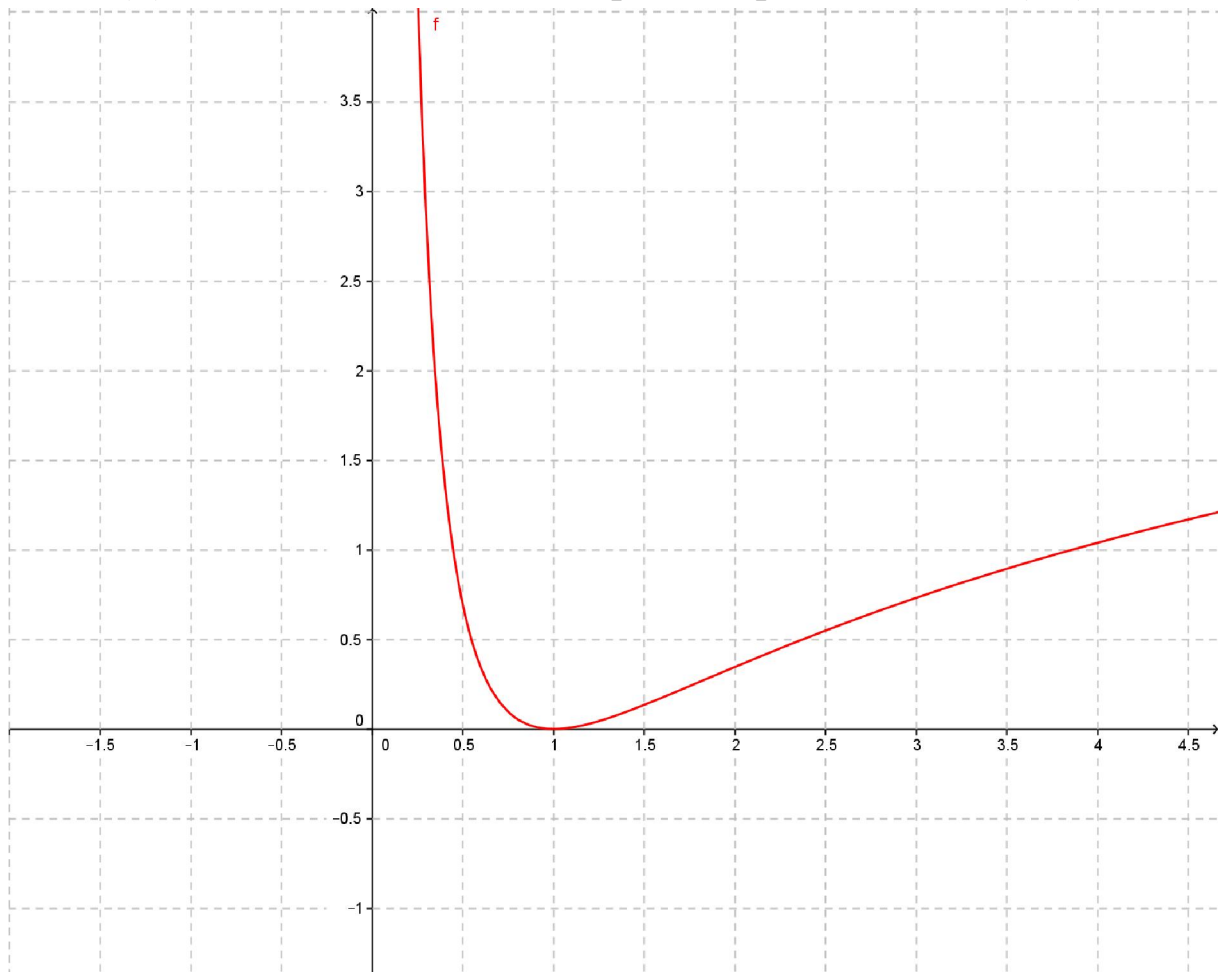
Branches infinies.

$\lim_0 f = +\infty \Rightarrow (C) \text{ admet l'axe } (Oy) \text{ comme asymptote verticale}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= 0$$

(C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox) .



Propose 8 :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

1. a) limites en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \\ -\ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ -\ln x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

b) Sens de variation de f

$$f \text{ est dérivable sur }]0 ; +\infty[\text{ et } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Montrons que l'équation (E): $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0
 f est continue et décroissante (monotone) sur $]0 ; +\infty[$ et $f(]0 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[$ contenant 0. D'où (E) admet une seule solution $x_0 \in]0 ; +\infty[$.

$$f(1,7) = 0,058 \text{ et } f(1,8) = -0,032$$

$$f(1,7) \times f(1,8) < 0. \text{ D'où } 1,7 < x_0 < 1,8$$

3. (D) est la tangente à (C) en 1

a) Equation de (D)

$$(D): y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

$$(D): y = -2x + 3$$

b) Sens de variation de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - (-2x + 3)$$

$$\varphi \text{ est dérivable sur }]0 ; +\infty[\text{ et } \varphi'(x) = f'(x) + 2 = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2}$$

$$\varphi'(x) \text{ a le signe de } 2x^2 - x - 1.$$

$$\text{Soit : } \varphi'(x) \geq 0 \text{ si } x \in [1 ; +\infty[\text{ et } \varphi'(x) \leq 0 \text{ si } x \in]0 ; 1].$$

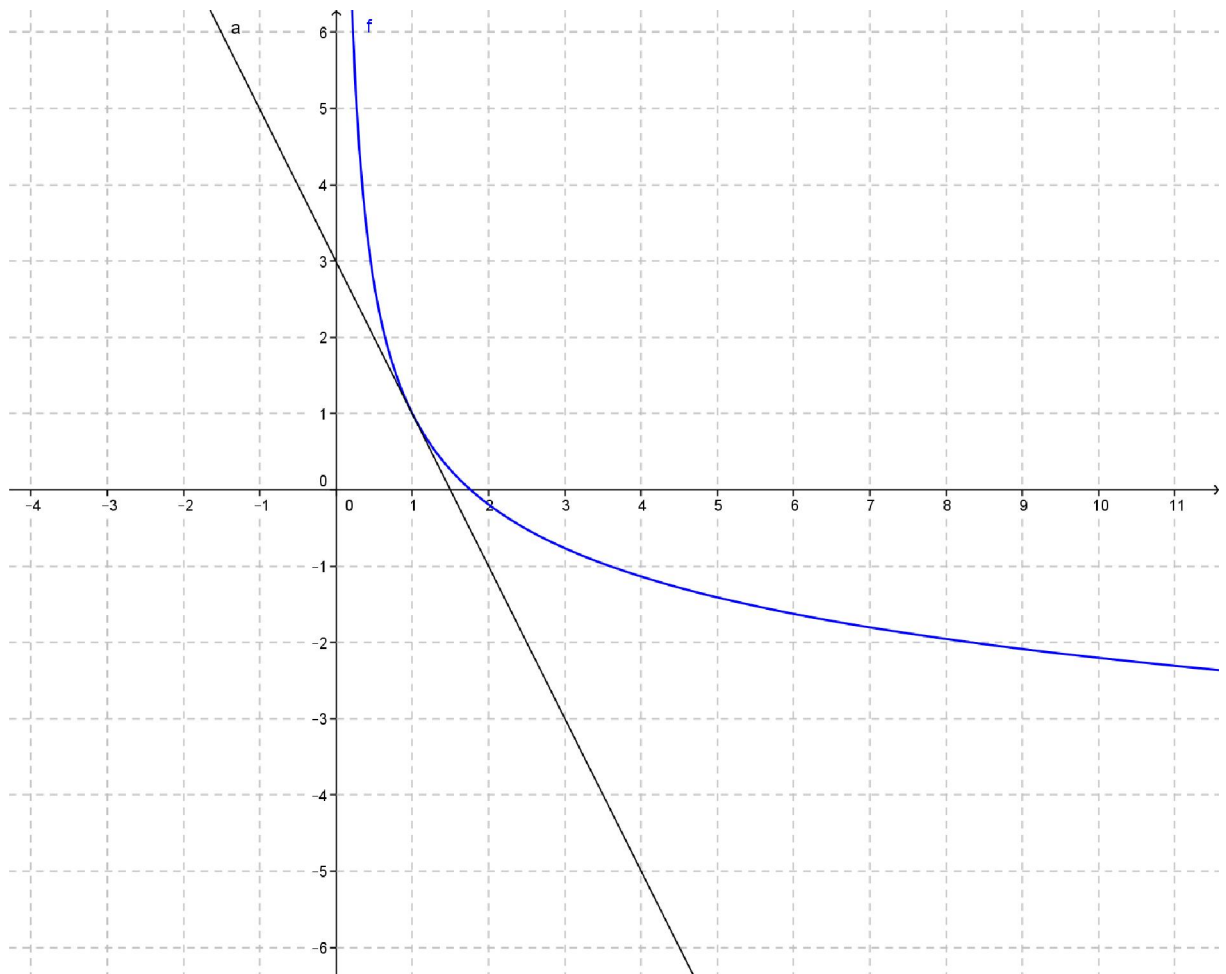
Donc φ est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0 ; 1]$.

c) Position relative de (C) et (D)

On a : $\varphi(1) = 0$. Donc pour tout réel x strictement positif, $\varphi(x) \geq 0$.

La courbe représentative (C) de f est au dessus de (D)

4. Traçons (C) et (D)



Proposé 9 :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Continuité et dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \text{ car } \begin{cases} x + 1 \rightarrow 1 \\ -\frac{1}{|x|} \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

Donc f est continue en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^{-\frac{1}{|x|}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{|x|}}} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \right) = 1 \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{-\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \right) = 1 \text{ car } \begin{cases} -\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

f est alors dérivable en 0.

2. Calculons $f'(x)$

f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$ **et** $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

- Montrons que $f''(x) = \frac{(2x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} \right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ f''(x) &= \frac{(2x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} \end{aligned}$$

a) Tableau de variation de f'

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) \right] \\ &= 1 \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ -\frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} X e^X = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $2x - 1$. Alors :

$$f''(x) \leq 0 \text{ si } x \in \left] 0 ; \frac{1}{2} \right] \text{ et } f''(x) \geq 0 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[.$$

On en déduit que : f' est strictement décroissante sur $\left] 0 ; \frac{1}{2} \right]$ et

strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[.$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			

b) Signe de $f'(x)$

$$1 - 4e^{-2} > 0.$$

Donc $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) > 0$

c) Signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

$$x \in]0 ; +\infty[, f'(x) > 0$$

$$x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \text{ et } f'(x) > 0$$

Donc $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$

d) Tableau de variations de f

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - e^{\frac{1}{x}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3. Montrons que $\Delta: y = x$ est asymptote à (C)

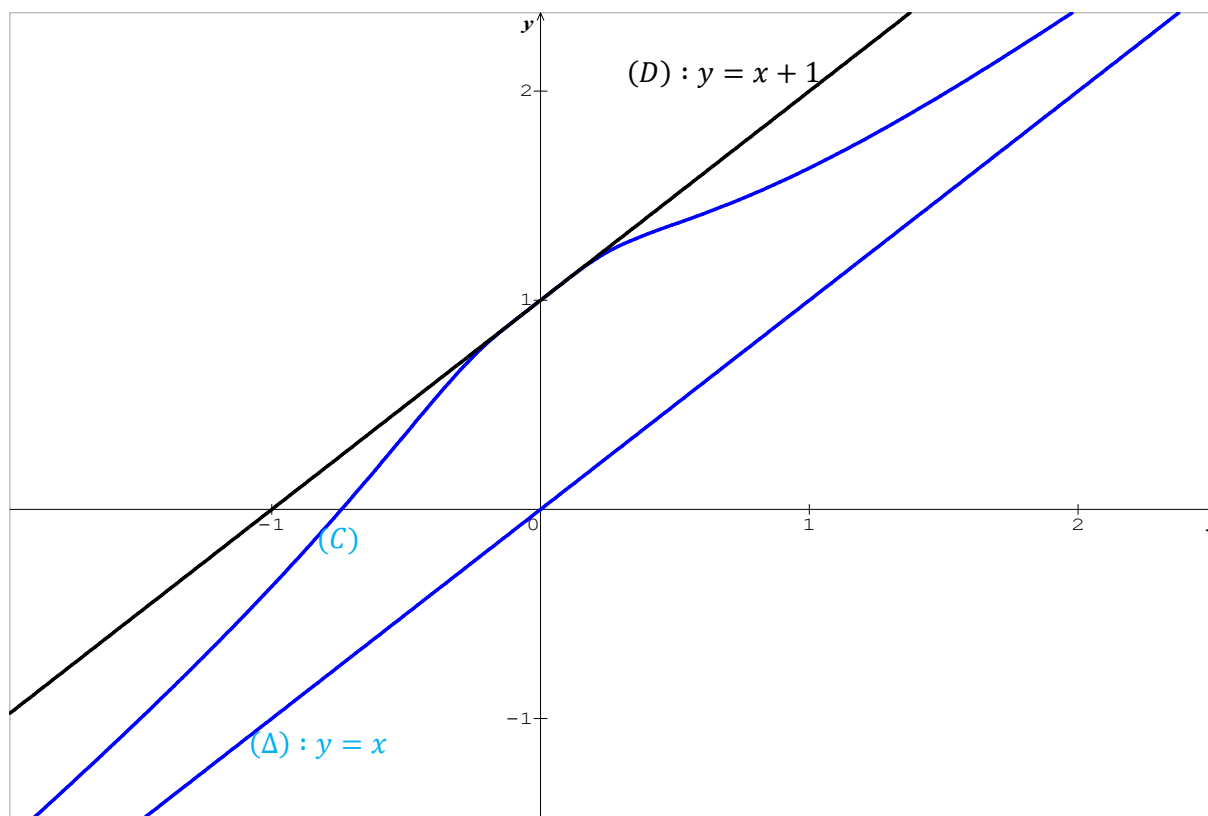
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-\frac{1}{|x|}} \\ &= 0 \text{ car } e^{-\frac{1}{|x|}} \rightarrow e^0 = 1\end{aligned}$$

D'où $\Delta: y = x$ est asymptote à (C).

$$f(x) - (x + 1) = -e^{-\frac{1}{|x|}}. \text{ Or } x \in \mathbb{R}^*, -e^{-\frac{1}{|x|}} < 0.$$

D'où (C) est en dessous de (D) : $y = x + 1$

4. Traçons (C)



Proposé 10 :

Partie A

$$I =]-2 ; +\infty[, f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$$

1. a) Calcul de $f'(x)$ et $f''(x)$

f est deux fois dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = \ln(x + 2) + \frac{x}{x + 2}$$

$$f''(x) = \frac{x + 4}{(x + 2)^2}$$

b) Sens de variation de f'

Pour tout x , $(x + 2)^2 > 0$. Donc $f''(x)$ a le signe $x + 4$.

$$\forall x \in]-2 ; +\infty[, x + 4 > 0.$$

Donc f' est strictement croissante sur $]-2 ; +\infty[$.

c) Limites en -2 et en $+\infty$ de f'

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

2. a) Montrons que $f'(x) = 0$ admet une unique $\alpha \in [-0,6 ; -0,5]$

f' est continue et strictement croissante sur $]-2 ; +\infty[$. De plus

$$f'([-2 ; +\infty]) =]-\infty ; +\infty[\text{ contenant } 0.$$

$$\begin{cases} f'(-0,6) = -0,092 \\ f'(-0,5) = 0,072 \end{cases}$$

$$f'(-0,6) \times f'(-0,5) < 0. \quad \text{D'où } \alpha \in [-0,6 ; -0,5].$$

b) Signe de $f'(x)$

$$f'(\alpha) = 0$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in]0 ; \alpha]$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in [\alpha ; +\infty[$$

3. a) Sens de variation f sur I

f est strictement décroissante sur I et strictement croissante sur I .

b) Limites de f en -2 et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c) Tableau de variation f

x	-2	α	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$				

The graph shows a function $f(x)$ plotted against x . The function has a minimum at $x = \alpha$, where $f(\alpha)$ is the value. The function approaches $+\infty$ as x approaches -2 or $+\infty$. The derivative $f'(x)$ is negative for $x < \alpha$ and positive for $x > \alpha$, indicating a local minimum at $x = \alpha$.

Partie B

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

1. a) Vérifions que $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

d est dérivable sur $] -2 ; +\infty[$ et $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)(x - x_0)'$ or
 $(x - x_0)' = 1$. **D'où $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.**

b) Signe de $d'(x)$

f' est une fonction croissante. Donc :

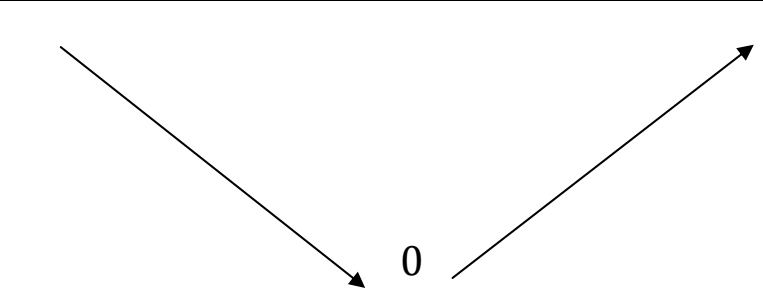
$$\text{Si } x \in] -2 ; x_0], f'(x) \leq f'(x_0) \Rightarrow d'(x) \leq 0$$

$$\text{Si } x \in [x_0 ; +\infty[, f'(x) \geq f'(x_0) \Rightarrow d'(x) \geq 0$$

c) Positions relatives de (C) et (T_{x_0})

$$\forall x \in] -2 ; +\infty[, \quad d(x) \geq 0$$

Donc (C) est au dessus de (T_{x_0})

x	-2	x_0	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$			

Partie C :

1. Equation de la tangente (T_0)

En 0.

$$(T_0): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T_0): y = x \ln 2 + 1$$

2. Valeur de x_0 pour que (T_{x_0})

$$(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

$$(T_{x_0}) \text{ passe par } O \text{ si et seulement si : } -x_0 f'(x_0) + f(x_0) = 0$$

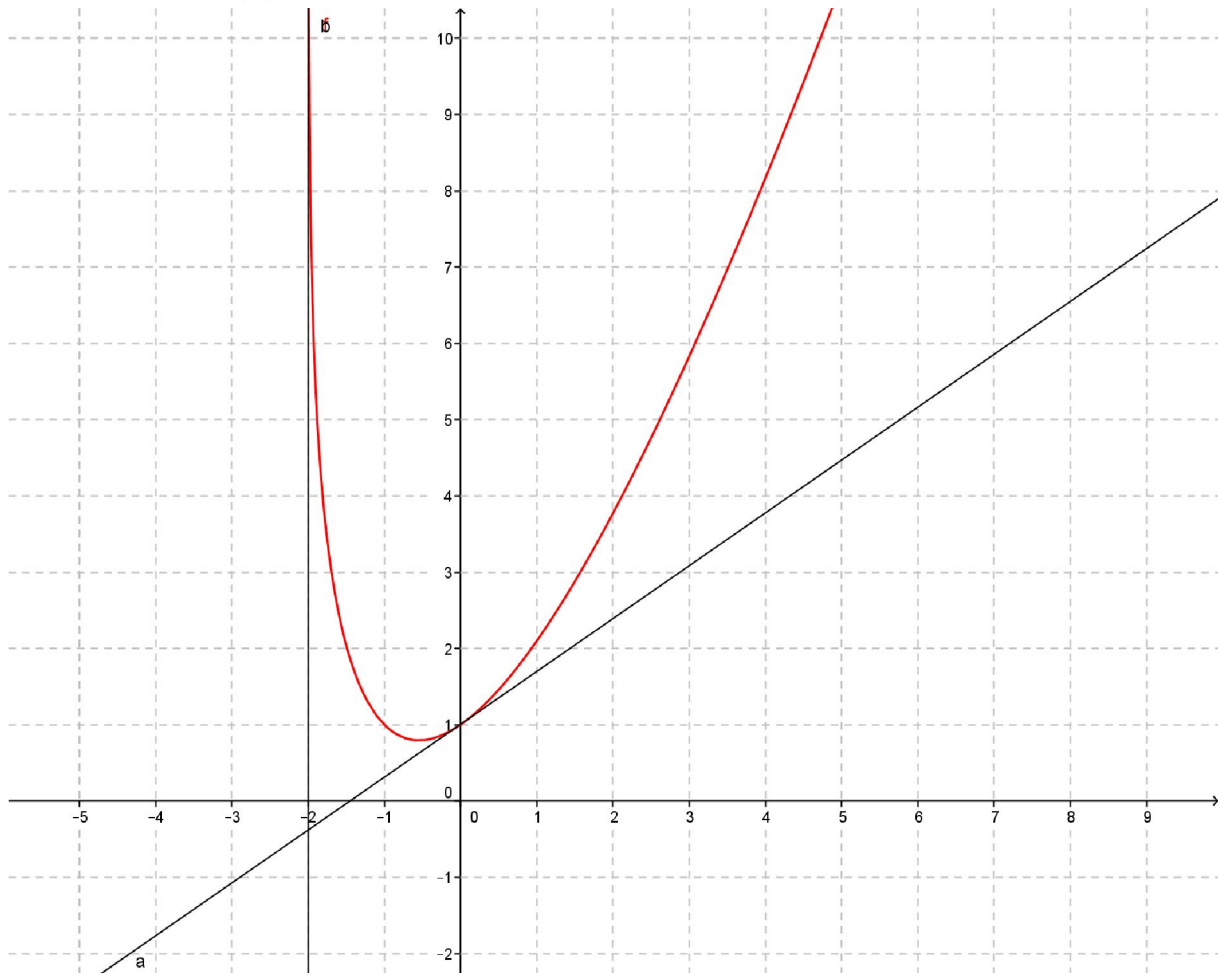
$$-x_0 \ln(x_0 + 2) - \frac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = 0$$

$$-\frac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 = 0$$

$$x_0^2 - x_0 - 2 = 0$$

$$\text{On a alors : } x_0 = -1 \text{ ou } x_0 = 2$$

3. Traçons (C)



Proposé 11 :

Partie A

a) Etudions le sens de variation de g

$$g(t) = e^t - t - 1$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = e^t - 1$

$\forall t \in]-\infty ; 0], g'(t) \leq 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$

$\forall t \in [0 ; +\infty[, g'(t) \geq 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $\min g(t) = g(0) = 0$

b) Déduisons que $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t + 1$

$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) \geq \min g(t) \Leftrightarrow g(t) \geq 0$. D'où le résultat.

$\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t + 1 > t$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}, e^t > t$

Partie B

$$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$$

1. a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$

on a : $f(x) = x^2 - 2\ln e^x(1 - xe^x) = x^2 - 2\ln e^x - 2\ln(1 - xe^{-x})$. Or $\ln e^x = x$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$$

b) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} f &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \text{ car } xe^{-x} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$$

2. a) la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0$. D'après la partie A. donc la fonction $x \mapsto -2\ln(e^x - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme une somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 \frac{e^x - 1}{e^x - x} \\ &= 2 \left(\frac{xe^x - x^2 - e^x + 1}{e^x - x} \right) \\ &= \frac{2(e^x(x-1) + (1-x^2))}{e^x - x} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}}$$

Tableau de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$ et $e^x - x - 1 > 0$. D'après la partie A. donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$

$f'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty ; 1]$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$

$f'(x) \geq 0$ si $x \in [1 ; +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} f &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2\ln(e^x - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x + 2 \frac{\ln(e^x - x)}{-x} \right) \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} e^x \rightarrow 0 \\ \frac{\ln(-x)}{-x} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				
				$1 - 2\ln(e - 1)$	

3. a) Montrons que $f(x) - (x^2 - 2x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

On a : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$.

Donc $f(x) - (x^2 - 2x) = -2\ln(1 - xe^{-x})$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\ln 1 = 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$

On en déduit que (C) et $\mathcal{P}$ sont courbes asymptotes

Position relative de (C) et $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}; -xe^{-x} \leq 0 &\Rightarrow 1 - xe^{-x} \leq 1 \\ &\Rightarrow \ln(1 - xe^{-x}) \leq 0 \end{aligned}$$

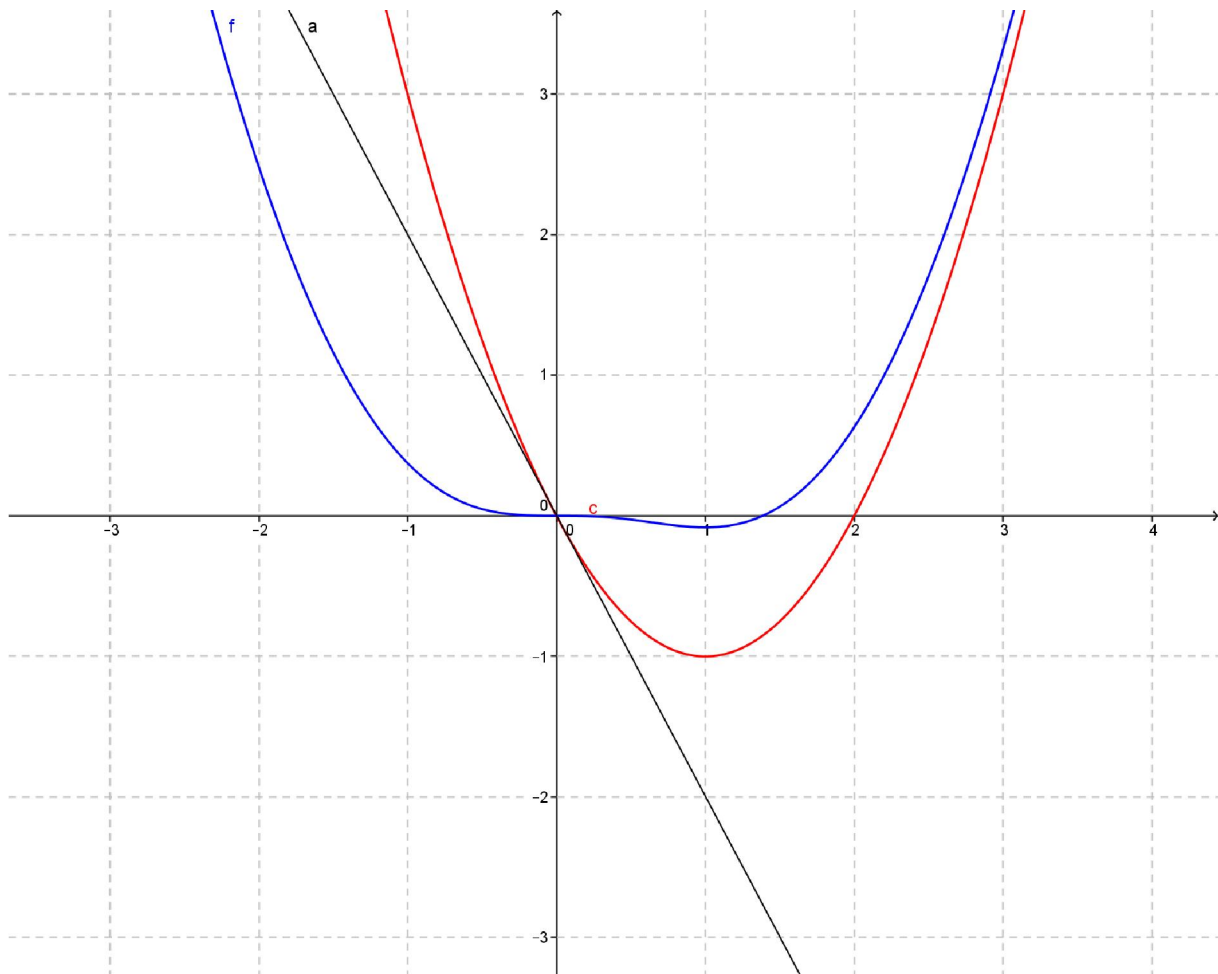
Donc $f(x) - (x^2 - 2x) \geq 0$. (C) est alors au dessus de $\mathcal{P}$

4. Equations de (D) et (D')

$$(D): y = -2(x - 0) = -2x$$

$$(D') : y = 0$$

5. Traçons (C)



Proposé 12 :

$$x \in]0 ; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$$

Partie A :

1. $x \in]1 ; +\infty[, \quad g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$

Limite de g en 1

$$\lim_1 g = 2 \text{ car } \begin{cases} x - 1 \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{cases}$$

a) Calculons $g'(x)$

g est dérivable sur $]1 ; +\infty[, \quad g'(x) = 1 - \ln(x - 1)$

b) Résolvons :

$$1 - \ln(x - 1) > 0$$

$$\ln(x - 1) < 1$$

$$x - 1 < e$$

$$x < 1 + e$$

On a : $\boxed{S =]1 ; 1 + e]}$.

c) Sens de variation de g

$g'(x) > 0$ sur $]1 ; 1 + e[$. Donc g est strictement croissante sur $]1 ; 1 + e[$.

$g'(x) < 0$ sur $]1 + e ; +\infty[$. donc g est strictement décroissante sur $]1 + e ; +\infty[$

d) Montrons $g(x) = 0$ admet une solution unique

g est strictement décroissante sur $]1 + e ; +\infty[$ et $g([e + 1 ; e^3 + 1]) = [2 - e^3 ; 2 + e]$ contenant 0. D'où $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [e + 1 ; e^3 + 1]$

On a alors :

$g(x) > 0 \text{ si } x \in]1 ; \alpha[\text{ et } g(x) < 0 \text{ si } x \in]\alpha ; +\infty[.$
--

2. $x \in]1 ; +\infty[$, $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

a) Limite de φ en 1

$$\lim_1 \varphi = -\infty \text{ car } \begin{cases} x^2 - 1 \rightarrow 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

b) Calculons $\varphi'(x)$

φ est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} \end{aligned}$$

$\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

$$\forall x \in]1 ; +\infty[, x^2(x^2-1) > 0.$$

D'où $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$

c) Démontrons :

$$g(x^2) > 0 \text{ si } x^2 \in]1 ; \alpha[\text{ et } g(x^2) < 0 \text{ si } x^2 \in]\alpha ; +\infty[.$$

$$\text{Donc } \varphi'(x) > 0 \text{ si } x \in]1 ; \sqrt{\alpha}[\text{ et } \varphi'(x) < 0 \text{ si } x \in]\sqrt{\alpha} ; +\infty[.$$

D'où φ est strictement croissante sur $]1 ; \sqrt{\alpha}[$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[.$

Partie B

1. Vérifions que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$

$$\varphi(e^x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = f(x)$$

2. Déduisons :

a) Limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -\infty \end{aligned}$$

b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

c) Le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et $f'(x) = e^x \cdot \varphi'(e^x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$; $e^x > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $\varphi'(e^x)$

$\varphi'(e^x) > 0$ si $e^x \in]1 ; \sqrt{\alpha}[$ donc $x \in]0 ; \ln(\sqrt{\alpha})[$

$\varphi'(e^x) < 0$ si $e^x \in]\alpha ; +\infty[$ donc $x \in]\ln(\sqrt{\alpha}) ; +\infty[$

f est alors croissante sur $]0 ; \ln(\sqrt{\alpha})[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]\ln(\sqrt{\alpha}) ; +\infty[$. D'où elle admet un maximum sur $]0 ; +\infty[$ atteint pour $x = \ln(\sqrt{\alpha})$.

x	0	$\ln(\sqrt{\alpha})$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	0

3. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq \max f(x)$ or

$$\max f(x) = f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}. \text{ Or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - (\alpha-1) = 0.$$

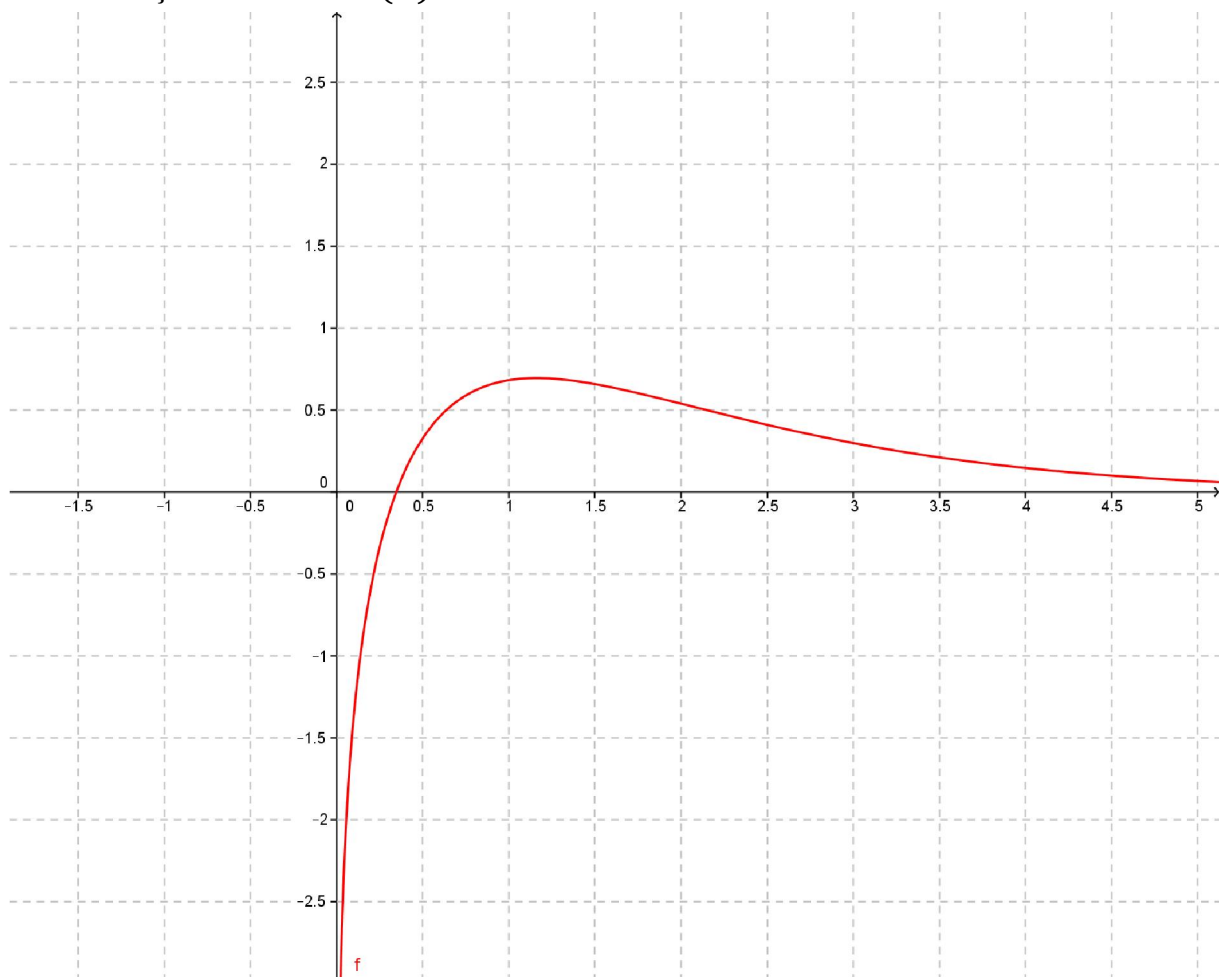
$$\text{Donc } \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}. \text{ Alors } \max f(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}.$$

$$\text{D'où } \boxed{f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$$

4. Complétons le tableau :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. Traçons la courbe (C)



PRIMITIVES DE FONCTIONS

INTEGRATION

✓ PRIMITIVES DE FONCTIONS

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur K que l'on précisera.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$

b) $f(x) = 5x - 2 + \frac{4}{x}$

c) $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \cos x - 5\sin x$

e) $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

f) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^4}$

g) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

h) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

i) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 6}}$

j) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^3}}$

Exercice 2 :

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}$ et

$$K =]-\frac{1}{3} ; 1[$$

b) $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ et $K =]-1 ; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$ et

$$K =]0 ; +\infty[$$

d) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ et

$$K =]-\infty ; 0[$$

e) $f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4$
et $K = IR$

n) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

o) $f(x) = \frac{-e^{x-3}}{(e^x+3x)^2}$ et $K =$
 $[0 ; +\infty[$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ et $K =]0 ; +\infty[$

g) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ et $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

h) $f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$ et $K = IR$

i) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ et $K =]0 ; \pi[$

j) $f(x) = \frac{-e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ et $K =]0 ; +\infty[$

k) $f(x) = x^3(x^4 + 1)^3$ et $K = IR$

l) $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$ et $K = IR$

m) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^7}$ et

$$K =]-\infty ; -1[$$

p) $f(x) = \frac{-2}{x[\ln x + 3]^2}$ et $K =$
 $[1 ; +\infty[$

Exercice 3 :

1. Soit $f(x) = \frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$ sur $IR - \{2\}$

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

b) En déduire une primitive de f sur $]2 ; +\infty[$

2. Soit $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x-1}$ sur $]0 ; +\infty[$

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

b) En déduire une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $F(\ln 2)$ et $F(\ln 4)$

c) Déterminer la primitive qui prend la valeur 1 en $\ln 2$.

3. Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \ln(4 + e^{-x})$

a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer à l'aide de e^x .

b) En déduire une primitive de g définie sur IR par :

$$g(x) = \frac{8}{4e^x + 1}$$

c) Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 0 en 0

4. Soit la fonction $f: x \mapsto$

$$\frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$$

a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in IR - \{2\},$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

b) En déduire les primitives de f sur $]2 ; +\infty[$.

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

a) Vérifier que f a pour primitive la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{x} + x^2 + \ln x + k$$

b) Déterminer la primitive G de f qui s'annule en 1.

✓ **INTEGRATION :**

Exercice 5 :

Calculer les intégrales suivantes en se servant des techniques de calcul de primitives:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \sqrt{x+2} \, dx \\
 B &= \int_0^1 x\sqrt{x^2+2} \, dx \\
 C &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 D &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx \\
 E &= \int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x-7)^2 \, dx \\
 F &= \int_1^0 (e^{2x} + e^x) \, dx \\
 H &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x) \, dx \\
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \\
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx ; \\
 K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \, dx \\
 L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x \, dx \\
 M &= \int_3^0 x e^{-x^2} \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-2}^1 e^x (e^x - 1) \, dx \\
 O &= \int_0^2 (2x+1)\sqrt{2x+1} \, dx \\
 P &= \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 R &= \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx \\
 S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx \\
 T &= \int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx \\
 U &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx
 \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Calculer à l'aide d'une primitive, les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 3x e^{x^2+3} \, dx$

b) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1} \, dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos x \, dx$

d) $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

e) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} \, dx$

f) $\int_0^1 \frac{x+1}{(2x^2+4x+5)^3} \, dx$

g) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

h) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \, dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

j) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

k) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3} \, dx .$

l) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$

m) $U = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x+1}$

n) $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}$

o) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

p) $\int_0^{\ln 2} f \frac{1+e^x}{x+e^x} dx$

q) $\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} dt$

r) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

s) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}} dx$

Exercice 7 :

En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$A = \int_0^1 x \sqrt{x+2} dx$$

$$B = \int_1^e \ln x dx$$

$$C = \int_{-1}^1 (x+1)e^x dx$$

$$D = \int_1^e x \ln x dx$$

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin(3x) dx$$

$$F = \int_1^2 (x+1) \ln(x+1)^2 dx$$

$$G = \int_1^e x^2 e^x dx$$

Exercice 8:

A l'aide d'une intégration par partie ou de deux intégrations par partie, calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos x dx$

b) $\int_0^{\pi} (x-1) \sin 3x dx$

c) $\int_2^3 (2x+1) \ln x dx$

d) $\int_1^e \ln x dx$

e) $\int_1^e x \ln x dx$

f) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x e^x dx$

i) $\int_0^1 (3x^2 - x + 1) e^x dx$

j) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx$

Exercice 9 :

On pose $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J .

2. Démontrer que pour tout réel x , $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

3. En déduire la valeur de J
4. Calculer la valeur de I

Exercice 10 :

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$

1. Calculer $I + J$
2. Vérifier que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx$
3. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $I - J$.
4. En déduire la valeur exacte des intégrales I et J .

Exercice 11 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$

1. a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$$

b) Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) \, dx$$

Exercice 12 :

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x+1}$

1. Déterminer quatre nombres réels tels que :

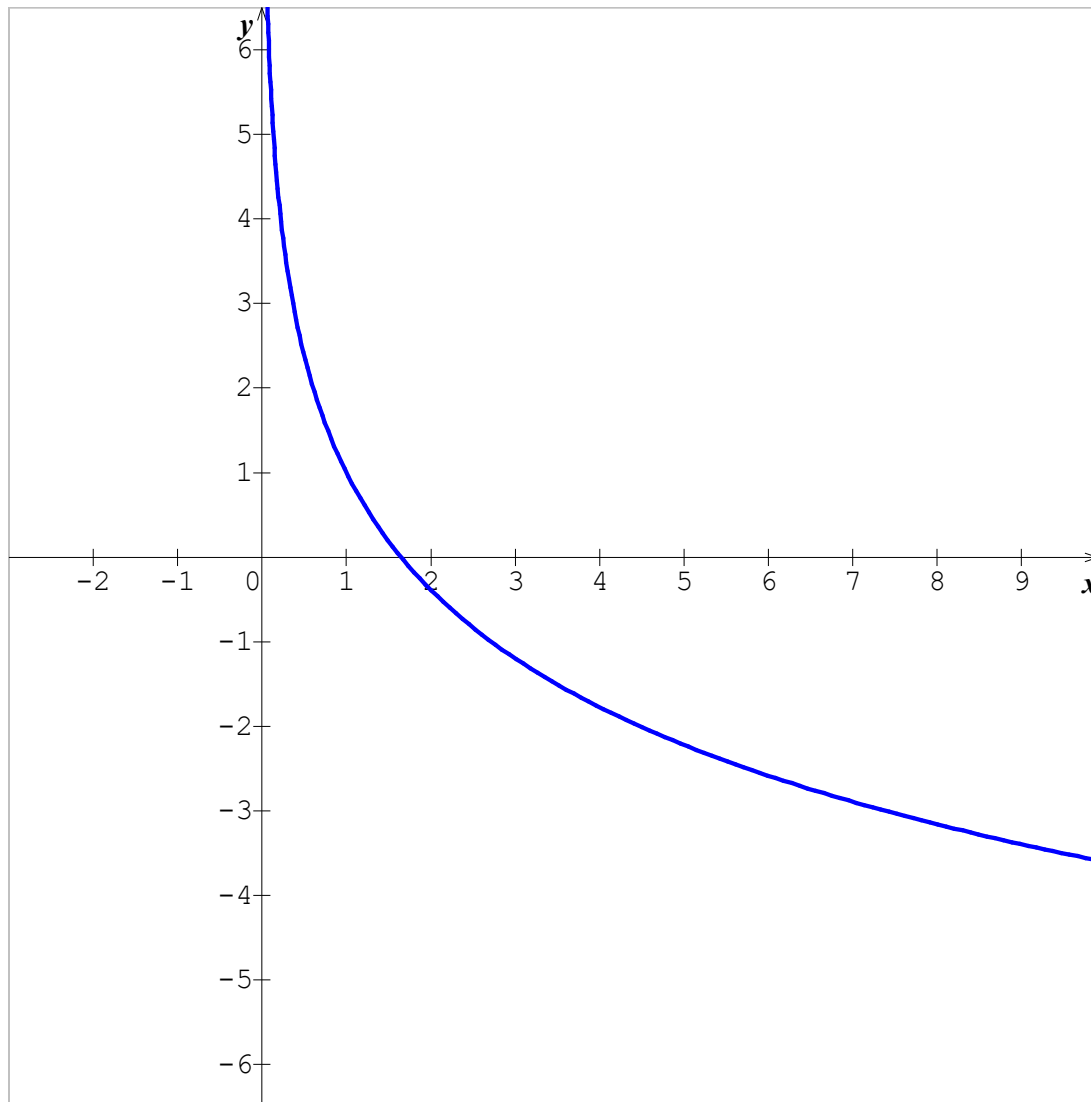
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x+1} \, dx$

Exercice 13 :

Partie A : Étude préliminaire
 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = 1 - 2\ln(x)$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative C_g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe C_g coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse



1. Déterminer la valeur exacte de α .

2. On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(On rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).

On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On pourra remarquer

$$\text{que } f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x + \frac{1}{x}$$

b. Soit $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$.

Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

Exercice 14 :

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = xe^{x^2-1}$. (Cf) est la courbe
 représentative de la fonction f dans
 un repère orthonormé du plan. On
 note f' la fonction dérivée de f et f''
 la fonction dérivée seconde de f .

1. a. Montrer que pour tout réel x ,
 $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$
- b. En déduire le sens de variation de
 f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel x ,
 $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$. En
 déduire le sens de variations de f'
 puis dresser son tableau de variation.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$
 par : $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$
- a. Justifier que l'inéquation
 $1 - e^{x^2-1} > 0$ a pour ensemble
 de solutions l'intervalle $[-1 ; 1]$.
- b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur
 l'intervalle $[-1 ; 1]$.

- c. En remarquant que pour tout réel
 x , on a l'égalité :

$h(x) = x - f(x)$, déduire de la
 question précédente la position
 relative de la courbe (Cf) et de la
 droite (D) d'équation $y = x$ sur
 l'intervalle $[0 ; 1]$.

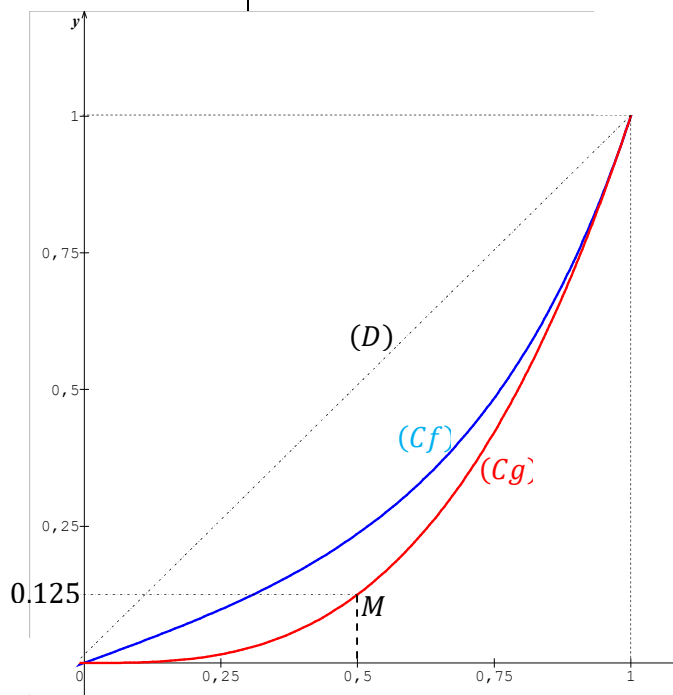
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$
 par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ et
 $I = \int_0^1 h(x)dx$

On admet que H est une primitive de
 la fonction h sur $\mathbb{R}$. Calculer la
 valeur exacte de I .

Partie B : Applications

Sur le graphique suivant, sont
 tracées sur l'intervalle $[0 ; 1]$:

- la courbe (Cf) représentative de la
 fonction étudiée en partie A ;
- la courbe (Cg) représentative de la
 fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite (D) d'équation $y = x$.



Les courbes (Cf) et (Cg) illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- Sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- Sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :

Le point $M(0,5 ; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe (Cg) . Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante : si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50% aux revenus les plus faibles) représente 12,5% de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80% des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F . On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.

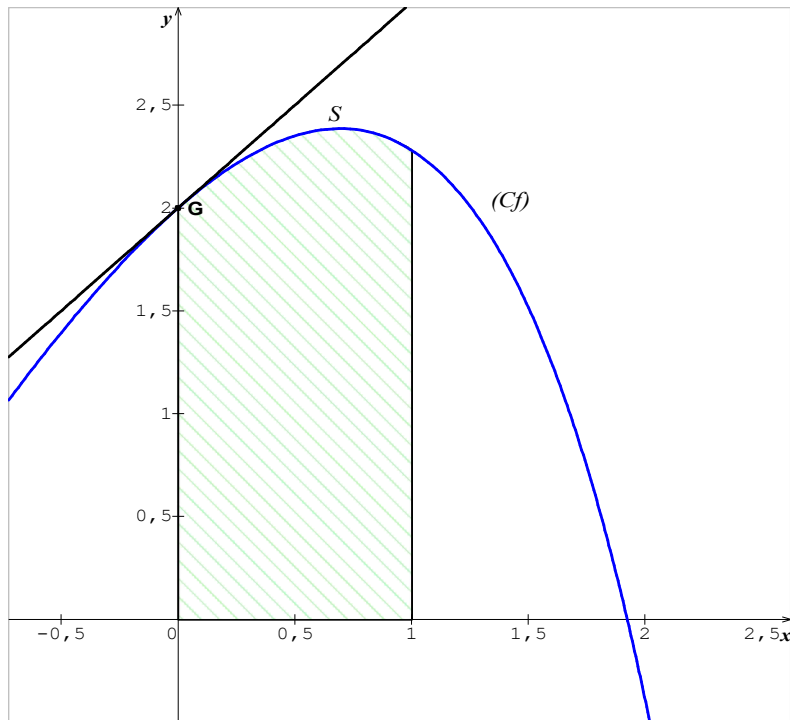
2. On note Af l'aire du domaine délimité par la droite (D) , la courbe (Cf) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On appelle indice de Gini associé à la fonction , le nombre réel noté If et défini par : $If = 2 \times Af$.

a. Montrer que $If = \frac{1}{e}$

b. On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

Exercice 15 :

La courbe (C) ci – dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 Le point G a pour coordonnées (0;2).
 Le point H a pour coordonnées (1;3).
 La droite (GH) est la tangente à la courbe (C) au point G.
 La courbe (C) admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$. Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe (C).

Partie A

Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1 ; 2]$ l'inéquation $f'(x) \leq 0$.

3. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-1 ; 2]$ par :

$f(x) = ax + b - e^x$ où a et b sont deux réels.

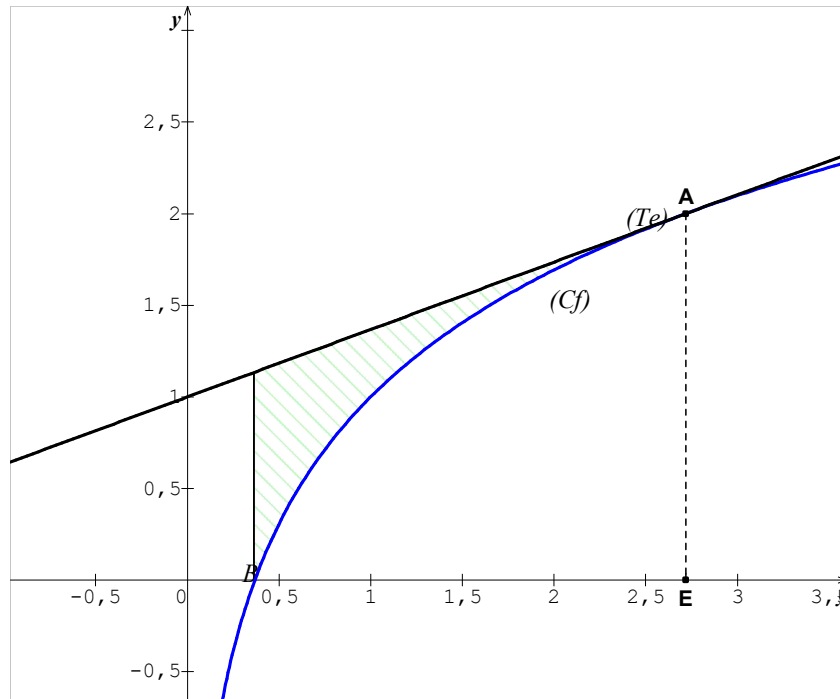
1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que $a = 2$ et $b = 3$.
3. Déterminer, sur $[-1 ; 2]$, une primitive F de la fonction f .
4. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur le graphique.

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = 1 + \ln(x)$. On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère du plan. Le point $A(e ; 2)$ appartient à (Cf) et on note (Te) la tangente à (Cf)

au point A. Le point C est le point d'intersection de la tangente (Te) et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées $(e ; 0)$. On admettra que sur $]0 ; +\infty[$, (Cf) reste en dessous de (Te) .



1. a. Le point B est le point d'intersection de (Cf) et de l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées du point B.

b. Démontrer que, pour $x \geq \frac{1}{e}$;
 $f(x) \geq 0$

2. a. Déterminer une équation de (Te) .

b. En déduire les coordonnées du point C.

c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x$.

3. a. Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

b. En déduire la valeur exacte de

$$\int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln x) dx$$

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par (Cf) , (Te) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Donner une valeur approchée arrondie au millièm de cette aire.

Exercice 17 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :
 $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x + 1)$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthogonal. On note f'

la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
3. Montrer que sur l'intervalle $[0 ; 4]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α .
4. Construire la courbe représentative (C) de f .

Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

5. On définit la fonction F dérivable sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + (x+1)\ln(x+1)$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

6. Soit A l'aire, en unités d'aire, du domaine D délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
- a. Hachurer le domaine D sur la figure fournie.
 - b. Par lecture graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de A .
 - c. Calculer la valeur exacte en unités d'aire de A . Vérifier la cohérence de vos résultats.

Exercice 18 :

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

1. f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$$

- a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$
 - b) En déduire la fonction dérivée f' de f .
 - c) Calculer la valeur de I
2. Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $K = \sqrt{3} - J$
4. En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 19 :

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$$

1. a) Vérifier que l'intégrale I peut s'écrire :

$$I = \int_0^\pi \cos x [\cos x - \cos x \sin^2 x] dx$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$$

c) Démontrer de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$

2. a) Démontrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Démontrer que $J - I = 0$

c) En déduire la valeur des intégrales I et J

Exercice 20 : Calcul de $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit la fonction

$$f : x \mapsto 1 - x + \sqrt{x^2 + 3} \text{ et } (C)$$

sa courbe représentative.

1. a) Etudier f et tracer (C)

b) En déduire que f admet une fonction réciproque, dont on précisera l'ensemble de définition D

2. a) Tracer sur le même graphique que (C) , la courbe représentative de f^{-1}

b) Démontrer que $\forall x \in D$,

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - (x - 1)^2}{2(x - 1)}$$

3. a) Calculer : $\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) \, dx$

b) En déduire

$$\int_0^1 f(x) \, dx \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$$

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition

b) Etudier f et tracer sa courbe représentative (C)

2. a) Calculer l'aire, en unité d'aire,

du domaine du plan délimité par (C) , (OI) , et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$ ($0 < a < 1$)

b) Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers 0 ?

3. en déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par (C) , (OI) , et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 22 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que f est une fonction impaire
- b) Étudier f et tracer (C)
2. a) Déterminer les primitives de f . (On pourra remarquer que :

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

- b) Calculer l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par (C) , et les droites d'équation $x = a$, $x = 0$ et $y = x - 1$ ($a > 0$).
- c) Quelle est la limite de cette aire si $a \rightarrow +\infty$?

Exercice 23 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x (e^x - 2)$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm .

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
3. a) Calculer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe (C)

4. α est un réel tel que $\alpha < \ln 2$.

On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine D limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \alpha$

- a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$
- b) Déterminer α tel que :
 $\mathcal{A}(\alpha) = 2\text{cm}^2$
- c) Calculer :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$$

Exercice 24 :

A l'aide de la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de :

$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+x^2} dx$. On pourra partager l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ en 15 intervalles de même amplitude.

Exercice 25 :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}}$$

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

1. Démontrer que :
 - a) Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$
 - b) Pour tout $u \in [0 , 1]$, $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}$
2. En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

Exercice 26 :

Soit F la fonction de $]0 ; +\infty[$ vers IR par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dx$ et (C_F) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F de F
2. Etudier les variations de F sur D_F
3. Etudier le signe de la fonction f définie par ;

$$f(x) = F(x) - \ln x$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

4. Etudier les branches infinies de (C_F) et tracer cette courbe.

Exercice 27 :

Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ et (C_G) sa courbe représentative.

1. Démontrer que la fonction G est impaire
2. Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$,

$$\frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$

3. Justifier que G est dérivable sur IR et déterminer sa dérivée.
4. a) Dresser le tableau de variation de G .

b) Calculer une valeur approchée de $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en utilisant la méthode des rectangles. (On partagera l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$ en 10 intervalles de même amplitude).

Exercice 28 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\forall n \in IN, n \geq 2 \quad U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$$

1. Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Démontrer que f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

2. Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} f(x) dx$$

En déduire une minoration de la suite (U_n) par une intégrale.

3. On pose $J_n = \int_2^{n+1} f(x) dx$, donner une expression de J_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

La suite (U_n) a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 29 :

Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^3 - 1}$.

On note $g(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ et (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormée d'unité graphique 6cm.

1. a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$

b) Etudier le sens de variations de f

2. a) Montrer que $x > 1$, $(x^2 - x)g(x^2) \leq f(x) \leq (x^2 - x)g(x)$

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

3. a) Trouver les nombres réels a, b et c tels que :

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$

c) Démontrer que, pour tout :

$$x > 1, \quad (x^2 - x)h(x) \leq \int_x^{x^2} h(t) dt \leq (x^2 - x)h(x^2)$$

d) En déduire la limite à droite en 1 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1} \int_x^{x^2} h(t) dt$$

5. Préciser le comportement de (C) au voisinage du point de coordonnées $(1 ; \frac{1}{3} \ln 2)$ puis tracer (C) .

Proposition de corrigés

PRIMITIVES ET INTEGRATIONS

Exercice 1 :

**Déterminons une primitive F de f .
 k est une constante réelle**

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$

f est continue sur IR , car f est une fonction polynôme.

Alors $\boxed{F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k,}$

b) $f(x) = 5x - 2 + \frac{4}{x}$

f est continue sur

$] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et

$\boxed{F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x + 4\ln|x| + k.}$

c) $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ et

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} + k}$

d) $f(x) = \cos x - 5\sin x$

f est continue sur IR et

$\boxed{F(x) = \sin x + 5\cos x + k}$

e) $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

$= 4x^4 + 4x^2 + 1$

f est continue sur IR et

$\boxed{F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + k}$

f) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

f est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et

$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + k}$

g) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

f est continue sur IR et

$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + k}$

h) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$= -\frac{1}{2} \left[-2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$

f est continue sur $] -1 ; 1[$

et $F(x) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + k \right].$

Soit $\boxed{F(x) = -\frac{1}{3\sqrt{(1-x^2)^3}} + k}$

i) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{4x-4}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$

f est continue sur

$] -\infty ; -1[$ et sur $]3 ; +\infty[$ et

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2-4x-6} + k.}$

j) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$

$= (2x+3)(x^2+3x+1)^{-\frac{3}{2}}$

f est continue sur IR et

$\boxed{F(x) = -2(x^2+3x+1)^{-\frac{1}{2}} + k}$

$\boxed{F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1}} + k}$

Exercice 2 :

Déterminons une primitive de f sur K . Sauf si mention est, f est continue sur K et F désigne ses primitives sur K .

- a) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{6x-2}{(3x^2-2x-1)^2}$$

$$K =]-\frac{1}{3} ; 1[$$

$$F(x) = -\frac{1}{2(3x^2-2x-1)} + k$$
- b) $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$; $K =]-1; +\infty[$

$$F(x) = -\frac{2}{x+1} + k$$
- c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

$$= 2 \left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] ;$$

$$K =]0 ; +\infty[$$

$$F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + k$$
- d) $f(x) = \frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^3} \right]$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{2(x^3+2x)^2} \right] + k$$

$$F(x) = -\frac{1}{4(x^3+2x)^2}$$
- e) $f(x) = \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4$

$$= -\frac{1}{2} \times [-2 \sin x \cos x (\cos^2 x + 1)^4]$$
 et $K = \mathbb{R}$

$$F(x) = -\frac{1}{10} (\cos^2 x + 1)^5 + k$$
- f) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ et $K =]0 ; +\infty[$

f est continue sur K et

$$F(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$$

- g) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ et $K =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

f est continue sur K et

$$F(x) = -2\sqrt{\cos x} + k$$

- h) $f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = 2 \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right)$

et $K = \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$F(x) = 4\sqrt{x^2+x+1} + k$$

- i) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ et $K =]0 ; \pi[$

f est continue sur K et

$$F(x) = 2\sqrt{\sin x} + k$$

- j) $f(x) = \frac{-e^x}{\sqrt{e^x-1}}$, $K =]0 ; +\infty[$

f est continue sur K et

$$F(x) = 2\sqrt{e^x-1} + k$$

- k) $f(x) = x^3 (x^4 + 1)^3$

$$= \frac{1}{4} [4x^3 (x^4 + 1)^3] \text{ et } K = \mathbb{R}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$F(x) = \frac{1}{16} (x^4 + 1)^4 + k$$

- l) $f(x) = \cos x e^{\sin x}$ et $K = \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$F(x) = e^{\sin x} + k$$

Exercice 3 :

1. $f(x) = \frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$ sur $\mathbf{IR} - \{2\}$

a) Déterminons a et b

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 4ax + 4a + b}{(x-2)^2}$$

On a par identification : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$

Donc $f(x) = -2 + \frac{8}{(x-2)^2}$

b) Primitives de f sur $]2; +\infty[$
 f est continue sur $]2; +\infty[$, elle admet donc une primitive de fonction définie par :

$$F(x) = -2x - \frac{8}{x-2} + k, \quad k \in \mathbf{IR}$$

2. $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^{x-1}}$ sur $]0; +\infty[$

a) Détermination de a et b

$$f(x) = a + \frac{be^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)e^x - a}{e^x - 1}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc : $f(x) = 3 - \frac{e^x}{e^x-1}$

b) Déterminons les primitives F de f

$$F(x) = 3x - \ln(e^x - 1) + k$$

On a : $F(\ln 2) = 3\ln 2 + k$ et

$$F(\ln 4) = 6\ln 2 - \ln 3 + k$$

c) $F(\ln 2) = 1 \Leftrightarrow 3\ln 2 + k = 1$.

Soit $k = 1 - 3\ln 2$

Alors :

$$F(x) = 3x - \ln(e^x - 1) + 1 - 3\ln 2$$

3. $f(x) = \ln(4 + e^{-x})$

a) Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} = -\frac{1}{1 + 4e^x}$$

b) Primitives de g sur $\mathbf{IR}$

g est continue sur $\mathbf{IR}$ et $g(x) = -8f'(x)$

Donc $G(x) = -8f(x) + k$.

$$G(x) = -8\ln(4 + e^{-x}) + k$$

c) $G(0) = 0 \Rightarrow k = 8\ln 5$.

Alors :

$$G(x) = -8\ln(4 + e^{-x}) + 8\ln 5$$

4. $f(x) = \frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$

a) Déterminons a, b et c

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + (4a-4b)x + 4b+c}{(x-2)^2}$$

On a par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -1 \\ 4a - 4b = -8 \\ 4b + c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}$$

b) Primitives F de f sur

$]2; +\infty[$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{4}{x-2} + k$$

Exercice 5 :

Calculons les intégrales :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x+2} \, dx \\ &= \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} \right]_0^1. \text{ Soit :} \\ \boxed{A} &= 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 x\sqrt{x^2+2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 2x\sqrt{x^2+2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (x^2+2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1. \text{ Soit :} \\ \boxed{B} &= \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} \, dx \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}}. \text{ Soit } \boxed{C} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (\ln x)^3 \right]_1^{\sqrt{e}}. \text{ Soit } \boxed{D} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x-7)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (2x+2)(x^2+2x-7)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x^2+2x-7)^3 \right]_{-1}^0. \\ \text{Soit } \boxed{E} &= \frac{169}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 (e^{2x} + e^x) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} + e^x \right]_0^1. \text{ Soit} \\ \boxed{F} &= \frac{1}{2} e^2 + e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) \tan x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\tan^2 x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}. \text{ Soit } \boxed{H} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}. \text{ Soit} \\ \boxed{I} &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$$

Linéarisons $\cos^5 x$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \cos^5 x &= \frac{1}{32} (e^{ix} + e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x \\ \text{Donc : } J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x \right) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{80} \sin 5x + \frac{5}{48} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \boxed{J} &= \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos^4 x - \sin x \cos^6 x) \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 \boxed{K} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \int_3^0 x e^{-x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_3^0 -2x e^{-x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_3^0 \quad ; \quad \boxed{M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^9} - 1 \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-2}^1 e^x (e^x - 1) \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (e^x - 1)^2 \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} - \frac{1}{4e^4} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2} \\
 \boxed{N} &= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{4e^4} + \frac{1}{e^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O &= \int_0^2 (2x + 1) \sqrt{2x + 1} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 2(2x + 1)^{\frac{3}{2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} \sqrt{(2x + 1)^5} \right]_0^2 \\
 \boxed{O} &= 5\sqrt{5} - \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^{e^3} \quad ; \quad \boxed{P = 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx \\
 &= \int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \, dx \\
 &= \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_{\frac{1}{e}}^{e^3} \quad ; \quad \boxed{R = -\frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx \\
 &= [\ln(\tan x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 \boxed{S} &= \frac{1}{2} \ln 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx \\
 &= \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_2^1 \quad ; \quad \boxed{T = \sqrt{e} - e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx \\
 &= -[\ln \cos x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \ln 3}
 \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Calculons à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^1 x \sqrt{x+2} \, dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow v(x) = \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}}$$

Donc :

$$A = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (x+2)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} \right]_0^1 - \left[\frac{4}{15} \sqrt{(x+2)^5} \right]_0^1$$

$$A = 2\sqrt{3} - \frac{12}{5} \sqrt{3} + \frac{16}{15} \sqrt{2}$$

$$\boxed{A = -\frac{2}{5} \sqrt{3} + \frac{16}{15} \sqrt{2}}$$

$$B = \int_1^e \ln x \, dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } B &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e \\ &= e - e + 1 \Rightarrow \boxed{B = 1} \end{aligned}$$

$$C = \int_{-1}^1 (x+1)e^x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u(x) &= x+1 \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} C &= [(x+1)e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \\ &= [(x+1)e^x]_{-1}^1 - [e^x]_{-1}^1 \\ &= 2e - e + \frac{1}{e} ; \boxed{C = e + \frac{1}{e}} \end{aligned}$$

$$D = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u(x) &= \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } D &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} ; \boxed{D = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin 3x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u(x) &= x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v'(x) &= \sin 3x \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{aligned}$$

On a :

$$E = \left[-\frac{1}{3}x^2 \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{2}{3}x \cos 3x dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow$$

$$u'(x) = \frac{2}{3}$$

$$v'(x) = \cos 3x \Rightarrow$$

$$v(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$$

On a :

$$E = \left[-\frac{1}{3}x^2 \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2}{9}x \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{9} \sin 3x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^2 \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{2}{9}x \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} +$$

$$\left[\frac{2}{27} \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\boxed{E = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}}$$

$$F = \int_1^2 (x+1) \ln (x+1)^2 dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = \ln (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$u'(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$v'(x) = x+1 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

On a :

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln (x+1)^2 \right]_1^2 - \int_1^2 (x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln (x+1)^2 \right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{9}{2} \ln 9 - 2 \ln 4 - \frac{9}{2} + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 9 \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{5}{2}}$$

$$G = \int_1^e x^2 e^x dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

$$\text{On a : } G = [x^2 e^x]_1^e - \int_1^e 2x e^x dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

On a :

$$\begin{aligned} G &= [x^2 e^x]_1^e - [2x e^x]_1^e + [2e^x]_1^e \\ &= e^2 e^e - e - 2e e^e + 2e + 2e^e \\ &\quad - 2e \end{aligned}$$

$$\boxed{G = e^{e+2} - 2e^{e+1} + 2e^e - e}$$

Exercice 8 :

Calculons :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x \, dx$

Posons: $u(x) = 2x+1 \Rightarrow u'(x) = 2$

$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x \, dx$$

$$= [(2x+1)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \, dx$$

$$= [(2x+1)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + 1 - 2$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x \, dx = \pi - 1}$$

b) $\int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x \, dx$

Posons : $u(x) = x-1 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin 3x \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x \, dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{3}\cos 3x \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(x-1)\cos 3x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}(\pi-1) - \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x \, dx = \frac{1}{3}(\pi-2)}$$

c) $\int_2^3 (2x+1)\ln x \, dx$

Posons :

$u^{(x)} = 2x+1 \Rightarrow u(x) = x^2+x$

$v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

On a : $\int_2^3 (2x+1)\ln x \, dx =$

$$[(x^2+x)\ln x]_2^3 - \int_2^3 (x+1)dx$$

$$= [(x^2+x)\ln x]_2^3 - \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3$$

$$\boxed{\int_2^3 (2x+1)\ln x \, dx = 12\ln 3 - 6\ln 2 - \frac{7}{2}}$$

d) $\int_1^e \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^e = 1$

$$\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}$$

e) $\int_1^e x\ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$$\boxed{\int_1^e x\ln x \, dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

f) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x \, dx$

Posons : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow v(x) = \frac{2x}{3}\sqrt{x}$

On a :

$$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x \, dx = \left[\frac{2x}{3}\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}$$

$$- \int_1^{e^2} \frac{2}{3}\sqrt{x} \, dx$$

$$= \left[\frac{2x}{3}\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \left[\frac{4x}{9}\sqrt{x}\right]_1^{e^2}$$

$$= \frac{4e^3}{3} - \frac{4e^3}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x \, dx = \frac{8e^3}{9} + \frac{4}{9}}$$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

Posons : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow v(x) = \tan x$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx} &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x dx$

Posons : $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$
 $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x dx = [\cos x e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x e^x dx$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x \end{aligned}$$

On a alors :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x dx = [\cos x e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x e^x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x dx = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2}}$$

i) $\int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx$

Posons :

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x^2 - x + 1 \Rightarrow u'(x) = 6x - 1 \\ v'(x) &= e^x \Rightarrow v(x) = e^x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx &= [(3x^2 - x + 1)e^x]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 (6x - 1)e^x dx \end{aligned}$$

Posons ensuite :

$$u(x) = 6x - 1 \Rightarrow u'(x) = 6$$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx &= \\ [(3x^2 - x + 1)e^x]_0^1 &- \\ [(6x - 1)e^x]_0^1 + [6e^x]_0^1 &= \\ [(3x^2 - 7x + 8)e^x]_0^1 & \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx = 4e - 8}$$

j) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx$

Posons :

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos 3x \Rightarrow u'(x) = -3\sin 3x \\ v'(x) &= e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} \cos 3x e^{2x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \sin 3x e^{2x} dx \end{aligned}$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{3}{2} \sin 3x \Rightarrow u'(x) = \frac{9}{2} \cos 3x \\ v'(x) &= e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} \cos 3x e^{2x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \\ \left[\frac{3}{4} \sin 3x e^{2x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} &- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{4} \cos 3x e^{2x} dx \end{aligned}$$

$$\frac{13}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} \cos 3x e^{2x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$\left[\frac{3}{4} \sin 3x e^{2x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{13}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \frac{3}{4} e^{-\pi} + \frac{3}{4} e^{\pi}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \frac{3}{13} (e^{-\pi} + e^{\pi})$$

Exercice 9 :

$$I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx \text{ et } J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$$

1. Expression de I en fonction de J

$$I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

Posons : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{1+e^x}$$

$$\text{On a : } I = \left[\frac{-x}{1+e^x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$\boxed{I = \frac{-1}{1+e} + J}$$

2. Démontrons que: $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$\text{On a : } \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{\frac{1}{e^x}}{(1+\frac{1}{e^x})} \text{ or }$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$$

3. Déduisons la valeur de J

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$J = [-\ln(e^{-x} + 1)]_0^1$$

$$\boxed{J = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}$$

4. Calculons I

$$\text{On a : } I = \frac{-1}{1+e} + J$$

$$\boxed{I = \frac{-1}{1+e} + \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}$$

Exercice 10:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \text{ et }$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

1. Calculons $I + J$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$$

2. Vérifions que : $I - J =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$$

On a :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \text{ or } \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

$$\text{D'où : } \boxed{I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx}$$

3. Calculons $I - J$

Posons: $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \cos 2x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

On a :

$$I - J = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Donc :
$$I - J = -\frac{1}{2}$$

4. Valeurs exactes de I et J

Posons le système :

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}}$$

$$\text{et } \boxed{J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}}$$

Les exercices 11 à 31 sont laissés à l'élève pour une prise d'initiative.

Exercice 18 :

1. $x \in [0 ; 1]$ et $f(x) =$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$$

a) Calculons $g'(x)$ avec

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

g est dérivable sur

$$[0 ; 1] \text{ et } \boxed{g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}$$

b) Déduisons $f'(x)$

$$f \text{ est dérivable et } f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2})'}{x + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}}$$

c) Calculons I

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$= [\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_0^1 \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}\right)}$$

2. Vérifions que $J + 2I = K$

$$J + 2I = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

$$\text{D'où : } \boxed{J + 2I = K}.$$

3. Montrons que $K = \sqrt{3} - J$

$$\text{On a : } J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$\text{On pose : } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \Rightarrow v(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

On a :

$$J = \left[x\sqrt{x^2 + 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

$$\text{d'où : } \boxed{J = \sqrt{3} - K}$$

4. Valeurs de J et K

$$\text{Posons le système : } \begin{cases} J - K = -2I \\ J + K = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boxed{J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}\right)} \text{ et}$$

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}\right)}$$

Exercice 20 :

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$$

1. a) Étudions f et traçons (C)

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + 3}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 3} > 0. \text{ Donc } f'(x)$$

a le signe de $x - \sqrt{x^2 + 3}$.

$$\forall x \in]-\infty ; 0], x < 0$$

et $-\sqrt{x^2 + 3} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
sur $]-\infty ; 0]$.

**Donc f est strictement
décroissante sur $]-\infty ; 0]$**

$\forall x \in [0 ; +\infty[, x^2 + 3 > x^2 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{x^2 + 3} > x$ soit $x - \sqrt{x^2 + 3} < 0$
 $f'(x) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$. f est alors
décroissante sur $[0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (1 - x + \sqrt{x^2 + 3})$$

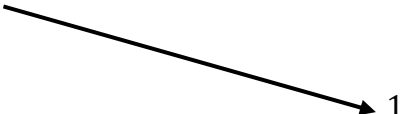
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} \rightarrow +\infty \\ 1 - x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

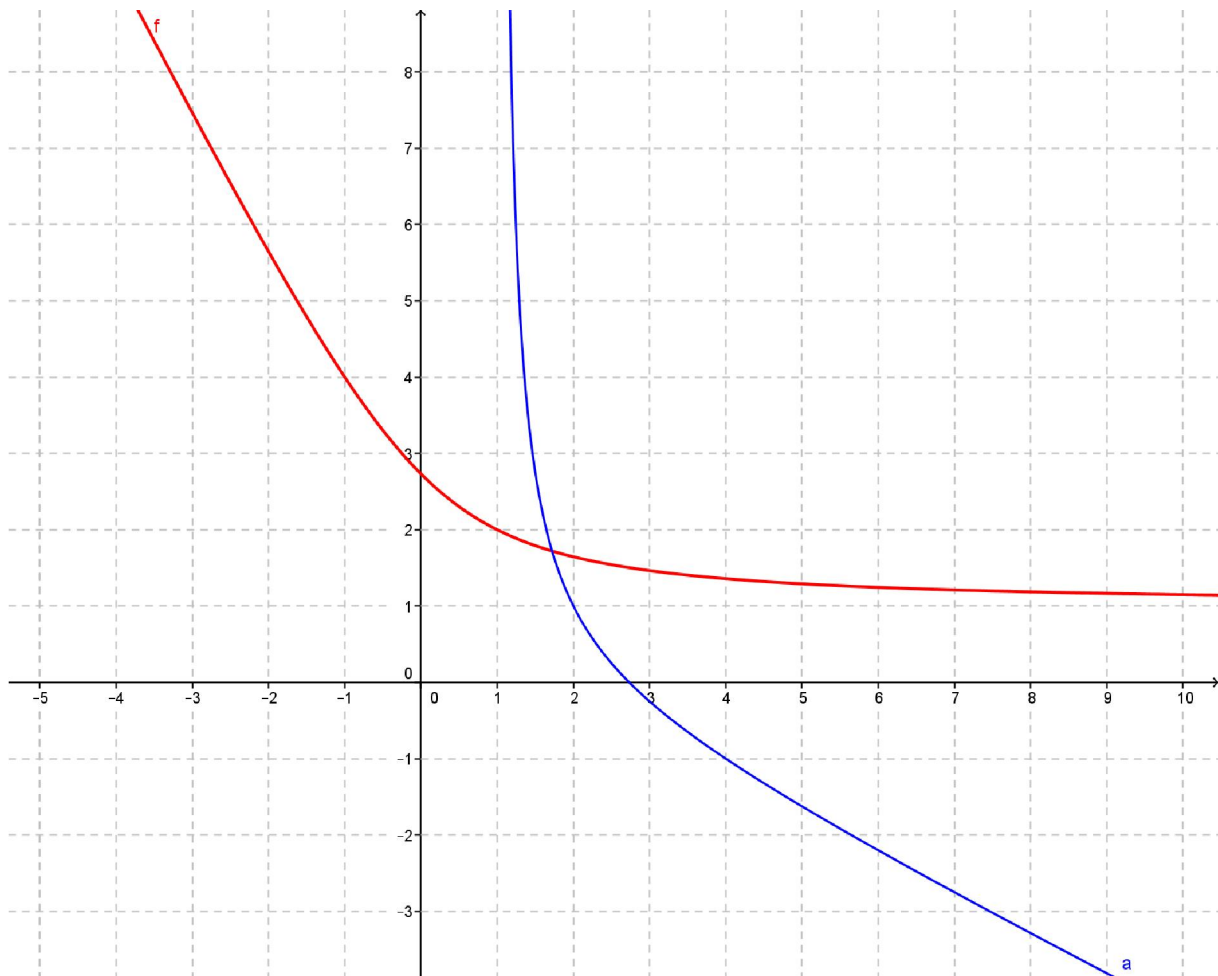
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-2x - 3}{1 - x - \sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1} \text{ car } \begin{cases} \frac{-3}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{3}{x^2} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$ 	
		1



b) f est strictement décroissante de IR vers $]1 ; +\infty[$. On en déduit que f est monotone sur IR , d'où f réalise une bijection de $IR \rightarrow]1 ; +\infty[$. Elle admet alors une bijection réciproque $f^{-1}:]1 ; +\infty[\rightarrow IR$.

2. a) la courbe (C^{-1}) s'obtient à partir de (C) par symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice.

b) Démontrons que :

$$f^{-1}(x) = \frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)^2}$$

Posons : $f(x) = y$

$$1 - x + \sqrt{x^2 + 3} = y$$

$$x = \frac{3 - (y - 1)^2}{2(y - 1)^2}$$

D'où :

$$f^{-1}(x) = \frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)^2}, \quad x \in]1 ; +\infty[$$

3. a) Calculons $\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) dx$

$$\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) dx = \int_2^{1+\sqrt{3}} \left(-\frac{x-1}{2} + \frac{3}{2(x-1)} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ln(x-1) \right]_2^{1+\sqrt{3}}$$

$$\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) dx = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3$$

b) Dédisons $\int_0^1 f(x) dx$

$$f(0) = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow f^{-1}(1 + \sqrt{3}) = 0$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

Posons $x = f(X) \Leftrightarrow X = f^{-1}(x)$

Si $x = 2$ alors $X = 1$

Si $x = 1 + \sqrt{3}$ alors $X = 0$

$x = f(X) \Rightarrow dx = f'(X) dX$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) dx &= \int_0^1 f^{-1}(f(X)) \cdot f'(X) dX \\ &= \int_0^1 X f'(X) dX \end{aligned}$$

Posons : $u(X) = X \Rightarrow u'(X) = 1$

$v'(X) = f'(X) \Rightarrow v(X) = f(X)$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x) dx &= [Xf(X)]_1^0 - \int_1^0 f(X) dX \\ \boxed{\int_0^1 f(x) dx} &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

Déduisons alors $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x + \sqrt{x^2 + 3}) dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x) dx + \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 - \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 - 1 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx = 1 + \frac{3}{4} \ln 3}$$

Exercice 23 :

$$f(x) = e^x(e^x - 2)$$

1. Limites de f

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} e^x \rightarrow 0 \\ e^x - 2 \rightarrow -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} e^x \rightarrow +\infty \\ e^x - 2 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

2. Sens de variation

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = e^x(2e^x - 1)}$$

Pour tout x , $e^x > 0$. $f'(x)$ a alors le signe de $2e^x - 1$

Soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \text{ sur } [-\ln 2 ; +\infty[\\ f'(x) &\leq 0 \text{ sur }]-\infty ; -\ln 2]. \end{aligned}$$

Donc :

f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; -\ln 2]$

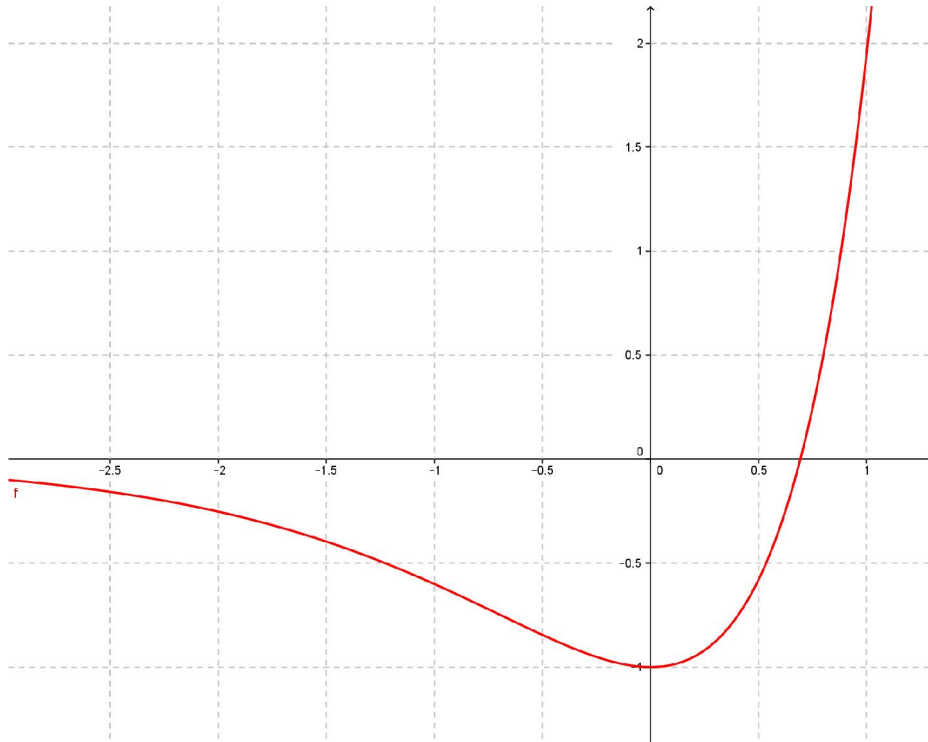
Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$

3. a) Abscisse de $(C) \cap (Ox)$

On pose $f(x) = 0$
 $e^x(e^x - 2) = 0 \Rightarrow (e^x - 2) = 0$
 $\Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

b) Traçons (C)



4. a) Calculons $\mathcal{A}(\alpha)$
 (C) est en dessous de (Ox) sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 2]$. Donc

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\ln 2} -f(x) dx \times u.a$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(e^x - 2)^2 \right]_{\alpha}^{\ln 2} \times u.a$$

$$\boxed{\mathcal{A}(\alpha) = 2(e^{\alpha} - 2)^2 cm^2}$$

b) Déterminons α telle que :

Exercice 39 laissé à l'apprenant.

$\mathcal{A}(\alpha) = 2cm^2$
 $\mathcal{A}(\alpha) = 2cm^2 \Rightarrow (e^{\alpha} - 2)^2 - 1 = 0$
 $(e^{\alpha} - 3)(e^{\alpha} - 1) = 0$
 $\alpha = \ln 3 \quad \text{ou} \quad \alpha = 0$
 or $\alpha \leq \ln 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

c) Calcul de limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 8cm^2 \quad \text{car} \quad e^{\alpha} \rightarrow 0$$

Exercice 25 :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2e^{-x}}$$

1. Démontrons que :

a) $\forall x \in [0 ; 1], 0 \leq x^2e^{-x} \leq 1$

On a : $\forall x \in [0 ; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Alors on a : $\begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \end{cases}$

D'où $\forall x \in [0 ; 1], 0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$
--

b) $\forall u \in [0 ; 1],$

$$1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}$$

$\forall u \in [0 ; 1],$

$1 - u^2 \leq 1$

$$(1 - u)(1 + u) \leq 1 \Rightarrow 1 - u \leq \frac{1}{1+u} \quad (1)$$

D'autre part :

$$\frac{1}{1+u} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) = \frac{u(u-1)}{1+u}$$

On montre aisément que :

$$\frac{u(u-1)}{1+u} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+u} \leq \left(1 - \frac{u}{2}\right) \quad (2)$$

De (1) et (2), on obtient la double inégalité : $\boxed{1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}}$

2. Déduisons une valeur approchée de I

On a : $\forall u \in [0 ; 1], 1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}.$

Or $\forall x \in [0 ; 1], 0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1.$

Donc :

$$1 - x^2 e^{-x} \leq \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}} \leq 1 - \frac{x^2 e^{-x}}{2}$$

$$\int_0^1 (1 - x^2 e^{-x}) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}} dx \leq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2 e^{-x}}{2}\right) dx$$

$$\int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \leq I \leq \int_0^1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

or $\int_0^1 dx = 1.$

On a:

$$1 - \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \leq I \leq 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Calculons $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

Posons : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

On a :

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2x e^{-x} dx$$

Posons ensuite :

$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + [-2x e^{-x}]_0^1 - 2[e^{-x}]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{5}{e} + 2$$

On écrit alors :

$$1 - \left(-\frac{5}{e} + 2\right) \leq I \leq 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{e} + 2\right)$$

$$\frac{5}{e} - 1 \leq I \leq \frac{5}{2e}$$

$$\boxed{0,84 \leq I \leq 0,92}$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1 :

On considère l'équation différentielle :

$(E_1): f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$ où f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les nombres réels a , b et c pour que la fonction g définie par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_2): h'' - 3h' + 2h = 0.$$

3. Résoudre (E_2) . En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1) .

4. Déterminer la solution particulière dont la représentation dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) passe par l'origine et admet en ce point une tangente parallèle à la droite (OI) .

Exercice 2 :

A/ On considère l'équation différentielle :

$$(E): y'' - 4y = 0.$$

- a. Résoudre (E) .
- b. Déterminer la fonction h est solution de (E) qui vérifie $h(0) = \frac{1}{4}$ et $h'(0) = -\frac{1}{2}$.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan (P) .

- 1-
 - a. Etudier les variations de f .
 - b. Construire (C) .
- 2-
 - a. Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} .

b. Construire dans le plan (P) la courbe (C') représentative de f^{-1} .

c. Donner l'équation de (C') .

3- Soit (T) la tangente à (C) en son point d'abscisse $x = 0$. Trouver l'équation de la tangente (T') à la courbe (C') et qui est parallèle à (T) .

4- Calculer l'aire du domaine plan limité par (C') et les droites d'équation $x = 0$, $y = 0$ et $y = -\frac{1}{2}$.

C/ Soit r un réel non nul et U_0 un réel donné. On considère la suite arithmétique (U_n) de premier terme U_0 et de raison r . Soit (V_n) la suite définie par : pour tout n ,
 $V_n = f(U_n)$.

- a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q .
- b. Déterminer suivant les valeurs de r la limite de V_n .
- c. Calculer en fonction de U_0 , r et n

la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n.$$

- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ suivant les valeurs de r .
- e. Dédire la limite de $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

Exercice 3 :

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$(E): y'' - 3y' + 2y = 0.$$

1.
 - a) Quelles sont les solutions de (E) .
 - b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? on dit que (C) et (C') sont tangentes.
2. Représenter dans un même repère orthonormal les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives.
3. λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions réelles telles que :

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}.$$
 - a) Montrer que h_λ est une solution de (E) .
 - b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ . Après avoir calculé, en fonction de λ , les

- coordonnées du point commun à (C_λ) et (C') , montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.
- c) Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C') .

Partie B

Soit (E') l'équation différentielle :

$$(E') : y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2.$$

1. Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E') .

2. On pose :

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$$

Montrer que f est une solution de (E') si et seulement si g est solution de (E) . En déduire les fonctions f solution de (E') .

3. Déterminer les solutions de (E') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0; 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

Exercice 4 :

1. Pour $x \geq 0$, calculer à l'aide d'une intégration par partie

$$f(x) = \int_0^x 2(1-t)e^{-t} dt.$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E): 4y'' + 4y' + y = 2(x-4)e^{-x}.$$

- a- Montrer que f est une solution de (E) .

- b- On pose $g(x) = h(x) + f(x)$. Montrer que si g est solution de (E) alors h est solution de l'équation différentielle :

$$(E'): 4y'' + 4y' + y = 0.$$

- c- Résoudre (E') .

- d- En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

- e- Déterminer la solution (E) dont la courbe présente un extremum au point $A(0; 1)$.

Exercice 5 :

A/ n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation

$$\text{différentielle : } y' - \frac{1}{n}y = 0 \quad (1).$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{n}y = \frac{x+1}{n(n+1)} \quad (2).$$

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ soit solution de (2) .

3.

- a) Montrer que, pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (2) , il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1) .

- b) En déduire toutes les solutions de (2)

- c) Déterminer celle vérifiant

$$f(0) = 0$$

B/

1. Soit n un entier naturel quelconque. Justifier l'existence de :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}} dt$$

2. Soit n un entier naturel et x un réel quelconque. Montrer que :

$$I_{n+1} = -2x^{n+1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + 2(n+1)I_n(x)$$

3. Soit x un réel quelconque. Calculer $I_0(x)$ en fonction de x . En déduire les expressions de $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .

Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle :

$$(1) : y'' - y' - 6y = -6x - 1.$$

1- Déterminer a et b réels tels que la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (1).

2-

a- Démontrer que f , fonction numérique de la variable x , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle : $y'' - y' - 6y = 0$.

b- Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y' - 6y = 0$.

c- En déduire l'ensemble des solutions de (1).

d- Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 7 :

Les parties B. et C. sont indépendantes de la partie A.

A. Le but de cette partie est de déterminer les solutions définies et deux fois dérivables sur l'intervalle $D =]-1; +\infty[$, solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = \frac{xe^{-x}}{(x+1)^2}$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(H) : y'' + 3y' + 2y = 0.$$

2. Soit une fonction définie et deux fois dérivable sur D . On désigne par g la fonction définie sur D par : $f(x) = e^{-x} \cdot g(x)$.

a. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si pour tout élément x de D ,

$$g''(x) + g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

b. En remarquant que $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$ est la fonction dérivée de $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$, donner une fonction g_0 vérifiant (1). En déduire une solution f_0 de l'équation (E).

c. Prouver que f est une solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (H).

3.

a. En utilisant les questions précédentes, déterminer toutes les solutions de (E).

b. En déduire la solution f définie sur $D =]-1; +\infty[$ vérifiant : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Etude de la fonction f définie sur $D =]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1+x).$$

3. Justifier la dérivabilité de f sur D et démontrer que :

$$f'(x) = e^{-x}\rho(x). \text{ Où } \rho(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(1+x).$$

4. Démontrer que $\rho(x) = 0$ admet une unique solution réel, que l'on notera α . Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Déterminer le signe de $\rho(x)$ suivant les valeurs de x .

5. Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha+1}$.

6. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On précisera les asymptotes de (Γ) et la tangente à (Γ) en 0.

C. Recherche d'une valeur approchée de α au moyen d'une suite.

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ par :

$$h(x) = e^{\frac{1}{1+x}} - 1$$

1.

a. Démontrer que l'équation $\rho(x) = 0$ est équivalente à $h(x) = x$.

b. Démontrer que $h(I)$ est inclus dans I . On définit une suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = h(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.

a. Etablir que pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$:

$$-\frac{4}{9}e^{2/3} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{1/2}$$

b. En déduire qu'il existe un réel k , appartenant à $]0; 1[$, tel que : pour tout n naturel,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$

c. Démontrer que la suite (U_n) est une suite convergente vers α .

b. En utilisant les variations de h , démontrer que : pour tout naturel n , $(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) \leq 0$.

En déduire que α est compris entre U_n et U_{n+1} . En justifiant votre méthode, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 8 :

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + y = e^x - e^{-x} \quad (1)$$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0 \quad (2)$$

2. On note f une solution quelconque de l'équation (1) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - m(e^x - e^{-x}) \quad (3) \text{ où } m \text{ est un réel donné.}$$

a- Exprimer $g''(x)$ en fonction de $f''(x)$ et m .

b- Déterminer la valeur du réel m

pour que la fonction g soit solution de l'équation (2).

c- Exprimer toutes les solutions f de l'équation (1) qui sont définies par la relation (3).

d. Parmi les fonctions f définies en 2. c-, on note h celle qui vérifie :
 $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. Déterminer h .

Exercice 9 :

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E): y' + y = 0$.
2. Soit l'équation différentielle : $(E_1): y' + y = e^{-x}$
Vérifier que la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (x + a)e^{-x}$, où a est un réel, est solution de l'équation différentielle (E_1) .
3. Déterminer le réel a tel que $f(0) = 1$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ et sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques $2cm$ en abscisse et $5cm$ en ordonnée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
2. Déterminer la fonction f' , dérivée de la fonction f . Etablir le

tableau de variation de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) . Pour cela, on étudie le signe de la fonction d définie par :
 $d(x) = f(x) + \frac{1}{e}(x - 3)$.

1. Déterminer la fonction d' , dérivée de la fonction d , puis la fonction d'' , dérivée de la fonction d' .
2. Etudier le signe de $d''(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction d' .
3. Etudier le signe de $d'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction d . En déduire l'étude du signe de $d(x)$. Interpréter graphiquement cette étude.
4. Tracer la droite (T) et la courbe (C) .

Exercice 10 :

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions numériques g , dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout réel x :

$$g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1} \quad [1]$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Déterminer l'unique solution affine g_0 vérifiant (1)
2. On note h la fonction :
 $h = g - g_0$. Démontrer que g vérifie (1) si et seulement si h vérifie l'équation différentielle : $y' - y = 0$ (2)
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1). Déterminer la fonction vérifiant (1) qui s'annule en 0.

Partie B

1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative.

- a) Calculer $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.
- b) Etudier le sens de variation de f et les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

Montrer que la courbe admet une asymptote que l'on précisera.

- c) Utiliser les variations de f pour déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- d) Tracer la courbe. Unité graphique 2cm.

2. On considère la fonction numérique H de la variable réelle x définie par :

$$H(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté au même repère que précédemment.

- a) Etudier le sens de variation de H et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Montrer que Γ admet une droite asymptote que l'on précisera.

- b) Etudier les positions relatives des deux courbes.
- c) Tracer la courbe Γ dans le même repère que précédemment.

3. Etablir que $H(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$.
 Donner une interprétation géométrique de $H(0)$.

4. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1

- a) Démontrer que :
 $f(n) \leq H(n) \leq f(n+1)$.

Déduire l'existence d'un unique réel U_n élément de $[n; n+1]$ tel que
 $H(n) = f(U_n)$.

- b) A l'aide des deux courbes

représenter sur l'axe des abscisses les points d'abscisses U_1 et U_2 .

c) On considère la suite de terme général $V_n = U_n - n$ où n est un entier non nul.

- Montrer que la suite (V_n) est bornée.

- Etablir que (V_n) vérifie l'égalité :

$$\frac{e^{V_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{V_n}{e^n}$$

- Dédire que la suite (V_n) admet une limite que l'on déterminera.

Exercice 11 :

Partie A : Questions préliminaires

h est une fonction continue sur $I = [0; +\infty[$ et positive. H est la primitive de h sur I , telle que $H(0) = 0$.

- Montrer qu'alors H est positive sur I .
- En utilisant plusieurs fois a) et sachant que pour tout réel $x \geq 0$ on a $e^x - 1 \geq 0$, démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq \frac{x^4}{24}$.

Partie B :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

- Etudier la fonction f .
- Dédire de cette étude que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution. On note α cette solution. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près. Préciser la méthode utilisée.
- L'unité de longueur choisie est 2cm ; tracer la courbe dans un repère orthonormé. Préciser s'il y a lieu, les tangentes horizontales.

4. λ est un réel strictement positif. On note D le domaine limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe C et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$. on note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de ce domaine.

- Montrer que : $\frac{A(\lambda)}{4} = \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$
- On veut savoir s'il est possible de choisir λ de façon à avoir $A(\lambda) = 125$.

- Sans calculer l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 1 \text{ lorsque}$$

$$\lambda \leq 1 \text{ et que :}$$

$$\int_1^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 24 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 24$$

pour $\lambda \geq 1$

- De ces égalités déduire que l'on ne peut pas avoir $A(\lambda) = 125 \text{ cm}^2$.

Partie C :

1. f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f . Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + f(x) \\ = -2e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

2. En note F la primitive de f qui s'annule en 0. Dédire de la question précédente, la valeur explicite de $F(x)$, pour tout réel x .

3. Ecrire $F(x)$ sous forme d'intégrale. Retrouver le résultat de la question 2. En calculant cette intégrale.

Partie D :

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre, d'inconnue y :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -2e^{-x} + 1 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = 0$.

2. g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_2) . Démontrer que $g + f$ est une solution de (E_1) .

Inversement, soit h une solution de (E_1) . Démontrer que $h - f$ est solution de (E_2) .

Dédire alors l'ensemble des solutions de (E_1) .

3. Déterminer la solution φ de (E_1) telle que : $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Partie E :

a est un nombre réel donné. g_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1.$$

1. Démontrer que les courbes C_a représentatives des fonctions g_a passent toutes par un même point fixe I .

2. On suppose $a \neq -2$. Démontrer que admet deux extrema, dont l'un est obtenu pour $x = 0$.

3. On note M_a le point d'abscisse $a + 2$ sur la courbe C_a . Lorsque a varie M_a décrit une courbe Γ .

Donner une équation cartésienne de Γ .

Exercice 13 :

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$
- (2) $f'(0) = 1$
- (3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$

b) Calculer $f(0)$

2. En dérivant chaque membre de la proposition (1) démontrer que pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$ où f'' est la fonction dérivée seconde de f .

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$

a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$

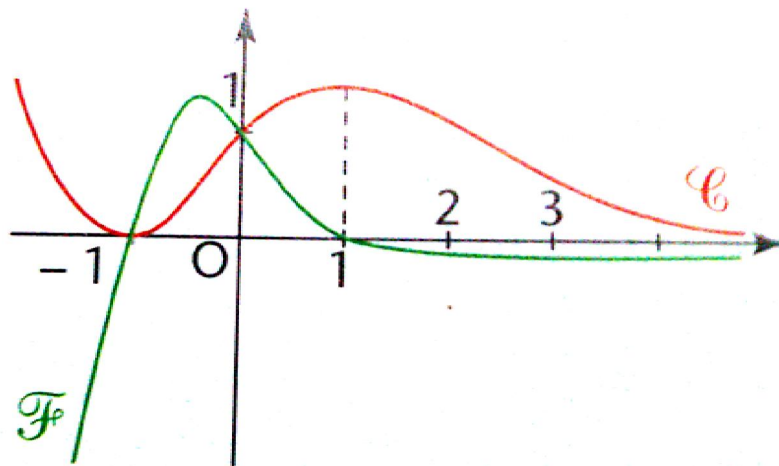
- b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$
 c) En déduire les fonctions u et v .
 d) En déduire que pour tout réel

$$x, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
 b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et construire sa courbe représentative.

Exercice 14 :

Partie A : Lectures graphiques



On donne dans le repère orthogonal les courbes (C) et (F) représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g' .

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; 5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g .

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 ?

Partie B :

Soit l'équation différentielle $(E): y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est solution de (E)
 2. Résoudre l'équation $(E'): y' + y = 0$
 3. Soit u une solution de (E') . Montrer que $f_0 + u$ est solution de

(E). On admettra réciproquement que toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$.

En déduire, pour tout réel x l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).

4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E),

déterminer $g(x)$ pour tout réel x .

5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Proposition de corrigés

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1:

1. Déterminons a, b et c

g est solution de $(E_1) \Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 8x^2 - 24x$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ et g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$.

Alors : $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c$

Par identification on a :
$$\begin{cases} 2a = 8 \\ -6a + 2b = -24 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases}$$
$$a = 4 ; b = 0 \text{ et } c = -4$$

Soit : $\boxed{g(x) = 4x^2 - 4}$.

2. Démontrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $h = f - g$ est solution de (E_2)

Supposons que f est solution de (E_1)

Il vient : $f'' - 3f' + 2f = 8x^2 - 24x$ or d'après la question précédente, on a :

$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 8x^2 - 24x.$$

Alors : $f'' - 3f' + 2f = g'' - 3g' + 2g$

$$f'' - 3f' + 2f - g'' + 3g' - 2g = 0$$

$$(f - g)'' - 3(f - g)' + 2(f - g) = 0$$

Donc : $\boxed{h = f - g \text{ est solution de } (E_2)}$

1. Réciproquement, supposons $h = f - g$ solution de (E_1)

Il vient : $(f - g)'' - 3(f - g)' + 2(f - g) = 0$

$$f'' - 3f' + 2f - g'' + 3g' - 2g = 0$$

$$f'' - 3f' + 2f = g'' - 3g' + 2g = 8x^2 - 24x$$

Donc : $\boxed{f \text{ est solution de } (E_1)}$

D'où f est solution de (E_1) si et seulement si h est solution de (E_2) .

3. Résolvons l'équation (E_2) : $h'' - 3h' + 2h = 0$

Equation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$\Delta = 1$ et $r_1 = 1$; $r_2 = 2$.

Alors on a : $\boxed{h(x) = ae^x + be^{2x} \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}}$.

4. Dédisons les solutions de l'équation (E_1)

On a : $h(x) = f(x) - g(x)$

$f(x) = h(x) + g(x)$

$f(x) = ae^x + be^{2x} + 4x^2 - 4$, a et b étant des nombres réels.

5. Solution particulière de (E_1) telle que la courbe représentative de f passe par le point O et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

On a : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$. On trouve $a = -8$; $b = -4$

$f(x) = -8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$

Exercice 2 :

A/ Soit l'équation:

(E): $y'' - 4y = 0$

a) Résolvons (E)

Equation caractéristique : $r^2 - 4 = 0$

$r = -2$ ou $r =$

2

Alors :

$y = ae^{2x} + be^{-2x}$, a et b étant des nombres réels.

b) Déterminons la fonction h

$h(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$

$h(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = \frac{1}{4}$

$h'(x) = 2ae^{2x} - 2be^{-2x}$

$h'(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow a - b = -\frac{1}{4}$

On obtient : $a = 0$ et $b = \frac{1}{4}$ et

$h(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$

B/ $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$

1. a) Variations de f

$Df = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

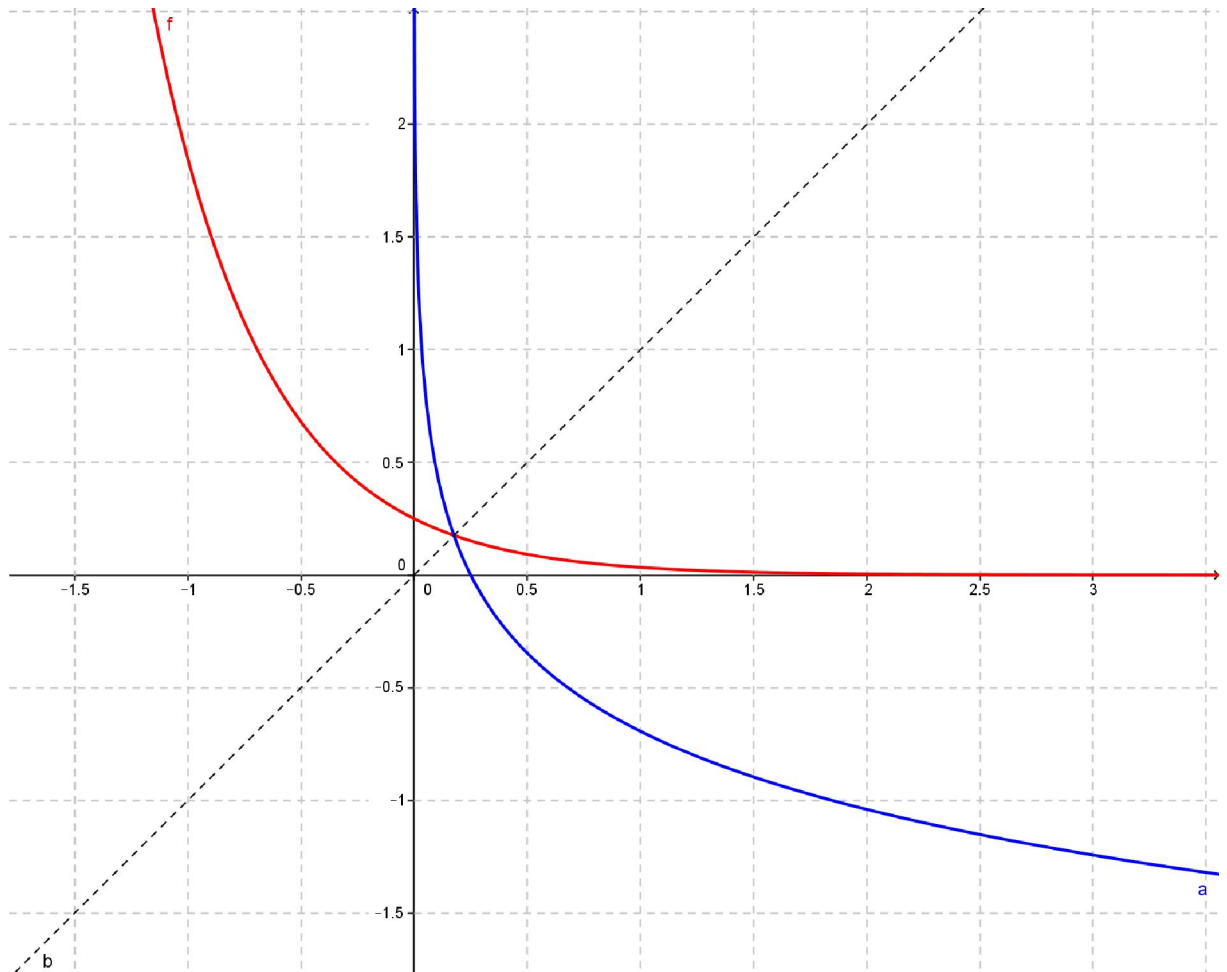
Pour tout réel x , $e^{-2x} > 0$. Donc

$f'(x) < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

c) Courbe représentative :



2. a) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc elle y est bijective. D'où f admet une application réciproque f^{-1} .

b) Courbe représentative (C') de f^{-1} .

3. On a l'équation de la tangente en 0 à (C) : $(T_0): y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Equation de la tangente à (C') en 0 parallèle à (T_0) .

$$(T_{-1}): y = -\frac{1}{2}(x - x_0) + f^{-1}(x_0)$$

On pose alors : $(f^{-1})'(x_0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 1$ et :

$$(T_{-1}): y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \ln 2$$

4. Calcul de l'aire du domaine plan

limité par (C') et les droites d'équation $x = 0$, $y = 0$ et $y = -\frac{1}{2}$.

$$\text{On a : } A = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-\frac{1}{2}}^0$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} e. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{8}(e - 1)}$$

$C/r \neq 0$ et $U_0 \in \mathbb{R}$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

$$V_n = f(U_n) = \frac{1}{4} e^{-2U_n}.$$

Donc :

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} e^{-2U_{n+1}} \text{ or } U_{n+1} = U_n + r$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} e^{-2U_n - 2r}$$

$$V_{n+1} = e^{-2r} \left(\frac{1}{4} e^{-2U_n} \right)$$

$$V_{n+1} = e^{-2r} \cdot V_n.$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{4} e^{-2U_0}$

b) Déterminons la limite de la suite

$$V_n$$

On a : $V_n = V_0 \cdot (e^{-2r})^n$

Si $r > 0$ alors $e^{-2r} < 1$. Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

Si $r < 0$ alors $e^{-2r} > 1$. Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

c) Calculons la somme :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

On a : $S_n = V_0 \frac{1 - (e^{-2r})^{n+1}}{1 - e^{-2r}}$

d) Limites de S_n

Si $r > 0$ alors $e^{-2r} < 1$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = V_0 \frac{1}{1 - e^{-2r}}$

Si $r < 0$ alors $e^{-2r} > 1$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$

e) Déduisons la limite de

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

$$V_n = f(U_0 + nr) = f(n)$$

si on pose : $U_0 = 0$ et $r = 1$. Dans

ces conditions :

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n) = S_n \text{ et}$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4(1 - e^{-2})} \quad V_0 = \frac{1}{4}$$

Exercice 3 :

(E): $y'' - 3y' + 2y = 0$

1. a) Solutions de (E)

Équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

On a : $r = 1$ ou $r = 2$.

Les solutions de (E) sont donc sous

la forme : $y = ae^x + be^{2x}$ où

a et $b \in \mathbb{R}$.

b) Solution particulière f_0 de (E)

(C'): $y = e^{3x}$.

Donc la tangente en 0 à (C')

est (T): $y = 3x + 1$.

Il vient alors :

$$\begin{cases} f'_0(0) = 3 \\ f_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = 2$$

Soit : $f_0(x) = -e^x + 2e^{2x}$

2. Représentation graphique de

(C) et (C')

On a : $D = \mathbb{R}$

Posons $g(x) = e^{3x}$

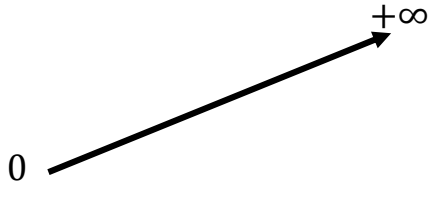
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$g(x)' = 3e^{3x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

$$f_0(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

$$f'_0(x) = -e^x + 4e^{2x}$$

$$\boxed{f'_0(x) = e^x(-1 + 4e^{2x})}$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Donc :

$f'_0(x)$ a le signe de $-1 + 4e^{2x}$

Alors : $f'_0(x) \geq 0$ sur

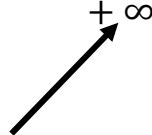
$[-2\ln 2 ; +\infty[$ et $f'_0(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; -2\ln 2]$. On a :

f_0 strictement croissante sur $[-2\ln 2 ; +\infty[$ et f_0 strictement décroissante sur $]-\infty ; -2\ln 2]$.

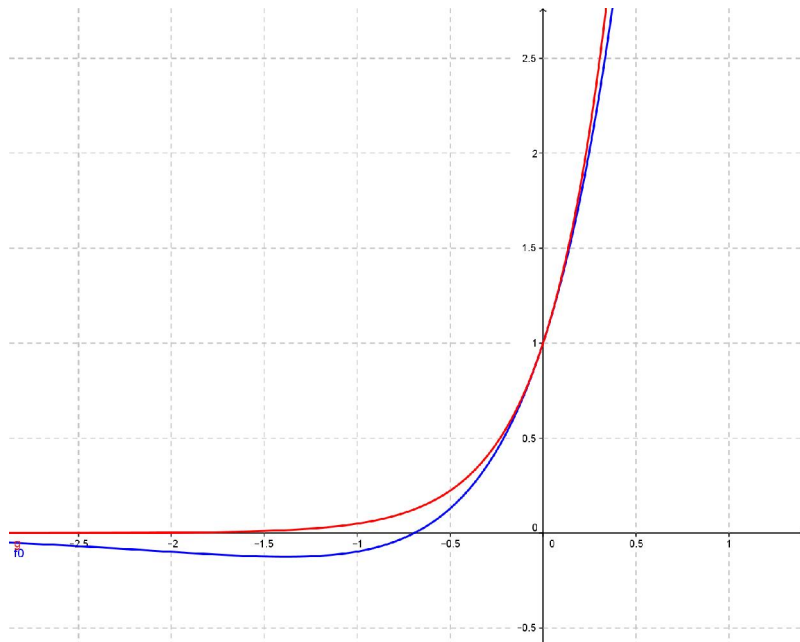
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$ 	$-\frac{1}{8}$	 $+\infty$

Représentation graphique :



3. $\lambda > 0$, $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$
 a) Montrons que h_λ est solution de (E)

h_λ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
 et h_λ est sous la forme $ae^x + be^{2x}$.

D'où h_λ est solution de (E)

b) Calculons $(C') \cap (C_\lambda)$

Réolvons : $h_\lambda(x) = y$
 $-\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x} = e^{3x}$
 $e^x(e^{2x} - 2\lambda e^x + \lambda^2) = 0$
 $e^x(e^x - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow x = \ln \lambda$

Donc $(C') \cap (C_\lambda)$ est le point

$$I_\lambda \left(\begin{matrix} \ln \lambda \\ \lambda^3 \end{matrix} \right).$$

Montrons que (C') et (C_λ) sont tangentes :

On a $g(x) = e^{3x}$ et
 $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$

Et : $\begin{cases} g(\ln \lambda) = h_\lambda(\ln \lambda) = \lambda^3 \\ g'(\ln \lambda) = h_\lambda'(\ln \lambda) = 3\lambda^3 \end{cases}$

D'où : (C') et (C_λ) sont tangentes

au point $I_\lambda \left(\begin{matrix} \ln \lambda \\ \lambda^3 \end{matrix} \right)$.

c) Position relative de (C') et (C_λ)

$$h_\lambda(x) - g(x) = -e^x(e^x - \lambda)^2$$

Pour tout réel x , $-e^x < 0$ et
 $(e^x - \lambda)^2 \geq 0$.

Donc : $h_\lambda(x) - g(x) \leq 0$.

(C') est au dessus de (C_λ) .

Partie B :

$(E') : y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

1. Trouvons p du 2nd degré tel
 que p soit solution de (E')

On pose $p(x) = ax^2 + bx + c$

$p'(x) = 2ax + b$ et $p''(x) = 2a$.

$p''(x) - 3p'(x) + 2p(x) = 2ax^2 +$
 $(2b - 6a)x + 2a + 2c - 3b$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a = -1 \\ 2b - 6a = 1 \\ 2a - 3b + 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x.$$

2. $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$

Montrons que f est solution de (E')

ssi g est solution de (E)

• Supposons f solution de (E')

Il vient :

$$f'' - 3f' + 2f = -x^2 + x + 2.$$

$$\text{Or : } p'' - 3p' + 2p = -x^2 + x + 2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'' - 3f' + 2f &= p'' - 3p' + 2p \\ (f'' - p'') - 3(f' - p') + 2(f - p) &= 0 \\ g'' - 3g' + 2g &= 0 \end{aligned}$$

Donc : g est solution de (E) .

- Réciproquement g est solution

$$\text{On a : } g'' - 3g' + 2g = 0$$

$$(f - p)'' - 3(f - p)' + 2(f - p) = 0$$

$$f'' - 3f' + 2f = p'' - 3p' + 2p.$$

$$\text{Or : } p'' - 3p' + 2p = -x^2 + x + 2.$$

Alors :

$$f'' - 3f' + 2f = -x^2 + x + 2.$$

Donc f est solution de (E')

Exercice 4 :

1. Calculons :

$$f(x) = \int_0^x 2(1-t)e^{-t} dt$$

Posons :

$$u(t) = 2(1-t) \Rightarrow u'(t) = -2$$

$$v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t}$$

$$f(x) = [-2(1-t)e^{-t}]_0^x - \int_0^x 2e^{-t} dt$$

$$\begin{aligned} f(x) &= [-2(1-t)e^{-t}]_0^x \\ &\quad - [-2e^{-t}]_0^x \\ \boxed{f(x) &= 2xe^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (E) : 4y'' + 4y' + y &= \\ 2(x-4)e^{-x} \end{aligned}$$

- a) Montrons que f est solution de (E)

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$f''(x) = -2e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x}$$

D'où f est solution de (E') ssi g est solution de (E) .

Déterminons les solutions de (E')

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x \text{ or } g(x) = ae^x + be^{2x}$$

D'où:

$$\boxed{f(x) = ae^x + be^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x} \text{ où}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

3. Solution particulière de (E')

telles que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$

$$f(0) = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow a + 2b = 2$$

On trouve : $a = 2$ et $b = 0$ et

$$\boxed{f(x) = 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x}$$

$$\text{Alors : } 4f''(x) + 4f'(x) + f(x) = 2(x-4)e^{-x}$$

D'où : **f est solution de (E) .**

$$b) \quad g(x) = h(x) + f(x)$$

Montrer que si g est solution de (E)

alors h est solution de :

$$(E') : 4y'' + 4y' + y = 0$$

$$g \text{ solution de } (E) \Rightarrow 4g'' + 4g' + g =$$

$$2(x-4)e^{-x}$$

$$4(h+f)'' + 4(h+f)' +$$

$$(h+f) = 2(x-4)e^{-x}$$

$$(4h'' + 4h' + h) + (4f'' + 4f' + f) =$$

$$2(x-4)e^{-x}$$

$$\text{Or : } 4f'' + 4f' + f = 2(x-4)e^{-x}.$$

$$\text{Alors on a : } 4h'' + 4h' + h = 0$$

h est solution de (E') .

- c) Résolvons (E')

Equation caractéristique :

$$4r^2 + 4r + 1 = 0$$

$$(2r + 1)^2 = 0$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

On a alors : $h(x) = (ax + b)e^{-\frac{1}{2}x}$

a et b étant des constantes réelles.

d) Ensemble des solutions de (E)

Exercice 6 :

$$(1) : y'' - y' - 6y = -6x - 1$$

1. Déterminons a et b tel que g soit solution de (1)

$$g(x) = ax + b$$

$$g'(x) = a \text{ et } g''(x) = 0$$

$$g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6ax - a - 6b$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} -6a = -6 \\ -a - 6b = -1 \end{cases}$$

$$a = 1 \text{ et } b = 0$$

On a : $g(x) = x$

2. a) Démontrer que f est solution de (1) ssi $f - g$ est solution de l'équation (2) : $y'' - y' - 6y = 0$

• Supposons que f est solution de (1)

$$\text{Alors : } f'' - f' - 6f = -6x - 1.$$

$$\text{Or : } g'' - g' - 6g = -6x - 1$$

$$\text{Donc : } f'' - f' - 6f = g'' - g' - 6g$$

$$(f - g)'' - (f - g)' - 6(f - g) = 0$$

D'où : $f - g$ est solution de (2)

• Supposons que $f - g$ est solution de (2)

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{1}{2}x} + 2xe^{-x}, a \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

e) Solution de (E) présentant un extrémum en $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \quad b = 1 \text{ et } a = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)e^{-\frac{1}{2}x} + 2xe^{-x}$$

Exercice 6 :

$$(1) : y'' - y' - 6y = -6x - 1$$

1. Déterminons a et b tel que g soit solution de (1)

$$g(x) = ax + b$$

$$g'(x) = a \text{ et } g''(x) = 0$$

$$g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6ax - a - 6b$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} -6a = -6 \\ -a - 6b = -1 \end{cases}$$

$$a = 1 \text{ et } b = 0$$

On a : $g(x) = x$

2. a) Démontrer que f est solution de (1) ssi $f - g$ est solution de l'équation (2) : $y'' - y' - 6y = 0$

• Supposons que f est solution de (1)

$$\text{Alors : } f'' - f' - 6f = -6x - 1.$$

$$\text{Or : } g'' - g' - 6g = -6x - 1$$

$$\text{Donc : } f'' - f' - 6f = g'' - g' - 6g$$

$$(f - g)'' - (f - g)' - 6(f - g) = 0$$

D'où : $f - g$ est solution de (2)

• Supposons que $f - g$ est solution de (2)

$$(f - g)'' - (f - g)' - 6(f - g) = 0$$

$$(f'' - f' - 6f) - (g'' - g' - 6g) = 0$$

$$f'' - f' - 6f - (-6x - 1) = 0$$

$$f'' - f' - 6f = -6x - 1$$

D'où : f est solution de (1)

b) Résolvons (2)

Equation caractéristique :

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$\Delta = 25. \text{ Donc : } r = -2 \text{ ou } r = 3$$

$$\text{Alors : } y = f(x) - g(x)$$

$$y = ae^{-2x} + be^{3x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

c) Solution de (1)

$$\text{On a : } f(x) = y + g(x)$$

$$f(x) = ae^{-2x} + be^{3x} + x$$

d) Solution de (1) vérifiant :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ae^{-2} + be^3 = 2 \\ -2ae^{-2x} + 3be^{3x} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ae^{-2} + be^3 = 2 \\ -2ae^{-2x} + 3be^{3x} = 4 \end{cases}$$

$$b = e^{-3} \text{ et } a = 0$$

$$f(x) = e^{3x-3} + x$$

Exercice 8 :

$$(1) : y'' + y = e^x - e^{-x}$$

1. Résolvons : $y'' + y = 0$

$$\text{Equation caractéristique : } r^2 + 1 = 0$$

$$r = i \text{ ou } r = -i$$

Alors :

$$y = a \cos x + b \sin x, \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

2. f est solution de (1) et

$$g(x) = f(x) - m(e^x - e^{-x}) \quad (3)$$

a) Expression de $g''(x)$ en fonction de $f''(x)$ et m

$$g'(x) = f'(x) - m(e^x + e^{-x})$$

$$g''(x) = f''(x) - m(e^x - e^{-x})$$

b) Déterminer m pour que g soit solution de (2)

$$g''(x) + g(x) = (1 - 2m)(e^x - e^{-x})$$

g est solution de (2) si $1 - 2m = 0$.

Donc : $m = \frac{1}{2}$

c) Expression de f

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f(x) = a \cos x + b \sin x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

d) Déterminons h

$$h(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$h'(0) = 1 \Rightarrow b = 0$$

Donc : $h(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Exercice 9 :

Partie A

1. Résolvons (E) : $y' + y = 0$

On a une équation différentielle

d'ordre 1. Donc : $y = ae^{-x}, \quad a \in \mathbb{R}$

2. (E_1) : $y' + y = e^{-x}$

Vérifions que f est solution de (E_1)

$$f(x) = (x + a)e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - (x + a)e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - f(x) \Rightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x}.$$

D'où f est solution de l'équation (E_1)

3. Déterminons a

$$f(0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

Partie B

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

1. Déterminons les limites

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

2. Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = -xe^{-x}$$

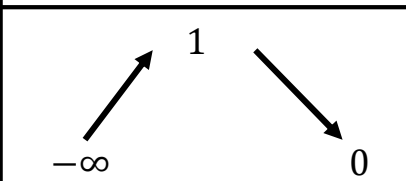
On a :

f est strictement croissante sur

$]-\infty; 0]$ et strictement décroissante

sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

3. Equation de (T) en $x = 1$

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$$

Partie C

$$d(x) = f(x) + \frac{1}{e}(x - 3)$$

1. Déterminons $d''(x)$

$$d'(x) = f'(x) + \frac{1}{e} = -xe^{-x} + \frac{1}{e}$$

$$d''(x) = (x - 1)e^{-x}$$

2. Signe de $d''(x)$

d' admet un minimum nul atteint pour $x = 1$. Donc pour tout x réel, $d'(x) \geq d'(1)$. Donc :

$$d'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Déduisons le signe de $d(x)$

$d'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc d est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lim_{-\infty} d = -\infty \\ \lim_{+\infty} d = +\infty \end{cases}$$

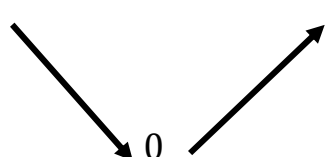
En plus $d(1) = 0$.

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Donc :

$$d''(x) \leq 0 \text{ si } x \in]-\infty; 1]$$

$$d''(x) \geq 0 \text{ si } x \in [1; +\infty[$$

Tableau de variation de d'

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$d''(x)$	—	0	+
$d'(x)$			

$$d(x) \leq 0 \text{ si } x \in]-\infty; 1]$$

$$d(x) \geq 0 \text{ si } x \in [1; +\infty[$$

Interprétation graphique :

(C) est en dessous de (T) sur $]-\infty; 1]$

(C) est au dessus de (T) sur $[1; +\infty[$

4. Représentation graphique



Exercice 10 :

Partie A

$$(1) : g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1}$$

1. Déterminons la solution g_0
 vérifiant (1)

Posons : $g_0(x) = ax + b$. On a
 $g'_0(x) = a$ et

$g'_0(x) - g_0(x) = -ax + a - b$. Par
 identification :

$$a = -1 \text{ et } b = -\frac{1}{e-1}$$

$$\text{Soit : } \boxed{g_0(x) = -x - \frac{1}{e-1}}$$

$$2. h = g - g_0$$

Démontrons que g vérifie (1) ssi h
 vérifie (2)

- Supposons que g (1)

$$\text{On a : } g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1} \text{ or}$$

$$g'_0(x) - g_0(x) = x - \frac{e-2}{e-1}.$$

Il vient alors que :

$$g'(x) - g(x) = g'_0(x) - g_0(x)$$

$$(g - g_0)'(x) - (g - g_0)(x) = 0$$

Donc h est solution de (2).

- Réciproquement supposons que h
 vérifie (2)

$$\text{On a : } h' - h = 0$$

$$(g - g_0)'(x) - (g - g_0)(x) = 0$$

$$g'(x) - g(x) = g'_0(x) - g_0(x)$$

$$g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1}$$

Donc : g est solution de (1)

D'où : g vérifie (1) ssi h vérifie (2)

3. Déterminons les solutions de l'équation (2)

$$(2) : h'(x) - h(x) = 0$$

Equation différentielle du premier ordre sans second membre. **Donc :**

$$h(x) = ae^x, a \in \mathbb{R}$$

Il vient alors d'après la question précédente que :

$$f(x) = ae^x - x - \frac{1}{e-1}, a \in \mathbb{R}.$$

- Déterminons la solution particulière vérifiant (1) qui s'annule en 0

$$g(0) = 0$$

$$a - \frac{1}{e-1} = 0$$

$$a = \frac{1}{e-1}$$

$$\text{Donc : } g(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

Partie B

$$1. f(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

a) Calculons :

$$f(0) = 0; f(1) = 0; f(2) = e - 1$$

b) Sens de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{e-1}e^x - 1.$$

Posons : $f'(x) \geq 0$

$$e^x \geq e - 1$$

$$x \geq \ln(e - 1)$$

Donc :

f est strictement croissante sur

$$[\ln(e - 1) ; +\infty[$$

f est strictement décroissante sur

$$]-\infty; \ln(e - 1)]$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Montrons que la courbe admet une asymptote que l'on précisera :

Remarquons :

$$f(x) - \left(-x - \frac{1}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1}e^x \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e-1}e^x = 0$$

D'où la droite (Δ) d'équation :

$$y = -x - \frac{1}{e-1} \text{ est asymptote}$$

oblique à la courbe (C) en $-\infty$

c) Signe de $f(x)$

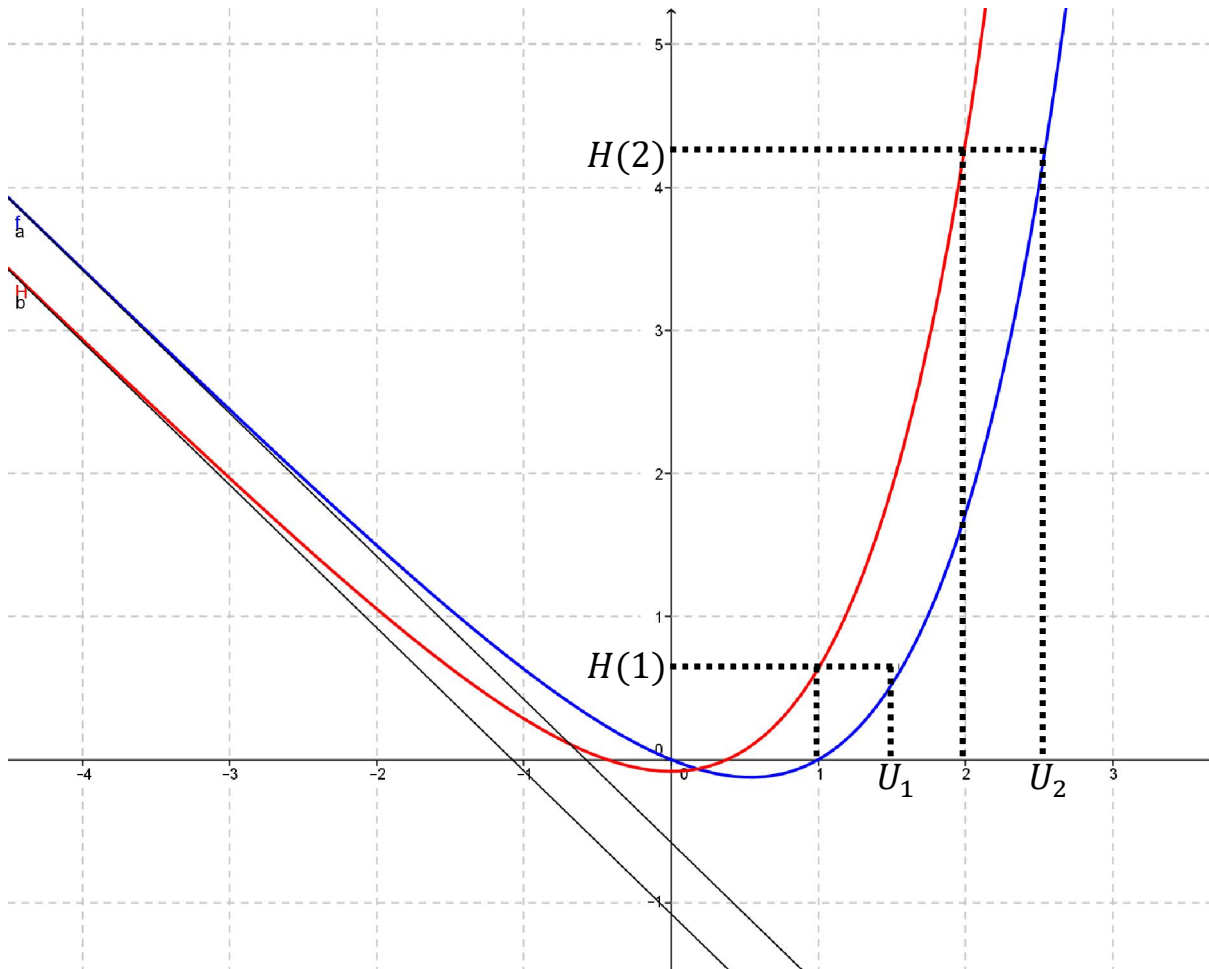
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$\ln(e - 1)$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \text{ sur }]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\\ f(x) &\leq 0 \text{ sur } [0; 1] \end{aligned}$$

d) Représentation graphique
 Courbe représentative



2. $H(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$

a) Sens de variation de H

$D_H = \mathbb{R}$

H est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$H'(x) = e^x - 1$$

$H'(x) \geq 0$ si $x \in [0; +\infty[$.

Donc H est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$H'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; 0]$.

Donc H est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} H = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} H = +\infty \end{cases}$$

- Montrons que (Γ) admet une droite asymptote

Remarquons que :

$$\begin{aligned} H(x) - \left(-x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}\right) &= e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned}$$

D'où la droite d'équation :

$(\Delta') : y = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$ est
asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b) Positions relatives de (C) et (Γ)

$$H(x) - f(x) = -\frac{1}{2} + e^x \cdot \frac{e-2}{e-1}$$

$$\text{Posons : } -\frac{1}{2} + e^x \cdot \frac{e-2}{e-1} = 0$$

$$e^x = \frac{e-1}{2(e-2)}$$

$$x = \ln \frac{e-1}{2(e-2)}$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{e-1}{2(e-2)}$	$+\infty$
$H(x) - f(x)$	$-$	0	$+$

$$\forall x \in \left] -\infty; \ln \frac{e-1}{2(e-2)} \right],$$

$$H(x) \leq f(x)$$

Donc (C) est au dessus de (Γ) sur

$$\left] -\infty; \ln \frac{e-1}{2(e-2)} \right]$$

$$\forall x \in \left[\ln \frac{e-1}{2(e-2)}; +\infty \right],$$

$$H(x) \geq f(x)$$

Donc (C) est en dessous de (Γ) sur

$$\left[\ln \frac{e-1}{2(e-2)}; +\infty \right]$$

c) Représentation graphique de (Γ) .
Voir graphique précédente.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$H'(x)$	$-$	0	$+$
$H(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$	$+\infty$

3. Etablissons que :

$$H(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} f(t) dt &= \int_x^{x+1} \left(\frac{e^t}{e-1} - t - \frac{1}{e-1} \right) dt \\ &= \left[\frac{e^t}{e-1} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{t}{e-1} \right]_x^{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{x+1}}{e-1} - \frac{1}{2} (x+1)^2 - \frac{x+1}{e-1} - \frac{e^x}{e-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} x^2 + \frac{x}{e-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^{x+1}}{e-1} - \frac{e^x}{e-1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (x^2 - (x+1)^2) \\
&\quad - \frac{x+1}{e-1} + \frac{x}{e-1} \\
&= e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } H(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

Interprétation graphique de $H(0)$:

$$H(0) = \int_0^1 f(t) dt$$

$$\forall t \in [0; 1], f(t) \leq 0.$$

Donc : $H(0)$ est l'opposé de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

4. $n \geq 1$

a) Démontrons que :

$$f(n) \leq H(n) \leq f(n+1)$$

$n \geq 1 \Rightarrow [n; n+1] \subset [1; +\infty[$. f est alors croissante sur $[n; n+1]$.

Donc : $n \leq x \leq n+1 \Rightarrow$

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$$

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(n) dx &\leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \\
&\int_n^{n+1} f(n+1) dx
\end{aligned}$$

$$f(n) \times [x]_n^{n+1} \leq H(n) \leq f(n+1) \times [x]_n^{n+1}.$$

$$\text{Or } [x]_n^{n+1} = 1.$$

$$\text{D'où : } \boxed{f(n) \leq H(n) \leq f(n+1)}$$

- Déduisons l'existence d'un unique réel $U_n \in [n; n+1]$ tel que $H(n) = f(U_n)$

f est continue et monotone sur $[n; n+1]$ et $H(n) \in [f(n); f(n+1)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $U_n \in [n; n+1]$ tel que $H(n) = f(U_n)$.

b) Représentons U_1 et U_2
 $H(1) = f(U_1)$ et $H(2) = f(U_2)$.
 On projette $x = 1$ et $x = 2$ sur la courbe (Γ) de H . On obtient sur l'axe (Oy) , $H(1)$ et $H(2)$
 On trace les droites d'équations $y = H(1)$ et $y = H(2)$. Elles coupent la courbe (C) de f dont les abscisses sont respectivement U_1 et U_2 .

$$\text{c) } V_n = U_n - n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- Montrons que (V_n) est bornée

On a :

$$\begin{aligned}
n \leq U_n \leq n+1 &\Rightarrow 0 \leq U_n - n \leq 1 \\
0 &\leq V_n \leq 1
\end{aligned}$$

D'où la suite (V_n) est une suite bornée.

- Etablissement : $\frac{e^{V_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{V_n}{e^n}$
 $H(n) = f(U_n) = f(V_n + n)$
 $e^n - n - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} = \frac{e^{V_n+n}}{e-1} - V_n - n - \frac{1}{e-1}$
 $e^n - n - \frac{1}{2} = \frac{e^{V_n+n}}{e-1} - V_n - n$
 $e^n - n - \frac{1}{2} + V_n + n = \frac{e^{V_n} \times e^n}{e-1}$

En divisant chaque membre de l'égalité par e^n , on a :

$$\frac{e^{V_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{V_n}{e^n}$$

- Déduisons que (V_n) admet une limite que l'on précisera :

On a : $0 \leq V_n \leq 1$

$$\frac{1}{e^n} \leq \frac{e^{V_n}}{e^n} \leq \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^n} \leq 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{e^{V_n}}{e^n} \leq 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^n} \leq \frac{e^{V_n}}{e-1} \leq 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^n} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{1}{e^{n-1}} \right) = 1$$

d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{V_n}}{e-1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = e-1$$

D'où (V_n) tend vers $\ln(e-1)$.

Exercice 11 :

Partie A

h est continue sur $I = [0 ; +\infty[$ et

$\forall x \in I, h(x) \geq 0$. H est une primitive de h sur I telle que

$$H(0) = 0$$

a) Démontrons que $H(x) \geq 0$

H est une primitive de h sur I telle que $H(0) = 0 \Rightarrow H(x) = \int_0^x h(t)dt$

Pour tout réel t strictement positif, $h(t) \geq 0$. Il vient que : $\int_0^x h(t)dt \geq 0$ par une intégration membre à membre. D'où : $H(x) \geq 0$.

b) Démontrons que : $e^x \geq \frac{x^4}{24}$

On a : $\forall x \geq 0, e^x - 1 \geq 0$

$$e^x \geq 1$$

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt$$

$$e^x - 1 \geq x \Rightarrow e^x \geq x + 1$$

En intégrant membre la nouvelle relation, on a :

$$e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

Ensuite une intégration donne:

$$e^x \geq \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

Et une quatrième intégration conduit à :

$$e^x \geq \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

$$\text{Or } \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \geq \frac{x^4}{24}.$$

D'où : pour tout $x \geq 0, e^x \geq \frac{x^4}{24}$

Partie B

$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$$

1. Etudions f

$$Df = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = x(x-2)e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x(x-2)$. Alors :

$$f'(x) \geq 0 \text{ sur }]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[.$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$

$f'(x) \leq 0$ sur $[0; 2]$. Donc f est strictement décroissante sur $[0; 2]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$1 - \frac{4}{e^2}$	1

2. Dédudisons que $f(x) = 0$ admet une solution unique α

On a : $1 - \frac{4}{e^2} > 0$. Donc f ne change pas de signe sur $[0; +\infty[$. Par contre elle est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(]-\infty; 0]) =]-\infty; 1]$ contenant 0. D'où l'équation

3. Représentation graphique

$f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in]-\infty; 0]$.

Valeur approchée de α à 10^{-2} près

$$f(-1) = 1 - e \text{ et } f(0) = 1$$

$$f(-1) \times f(0) < 0 \Rightarrow -1 < \alpha < 0.$$

En utilisant la méthode par balayage, on a : $-0,8 < \alpha < -0,7$. Donc

$$\alpha \approx -0,75$$



4. $\lambda > 0$

a) Montrons que : $\frac{\mathcal{A}(\lambda)}{4} =$

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda (1 - f(x)) dx \times u.a$$

$$= \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où } \frac{\mathcal{A}(\lambda)}{4} = \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$$

b) Montrons que $\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 1$
 lorsque $\lambda \leq 1$

$$0 \leq x \leq \lambda \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq \lambda^2 \\ e^{-\lambda} \leq e^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

Alors : $x^2 e^{-x} \leq \lambda^2$. En intégrant membre à membre cette nouvelle relation, on a : $\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq \lambda^3$. Or $\lambda^3 \leq 1$.

$$\text{D'où : } \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 1$$

• Montrons que : $\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 24 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 24$ pour $\lambda \geq 1$

On a d'après la partie A, $e^x \geq \frac{x^4}{24}$.

$$e^x \geq \frac{x^4}{24} \Leftrightarrow x^2 e^{-x} \leq \frac{24}{x^2}$$

En intégrant cette relation membre à membre, on obtient :

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq \left[-\frac{24}{x} \right]_0^\lambda$$

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 24 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

Or $\lambda \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\lambda} \leq 1$.

D'où

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx \leq 24 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \leq 24$$

- Déduisons qu'on ne peut pas avoir $\mathcal{A}(\lambda) = 125$

Si $0 < \lambda \leq 1, \frac{\mathcal{A}(\lambda)}{4} \leq 1$

$$\mathcal{A}(\lambda) \leq 4 \text{ cm}^2$$

Si $\lambda \geq 1, \frac{\mathcal{A}(\lambda)}{4} \leq 24$

$$\mathcal{A}(\lambda) \leq 96 \text{ cm}^2$$

D'où il n'est pas possible de réaliser $\mathcal{A}(\lambda) = 125$.

Partie C

- Vérifier que $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$
 f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
 $f'(x) = -2xe^{-x} + x^2 e^{-x}$
 $f''(x) = -2e^{-x} + 4xe^{-x} - x^2 e^{-x}$
 On trouve aisément :

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$$

- Déterminons la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant: $F(0) = 0$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$$

$$f'(x) + 2f(x) + F(x) = 2e^{-x} + x + k$$

$$F(x) = -f'(x) - 2f(x) + 2e^{-x} + x + k$$

$$F(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 2 + k$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

Soit :

$$F(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 2$$

- Ecrivons $F(x)$ sous forme d'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^x (1 - t^2 e^{-t}) dt$$

Une double intégration par parties permet d'obtenir le résultat précédent.

Partie D

$$y'' + 2y' + y = -2e^{-x} + 1 \quad (E_1)$$

- Résolvons: $(E_2)y'' + 2y' + y = 0$

On a : $r^2 + 2r + 1 = 0$

$$r = -1$$

Donc :

$$y = (ax + b)e^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

- Soit g solution de (E_2)

- Démontrons que $g + f$ est solution de (E_1)

g solution de $(E_2) \Rightarrow$

$$g'' + 2g' + g = 0$$

Or $f'' + 2f' + f = -2e^{-x} + 1$

Il vient alors que :

$$(f + g)'' + 2(f + g)' + (f + g) = -2e^{-x} + 1$$

D'où $f + g$ est solution de (E_1)

- h est solution de (E_1) .

Démontrons que $h - f$ est solution de (E_2)

h est solution de $(E_1) \Rightarrow$

$$h'' + 2h' + h = -2e^{-x} + 1$$

or $f'' + 2f' + f = -2e^{-x} + 1$. Il

vient alors que :

$$h'' + 2h' + h = f'' + 2f' + f$$

$$(h - f)'' + 2(h - f)' + (h - f) = 0$$

D'où $h - f$ est solution de (E_2) Ensemble des solutions de (E_1) On a $h(x) = g(x) + f(x)$

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + 1 - x^2e^{-x}$$

3. solution φ

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \Rightarrow a = b = -1$$

$$\varphi(x) = 1 - (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

Partie E

$$a \in \mathbb{R}, g_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$$

1. démontrons que toutes les courbes passent par un point fixe.

Posons : $g_a(x) = y$

$$-x^{2e^{-x}}a(x+1)e^{-x} + 1 - y = 0$$

$$\begin{cases} x+1=0 & \Rightarrow x=-1 \\ -x^2e^{-x}+1-y=0 & y=e-1 \end{cases}$$

Toutes les courbes passent par le point $I\left(\frac{1}{e-1}\right)$.2. $a \neq -2$. Montrons l'existence de deux extrêmes

$$\text{On a : } g'_a(x) = x(x-a-2)e^{-x}.$$

La dérivée s'annule en $x=0$ et en $x=a+2$ en changeant de signe.

D'où l'existence de deux extrêmes.

$$3. M_a \begin{pmatrix} a+2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$y = g_a(a+2)$$

$$y = (-a-4)e^{-(a+2)} + 1$$

$$\text{Donc : } (\Gamma) : y = (-x-2)e^{-x} + 1$$

Exercice 13 :1. a) Démontrons que $\forall x \in$

$$\mathbb{R}, f'(x) \neq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$$

Or pour tout x , $1 + [f(x)]^2 > 0$.

$$\text{Donc } [f'(x)]^2 \neq 0.$$

D'où : $f'(x) \neq 0$ b) Calculons $f(0)$

De la relation (1), on écrit :

$$[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 1$$

$$1 - [f(0)]^2 = 1$$

$$f(0) = 0$$

2. Démontrons que $f''(x) = f(x)$

$$\text{On a : } [f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$$

$$([f'(x)]^2 - [f(x)]^2)' = 0$$

$$2f''(x) \times f'(x) - 2f'(x) \times f(x) = 0$$

$$2f'(x)[f''(x) - f(x)] = 0$$

Or $f'(x) \neq 0$.

$$\text{Donc } f''(x) - f(x) = 0$$

D'où : $f''(x) = f(x)$ 3. $u = f' + f$ et $v = f' - f$ a) Calculons $u(0)$ et $v(0)$

$$u(0) = f'(0) + f(0) = 1$$

$$v(0) = f'(0) - f(0) = 1$$

b) Démontrons que $u' =$

$$u \text{ et } v' = -v$$

$$\text{On a : } f''(x) = f(x)$$

$$u(x) = f'(x) + f(x)$$

$$u'(x) = f''(x) + f'(x)$$

$$u'(x) = f(x) + f'(x)$$

D'où : $u'(x) = u(x)$

$$v(x) = f'(x) - f(x)$$

$$v'(x) = f''(x) - f'(x)$$

$$v'(x) = f(x) - f'(x)$$

$$v'(x) = -(f'(x) - f(x))$$

D'où : $v'(x) = -v(x)$ c) Dédisons u et v

$$u' - u = 0.$$

Equation différentielle du premier ordre. Donc : $u(x) = ae^x, a \in \mathbb{R}$
 $u(0) = 1 \Rightarrow a = 1.$

$$\text{Donc : } u(x) = e^x$$

$$v' + v = 0.$$

Equation différentielle du premier ordre. Donc : $v(x) = be^{-x}, b \in \mathbb{R}$
 $v(0) = 1 \Rightarrow b = 1$

$$\text{Donc : } v(x) = e^{-x}$$

d) Dédisons que: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

On a : $\begin{cases} f' + f = u \\ f' - f = v \end{cases}$

$$f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2}$$

Soit : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

4. a) Calcul de limites

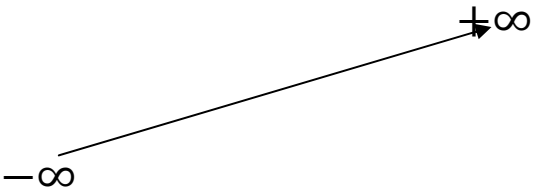
$$\lim_{-\infty} f = -\infty$$

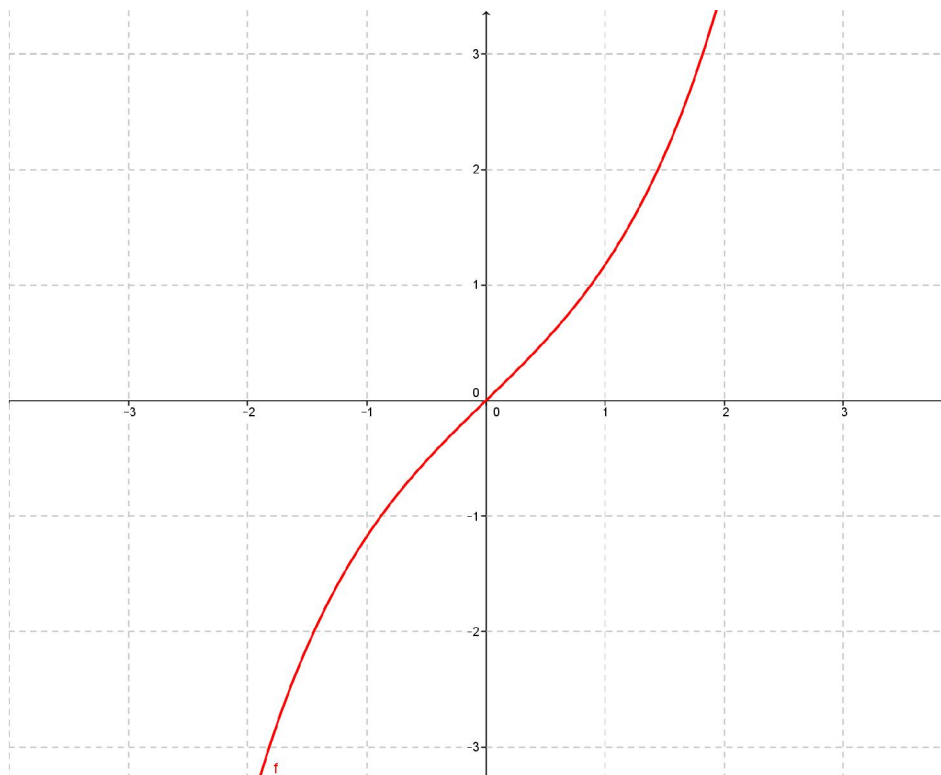
$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

b) Tableau de variation

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

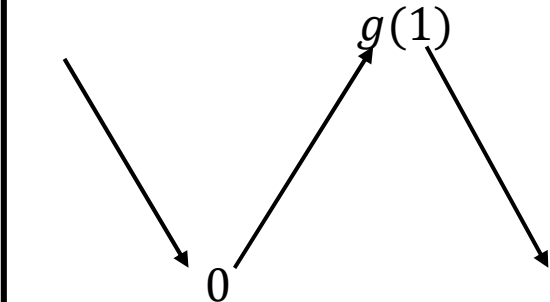


Exercice 14 :

Partie A

1. $(\mathcal{F})$ est la représentation graphique de g' et $(\mathcal{C})$ celle de g .

Tableau de variation :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	1	5	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

2. Le coefficient directeur est
 $a = 1$.

Partie B

$(E) : y' + y = 2(x + 1)e^{-x}$

1. Montrons que f_0 définie par
 $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est solution
de (E)

$$f_0'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}$$

$$f_0'(x) + f_0(x) = 2(x + 1)e^{-x}$$

D'où : f_0 est solution de (E)

2. Résolvons (E')

(E') est une équation de premier
ordre sans second membre.

Donc : $y = ae^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$

3. u est solution de (E') . Montrons
que $f_0 + u$ est solution de (E)
 u solution de $(E') \Leftrightarrow u' + u = 0$.

Or $f_0'(x) + f_0(x) = 2(x + 1)e^{-x}$.
donc :

$$(u' + f_0') + (u + f_0) = 2(x + 1)e^{-x}$$

D'où : $u + f_0$ est solution de (E)

Déduisons pour tout x , $f(x)$

$f(x) = u(x) + f_0(x)$ et $u(x) =$
 ae^{-x} car u est solution de (E) .

Donc :

$$f(x) = (x^2 + 2x + a)e^{-x}$$

4. Déterminons g

g solution de (E) et $g(-1) = 0 \Rightarrow$
 $a = 1$. Soit :

$$g(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

5. Déterminons h solution de (E)
tel que $h'(0) = 0$

$$h'(0) = 0 \Rightarrow a = 2.$$

$$\text{Donc } h(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, préciser la fonction f telle que :

$U_n = f(n)$ puis déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $U_n = n - \frac{1}{n+1}$

c) $U_n = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

b) $U_n = \frac{3n^2-1}{(2n+1)^2}$

Exercice 2 :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 2.

Etudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $V_n = \sum_{p=1}^n U_p$.

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, utiliser les propriétés de comparaison pour étudier les limites de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $U_n = \cos n - n$

c) $U_n = \ln n + (-1)^n$

b) $U_n = n + (-1)^n \cos n$

d) $U_n = (-1)^n - 3^n$

Exercice 4 :

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $U_n = \frac{n^2 \pi}{(n+1)^2}$.

a) Déterminer la limite de cette suite.

b) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $V_n = \cos U_n$

2. Dans chacun des cas suivants, utiliser une méthode analogue pour déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général :

a) $V_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}$

b) $V_n = \ln \left(\frac{1+n}{n^2} \right)$

$$c) V_n = \sqrt{\frac{1}{n - \ln n}}$$

$$d) V_n = e^{\frac{1-n^2}{n}}$$

Exercice 5 :

U est une suite numérique définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, (n \in \mathbb{N}^*)$

1- Quelle est la limite de la suite U ?

2- p est un nombre entier naturel non nul. $S_{1,p}$ est la somme $U_1 + U_2 + \dots + U_p$.

a) Calculer en utilisant la méthode des rectangles d'amplitude 1, un encadrement de l'intégrale :

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{n}} dn.$$

b) En déduire $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{n}} dn < S_{1,4}$.

3- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < S_{1,n}$.

4-

a) On pose $V_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx (n \in \mathbb{N}^*)$. Exprimer V_n en fonction de U_n .

b) Quelle est la limite de la suite V_n ?

c) Quelle est la limite de la suite $S_{1,n}$?

5- (w_n) est la suite numérique définie par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 < w_n$.

$$\mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 < w_n.$$

On établira d'abord la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

b) Déterminer la limite de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $[\pi/3; \pi/2]$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

1- Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[\pi/3; \pi/2]$.

2- On pose pour tout entier naturel non nul :

$$I_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\cos x)^n}{\sin^2 x} dx$$

Et :

$$I_0 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

a) Calculer I_0 et I_1 .

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de l'intervalle $[\pi/3; \pi/2]$ on a :

$$0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

c) Montrer que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{9 \cdot 2^{n-1}}$$

d) En déduire la limite de I_n .

Exercice 7 :

On pose $J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^5 x}$ et pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

1- Montrer que pour tout entier naturel n , I_n existe et est strictement positif.

2- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x élément de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

En déduire la valeur de I_0 .

3- Montrer que (par une intégration par partie) pour tout entier naturel non nul, $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

En déduire le calcul de J .

Exercice 8 :

On considère l'intégrale I_n , $n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$$

1- Calculer I_0 obtenue pour $n = 0$.

2- A l'aide d'une intégration par parties :

a- Calculer I_1 obtenue pour $n = 1$.

b- Donner l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n .

3- Calculer en utilisant les résultats précédents l'intégrale :

$$\int_1^e x[1 + \ln x - (\ln x)^2 + 2 \ln x] dx$$

Exercice 9 :

Soit (U_n) la suite de terme général :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Calculer U_0 et U_1 .

2. Quels sont le sens de variation et la nature de la suite (U_n) ?

3.

a) A l'aide d'une brève étude de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4.

- a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$U_{n+1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

- b) En déduire un nouveau majorant de (U_n) pour tout n non nul, puis la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$$

Exercice 10 :

1. Pour chaque entier naturel n , on

pose :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx$$

- a. Montrer que l'on a ainsi définie une suite (U_n) , dont chaque terme est positif ou nul.

- b. Etudier le sens de variation de la suite (U_n) . En déduire qu'elle converge.

- c. Montrer que $\frac{1}{4x^2 + 2x + 1} \leq \frac{4}{3}$ pour $x \in [0; 1]$. En déduire la limite de la suite (U_n) .

2.

- a) Justifier, pour tout entier naturel n , l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2 + 1} dx.$$

On pose alors

$$U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2 + 1} dx$$

On ne cherchera pas à calculer U_n .

- b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n$ et

$$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

- c) Calculer U_0 . En déduire la valeur U_1 , puis celle de U_2 .

- d) Etudier les variations de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- e) Démontrer que, , pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < U_n < \frac{1}{n+1}$$

- f) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 11 :

On considère la suite (U_n) définie par U_0 et pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1.$$

1. Démontrer que la suite (U_n)

est constante si, et seulement si U_0 prend deux valeurs que l'on précisera.

2. On prend U_0 dans l'intervalle $] -1; 0[$.

- a) Démontrer que pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$. Et que U_n est une suite décroissante.

b) Démontrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}}.$$

c) On pose $k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$. Démontrer

que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < U_{n+1} + 1 < K^n(U_0 + 1).$$

En déduire que la suite (U_n) admet une limite l que l'on précisera.

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie par : $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = 2 + 2\ln x.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[5; 6]$.

2. On considère la suite (U_n)

$$\text{définie par : } \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}.$$

a) Démontre que pour tout entier naturel n , $U_n \in [5; 6]$.

b) Prouver que la suite U_n est croissante.

3. a/ Prouver que pour tout x de l'intervalle $[5; 6]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$.

b/ En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|.$$

c/ Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

d/ Conclure que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

4. a/ Déterminer un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

b/ En déduire alors une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 13 :

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction f et la recherche d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = x$.

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x(1 - x) - 1.$$

Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (Unité : 2cm).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Etudier les variations de f (sens de variations, limites aux bornes de Df et tableau de variation).
 3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) . Préciser la position de (C) rapport à (D) .
 4. Tracer (C) , la droite (D) ainsi que la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
 5. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.
 - a- Montrer que pour tout réel x , $h'(x) < 0$.
 - b- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 2,5]$.
- III. Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de α .
1. Démontrer que si $x \in [2; 2,5]$ on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$.
 En déduire que si $x \in [2; 2,5]$, alors : $-0,5 \leq f'(x) \leq 0$.

2. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$
 - a- Montrer que si $U_n \in [2; 2,5]$, $U_{n+1} \in [2; 2,5]$.
 - b- Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$
 - c- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
 puis que la suite (U_n) converge vers α . En déduire un entier n_0 , tel que pour $n \geq n_0$ on ait : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.
3.
 - a- En utilisant le sens de variation de f sur $[2; 2,5]$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) < 0$. En déduire que α est compris entre U_n et U_{n+1} .
 - b- Donner une valeur de $U_1 ; U_2 ; \dots ; U_{10}$. (A l'aide de la calculatrice). Améliorer la valeur de n_0 trouvée dans le 2.c-.

Exercice 14 :

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie par :
 $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. Pour tout nombre réel strictement positif α , on pose $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.

1. Montrer que f est une fonction à valeurs positives. Quel est le signe de $I(\alpha)$?
2. a/ Déterminer les réels a et b

tels que : pour tout nombre réel x ,
 $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$. En déduire le
calcul de $\int_0^3 \frac{1}{1+e^x} dx$.

b/ Calculer $f + f'$.

c/ Calculer alors $I(\alpha)$.

Partie B :

On considère la fonction numérique
définie pour tout x réel par : $f(x) = \frac{2}{e^{x+2}}$. On désigne par (C) sa courbe
représentative dans le plan muni
d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$
(Unité 5cm.)

A/

- 1- Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes à (C) .
- 2- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3- Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

B/

1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^{x+2}}.$$

2) Calculer $f(x) + g(x)$ et en déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

3) a étant un réel strictement positif, calculer en cm^2 , l'aire $A(a)$ de la partie E du plan définie par :
 $E = \{M(x, y) / 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

4) Déterminer la limite de $A(a)$

quand a tend vers $+\infty$. On pourra vérifier que :

$$a - \ln(e^a + 2) = \ln\left(\frac{e^a}{e^a + 2}\right).$$

C/ Soit h la fonction définie pour tout x réel par : $h(x) = f(x) - x$.

1. Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que ses variations.
2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une racine unique α dans $\mathbb{R}$. Déterminer par le calcul un encadrement de α à 10^{-1} près.

D/

1) En utilisant le sens de variation de f , démontrer que l'image par f de l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 0,6\right]$ est inclus dans $\left[\frac{1}{2}; 0,6\right]$.

2) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : pour tous x de $\mathbb{R}$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

3) On considère la suite définie pour tout entier naturel n par

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_0 = \frac{1}{2}.$$

a. Démontrer que tous les termes de la suite U appartiennent à l'intervalle I .

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

4) Démontrer que pour tout

entier naturel n , on a l'inégalité :

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que la suite U converge et préciser sa limite.

Exercice 15 :

L'objet du problème est de montrer que, pour n très grand, $n!$ est comparable à $\frac{n^{n(\sqrt{n})}}{e^n}$. A cette fin on introduit une suite obtenue en faisant le quotient de ces deux quantités. A l'aide de fonctions étudiées dans les parties 1 et 3 on montre d'abord que cette suite a une limite positive ou nulle (partie 2) puisque cette suite a une limite strictement positive (partie 4).

Soit donc la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{n!e^n}{n^{n(\sqrt{n})}}$.

PARTIE 1 : Etude du signe d'une première fonction auxiliaire

Soit f la fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x - 1) - \ln(x).$$

1. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x dans $]1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x - 1)(x - \frac{1}{2})^2}$$

- Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
- Montrer que la limite de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$, est égale à 0.

- Déterminer le tableau de f sur $]1; +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x dans $]1; +\infty[$.
- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 4cm.)

PARTIE 2 : Etude de la convergence de la suite (U_n)

Soit (V_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $V_n = \ln(U_n)$.

- En remarquant que : $\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n)$, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$V_n - V_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n) \quad (1) \text{ où } f \text{ est la fonction étudiée à la partie 1.}$$

- Etudier le sens de variation de la suite (V_n) , puis le sens de variation de la suite (U_n) .
- Montrer que la suite (U_n) converge vers un nombre réel positif ou nul, noté l .

PARTIE 3 : Etude du signe d'une deuxième fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par :

$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})}$, où f est la fonction à la partie 1.

1. Calculer la dérivée g' de g et vérifier que, pour tout x dans $]2; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

2. Dresser le tableau de variation de g . Calculer la limite de $g(x)$, quand x tend vers $+\infty$ et déduire que, pour tout x dans $]2; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif. (On ne demande pas de tracer la courbe g .)

Exercice 16 :

Partie A

Dans cette partie, on se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété pour tout $x > 0$,
(E): $xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1- Trouver toutes les fonctions polynômes P du 3^{ème} degré telle que, pour tout x réel,

$$xP'(x) - 3P(x) = 0.$$

2- Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

a. Calculer $h(1)$.

b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

c. Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}$.

d. On suppose que f vérifie (E). Montrer que h est définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \int_1^x \frac{3\ln t}{t^4} dt$.

Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

3- Montrer qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

Partie B

I. f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$$

1- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2- Construire dans un repère orthogonal (unité 10cm en abscisse, 5cm en ordonnée) la courbe représentative (C) de f sur $]0; 1]$.

3- Soit λ un réel strictement positif.

a. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_1^\lambda \ln t dt$.

b. En déduire $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t) dt$.

Donner une interprétation graphique du résultat.

c. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$.

1- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$.

Montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b. En déduire les inégalités :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \quad (1).$$

2- Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

a. Déduire des inégalités (1)

l'encadrement :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b. Déduire $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

Exercice 17 :

A. On désigne par g la famille de fonctions sur $[-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = a - xe^{-1-x} \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1- Etudier les variations de g_a .

2- En déduire le signe de g_0, g_1 et

$$g^{-1/2}.$$

B. Soit la famille de la famille de

fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f_a(x) = (x+1)(a + e^{-1-x}) \text{ de la}$$

courbe représentative (C_a) dans le

plan muni d'un repère orthonormal

$(o, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 4cm).

1- Etudier suivant les valeurs de a la

limite de f_a en $+\infty$.

2-

a) Montrer que la droite

$(D_a): y = ax + a$ est asymptote à

(C_a) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de

(C_a) et (D_a) .

3-

a) Calculer $f'_a(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f_0 puis f_1 (utiliser la partie A).

4-

a) Déterminer les tangentes T_0 et T_1 respectives aux courbes (C_0) et (C_1) au point d'abscisse -1 .

b) Tracer $D_0 ; D_1 ; T_0 ; T_1 ; C_0$ et C_1 .

C.

1- Montrer que l'équation

$$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0 \text{ admet une solution}$$

unique solution et que : $-1 \leq \alpha \leq -0,5$.

2- Soit h l'application de $I = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$; démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

3- Etudier les variations de h et montrer que $\forall x \in I, h(x) \in I$.

Montrer que : $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

4- On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n).$$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha|$.

c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$. En déduire

que la suite (U_n) converge et donner sa limite.

d) Trouver le plus petit entier p tel que $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$.

5- Démontrer que :

$f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha}$. Dresser le tableau de variation de $f_{-\frac{1}{2}}$ puis tracer $(C_{-\frac{1}{2}})$.

Proposition de corrigés

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 4 :

1. On donne $U_n = \frac{n^2\pi}{(n+1)^2}$

a) Déterminons la limite de la suite

Soit : $f(x) = \frac{x^2\pi}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2\pi}{x^2} = \pi$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pi$

b) Dédisons la limite de V_n

$V_n = \cos(U_n)$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pi$. Alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \cos\pi = -1$

2. $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique

a) $V_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2}}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$

b) $V_n = \ln\left(\frac{1+n}{n^2}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$

c) $V_n = \sqrt{\frac{1}{n - \ln(n)}}$

Posons $U_n = \frac{1}{n - \ln(n)}$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$. Donc .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

d) $V_n = e^{\frac{1-n^2}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$

Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

Exercice 6 :

$x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

1. Calculons $f'(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) < 0$

2. $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^n}{\sin^2 x} dx$

$I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

a) Calculons I_0 et I_1

$$I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \left[-\frac{\cos x}{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right], 0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^n x \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } \frac{3}{4} \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^n x \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } 1 \leq \frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{4}{3}$$

Le produit membre à membre donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right],$$

$$0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

c) Montrons que $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{9 \times 2^{n-1}}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right], 0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$

$$0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq \frac{2^2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$0 \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} dx \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} [x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{\pi}{2 \times 3} \right)$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{9 \times 2^{n-1}}$$

d) Limite de la suite I_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{9 \times 2^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Exercice 7 :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x} \text{ et } \forall n \in$$

$$\mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

1. Montrons que pour tout n , I_n existe et est positive

La fonction $x \mapsto \cos^{2n+1} x$ est continue et non nulle sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$.

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^{2n+1} x}$ est

continue sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$. D'où l'existence de l'intégrale I_n .

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$$\text{Donc : } \cos^{2n+1} x > 0 ; \frac{1}{\cos^{2n+1} x} > 0$$

$$\text{D'où : } I_n > 0$$

2. Montrons que $\exists a, b$ tels que

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

$$\frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} = \frac{(a - b) \sin x + (a + b) \cos x}{\cos x}$$

Par identification : $\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow$
 $a = b = \frac{1}{2}$

Déduisons I_0

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)}$$

3. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^{2n-1} x} dx \end{aligned}$$

Posons :

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$v(x) = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \Rightarrow v'(x) =$$

$$\frac{(2n-1) \sin x \cos^{2n-2} x}{\cos^{4n-2} x}$$

$$v'(x) = (2n-1) \frac{\sin x}{\cos^{2n} x}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1} x} dx + \\ &+ (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n-1} x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)I_n + \\ &+ (2n-1)I_{n-1} \end{aligned}$$

$$2nI_n = \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + (2n-1)I_{n-1}$$

$$\begin{aligned} 2nI_n &= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)I_{n-1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n}} - (2n-1)I_{n-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}^* \\ &2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}} \end{aligned}}$$

Calculons J

$$J = I_2$$

Pour $n = 1$, on a : $2I_1 = I_0 + \frac{2}{\sqrt{2}}$

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour $n = 2$, on a : $4I_2 = 3I_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}$

$$J = I_2 = \frac{3}{4} I_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J = \frac{3}{8}I_0 + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J = \frac{3}{8}I_0 + \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Exercice 9 :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculons U_0 et U_1

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$= [2\sqrt{1+x}]_0^1$$

$$\boxed{U_0 = 2\sqrt{2} - 2}$$

$$U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx - U_0$$

$$= \left[\frac{2}{3} (x+1)\sqrt{1+x} \right]_0^1 - 2\sqrt{2} + 2$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{2} + 2$$

$$\boxed{U_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3}}$$

2. Sens de variation et nature de la suite (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\forall x \in [0; 1], \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \text{ et } (x-1) \leq 0$$

Il vient :

$$\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x+1}} \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x+1}} dx \leq 0$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

(U_n) est donc une suite décroissante.

$$3. f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

a) Montrons que $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Pour tout x de $[0; 1]$, $f'(x) < 0$. f est donc strictement décroissante sur $[0; 1]$. il vient :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$\boxed{\text{D'où : } \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

b) Déduisons la limite de la suite (U_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0}$$

4. a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$

$$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_0^1 x^n \left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}} \right) dx$$

$$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+1} dx$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$$

$$x^n \leq x^n \sqrt{x+1} \leq x^n \sqrt{2}$$

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{x+1} dx$$

$$\leq \sqrt{2} \int_0^1 x^n dx$$

Or:

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_{n+1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}}$$

b) Dédudons un nouveau majorant de (U_n)

$$\begin{cases} U_{n+1} + U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \\ U_{n+1} - U_n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} U_n + U_{n-1} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \\ U_n - U_{n-1} \leq 0 \end{cases} \text{ pour tout } n > 1$$

$$2U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1}$$

$$U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}$$

$$(U_n) \text{ est majorée par } \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}.$$

Dédudons la limite de nU_n :

$$\text{On a : } U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)}$$

$$nU_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2(n-1)}$$

Et :

$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \Rightarrow \frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq nU_n$$

$$\text{Alors on a : } \frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq nU_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2(n-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{n}{(n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice 10 :

$$1. n \mapsto U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx$$

a) Montrons que $U_n \geq 0$

$$\forall x \in [0; 1], \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^n \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} &\geq 0 \\ \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } U_n \geq 0}$$

b) Sens de variation de (U_n)

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{4x^2 + 2x + 1} dx \end{aligned}$$

$\forall x \in [0 ; 1], \frac{x^n}{4x^2+2x+1}$ et $x - 1 \leq 0$.

Alors : $\frac{x^n(x-1)}{4x^2+2x+1} \leq 0$. Il vient :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

(U_n) est une suite décroissante.

- Déduisons qu'elle converge
On a : $U_n \geq 0$ donc la suite est minorée. En plus elle est décroissante.

D'où (U_n) est une suite convergente.

c) Montrons que $\frac{1}{4x^2+2x+1} \leq \frac{4}{3}$

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$$

$$4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$4x^2 + 2x + 1 \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{4x^2+2x+1} \leq \frac{4}{3}$$

- Déduisons la limite de la suite

$$\frac{1}{4x^2 + 2x + 1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} \leq \frac{4}{3} x^n$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 2x + 1} dx \leq \frac{4}{3} \int_0^1 x^n dx$$

$$U_n \leq \frac{4}{3} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$U_n \leq \frac{4}{3} \times \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \times \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0}$$

2. a) Justifions l'existence de

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$$

La fonction $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}$ est continue sur $[0 ; 1]$. D'où l'existence de l'intégrale.

b) On pose $U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$
montrons que pour tout n , $0 \leq U_n$ et
 $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$
 $\forall x \in [0 ; 1]; \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} \geq 0$.

Donc : $0 \leq U_n$

$$U_{n+1} + U_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+3} + x^{2n+1}}{x^2 + 1} dx$$

$$= 2 \int_0^1 x^{2n+1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= 2 \int_0^1 x^{2n+1} dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \right]_0^1 = \frac{2}{2n+2}$$

D'où : $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

c) Calculons U_0

$$U_0 = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^1$$

$$\boxed{U_0 = \ln 2}$$

$$U_1 = 1 - U_0$$

$$\boxed{U_1 = 1 - \ln 2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} - U_1$$

$$\boxed{U_2 = -\frac{1}{2} + \ln 2}$$

d) Variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = 2 \int_0^1 x^{2n+1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$\forall x \in [0; 1], x^2 - 1 \leq 0 \text{ et } x^{2n+1} \geq 0$$

Donc : $U_{n+1} - U_n \leq 0$

La suite (U_n) est donc une suite décroissante.

e) Démontrons que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

On a : $0 \leq U_n$.

$$\text{De plus : } x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

$$\frac{x^{2n+1}}{x^2 + 1} \leq x^{2n+1}$$

$$2 \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2 + 1} dx \leq 2 \int_0^1 x^{2n+1} dx$$

$$U_n \leq 2 \left[\frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \right]_0^1$$

$$U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D'où (U_n) converge vers 0.

Exercice 11 :

$$\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 \end{cases}$$

1. Démontrons que (U_n) est constante ssi U_0 prend deux valeurs
 (U_n) est constante si :

$$U_{n+1} = U_n = U_0$$

On a alors :

$$U_0 = \frac{U_0 + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} - 1$$

$$U_0 + 1 = \frac{U_0 + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

$$U_0 + 1 - \frac{U_0 + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} = 0$$

$$(U_0 + 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} \right) = 0$$

$$(U_0 + 1) = 0 \text{ ou } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} \right) = 0$$

$$U_0 = -1 \text{ ou } U_0 = 0$$

2. $U_0 \in]-1; 0[$

a) Démontrons que $\forall n, -1 < U_n < 0$
 et démontrons que (U_n) est décroissante

On a : $-1 < U_0 < 0$

Supposons alors que :

$\forall n > 0, -1 < U_n < 0$ et montrons
 que : $-1 < U_{n+1} < 0$

$$-1 < U_n < 0 \Rightarrow 2U_n < 0.$$

Donc :

$$0 < U_n^2 + 2U_n + 1 \leq U_n^2 + 1$$

$$0 < (U_n + 1)^2 \leq U_n^2 + 1$$

$$0 < U_n + 1 \leq \sqrt{U_n^2 + 1}$$

$$0 < \frac{U_{n+1}}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0$$

D'où : $\forall n > 0, -1 < U_n < 0$

• Sens de variation

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_{n+1}}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 - U_n$$

$$= (U_n + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 \right)$$

On a : $-1 < U_n < 0$

$$0 < U_n + 1 < 1 \text{ et } 1 < U_n^2 + 1 < 2$$

$$1 < \sqrt{U_n^2 + 1} < \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 < 0$$

Alors :

$$(U_n + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1 \right) < 0$$

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

b) Démontrons que :

$$0 < U_{n+1} + 1 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1$$

(U_n) est une suite décroissante.

Donc pour tout entier naturel,

$$U_n < U_0 \Rightarrow U_n + 1 < U_0 + 1$$

$$U_n^2 + 1 > U_0^2 + 1$$

$$\sqrt{U_n^2 + 1} > \sqrt{U_0^2 + 1}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

$$0 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

$$0 < U_{n+1} + 1 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

$$\text{c) } k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < U_{n+1} + 1 < k^n (U_0 + 1)$$

$$\text{On a : } 0 < U_{n+1} + 1 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

Alors :

$$0 < U_1 + 1 < \frac{U_0 + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

$$0 < U_2 + 1 < \frac{U_1 + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

.....
.....

$$0 < U_{n+1} + 1 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$$

Le produit membre à membre donne
après simplification

$$0 < U_{n+1} + 1 < (U_0 + 1) \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} \times \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}}_{(n+1) \text{ facteurs}}$$

Posons $k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$. On a alors :

$$0 < U_{n+1} + 1 < (U_0 + 1) \times k^{n+1}$$

$$(U_0 + 1) \times k^{n+1} < (U_0 + 1) \times k^n$$

D'où :

$$0 < U_{n+1} + 1 < k^n (U_0 + 1)$$

Déduisons la limite de (U_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n (U_0 + 1) = 0 \text{ car } k < 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Exercice 12 :

$$f(x) = 2 + 2 \ln x$$

1. Démontrons que l'équation

$f(x) = x$ admet une seule
solution dans $[5 ; 6]$

Posons : $h(x) = f(x) - x$

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$.

h est continue et dérivable sur $[5 ; 6]$

et $h'(x) = f'(x) - 1$

$$h'(x) = \frac{2}{x} - 1$$

Pour tout $x \in [5 ; 6]$, $h'(x) < 0$.
 Donc h est une fonction décroissante sur $[5 ; 6]$.

D'autre part on a : $h(5) = 0,22$
 et $h(6) = -0,42$. $h(5) \times h(6) < 0$.

D'où l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [5 ; 6]$.

2. Soit la suite

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $U_n \in [5 ; 6]$

On a : $U_0 = 5 \Rightarrow U_0 \in [5 ; 6]$
 Supposons que $U_n \in [5 ; 6]$ pour tout $n > 0$ et démontrons que $U_{n+1} \in [5 ; 6]$.

$U_n \in [5 ; 6] \Leftrightarrow 5 \leq U_n \leq 6$
 f étant une fonction croissante, on a :
 $f(5) \leq f(U_n) \leq f(6)$
 $5,22 \leq f(U_n) \leq 5,58$
 $[5,22; 5,58] \subset [5,6]$.
 Donc $U_{n+1} \in [5 ; 6]$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [5 ; 6]$

b) Prouvons que (U_n) est une suite croissante

on a : $U_1 = 2 + 2\ln U_0 = 5,22$.
 Donc $U_1 > U_0$
 supposons que pour tout $n > 1$,
 $U_n > U_{n-1}$. f étant une fonction croissante, $f(U_n) > f(U_{n-1})$.

Donc : $U_{n+1} > U_n$

D'où la suite (U_n) est une suite croissante.

3. a) Prouvons que $\forall x \in [5 ; 6]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$$

$$\text{on a : } f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$\forall x \in [5 ; 6] \Rightarrow \frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{2}{5}$$

D'où : $\forall x \in [5 ; 6]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$

b) Dédudisons que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|$$

$$\forall x \in [5 ; 6], |f'(x)| \leq \frac{2}{5} \text{ et}$$

$\forall \alpha \in [5 ; 6]$. D'après les inégalités des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [5 ; 6],$$

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{5} |x - \alpha|. \text{ Et étant}$$

donné que $U_n \in [5 ; 6]$, on a :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|.$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|$

c) Démontrons que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{On a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|.$$

Alors :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_2 - \alpha|$$

.....

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq$$

$$\left(\underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5}}_{n \text{ facteurs}} \right) |U_0 - \alpha| \text{ et}$$

$$|U_0 - \alpha| \leq 1.$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

d) Dédudons que la suite converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) = 0$$

D'où la suite est convergente et converge vers α .

4. a) Déterminons le plus petit entier p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

$$|U_p - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^p \leq 10^{-3}$$

$$p \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq -3 \ln 10$$

$$p \geq \frac{-3 \ln 10}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$$

$$p \geq 7,54 \Rightarrow p = 8$$

b) Dédudons la valeur approchée de α à 10^{-3} près

$$\alpha \approx U_8 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Exercice 13 :

I/ $g(x) = e^x(1-x) - 1$

Etudions les variations de g et déduisons son signe

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-x}} + \frac{-x}{e^{-x}} \right) - 1$$

$$= -1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \frac{1}{e^{-x}} \rightarrow 0 \\ \frac{-x}{e^{-x}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = -xe^{-x}.$$

Pour tout x , $e^{-x} > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $-x$. Donc :

g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et g strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

$g(0) = 0$ est le maximum de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$$

$$\text{II/ } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

1. Continuité et dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} + 2 \right) \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 3.$$

f est donc continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} + 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe admet en ce point une demi-tangente verticale.

2. Variations de f

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	$+\infty \swarrow \quad \searrow 3 \quad \searrow 2$		

3. Montrons que $(\Delta) : y = -x + 2$ est asymptote à (C)

$$f(x) - y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{-x}} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{e^{-x}}{-x} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

D'où la droite d'équation

f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

Pour tout x non nul, $(e^x - 1)^2 > 0$.

Donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

Donc :

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} + 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

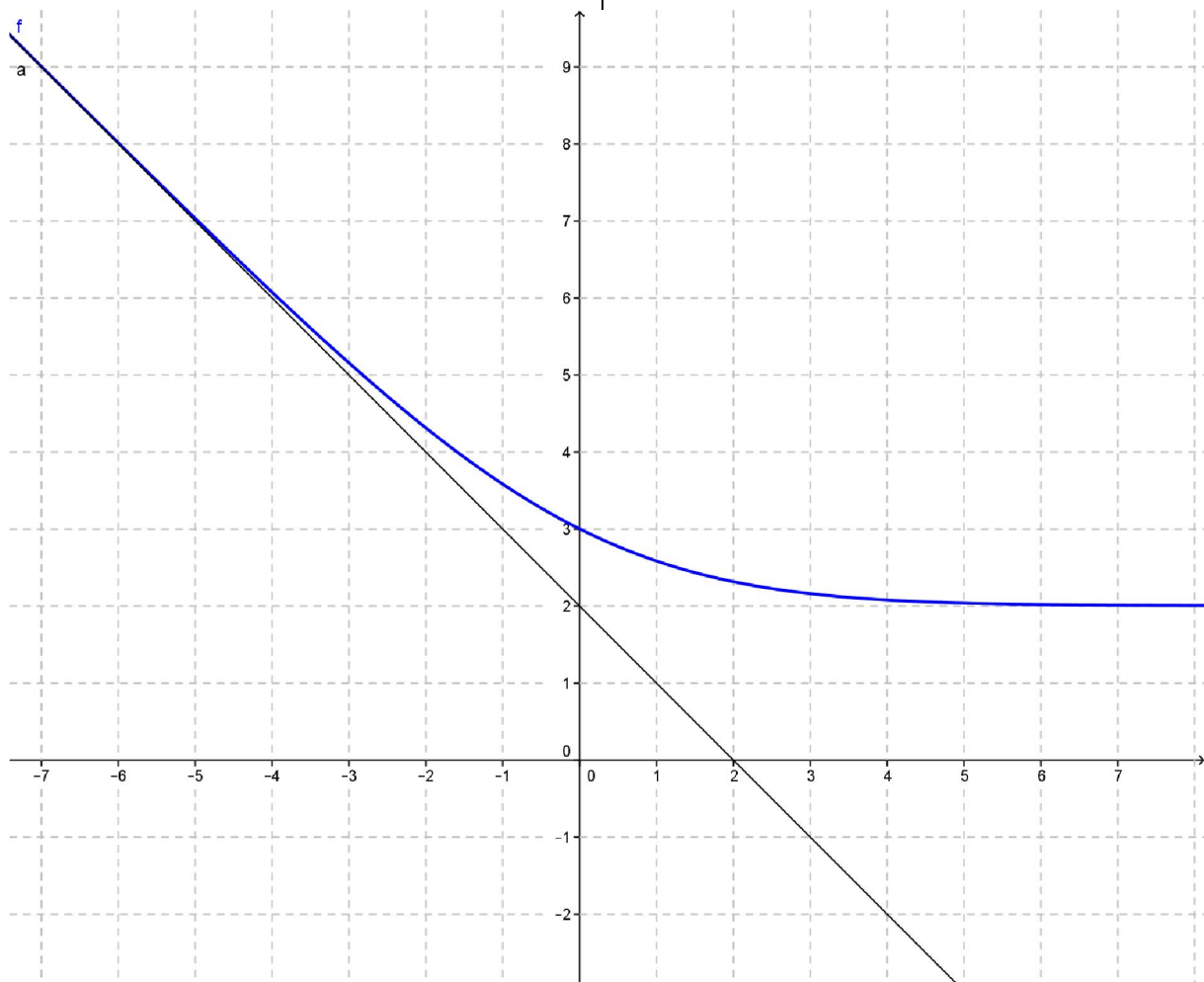
Positions relatives :

Déterminons le signe de $f(x) - y$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^x	—	0	+
$e^x - 1$	—	0	+
$f(x) - y$	+		+

(C) est au dessus de l'asymptote
 (Δ).

4. Représentation graphique de (C)



5. $h(x) = f(x) - x$

a) Montrons que pour tout x ,
 $h'(x) < 0$

On a : $h'(x) = f'(x) - 1$

Or $f'(x) < 0$. D'où $h'(x) < 0$

b) Déduisons que l'équation
 $f(x) = x$ admet une solution unique
 α dans l'intervalle $[2 ; 2,5]$.

On a : $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$
 $h'(x) < 0$. Donc h est continue et
 strictement décroissante sur $[2 ; 2,5]$.
 Et : $h(2) = 0,3$; $h(2,5) = -2,28$
 $h(2) \times h(2,5) < 0$.

**D'où l'équation $f(x) = x$ admet
 une unique solution α dans
 l'intervalle $[2 ; 2,5]$.**

III/

1. Démontrons que si $x \in [2 ; 2,5]$, $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$
 g est décroissante . donc :
 $2 \leq x \leq 2,5 \Rightarrow$

$$g(2,5) \leq g(x) \leq g(2)$$

Or $g(2,5) = -18,27$.

D'où $g(x) \geq -20$

$$2 \leq x \leq 2,5 \Leftrightarrow e^2 \leq e^x \leq e^{2,5}$$

$$(e^x - 1)^2 \geq (e^2 - 1)^2$$

et $(e^2 - 1)^2 = 40,82$

D'où : $(e^x - 1)^2 \geq 40$

Déduisons que si
 $x \in [2 ; 2,5]$, $-0,5 \leq f'(x) \leq 0$
 On a: $f'(x) \leq 0$
 $(e^x - 1)^2 \geq 40 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(e^x - 1)^2} \leq \frac{1}{40}$
 et $0 \leq -g(x) \leq 20$. Il vient :
 $0 \leq \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq \frac{20}{40}$

D'où : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

$$2. (U_n)_{n \in \mathbb{N}}, \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Montrons que si $U_n \in$

$[2 ; 2,5]$ alors $U_{n+1} \in [2 ; 2,5]$
 $U_0 = 2 \Rightarrow U_0 \in [2 ; 2,5]$

Supposons que :

$\forall n > 0, U_n \in [2 ; 2,5]$ et montrons
 que $U_{n+1} \in [2 ; 2,5]$

f est une fonction décroissante.

Donc :

$$2 \leq U_n \leq 2,5 \Rightarrow f(2,5) \leq f(U_n) \leq f(2)$$

$$2,2 \leq U_{n+1} \leq 2,31$$

Donc $U_{n+1} \in [2 ; 2,5]$.

**D'où : si $U_n \in [2 ; 2,5]$
 alors $U_{n+1} \in [2 ; 2,5]$**

b) Montrons que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

On a : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [2 ; 2,5].$$

D'après les inégalités des
 accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|. \text{ Or}$$

$U_n \in [2 ; 2,5]$. Alors :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

c) Montrons que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq$

$$\frac{1}{2} |U_n - \alpha|. \text{ Alors :}$$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_2 - \alpha|$$

.....

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre
 donne après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}} \right) |U_0 - \alpha| \text{ et}$$

$$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

- Montrons que la suite converge

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0. \text{ Donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) = 0.$$

**D'où la suite est convergente
et converge vers α .**

- Dédudons n_0 tel que $\forall n \geq n_0$,

$$|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Il vient : } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$$

$$-(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10$$

$$n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1$$

$$n \geq 8,96 \Rightarrow n_0 = 9$$

- a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) < 0$$

Supposons que :

$$U_n \leq \alpha \Rightarrow f(U_n) \geq f(\alpha)$$

$$U_{n+1} \geq \alpha$$

$$\text{Donc : } U_n - \alpha \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - \alpha \geq 0$$

Supposons alors que :

$$U_n \geq \alpha \Rightarrow f(U_n) \leq f(\alpha)$$

$$U_{n+1} \leq \alpha$$

$$\text{Donc : } U_n - \alpha \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} - \alpha \leq 0$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - \alpha$ et

$U_n - \alpha$ sont de signes contraires.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) < 0$$

b) Valeurs de $U_1, U_2, \dots, U_{10}$

U_1	U_2	U_3	U_4
2,31	2,25	2,26	2,263

U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}
...	...	...	...	...	2,263

$\alpha \approx U_{10} = 2,263$ à 10^{-3} près. Or :

$$|U_{10} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{11}.$$

Soit : $n_0 = 10$

Exercice 14 :

Partie A

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

$$\forall \alpha > 0, I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$$

- Montrons que $f(x) > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0 \text{ et } e^x + 1 > 1$$

$$\ln(e^x + 1) > 0. \text{ Il vient}$$

$$\text{alors : } e^{-x} \ln(1 + e^x) > 0$$

D'où : $f(x) > 0$

$$f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^\alpha f(x) dx > 0$$

D'où : $I(\alpha) > 0$

- a) Détermination de a et b

$$a + \frac{b}{1+e^x} = \frac{ae^x + a+b}{1+e^x}$$

Par identification : **$a = 1$** et

$$a + b = 0. \text{ Donc } \mathbf{b = -1}$$

- Déduisons $\int_0^3 \left(\frac{1}{1+e^x} \right) dx$

$$\int_0^3 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+e^x} \right) dx$$

$$[\ln(e^x + 1)]_0^3 = [x]_0^3 - \int_0^3 \left(\frac{1}{1+e^x} \right) dx$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{1+e^x} \right) dx = 3 - \ln(e^3 + 1) + \ln 2$$

- b) Calculons $f(x) + f'(x)$

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

- c) Calculons $I(\infty)$

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) dx + \int_0^\infty f'(x) dx \\ = \int_0^\infty \frac{1}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(\infty) + [f(x)]_0^\infty &= \\ \infty - \ln(e^\infty + 1) + \ln 2 \\ I(\infty) + e^{-\infty} \ln(e^\infty + 1) - \ln 2 \\ &= 3 - \ln(e^\infty + 1) \\ &\quad + \ln 2 \end{aligned}$$

$$I(\infty) = -e^{-\infty} \ln(e^\infty + 1) - \ln(e^\infty + 1) + \infty + 2\ln 2$$

Partie B

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 2}$$

A/

1. Limites de f aux bornes de Df

$$Df = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \text{car } e^x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{car } e^x + 2 \rightarrow +\infty$$

Les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales à la courbe (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\frac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$$

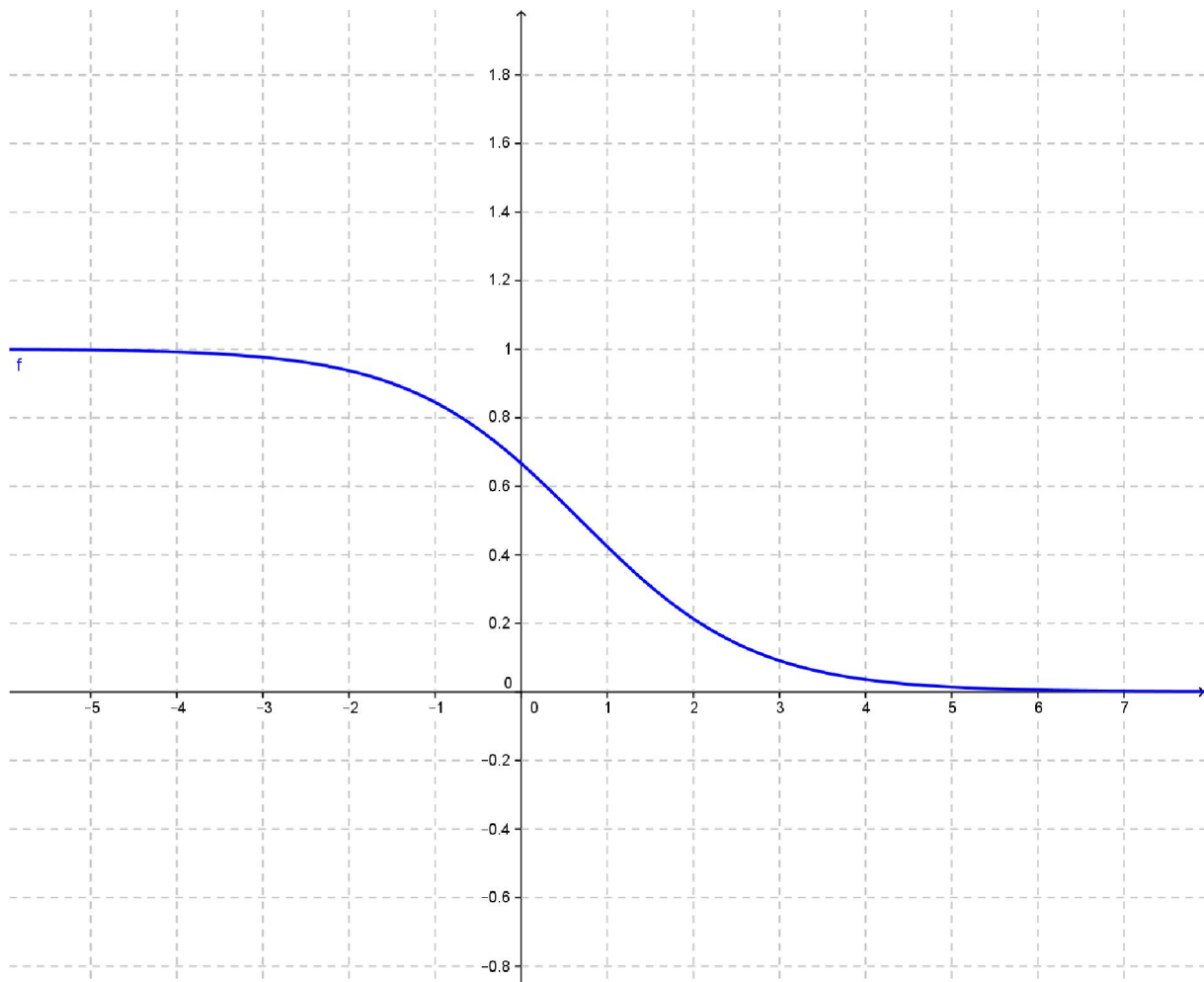
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau des variations :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	—
$f(x)$	

3. Représentation graphique de (C)



B/

1. Primitive sur $\mathbb{R}$ de $g(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$
 g est continue sur $\mathbb{R}$ et est sous la forme $\frac{u'}{u}$. Donc elle admet une primitive G définie par :

$$\boxed{G(x) = \ln(e^x + 2) + k, k \in \mathbb{R}.}$$

2. Calculons $f(x) + g(x)$

$$\boxed{f(x) + g(x) = 1}$$

Déduisons une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) + g(x) = 1$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et une primitive, calculée membre à membre donne :

$$F(x) + G(x) = x + k$$

$$\boxed{F(x) = x - \ln(e^x + 2) + k, k \in \mathbb{R}}$$

3. a) $a > 0$, calculons l'aire $\mathcal{A}(a)$ du domaine défini par :

$$E = \{M(x; y), 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \int_0^a f(x) dx \times u. a \\ &= [F(x)]_0^a \times u. a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= 25(a - \ln(e^a + 2) \\ &\quad + \ln 3), \\ u. a &= 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4. limites de $\mathcal{A}(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 25 \left(\ln \frac{e^a}{e^a + 2} + \ln 3 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 25 \left(\ln \frac{1}{1 + 2e^{-a}} + \ln 3 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = 25 \ln 3 \text{ cm}^2} \text{ car}$$

$$\begin{cases} e^{-a} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{1 + 2e^{-a}} \rightarrow 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$

$$C/ h(x) = f(x) - x$$

1. limites de h aux bornes de Dh

$$Dh = IR$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} f(x) \rightarrow 1 \\ -x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} f(x) \rightarrow 0 \\ -x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Variations de h

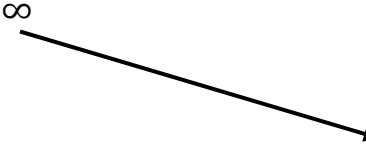
h est dérivable sur IR et

$$\boxed{h'(x) = f'(x) - 1.}$$

$$\forall x \in IR, f'(x) < 0.$$

Donc : $h'(x) < 0$. h est alors une fonction décroissante sur IR .

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$+\infty$  $-\infty$	

2. Déduisons que l'équation

$f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in IR$

h est continue et strictement

décroissante de $]-\infty; +\infty[$ vers

$]-\infty; +\infty[$ contenant 0. Donc

$h(x) = 0$ admet une solution unique

α . Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

D'où l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in IR$

Encadrement de α à 10^{-1} près :

On a : $h(0) = 1$ et $h(1) = -0,58$.

Donc : $0 < \alpha < 1$

Méthode par balayage :

0	0,1	0,2	0,3	0,4
+	+	+	+	+
0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
+	-	-	-	-

$$\boxed{0,5 \leq \alpha \leq 0,6}$$

D/

1. Démontrons que $f(I) \subset I$

Étant une fonction décroissante, alors :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 0,6 \Rightarrow f(0,6) \leq f(x) \leq f(0,5)$$

$$0,52 \leq f(x) \leq 0,55. \text{ Donc } f(x) \in I.$$

D'où : $f(I) \subset I$

2. Démontrons que $\forall x \in$

$$I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 0,6 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e^{\frac{1}{2}} \leq 2e^x \leq 2e^{0,6} \\ \frac{1}{(e^{0,6}+2)^2} \leq \frac{1}{(e^x+2)^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}+2}\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{(e^{0,6}+2)^2} \leq \frac{2e^x}{(e^x+2)^2} \leq \frac{2e^{0,6}}{\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}+2}\right)^2}$$

$$-\frac{2e^{0,6}}{\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}+2}\right)^2} \leq f'(x) \leq -\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{(e^{0,6}+2)^2}$$

$$\text{On a : } -\frac{2e^{\frac{1}{2}}}{(e^{0,6}+2)^2} \leq 0$$

$$-\frac{2e^{0,6}}{\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}+2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \frac{e^{0,6}}{\left(\frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}+1}\right)^2}$$

$$\frac{e^{0,6}}{\left(\frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}+1}\right)^2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{e^{0,6}}{\left(\frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}+1}\right)^2} \geq -\frac{1}{2}$$

Il vient alors que: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

D'où : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

• Déduisons que $\forall x \in$

$$I, |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$$

On a $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha \in I$.

D'après les inégalités des accroissements finis, on écrit :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|.$$

D'où : $\forall x \in I, |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

$$3. \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrons que $U_n \in I$

$$U_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow U_0 \in I$$

Supposons que $U_n \in I, \forall n > 0$ et montrons que $U_{n+1} \in I$

$U_n \in I \Rightarrow f(U_n) \in f(I)$. Or $f(I) \subset I$.

Donc $f(U_n) = U_{n+1} \in I$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

b) Démontrons que, $|U_{n+1}-\alpha| \leq$

$$\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$$

On a: $\forall x \in I, |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

or $U_n \in I$. Donc:

$$|f(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$$

D'où : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

4. Démontrons que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{2^n}$$

On a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

Alors :

$$|U_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0-\alpha|$$

$$|U_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1-\alpha|$$

$$|U_3-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2-\alpha|$$

.....

.....

$$|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1}-\alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}} \right) |U_0 - \alpha|$$

et $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$.

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{2^n}$$

- Montrons que la suite converge

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \times \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) = 0.$$

**D'où la suite est convergente
et converge vers α .**

Exercice 16 :

Partie A

1. Trouvons toutes les fonctions polynômes p telles que :

$$xp'(x) - 3p(x) = 0$$

$$xp'(x) = 3p(x)$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{3}{x} \Rightarrow \ln|p(x)| = 3\ln|x| + k$$

$$|p(x)| = e^k \times e^{3\ln|x|}$$

En posant $a = e^k$ où $a = -e^k$, on a :

$$\boxed{p(x) = a|x|^3, \quad a \in \mathbb{R}}$$

2. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f(1) = 0$. h est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^3 h(x)$

a) Calculons $h(1)$

$$h(1) = f(1) = 0$$

b) Calculons $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$

$$f'(x) = 3x^2 h(x) + x^3 h'(x)$$

$$\boxed{f'(x) = x^2(xh'(x) + 3h(x))}$$

c) Montrons que f vérifie (E) ssi

$$h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}$$

- Supposons que f vérifie (E).

$$\text{Alors : } xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$$

$$x \times x^2(xh'(x) + 3h(x)) -$$

$$3x^3 h(x) = 3\ln x$$

$$x^3(xh'(x) + 3h(x)) = 3\ln x$$

$$x^4 h'(x) = 3\ln x$$

$$\text{D'où } h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}$$

- Réciproquement supposons que

$$h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}$$

$$f(x) = x^3 h(x) \Leftrightarrow h(x) = x^{-3} f(x)$$

$$h'(x) = -3x^{-4} f(x) + x^{-3} f'(x)$$

$$\frac{3\ln x}{x^4} = -\frac{3f(x)}{x^4} + \frac{f'(x)}{x^3} \Rightarrow$$

$$xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$$

D'où f vérifie (E).

f vérifie (E) si et seulement si

$$\boxed{h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}}.$$

d) f vérifie (E)

- Montrons que $\forall x > 0$,

$$h(x) = \int_1^x \frac{3\ln t}{t^4} dt$$

D'après la question précédente, on a :

$$f \text{ vérifie (E)} \Leftrightarrow h'(x) = \frac{3\ln x}{x^4}. \text{ Or}$$

$h(1) = 0$. h est alors la primitive de

$$x \mapsto \frac{3\ln x}{x^4} \text{ et qui s'annule en 1.}$$

D'où : $\forall x > 0, h(x) = \int_1^x \frac{3 \ln t}{t^4} dt$

- Calculons $h(x)$

$$h(x) = \int_1^x \frac{3 \ln t}{t^4} dt$$

Posons :

$$\begin{aligned} u(t) &= 3 \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{3}{t} \\ v'(t) &= \frac{1}{t^4} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{3t^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[-\frac{\ln t}{t^3} \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t^4} \\ &= \left[-\frac{\ln t}{t^3} \right]_1^x + \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_1^x \\ \boxed{h(x) &= -\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Partie B

I/ $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$$

1. Variations de f

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 \rightarrow 0 \\ -\ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{3x} \right)$$

$$\text{car } \begin{cases} \frac{1}{3x} \rightarrow 0 \\ -\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \end{cases}$$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}}$$

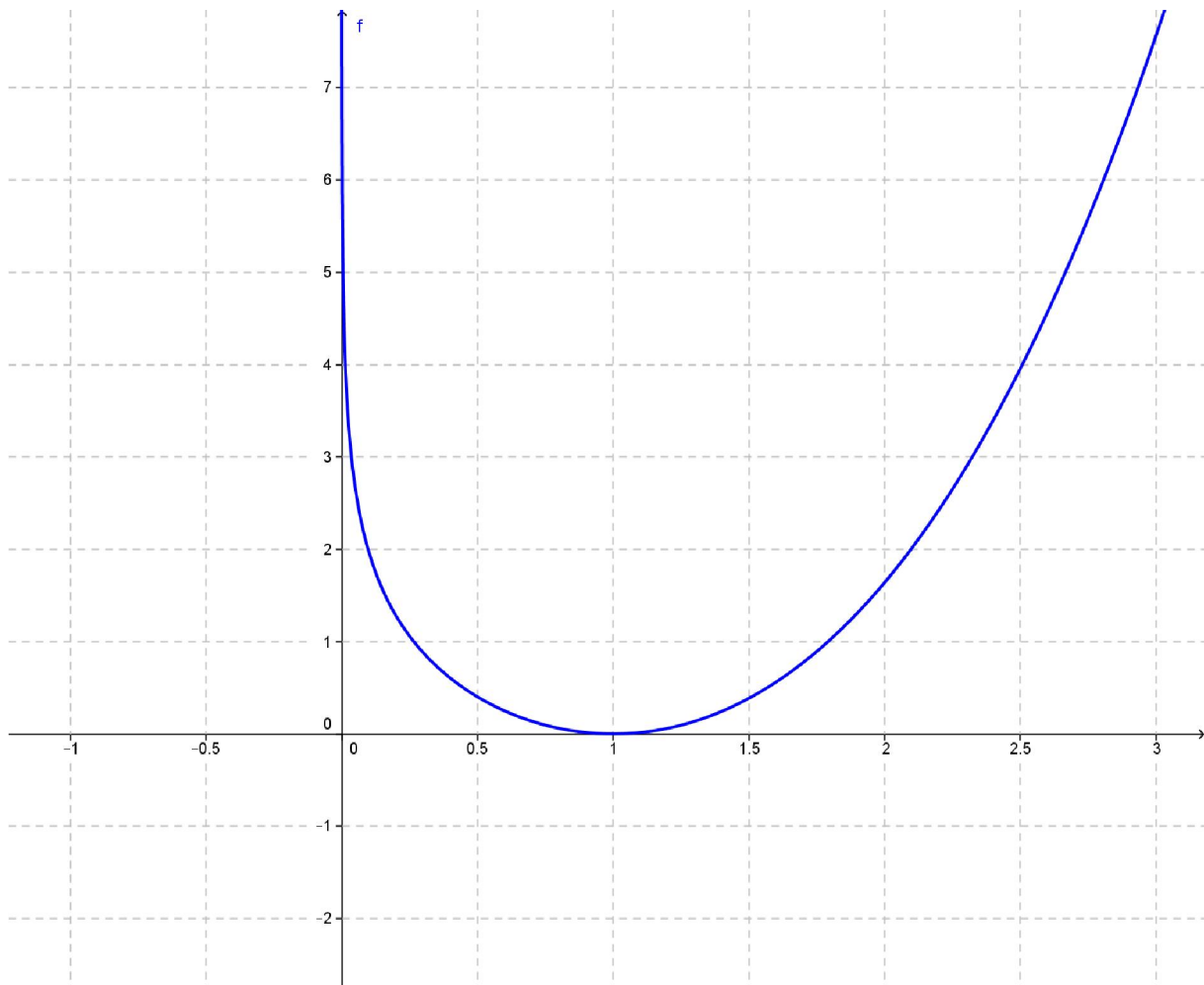
Pour tout $x \in]0 ; +\infty[, x > 0$ et $x^2 + x + 1 > 0$. Donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. Alors :

$\forall x \in]0, 1], f'(x) \leq 0$. f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

$\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) \geq 0$. f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		0	$+\infty$

2. Représentation graphique de (C) de la fonction f



3. $\lambda > 0$

a) Calculons $\int_1^\lambda \ln t \, dt$

Posons :

$$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = 1 \Rightarrow v(t) = t$$

$$\int_1^\lambda \ln t \, dt = [t \ln t]_1^\lambda - \int_1^\lambda dt$$

$$\int_1^\lambda \ln t \, dt = [t \ln t]_1^\lambda - [t]_1^\lambda$$

$$\int_1^\lambda \ln t \, dt = \lambda \ln \lambda - \lambda + 1$$

b) Dédudisons $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{3} t^3 - \ln t - \frac{1}{3} \right) dt$$

$$= \int_1^\lambda \frac{1}{3} t^3 dt - \int_1^\lambda \ln t \, dt - \frac{1}{3} \int_1^\lambda dt$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{12} \lambda^4 + \frac{2}{3} \lambda - \lambda \ln \lambda - \frac{3}{4}$$

Interprétation graphique :

- $\forall x \in]0; 1]$ et $\lambda \in]0; 1]$, $f(x) \geq 0$ et $I(\lambda) \leq 0$

Donc c'est le cinquantième de l'opposé de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

- $\forall x \in [1; +\infty[$ et $\lambda \in [1; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $I(\lambda) \geq 0$

Donc c'est le cinquantième de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

c) Déterminons la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12} \lambda^4 + \frac{2}{3} \lambda - \lambda \ln \lambda - \frac{3}{4} \right)$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = -\frac{3}{4}}$$

II/

1. Soit $n \geq 2$

a) Soit $1 \leq k \leq n-1$.

Montrons que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \\ \frac{2}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1 \end{cases}$$

Il vient alors que :

$$\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n} \right] \subset [0 ; 1] \text{ or } f \text{ est}$$

décroissante sur $[0 ; 1]$. Donc :

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt$$

$$\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \times [x]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \times [x]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } [x]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \\ &\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

b) Dédisons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] &\leq \\ \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt &\leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \right. \\ &\left. f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ Alors:}$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$$

.....
.....

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-2}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

La somme membre à membre donne :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt +$$

$$\dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) +$$

$$f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

En appliquant la relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] &\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \\ &\leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Dédudons des inégalités (1)

$$\text{l'encadrement, } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{On a : } \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = S_n -$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et}$$

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] = S_n -$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \text{ et } \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$\cdot f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = 0$$

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$$

$$\boxed{\text{D'où : } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

b) Dédudons : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \frac{1}{3} \lambda^3 - \ln \lambda - \frac{1}{3}$$

$$\lambda f(\lambda) = \frac{1}{3} \lambda^4 - \lambda \ln \lambda - \frac{1}{3} \lambda$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \lambda^4 - \lambda \ln \lambda - \frac{1}{3} \lambda \right)$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda) = 0}$$

• Prouvons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda)$$

$$= 0$$

D'après le théorème des

gendarmes : $\lim_{n \rightarrow 0} S_n = \frac{3}{4}$

Exercice 17 :

A/ $x \in]-1 ; +\infty[$,

$$g_a(x) = a - xe^{-1-x}, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Variations de g_a

$$\lim_{x \rightarrow -1} g_a(x) = a + 1 \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} -x \rightarrow 1 \\ e^{-1-x} \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{x}{x+1} \times \frac{x}{e^{1+x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = a \quad \text{car} \begin{cases} \frac{x}{x+1} \rightarrow 1 \\ \frac{x}{e^{1+x}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

g_a est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et

$$g'_a(x) = (x-1)e^{-1-x}$$

$\forall x \in]-1 ; +\infty[, e^{-1-x} > 0$. Donc

$g'_a(x)$ a le signe de $x-1$. Alors : Si

$x \in]-1 ; 1]$, $g'_a(x) \leq 0$. Donc la

fonction g_a est strictement

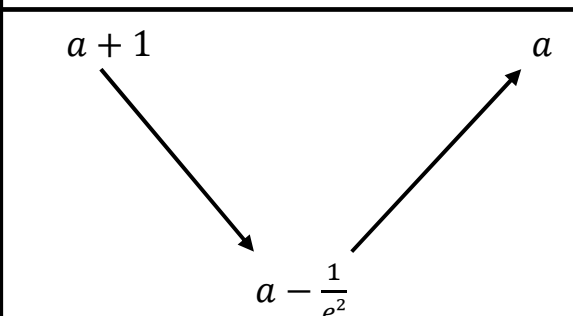
décroissante sur $]-1 ; 1]$. Si

$x \in [1 ; +\infty[$, $g'_a(x) \geq 0$. Donc la

fonction g_a est strictement

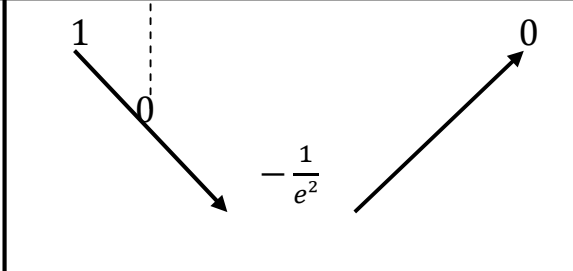
croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	-1	1	$+\infty$
$g'_a(x)$	$-$	0	$+$
$g_a(x)$	$a+1$  $a - \frac{1}{e^2}$ a		

2. Dédudons le signe de g_0 , g_1 et $g_{-\frac{1}{2}}$

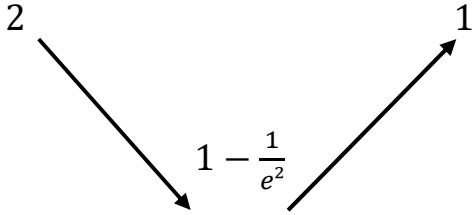
Pour $a = 0$

x	-1	0	1	$+$
$g'_0(x)$	$-$	0	$+$	
$g_0(x)$	1  $-\frac{1}{e^2}$ 0			

$$\forall x \in]-1 ; 0], \quad g_0(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, \quad g_0(x) \leq 0$$

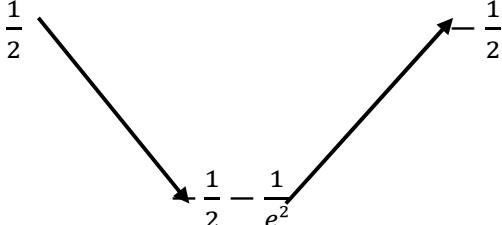
Pour $a = 1$

x	-1	1	$+\infty$
$g'_1(x)$	$-$	0	$+$
$g_1(x)$			

$$1 - \frac{1}{e^2} > 0.$$

Donc : $\forall x \in]-1 ; +\infty[, \quad g_1(x) > 0$

Pour $a = -\frac{1}{2}$

x	-1	1	$+\infty$
$g'_{-\frac{1}{2}}(x)$	$-$	0	$+$
$g_{-\frac{1}{2}}(x)$			

$g_{-\frac{1}{2}}$ s'annule pour une valeur $x_0 \in]-1 ; 1]$. Donc :

$$\text{Si } x \in]-1 ; x_0], \quad g_{-\frac{1}{2}}(x) \geq 0$$

$$\text{Si } x \in [x_0 ; +\infty[, \quad g_{-\frac{1}{2}}(x) \leq 0$$

B/ $x \in [-1 ; +\infty[$,

$$f_a(x) = (x+1)(a + e^{-1-x})$$

1. Limite de f_a en $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [a(x+1) + (x+1)e^{-1-x}]$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-1-x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(x) = -\infty \text{ si } a < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty \text{ si } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$$

2. a) Montrons que

(D_a) : $y = ax + a$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(x) - (ax + a) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + 1)e^{-1-x} = 0$$

D'où la droite (D_a) : $y = ax + a$ est asymptote oblique à la courbe (C) .

b) Position relative de (D_a) et (C_a)

$$f_a(x) - (ax + a) = (x + 1)e^{-1-x}$$

Pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$,

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ e^{-1-x} > 0 \end{cases} \text{ Alors :}$$

$$f_a(x) - (ax + a) \geq 0.$$

(D_a) est en dessous (C_a)

3. a) Calculons $f'_a(x)$

$$f'_a(x) = a - xe^{-1-x} = g_a(x)$$

b) Tableau de variation de f_0 et f_1

x	-1	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	0	-
$f_0(x)$			

x	-1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	
$f_1(x)$		

4. a) Déterminons (T_0) et (T_1)

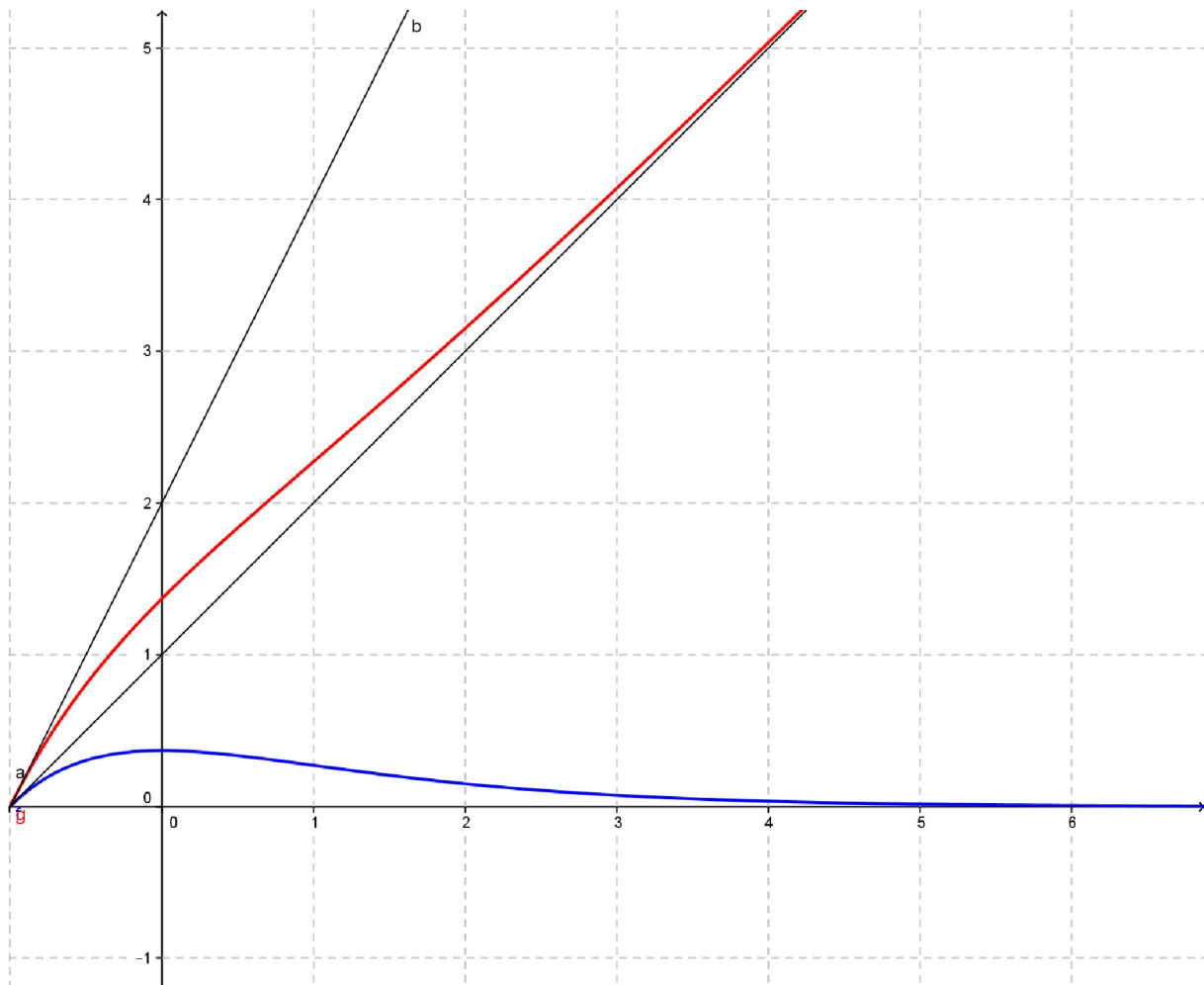
$$(T_0) : y = f'_0(-1)(x + 1) + f_0(-1)$$

$$y = x + 1$$

$$(T_0)' : y = f'_1(-1)(x + 1) + f_1(-1)$$

$$y = 2x + 2$$

b) Représentation graphique



C/

1. Montrons que l'équation $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 \leq \alpha \leq -0,5$

$$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = g_{-\frac{1}{2}}(x)$$

Or $g_{-\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ en changeant de signe. D'où l'équation

$$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha. \text{ D'autre part :}$$

$$f'_{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$f'_{-\frac{1}{2}}(-0,5) = -0,19.$$

$$\text{D'où : } -1 \leq \alpha \leq -0,5$$

$$2. \quad h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x} \text{ sur}$$

$$I = \left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$$

Démontrons que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

$$f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - xe^{-1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}e^{-1-x}$$

$$\Leftrightarrow x = h(x)$$

D'où α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

3. Variations de h

h est dérivable sur I et

$$h'(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}.$$

Pour tout x de I , $h'(x) < 0$. Donc h est strictement décroissante sur I .

- Montrons que $\forall x \in I, h(x) \in I$
 $x \in I \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$h\left(-\frac{1}{2}\right) \leq h(x) \leq h(-1)$ car h est une fonction décroissante. Or $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{e}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{e} > -1$ puis $h(-1) = -\frac{1}{2}$. Alors : $-1 \leq h(x) \leq -\frac{1}{2}$.

D'où : $\forall x \in I, h(x) \in I$

- Montrons que $\forall x \in I,$

$$|h'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$$

On a : $h'(x) = h(x)$ et donc :
 $-\frac{1}{2}\sqrt{e} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2} \leq 0$

D'où : $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$

4. $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

- a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$$U_0 = -1 \Rightarrow U_0 \in I$$

Supposons que $\forall n > 0, U_n \in I$ et montrons que $U_{n+1} \in I$

$\forall x \in I, h(x) \in I$. Donc $U_n \in I \Rightarrow h(U_n) \in I$. Soit $U_{n+1} \in I$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

- b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha|$$

On a $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

Donc d'après les inégalités des accroissements finis, on établit :

$$|h(x) - h(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |x - \alpha|$$

$$U_n \in I. \text{ Alors : } |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha|$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha|$$

- c) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha|$. Alors :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_1 - \alpha|$$

.....

.....

$$|U_{n-1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_{n-2} - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\underbrace{\frac{\sqrt{e}}{2} \times \frac{\sqrt{e}}{2} \times \dots \times \frac{\sqrt{e}}{2}}_{n \text{ facteurs}}\right) |U_0 - \alpha| \text{ or}$$

$$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

- Dédudisons que la suite (U_n) converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = 0. \text{ Donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) = 0.$$

**D'où la suite (U_n) est convergente
et converge vers α**

d) Déterminons la valeur de p

$$|U_p - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^p \times \frac{1}{2} \quad \text{et}$$

$$|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}.$$

Il vient alors :

$$\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^p \times \frac{1}{2} \leq 10^{-2}$$

$$p \geq \frac{\ln(2 \cdot 10^{-2})}{\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)}$$

$$p \geq 20,25$$

On trouve alors : $p = 21$

Problèmes de synthèse

PROBLEME 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm. On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

A/ Soit la fonction g définie sur $]-\infty ; 0]$ par : $g(x) = xe^x - x$

1. Calculer la limite de g en $-\infty$
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty ; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' désignent les dérivées première et seconde de g

(b) Démontrer que la courbe (Cg) de g admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées

(c) Dresser le tableau de variation de g' puis en déduire le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x

B/

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Démontrer que f est continue en 0
3. (a) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique du résultat

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et étudier son signe

4. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$

(b) Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition

5. Soit φ l'application définie par : $\varphi : J \rightarrow f(J) ; x \mapsto \varphi(x) = f(x)$ où $J = [1 ; +\infty[$

(a) Démontrer que φ est une bijection

(b) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ . Montrer que la fonction dérivée $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$

C/ On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $-\infty$
2. Etudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$
3. Construire la courbe (Cf) et les tangentes en 0 dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

4. Soit h la fonction numérique par :
 $h(x) = -f(x)$, et (Ch) sa courbe
 représentative. Construire (Ch)
 dans le même repère que (Cf)
5. Soit : $H(x) = \int_1^x h(t)dt, \forall x \in J$
- (a) Démontrer que la fonction H est
 bien définie et continue sur J

- (b) Calculer $H(e)$. En donner une
 interprétation géométrique
- (c) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la
 région du plan délimitée par
 (Cf) ; (Ch) et les droites
 d'équations $x = 1$ et $x = e$

PROBLEME 2

A- Préliminaire

Démontrer que pour tout x réel, on

a : $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$. En déduire le
 signe de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et celui de
 $(\sqrt{x^2 + 3} - x)$ sur $\mathbb{R}$.

B- On considère la fonction f
 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - |x - 1|$. On
 désigne par (C) sa courbe
 représentative dans le plan muni
 d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a./ Montrer que f est continue en
 $x_0 = 1$.
 - b./ Etudier la dérivabilité de f en
 $x_0 = 1$.
 - c./ Etudier le sens de variation de
 f sur $] -\infty; 1[$ et sur $] 1; +\infty[$. On
 pourra utiliser les résultats de la
 Partie A-
 - d./ Compléter l'étude des variations
 de f .
 - e./ Préciser le comportement de la

courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire
 (C) .

2. Soit g la restriction de f à
 l'intervalle $] -\infty; 1]$.
 - a./ Montrer que g admet une
 application réciproque notée g^{-1} .
 - b./ Définir explicitement g^{-1} .
 - c./ Construire la courbe (T)
 représentative de g^{-1} dans le
 même repère (C) .
 - d./ Déterminer la fonction G
 primitive de g^{-1} et telle que
 $G(0) = 0$.
 - e./ Soit A l'aire du domaine plan
 limité par la courbe (C) l'axe des
 abscisses et les droites d'équations
 $x = -1$ et $x = 1$. Calculer A en
 utilisant la courbe (T) .

C- On désigne par I l'intervalle
 $[1; 2]$. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

1.

- a./ Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .
- b./ Démontrer que pour tout x de I , on a $f(x)$ dans I .
- c./ Démontrer que pour tout x de I , on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- d./ En déduire que pour tout x de I , on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
- 2.

- a./ Démontrer que : $n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.
- b./ Démontrer que : $n \in \mathbb{N}$,
 $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
- c./ Etablir que : $n \in \mathbb{N}$,
 $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$
- d./ Déduire de 2.c./ que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME 3

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$
 (C) est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f
 - b) Etudier le signe de f'' . Etablir le tableau de variation de f' et préciser la limite de f' en $+\infty$. (on ne demande pas de construire f').
 - c) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,79 < \alpha < 0,80$.
 - d) Etablir le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β .
 Vérifier que $\frac{3}{2} < \beta < 2$
3. Construire la courbe représentative (C) de f .

4. a) Soit u un réel positif. A l'aide d'une intégration ar partie, calculer $\int_0^u xe^x dx$.
 En déduire en fonction de u l'intégrale $I_u = \int_0^u f(x) dx$.
- b) Utiliser $f(\beta) = 0$ pour donner une expression de I_β en fonction de β ne contenant pas e^β
- c) Quelle est l'interprétation géométrique de I_β

Partie B

On se propose de donner une valeur approchée de β solution de l'équation $f(x) = 0$. On considère la fonction h définie sur l'intervalle

$\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par $h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$.

1. a) Montrer que β est solution de l'équation $h(x) = x$
- b) Etudier les variations de h et en déduire que $h\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

c) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$,
 $|h'(x)| \leq \frac{1}{10}$.

En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$,
 $|h(x) - \beta| \leq \frac{1}{10} |x - \beta|$

2. (U_n) avec $n \in \mathbb{N}$ est la suite
numérique définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in$
 $\left[\frac{3}{2} ; 2\right]$

b) En déduire $\forall n \in$
 $\mathbb{N}, |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{10} |U_n - \beta|$ puis
que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \frac{1}{2 \times 10^n}$

c) Déterminer le plus petit entier
naturel n tel que $\frac{1}{2 \times 10^n} \leq 10^{-4}$

PROBLEME 4

On considère la fonction numérique
définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} & \text{si } x \in]-\infty ; 1[\\ \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2) & \text{si } x \in [1 ; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe
représentative d'unité graphique
2cm.

Partie A

2. a) Soit $X = \frac{2}{(x-1)}$

Prouver l'égalité :

$$\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} X^2 e^X$$

En déduire alors l'étude de la
continuité et la dérivabilité de f en
1.

b) Déterminer les limites de f aux
bornes de son ensemble de définition
et étudier les branches infinies de
 (C) .

3. a) Montrer que f est dérivable sur
 $] -\infty ; 1[$ et sur $] 1 ; +\infty[$, puis
calculer $f'(x)$.

b) Etudier les variations de la
fonction u définie sur $[1 ; +\infty[$ par
 $u(x) = \ln x + x - 3$ puis montrer
que l'équation $u(x) = 0$ possède
une solution unique α dans
 $[1 ; +\infty[$ et vérifie

$$2,20 < \alpha < 2,21.$$

4. a) Etudier les variations de f sur
 $\mathbb{R}$

b) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En
déduire un encadrement de $f(\alpha)$
d'amplitude 2×10^{-2} .

5. a) Etudier le signe de $f(x)$

b) Tracer la courbe (C)
représentative de f .

Partie B

Soit F la primitive de f sur

$[1 ; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle (Γ) la courbe

représentative de F dans le repère précédent.

1. a) Sans calculer $F(x)$, étudier le sens de variation de F sur $[1 ; +\infty[$

b) Que peut – on dire des tangentes à la courbe au point d'abscisse 1 et e^2 ?

2. a) x étant un réel supérieur ou égal 1.

Calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t \, dt$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x .

3. a) Montrer que pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x} \right) + 3$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de F

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère précédent.

4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

PROBLEME 5 : BAC 2019

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR

2. On considère l'équation différentielle $(E') ; 2y' - y = (1 - x)e^{\frac{x}{2}}$

(a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (mx + p)e^{\frac{x}{2}}$ soit solution de (E')

(b) Soit g une fonction définie et dérivable sur IR

(b1) Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E)

(b2) Résoudre l'équation (E')

3. Déterminer la solution g_0 de (E') dont la courbe représentative passe par le point $A(1; 0)$

Partie B

Soit la fonction h définie sur IR

par : $h(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$. On

désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Etudier la dérivabilité de h sur IR , et déterminer la fonction dérivée h' de h

3. Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ et par (Γ) sa courbe représentative .
- Etudier la position relative de (C) et (Γ) dans le repère précédent
 - Construire les courbes (C) et (Γ) dans le même repère
5. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction :
- $$H : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$$
- soit une primitive de h sur $\mathbb{R}$
- Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C) , (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$

Partie C

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt$$

- Interpréter géométriquement U_0
- (a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,
 $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$
 (b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n)
- La suite (U_n) est-elle convergente ?

PROBLEME 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm. On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x+e) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A :

- (a) Montrer que l'ensemble de définition de f sur $\mathbb{R}$
 (b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- (a) Etudier la continuité de f en 0
 (b) Démontrer que :

$$- \forall x \in]-\infty; 0[; \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$- \forall x \in]0; +\infty[; \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x}$$

- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat
- (a) Etudier les variations de f
 (b) Etudier les branches infinies de la courbe (C) représentative de f
 (c) Tracer la courbe (C)
- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2e$

Partie B

Soit k la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par :

$$k(x) = \int_{-1}^x \left(e^{\frac{t+1}{t}} - t + 1 \right) dt$$

1. Montrer k est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et calculer $k'(x)$. En déduire le sens de variation k
2. Calculer la valeur approchée de $k(-2)$ par la méthode des rectangles (on divisera

l'intervalle $[-2; -1]$ en 4 intervalles de même amplitude)

Partie C

1. Montrer que la restriction F de f sur $]0; +\infty[$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera
2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation : $\ln(x + e) = 2$
3. Montrer que F^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(F^{-1})'(2)$

PROBLEME 7 :

Partie A

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et en $+\infty$
2. (a) Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
 (b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe
 (c) En déduire les variations de φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$
3. (a) Prouver la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β . On prendra : $\alpha < \beta$
 (b) Etudier alors le signe de φ sur $\mathbb{R}$
4. A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} près de α et β

5. Montrer que : $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

Partie B : Etude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul d'aire

1. Montrer que : $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
3. Calculer $f'(x)$ puis à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$
5. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près de l'intégrale : $\int_0^1 f(x) dx$

Partie C : Etude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition

Dg de la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que $g(I) \subset I$, où $I = [-2; 0]$

2. (a) Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

- Montrer que U_1 appartient à l'intervalle I
- Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$
- Prouver que la suite (U_n) est croissante
- (b) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = g(V_n) \end{cases}$
- Calculer V_1
- Montrer que $-2 \leq U_1 \leq V_1 \leq V_0 \leq 0$
- Etablir par récurrence, à l'aide de la croissance de g sur I , que pour tout entier naturel n non nul, on a : $-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$

- Préciser le sens de variation de (V_n)
- 3. (a) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $h(x) = x - \ln(1+x)$
- Montrer que h est croissante et calculer $h(0)$
- En déduire que, pour tout nombre réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$
- (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n ,

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}\right).$$

(c) En déduire que :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

- (d) Sachant que pour tout entier naturel n , les termes de la suite (V_n) appartiennent à l'intervalle I , donner un encadrement de $\frac{1}{2 - V_n}$.
- (e) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

4. Prouver alors que pour tout entier naturel n ;

$$V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n} (V_0 - U_0)$$

5. Que peut-on en déduire pour la suite de terme générale $V_n - U_n$ et pour les suites (U_n) et (V_n) ?

PROBLEME 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A

1. Etudier la parité de f . Que peut – on conclure pour la courbe (Γ) ?
2. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $e^{-x} \leq e^x$
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(b) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$

4. On considère la fonction g et la fonction h définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$. Les courbes représentatives de g et h sont notées (C_1) et (C_2)

(a) Démontrer que pour tout réel x positif ou nul,

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

(b) Que peut – on en déduire pour les courbes (Γ) ; (C_1) et (C_2)

Partie B

Soit (I_n) la suite définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Prof : TEKPOLO Crédo
 tekpolocredo@yahoo.fr

1. Justifier l'existence de (I_n) et donner une interprétation géométrique de (I_n)

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

(b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante

(c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et préciser sa limite

Partie C

Soit (J_n) la suite définie par :

$$J_n = \int_0^n f(x)dx$$

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A.4.(a), démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire qu'elle converge

3. On note L la limite de la suite (J_n) donner un encadrement de L

4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$. On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$

- (a) Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$

- (b) Démontrer que pour tout réel x , f est la dérivée de $x \mapsto v(e^x)$
(c) En déduire la valeur exacte de L

PROBLEME 9 :

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$
- Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\varphi(0) = \frac{e}{2}$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1 + e^{-3x}}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
- Tracer la courbe (C)
- Pour tout réel α non nul, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$$

- Donner le signe et une interprétation de graphique de $I(\alpha)$ en fonction de α
- Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α
- Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$

Partie C

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (U_n) par :

$$U_n = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$$

Où f est la fonction définie dans la partie B. on ne cherchera pas à calculer U_n

- (a) Donner pour tout entier naturel non nul, le signe de U_n
(b) Donner le sens de variation de (U_n)

- (c) La suite (U_n) est-elle convergente ?
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul,

$I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} \times I_1$ où I_1 est l'intégrale de la partie B obtenue pour α égal à 1.

(b) En déduire la limite de la suite (U_n) . Donner sa valeur exacte

PROBLEME 10 :

Partie A

- Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
- Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$
 - déterminer a et b pour que u soit solution l'équation :
 $(1): u'(x) - 2u(x) = xe^x$
 - Montrer que v est solution de l'équation si et seulement si $u + v$ est solution de (1)
 - En déduire l'ensemble des solutions de (1)
 - Déterminer le solution de l'équation (1) qui s'annule en 0

Partie B

Soit la fonction g définie par
 $g(x) = 2e^x - x - 2$

- Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation

- On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles
 - Vérifier que 0 est l'une de ces solutions
 - L'autre solution est notée α .
 Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$
- Etudier le sens de variation de f
- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie B. en déduire un encadrement de $f(\alpha)$
- Etablir le tableau de variation de f

6. Tracer (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2cm

Partie D

1. Soit m un réel négatif. Interpréter géométriquement en le justifiant l'intégrale :

$$\int_m^0 f(x)dx$$

3. (a) Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par partie

- (b) En déduire :

$$\int_m^0 f(x)dx$$

- (c) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$ lorsque m tend vers $-\infty$

Proposition de corrigés

PROBLEME 1

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

A/g est définie sur $] -\infty ; 0]$ par : $g(x) = xe^x - x$

1. Calculons la limite de g $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} xe^x \rightarrow 0 \\ -x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

2. (a) Calculons $g'(x)$ et $g''(x)$

g est deux fois dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et :

$$g'(x) = e^x + xe^x - 1$$

$$g'(x) = (x + 1)e^x - 1$$

D'autre part : $g''(x) = e^x + (x + 1)e^x$

$$g''(x) = (x + 2)e^x$$

(b) Coordonnées du points d'inflexion I

On pose : $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Et

$$\text{puis } g(-2) = -2e^{-2} + 2$$

$$g(-2) = 2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Donc le point d'inflexion est le point

$$I\left(-2, 2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\right)$$

(c) Tableau de variation de g'

$$\text{On a : } g''(x) = (x + 2)e^x$$

Pour tout réel x de l'intervalle

$] -\infty ; 0]$, $e^x > 0$. $g''(x)$ a le signe de $(x + 2)$

x	$-\infty$	-2	0
$g''(x)$	$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty ; -2[$, $g''(x) < 0$. g' est strictement décroissante sur $] -\infty ; -2[$
 $\forall x \in]-2 ; 0]$, $g''(x) > 0$. g' est strictement croissante sur $] -2 ; 0]$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	0
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	-1	$-\frac{1}{e^2} - 1$	0

B/

1. Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D_f =]-\infty ; 0] \cup]0 ; +\infty[= \mathbb{R}$$

2. Démontrons que f est continue en 0

On a : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x(-1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x + 2x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} -2x \rightarrow 0 \\ x \ln x \rightarrow 0 \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.
Donc f est continue en 0

3. (a) Dérivabilité de f en 0

- Si $x \in]-\infty; 0]$, $f(x) = xe^x - x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

f est dérivable à gauche en 0.

- Si $x \in]0; +\infty[$, $f(x) =$

$$2x(-1 + \ln x)$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2(-1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(-1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

Conclusion :
 f n'est pas dérivable
en 0

Interprétation graphique du résultat :

La courbe (C) de f admet à gauche en 0 une demi-tangente horizontale d'équation $y = 0$ et à droite en 0 une demi-tangente verticale dirigée vers les bas

(b) Calcul de $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = 2(-1 + \ln x) + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2\ln x$$

Signe de $f'(x)$ et sens de variation:

$\forall x \in]0; 1], f'(x) \leq 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0; 1[$

$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) \geq 0$. Donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

4. (a) Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(-1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} 2x \rightarrow +\infty \\ -1 + \ln x \rightarrow \infty \end{cases}$$

(b) Tableau de variation de f

g est une restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$ et $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0]$ d'après le sens de variation de g' . Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$ -2	$\nearrow$	$+\infty$

5. $\varphi : J \rightarrow f(J)$; $x \mapsto \varphi(x) = f(x)$ où $J = [1; +\infty[$

(a) Démontrer que φ est une bijection

φ est la restriction de f sur J . Or f est strictement croissante sur J . Donc φ est strictement monotone sur J . D'où φ réalise une bijection de $J = [1; +\infty[$ vers $f(J) = [-2; +\infty[$

(b) Montrons que $(\varphi^{-1})'$ est positive sur $f(J) - \{-2\}$

On a : $\varphi'(1) = 0$. Donc φ^{-1} est dérivable sur $f(J) - \{-2\}$ et :

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$\forall x \in J - \{1\}, f'(x) > 0$. Donc

$$f'(f^{-1}(x)) > 0.$$

D'où : $(\varphi^{-1})'(x) > 0$ sur $f(J) - \{-2\}$
C/

1. Justifions que la droite $(\Delta) : y = -x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$$f(x) - (-x) = xe^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

D'où la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

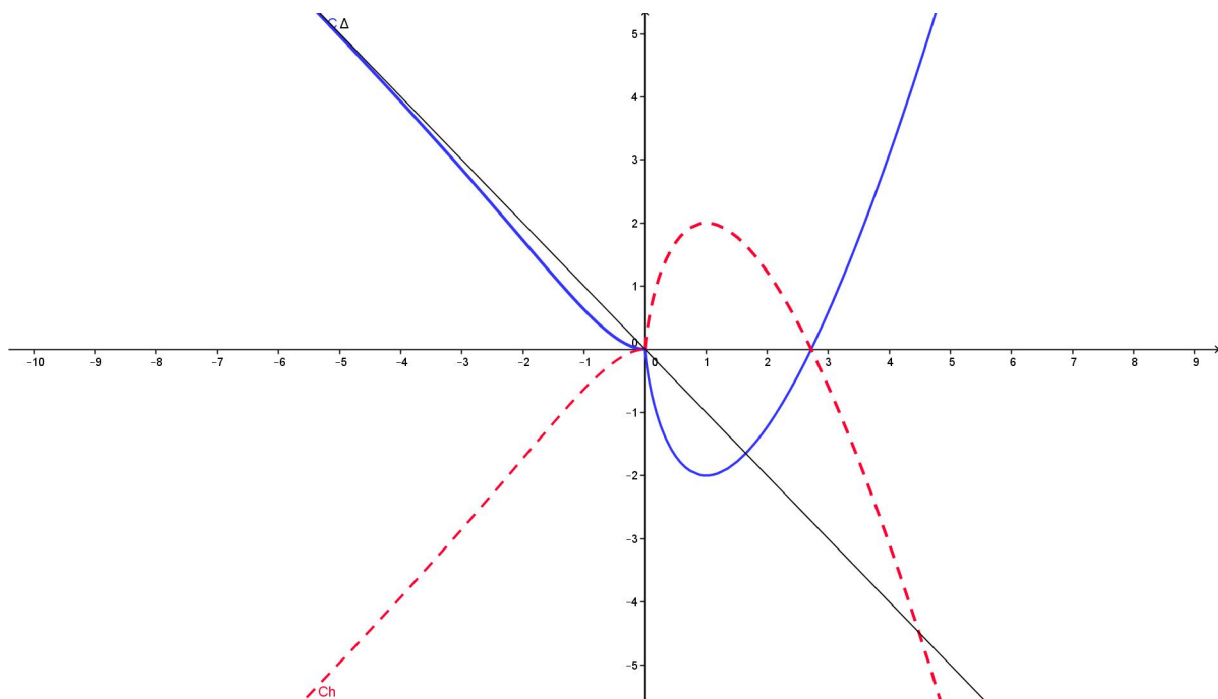
2. Branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = 2(-1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(-1 + \ln x) = +\infty$$

(C) admet une branche parabolique de direction (Oy)

3. Représentation graphique



4. $h(x) = -f(x)$. Construction de (Ch) voir figure

5. $H(x) = \int_1^x h(t)dt$

(a) Démontrons que H est bien définie et continue

$[1; x] \subset [1; +\infty[$ et h est continue et dérivable sur J . Donc H est bien définie et continue sur J

(b) Calculons $H(e)$

$$H(e) = \int_1^e h(t)dt$$

$$H(e) = \int_1^e -2t(-1 + \ln t)dt$$

Posons :

$$u' = -2t \Rightarrow u = -t^2$$

$$v = -1 + \ln t \Rightarrow v' = \frac{1}{t}$$

$$H(e) = [-t^2(-1 + \ln t)]_1^e - \int_1^e -tdt$$

$$H(e) = -1 + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^e$$

$$H(e) = -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$H(e) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$H(e)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe (Ch) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

(c) Calculons en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int_1^e (-f(x) + h(x))dx \times u.a$$

$$\mathcal{A} = \int_1^e (2h(x))dx \times u.a$$

$$\mathcal{A} = 2H(e) \times u.a$$

$$\mathcal{A} = 2(e^2 - 1)cm^2$$

PROBLEME 2

A/ Démontrons que pour tout réel x ,
 $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$

Pour tout nombre réel x on a : $x^2 + 3 > x^2$
 $\sqrt{x^2 + 3} > \sqrt{x^2}$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$

B/ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - |x - 1|$

1. (a) Montrons que f est continue en $x_0 = 1$

$$\text{On a : } f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 3} - |x - 1|) = 2.$$

On conclut que f est continue en 1

(b) Dérivabilité de f en 1

• $\forall x \in]-\infty; 1[$, on :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (-x + 1) - 2}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \frac{(x^2 + 3) - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

- $\forall x \in]1; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 + \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 + \frac{(x^2 + 3) - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 + \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-1 + \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

f est n'est pas dérivable en -1 .

(c) Etudions le sens de variation de f

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + x - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x + 1 & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

- f est dérivable sur $]-\infty; 1[$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 3} > |x|$. Donc sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ on a :

$$\sqrt{x^2 + 3} > -x. \text{ Soit } \sqrt{x^2 + 3} + x > 0.$$

D'autre part sur l'intervalle $[0; 1[$

$$\sqrt{x^2 + 3} + x > 0.$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$

- f est dérivable sur $]1; +\infty[$

$$f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 3} > |x|$. Donc pour tout réel de l'intervalle $]1; +\infty[$ on a :

$$\sqrt{x^2 + 3} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} - x > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

(d) Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 3) - (x - 1)^2}{(\sqrt{x^2 + 3} - x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2}{(\sqrt{x^2 + 3} - x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x + 1\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3) - (-x + 1)^2}{(\sqrt{x^2 + 3} + x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{(\sqrt{x^2 + 3} + x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	-1	2	1

(e) Comportement de (C) au point d'abscisse 1

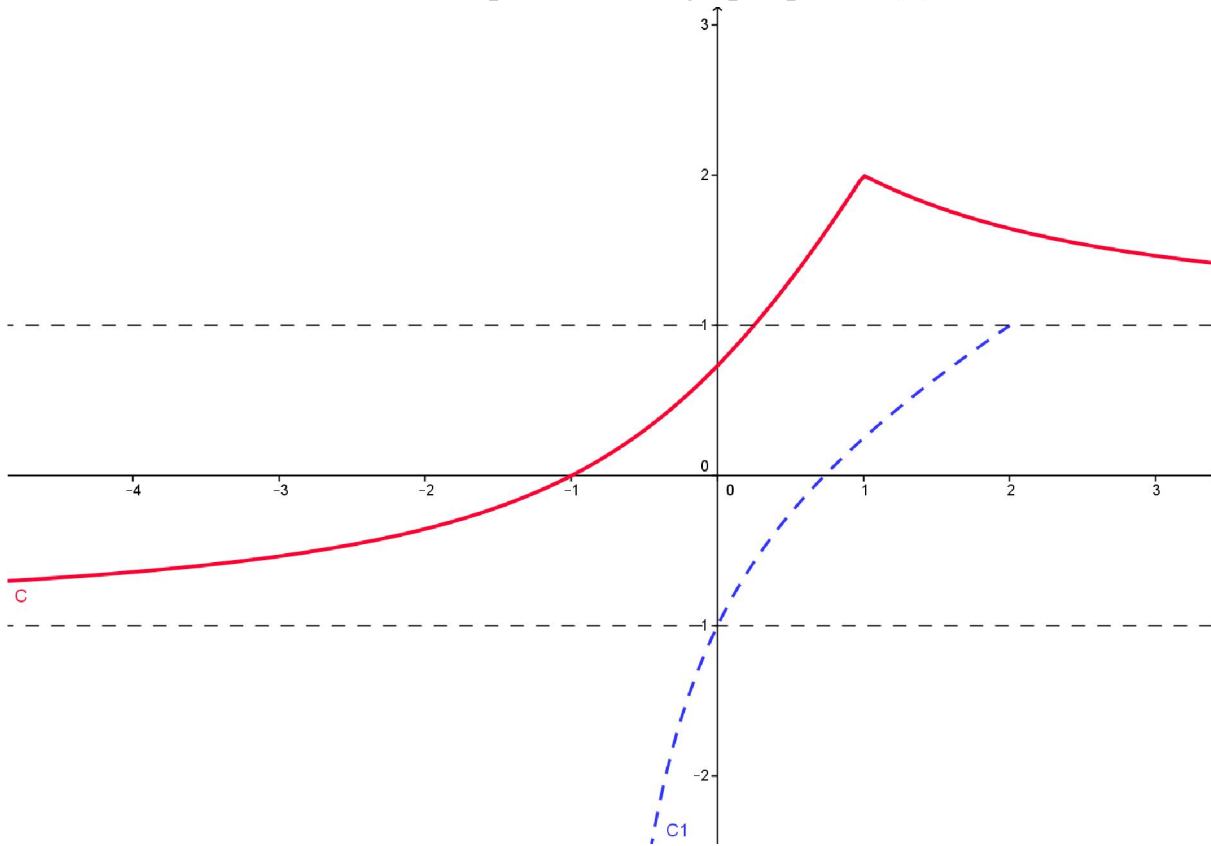
La courbe (C) admet au point d'abscisse 1, deux tangentes d'équations :

$$(T_g) : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \text{ et }$$

$$(T_d) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

Représentation graphique de (C) :



2. g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$

(a) Montrons que g admet une application réciproque

g est strictement croissante sur $]-\infty ; 1]$ comme restriction de f . Elle est donc monotone. D'où elle admet une bijection réciproque g^{-1} définie de $]-1 ; 2]$ vers $]-\infty ; 1]$.

(b) Explicitons la bijection réciproque

Posons $g(x) = y$

$$\sqrt{x^2 + 3} - x + 1 = y$$

$$\sqrt{x^2 + 3} = (-x + 1) + y$$

$$(x^2 + 3) = (x - 1)^2 + 2y(-x + 1) + y^2$$

$$x^2 + 3 = x^2 - 2x + 1 - 2xy + 2y + y^2$$

$$2x(1 + y) = 2y - 2 + y^2$$

$$x = \frac{y^2 + 2y - 2}{2(y + 1)}$$

$$g^{-1} :]-1 ; 2] \rightarrow]-\infty ; 1]$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 2}{2(x + 1)}$$

(c) Construction de (T)

(d) Déterminons la fonction G primitive de g^{-1} telle que $G(0) = 0$

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2(x + 1)}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{(x + 1)^2 - 3}{2(x + 1)}$$

$$g^{-1}(x) = x + 1 - \frac{3}{2(x + 1)}$$

g^{-1} est continue sur $]-1 ; 2]$. Elle admet une primitive G telle que :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\ln(x + 1) + a ; a$$

$$\in \mathbb{R}$$

$$G(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\ln(x+1)$$

(e) Calculons l'aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^1 f(x)dx \\ \mathcal{A} &= \int_0^2 (1 - g^{-1}(x))dx \\ \mathcal{A} &= [x - G(x)]_0^2 \\ \mathcal{A} &= 2 - G(2) + G(0)\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \left(2 + \frac{3}{2}\ln 3\right) \text{cm}^2$$

$C/I = [1; 2]$. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $U_{n+1} = f(U_n)$

1. (a) Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

Posons $u(x) = f(x) - x$

u est continue et dérivable sur I . On a :

$$u'(x) = f'(x) - 1$$

$\forall x \in I, f'(x) < 0$. Donc $u'(x) < 0$ sur I .

u est alors strictement décroissante sur I .

Elle réalise une bijection de I vers

$$[u(2); u(1)] = [-0,34; 1]. \text{ Or } 0 \in$$

$[-0,34; 1]$. D'où l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans I

(b) Démontrons que pour tout x de I , $f(x)$ est dans I

f étant décroissante sur I , on a :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(1)$$

$$\sqrt{5} - 1 \leq f(x) \leq 2 \text{ et } [\sqrt{7} - 1; 2] \subset I.$$

$$\text{D'où } \forall x \in I; f(x) \in I$$

(c) Démontrons que pour tout x de I ,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$$

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

Pour tout x de I , $f''(x) > 0$. Donc f' est strictement croissante sur I . Alors :

$$\begin{aligned}1 \leq x \leq 2 &\Rightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2) \\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) &\leq \frac{2}{\sqrt{7}} - 1 < 0\end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout réel } x \text{ de } I; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

(d) Dédudisons que pour tout réel x de I ;

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

On a pour tout réel x de I ; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et

$\alpha \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \text{ or } f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{D'où le résultat : } |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

2. (a) Démontrons que pour tout entier naturel, $U_n \in I$

$$U_0 = 1. \text{ Donc } U_0 \in I$$

Supposons que pour tout entier naturel I , $U_n \in I$ et montrons que $U_{n+1} \in I$

On a : pour tout x de I $f(x)$ appartient à I
d'après C/1. Donc $U_n \in I$ implique
 $f(U_n) \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où : $\forall n \in I, U_n \in I$

(b) Démontrons que : $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

On a : $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ or
 $U_n \in I$.

$$\text{Donc : } |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

D'où : $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

(c) Etablissons que : $n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

D'après le résultat de la question
précédente on peut écrire par itération :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_2 - \alpha|$$

.....

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne en
simplifiant :

$$|U_n - \alpha| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}} \times |U_0 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |U_0 - \alpha|$$

$$\text{Or } |U_0 - \alpha| \leq 1.$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

**(d) Déduisons que la suite (U_n) est
convergente**

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

**Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$. D'où la suite est
convergente**

PROBLEME 5 : BAC 2019

Partie A :

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : 2y' - y = 0$$

$$2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0$$

(E) est une équation différentielle du
premier ordre sans second membre. Donc
la solution générale est :

$$y = ae^{\frac{x}{2}} ; a \in \mathbb{R}$$

$$2. (E') : 2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$$

(a) Détermination de m et p

$$f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$

$$(2mx + p)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m + \frac{1}{2}p\right)x + p\right)e^{\frac{x}{2}}$$

f est solution de (E') si et seulement si

$$2f'(x) - f(x) = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$$

$$2\left(\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m + \frac{1}{2}p\right)x + p\right)e^{\frac{x}{2}}$$

$$- (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$$

$$= (1-x)e^{\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 & (mx^2 + (4m + p)x + 2p)e^{\frac{x}{2}} \\
 & \quad - (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}} \\
 & = (1 - x)e^{\frac{x}{2}} \\
 & (4mx + 2p)e^{\frac{x}{2}} = (1 - x)e^{\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 4m = -1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{1}{2} ; m = -\frac{1}{4}$$

(b) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

b1) montrons que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E)
 g solution de (E') si et seulement si :

$$2g'(x) - g(x) = (1 - x)e^{\frac{x}{2}} \text{ or :}$$

$$2f'(x) - f(x) = (1 - x)e^{\frac{x}{2}}$$

$$2f'(x) - f(x) = 2g'(x) - g(x)$$

$$2(g(x) - f(x))' - (g(x) - f(x)) = 0.$$

D'où $g - f$ est solution de (E)

b2) Résolvons (E')

$g - f$ est solution de (E) . Alors $g(x) - f(x) = ae^{\frac{x}{2}}$ et g est solution de (E') . Donc la solution générale de (E') est : $g(x) = f(x) + ae^{\frac{x}{2}} ; a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + a\right)e^{\frac{x}{2}} ; a \\
 &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

3. Déterminons la solution g_0

La courbe passe par le point $A(1 ; 0)$.

$$g_0(1) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + a\right)e^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{4} + a = 0 ; \quad a = -\frac{1}{4}$$

Donc :

$$g_0(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$$

$$g_0(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}$$

$$g_0(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1)e^{\frac{x}{2}} \text{ ou}$$

$$g_0(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

Partie B :

$$h(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

1. Limite de h en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{4}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1)e^{\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \\
 &\quad -\frac{1}{4}\left(x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2x e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} x^2 e^{\frac{x}{2}} \rightarrow 0 \\ x e^{\frac{x}{2}} \rightarrow 0 \\ e^{\frac{x}{2}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} \rightarrow +\infty \\ (x - 1)^2 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

2. Dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$

Les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{4}(x - 1)^2$ et $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions.

3. Sens de variation de h

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{8}(x - 1)^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{1}{8}(x^2 - 2x + 1)e^{\frac{x}{2}}$$

$$h'(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$$

$$h'(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}\right)e^{\frac{x}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{8}(x^2 + 2x - 3)e^{\frac{x}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{8}(x-1)(x+3)e^{\frac{x}{2}}$$

Pour tout réel x ; $e^{\frac{x}{2}} > 0$. Donc $h'(x)$ a le signe de $-\frac{1}{8}(x-1)(x+3)$

$$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[, h'(x) < 0.$$

Donc h est strictement décroissante sur

$$]-\infty; -3[\text{ et sur }]1; +\infty[$$

$$\forall x \in]-3; 1[, h'(x) > 0.$$

Donc h est strictement croissante sur

$$]-3; 1[$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0		0		
		$-4e^{-\frac{3}{2}}$			$-\infty$

$$4. \varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$$

(a) Position relative de (C) et (Γ)

$$h(x) - \varphi(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}$$

$$h(x) - \varphi(x) = \left[-\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1\right] e^{\frac{x}{2}}$$

$$h(x) - \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}(x-1)\right) \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)\right) e^{\frac{x}{2}}$$

$$h(x) - \varphi(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

$$h(x) - \varphi(x) = \frac{1}{4}(-x+3)(x+1)e^{\frac{x}{2}}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$h(x) - \varphi(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

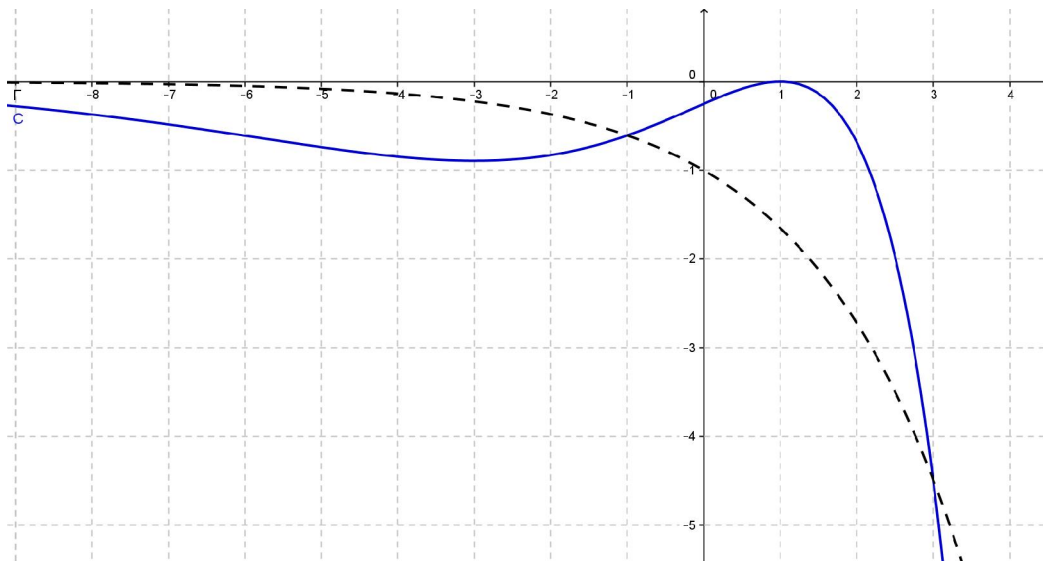
$$\bullet \forall x \in]-\infty, -1[\cup]3; +\infty[; h(x) -$$

$\varphi(x) < 0$. **Donc (Γ) est au dessus de (C)**

sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3; +\infty[$

$$\bullet \forall x \in]-1; 3[; h(x) - \varphi(x) > 0. \text{ Donc } (\Gamma) \text{ est en dessous de } (C) \text{ sur }]-1; 3[$$

(b) Construction de (C) et (Γ)



5. (a) Détermination de a, b et c

$H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$
 H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$ si
 $H'(x) = h(x)$

$$H'(x) = (2ax + b)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$$

$$H'(x) = \left(\frac{1}{2}ax^2 + \left(\frac{1}{2}b + 2a\right)x + b + \frac{1}{2}c\right)e^{\frac{x}{2}}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}b + 2a = \frac{1}{2} \\ b + \frac{1}{2}c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 3; c = -\frac{13}{2}$$

- (b) Calcul d'aire :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^3 (h(x) - \varphi(x)) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^3 h(x) dx - \int_{-1}^3 \varphi(x) dx$$

$$\mathcal{A} = [H(x)]_{-1}^3 - \left[-2e^{\frac{x}{2}}\right]_{-1}^3$$

$$\mathcal{A} = [H(3) - H(-1)] + 2 \left[e^{\frac{x}{2}}\right]_{-1}^3$$

$$\mathcal{A} = 8e^{\frac{-1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{e}} \text{ cm}^2$$

Partie C :

$$U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t) dt$$

1. Interprétation géométrique de U_0

$$U_0 = \int_1^2 -h(t) dt$$

U_0 est l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

2. (a) Démontrons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$$

$$n+1 \leq t \leq n+2 \Rightarrow$$

$h(n+2) \leq h(t) \leq h(n+1)$ car h est décroissante. Alors : $-h(n+1) \leq -h(t) \leq -h(n+2)$

Une intégration membre à membre donne :

$$\begin{aligned} -h(n+1) \int_{n+1}^{n+2} dt &\leq \int_{n+1}^{n+2} -h(t) dt \\ &\leq -h(n+2) \int_{n+1}^{n+2} dt \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{n+1}^{n+2} dt = 1$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$$

(b) Sens de variation de (U_n)

$$-h(n+2) \leq U_{n+1} \leq -h(n+3)$$

$$h(n+2) \leq -U_n \leq h(n+1)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq U_{n+1} - U_n &\leq h(n+1) - h(n+3) \end{aligned}$$

$$0 \leq U_{n+1} - U_n$$

Donc la suite (U_n) est une suite croissante

3. Convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-h(n+1)) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Donc elle n'est pas convergente

PROBLEME 6 :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x+e) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie A :

1. (a) Montrons que $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 \text{ si } x < 0$$

$$D = \{x \in]-\infty; 0[, x \neq 0\} ;$$

$$D =]-\infty; 0[$$

$$f(x) = \ln(x+e) \text{ si } x \geq 0$$

$$D' = \{x \in [0; +\infty[, x+e > 0\} ; D' = [0; +\infty[$$

$$\text{On a : } D_f = D \cup D' ;$$

$$\text{D'où : } D_f = \mathbb{R}$$

(b) Limites de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} \rightarrow 1 \\ -x+1 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+e)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } x+e \rightarrow +\infty$$

2. (a) continuité de f en 0

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^<} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^<} \left(e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^<} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \frac{x+1}{x} \rightarrow -\infty \\ e^{\frac{x+1}{x}} \rightarrow 0 \\ -x + 1 \rightarrow 1 \end{cases}$$

D'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^>} \ln(x + e) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^<} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue au point d'abscisse 0

(b) Démontrons que :

$$\bullet \quad \forall x \in]-\infty; 0[; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1$$

On a : $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1$ si $x < 0$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 - 1}{x}$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{1+\frac{1}{x}} - x}{x}$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e \times e^{\frac{1}{x}} - x}{x}$$

D'où :

$$\forall x \in]-\infty; 0[; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$\bullet \quad \forall x \in]0; +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{x}$$

On a : $f(x) = \ln(x + e)$

e) si $x \geq 0$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln(x+e)-1}{x}$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln e \left(1 + \frac{x}{e}\right) - 1}{x}$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln e + \ln \left(1 + \frac{x}{e}\right) - 1}{x}$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x}$$

D'où :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x}$$

(c) Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^<} \left(\frac{e}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

Posons $X = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} (eX e^X - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-1}{x} = -1 \text{ car } X e^X \rightarrow 0$$

Et d'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x}$$

Posons $X = \frac{x}{e}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^>} \frac{1}{e} \times \frac{\ln(1+X)}{X}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{e} \text{ car } \frac{\ln(1+X)}{X} \rightarrow 1$$

Par suite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^>} \frac{f(x)-1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^<} \frac{f(x)-1}{x}$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique :

(C) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes d'équations respectives : (T_g) : $y = -x + 1$ et

$$(T_d) : $y = \frac{1}{e}x + 1$$$

3. (a) Etudions les variations de f

- f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sa dérivée $f'(x)$ s'écrit :

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)' e^{\frac{x+1}{x}} - 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{x+1}{x}} - 1$$

$$\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) < 0.$$

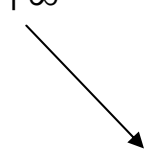
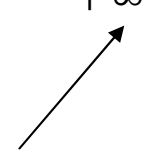
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

- f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée $f'(x)$ s'écrit :

$$f'(x) = \frac{1}{x+e}$$

Pour tout réel strictement positif, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	$+\infty$ 	0	$+\infty$ 

(c) Traçons (C)

(b) Branches infinies de (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} e^{\frac{x+1}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

Posons $X = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} (X e^{(1+X)} - 1 + X)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Calculons ensuite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x+1}{x}} + 1 \right) \\ &= e + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = e + 1$$

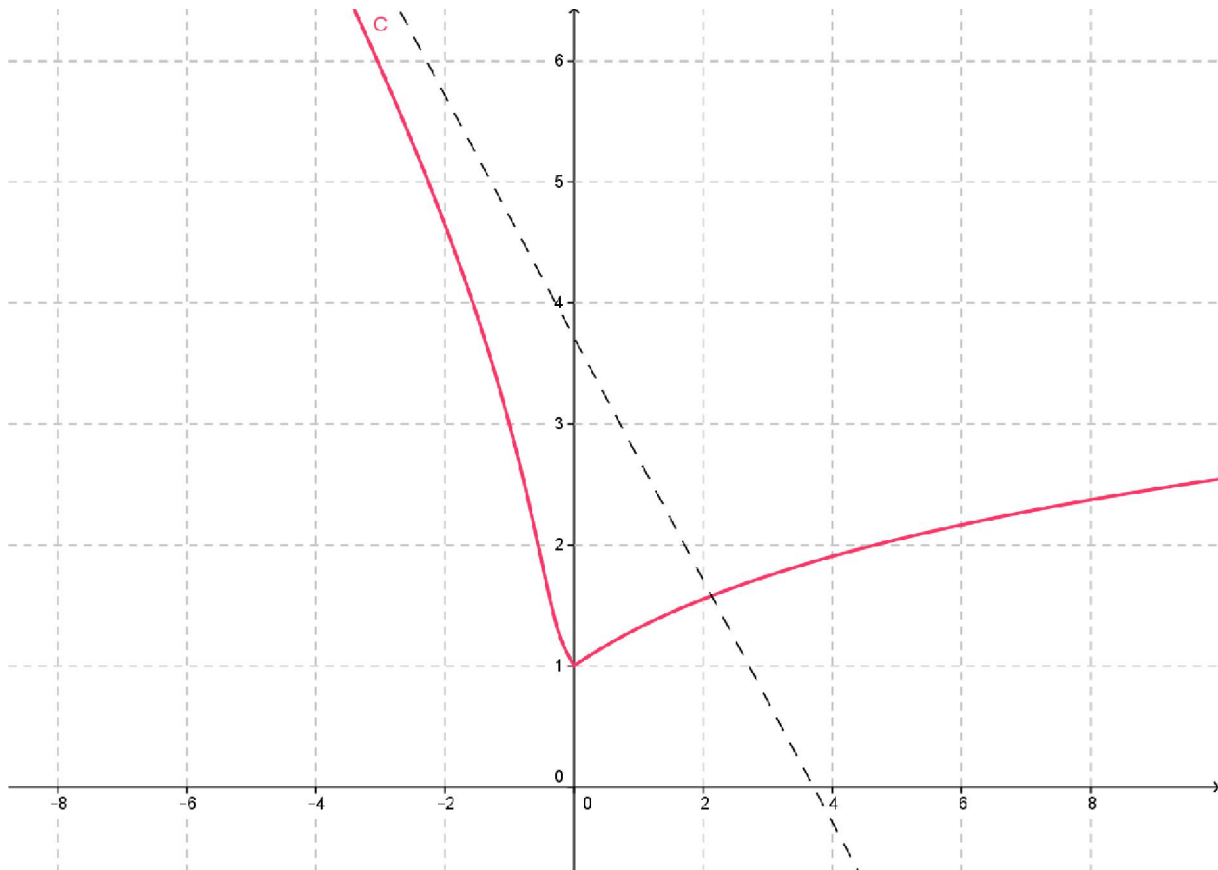
La droite d'équation $y = -x + e + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

D'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox)



4. Calcul d'aire

$$\mathcal{A} = \int_0^{2e} f(x) dx \times u.a$$

$$\mathcal{A} = \int_0^{2e} \ln(x+e) dx \times u.a$$

Posons :

$$u = \ln(x+e) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+e}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\mathcal{A} = [x \ln(x+e)]_0^{2e} - \int_0^{2e} \frac{x}{x+e} dx$$

$$\mathcal{A} = 2e \ln(3e) - \int_0^{2e} \left(1 - \frac{e}{x+e}\right) dx$$

$$\mathcal{A} = 2e \ln(3e) - [x - e \ln(x+e)]_0^{2e}$$

$$\mathcal{A} = 2e \ln(3e) - 2e + e \ln(3e) - e$$

$$\mathcal{A} = 3e \ln(3e) - 3e$$

$$\mathcal{A} = 3e \ln 3 + 3e - 3e$$

$$\mathcal{A} = 3e \ln 3 \text{ cm}^2$$

Partie B

$$x \in]-\infty; 0[;$$

$$k(x) = \int_{-1}^x \left(e^{\frac{t+1}{t}} - t + 1 \right) dt$$

1. Montrons que k est dérivable sur $]-\infty; 0[$

f est continue sur $]-\infty; 0[$ et k est une primitive de f sur $]-\infty; 0[$ qui s'annule en $x = -1$. D'où k est dérivable sur $]-\infty; 0[$

Soit F une primitive de f sur $]-\infty; 0[$. On a alors :

$$k(x) = F(x) - F(-1)$$

$$k'(x) = F'(x) = f(x)$$

$f(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$. Donc k est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

2. Valeur approchée de $k(-2)$

$$k(-2) = \int_{-1}^{-2} f(t)dt$$

$$k(-2) = 3,87$$

Partie C

1. Montrons que la restriction F de f sur $]0; +\infty[$ réalise une bijection

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc F réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]1; +\infty[$

2. Résolvons dans $]0; +\infty[$,

$$\ln(x + e) = 2$$

$$\ln(x + e) = 2$$

$$x + e = e^2$$

$$x = e(e - 1)$$

$$S = \{e(e - 1)\}$$

3. Montrons que F^{-1} est dérivable en 2

$$F'(x) = \frac{1}{x + e}; F'(x) \neq 0$$

On conclut que F^{-1} est dérivable en 2.

$$(F^{-1})'(2) = \frac{1}{F'(F^{-1}(2))}$$

$$(F^{-1})'(2) = \frac{1}{F'(e(e - 1))}$$

$$(F^{-1})'(2) = e(e - 1) + e$$

$$(F^{-1})'(2) = e^2$$

PROBLEME 7 :

Partie A

$$\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$$

1. Limites de φ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((2 - x)e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1 \text{ car } \begin{cases} e^x \rightarrow 0 \\ xe^x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2 - x)e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} e^x \rightarrow +\infty \\ 2 - x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

2. (a) Montrons que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

Les fonctions $x \mapsto (2 - x)$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto (2 - x)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions. De plus la fonction

constante $x \mapsto -1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

(b) Calculons $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = -e^x + (2-x)e^x$$

$$\varphi'(x) = (1-x)e^x$$

Signe de $\varphi'(x)$:

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Donc

$\varphi'(x)$ a le signe de $1-x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \varphi'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, \varphi'(x) < 0$$

$$\varphi'(1) = 0$$

(c) Sens de variation de φ

φ est strictement croissante sur

$]-\infty; 1[$

φ est strictement décroissante sur

$]1; +\infty[$

x	-2	0	1	2
$\varphi(x)$	-0,46	1	1,72	-1

3. Prouvons que φ s'annule

exactement pour deux valeurs

- φ est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 1[$. Elle réalise une bijection sur $]-\infty, 1[$. $[-2, 0] \subset]-\infty, 1[$ et $\varphi(-2) \times \varphi(0) < 0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2, 0]$

- φ est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. Elle réalise une bijection sur $]1; +\infty[$. $[1; 2] \subset]1; +\infty[$ et $\varphi(1) \times \varphi(2) < 0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [1; 2]$

(b) Signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$	α	1	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	1,72	0	-1

On a alors en lisant le tableau de variation :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[; \varphi(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; \beta[; \varphi(x) > 0 \\ \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \end{aligned}$$

4. Encadrement de α et β

- $\alpha \in [-2, 0]$

x	-1,3	-1,2	-1,1	-1
	-	-	+	+

x	-1,16	-1,15	-1,14	-1,13
	-	-	+	+

$$-1,15 < \alpha < -1,14$$

- $\beta \in [1; 2]$

x	1,7	1,8	1,9	2
	+	+	-	

x	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
	+	+	-	-	-

$$1,84 < \beta < 1,85$$

5. Montrons que : $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

On a : $\varphi(\alpha) = 0$

$$(2 - \alpha)e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$$

Partie B

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

1. Montrons que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

$$\text{Posons } u(x) = e^x - x$$

$$u'(x) = e^x - 1$$

$$\forall x < 0, u'(x) < 0.$$

Donc u est strictement

décroissante sur $]-\infty; 0[$

$$\forall x > 0; u'(x) > 0.$$

Donc u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

D'autre part $u(0) = 1$. On conclut que $\forall x$ réel $u(x) > 0$.

D'où elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; e^x - x \neq 0\}$$

D'après ce qui précède on conclut que :

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Les limites de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ car } e^x \rightarrow 0; \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(-e^{-x} + 1)}{e^x(1 - xe^{-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-e^{-x} + 1)}{(1 - xe^{-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } e^{-x} \rightarrow 0 \text{ et } -xe^{-x} \rightarrow 0$$

3. Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - x)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - x)^2 > 0. \text{ Donc } f'(x)$$

a le signe de $\varphi(x)$

Alors :

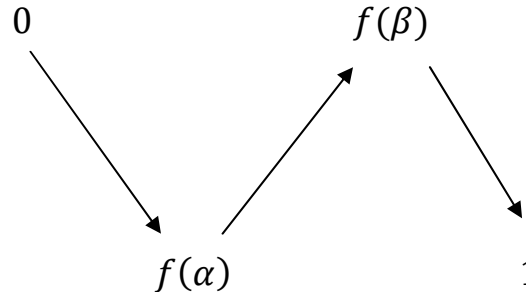
f est strictement décroissante sur

$]-\infty; \alpha[$ et sur $]\beta; +\infty[$

f est strictement croissante sur

$]\alpha; \beta[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0				1

4. Montrons que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$$

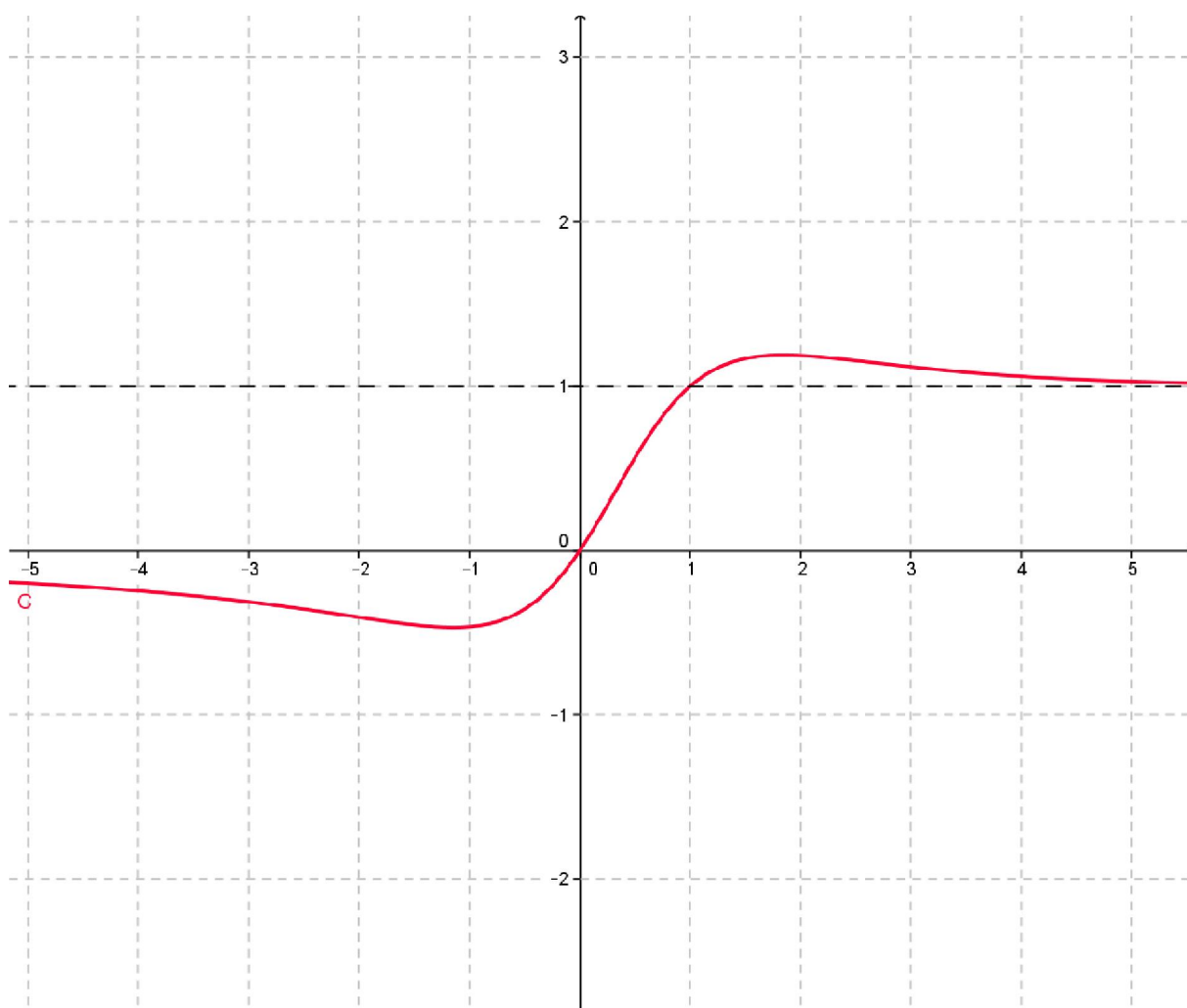
Or : $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$ donc on obtient :

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$$



5. Déterminons une primitive de f sur IR

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$f(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$$

f est continue sur IR . Elle admet alors une primitive F définie par :

$$F(x) = \ln(e^x - x) + k ; k \in IR$$

- Valeur approchée de : $\int_0^1 f(x)dx$

$$\int_0^1 f(x)dx = [\ln(e^x - x)]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \ln(e - 1)$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 0,54$$

Partie C

1. Ensemble de définition de g

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

$$D_g = \left\{x \in IR; \frac{1}{2-x} > 0\right\}$$

$$\frac{1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0$$

$$x < 2$$

$$D_g =]-\infty; 2[$$

- Prouvons que g est croissante sur son ensemble de définition
 g est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et sa dérivée $g'(x)$ s'écrit :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2-x}\right)'}{\frac{1}{2-x}}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{\frac{1}{2-x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2-x}$$

$\forall x \in]-\infty; 2[, g'(x) > 0$. D'où g est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$

- Prouvons que $g(I) \subset I$

$$I = [-2; 0]$$

g est croissante sur I comme une restriction. Donc on a :

$$-2 \leq x \leq 0$$

$$g(-2) \leq g(x) \leq g(0)$$

$$-2\ln 2 \leq g(x) \leq -\ln 2.$$

$$\text{Or } [-2\ln 2; -\ln 2] \subset [-2; 0]$$

$$\text{D'où : } g(I) \subset I$$

2. (a) (U_n) est la suite définie

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

- Montrons que U_1 appartient à I

$$U_1 = g(U_0)$$

$$U_1 = g(-2) = -2\ln 2$$

$-2 < -2\ln 2$. Donc U_1 appartient à I

- Prouvons que : $\forall n \in IN, U_n \in I$
 U_0 appartient à I et U_1 appartient à I .

Supposons que pour tout entier naturel $n, U_n \in I$ et montrons que

$$U_{n+1} \in I$$

D'après la question 1. précédente :

$$g(I) \subset I.$$

Donc $U_n \in I \Rightarrow g(U_n) \in I$ soit
 $U_{n+1} \in I$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

- Prouvons que la suite (U_n) est croissante

On a : $U_1 > U_0$

Supposons que pour tout entier naturel non nul n , $U_n > U_{n-1}$ et montrons que $U_{n+1} > U_n$

$$U_n > U_{n-1} \Rightarrow g(U_n) > g(U_{n-1})$$

$$U_{n+1} > U_n.$$

D'où la suite (U_n) est une suite croissante

(b) (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = g(V_n) \end{cases}$

- Calculons V_1

$$V_1 = g(V_0)$$

$$V_1 = g(0) = -\ln 2$$

- Montrons que :

$$-2 \leq U_1 \leq V_1 \leq V_0 \leq 0$$

On a : $U_0 = -2$; $U_1 = -2\ln 2$;

$V_1 = -\ln 2$. Or :

$$-2 \leq -2\ln 2 \leq -\ln 2 \leq 0$$

D'où : $-2 \leq U_1 \leq V_1 \leq V_0 \leq 0$

- Etablissons par récurrence que :

$$-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$$

On a : $-2 \leq U_1 \leq V_1 \leq V_0 \leq 0$

Supposons que :

$$-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0 \text{ et}$$

montrons que :

$$-2 \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n \leq 0$$

$-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$. g étant croissante, on a :

$$g(-2) \leq g(U_n) \leq g(V_n)$$

$$\leq g(V_{n-1}) \leq g(0)$$

$$-2 \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n \leq 0$$

D'où : $-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$

- Sens de variation de (V_n)

D'après les inégalités précédentes,

$$\text{on a : } V_n \leq V_{n-1}$$

Donc (V_n) est une suite décroissante

3. (a) $h(x) = x - \ln(x + 1)$

- Montrons que h est croissante
 h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Pour tout réel positif ou nul,

$$h'(x) > 0.$$

D'où h est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$$h(0) = 0$$

- D'après ce qui précède, on a :
 $h(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

$$\text{D'où : } \ln(1+x) \leq x$$

(b) vérifions que :

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}\right)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = g(V_n) - g(U_n)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2 - V_n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2 - U_n}\right)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = -\ln(2 - V_n) + \ln(2 - U_n)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(\frac{2 - U_n}{2 - V_n}\right)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(\frac{2 - V_n + V_n - U_n}{2 - V_n}\right)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(\frac{2 - V_n}{2 - V_n} + \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}\right)$$

D'où :

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

(c) Dédisons que :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

On a pour tout réel x positif

$$\ln(1+x) \leq x. \text{ En posant } x = \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

On a :

$$\ln\left(1 + \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}\right) \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

D'où :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

(d) Encadrement de $\frac{1}{2 - V_n}$

$$\text{On a : } -2 \leq V_n \leq 0$$

$$0 \leq -V_n \leq 2$$

$$2 \leq 2 - V_n \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2 - V_n} \leq \frac{1}{2}$$

(e) Dédisons que :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

D'après la relation précédente, on écrit :

$$\frac{1}{2 - V_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_n - U_n}{2 - V_n} \leq \frac{V_n - U_n}{2}$$

Or :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

Donc :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

4. Prouvons alors que : $V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n} (V_0 - U_0)$

$$U_n \leq \frac{1}{2^n} (V_0 - U_0)$$

On a :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

En procédant par itération :

$$V_1 - U_1 \leq \frac{1}{2} (V_0 - U_0)$$

$$V_2 - U_2 \leq \frac{1}{2} (V_1 - U_1)$$

$$V_3 - U_3 \leq \frac{1}{2} (V_2 - U_2)$$

... ..

$$V_n - U_n \leq \frac{1}{2} (V_{n-1} - U_{n-1})$$

Le produit membre à membre donne en simplifiant :

$$V_n - U_n \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}} (V_0 - U_0)$$

D'où :

$$V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n} (V_0 - U_0)$$

5. On a :

$$0 < V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n} (V_0 - U_0)$$

Et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

On peut déduire que la suite de terme générale $(V_n - U_n)$ est convergente

PROBLEME 8

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Partie A

1. Parité de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} \neq 0.$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

Il vient alors que D_f est symétrique.

$$f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = f(x)$$

On conclut alors que f est paire.

Alors la courbe (Γ) représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Démontrons que $\forall x \geq 0$;

$$e^{-x} \leq e^x$$

$$\forall x \geq 0, -x \leq x.$$

D'où : $e^{-x} \leq e^x$ car la fonction $\exp$ est croissante

3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} e^x \rightarrow +\infty \\ e^{-x} \rightarrow 0 \end{cases}$$

(b) Variations de f sur $[0 ; +\infty[$

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$x = 0$$

Or $\forall x \geq 0 ; e^{-x} \leq e^x$.

$$\text{Donc } -(e^x - e^{-x}) \leq 0$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0

$$4. x \geq 0 \quad g(x) = \frac{1}{e^x} \text{ et } h(x) = \frac{1}{2e^x}$$

(a) Démontrons que pour tout

$$x \geq 0 \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\forall x \geq 0 ; e^{-x} \leq e^x$$

$$e^{-x} + e^x \leq 2e^x \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} \leq f(x)$$

D'autre part :

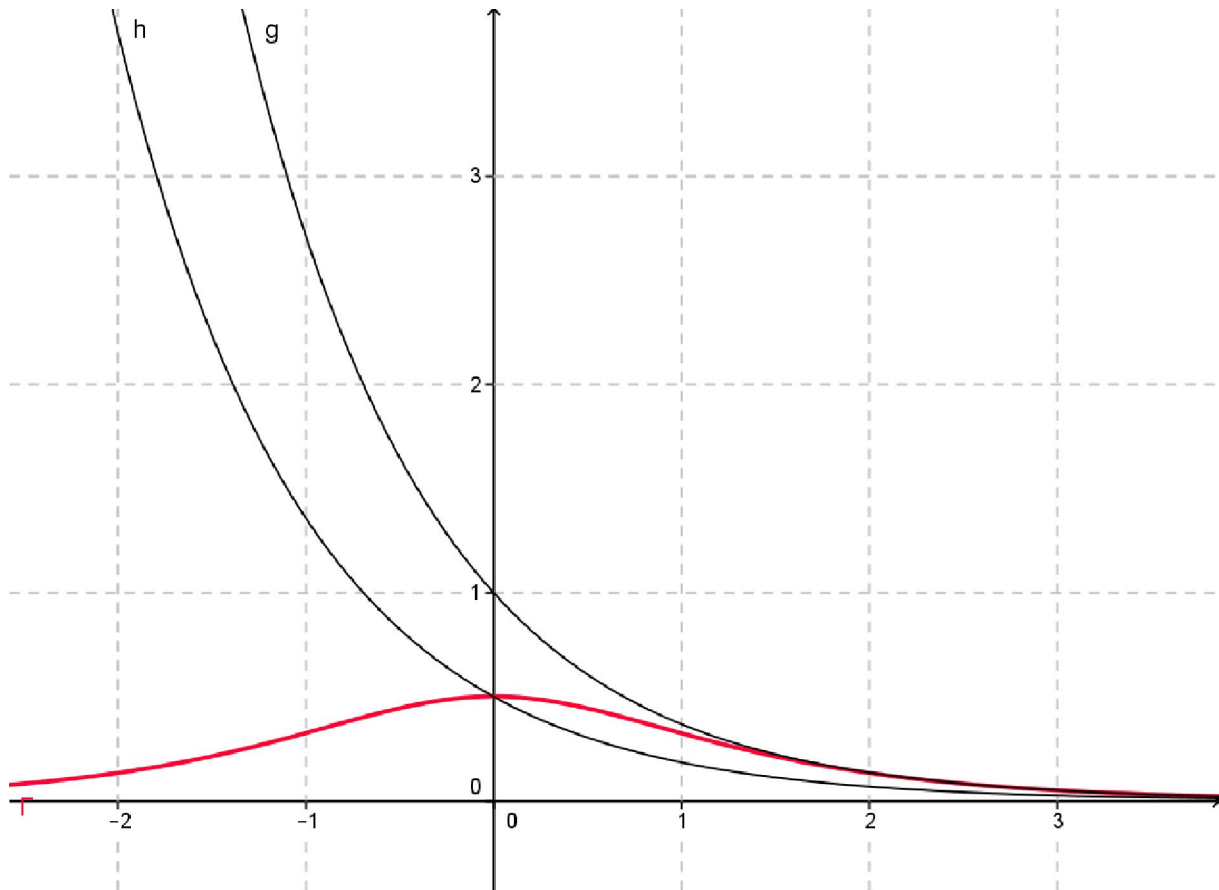
$$e^x \leq e^x + e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{1}{e^x}$$

$$e^x \leq e^x + e^{-x} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{e^x}$$

En conclusion :

$$\forall x \geq 0 \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

(b) La courbe (Γ) est au dessus de (C_2) et en dessous de (C_1) sur $[0 ; +\infty[$



Partie B

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

1. Justifions l'existence de (I_n)

$[n ; n + 1] \subset [0 ; +\infty[$. Donc f est continue sur $[n ; n + 1]$.

Donc la suite (I_n) est bien définie.

De plus f est positive sur $[n ; n + 1]$.

Donc (I_n) représente l'aire de la région du plan délimitée par la courbe (f) , l'axe des abscisses et

les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$

2. (a) Démontrons que pour tout entier naturel n , on a :

$$f(n + 1) \leq I_n \leq f(n)$$

$$n \leq x \leq n + 1$$

$f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$ car f est décroissante sur $[n ; n + 1]$

(b) Déduisons que la suite (I_n) est décroissante

$$f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$f(n + 1) \int_n^{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \int_n^{n+1} dx$$

$$f(n + 1) \leq I_n \leq f(n)$$

$$f(n + 2) \leq I_{n+1} \leq f(n + 1)$$

$$-f(n) \leq -I_n \leq -f(n+1)$$

Donc :

$$f(n+2) - f(n) \leq I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

La suite (I_n) est donc décroissante

(c) Démontrons que la suite (I_n) est convergente

$$\forall n \in \mathbb{N}; I_n \geq 0$$

**(I_n) est décroissante et minorée.
Donc elle est convergente**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Partie C

$$J_n = \int_0^n f(x) dx$$

1. Démontrons que :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$$

On a : $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$$\int_0^n h(x) dx \leq \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n g(x) dx$$

$$\int_0^n \frac{1}{2} e^{-x} dx \leq J_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-x} \right]_0^n \leq J_n \leq [-e^{-x}]_0^n$$

$$-\frac{1}{2} e^{-n} + \frac{1}{2} \leq J_n \leq -e^{-n} + 1$$

D'où :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$$

2. Démontrons que la suite (J_n) est croissante

$$J_n = \int_0^n f(x) dx$$

$$J_{n+1} = \int_0^{n+1} f(x) dx$$

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx$$

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f(x) dx + \int_n^0 f(x) dx$$

$$J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$J_{n+1} - J_n = I_n \geq 0$$

D'où la suite (J_n) est croissante

$$J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1.$$

(J_n) est majorée et croissante. Elle est donc convergente

3. Encadrement de L

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n})$$

$$\frac{1}{2} \leq L \leq 1 \text{ car } e^{-n} \rightarrow 0$$

$$4. u(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(a) Démontrons que : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x}(e^{2x} + 1)}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)}$$

D'où :

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$$

(b) Démontrons que f est la dérivée de $x \mapsto v(e^x)$

$$(v(e^x))' = e^x \times v'(e^x) \text{ or } v' = u.$$

Donc :

$$(v(e^x))' = e^x \times \frac{1}{1 + (e^x)^2}$$

$$(v(e^x))' = \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} = f(x)$$

(c) Valeur exacte de L

$$J_n = \int_0^n f(x) dx$$

$$J_n = \int_0^n (v(e^x))' dx$$

$$J_n = [v(e^x)]_0^n$$

$$J_n = v(e^n) - v(1)$$

On en déduit que :

$$L = v(+\infty) - v(1)$$

$$L = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$