Se préparer au BAC

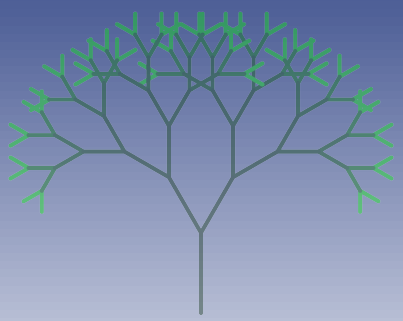
Bac

Sujets et corrigés

Maths

Section
Sciences & Technologies

- Sujets de 2008 à 2024
- Corrigés détaillés



BAC MAROC

www.coursdusoirpc.com

Édition 2024

Table des matières

2008

Session Normal

Énoncé 6
Corrigé 9

Session Rattrapage

Énoncé 16
Corrigé 18

2009

Session Normal

Énoncé 29
Corrigé 32

Session Rattrapage

Énoncé 43
Corrigé 45

2010

Session Normal

Énoncé 57
Corrigé 60

Session Rattrapage

Énoncé 70
Corrigé 73

2011

Session Normal

Énoncé 85
Corrigé 88

Session Rattrapage

Énoncé 96
Corrigé 98

2012

Session Normal

Énoncé 109

Corrigé 113

Session Rattrapage

Énoncé 123

Corrigé 126

2013

Session Normal

Énoncé 138

Corrigé 140

Session Rattrapage

Énoncé 148

Corrigé 151

2014

Session Normal

Énoncé 165

Corrigé 167

Session Rattrapage

Énoncé 179

Corrigé 181

2015

Session Normal1

Énoncé 191

Corrigé 194

Session Normal2

Énoncé 207

Corrigé 210

Session Rattrapage

Énoncé 218

Corrigé 221

2016

Session Normal

Énoncé 232

Corrigé 235

Session Rattrapage

Énoncé 249

Corrigé 251

2017

Session Normal

Énoncé 261

Corrigé 264

Session Rattrapage

Énoncé 273

Corrigé 276

2018

Session Normal

Énoncé 285

Corrigé 288

Session Rattrapage

Énoncé 297

Corrigé 300

2019

Session Normal

Énoncé 309

Corrigé 311

Session Rattrapage

Énoncé 322

Corrigé 324

2020

Session Normal

Énoncé 330

Corrigé 332

Session Rattrapage

Énoncé 343

Corrigé 345

2021

Session Normal

Énoncé 355

Corrigé 357

Session Rattrapage

Énoncé 370

Corrigé 372

2022

Session Normal

Énoncé 380

Corrigé 383

Session Rattrapage

Énoncé 396

Corrigé 399

2023

Session Normal

Énoncé 411

Corrigé 414

Session Rattrapage

Énoncé 428

Corrigé 431

2024

Session Normal

Énoncé 444

Corrigé 447

Session Rattrapage

Énoncé 465

Corrigé 468

www.coursdusoirpc.com

Exercice 1 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les deux points $A(0,-1,1)$ et $B(1,-1,0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

1 - Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ et vérifier que A appartient à (S). — **1,25 pt**

2 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{OA}\wedge\vec{OB}$ et montrer que $x+y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). — **1,25 pt**

3 - Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A. — **0,5 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation — **1 pt**

$$z^2-6z+34=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=3+5i \quad , \quad b=3-5i \quad \text{et} \quad c=7+3i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

a) Montrer que $z'=z+4-2i$ et vérifier que C est l'image du point A par la translation T . — **0,75 pt**

b) Montrer que $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$ — **0,5 pt**

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC=2AC$. — **0,75 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2008 — 3 Pts

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes(les boules sont indiscernables au toucher).

1 - On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte. — **1 pt**

b) Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\dfrac{16}{21}$ — **1 pt**

2 - On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges . — **1 pt**

Exercice 4 — Session : NORMAL 2008 — 11 Pts

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2\ln x$$

0,5 pt **1 - a)** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

0,5 pt **2 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$)

II- On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement .

2 - a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

0,5 pt (on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

0,75 pt (remarquer que : $f(x) = x \quad 1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\Big)$)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de

0,5 pt $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

0,5 pt **d)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) .

3 - a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et montrer que f est strictement

0,75 pt croissante sur $]0,+\infty[$

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au

0,5 pt point d'abscisse 1.

4 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que

0,5 pt $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

5 - Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(on admet que $I(e,e,-1)$ est une point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2.7$).

1 pt

6 - a) Montrer que : $H : x \longrightarrow x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction

0,5 pt $\ln : x \longrightarrow \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis montrer que $\displaystyle\int_1^e \ln x\ dx = 1$.

0,75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\ dx = e - 2$.

c) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux

0,5 pt droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

0,5 pt III- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,75 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II)3-a))

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **3 -** En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : Normal 2008

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les deux points $A(0,-1,1)$, $B(1,-1,0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

1.25 pt **1 -** On a : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\sqrt{3}^2$

Donc, (S) est la sphère $\boxed{\text{de centre } \Omega(1;0;2) \text{ et de rayon } R=\sqrt{3}}$

Et on a : $0^2+(-1)^2+1^2-2\times 0-4\times 1+2=0$, donc $\boxed{A\in(S)}$

1.25 pt **2 -** On a : $\overrightarrow{OA}\,(0;-1;1)$ et $\overrightarrow{OB}\,(1;-1;0)$

D'où : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)}$

0.5 pt **3 -** On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)$ est un vecteur normal sur le plan (OAB)

donc l'équation cartésienne du plan (OAB) s'écrit sous la forme : $x+y+z+d=0$ ave $d\in\mathbb{R}$

Or : $O\in(OAB)$, donc $d=0$

et donc $\boxed{x+y+z=0}$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

Calculons la distance du point Ω au plan (OAB)

$d(\Omega;(OAB))=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\boxed{d(\Omega;(OAB))=\sqrt{3}=R}$

Donc $\boxed{\text{le plan } (OAB) \text{ est tangent à la sphère } (S) \text{ au point } A}$ puisque $A\in(S)$ et $A\in(OAB)$

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 34 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 34 = 36 - 136 = -100 = 10i^2$

Alors, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) + 10i}{2} = 3 + 5i$, et $z_2 = \dfrac{-b1i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) - 10i}{2} = 3 - 5i$

(***On peut aussi calculer le discriminant réduit de cette équation :***

$\Delta' = (-3)^2 - 1 \times 34 = 36 - 34 = -25 = 5i^2$

D'où les solutions :

$z_1 = \dfrac{-b' + i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) + 5i}{1} = 3 + 5i$, ***et*** $z_2 = \dfrac{-b'1i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) - 5i}{1} = 3 - 5i$)

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{S = \{3 - 5i \ ; \ 3 + 5i\}}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère les points $A(a = 3 + 5i)$, $B(b = 3 - 5i)$ et $C(c = 7 + 3i)$

Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation T de vecteur $\vec{u}(4 - 2i)$

0.75 pt **a)** On a $M' = T(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + aff(\vec{u}) \Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i$

Or $a + 4 - 2i = 3 + 5i + 4 - 2i = 7 + 3i = c$, donc $\boxed{C = T(A)}$

Alors C est l'image de A par la translation T

0.5 pt **b)** On a $\dfrac{b-a}{a-c} = \dfrac{3 - 5i - 7 - 3i}{3 + 5i - 7 - 3i} = \dfrac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \dfrac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = \boxed{2i}$

0.75 pt **c)** On a $\dfrac{b-a}{a-c} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; donc : $\overline{(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})} \equiv arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)[2\pi]$

D'où : $\boxed{\overline{(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]}$

Donc ABC est un trinagle rectangle en C; et on a $\dfrac{CB}{CA} = \left|\dfrac{b-c}{a-c}\right| = 2$

Alors : $\boxed{BC = 2AC}$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient *six* boules rouges et *trois* boules vertes

(les boules sont indiscernables au toucher)



1 - On tire au hasard et simultanément (*l'ordre n'a pas d'importance*) ***trois*** boules de l'urne

On va donc utiliser les combinaisons C_n^p

1 pt **a)** la probabilité de tirer *deux* boules rouges et *une* verte : RRV est :

$\dfrac{C_6^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \dfrac{15 \times 3}{84} = \boxed{\dfrac{15}{28}}$

1 pt **b)** On peut répondre par deux méthodes

Première méthode : : la probabilité de tirer au moins *une* boule verte RRV ou RVV ou VVV est :

$\dfrac{C_6^2 \times C_3^1 + C_6^1 \times C_3^2 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{15 \times 3 + 6 \times 3 + 1}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$

Deuxième méthode : : On considère l'événement A : "tirer **au moins** *une* boule verte"

L'événement contraire de l'événement A est : $\overline{A}$: "tirer *trois* boules rouges RRR"

On a $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \dfrac{20}{84} = \dfrac{64}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$

1 pt **2 -** On tire, au hasard, successivement, et sans remise (*l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition*) trois boules de l'urne

On va donc utiliser les arrangement sans répétition A_n^p

La probabilité de tirer **trois** boules rouges est : $\dfrac{A_6^3}{A_9^3} = \dfrac{120}{504} = \boxed{\dfrac{5}{21}}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln x$

0.5 pt **1 - a)** Soit $x \in]0;+\infty[$

On a $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \dfrac{2}{x} = \boxed{\dfrac{x-2}{x}}$

0.5 pt **b)** On sait que $g'(x) = \dfrac{x-2}{x} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

Donc le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui du monôme $x - 2$

Et on a : si $x \in [2;+\infty[\Rightarrow x \geqslant 2 \Rightarrow x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0$

Et si $x \in]0;2] \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow g'(x) \leqslant 0$

Donc g est $\boxed{\text{décroissante sur }]0;2] \text{ et croissante sur } [2;+\infty[}$

comme indiqué dans le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	$g(2) = 2(1-\ln 2)$	↗	

0.5 pt **2 -** On a $e > 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0$, donc $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$

Et on a $g(2) = 2(1 - \ln 2)$ est une valeur minimale pour la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$ au point d'abscisse 2

Alors : $\forall x \in]0;+\infty[$ é ; $\boxed{g(x) \geqslant g(2) > 0}$

Partie II

On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$
Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.75 pt **1 -** On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-(\ln x)^2)=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=$ $\boxed{-\infty}$
La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

0.5 pt **2 - a)** On pose $t=\sqrt{x}$, donc $x\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, et tant que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=\boxed{0}$$

0.75 pt **b)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)\right)=\boxed{+\infty}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$

0.5 pt **c)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$
Et selon la question précédente, la courbe (C) admet $\boxed{\text{une branche parabolique au voisinage de } +\infty}$ de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$

0.5 pt **d)** On a $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)-x=-(\ln x)^2\leqslant 0$
Donc la courbe $\boxed{(C)\text{ est au-dessous de la droite }(\Delta)}$

0.75 pt **3 - a)** Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $f'(x)=(x-(\ln x)^2)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\dfrac{g(x)}{x}}$

Et selon le signe de $g(x)$ **Partie I**, on a $f'(x)>0\,;\forall x\in]0;+\infty[$, donc $\boxed{f\text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

0.25 pt **b)** Le tableau de variations de la fonction f

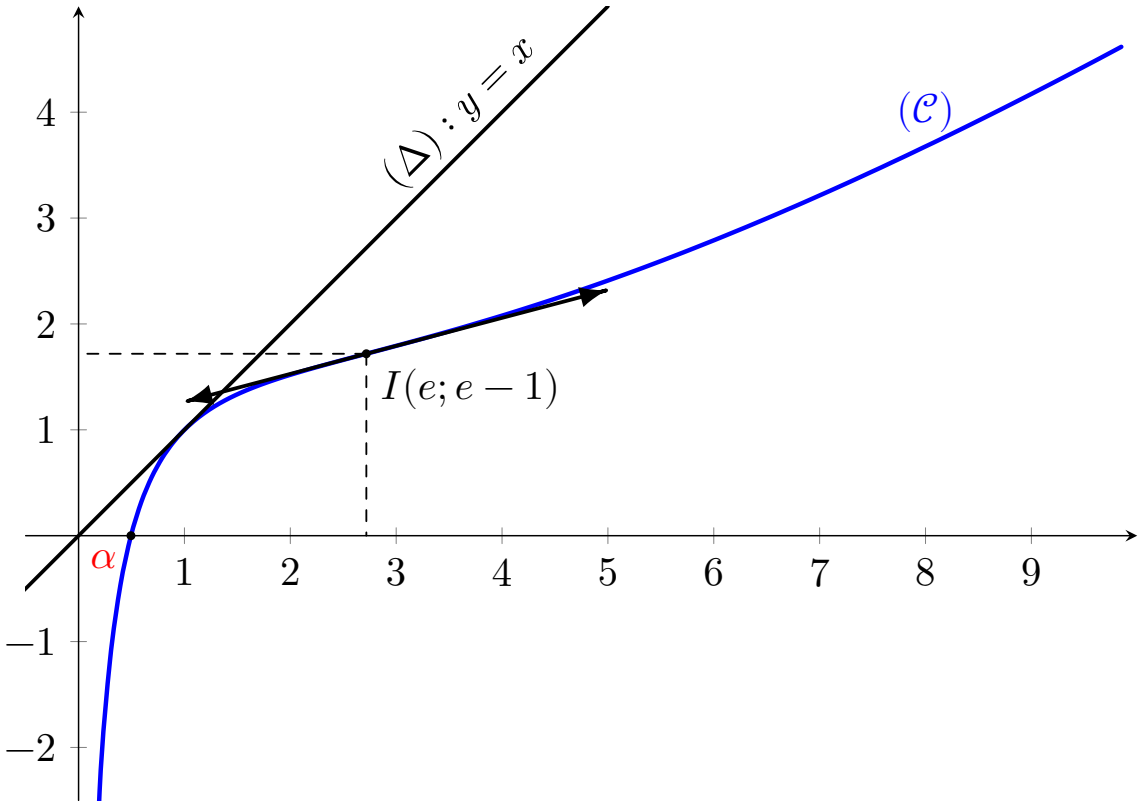
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.5 pt **c)** Une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est :
$y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow\boxed{y=x}$

0.5 pt **4 -** On a f est continue, et strictement croissante sur $]0;+\infty[$
et $J=f(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$
Or $0\in J$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $I=]0;+\infty[$
Et puisque : $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-1=\dfrac{1-e}{e}<0$
Et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$ (car selon les données : $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$)
Alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\boxed{\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}}$

1 pt **5 -** Traçons la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Prenons : $\alpha \approx 0.4948664145$, e ≈ 2.7 et $I(e; e-1)$ point d'inflexion pour (C)



0.5 pt **6 - a)** On a $\forall x \in]0; +\infty[\,;\ H'(x) = (x\ln x - x)' = x'\ln x - x\ln' x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Donc : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Et on a $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = [H(x)]_1^{\mathrm{e}} = H(\mathrm{e}) - H(1) = 0 - (-1) = \boxed{1}$

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \times \ln x \mathrm{d}x \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} H'(x) \times \ln x \mathrm{d}x \\
&= [H(x)\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} H(x)\ln' x \mathrm{d}x \\
&= H(\mathrm{e})\ln \mathrm{e} - H(1)\ln 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x\ln x - x}{x}\mathrm{d}x \quad (H(e) = 0 \text{ et } \ln 1 = 0) \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x + (\mathrm{e} - 1) \\
&= -1 + \mathrm{e} - 1 \quad \left(\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = 1\right) \\
&= \boxed{\mathrm{e} - 2}
\end{aligned}$$

0.5 pt **c)** L'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |f(x) - x| \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (x - f(x)) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \boxed{\mathrm{e} - 2 \approx 0.7 (u.a.)}$

Partie III

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0.75 pt **1 -** Montrons, par récurrence, que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

➥ Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$

➥ Soit $n \in \mathbb{N}$

❖ On suppose que : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

❖ Montrons que : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

On sait que f est croissate sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Donc $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) \Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

Car $f(2) - 2 = -(\ln 2)^2 \leqslant 0 \Rightarrow f(2) \leqslant 2$

Alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2}$

0.5 pt **2 -** Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -(\ln(u_n))^2 \leqslant 0$

Donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

0.75 pt **3 -** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 1, donc (u_n) est convergente Et on a :

➪ f est une fonction continue sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ On a $f([1; 2]) = [f(1); f(2)] \subset [1; 2]$; car $f(2) \leqslant 2$

➪ $u_0 = 2 \in [1; 2]$

➪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite l

D'où : $l \in [1; 2]$; et $f(l) = l$

Et on a : $f(l) = l \Leftrightarrow l - (\ln l)^2 = l \Leftrightarrow \ln l = 0 \Leftrightarrow l = 1$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

1 pt

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A et B d'affixes respectives $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'ongle $\frac{3\pi}{2}$.

0.75 pt **a)** Montrer que $z' = -iz - 1 + 3i$.

0.75 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est $c = -i$.

0.75 pt **c)** Montrer que : $b - c = 2(a - c)$, puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation : $x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0 \ .$$

0.75 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et son rayon est 3 .

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la distance du point I au plan (P) est $\sqrt{6}$.

0.75 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

3 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et orthogonale à (P).

0.5 pt

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1, 1, -2)$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne .

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.

1 pt **3 -** Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 3 Pts

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases}$

1 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n . **1 pt**

b) Montrer que : $u_n = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) . **1 pt**

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2008 — 8 Pts

I- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1 - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$. **1 pt**

2 - En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que $g(0) = 1$) **0.75 pt**

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. **0,5 pt**

b) Vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,25 pt**

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$). **0,5 pt**

d) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, un branche parabolique dont on précisera la direction . **0,25 pt**

2 - a) Pour tout x de $[0, +\infty[$, vérifier que :

$$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et que } 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x).$$

0,75 pt

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$). **0,5 pt**

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. **0,5 pt**

d) Montrer que : $f(x) - 2x \leqslant 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$. **0,75 pt**

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la

0,5 pt fonction f .

4 - Tracer (C) et (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 pt (On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexions).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2008

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3.0 pts)

1 pt

1 - Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 8z + 17 = 0$.

On a le discriminant de l'équation (E) est :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 17 = -4 = (2i)^2.$$

Donc l'équation (E) admet deux racines complexes et conjugués z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4 - i \text{ et } z_2 = \bar{z_1} = 4 + i.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\boxed{S = \{4 - i; 4 + i\}}.$$

0.75 pt

2 - a) Montrons que : $z' = -iz - 1 + 3i$.

puisque R est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'angle $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Alors : $R(M) = M' \iff z' - \omega = (z - \omega)e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Or : $e^{\frac{3\pi}{2}i} = cos(\frac{3\pi}{2}) + isin(\frac{3\pi}{2}) = -i$

d'où : $R(M) = M' \iff z' = -i(z - \omega) + \omega$

$$\iff z' = -i(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$$
$$\iff z' = -iz + i - 2 + 1 + 2i$$

Et par conséquent :

$$\boxed{z' = -iz - 1 + 3i} \qquad (1)$$

0.50 pt

b) Vérifions que $c = -i$ est l'affixe du point C image du point A par la rotation R.

On a : $R(A) = C \implies c = -ia - 1 + 3i \quad (a = 4 + i)$

$$\implies c = -i(4 + i) - 1 + 3i$$
$$\implies c = -4i + 1 - 1 + 3ii$$

Donc :

$$\boxed{c = -i} \qquad (2)$$

0.75 pt

c) ✓ **Montrons que :** $b - c = 2(a - c)$.

On a : $b = 8 + 3i$, $a = 4 + i$ et $c = -i$

Alors : $b - c = 8 + 3i + i$
$$= 8 + 4i$$
$$= 2(4 + 2i)$$
$$= 2(4 + i - (-i))$$

Et par conséquent :

$$\boxed{b - c = 2(a - c)} \qquad (3)$$

✓ **Déduisons que les points A, B et C sont alignés.**

D'après la question précédente on a : $b - c = 2(a - c)$

Donc $\frac{b-c}{a-c} = 2$

D'où $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$

Et par conséquent : les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 : (3.0 pts)

1 - Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et son rayon est égale à 3.

0.75 pt

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a :

$M \in (S) \iff x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

$$\iff (x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 2z) + 5 = 0$$
$$\iff (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + (z + 2)^2 - 4 + 5 = 0$$
$$\iff (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + (z + 1)^2 - 1 + 5 = 0$$
$$\iff (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Donc le centre de la sphère (S) est le point $I(2,3,-1)$ et son rayon est égale à 3.

2 - a) Montrons que la distance du point I au plan $(\mathcal{P})$ est $\sqrt{6}$.

0.50 pt

On a : $I(2,3,-1)$ et $(\mathcal{P}) : x+2y+z-1=0$// On pose $d(I;(\mathcal{P}))$ la distance du point I au plan $(\mathcal{P})$.

$$\begin{aligned}\text{Alors : } d(I;(\mathcal{P})) &= \frac{|x_I+2y_I+z_I-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{|2+2\times 3-1-1|}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{|6|}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Et par conséquent la distance du point I au plan $(\mathcal{P})$ est :

$$\boxed{d(I;(\mathcal{P})) = \sqrt{6}} \tag{4}$$

b) Déduisons que le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon égale à $\sqrt{6}$.

0.75 pt

On a $d = d(I;(\mathcal{P})) = \sqrt{6}$ et le rayon de la sphère (S) est $R = 3$

Donc $d(I;(\mathcal{P})) \leq R$

D'où le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon r

Avec $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{9-6}$ c.à.d

$$\boxed{r = \sqrt{3}}$$

3 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point I et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$

0.50 pt

Puisque la droite (D) est perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$. Alors le vecteur $\vec{n}(1;2;1)$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D).

Or le droite (D) passe par le point I. Donc la droite (D) est la droite passant par le point I et de vecteur directeur le vecteur $\vec{n}(1;2;1)$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (D) est le système :

$$(D) : \begin{cases} x &= x_I + x_{\vec{n}}t \\ y &= y_I + y_{\vec{n}}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &= z_I + z_{\vec{n}}t \end{cases}$$

c.à.d :

$$\boxed{(D) : \begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 3+2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &= -1+t \end{cases}}$$

b) Montrons que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1;1;-2)$

0.50 pt

Le point H le centre du cercle (Γ) est le projeté orthogonale du point I sur le plan $(\mathcal{P})$.

Donc le point H est le point d'intersection de la droite (D) et le plan $(\mathcal{P})$.

D'où :

$$H \in (D) \cap (\mathcal{P}) \iff \begin{cases} x_H = 2 + t \\ y_H = 3 + 2t \\ z_H = -1 + t \\ x_H + 2y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\implies \begin{cases} x_H = 2 + t \\ y_H = 3 + 2t \\ z_H = -1 + t \\ (2 + t) + 2(3 + 2t) + (-1 + t) - 1 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\implies \begin{cases} x_H = 2 + t \\ y_H = 3 + 2t \\ z_H = -1 + t \\ t = -1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\implies \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 1 \\ z_H = -2 \end{cases}$$

Et par conséquent le point $H(1; 1; -2)$ est le centre du cercle (Γ).

Exercice 3 : (3.0 pts)

Soit Ω l'univers des possibilités de cette expérience. Un tirage successive et sans remise de trois boules de la boite contenant sept boules, est un arrangement de trois éléments parmi sept éléments.

Donc $card(\Omega) = A_7^3 = 210$.

1 - Déterminons la probabilité d'avoir trois boules blanches

1 pt

Soit A l'événement d'avoir trois boules blanches.

Un tirage successive et sans remise de trois boules blanches est un arrangement de trois éléments parmi trois éléments.

Donc $card(A) = A_4^3 = 24$. Et puisqu'on a les boules sont indiscernables au toucher alors l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifié et par conséquent : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$. d'où

$$\boxed{P(A) = \frac{4}{35}}.$$

2 - Montrons que la probabilité d'avoir trois boules de même couleurs est $\frac{1}{7}$

1 pt

Soit B l'événement d'avoir trois boules de même couleurs.

Un tirage de trois boules de même couleurs est un tirage de trois boules blanches ou de trois boules rouges. Donc $card(B) = A_4^3 + A_3^3 = 30$. Alors :$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$. d'où :

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{7}}$$

.

3 - Déterminons la probabilité d'avoir au moins une boule blanche

1 pt Soit C l'événement d'avoir au moins une boule blanche.

On a $\bar{C}$ est l'événement contraire de l'événement C. c.à.d l'événement d'avoir trois boules rouges.

D'où $card(\bar{C}) = A_3^3 = 6$. Donc $P(\bar{C}) = \frac{card(\bar{C})}{card(\Omega)} = \frac{1}{35}$.

Or $P(C) = 1 - P(\bar{C})$. Alors :

$$\boxed{P(C) = \frac{34}{35}}.$$

Exercice 4 : (3.0 pts)

1 - Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

1 pt ✓ **Initialisation** : Pour $n = 0$; on a $u_0 = 2$, donc $u_0 > 1$.

✓ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - 1 &= \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 \\ &= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n + 3} \\ &= \frac{3u_n - 3}{2u_n + 3} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3}$$

D'après l'hypothèse de la récurrence on a $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $2u_n + 3 > 0$.

Alors $\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3} > 0$. c.à.d $u_{n+1} - 1 > 0$. Donc $u_{n+1} > 1$.

1 pt ✓ **Conclusion** : D'après le principe de la récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n > 1$.

2 - a) ✓ Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ et $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}} \\ &= \frac{3(u_n-1)}{5u_n} \end{aligned}$$

Donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$$

D'où la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$.

✓ **Écrivons v_n en fonction de n.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Puisque la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$.

Alors $v_n = v_0 q^n = \dfrac{u_0 - 1}{u_0}(\frac{3}{5})^n$

Donc

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{1}{2}(\frac{3}{5})^n}$$

1 pt

b) ✓ **Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n = \frac{2}{2-(\frac{3}{5})^n}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} &\iff v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \\ &\iff \frac{1}{u_n} = 1 - v_n \\ &\iff u_n = \frac{1}{1 - v_n} \quad (v_n = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{5})^n) \\ &\iff u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\frac{3}{5})^n} \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 2 on obtient :

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{2}{2-(\frac{3}{5})^n}}$$

✓ **Déterminons la limite de la suite (u_n).**

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{2 - (\frac{3}{5})^n}\right)$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$.

Exercice 5 : (8.0 pts)

Partie I

1 pt

1 - ✓ Calculons $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Puisque $x \longmapsto 2x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x \longmapsto 2x$ et $x \longmapsto e^{2x}$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\mathrm{e}^{2x} - 2x)' \\ &= (\mathrm{e}^{2x})' - (2x)' \\ &= (2x)'\,\mathrm{e}^{2x} - 2 \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - 2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 2\,(\mathrm{e}^{2x} - 1)}$$

✓ Montrons que la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl|rcl} g'(x) = 0 & \iff & \mathrm{e}^{2x} - 1 = 0 & g'(x) \geq 0 & \iff & \mathrm{e}^{2x} - 1 \geq 0 \\ & \iff & \mathrm{e}^{2x} = 1 & & \iff & \mathrm{e}^{2x} \geq 1 \\ & \iff & 2x = 0 & & \iff & 2x \geq 0 \\ & \iff & x = 0 & & \iff & x \geq 0 \end{array}$$

Alors le tableau de signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Et par conséquent la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.

2 - Déduisons que $g'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.75 pt

D'après la question précédente, le tableau de variations de le fonction g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\searrow$		$g(0)$		$\nearrow$

D'après le tableau de variations de la fonction g, $g(0)$ est une valeur maximale de g sur $\mathbb{R}$.

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$ $g(x) \geq g(0)$.

Or $g(0) = \mathrm{e}^{2\times 0} - 2 \times 0 = 1$, donc $g(0) > 0$.

Et par conséquent $g'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

1 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **0.50 pt**

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} - 2x &= \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{t} - t \quad \text{(en posant } t = 2x\text{)}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t = -\infty$.

Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right) \quad \text{(en posant } X = \mathrm{e}^{2x} - 2x\text{)}\\ &= \lim_{X\to+\infty} \ln X\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

b) Montrons que $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - 2\right)\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x}$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}^*$ Soit $x \in \mathbb{R}$. **0.25 pt**

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)\\ \text{On a :} \quad &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x}{x} \times \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x}\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - \frac{2x}{x}\right) \times \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - 2\right)\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x}}$$

c) Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ **0.50 pt**

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \quad \text{(en posant } X = \mathrm{e}^{2x} - 2x\text{)}$$

Et :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2\frac{\mathrm{e}^{t}}{t} = 0 \quad \text{(en posant } t = 2x\text{)}$$

Car : $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - 2\right) = -2$

Comme : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - 2\right)\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2x\right)}{\mathrm{e}^{2x} - 2x}$

Alors :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

d) Déterminons la branche parabolique de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

0.25 pt On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt

2 - a) ✓ Vérifions que $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ pour tout x de $[0;+\infty[$

Soit $x \in [0;+\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2x}{e^{2x}} &= \frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x}} \\ &= \frac{g(x)}{e^{2x}} \end{aligned}$$

Or, d'après la première partie question 1- a on a $g(x) > 0$ et on sait que $e^{2x} > 0$.

Alors :

$$\boxed{(\forall x \in [0;+\infty[) \quad 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0}$$

✓ Vérifions que $f(x) = 2x + ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$ pour tout x de $[0;+\infty[$

Soit $x \in [0;+\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{2x} - 2x\right) \\ &= \ln\left[e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right] \quad \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et } e^{2x} > 0\right) \\ &= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) \quad (\ln e^{2x} = 2x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\forall x \in [0;+\infty[) \quad f(x) = 2x + ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)}$$

b) Déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.50 pt On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} \quad \left(\text{en posant } t = 2x \text{ et on a } \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2x}{e^{2x}} = 1$$

Et en posant $t = 1 - \frac{2x}{e^{2x}}$ on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = \lim_{t\to1} \ln t = \ln(1) = 0$$

Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

c) Montrons que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

0.50 pt

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = 0$$

0.75 pt

Alors la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de.

d) ✓ Montrons que $f(x) - 2x \leq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$

Soit $x \in [0; +\infty[$

On a :

$$\begin{aligned} 2x \geq 0 \text{ et } e^{2x} > 0 &\implies \frac{2x}{e^{2x}} \geq 0 \\ &\implies 1 - \frac{2x}{e^{2x}} \leq 1 \\ &\implies \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Or : $f(x) - 2x = \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$

Donc :

$$\boxed{(\forall x \in [0; +\infty[)\ f(x) - 2x \leq 0}$$

✓ Déduisons la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0; +\infty[$.

On a : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ f(x) - 2x \leq 0$

c.à.d : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ f(x) \leq 2x$

Donc la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessous de la droite (D) sur $[0; +\infty[$.

3 - a) Montrons que $f'(x) = \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.75 pt

Puisque $g : x \longmapsto e^{2x} - 2x$ est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.(Comme composé d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln)

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(g(x)\right)\right)' \\ &= \frac{g'(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}}$$

0.50 pt

b) ✓ Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$. Puisque $g(x) > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$. Or $f'(x) = 0 \iff g'(x) = 0 \iff x = 0$ et d'après la Partie I Question 1, on a le

tableau de signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

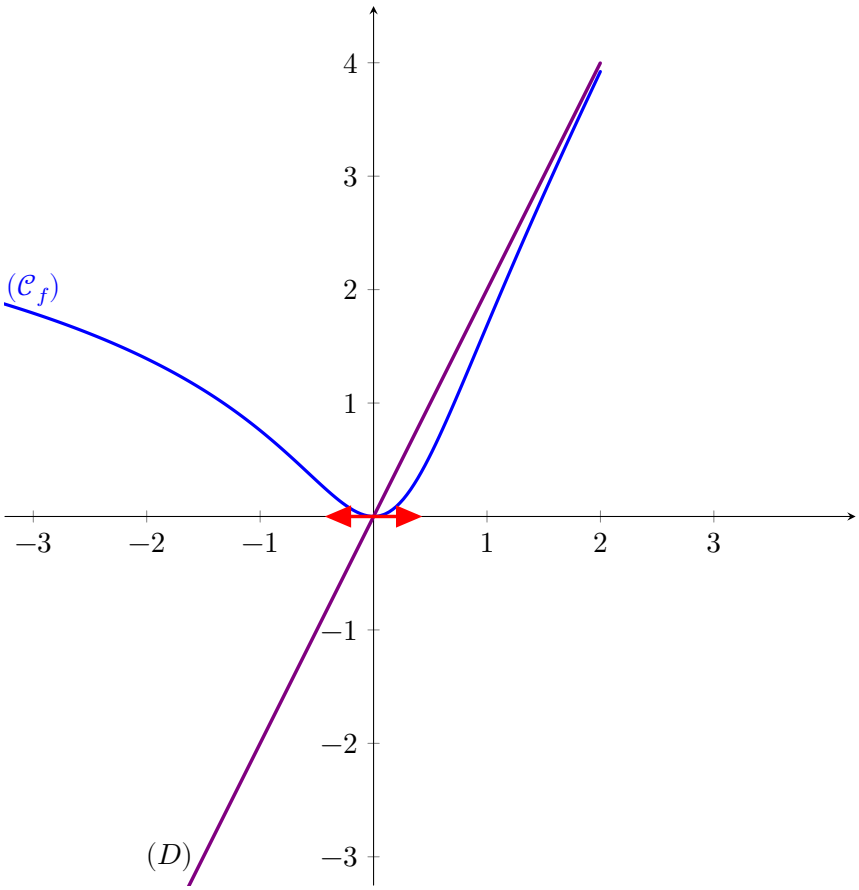
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

✓ **Donnons le tableau de variations de la fonction f**

Le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

1 pt **4 - Construisons de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (D)**



FIN

Exercice 1 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$.

1 - Déterminer le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (OCD) . — **0.75 pt**

2 - Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6 . — **0.5 pt**

3 - a) Calculer la distance du point Ω au plan (OCD) . — **0.5 pt**

b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) . — **0.5 pt**

c) Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}=0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD) . — **0.75 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2-2i$, $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1 - Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b . — **1 pt**

2 - On considère la rotation R de centre le point O et d'ongle $\dfrac{5\pi}{6}$.

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R . Montrer que : $z'=bz$. — **0.75 pt**

b) Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R . — **0.5 pt**

3 - Montrer que : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\ [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c — **0.75 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2009 — 3 Pts

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1 - On considère les deux évènements suivants :

A : Tirer trois boules de même couleurs .

B : Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux

Montrer que : $P(A)=\dfrac{3}{44}$ et $P(B)=\dfrac{3}{11}$ — **1.5 pt**

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$. 1.25 pt

Exercice 4 — Session : NORMAL 2009 — 2 Pts

On pose : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\,dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tel que $x \neq -3$

0.75 pt **b)** Montrer que : $I = 1 - 3\ln 2$.

1 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J = -I$.

Exercice 5 — Session : NORMAL 2009 — 9 Pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I-**1 -** Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}) \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

0.75 pt

2 - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter le résultat géométriquement 0.75 pt

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. 1 pt

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage $+\infty$. 0.5 pt

0.25 pt **5 - a)** Vérifier que : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.5 pt **d)** Montrer que : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

0.75 pt **6 -** Tracer la courbe (C)

(on admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexions dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $\ln 4 \approx 1.4$) .

II- Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} .$$

On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f .

0.75 pt **1 -** Montrer que : $0 \leq u_n \leq \ln 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

1 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2009

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$ et soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

0.75 **1 - Déterminons le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD)**

✔ **Déterminons le triple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$**

On a : $\overrightarrow{OC}(2;-1;0)$ et $\overrightarrow{OD}(0;1;-1)$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - (-2)\vec{j} + (2-0)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}$

✔**En déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD)**

L'équation cartésienne du plan (OCD) s'écrit sous la forme : $(OCD) : ax + by + cz + d = 0$

Et on a $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}(1;2;2)$ est un vecteur normal au plan (OCD), donc

$(OCD) : x + 2y + 2z + d = 0$

Or $O \in (OCD)$, donc $x_O + 2y_O + 2z_O + d = 0$, donc $d = 0$

Par conséquence $\boxed{(OCD) \ : \ x + 2y + 2z = 0}$

0.5 **2 - Vérifions que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon 6**

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

et on a : $\overrightarrow{AM}(x-(-2); y-2; z-8)$ *et* $\overrightarrow{BM}(x-6; y-6; z-0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-6)+(y-2)(y-6)+(z-8)z = 0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2x-12+y^2-6y-2y+12+z^2-8z = 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-8y+z^2-8z = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-4)^2-16+(z-4)^2-16 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = 36 = 6^2$

D'où : $\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(2,4,4) \text{ et de rayon } R = 6}$

0.5 **3 - a) Calculons la distance du point Ω au plan (OCD) .**

On a $d(\Omega;(OCD)) = \dfrac{|x_\Omega + 2y_\Omega + 2z_\Omega|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|2+2\times 4+2\times 4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|2+8+8|}{3} = \dfrac{|18|}{3} = 6$

Par conséquence $\boxed{d(\Omega;(OCD)) = 3}$

0.5 **b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)**

On a : $d(\Omega;(OCD)) = 6 = R$

Donc le plan (OCD) est tangent à la sphère (S).

0.75 **c) Vérifions que : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD)**

✔**Vérifions que : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$**

On a : $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$ et $\overrightarrow{OB}(6,6,0)$ donc : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = (-2)\times 6+2\times 6+8\times 0 = (-12)+12+0 = 0$

Alors $\boxed{\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0}$

✔**En déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD)**

On a : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB} = 0$ donc $O \in (S)$ et on aussi $O \in (OCD)$ alors puisque le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) ; en déduire que O est le point de contact de la sphère (S) et le plan (OCD).

Exercice 2 : (3 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, soient les points $A(a = 2-2i)$, $B(b = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)$ et $C(c = 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i)$

1 **1 - Écrivons les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique**

✓ On a $|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Par conséquence $\boxed{a = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}$

✓ Et On a : $|b| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$, donc $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

D'où : $\boxed{b = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

2 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par la rotation R

0.75 **a) Montrons que $z' = bz$**

Ona : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - 0) \Leftrightarrow z' = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) z$

$$\Leftrightarrow z' = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) z = bz$$

Par conséquence $\boxed{z' = bz}$

0.5 **b) Vérifions que le point C est l'image du point A par la rotation R .**

On a : $z' = bz$

$ba = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 - 2i) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{-\sqrt{3}}{2} \times (-2i) + \left(\frac{1}{2}i\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2}i\right) \times (-2i)$

$= -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1 = 1 - \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} + 1\right) i = c$ (car $i^2 = -1$)

Donc $\boxed{R(A) = C}$

0.75 **3 - Mq : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre c**

✓ **Montrons que : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$**

On a : $c = ba$ donc $\arg c \equiv \arg ab\ [2\pi] \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$

D'où : $\boxed{\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]}$

✓ **En déduire un argument du nombre complexe c**

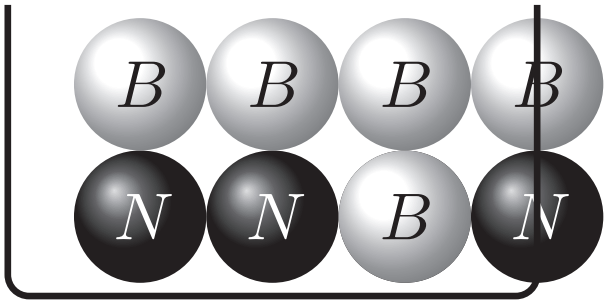
On a : $\arg a \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg b \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et puisque : $\arg c \equiv \arg a + \arg b\ [2\pi]$

Alors : $\arg c \equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

D'où : $\boxed{\arg c \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]}$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient *trois* boules blanches, *quatre* boules noires et *cinq* boules rouges indiscernables au toucher



Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

On tire au hasard et simultanément *trois* boules de l'urne

Donc $Card(\Omega) = C_{12}^3 = \dfrac{12!}{3!(12-3)!} = \dfrac{12!}{3! \times 9!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = \dfrac{132}{6} = 220$

1.5 **1 -** On a les deux évènement suivants :

A : Tirer trois boules en même couleurs

B : Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux

✓ **Montrons que :** $P(A) = \dfrac{3}{44}$

L'événement A est équivalent a tirer trois boules blanches ou trois boules noires ou trois boules rouges

Donc : $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{220} = \dfrac{1+4+10}{220} = \dfrac{15}{220}$

Donc $\boxed{p(A) = \dfrac{3}{44}}$

✓ **Montrons que :** $P(B) = \dfrac{3}{11}$

L'événement B est équivalent a tirer une boule blanche et une boule noire et une boule rouge

Donc : $p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{220} = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{220} = \dfrac{60}{220}$

Donc $\boxed{p(B) = \dfrac{3}{11}}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

0.25

a) Déterminons les valeurs prises par la variable aléatoire X

➥ Si les trois boules tirées ont le même couleur, donc X peut avoir la valeur 1

➥ Si les trois boules tirées contient deux couleurs différentes,

donc X peut avoir la valeur 2

➥ Si les trois boules tirées contient trois couleurs différentes,

donc X peut avoir la valeur 3

D'où : $\boxed{X(\Omega) = \{1; 2; 3\}}$

1.25

b) Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculons l'espérance mathématique $E(X)$.

✓Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

➥ L'événement "$X = 1$" est équivalent a tirer trois boules blanches ou trois boules noires ou trois boules rouges, donc "$(X = 1) = A$"

Alors $\boxed{p(X = 1) = p(A) = \frac{3}{44}}$

➥ L'événement "$X = 2$" est équivalent a tirer trois boules dont il ont deux couleurs différentes, donc "$(X = 2) = (2B \; et \; 1\bar{B} \; ou \; 2N \; et \; 1\bar{N} \; ou \; 2R \; et \; 1\bar{R})$"

Donc : $p(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_9^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_5^2 \times C_7^1}{220}$

$= \frac{3 \times 9 + 6 \times 8 + 10 \times 7}{220}$

$= \frac{145}{220}$

Alors : $\boxed{p(X = 2) = \frac{29}{44}}$

➥ L'événement "$X = 3$" est équivalent a tirer trois boules de couleurs différentes, donc "$(X = 3) = B$"

Alors $\boxed{p(X = 3) = p(B) = \frac{3}{11}}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

✓ Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

On sait que $E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i)$

Donc : $E(X) = 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 3 \times p(X = 3)$

$$= \frac{3}{44} + 2 \times \frac{29}{44} + 3 \times \frac{3}{11}$$
$$= \frac{97}{44}$$

D'où : $\boxed{E(X) = \frac{97}{44}}$.

Exercice 4 : (2 pts)

Ona : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx$

0.25 **1 - a) Vérifions que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x tel que $x \neq -3$**

On a : $\frac{x}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3}$

$= 1 - \frac{3}{x+3}$

D'où : $\boxed{\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}; \forall\ x \in \mathbb{R}\{-3\}}$

0.75 **b) Montons que : $I = 1 - 3\ln 2$**

On a : $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3}\, dx = \int_{-2}^{-1} 1 - 3\frac{(x+3)'}{x+3}\, dx$

$= \left[x - 3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1} = -1 - 3\ln 2 - (-2 - 3\ln 1)$

$= -1 - 3\ln 2 + 2 = 1 - 3\ln 2$

D'où : $\boxed{I = 1 - 3\ln 2}$

1 **2 - Montons que : $J = -I$**

On pose : $U(x) = \ln(2x+6)$ et $V'(x) = 1$

Alors : $U'(x) = \frac{(2x+6)'}{2x+6} = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3}$ et $V(x) = x$

D'après la formule de l'intégration par partie :

$J = \int_{-2}^{-1} 1 \times \ln(2x+6)\mathrm{d}x = [x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\mathrm{d}x$

$= -1 \times \ln 4 - (-2)\ln 2 - I$

$= -\ln 2^2 + 2\ln 2 - I$

$= -2\ln 2 + 2\ln 2 - I$

$= -I$

D'où : $\boxed{J = -I}$

Problème : (9 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

I- 1- **Vérifions que :** $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$ **puis en déduire**

0.75 **que l'ensemble de définition de la fonction** f **est** $\mathbb{R}$ **et que :**

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}); \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

✍ **Vérifions que :** $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ **pour tout** x **de** $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$

$$= \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$$

Alors $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R} : e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$

✍ **En déduire que :** $D_f = \mathbb{R}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\ et\ e^x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R}$

Alors : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

✍ **En déduire que :** $(\forall\ x \in \mathbb{R}); \qquad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$

Donc : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0 \Rightarrow e^x(1 - \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x} + \frac{2}{e^x}) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x} + \frac{2}{e^x} > 0$

(car $\forall\ x \in \mathbb{R}; e^x > 0$).

D'où : $\boxed{1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0}$

0.75 2- **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **; puis montrons que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ **et interprétons le résultat géométriquement**

➠**Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right)$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\ln t = +\infty \quad Car \quad \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$$

$$Avec \quad t = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1, \quad on\ a\ quand \quad x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

➠**Montrons que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = 2\ln 2 = \ln 4$

$$Car \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4}$

➠**L'interprétation géométrique :**

On : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = \ln 4$ au voisinage de $-\infty$

1

3- a- **Montrons que :** $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ **et vérifions que :** $f'(0)=0$:

Ona : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composant de deux fonctions dérivables

Et, pour tout x de $\mathbb{R}$; on a : $f'(x) = \left(2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right)\right)' = 2\dfrac{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$

$$= 2\frac{e^x - 2\dfrac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2} = 2\frac{e^x-\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2} = 2\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

Finalement $\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}}$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{1}\left(\sqrt{1}-1\right)}{\left(\sqrt{1}-1\right)^2+1} = 0$$

Alors : $\boxed{f'(0)=0}$

b- **Étudions le signe de** $\sqrt{e^x}-1$ **sur** $\mathbb{R}$ **et en déduire que la fonction** f **est**

1 **croissante sur l'intervalle** $[0,+\infty[$ **et décroissante sur l'intervalle** $]-\infty,0]$.

✍ **Étudions le signe de** $\sqrt{e^x}-1$

Soit $x\in\mathbb{R}$;

$\sqrt{e^x}-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \ln 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

et $\sqrt{e^x}-1=0\Leftrightarrow x=0$

Alors : $\boxed{\forall x\in]-\infty,0]; \sqrt{e^x}-1\leqslant 0 \text{ et } \forall x\in[0,+\infty[; \sqrt{e^x}-1\geq 0}$

✍ **En déduire que la fonction** f **est croissante sur l'intervalle** $[0,+\infty[$ **et décroissante sur l'intervalle** $]-\infty,0]$

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de $\sqrt{e^x}-1$ et puisque $\forall x\in]-\infty,0]; \sqrt{e^x}-1\leqslant 0$ et $\forall x\in[0,+\infty[; \sqrt{e^x}-1\geq 0$

Alors : $\forall x\in]-\infty,0]; f'(x)\leqslant 0$ et $\forall x\in[0,+\infty[; f'(x)\geq 0$

D'où : $\boxed{f \text{ est croissante sur l'intervalle } [0,+\infty[\text{ et décroissante sur l'intervalle }]-\infty,0]}$

0.25

4- a- **Vérifions que :** $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x) = 2x+2\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}; f(x) = 2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2) = 2\ln\left(e^x(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x})\right)$

$$= 2\ln(e^x) + 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right) = 2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

Donc : $\boxed{f(x) = 2x+2\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)}$

0.5

b- **Montrons que : la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage $+\infty$**

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) - 2x$$

$$= 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 2\ln 1 = 0$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x} = 1$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0}$

D'où: : $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une asymptote oblique } (D) : \ y = 2x \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.25

5- a) **Vérifions que** $\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x}^2 - 3\sqrt{e^x} + 2$

On pose : $\sqrt{e^x} = t$ donc : $\sqrt{e^x}^2 - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

Donc : $t = 1$ ou $t = 2$ Alors : $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)}$

0.5

b) **Étudions le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.**

✍ Étudions le signe de $\sqrt{e^x} - 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$\sqrt{e^x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} \geq 2 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$

et $\sqrt{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 4$

Alors : $\boxed{\forall x \in]-\infty, \ln 4]; \sqrt{e^x} - 2 \leqslant 0 \text{ et } \forall x \in [\ln 4, +\infty[; \sqrt{e^x} - 2 \geq 0}$

✍ **Le signe de $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{e^x} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0.25

c) **En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.**

On a : $\forall x \in [0, \ln 4]; (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leqslant 0$

Càd : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leqslant 0$

Donc : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 + \sqrt{e^x} \leqslant \sqrt{e^x}$

D'où : $\boxed{\forall x \in [0, \ln 4]; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}}$

0.5 d) **Montrons que** $\forall x \in [0, \ln 4]; f(x) \leqslant x$

On a : $0 < e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leqslant \sqrt{e^x}$

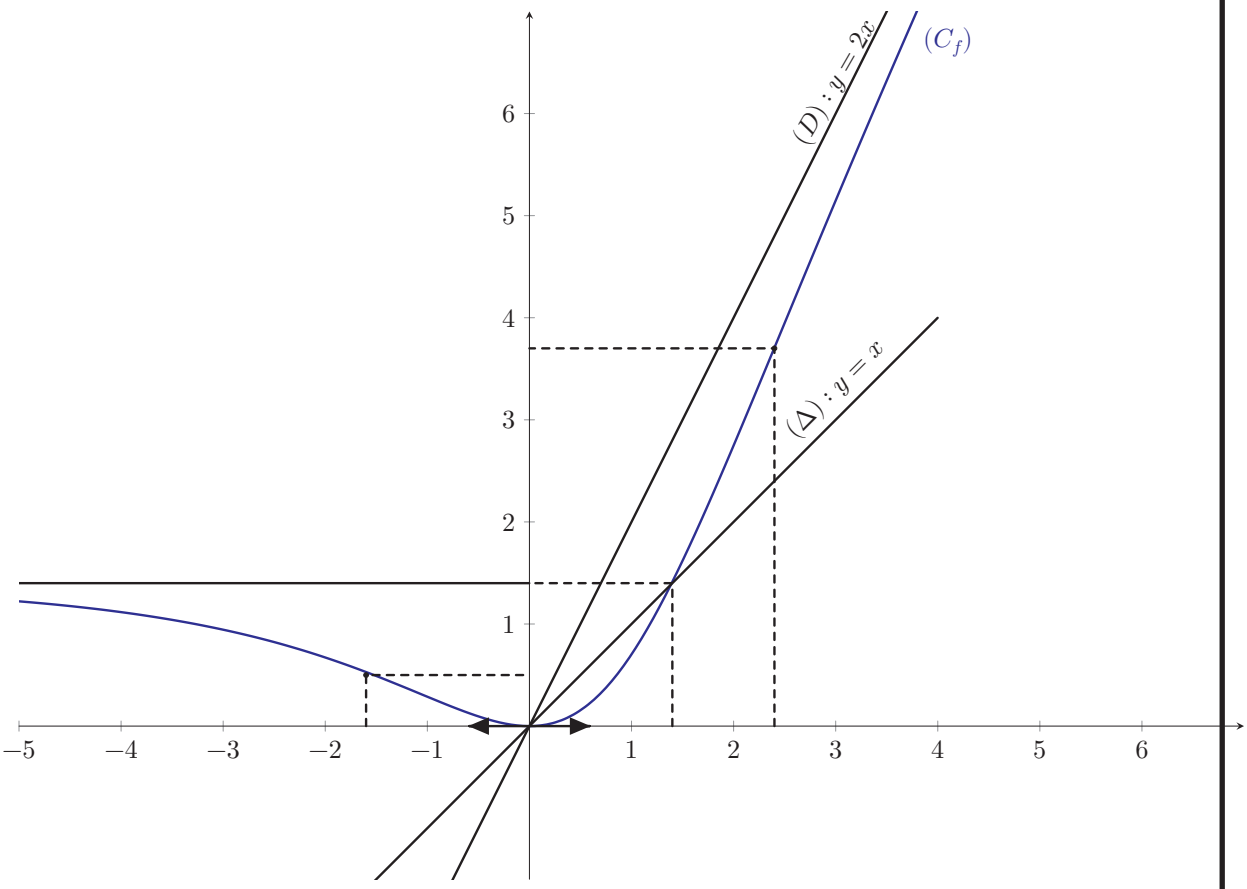
Donc $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant \ln(\sqrt{e^x})$

$\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant \frac{1}{2}x$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leqslant x$

Par conséquence $\boxed{\forall x \in [0, \ln 4];\ f(x) \leqslant x}$

0.75 6- **Construisons la courbe** $(\mathcal{C}_f)$ **et la droite** $(\mathbb{D})$ **dans le repère** $\left(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$



II- Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 = 1$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.75 1- **Montrons, par récurrence, que** $0 \leq \mathcal{U}_n \leq \ln(4)$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

✓ Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ donc $0 \leq \mathcal{U}_0 \leq \ln(4)$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq \mathbf{ln}(4)$ et on montre que $0 \leq u_{n+1} \leq \mathbf{ln}(4)$

On a $0 \leq u_n \leq \mathbf{ln}(4)$ et f une fonction dérivable (d'après la question **2-**) donc continue et strictement croissante sur $[0, \mathbf{ln}(4)]$

Donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\mathbf{ln}(4))$ et puisque $f(\mathbf{ln}(4)) = \mathbf{ln}(4)$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$

Alors $0 \leq u_{n+1} \leq \mathbf{ln}(4)$

✓ Alors d'après le principe de récurrence on a : $\boxed{0 \leq u_n \leq \mathbf{ln}(4), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

0.75 2- **Montrons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante**

D'après la question **5-b)** on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \mathbf{ln}(4)]$

Et d'après la question précédente on a $u_n \in [0, \mathbf{ln}(4)]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $f(u_n) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$

1 3- **Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculons sa limite**

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

Alors : $\boxed{\text{la suite } (\mathcal{U}_n) \text{ est convergente}}$

✓ **Calcule de $\lim u_n$**

Soit $x \in [0, \mathbf{ln}(4)]$;

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2\,\mathbf{ln}\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = x \Leftrightarrow \mathbf{ln}\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 - \sqrt{e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \mathbf{ln}\,4 \; (d'aprs \; la \; question \; I - 5 - b)$$

Puisque $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq u_0 = 1$ donc $\lim u_n \leq 1$

D'où $\boxed{\lim u_n = 0}$

6l

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S).

0.75 pt **b)** Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

0.75 pt **a)** Démontrer que $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que $(6,-6,-3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.

0.75 pt **b)** Calculer $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+25=0$.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=3+4i$, $b=3-4i$, $c=2+3i$ et $d=5+6i$.

0.5 pt **a)** Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que le nombre $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

1 pt **c)** Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Une urne contient *sept* boules noires et *deux* boules blanches.

(***les boules sont indiscernables au toucher***)

On tire au hasard, successivement et sans remise, *deux* boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

0.5 pt **1 -** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

1.5 pt **2 -** Montrer que $p(X=0)=\dfrac{1}{36}$ et $p(X=1)=\dfrac{7}{18}$.

1 pt **3 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 3 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **1 -** Vérifier que $1 - u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que $1 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 - On pose $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$, puis exprimer v_n en fonction de n.

1 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 2 Pts

1 pt **1 -** Déterminer les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \frac{1}{2010}.$$

1 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln 3 - 2$.

Exercice 6 — Session : RATTRAPAGE 2009 — 6 Pts

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$.

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ pour tout réel x.

1 pt **b)** Montrer que la fonction f est paire et que $f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ pour tout réel x.

1 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 -** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$ puis en déduire que : $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(on admettra que la courbe possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage 2009

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt

1 - a) On montre que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) puis on vérifie que $A \in (S)$.

- Montrons que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

  On a (S) est la sphère de centre Ω et de rayon $R=3$. Soit $M(x,y,z) \in (S)$ alors :

$$\begin{aligned}\Omega M = R &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2\\ &\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=3^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=9\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1-9=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0\end{aligned}$$

  Donc : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

- Vérifions que le point $A \in (S)$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \Omega A &= \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}\\ &= \sqrt{(2-1)^2+2^2+(-1-1)^2}\\ &= \sqrt{1+4+4}\\ &= \sqrt{9}\\ &= 3\end{aligned}$$

  Donc $\Omega A = R$ D'où $A \in (S)$

0.75 pt **b)** On calcule la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

- Calculons $d(\Omega,(P))$.
  On a $(P): 2x+y+2z-13=0$ et $\Omega(1,0,1)$ donc :

$$\begin{aligned} d(\Omega,(P)) &= \frac{|2x_\Omega + y_\Omega + 2z_\Omega - 13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\ &= \frac{|2+0+2-13|}{3} \\ &= \frac{|-9|}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  Donc : $d(\Omega,(P)) = 3$

- Déduisons que le plan (P) est tangent à la sphère (S).
  On a : $d(\Omega,(P)) = 3 = R$
  Donc le plan (P) est tangent à la sphère (S)

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

0.75 pt **a)** On montre que : $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que : $(6,-6,-3)$ est le triple de cordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$

- On a la droite (D) est perpendiculaire au plan (P), alors le vecteur $\vec{u}(2,1,2)$, normal à (P), est un vecteur directeur de la droite (D).
- Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.
  On a : $\overrightarrow{\Omega A}(x_A - x_\Omega; y_A - y_\Omega; z_A - z_\Omega)$ donc $\overrightarrow{\Omega A}(2-1;2-0;-1-1)$ d'où $\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2\times 2 + 2\times 1)\vec{i} - (1\times 2 + 2\times 2)\vec{j} + (1\times 1 - 2\times 2)\vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

D'où : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$

0.75 pt **b)** On calcule $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

- On a : $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2} = \sqrt{81} = 9$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$, donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|} = \frac{9}{3} = 3$.
- On a : $d(\Omega,(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|} = 3 = R$, alors la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 25 = 36 - 100 = -64$

Comme $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions conjuguées sont :
$z_1 = \dfrac{-(-6) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{6 - i\sqrt{64}}{2} = 3 - 4i$ et $z_2 = \bar{z_1} = 3 + 4i$

Donc : $S = \{3 - 4i; 3 + 4i\}$

0.5 pt

2 - a) On calcule $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{d-c}{a-c} &= \frac{5+6i-2-3i}{3+4i-2-3i}\\ &= \frac{3+3i}{1+i}\\ &= \frac{3(1+i)}{1+i}\\ &= 3.\end{aligned}$$

- Puisque $\dfrac{d-c}{a-c} = 3 \in \mathbb{R}$,
alors les points A , C et D sont alignés.

0.5 pt

b) On montre que le nombre $p = 3 + 8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie $h(B, \frac{3}{2})$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } h(A) = P &\Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\\ &\Leftrightarrow p - b = \frac{3}{2}(a-b)\\ &\Leftrightarrow p = b + \frac{3}{2}(a-b)\\ &\Leftrightarrow p = 3 - 4i + \frac{3}{2}8i\\ &\Leftrightarrow p = 3 - 4i + 12i\\ &\Leftrightarrow p = 3 + 8i\end{aligned}$$

Donc : $p = 3 + 8i$

1 pt

c) On écrit sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'ongle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA = \sqrt{2}PD$.

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{d-p}{a-p} &= \frac{5+6i-3-8i}{3+4i-3-8i}\\ &= \frac{2-2i}{-4i}\\ &= \frac{2(1-i)i}{4}\\ &= \frac{1+i}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}).\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})).\\ &= [\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}]\end{aligned}$$

Donc : $\frac{d-p}{a-p} = [\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}]$.

- On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-p}{a-p}\right)[2\pi]$.

  Alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

- Montrons que : $PA = \sqrt{2}PD$

  On a : $PA = |a-p|$ et $PD = |d-p|$

  c'est à dire : $PA = |-4i|$ et $PD = |2-2i|$

  Donc : $PA = \sqrt{(-4)^2}$ et $PD = \sqrt{2^2+(-2)^2}$

  Alors : $PA = 4$ et $PD = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ce qui entraine que $\sqrt{2}.PD = 4$

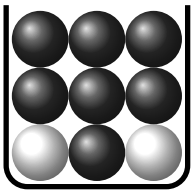
  D'ou : $PA = \sqrt{2}.PD$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 7 boules noires et deux boules blanches(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.



0.5 pt **1 -** Déterminons les valeurs prises par la variable aléatoire X.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne, alors on tire une

boule blanche, deux boules blanches ou on ne tire aucune boule blanche.

Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, ou Ω est l'univer de cette expérience aliatoire.

1.5 pt

2 - Montreons que : $P(X = 0) = \dfrac{1}{36}$ et $P(X = 1) = \dfrac{7}{18}$.

• Calculons $P(X = 0)$.

l'evenement $(X = 0)$ c'est tirer deux boules blanches, donc $card(X = 0) = A_2^2 = 2$ et puisque $card(\Omega) = A_9^2 = 72$ et les boules indiscernables au toucher(Hypothèse d'équiprobabilité)

Alors : $P(X = 0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$.

Donc : $P(X = 0) = \frac{1}{36}$

• l'evenement $(X = 1)$ c'est tirer une boule blanche et une boule noire.

Donc $card(X = 1) = 2A_2^1.A_7^2 = 2 \times 2 \times 7 = 28$

Alors : $P(X = 1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$.

Donc : $P(X = 1) = \frac{7}{18}$

1 pt

3 - La loi de probabilité de la variable aléatoire X et l'espérance mathématique $E(X)$.

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X.

  D'abord l'evenement $(X = 2)$ c'est tirer deux boules noires.

  Donc $card(X = 2) = A_7^2 = 42$, d'ou $P(X = 2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$.

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

- l'espérance mathématique $E(X)$.

$$\text{On a : } E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$
$$E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{12}$$
$$E(X) = \frac{14}{9}$$

Donc l'espérance mathématique de X est : $E(X) = \dfrac{14}{9}$

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n} \end{cases}$$

1 pt

1 - On vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, puis on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.

- On vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} On\ a : 1-u_{n+1} &= 1 - \frac{1+4u_n}{7-2u_n} \\ &= \frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n} \\ &= \frac{6-6u_n}{5+2-2u_n} \\ &= \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)} \end{aligned}$$

  Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$.

- On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.

  - Pour $n=0$, $1-u_0 = 1 > 0$ est vraie.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $1-u_n > 0$ et on montre que : $1-u_{n+1} > 0$.

  On a : $1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ et $1-u_n > 0$,

  Alors : $6(1-u_n) > 0$ et $5+2(1-u_n) > 0$,

  Donc : $1-u_{n+1} > 0$

  D'aprés le principe de raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.

2 - Soit (v_n) la suite définie par :$\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$

1 pt

a) On montre que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ puis on exprime v_n en fonction de n.

- On montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} On\ a : v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\frac{2(1+u_n)}{7-2u_n}-1}{\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1} \\ &= \frac{\frac{2+8u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}{\frac{1+4u_n-7+2u_n}{7-2u_n}} \\ &= \frac{-5+10u_n}{-6+6u_n)} \\ &= \frac{5(2u_n-1)}{6(u_n-1)} \\ &= \frac{5}{6}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

- On exprime v_n en fonction de n.

  Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = v_0 \times q^n$, ou $q = \frac{5}{6}$ est la raison de la suite (v_n).

  Puisque $v_0 = \frac{2u_0-1}{u_n-1} = 1$

  Alors : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

1 pt **b)** Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

puis en déduire la limite de la suite (u_n).

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n = \dfrac{2u_n - 2}{u_n - 1} + \dfrac{1}{u_n - 1}$

$$\Leftrightarrow v_n - 2 = \frac{1}{u_n - 1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n - 2} = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{1}{v_n - 2} = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n - 2}{v_n - 2}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{(\frac{5}{6})^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$.

- Ona : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{5}{6} < 1$,

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 : (2 pts)

1 pt

1 - Déterminons les fonctions primitives de la fonction : $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}\, dx = \frac{1}{2010}$$

- La fonction $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ admet des fonctions primitives définies sur $\mathbb{R}$

  Et on a : $2x\left(x^2 - 1\right)^{2009} = \left(x^2 - 1\right)'\left(x^2 - 1\right)^{2009} = \left(\frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010}\right)'$

  Donc $x \longmapsto \frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010} + k$,

  sont les fonctions primitives de la fonction : $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$.

- On a : $x \longmapsto \frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010}$ est la primitive de $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$,

Alors :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2010} - 0$$
$$= \frac{1}{2010}$$

Donc : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \frac{1}{2010}$.

1 pt **2 -** En utilisant l'intégration par parties, montrons que :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln 3 - 2$$

On pose : $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = 2x+1$, alors : $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $v(x) = x^2+x$.

Donc :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = \left[(x^2+x)\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x(x+1)}{x+1}\ dx$$
$$= 6\ln(3) - \int_0^2 x\ dx$$
$$= 6\ln(3) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= 6\ln(3) - \frac{4}{2}$$
$$= 6\ln(3) - 2$$

Alors : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln(3) - 2$.

Exercice 6 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

et soit (C) la courbe représentative de la f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 pt **1 - a)** On vérifie que : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right) \\ &= x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$.

1 pt **b)** Montrons que la fonction f est paire et que :

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

- Montrons que la fonction f est paire.

  On a $D_f = \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R}$ et d'aprés la question précedente

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\left(\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) \\ &= x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Alors f est une fonction paire.

- Montrons que :

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) - x \\ &= x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{1-e^{-2x}-e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) \\ &= \frac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$.

c) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la

droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) = +\infty$

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$
- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} = 0$,

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} -2xe^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}+1 = 1$.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)-x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$,

  Alors : la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 -** Montrons que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) - x \leq 0$

Car : $-2xe^{-2x} \leq 0$ et $e^{-2x}+1 >$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrons que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

$x \longmapsto x$, $x \longmapsto e^{2x}-1$ et $x \longmapsto e^{2x}+1$

aussi $x \longmapsto e^{2x}+1$ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right]' \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}+1)'(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} + \frac{2xe^{4x}+2xe^{2x}-2xe^{4x}+2xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \end{aligned}$$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

- $f'(0) = \dfrac{e^0-1+4\times 0e^{2\times 0}}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1-1}{2^2} = 0$

Alors : $f'(0) = 0$

0.5 pt **b)** Montr0ns que : $e^{4x}-1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que

$e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

- Montr0ns que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

  Soit $x \in [0; +\infty[$, alors $4x \geq 0$, donc $e^{4x} \geq 1$;

  D'ou $e^{4x} - 1 \geq 0$.

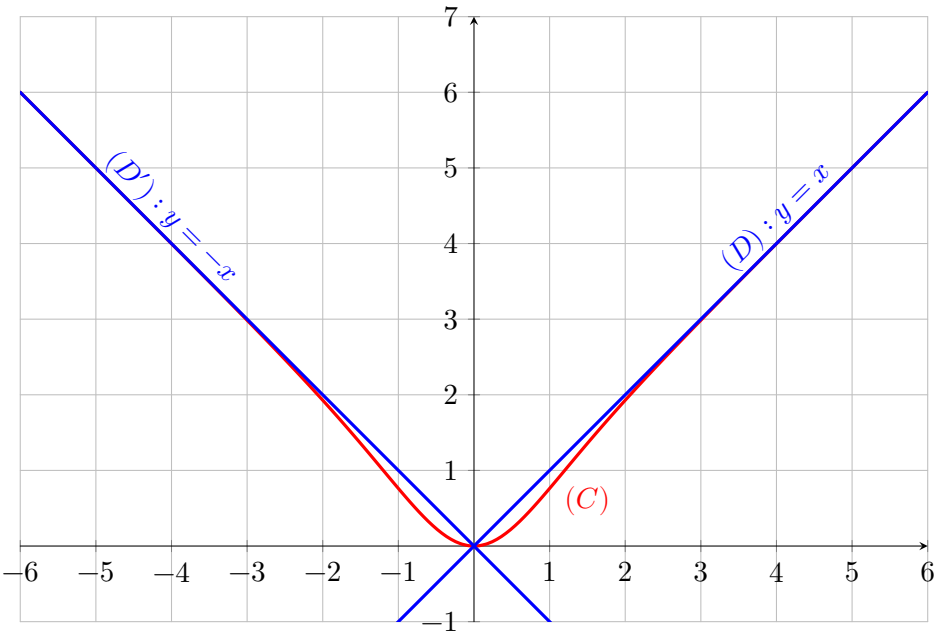
- Puisque:pour tout $x \in [0; +\infty[; e^{4x} - 1 \geq 0$, et $4xe^{4x} \geq 0$;

  Donc : $\forall x \in [0; +\infty[; [0, +\infty[; e^{4x} - 1 + 4xe^{4x} \geq 0$.

0.5 pt **c)** Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

x	0	∞
$f(x)$	$+$	
$f'(x)$	0	$+\infty$

1 pt **4 -** Construisons, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C). (on admet que (C) possède deux points d'inflexions). La fonction f est paire alors (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et admet deux asymptotes obliques : $(D) : y = x$ au voisinage de $+\infty$ et $(D') : y = -x$ au voisinage de $-\infty$



Exercice 1 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

On considère, dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ et $C(7,1,-3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **2 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3,1,0)$ et que son rayon est 5

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 pt **a)** Démontrer que : $\begin{cases} x = 3+3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ)

1 pt **b)** Démontrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+10=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=3-i$, $b=3+i$ et $c=7-3i$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz+2-4i$

0.25 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c'=5+3i$

1.25 pt **c)** Montrer que : $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

Une urne contient ***dix* boules**, *cinq* boules blanches, *trois* boules rouges et *deux* boules noires (**les boules sont indiscernables au toucher**)

On tire, au hasard, et simultanément, *quatre* boules de l'urne

1 - On considère les deux événement :

A : " **tirer une seule boule rouge** " B : " **tirer au moins une boule blanche** "

1 pt Montrer que : $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 et 1 et 2 et 3

1 pt **b)** Montrer que $P(X = 2) = \frac{3}{10}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{6}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 — Session : NORMAL 2010 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

0.75 pt **1 -** Montrer, par récurrence, que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

0.5 pt **3 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 5 — Session : NORMAL 2010 — 8 Pts

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$ puis vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** Déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + x + 1$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2cm \right)$

1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\left(\textbf{On rappelle que :} \lim\limits_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^{u} = 0\right)$

0.75 pt **2 -** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Déterminer le couple de coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

0.25 pt **4 - a)** Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O

0.25 pt **b)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

$\left(\textbf{la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée}\right)$

0.75 pt **5 -** Construire, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les deux droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

1 pt **6 - a)** En utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{\mathrm{e}}{2}$

0.5 pt **b)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (T) tangente à la courbe (C), et les deux droites des équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est : $(6 - 2\mathrm{e})cm^2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2010

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *; on considère les points* $A\,(-1,0,3)$ *;* $B\,(3,0,0)$ *et* $C\,(7,1,-3)$ *et* (S) *la sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt

1 - on sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\1\\-6\end{pmatrix}$

Alors

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4&8\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4&8\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)$, et on sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ; c'est à dire $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

où $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=3(x+y)+0y+4(z-3)=3x+4y-9$

Alors $3x+4y-9=0$

D'où l'équation cartésienne du plan (ABC) est $(ABC):\ 3x+4y-9=0$

0.5 pt **2 -** On a $(S): \; x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$, donc

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6x-2y-15 &= 0 \\ (x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+z^2-15-9-1 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Alors (S) est la sphère de centre $\Omega(3,1,0)$ et de rayon $R=\sqrt{25}=5$

3 - *Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).*

0.5 pt **a)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)$, et on a $\Omega\in(\Delta)$. Donc $\overrightarrow{\Omega M}$ est un vecteur directeur à (Δ).

et on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC).

Puisque (Δ) est perpendiculaire à (ABC), donc $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;

c'est à dire $\quad \exists\, t\in\mathbb{R} \;:\; \overrightarrow{\Omega M}=t\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

où $\quad \overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-3\\ y-1\\ z-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\quad \begin{cases} x-3 &= 3t\\ y-1 &= 0t\\ z-0 &= 4t\end{cases} ;\forall\, t\in\mathbb{R}$

Alors représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\quad (\Delta):\begin{cases} x &= 3t+3\\ y &= 1\\ z &= 4t\end{cases}$

1 pt **b)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)\bigcap(S)$, donc

$$\begin{cases} x &= 3t+3\\ y &= 1\\ z &= 4t\\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 &= 25\end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (3t+3-3)^2+(1-1)^2+(4t-0)^2 &= 25\\ 9t^2+16t^2 &= 25\\ 25t^2 &= 25\\ t^2 &= 1\\ t &= \pm 1\end{aligned}$$

- Pour $t=1$, on a $\begin{cases} x &= 3\times 1+3=6\\ y &= 1\\ z &= 4\times 1=4\end{cases}$ donc $E(6,1,4)$
- Pour $t=-1$, on a $\begin{cases} x &= 3\times(-1)+3=0\\ y &= 1\\ z &= 4\times(-1)=-4\end{cases}$ donc $F(0,1,-4)$

D'où la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$.

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt

1 - On a $z^2-6z+10=0$, donc le discriminant $\triangle = b^2-4ab = (-6)^2-4\times 1\times 10 = -4 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{6+i\sqrt{4}}{2} = 3+i \quad et \quad z_2 = \overline{z_1} = 3-i$$

Alors $S = \{3-i, 3+i\}$

2 - *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *; on considère les points A, B et C d'affixes respectives* $a = 3-i, b = 3+i$ *et* $c = 7-3i$.

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt

a) On a $R(M) = M'$, donc $z'-a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ Alors

$$\begin{aligned} z' &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-a)+a \\ z' &= (0+i\times 1)(z-3+i)+3-i \\ z' &= iz-3i-1+3-i \end{aligned}$$

$D'o\quad z' = iz+2-4i$

0.25 pt

b) On a $R(C) = C'$, donc $c' = ic+2-4i$ Alors

$$\begin{aligned} c' &= i(7-3i)+2-4i \\ c' &= 7i+3+2-4i \end{aligned}$$

$D'o\quad c' = 5+3i$

1.25 pt

c) On a

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2(1+1)} = \frac{i}{2}$$

D'où $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$

Puisque $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, donc $arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Alors $\overline{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'où le triangle BCC' est rectangle en B.

Et on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| &= \frac{1}{2} \\ \frac{|c'-b|}{|c-b|} &= \frac{1}{2} \\ \frac{BC'}{BC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$D'o\quad BC = 2BC'$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard et simultanément quatre boule de l'urne.

1 - *On considère les deux évènements*

A : Tirer une seule boule rouge

B : Tirer au moins une boule blanche

1 pt On a $Card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$, donc

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{210} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{210} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5}{210}$$
$$= \frac{205}{210}$$
$$= \frac{41}{42}$$

ou par une autre méthode ; on prend l'évènement

$\overline{B}$: Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées,

donc $p(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$, Alors $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

2 - *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.*

0.25 pt **a)** On peut obtenir

- Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 0$
- Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 1$
- Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 2$
- Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 3$

D'où les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

1 pt **b)**

$$p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{210} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$$

0.75 pt **c)** On a $p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(X = 3) = \frac{Card(X = 3)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{1 \times 7}{210} = \frac{1}{30}$

Donc

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par tout n de $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

0.75 pt **1 -** Pour $n = 0$, on a $u_0 - 1 = 2 - 1 > 0$

Supposons que $u_n - 1 > 0$, pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n} > 0$

car $u_n - 1 > 0$, et donc $u_n > 1$

Alors $U_{n+1} - 1 > 0$

D'où $u_n - 1 > 0; \ \forall n \in \mathbb{N}$

2 - *On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$*

1 pt **a)** On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \dfrac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{6u_n - 2 - 2u_n}{2u_n}} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \dfrac{u_n - 1}{2(2u_n - 1)}$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On sait que $v_n = v_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, où $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \dfrac{1}{3}$

D'où $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0.75 pt **b)** On a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$, donc

$$\begin{aligned} v_n(2u_n - 1) &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - v_n &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - u_n &= v_n - 1 \\ u_n(2v_n - 1) &= v_n - 1 \end{aligned}$$

D'o $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

Alors $\lim u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 1$

Car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, c'est à dire $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\lim u_n = 1$

0.5 pt **3 -** *Soit (w_n) la suite numérique définie par $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a $\lim u_n = 1$, donc $\lim w_n = \lim \ln u_n = \ln 1 = 0$ (car la fonction ln est continue en 1)

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 pt **1 -** On a $g'(x) = (4xe^{2x})' = 4x'e^{2x} + 4x \times (2x)'e^{2x} = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 8xe^{2x} + 4e^{2x}$

D'où $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** On a $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2x+1$ (car $e^{2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$)

Puisque $2x+1=0$ est équivalent à $x = -\frac{1}{2}$, donc le signe de $2x+1$ comme suit

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

Donc $g'(x) \geq 0$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $g'(x) \leq 0$; $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

D'où g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** On a $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

D'où $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e-2}{e}$

et puisque $e \simeq 2.7$, alors $e - 2 > 0$. Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** On a g est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$, et $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, i, j) (unité : 2cm)

1 pt **1 -** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.75 pt **2 -** On a $f'(x) = \left((2x-1)e^{2x}\right)' + x' = (2x-1)'e^{2x} + (2x-1)\times(2x)'e^{2x} + 1$

$= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$

D'où $f'(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

or $g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.75 pt **3 - a)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)e^{2x}+x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \dfrac{1}{x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

0.5 pt **b)** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} te^{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

D'où la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

0.5 pt **c)** Soit $M(x,y)$ le point d'intersection de la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$. Donc $x+1 = f(x)$, c'est à dire $f(x) - (x+1) = 0$

On a $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$

or $e^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $2x - 1 = 0$

D'où $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = x+1 = \dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{3}{2}$ sont les coordonnées du point d'intersection de la droite $(\triangle)$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Puisque $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$, donc le signe de $f(x) - (x+1)$ est celui de $2x-1$ (car $e^{2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$) ; et le signe de $2x-1$ est comme suit

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Donc $f(x) < x+1$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

et $f(x) > x+1$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

0.25 pt **4 - a)** On sait que l'équation cartésienne de (T) tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

et puisque $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, donc $y = x$

D'où $(T) : y = x$ est l'équation cartésienne de (T) tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O.

0.25 pt **b)** On a $f'(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $f''(x) = g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'après la question 2), on a

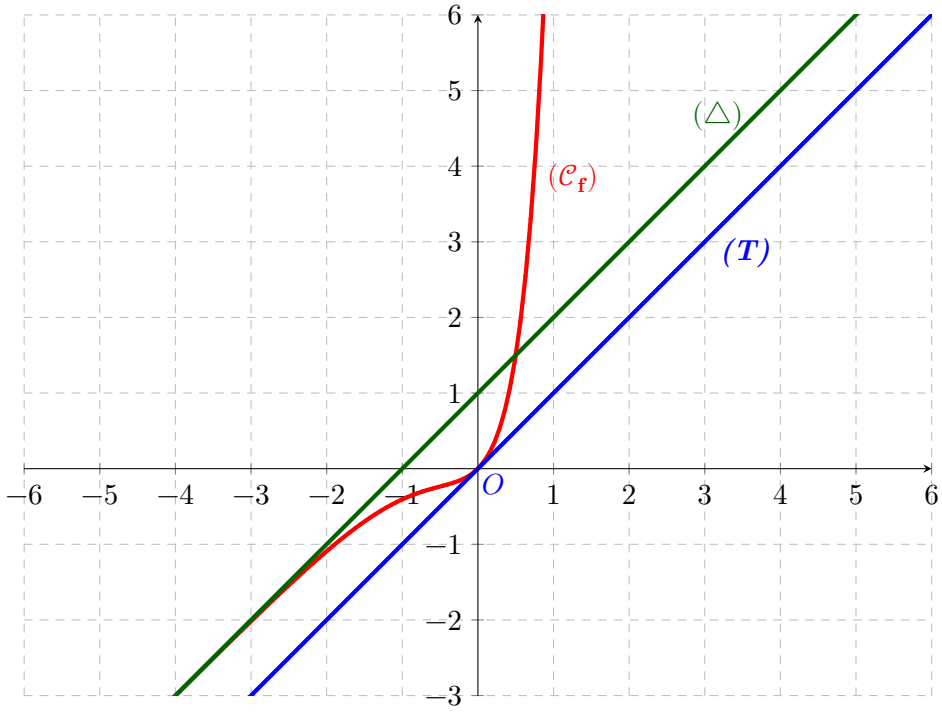
$$f''(x) \geq 0\,;\, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad f''(x) \leq 0\,;\, \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

Alors le tableau de variation de la fonction f'' est

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

D'où La courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

0.75 pt **5 -**



1 pt **6 - a)** Pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on pose

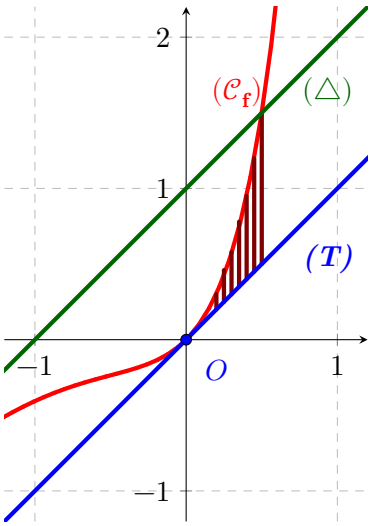
$u(x) = 2x-1$ et $v'(x) = e^{2x}$, donc $u'(x) = 2$et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[(2x-1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2\times\frac{1}{2}e^{2x}dx = \left[(x-\frac{1}{2})e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right] = 1 - \frac{e}{2}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$

0.5 pt **b)**



On sait que Graphiquement, l'intégration sert à mesurer une aire, donc l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$, la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est une intégrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x|\, dx \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x)dx \times (2cm)^2 \end{aligned}$$

$$\left(car\ d'aprs\ la\ figure\ f(x) \geq x; \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left((2x-1)e^{2x} + 1\right) dx \quad cm^2 \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx + 4\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \quad cm^2\end{aligned}$$

D'après la question $6 - a)$, on a $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$, donc

$$\mathcal{A} = 4\left(1-\frac{e}{2}\right)+4\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}} \quad cm^2$$

$$= 4-2e+4\left(\frac{1}{2}-0\right) \quad cm^2$$

$D'o \quad \mathcal{A} = (6-2e)\ cm^2$

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est 5.

2 - a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ puis en déduire que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — 1 pt

0.5 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Démontrer que : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \\ z=3+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). — 0.5 pt

b) Démontrer que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1,-2,0)$. — 0.25 pt

0.25 pt **c)** Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-8\sqrt{3}z+64=0$$ — 1 pt

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

0.5 pt **a)** Montrer que $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

0.25 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

c) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique. — 0.75 pt

0.5 pt **d)** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

Une urne contient huit boules qui portent les nombres suivants :

$$①\ ,\ ①\ ,\ ①\ ,\ ②\ ,\ ②\ ,\ ②\ ,\ ③\ ,\ ③$$

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 - Soient A et B deux événement tels que :

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt Montrer que $P(A) = \dfrac{3}{28}$ et que $P(B) = \dfrac{13}{28}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

0.75 pt **b)** Montrer que : $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

0.75 pt **c)** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 3 Pts

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21 + u_n} \end{cases}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que : $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **3 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

0.5 pt **b)** Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2010 — 8 Pts

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3.$$

1 - a) Vérifier que :

0.25 pt $3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

0.5 pt **b)** Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$. pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.5 pt **b)** En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

3 - a) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

(remarquer que : $g(1) > 0$).

0.5 pt

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm$)

1 - Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1 pt

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+lnx}{x^2} = 0$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(On rappel que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^2} = 0$)

0.75 pt

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

3 - Montrer que $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1,0)$

0.5 pt

4 - Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer).

0.75 pt

5 - a) En utilisant l'intégration par partie, montrer que

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\,dx = 1 - \frac{e}{2} \quad \text{(Poser : } u'(x) = \tfrac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = lnx\text{)}.$$

1 pt

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à : $\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) cm^2$.

0.5 pt

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : RATTRAPAGE 2010

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

0.5 pt **1 -** Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est $R=5$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0 &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+2^2+z^2-6z+3^2-1-4-9-11=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-25=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2 \end{aligned}$$

Donc le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est $R=5$.

1 pt **2 - a)** • Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

Comme $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ et $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(1-0,1-(-2),-4-0)$ et $\overrightarrow{AC}(0-0,1-(-2),-4-0)$

Donc $\overrightarrow{AB}(1,3,-4)$ et $\overrightarrow{AC}(0,3,-4)$

Alors $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}3 & 3\\ -4 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= (3\times(-4)-3\times(-4))\vec{i}-(1\times(-4)-0\times(-4))\vec{j}+(1\times3-3\times0)\vec{k}\\ &= 0\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

• Déduisons que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale à le plan (ABC).

Donc $(ABC) : \ 4y + 3z + d = 0$

puisque le point $A \in (ABC)$, donc $4y_A + 3z_A + d = 0$; c'est-à-dire $d = -4y_A - 3z_A$

Alors $d = -4 \times (-2) - 3 \times 0 = 8$

D'où $4y + 3z + 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

.

0.5 pt **b)** • Calculons $d(\Omega, (ABC))$

On a $d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{4y_\Omega + 3z_\Omega + 8}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{4 \times 2 + 3 \times 2 + 8}{\sqrt{25}} = \dfrac{25}{5}$

Donc $d(\Omega, (ABC)) = 5$

D'où $d(\Omega, (ABC)) = 5$

• Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

comme $d(\Omega, (ABC)) = 5 = R$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Démontrons que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ).

Comme la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC), alors

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur à la droite (Δ), et puisque on a $\Omega \in (\Delta)$

Alors $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; avec $(t \in \mathbb{R})$ *et* $M(x, y, z) \in (\Delta)$

Donc $\begin{cases} x - x_\Omega = 0t \\ y - y_\Omega = 4t \\ z - z_\Omega = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

D'où $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0.25 pt **b)** Démontrons que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1, -2, 0)$

Comme $4y_H + 3z_H + 8 = 4 \times (-2) + 3 \times 0 + 8 = -8 + 8 = 0$, alors $H(1, -2, 0) \in (ABC)$

Pour $t=-1$, on trouve que $\begin{cases} x=1 \\ y=2-4=-2 \\ z=3-3=0 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$; c'est-à-dire $H(1,-2,0)\in(\Delta)$

Donc $H(1,-2,0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC).

0.25 pt **c)** Vérifions que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

$$\begin{aligned} On\ a \quad \Omega H &= \sqrt{(x_H-x\Omega)^2+(y_H-y_\Omega)^2+(z_H-z_\Omega)^2} \\ &= \sqrt{(1-1)^2+((-2)-2)^2+(0-3)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ Donc \quad \Omega H &= R \end{aligned}$$

Alors $\Omega\in(S)$, et puisque $H\in(ABC)$ et que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

D'où H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

Comme le discriminant de l'équation est $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64<0$

Donc $z_1=\dfrac{8\sqrt{3}-i\sqrt{64}}{2}=4\sqrt{3}-4$ et $z_2=\overline{z_1}=4\sqrt{3}+4i$

D'où l'ensemble des solution de l'équation est $S=\{4\sqrt{3}-4i,4\sqrt{3}+4i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$. Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'ongle $\dfrac{4\pi}{3}$.

0.5 pt **a)** Montrons que $z'=\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

On sait que $R(M)=M' \Leftrightarrow z'=\omega+e^{i\theta}(z-\omega)$, avec $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ et $\omega=0$

$$\textit{Donc} \qquad z' = e^{i\frac{4\pi}{3}} z$$

$$= \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$$

$$= \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$$

$$\textit{Alors} \qquad z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

D'où $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

0.25 pt **b)** Vérifions que le point B est l'image du point A par la rotation R.

Soit le point A' d'affixe a' l'image du point A par la rotation R, on a donc

$$a' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) 8i = -\frac{8}{2}i - i^2\frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$= -4i + 4\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 4i$$

Donc $a' = b$

Alors les points A' et B sont confondus.

D'où le point B est l'image du point A par la rotation R.

0.75 pt **c)** • Montrons que $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{8i-(4\sqrt{3}-4i)}{2(4\sqrt{3}+4i)-(4\sqrt{3}-4i)}=\frac{-4\sqrt{3}+12i}{4\sqrt{3}+12i}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}$$

$$=\frac{-(\sqrt{3}-3i)^2}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)}$$

$$=\frac{-(3-6i\sqrt{3}-9)}{3+9}$$

$$=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$$

Donc $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Écrivons le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

d) Déduisons que le triangle ABC est équilatéral.

Comme $\quad \frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $\quad \left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1$; c'est-à-dire $\quad |a-b|=|c-b|$, alors $\quad AB=BC \qquad (1)$

Et puisque $\quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\ [2\pi]$, donc $\quad (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \qquad (2)$

D'après (1) et (2) le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules portées les nombres suivants : $1-1-1-2-2-2-3-3$

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1 - Soient A et B deux événement tels que

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt

a) • Montrons que $\quad P(A)=\frac{3}{28}$

Soit Ω l'univers, et comme le tirage est successive et sans remise, donc

$$Card(\Omega)=A_8^2=8\times 7=56$$

Et puisque les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Pour obtenir deux boules portant le nombre 2, on a $Card(A) = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

D'où $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

- Montrons que $P(B) = \dfrac{13}{28}$

Pour obtenir au moins une boule porte le nombre 3 ; c'est à dire

- soit obtenir la première boule porte 3 et la deuxième est contre 3, donc il y a $A_2^1 \times A_6^1$ possibilités.

- soit obtenir la deuxième boule porte 3 et la première est contre 3, donc il y a $A_6^1 \times A_2^1$ possibilités.

- soit obtenir les deux boules portant le nombre 3, donc il y a A_2^2 possibilités.

Donc $Card(B) = A_2^1 \times A_6^1 + A_6^1 \times A_2^1 + A_2^2 = 2A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2 = 26$

D'où $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Les boule tirées	La valeur de X
Il n'y a pas de boule porte un nombre impair	$X = 0$
Il y a une boule porte un nombre impair	$X = 1$
Les deux boules portant un nombre impair	$X = 2$

1 pt **b)** Montrons que $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

On a $Card(X = 1) = 2A_3^1 \times A_5^1 = 30$ (puisque on a 5 boules portant un nombre impair)

Donc $P(X = 1) = \dfrac{Card((X = 1)}{Card(\Omega)} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$

0.75 pt **c)** Donnons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

- $(X = 0)$ signifier de tirer deux boules portant le nombre 2.

Donc $P(X = 0) = P(A) = \dfrac{3}{28}$

- D'après la question précédente $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$
- On a $Card(X = 2) = A_5^2 = 20$

Donc $P(X = 2) = \dfrac{card((X = 2)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14}$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21+u_n} \end{cases}$

0.5 pt **1 -** Montrons que $u_n > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $1 > 0$, donc $u_0 > 0$, alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 0$ pour n fixé de $\mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} > 0$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n > 0$, donc $3u_n > 0$ et $21 + u_n > 0$

Alors $\dfrac{3u_n}{21+u_n} > 0$, d'où $u_{n+1} > 0$

D'après le raisonnement de récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrons que $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $(n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n = \dfrac{3u_n}{21+u_n} - \frac{1}{7}u_n = \dfrac{21u_n}{7(21+u_n)} - \dfrac{u_n(21+u_n)}{7(21+u_n)} = \dfrac{21u_n - 21u_n - (u_n)^2}{7(21+u_n)}$

$= -\dfrac{(u_n)^2}{7(21+u_n)}$

On sait que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$, donc $-\dfrac{(u_n)^2}{7(21+u_n)} < 0$; c'est-à-dire $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n < 0$

D'où $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **3 -**

- Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

  Comme $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$, donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{7}u_n < u_n$ et puisque $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$

  Alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} < u_n$

  D'où la suite (u_n) est décroissante.

- Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

  Comme la suite (u_n) est minorée par 0 et aussi décroissante.

  Alors la suite (u_n) est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrons par récurrence que $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$, on a $u_1 = \dfrac{3u_0}{21+u_0} = \dfrac{3}{22}$

et comme $\left(\dfrac{1}{7}\right)^1 = \dfrac{1}{7}$, c'est-à-dire $u_1 < \left(\dfrac{1}{7}\right)^1$, donc la proposition est vraie pour $n=1$

Supposons que $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour n fixé de $\mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} < \left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'après la question 2), on a $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ et comme $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

Donc $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ (car $u_n > 0$), d'où $u_{n+1} < \left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'après le raisonnement par récurrence $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.5 pt **b)** Déterminons la limite de la suite (u_n).

Comme $0 < u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

et $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ $\left(\text{car } 0 < \dfrac{1}{7} < 0\right)$

Donc $\lim u_n = 0$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

Soit $x \in]0,+\infty[$; $(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$

$= 3x^3 - x - 2$

Donc $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **b)** Montrons que $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

On sait que g est dérivable sur $]0,+\infty[$; comme la somme des fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, et on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3-x-2}{x}$

D'après la question précédente, on a $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

0.25 pt **2 - a)** Vérifions que $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

D'abord, résolvons l'équation (E) : $3x^2+3x+2=0$

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 3^2 - 4\times 3\times 2 = -15 < 0$

Donc $3x^2+3x+2 > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, et puisque $x > 0$

Alors $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$, pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduisons que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ et $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrons que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Si $x \in]0,1]$, alors $0 < x \leq 1$, donc $x-1 \leq 0$; par suite $g'(x) \leq 0$

Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$

Si $x \in [1,+\infty[$, alors $x \geq 1$, donc $x-1 \geq 0$; par suite $g'(x) \geq 0$

Donc la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduisons que $g(x) > 0$, pour tout x de $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(1) > 0$)

On a la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Donc g admet une valeur minimale absolue en 1.

Alors $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g(x) \geq g(1)$, et puisque $g(1) > 0$

D'où $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm$)

1 pt **1 -** • Montrons que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, pour tout x de $]0,+\infty[$

On sait que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;$

$$f'(x) = 1 + \frac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x-1+ln(x))}{x^4} = 1 + \frac{(x+1)x - 2x(x-1+ln(x))}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{x+1-2x+2-2ln(x))}{x^3}$$
$$= \frac{x^3 - x + 3 - 2ln(x)}{x^3}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

• Déduisons que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad x^3 > 0$ et $g(x) > 0$ (d'après la question $3-a$) dans la partie I)

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\quad f'(x) > 0$

Alors la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = -\infty$, par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

D'où (C) admet une asymptote verticale à droite d'équation $x = 0$.

0.75 pt **b)**

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$ (On rappel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$)

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$

  car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2} = 0$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

  Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = +\infty$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **c)** Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x-1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+ln(x)}{x^2} = 0$

Alors la droite (Δ) : $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

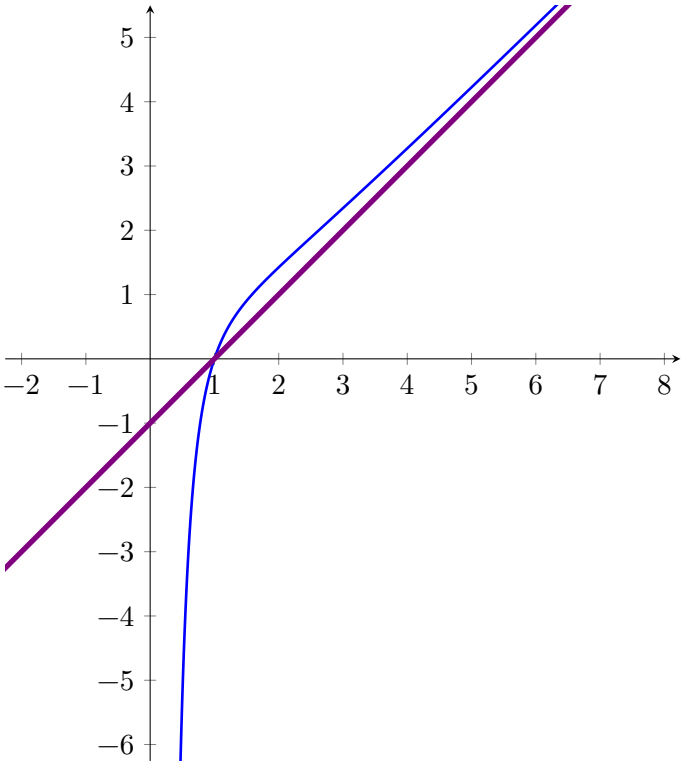
3 - Montrons que (T) : $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1,0)$. **0.5 pt**

On sait que f est dérivable en 1, et on a $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^3} = 3$

Donc (T) : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, et comme $f(1) = 1-1+\frac{1-1+\ln(1)}{1^2} = 0$

Alors $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à (C) au point de coordonnées $(1,0)$.

0.75 pt **4 -** Construisons la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont on ne demande pas de déterminer)



1 pt **5 - a)** En utilisant l'intégration par partie, montrons que $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v(x) = lnx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Donc $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = \frac{-ln(e)}{e} - \frac{1}{e} + \frac{ln(1)}{1} + \frac{1}{1}$

$= 1 - \frac{2}{e}$

D'où $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$

b) Montrons que $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les

0.5 pt deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) cm^2$.

On sait que $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x-1)|\mathrm{d}x \times u.s.m$

Et puisque $f(x) - (x-1) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$, alors

si $1 \leq x \leq e \Rightarrow (0 \leq x - 1 \leq e - 1$ et $0 \leq \ln(x) \leq 1)$

Donc $(\forall x \in [1, e])$; $f(x) - (x-1) \geq 0$, alors $(\forall x \in [1, e])$; $|f(x) - (x-1)| =$

$\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$, par suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)-x+1|\mathrm{d}x \times u.s.m \\
&= \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_1^e \left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \left(\left[\ln(x)+\frac{1}{x}\right]_1^e+1-\frac{2}{e}\right)cm^2 \\
&= \left(ln(e)+\frac{1}{e}-\ln(1)-\frac{1}{1}+1-\frac{2}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$

D'où $\mathcal{A} = \left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2011 — 2.5 Pts

1 - a) (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

b) (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln(2x)$

2 - (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2011 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (1,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n.

b) (1 pt) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 — Session : NORMAL 2011 — 5 Pts

1 - (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 18z + 82 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 9 + i \quad , \quad b = 9 - i \quad \text{et} \quad c = 11 - i.$$

a) (1 pt) Montrer que $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

b) (0,5 pt) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$.

c) (1 pt) Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$.

d) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

(1,5 pt) Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$.

Exercice **4** **Session : NORMAL 2011** **9.5 Pts**

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ et vérifier que $g(0) = 0$

0,5 pt **2 -** En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$.

(on rappelle que : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$).

0,25 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$).

0,5 pt **5 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2; -2)$.

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0;2)$.

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2-xe^{x}\mathrm{d}x = 3-\frac{4}{e}$

0,25 pt **b)** En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2011

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$ l'équation admet deux solutions réels distincts.

$x = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\times 1} = 1$ ou $x = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\times 1} = -5$

$S = \{-5; 1\}$

1 pt **b)** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln 2x$

$\forall \mathbf{x} \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$ et $2x > 0$

$\ln(x^2+5) = \ln(x+2) + \ln 2x \Leftrightarrow \ln(x^2+5) = \ln[(x+2)2x]$

$\Leftrightarrow x^2 + 5 = (x+2)2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

Donc $x = -5$ ou $x = 1$, or $x > 0$ donc $x = 1$

D'où $S = \{1\}$

1 pt **2 -** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation suivante : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

$\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \ln[x(x+1)] \geq \ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow x(x+1) \geq x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

Or $x > 0$. D'où $S = [1, +\infty[$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$U_{n+1} = \frac{U_n}{5+8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ et $\quad U_0 = 1$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $\quad U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_n > 0$ donc $8U_n > 0$ et $5 + 8U_n > 5$ donc $U_{n+1} = \frac{U_n}{5+8U_n} > 0$

D'après le principe de démonstration par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad U_n > 0$

2 - On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer V_n en fonction de n. **1.5 pt**

Montrons que $V_{n+1} = 5V_n$.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{U_n}{5+8U_n}} + 2 = \frac{5+8U_n}{U_n} + 2$$

$$= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right)$$

D'où $V_{n+1} = 5V_n$

Alors (V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} + 2 = 3$.

En suite : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = V_0 \times 5^n = 3 \times 5^n$

1 pt **b)** Montrer que $U_n = \frac{1}{3\times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$$

D'où $U_n = \frac{1}{3\times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3\times 5^n - 2} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et $5 > 1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 3 : (5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 18Z + 82 = 0$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 = (2i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{18+2i}{2} = 9 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 9 - i$

D'où $S = \{9 - i; 9 + i\}$

2 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 9+i$, $b = 9-i$, $c = 11-i$

1 pt **a)** Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$

D'où $\frac{c-b}{a-b} = -i$

On a $\frac{c-b}{a-b} = -i$ donc

$\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = |-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1$

Donc $BC = BA$

$\frac{c-b}{a-b} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $\frac{c-b}{a-b} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Or $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv \arg\frac{c-b}{a-b}[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BC = BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

0.5 pt **b)** Écrire $4(1-i)$ sous forme trigonométrique.

$|4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}4(1-i) &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

D'où $4(1-i) = \left[4\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

1 pt **c)** Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i) = (2-2i)2 = 4(1-i)$

D'où $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

$|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow AC \times BC = 4\sqrt{2}$

D'où $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

1.5 pt **d)** Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$.

$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$

$\Leftrightarrow z' - b = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))(z-b)$

$\Leftrightarrow z' = -i(z-9+i) + 9 - i$

$\Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$

D'où $z' = -iz + 10 + 8i$

Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$

$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -i(11-i) + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$

D'où $c' = 9 - 3i$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)'$

$= -e^x + (1-x)e^x$

$= e^x(-1+1-x)$

D'où $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

0.75 pt **b)** Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$

On a $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$ car $\quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pour $x \in [0, +\infty[$ on a $-x \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$

Donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$

Pour $x \in]-\infty; 0]$ on a $-x \geq 0$ alors $g'(x) \geq 0$

Donc g est croissante sur $]-\infty; 0]$

Vérifier que $g(0) = 0$

On a $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

0.5 pt **2 -** En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ donc $g(0)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ or $g(0) = 0$

D'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x - x$ et (C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x$$
$$= -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une **0.75 pt** branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)e^x}{x} - \frac{x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$
$$= -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Alors (C) admet une branche parabolique au direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^x - x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x$$
$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

0.25 pt **b)** Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$

D'où la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-x)'e^x + (2-x)\left(e^x\right)' - 1 \\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1 \\ &= e^x(-1+2-x) - 1 \\ &= e^x(1-x) - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

0.25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

0.5 pt **c)** Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de la fonction f

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

0.5 pt **4 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$).

On a la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$.

D'après le théorème de la bijection réciproque l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } f(\frac{3}{2}) \times f(2) &= [(2-\frac{3}{2})e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}] \times [(2-2)e^2 - 2] \\ &= (-2)(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}) \\ &= -e^{\frac{3}{2}} + 3 < 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

0.5 pt **5 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2;-2)$.

$$\begin{aligned} f(x) + x = 0 &\iff (2-x)e^x - x + x = 0 \\ &\iff (2-x)e^x = 0 \\ &\iff 2 - x = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Donc (C) et (D) se coupe au point $A(2; f(2))$, or $f(2) = -2$ donc $A(2;-2)$

0.25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x)+x=(2-x)e^x$, or $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, alors le signe de $f(x)+x$ est celui de $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)+x$		$+$	0	$-$	

0.25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

On a $\forall x\in]-\infty;2[$: $f(x)+x>0$, alors (C) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty;2[$ et on a $\forall x\in]2;+\infty[$: $f(x)+x<0$, alors (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

0.5 pt **6 - a)** Montrer que (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

On a $f'(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f''(x)=g'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

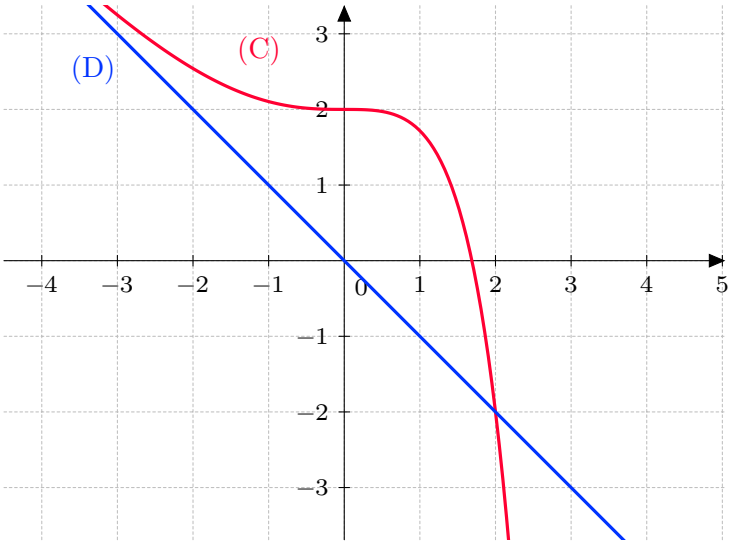
$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in]-\infty;0]$ et $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in[0;+\infty[$

Donc (C) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et $f(0)=2$

D'où (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=3-\frac{4}{e}$.

Calculons $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

Posons $u(x)=2-x$ donc $u'(x)=-1$

$v'(x)=e^x$ donc $v(x)=e^x$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = [(2-x)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x dx$$
$$= 2 - 3e^{-1} + [e^x]_{-1}^{0}$$
$$= 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

D'où $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

b) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **0.25 pt**

On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1; 0]$

$$A = \int_{1}^{e} f(x) - (-x)dx \times 1cm \times 1cm$$
$$= \int_{1}^{e} (f(x) + x)\, dx \quad cm^2$$
$$= \int_{1}^{e} (2-x)e^x dx \quad cm^2$$
$$= \left(3 - \frac{4}{e}\right) \quad cm^2$$

D'où $A = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \quad cm^2$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 3 Pts

1 - a) (0.5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

b) (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

2 - (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 4 Pts

1 - (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B ayant respectivement les affixes : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$

a) (0.5 pt) Écrire sous la forme trigonométrique les deux nombres a et b

b) (0.75 pt) Montrer que b' l'affixe du B' l'image de B par translation qui a le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

c) (1 pt) Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

d) (0.75 pt) Déduire d'après ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 3.5 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 - a) (0.5 pt) Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \dfrac{1}{3}}{15u_n + 1}$

b) (0.5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n > \dfrac{1}{3}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

(1.5 pt) Montrer que : (v_n) est une suite géométrique son raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n

3 - (1 pt) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2011 — 10 Pts

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est croissante sur I

1 pt **2 -** Déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$)

Partie II

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) \ln x$

et Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(l'unité 1 cm)

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\left($remarquer que pour tout x de I :

1 pt $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ $\right)$

c) Déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on

0.5 pt détermine sa direction

1 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

0.5 pt **b)** Déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

0.25 pt **c)** Donner le tableau de variation de f sur I

3 - Tracer (C)(On admettera que la courbe (C)posssède un seul point d'inflexion d'abscisse

1 pt compris entre 1.5 et 2)

0.5pt **4 - a)** Montrer que : $H : x \longrightarrow \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \longrightarrow \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I

0.75 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}$

1 pt **c)** On utilisant l'intégration par partie, montrer que : $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx = \frac{1}{2}$

0.25pt **5 - a)** Vérifier que pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les

0.5pt deux droite d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0.5cm^2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences et Technologies

Session : RATTRAPAGE 2011

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2,5 pts)

1 - a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 2x - 3 = 0$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

Et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$

Donc : $S = \{-1; 3\}$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

$$\text{On a : } e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 2e^x - 3}{e^x} = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$$

On pose $t = e^x$

Donc $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

Alors , d'après 1-a , on a $t = 3$ ou $t = -1$

Donc $e^x = 3$ ou $e^x = -1$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ alors $e^x = 3$

Donc $x = ln3$

Donc : $S = \{ln3\}$

2 - Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x-1} - e^{-x} \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } e^{x-1} - e^{-x} \geq 0 &\Leftrightarrow e^{x-1} \geq e^{-x} \\ &\Leftrightarrow x + 1 \geq -x \\ &\Leftrightarrow 2x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où : $S = [-\frac{1}{2}, +\infty[$

Exercice 2 : (4 pts)

0.75 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 18 = 36 - 72 = -36$

Comme $\Delta < 0$ alors $z_1 = \dfrac{-(-6) - i\sqrt{-(-36)}}{2} = \dfrac{6 - i\sqrt{36}}{2} = 3 - 3i$

Et $z_2 = \bar{z_1} = 3 + 3i$

Donc : $S = \{3 - 3i; 3 + 3i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B d'affixes respectives a et b tels que : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$.

a) Écrivons a et b sous forme trigonométrique.

- On a $|a| = |3(1 + i)| = 3|1 + i| = 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$.

  Donc

$$\begin{aligned} a = 3 + 3i &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + frac1\sqrt{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

  Donc : $a = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

  Alors : $a = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

- On a $b = 3 - 3i = \bar{a}$

  Alors : $b = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$

  Donc : $b = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

0,75 pt **b)** Montrons que b' l'affixe du point B',l'image du point B par la translation du vecteur

$\overrightarrow{OA}$ est b' $= 6$.

On a B' d'affixe b' l'image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$

Donc : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

D'où $aff(\overrightarrow{BB'}) = aff(\overrightarrow{OA})$

Donc : $b' - b = (a - 0)$

Donc : $b' = (a - 0) + b$

Alors : $b' = a + b$

Donc : $b' = 3 - 3i + 3 + 3i$

Alors : $b' = 6$

Donc l'affixe du point B',l' image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{OA}$ est $b' = 6$.

0.5 pt **c)** Montrons que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{b - b'}{a - b'} &= \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} \\ &= \frac{-3 - 3i}{-3 + 3i} \\ &= \frac{-3(1 + i)}{-3(1 - i)} \\ &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ &= \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{1 + 2i + i^2}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{2i)}{2} = i\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$

- On a : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$

Alors : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = \left[1; \dfrac{\pi}{2}\right]$

0.5 pt Donc $\left|\dfrac{b - b'}{a - b'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{b - b'}{a - b'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt Alors $\dfrac{B'B}{B'A} = 1$ et $\overline{(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt Donc $B'B = B'A$ et $\overline{(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt D'où le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

d) Déduisons que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré . On a le point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

Donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

Alors le quadrilatère $OAB'B$ est un parallélogramme.

Et puisque le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

0.5 pt C-à-d $B'B = B'A$ et $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt D'où le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n)}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrons que : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{15u_n + 1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{18\,(u_n) - 15\,(u_n) - 1}{3\,(15u_n + 1)} \\ &= \frac{3u_n - 1}{3\,(u_n + 1)} \\ &= \frac{3\left(u_n - \frac{1}{3}\right)}{3\,(15u_n + 1)} \\ &= \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 pt **b)** Montrons que : $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $1 > \dfrac{1}{3}$ d'où $u_0 > \dfrac{1}{3}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > \dfrac{1}{3}$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > \dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} > 0$

On a d'après la question **1-a)** $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

Et puisque $u_n > \dfrac{1}{3}$

Alors $u_n - \dfrac{1}{3} > 0$ et $15u_n + 1 > 6 > 0$

D'où $\dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$donc $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} > 0$ d'où $u_{n+1} > \dfrac{1}{3}$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > \frac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

  $\forall n \in \mathbb{N}$,on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \times \frac{6\,(u_n)}{15u_n + 1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{18\,(u_n)}{15u_n + 1}} \\ &= 1 - \frac{15u_n + 1}{18u_n} \\ &= \frac{18u_n - 15u_n - 1}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n - 1}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n}{18u_n} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{18u_n} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) \\ &= \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$

- Exprimons v_n en fonction de n

  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

  Car $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = \frac{2}{3}$

  Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

0,5 pt

3 -

- Montrons que $u_n = \frac{1}{3 - 2 = (u_n)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  On sait que : $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  Alors : $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$

  Donc : $3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

  D'où $u_n = \frac{1}{3 - 3v_n}$

Et comme $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Donc $u_n = \dfrac{1}{3 - 3 \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

Alors $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

D'où : $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

- Déduisons $\lim u_n$.

On a $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

Alors $\lim u_n = \dfrac{1}{3 - 2 \times 0} = \dfrac{1}{3}$

Car $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

0,75 pt D'où $\lim u_n = \frac{1}{3}$

Problème : (10 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1 pt **1 - a)** Montrons que $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$ pour tout x de I

On a $u :\to x - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme sur $]0, +\infty[$)

Et $v : x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (fonction primitive de la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)

Donc $g = u + v$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = u'(x) + v'(x)$

Donc $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Donc $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

Finalement : $(\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

b) Déduisons que la fonction g est croissante sur l'intervalle I.

On sait que le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$ est le signe de $x + 1$

Et on a $(\forall x \in]0, +\infty[\quad x + 1 \geq 0$

En déduire que $g'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle I

Donc g est croissante sur l'intervalle I

0.5 pt **0.5 pt** **2 -** Déduisons que $g(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

On sait que g est croissante sur $I =]0,+\infty[$

- Sur l'intervalle $]0,1]$

0.5 pt On a $0 < x \leq 1$ donc $x \leq 1$

0.5 pt Alors $g(x) \leq g(1)$ (car g une fonction continue et croissante sur $]0,1]$)

Or $g(1) = 0$

D'où $g(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$

- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$

On a $1 \leq x$

0.5 pt Alors $g(1) \leq g(x)$ (car g une fonction continue et croissante sur $[1,+\infty[$)

Or $g(1) = 0$

D'où $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

D'où (C_f) admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x = 0$

0.5 pt **b)** • Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\\&=0\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

0.25 pt **c)** Déduisons que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Alors (C_f) admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

1 pt **2 - a)** Montrons que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de I.

On sait que $f_1 : x\to\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$

Et aussi la fonction $f_2 : x\to\ln x$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$

Donc $f=f_1\times f_2$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$.

Et on a $(\forall x\in]0,+\infty[)$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)'\\&=\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)'\\&=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x)'\\&=\left(0+\frac{1}{x^2}\right)\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\&=\frac{x-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) Déduisons que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et que la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad , f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Donc le signe $f'(x)$ est celui de $g'(x)$

- Comme $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$

  D'où $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) \leq 0$

  donc : f est décroissante sur $]0,1]$.

- Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$

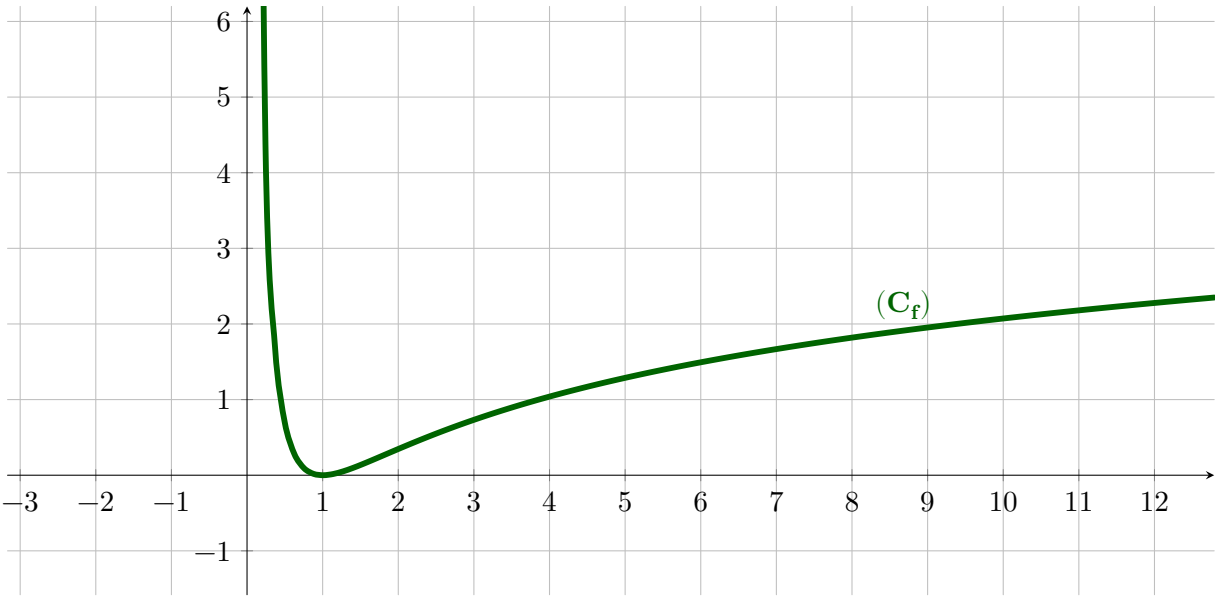
  D'où $(\forall x \in [1,+\infty[) \quad f'(x) \geq 0$

  donc : f est croissante sur $[1,+\infty[$.

c) Dressons le tableau des variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
(C_f)	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.75 pt **3 -** Construisons, la courbe (C_f). (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2)



0.75 pt **4 - a)** Montrons que $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

sur $]0,+\infty[$

On a H est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme le produit de deux fonction dérivables) et on a $\forall x \in]0,+\infty[$:

$H'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln x)^2\right)' = \frac{1}{2} \times 2(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

Donc : H est une fonction primitive de la fonction h sur $]0,+\infty[$

b) Montrons que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

0.5 pt **c)** Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^e \ln x dx = 1$

On pose : $\begin{cases} U(x) = \ln x \\ V'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = x \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= e\ln(e) - 1\ln(1) - [x]_1^e \\ &= e - e + 1 = 1\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e \ln x dx = 1$

5 - a) Vérifions que : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $I =]0,+\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x \\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x \\ &= \ln x - \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

Donc : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

0.5 pt

b) Montrons que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $0,5\mathrm{cm}^2$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$

On sait que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |f(x)|\mathrm{d}x \times u.m.s$

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{1}{e}$ car $f(e) = \left(\dfrac{e-1}{e}\right)\ln e = 1 - \dfrac{1}{e}$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x - \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x.cm^2 - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.cm^2 \\ &= 1cm^2 - \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e .cm^2 \\ &= 1cm^2 - \left(\frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right).cm^2 \\ &= 1cm^2 - \frac{1}{2}cm^2 \\ &= \frac{1}{2}cm^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}cm^2$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$, $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$

2 - a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ puis vérifier que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0.75 pt**

b) Vérifier que : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1 **1 pt**

3 - Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a) Démontrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) **0.25 pt**

b) Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(2,0,0)$ **0.25 pt**

c) En déduire le centre du cercle (Γ) **0.25 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-12z+61=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les A, B ,et C d'affixes respectives $a=6-5i$, $b=4-2i$,et $c=2+i$

a) Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ puis déduire que les points A, C et D sont alignés **0.5 pt**

b) On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est $1+5i$

Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d=3+6i$ **0.5 pt**

0.75 pt **c)** Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1+i$

0.5 pt **d)** En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}\right)$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2

On tire au hasard, et simultanément, trois jetons de l'urne

1 - Soit A l'événement : " Les trois jetons tirés portent des nombres différents deux à deux ".

1 pt Montrer que : $P(A) = \frac{5}{28}$

2 - Soit B l'événement : " La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 5 ".

1 pt Montrer que : $P(B) = \frac{5}{56}$

3 - Soit C l'événement : "La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 4 ".

1 pt Montrer que : $P(C) = \frac{3}{8}$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2012 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par :$u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer, par récurrence, que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) On utilisant la question **1)**, montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$,

0.75 pt puis exprimer v_n en fonction de n

0.75 pt **b)** Montrer que : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite du suite (u_n)

Exercice 5 — Session : NORMAL 2012 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1 - Montrer que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$ puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$ — **0.75 pt**

2 - Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1;+\infty[$ puis déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ — **0.75 pt**

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : **3cm**)

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement — **0.5 pt**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (On pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x$)

et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction — **1 pt**

2 - a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$ — **1.25 pt**

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ — **0.5 pt**

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartennant à l'intervalle $]0;+\infty[$ — **0.5 pt**

3 - Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ — **1 pt**

4 - a) Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ — **0.5 pt**

1 pt

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x \mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et

0.25 pt

les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2012

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère :

- Les points : $\boxed{A(1,1,-1)}$ $\boxed{B(0,1,-2)}$ $\boxed{C(3,2,1)}$
- La sphère $(\mathcal{S})$ d'équation cartésienne : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0}$.

0.5 pt **1 -** Montrons que la sphère $(\mathcal{S})$ est de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

On a $(\mathcal{S})$: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

Donc $(\mathcal{S})$: $(x^2-2x+1)-1+y^2+(z^2-2z+1)-1-1=0$

Donc $(\mathcal{S})$: $(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3$

Et par suite : le centre de la sphère $(\mathcal{S})$ est $\Omega(1,0,1)$ et le rayon est $R=\sqrt{3}$

0.75 pt **2 - a)** • Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$:

On a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$

Et on a $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A) \Longrightarrow \overrightarrow{AC}(2,1,2)$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=((0\times 2)-(-1\times 1))\vec{i}-((-1\times 2)-(-1\times 2))\vec{j}+((-1\times 1)-(0\times 2))\vec{k}$

Ce qui donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0-(-1))\vec{i}-((-2)-(-2))\vec{j}+((-1)-0)\vec{k}$

Et par suite : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}}$

• Vérifions que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$:

▶ Méthode 1 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors les points A, B et C ne sont pas alignées donc ils forment un UNIQUE plan $(\mathcal{ABC})$ Or On a : $\begin{cases} x_A-z_A-2 = 1-(-1)-2=0\\ x_B-z_B-2 = 0-(-2)-2=0\\ x_C-z_C-2 = 3-1-2=0\end{cases}$

Donc $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$.

▶ Méthode 2 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors les points A, B et C ne sont pas alignées

Donc ils forment un plan $(\mathcal{ABC})$ qui a comme vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$.

Et donc l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$ s'écrit sous la forme $(\mathcal{ABC}): x-z+d=0$.

Or B$\in(\mathcal{ABC})$ donc $x_B-z_B+d=0$ donc $d=z_B-x_B=-2-0$ donc $d=-2$

Et par suite : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$.

1 pt **b)** • Vérifions que $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\sqrt{2}$:

On a $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

• Déduisons que le plan $(\mathcal{ABC})$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ selon un cercle (Γ) de rayon 1 :

On a $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\sqrt{2}<R=\sqrt{3}$

Donc le plan $(\mathcal{ABC})$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ selon un cercle (Γ) de rayon r,

Avec $r=\sqrt{R^2-[d(\Omega,(\mathcal{ABC}))]^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

3 - Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan $(\mathcal{ABC})$:

0.25 pt **a)** Montrons que $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ) :

On a $(\Delta)\perp(\mathcal{ABC})$

Donc tout vecteur normal au plan $(\mathcal{ABC})$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

ce qui signifie que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Or $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$

Alors la représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

0.25 pt **b)** Montrons que $H(2,0,0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan $(\mathcal{ABC})$:

On a $H=(\Delta)\cap(\mathcal{ABC})$ Donc $H\in(\Delta)$ et $H\in(\mathcal{ABC})$

Donc $(\exists t\in\mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} x_H = 1+t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ x_H-z_H-2 = 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow 1+t-(1-t)-2=0$

Ce qui donne $2t-2=0$ Donc $t=1$ Et par suite $\begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 0 \\ z_H = 0 \end{cases}$ SQFD

0.25 pt **c)** Déduisons le centre du cercle (Γ) :

On Sait que le centre du cercle (Γ) est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $(\mathcal{ABC})$

Or $\Omega\in(\Delta)$ et $(\Delta)\perp(\mathcal{ABC})$ Alors $(\Delta)\cap(\mathcal{ABC})=H$ est le centre du cercle (Γ).

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** résoudrons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 12z + 61 = 0$:

Calculons le discriminant Δ : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes z_1 et z_2 avec :
$z_1 = \dfrac{-(-12) - i\sqrt{100}}{2} = \dfrac{12 - 10i}{2} = 6 - 5i$ et $z_2 = \bar{z_1} = 6 + 5i$
Et par suite $S = \{6 - 5i, 6 + 5i\}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, On considère les points A, B ,et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$, et $c = 2 + i$

0.5 pt **a)** • Calculons $\dfrac{a-c}{b-c}$:
On a $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{6 - 5i - (2+i)}{4 - 2i - (2+i)} = \dfrac{6 - 5i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \dfrac{4 - 6i}{2 - 3i} = \dfrac{2(2 - 3i)}{2 - 3i} = 2$
• Déduisons que les points A, B et C sont alignés :
On a $\dfrac{a-c}{b-c} = 2 \in \mathbb{R}^*$ Alors les points A, B et C sont alignés.

0.5 pt **b)** On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est 1 + 5i :

• Vérifions que l'affixe du point D image du point C par la translation T est d = 3 + 6i :

On sait que Si $M(z)$ et $M'(z')$ deux points tels que $T(M) = M'$ Alors $z = z' + aff(\vec{u})$

Or on a $T(C) = D$ et $aff(\vec{u}) = 1 + 5i$ Alors $d = c + 1 + 5i$

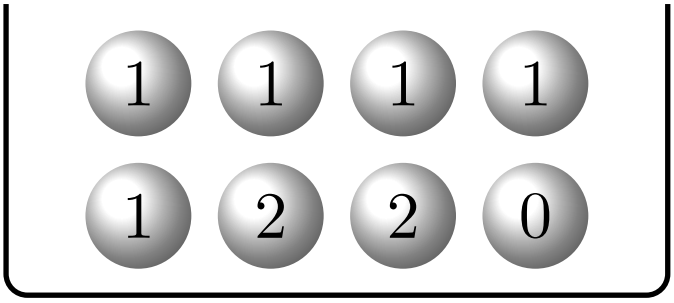
Donc d=2+i+1+5i Et par suite d=3+6i.

c) • Montrons que $\dfrac{d-c}{b-c} = -1 + i$
On a $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{3 + 6i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \dfrac{1 + 5i}{2 - 3i} = \dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2 + 3i + 10i - 15}{2^2 + 3^2}$
Donc $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{-13 + 13i}{13} = -1 + i$
• Montrons que $arg(-1 + i) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$
On a $-1 + i = -(1 - i) = -(\overline{1 + i})$
On sait que $(\forall a, b, c \in \mathbb{C}^*)$ $a = bc \Longrightarrow arg(a) \equiv arg(b) + arg(c)[2\pi]$
Donc $arg(-1 + i) \equiv arg(-1) + arg(\overline{1 + i})[2\pi]$
Or $arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$ Et $arg(\overline{1 + i}) \equiv -arg(1 + i)[2\pi]$
Alors $arg(-1 + i) \equiv \pi - arg(1 + i)[2\pi]$
Et On a $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ Donc $1 + i = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(cos(\dfrac{\pi}{4}) + isin(\dfrac{\pi}{4}))$
Donc $arg(1 + i) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ Donc $arg(-1 + i) \equiv \pi - \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
Et par suite $arg(-1 + i) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

d) Déduisons une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$:
On sait que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg(\dfrac{d-c}{b-c})[2\pi]$ et que d'après ce qui précède $\dfrac{d-c}{b-c} = -1 + i$
Donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg(-1 + i)[2\pi]$
Et par suite $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : une boule portant le nombre 0, cinq boules portant chacune le nombre 1 et deux boules portant chacune le nombre 2 On tire au hasard, et simultanément, trois boules de l'urne :



1 pt **1 -** Soit A l'événement : " Les trois boules tirées portent des nombres différents deux à deux ".

Montrons que : $p(A) = \frac{5}{28}$:

On a les boules sont indiscernables au toucher, et le tirage est au hasard,

Donc nous somme dans une situation d'équiprobabilité,

Et Donc la probabilité de chaque événement K est $p(K) = \frac{card(K)}{card(\Omega)}$.

Donc $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Or l'expérience aléatoire consiste à tirer 3 boules simultanément parmi 8 au total dans l'urne,

Donc le nombre total des possibilités est une combinaison de 3 éléments parmi 8 éléments.

Et par suite $card(\Omega) = C_8^3 = 56$.

On a l'événement A : " Les trois boules tirées portent des nombres différents deux à deux ".

Donc il faut tirer une boule portant 0 et une boule portant 1 et une boule portant 2

CÀD $A \iff$ "012" et l'ordre n'est pas important car le tirage est en même temps.

Donc $card(A) = C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1 = 5 \times 2 = 10$

Et par suite $p(A) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

1 pt **2 -** Soit B l'événement : " La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 5 ".

Montrons que : $p(B) = \frac{5}{56}$:

de la même manière on a $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$.

Or la seule possibilité pour que l'événement B soit réalisé est de tirer 2 boules portant 2 et une boule portant 1 CÀD $B \iff$ "122" et l'ordre n'est pas important.

Donc $p(B) = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{56} = \frac{5}{56}$.

1 pt **3 -** Soit C l'événement : "La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 4 ".

Montrons que : $pC) = \frac{3}{8}$

On a $p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$, On a 2 cas possibles pour que l'événement C soit réalisé

Cas 1 : "tirer 2 boules portant 2 et une boule portant 0" et l'ordre n'est pas important.

OU

Cas 2 : "tirer 2 boules portant 1 et une boule portant 2" et l'ordre n'est pas important.

Donc $p(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1}{56}$

Donc $p(C) = \dfrac{1+20}{56} = \dfrac{21}{56}$

Et par suite $pC) = \dfrac{3}{8}$.

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **1 -** Vérifions que : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - \dfrac{12 \times 11}{11}$

Donc $u_{n+1} - 12 = \dfrac{1}{11}(10u_n + 12(1-11)) = \dfrac{1}{11}(10u_n - 12 \times 10)$

Et par suite $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons par récurrence que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

- Initialisation : Pour $n = 0$ On a $u_0 = 11 < 12$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que $u_n < 12$ et Montrons que : $u_{n+1} < 12$:

On a d'après la question précédente $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$

Or $u_n < 12$ Donc $u_n - 12 < 0$ Et puisque $\dfrac{10}{11} > 0$ Alors $u_{n+1} - 12 < 0$ SQFD.

- Conclusion : On a $u_0 < 12$ et On a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < 12 \Longrightarrow u_{n+1} < 12$.

Donc d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < 12$.

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - u_n = (\dfrac{10}{11} - \dfrac{11}{11})u_n + \dfrac{12}{11}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{11}u_n + \dfrac{12}{11} = \dfrac{-1}{11}(u_n - 12)$.

Or d'après la question précédente on a $u_n - 12 < 0$ et puisque $\dfrac{-1}{11} < 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n > 0$

Et par suite la suite (u_n) est strictement croissante donc la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente :

On a la suite (u_n) est majorée par 12 [Q 2 - a] Et croissante [Q 2 - b]

Donc la suite (u_n) est convergente .

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) • En utilisant la question 1), montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$:

0.75 pt Soit $n \in \mathbb{N}$ On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 12}{u_n - 12}$.

Et d'après la question 1) On a $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ Donc $\dfrac{u_{n+1} - 12}{u_n - 12} = \dfrac{11}{12}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{11}{12}$ Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$.

• Écrirons v_n en fonction de n : On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = v_0 \times \left(\dfrac{11}{12}\right)^{n-0}$ Or $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

0.75 pt **b)** • Montrons que $u_n = 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_n - 12$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 + v_n$

Or d'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$.

• Déduisons la limite du suite (u_n) :

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{11}{12}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{11}{12} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$.

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

0.75 pt **1 -** • Montrons que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$

▶ On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ Donc le tableau de signe de $x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc d'après ce tableau $x^2 - 1$ est négative strictement sur $]0;1[$.

▶ On a $2x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0;1[$. Or $\ln x < 0$ sur $]0;1[$

Donc $2x^2 \ln x$ est négative strictement $]0;1[$.

Et par suite $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ sont les deux négative strictement sur l'intervalle $]0;1[$.

• Déduisons que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$:

On a $\forall x \in]0;1[\ 2x^2 \ln x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$

Donc $\forall x \in]0;1[\ g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x < 0$

Et on a $g(1) = 0$ Donc $\forall x \in]0;1]\ g(x) \leq 0$

0.75 pt **2 -** • Montrons que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a d'après le tableau de signe précédent $x^2 - 1$ est positive strictement sur $]1;+\infty[$.

Or $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$ Donc $2x^2 \ln x$ est positive strictement $]1;+\infty[$.

Et par suite x^2-1 et $2x^2\ln x$ sont les deux positive strictement sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

• Déduisons que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$:

On a $\forall x\in]1;+\infty[\ 2x^2\ln x>0$ et $x^2-1>0$

Donc $\forall x\in]1;+\infty[\ g(x)=x^2-1+2x^2\ln x>0$

Et on a $g(1)=0$ Donc $\forall x\in[1;+\infty[\ g(x)\geq 0$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x^2-1)\ln x$.

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : $3cm$)

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, Puis interprétons le résultat géométriquement :

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$

Or $f(x)=(x^2-1)\ln x$ Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.

interprétation géométrique : (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ (c'est l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$).

0.5 pt **b)** • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\ln x=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

• Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

• Déduisons que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$.

1.25 pt **2 - a)** • Montrons que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$

On a $x\mapsto x^2-1$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$. et on a $x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Donc f est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Et on a $\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=((x^2-1)\ln x)'$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=(x^2-1)'\ln x+(x^2-1)(\ln x)'$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=2x\ln x+(x^2-1)\dfrac{1}{x}=2x\ln x+\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{1}{x}$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=2x\ln x+x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}(2x^2\ln x+x^2-1)$

Or on a $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$ Donc $\forall x\in]0;+\infty[\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

• Interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$:

On a $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = \dfrac{1-1+\ln 1}{1} = 0$

Donc (C) admet une tangente horizontale au point $M(1, f(1))$ avec $f(1) = 0$.

b) Montrons que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$: **0.5 pt**

On a $\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ Donc le signe de f' est celui de g (car $x > 0$).

Or d'après la partie I on a $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$ Et $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$:

Donc $\forall x \in]0;1]\ f'(x) \leq 0$ Et $\forall x \in [1;+\infty[\ f'(x) \geq 0$

Ce qui signifie que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$, et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

0.5 pt **c)** • Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

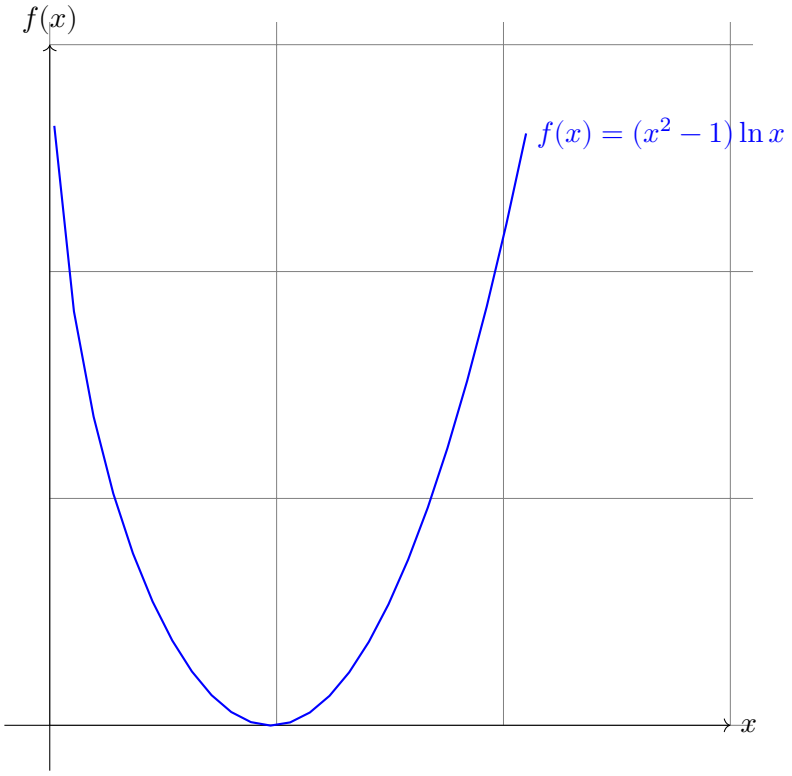
D'après ce qui précède on a le le tableau de variations f suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

• montrons que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$:

D'après le tableau de variations de f ci-dessus On a le point M(1,0) est un minimum sur l'intervalle $]0;+\infty[$.Ce qui signifie que $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) \geq 0$.

1 pt **3 -** Construisons la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : $3cm$) :



0.5 pt **4 - a)** montrons que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

On a u est une fonction polynômiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$,

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}\ u'(x) = (\dfrac{x^3}{3} - x)' = \dfrac{3}{3}x^{3-1} - 1 = x^2 - 1$

Et par suite $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

1 pt **b)** Montrons à l'aide d'une intégration par partie, que : $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x \mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$:

On a f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc elle continue sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[1; 2]$.

Et par suite l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x \mathrm{d}x$ existe.

On pose $\begin{cases} v'(x) = x^2 - 1 \\ w(x) = \ln x \end{cases}$ Donc D'après Q 4-a $\begin{cases} v(x) = \dfrac{x^3}{3} - x \\ w'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc par une intégration par partie On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2-1)\ln x\mathrm{d}x &= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\left(\frac{2^3}{3}-2\right)\ln 2 - \left(\frac{1^3}{3}-1\right)\ln 1\right) - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}-1\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2 \quad \boxed{\textbf{Car } \left(\frac{x^3}{9}-x\right)' = \frac{x^2}{3}-1 \textbf{ sur } [1;2]} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{2^3}{9}-2-(\frac{1^3}{9}-1)\right) \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{8}{9}-2-\frac{1}{9}+1\right) \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{7}{9}-1\right) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{-2}{9} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9} \\
&= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)
\end{aligned}$$

c) Calculons , en cm^2 $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe du abscisse et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$:

0.25 pt

On sait que $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| = \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times 3cm \times 3cm$

Or d'après la question 2-c) On a $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) \geq 0$.

Donc en particulier sur $[1;2]$ $|f(x)| = f(x) = (x^2-1)\ln x$

Donc $\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2-1)\ln x\mathrm{d}x \times 9cm^2$

Or d'après la question précédente On a $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

Donc $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(1+3\ln 2) \times 9cm^2$

Et par suite : $\mathcal{A} = 2(1+3\ln 2)cm^2$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 0, -3)$ et $C(0, 2, -2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon 3.

1.25 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ puis en déduire que $2x - y + 2z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0.75 pt **b)** Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

2 - Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Montrer que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

0.5 pt **b)** Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1, 2, -1)$.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2 - i, b = 6 - 7i$ et $c = 8 + 3i$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{c - a}{b - a} = i$.

0.75 pt **b)** En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2i$.

0.75 pt **b)** Montrer que $z' = -iz + 9 + 5i$.

0.25 pt **c)** Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Vérifier que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 - v_n > 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **3 - a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 3 Pts

Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 pt **1 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\dfrac{1}{22}$.

1 pt **2 -** Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\dfrac{3}{44}$.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\dfrac{37}{44}$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2012 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.75 pt **1 -** Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe (C).

0.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(il est préférable d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions qui suivent)

1.25 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **c)** Montrer que $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.25 pt **c)** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

1.5 pt **5 -** Construire les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).

(on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe (C))

0.75 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(\mathrm{e}^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : RATTRAPAGE 2012

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-3,0,0), B(0,0,-3)$ et $C(0,2,-2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt **1 - a)**

- Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

  On a : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(3;0;-3)$

  Et on a $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)$ donc $\overrightarrow{AC}(3;2;-2)$

  $$\text{Donc : } \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$
  $$=(0\times(-2)-(-3)\times 2)\vec{i}-(3\times(-2)-(-3)\times 3)\vec{j}+(3\times 2-0\times 3)\vec{k}$$
  $$=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

  D'où : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$

- Déduisons que $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

  On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (ABC)

  Donc : $(ABC): 6x-3y+6z+d=0$

  Et puisque $A\in(ABC)$ donc $6x_A-3y_A+6z_A+d=0$

  D'où $-18-0+0+d=0$ donc $d=18$

  Alors : $(ABC): 6x-3y+6z+18=0$, c'est à dire : $(ABC): 2x-y+2z+6=0$

  D'où $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.75 pt **b)**

- Calculons $d(\Omega,(ABC))$

  On a $(ABC): 2x-y+2z+6=0$ et $\Omega(1,1,1)$

  Donc : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|2-1+2+6|}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

  D'où $d(\Omega,(ABC))=3$

- Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$, alors $d(\Omega,(ABC))=3$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

2 - Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.5 pt **a)** Démontrons que $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

Soit $M(x,y,z)\in(D)$. On a : $2x-y+2z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), alors le vecteur $\vec{n}(2;-1;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Et puisque la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) alors $\vec{n}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur à la droite (D)

Et on a $\Omega\in(D)$, alors $\overrightarrow{\Omega M}=t\times\vec{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} x-1=2t \\ y-1=-t \\ z-1=2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$

D'où $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

0.5 pt **b)** Démontrons le triplet des coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1;2;-1)$.

On sait que le plan (ABC) est langent à la spphère (S) en H, alors H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC)

Et comme la droite (D) passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC), alors H est le point d'intersection de la droite (D) et le plan (ABC)

Donc les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \\ 2x-y+2z+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2x_H-y_H+2z_H+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2(1+2t)-(1-t)+2(1+2t)+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=1-t \\ z_H=1+2t \\ 2+4t-1+t+2+4t+6=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 1+2t \\ 9t+9=0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 1-t \\ z_H = 1+2t \\ t=-1 \end{cases}$

On remplace t par -1 on obtient $\begin{cases} x_H = 1-2 \\ y_H = 1+1 \\ z_H = 1-2 \end{cases}$, c'est à dire : $\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 2 \\ z_H = -1 \end{cases}$

Finalement le triplet des coordonnées de H est $(-1;2;-1)$.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2-i$, $b=6-7i$ et $c=8+3i$.

0.75 pt **1 - a)** Montrons que $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b-a} &= \frac{8+3i-(2-i)}{6-7i-(2-i)} \\
&= \frac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i} \\
&= \frac{6+4i}{4-6i} \\
&= \frac{2(3+2i)}{2(2-3i)} \\
&= \frac{3+2i}{2-3i} \\
&= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\
&= \frac{6+9i+4i+6i^2}{2^2-(3i)^2} \\
&= \frac{6+13i-6}{4-(-9)} \\
&= \frac{13i}{13} \\
&= i
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.

0.75 pt **b)** Déduisons que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

On a $\dfrac{c-a}{b-a}=i$, donc $\begin{cases}\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=|i|\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv arg(i)[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=1\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $\begin{cases}|c-a|=|b-a|\\ arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Alors $\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Et par suite, le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Vérifions que l'affixe du point Ω est $\omega=7-2i$.

On a Ω est le milieu du segment $[BC]$.

Donc : $aff(\Omega)=\dfrac{aff(B)+aff(C)}{2}$

Alors : $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{6-7i+8+3i}{2}=\dfrac{14-4i}{2}=\dfrac{14}{2}-\dfrac{4}{2}i=7-2i$

Donc l'affixe du point Ω est $\omega=7-2i$.

0.75 pt **b)** Montrons que $z'=-iz+9+5i$.

On a :

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)+\omega\\ &\Leftrightarrow z'=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)(z-(7-2i))+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-i(z-7+2i))+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+7i-2i^2+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+7i+2+7-2i\\ &\Leftrightarrow z'=-iz+9+5i\end{aligned}$$

Donc $z'=-iz+9+5i$.

0.25 pt **c)** Montrons que le point C est l'image du point A par la rotation R.

Soit A' l'image de A par R. On a :

$$\begin{aligned} R(A) = A' &\Leftrightarrow z_{A'} = -ia + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -i(2-i) + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -2i + i^2 + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = -2i - 1 + 9 + 5i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = 8 + 3i \\ &\Leftrightarrow z_{A'} = c \end{aligned}$$

Et par suite, le point C est l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ et $3 > 1$ d'où $u_0 > 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 1$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > 1$ c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{3u_n + 4}$

Et puisque $u_n > 1$ alors $u_n - 1 > 0$ et $3u_n + 4 > 7$

D'où $\dfrac{u_n - 1}{3u_n + 4} > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)**

- Vérifions que $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = 1 - \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$

  Donc $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Déduisons que $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$, et on a $u_n > 1$, donc $u_n + 1 > 2$, alors $\dfrac{2}{u_n + 1} > 0$, d'où $1 - v_n > 0$

  Donc $1 - v_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Montrons que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ et $1 - v_n \neq 0$ (car $1 - v_n > 0$), donc $\dfrac{1}{1 - v_n} = \dfrac{u_n + 1}{2}$,

alors $\dfrac{2}{1-v_n} = u_n + 1$, d'où $u_n = \dfrac{2}{1-v_n} - 1 = \dfrac{2-1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

Donc $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **3 - a)**

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{7}$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

  $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1}{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} + 1} = \frac{u_n-1}{3u_n+4} \times \frac{3u_n+4}{7u_n+7} = \frac{u_n-1}{7(u_n+1)} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ v_{n+1} = \dfrac{1}{7} v_n$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{7}$.

- Exprimons v_n en fonction de n

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = v_0 \times q^{n-0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ car $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$

  Donc $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)**

- Calculons la limite de la suite (v_n)

  On a $\lim v_n = \lim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Car $-1 < \dfrac{1}{7} < 1$ c'est-à-dire $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Donc $\lim v_n = 0$.

- Déduisons la limite de la suite (u_n)

  On sait que $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

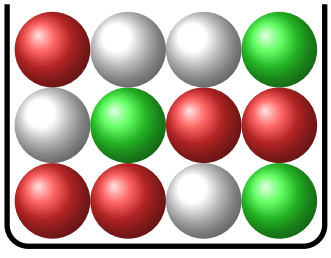
  Donc $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  Alors $\lim u_n = 1$ Car $\lim \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$

  Donc $\lim u_n = 1$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient *cinq* boules rouges, *quatre* boules blanches et *trois* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, simultanément, *trois* boules de l'urne.



1 pt **1 -** Montrons que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

On considère l'univers Ω, le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

Soit A l'événement : "Tirer trois boules rouges"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

On a $A : (R, R, R)$, donc $card(A) = C_5^3 = 10$, alors $P(A) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

Donc la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

1 pt **2 -** Montrons que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

Soit B l'événement : "Tirer trois boules de même couleur"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

On a $B : (R, R, R)$ ou (B, B, B) ou (V, V, V), donc $card(B) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10+4+1 = 15$,

alors $P(B) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$

Donc la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

1 pt **3 -** Montrons que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

Soit C l'événement : "Tirer une boule rouge au moins"

Les boules sont indiscernables au toucher, donc $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$

On a $\overline{C} : (\overline{R}, \overline{R}, \overline{R})$, donc $card(\overline{C}) = C_7^3 = 35$, alors $P(\overline{C}) = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

Donc $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$

Donc la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1 cm).

0.75 pt **1 -** • Montrons que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(-x) &= -x + \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \\
&= -x + \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} \\
&= -x + \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} \\
&= -x + \frac{1-e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1+e^x} \\
&= -x + \frac{1-e^x}{1+e^x} \\
&= -x + \frac{-(e^x-1)}{e^x+1} \\
&= -x - \frac{e^x-1}{e^x+1} \\
&= -\left(x + \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- Déduisons que le point O est centre de symétrie de (C).

  On a $\forall x \in \mathbb{R}; (-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x))$

  Donc la fonction f est impaire

  Alors (C) est symétrique par rapport à l'origine du repère

  D'où O est centre de symétrie de (C)

0.5 pt **2 -** Vérifions que $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{e^x+1-1-1}{e^x+1} \\
&= x + \frac{e^x+1-2}{e^x+1} \\
&= x + \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{-2}{e^x+1} \\
&= x + 1 - \frac{2}{e^x+1}
\end{aligned}$$

Donc $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1.25 pt **3 - a)** • Montrons $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : La fonction $f_1 : x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{-2}{e^x + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)

Donc $f = f_1 + f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x) \\ &= 1 + (-2) \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= 1 + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

• Vérifions que $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

On a : $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Donc $f'(0) = 1 + \dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2} = 1 + \dfrac{2}{2^2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

D'où $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

0.5 pt **b)** Montrons que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Et comme $2e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$, alors $f'(x) > 0$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **c)** Montrons que $y = \dfrac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point 0.

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable en 0

Donc (C) admet une tangente (T) au point d'abscisse 0 d'équation :

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Et comme $f'(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f(0) = 0 + 1 - \dfrac{2}{e^0+1} = 1 - \dfrac{2}{2} = 1 - 1 = 0$

Alors $(T) : y = \dfrac{3}{2}x$

D'où $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point 0

0.5 pt **4 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - \dfrac{2}{e^x+1} = +\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1))$, et déduisons que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - \dfrac{2}{e^x+1} - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x+1} = 0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x+1} = 0$

Et par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

D'où la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

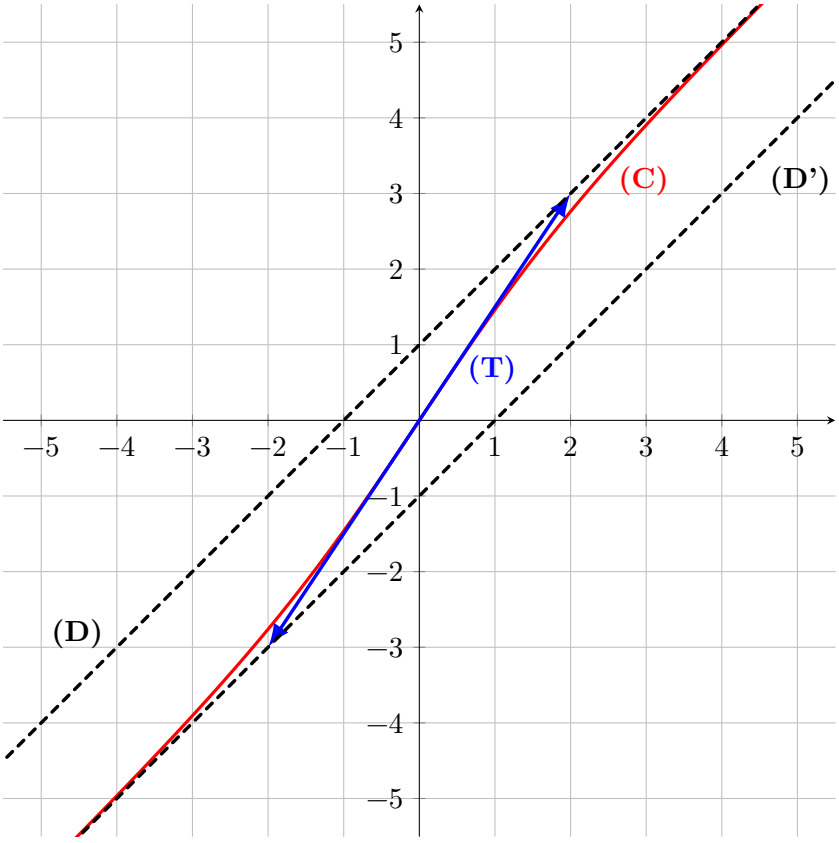
0.25 pt **c)** Montrons que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) - (x+1) = \dfrac{-2}{e^x+1}$, et puisque $-2 < 0$ et $e^x + 1 > 0$

Alors $\dfrac{-2}{e^x+1} < 0$, c'est à dire $f(x) - (x+1) < 0$

D'où la courbe (C) est au-dessous de la droite (D).

1.5 pt **5 -** Construisons les deux droites (D) et (T) et la courbe (C).



0.75 pt **6 - a)** Montrons la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

On a H est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Donc $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Déduisons que $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$.

On sait que H est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x &= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} \\ &= (\ln 2 - \ln(e^{\ln 2} + 1)) - (0 - \ln(e^0 + 1)) \\ &= (\ln 2 - \ln 3) - (-\ln 2) \\ &= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 \\ &= \ln(2^2) - \ln 3 \\ &= \ln 4 - \ln 3 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \ln 4 - \ln 3$.

0.5 pt **c)** Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)| \mathrm{d}x \times u_A \\
&= \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| \mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x + 1} \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= 2 \times \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= 2\left(\ln 4 - \ln 3\right).cm^2 \\
&= \left(2\ln 4 - 2\ln 3\right).cm^2 \\
&= \left(\ln(4^2) - \ln(3^2)\right).cm^2 \\
&= \left(\ln(16) - \ln(9)\right).cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \left(\ln(16) - \ln(9)\right).cm^2$.

Exercice 1 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

On considère dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $\Omega(1,1,-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et vérifier que $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

1 pt **b)** Vérifier que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

0,5 pt **a)** Démontrer que $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

0,5 pt **b)** Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que : $a=7+2i$; $b=4+8i$ et $c=-2+5i$

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

1 pt **b)** En déduire que : $AC=AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,75 pt **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d=10+11i$.

0,5 pt **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B , C et D sont alignés.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1,5 pt **1 -** Soient les deux événements suivants :

A:" Tirer deux boules rouges et deux boules vertes"

B:"Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées"

Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{7}$ et que $p(B)=\dfrac{1}{3}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0,25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.

1,25 pt **b)** Montrer que $p(X=1)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2013 — 3 Pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{25}{10-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1 - Vérifier que : $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ — **1 pt**

2 - On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ — **0,75 pt**

b) Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que $u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ — **1 pt**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ — **0,25 pt**

Exercice 5 — Session : NORMAL 2013 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 e^x$.

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ — **0,25 pt**

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. — **0,5 pt**

2 - a) Vérifier que : $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. — **0,25 pt**

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter ce résultat. — **0,5 pt**

(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

3 - a) Montrer que : $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$. — **1 pt**

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. — **0,5 pt**

4 - a) Montrer que : $f''(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées. — **1 pt**

b) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. — **1 pt**

5 - a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$. — **0.5 pt**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2$ — **0.75 pt**

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e-2)cm^2$. — **0.5 pt**

d) Utiliser la courbe pour donner le nombre de solution de l'équation : — **0.5 pt**

$x^2 = e^{-x} + 4x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2013

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans un espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $A(-1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $\Omega(1;1;-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et vérifier que $x+y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). . **1 pt**

On a $\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O)\vec{i}+(y_A-y_O)\vec{j}+(z_A-z_O)\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OA}=(-1-0)\vec{i}+(1-0)\vec{j}+(0-0)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OA}(-1,1,0)$

On a $\overrightarrow{OB}=(x_B-x_O)\vec{i}+(y_B-y_O)\vec{j}+(z_B-z_O)\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OB}=(1-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OB}(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}\text{ - }\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=(1\times1-0\times0)\vec{i}-(-1\times1-1\times0)\vec{j}+(-1\times0-1\times1)\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

Soit $M(x,y,z)$ un point $\in(ABC)$

On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB)

Donc (OAB) : $1x+1y-1z+d=O$ et puisque $O(0,0,0)\in(OAB)$ alors (OAB) : $1\times0+1\times-1\times+d=O$ donc $d=O$

D'où $(OAB):x+y-z=0$

b) Vérifier que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$. **1 pt**

On a : $(OAB) : x+y-z=0$ et $\Omega(1,1;-1)$ donc :

$d(\Omega,(OAB)) = \dfrac{|1+1+(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

D'où $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3}$

On a : $d(\Omega,(OAB)) = \sqrt{3}$ et $R = 3$ donc $d(\Omega,(OAB)) < R$ donc le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{3^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$

D'où le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{6}$.

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

a) Démontrer que : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t \in R)$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). **0.5 pt**

On a (Δ) est perpendiculaire au plan (OAB) et On a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB) donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite à (Δ)

On a (Δ) passe par $\Omega(1;1;-1)$ et Soit $M(x,y,z) \in (\Delta)$ donc

$$\begin{cases} x = x_\Omega + 1 \times t \\ y = y_\Omega + 1 \times t \\ z = z_\Omega + (-1) \times t \end{cases} \quad (t \in R)$$

D'où $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t \in R)$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ) . **0.5 pt**

Soit H le centre du cercle (Γ) .

H est la projection orthogonale de (Ω) sur le plan (OAB)

$$M(x,y,a) \in (\Delta) \cap (OAB) \iff \begin{cases} x_H = 1+t \\ y_H = 1+t \\ z_H = -1-t \\ x_H + y_H - z_H = 0 \end{cases}$$

Donc $1+t+1+t-(-1-t) = 0$ donc $2+2t+1+t = 0$ donc $3+3t = 0$ donc $t = -1$

Donc $x_H = 1+(-1) = 0$, $y_H = 1+(-1) = 0$ et $z_H = -1-(-1) = 0$

D'où $O(0;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que : $a = 7+2i$, $b = 4+8i$ et $c = -2+5i$.

0.75 pt **1 - a)** Vérifier que : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ et montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$.

On a : $(1+i)(-3+6i) = -3+6i-3i-6 = -9+3i$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-2+5i-(7+2i)}{4+8i-(7+2i)} = \dfrac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i} = \dfrac{-9+3i}{-3+6i}$

On a : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ alors $\dfrac{-9+3i}{-3+6i} = 1+i$

D'où $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$

1 pt **b)** En déduire que : $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$ donc $|\dfrac{c-a}{b-a}| = |1+i|$ donc $\dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2}$

donc $\dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ donc $AC = AB\sqrt{2}$.

On a : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv arg(\dfrac{c-a}{b-a})[2\pi]$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}))$

donc $arg(\dfrac{c-a}{b-a}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.75 pt **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d = 10+11i$.

On a $R(A) = D$ donc $d-b = (a-b)e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $d = b+(a-b)i$ car $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc

$d = 4+8i+(7+2i-4-8i)i$ donc $d = 4+8i+i(3-6i)$ donc $d = 4+8i+3i+6$

D'où $d = 10+11i$

0.75 pt **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés.

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i} = \dfrac{12+6i}{6+3i} = 2\times\dfrac{6+3i}{6+3i} = 2$

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = 2 \in R$ donc les points B, C et D sont alignés

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 - Soient les deux événements suivants :

A : « Tirer deux boules rouges et deux boules vertes »

B : « Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées »

1.5 pt

Montrer que : $P(A)=\frac{1}{7}$ et $P(B)=\frac{1}{3}$.

On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne donc

$Card(\Omega)=C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!(10-4)!}=210$

On a : $Card(A)=C_5^2\times C_3^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}\times\frac{3!}{2!(3-2)!}=10\times 3=30$

D'où $P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$.

On a : $Card(B)=C_8^4=\frac{8!}{4!(8-4)!}=70$

D'où $P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0.25 pt

a) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire Xsont :$0, 1$ et 2..

Parmi les quatre boules tirées, on peut avoir les cas suivants :

☐ Cas 1 : Aucune boule blanche tirée, donc X = 0.

☐ Cas 2 : Une seule boule blanche tirée, donc X = 1.

☐ Cas 3 : Deux boules blanches tirées, donc X = 2.

Et puisque la caisse contient seulement 2 boules blanches.

D'où les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2

1.25 pt

b) Montrer que $P(X=1)=\frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a : $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\frac{2\times 56}{210}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$ D'où $P(X=1)=\frac{8}{15}$

On a : $P(X=0)=P(B)=\frac{1}{3}$ D'où $P(X=0)=\frac{1}{3}$

On a : $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{1\times 28}{210}=\frac{28}{210}=\frac{2}{15}$ D'où $.P(X=2)=\frac{2}{15}$

$X=k$	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Exercice 4 : (3 pts)

Soit $(U_n)_{n\in N^*}$ la suite numérique définie par : $U_1=0$ et $U_{n+1}=\frac{25}{10-U_n}$ pour tout n de N^*.

1 - Vérifier que : $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* et montrer par récurrence que $5-U_n>0$ pour tout n de N^*.

1 pt

On a : $5-U_{n+1}=5-\frac{25}{10-U_n}=\frac{5(10-U_n)-25}{10-U_n}=\frac{50-5U_n-25}{5+5-U_n}=\frac{25-5U_n}{5+(5-U_n)}$ donc

$5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$

D'où $5-U_{n+1}=\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* .

☐ Pour $n=1$ on a $5-u_1=5-0=5>0$ donc la propriété $(5-U_n>0)$ est vraie pour $n=1$.

☐ soit $n\in N^*$ supposons que $5-U_n>0$ et montrons que $5-U_{n+1}>0$.

☐ On a $5-U_n>0$ donc $5+(5-U_n)>5>0$ et $5(5-U_n)>0$ donc $\frac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}>0$

D'où $5-U_{n+1}>0$.

D'après le principe de récurrence $5-U_n>0$ pour tout n de N^* .

2 - On considère la suite numérique $(V_n)_{n\in N^*}$ définie par :$V_n=\dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^*.

a) Montrer que :$V_{n+1}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$pour tout n de N^* et vérifier que :$V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^*. **0.75 pt**

On a : $V_{n+1}=\dfrac{5}{5-U_{n+1}}=\dfrac{5}{\frac{25-5U_n}{10-U_n}}=\dfrac{5(10-U_n)}{25-5U_n}=\dfrac{5(10-U_n)}{5(5-U_n)}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$

D'où $V_{n+1}=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}$ pour tout n de N^*..

On a : $V_{n+1}-V_n=\dfrac{10-U_n}{5-U_n}-\dfrac{5}{5-U_n}=\dfrac{10-U_n-5}{5-U_n}=\dfrac{5-U_n}{5-U_n}=1$

D'où $V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^*.

b) Montrer que : $V_n=n$ pour tout n de N^* et en déduire que :$U_n=5-\dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^* . **1 pt**

On a : $V_{n+1}-V_n=1$ pour tout n de N^* donc (V_n) est une suite athématique de raison $r=1$ et de premier terme $V_1=\dfrac{5}{5-U_1}=\dfrac{5}{5-0}=1$ donc $V_n=V_1+(n-1)\times 1=1+n-1=n$

D'où $V_n=n$ pour tout n de N^* .

On a :$V_n=\dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^* donc $5-U_n=\dfrac{5}{V_n}$ donc $U_n=5-\dfrac{5}{V_n}$

D'où $U_n=5-\dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^*.

c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=5$

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=(x-2)^2e^x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. **0.25 pt**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction . **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)^2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2\times\dfrac{e^x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

donc (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$de direction l'axe des ordonnées

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de R.

Soit $x \in R$.

0n a : $f(x) = (x-2)^2e^x = (x^2 - 4x + 4)e^x = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$

D'où $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de R.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ pour tout n de N^*)

0.25 pt

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -4xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

0.25 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = x(x-1)e^x$ pour tout x de R .

Soit $x \in R$.

On a : $f'(x) = ((x-2)^2)'e^x + (x-2)^2(e^x)' = 2(x-2)'(x-2)^{2-1} + e^x(x-2)^2 =$

$2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x = e^x(x-2)(2+x-2) = e^x(x-2)(x) = x(x-2)e^x$

D'où $f'(x) = x(x-1)e^x$ pour tout x de R

b) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$

0.25 pt et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$.

On a $f'(x) = x(x-1)e^x$ et $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc le signe de f' est celui de $x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$x-1$			$-$		0	$+$	
$x(x-1)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

Donc $f'(x) \geq 0 \forall x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ et $f'(x) \leq 0 \forall x \in [0;2]$

D'où f est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[0;2]$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur R.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	O	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 - a) Montrer $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexions qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

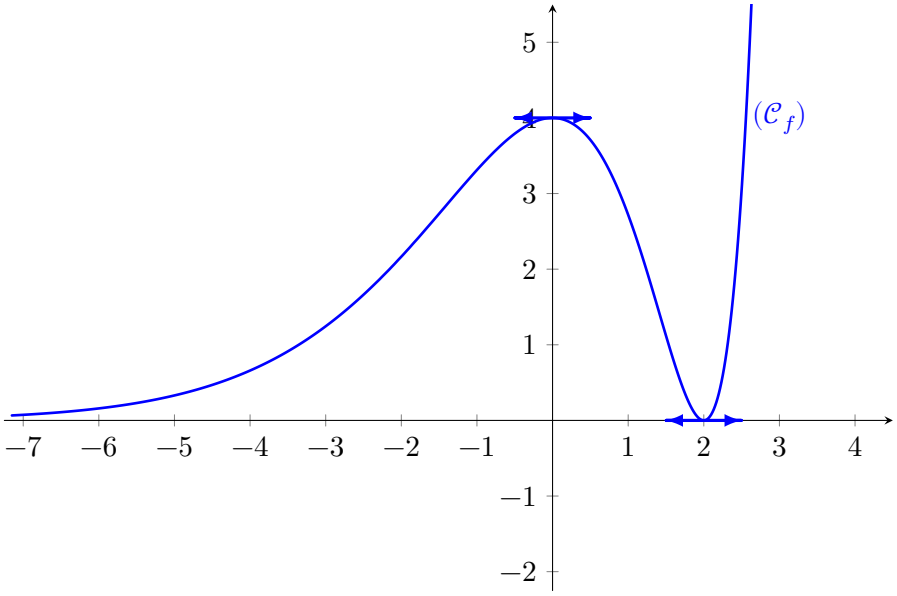
On a : $f^{'}(x) = x(x-2)e^x = (x^2-2x)e^x$ donc $f^{"}(x) = ((x^2-2x))^{'}e^x + (e^x)^{'}(x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = e^x(2x-2+x^2-2x)$ donc $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$

D'où $f^{"}(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : $f^{"}(x) = 0 \iff x^2-2$ car $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc $f^{"}(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

D'où (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses respectifs $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$

b) Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ **0.25 pt**



5 - a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur R puis calculer $\int_O^1 xe^x \, dx$. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $H^{'}(x) = ((x-1)e^x)^{'} = (xe^x - x)^{'} = x^{'}e^x + x(e^x)^{'} - (e^x)^{'} = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, H^{'}(x) = h(x)$.

D'où $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

On a : $\int_O^1 xe^x \, dx = \int_O^1 h(x) \, dx = [H(x)]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1 = = ((1-1)e^1) - ((0-1)e^0) = 1$

D'où $\int_O^1 xe^x \, dx = 1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_O^1 x^2e^x \, dx = e-2$. **0.25 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose : $U(x) = x^2$ $\quad (U(x))^{'} = 2x$

$(V(x))^{'} = e^x$ $\quad V(x) = e^x$

Donc $\int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = [x^2e^x]_0^1 - \int_O^1 2xe^x\,\mathrm{d}x = (1^2e^1) - (0^2e^0) - 2\times 1 = e-2$.

D'où $\int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = e-2$

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x=0$ et $x=1$ est égale à $5(e-2)cm^2$. **0.25 pt**

Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x=0$ et $x=1$.

On a :$A = (\int_O^1 f(x)\,\mathrm{d}x)cm^2$

On a : $\int_O^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_O^1 x^2e^x - 4xe^x + 4e^x\,\mathrm{d}x = \int_O^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x - 4\int_O^1 xe^x\,\mathrm{d}x + 4\int_O^1 e^x\,\mathrm{d}x = (e-2) - 4\times 1 + 4\,[e^x]_0^1 = e-2-4+4(e^1-e^0) = e-6+4(e-1) = e-6+4e-4 = 5e-10 = 5(e-2)$.

D'où $A = 5(e-2)cm^2$

6 - Utiliser la courbe pour donner le nombre de solutions de l'équation : $x^2 = e^{-x}+4x-4, x\in R$. **0.25 pt**

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $x^2 = e^{-x}+4x-4 \iff x^2-4x+4 = e^{-x} \iff e^x\times(x^2-4x+4) = e^x\times e^{-x} \iff f(x) = 1$.

Le nombre des solutions de l'équation $f(x)=1$ est égale aux nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y=1$.

Or La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 3 points donc L'équation $f(x)=1$ admet 3 solutions .

D'où l'équation : $x^2 = e^{-x}+4x-4$ admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2013 — 3 Pts

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. les points $A(0,0,1), B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1 - Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et verifier que le point A appartient à la sphère (S). — **0,75 pt**

2 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) — **0,75 pt**

b) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent a la sphère (S) en A — **0,75 pt**

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a) Démontrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) — **0,25 pt**

b) En déduire les triplets des coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S) — **0,5 pt**

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2013 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2-8z+25=0$ — **0,75 pt**

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a=4+3i$, $b=4-3i$ et $c=10+3i$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$

a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d=10+9i$. — **0,75 pt**

b) Vérifier que $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$ puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique — **1 pt**

c) Montrer que : $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$. — **0,5 pt**

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2013 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 - Vérifier que : $u_{n+1}-1=\dfrac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ — **0,5 pt**

2 - a) Montrer par récurrence que $u_n>1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,5 pt**

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. — **0,5 pt**

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. — **0,25 pt**

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n — **0,5 pt**

b) En déduire que $u_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n). — **0,75 pt**

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2013 — 3 Pts

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : *quatre* jetons blancs, *trois* jetons noirs et *deux* jetons verts

On tire au hasard, simultanément, *trois* jetons du sac

1 - Soient les deux événements suivants

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

1 pt **b)** Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2013 — 8 Pts

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle]0,1] et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(remarquer que $f(x) = x^2 \quad 1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$).

c) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont

0.25 pt on précisera la direction.

1pt **2 - a)** Montrer que : $f'(x) = 2 \quad \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

b) Vérifier que $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ et en déduire que

0.75 pt la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$.

3 - a) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1, 0)$. **0.5 pt**

b) Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C)) **0.75 pt**

4 - a) Vérifier que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis montrer que : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = 1$. **0.75 pt**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$ **0.5 pt**

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale $\grave{a}$ $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 6\mathrm{e} + 8)\,\mathrm{cm}^2$ **0.5 pt**

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : RATTRAPAGE 2013

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. les points $A(0,0,1), B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt

1 - • Montrons que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère
On a (S) est une sphère du centre Ω et de rayon $R=\sqrt{3}$ et soit $M(x,y,z)$ appartient à la sphère (S) alors :

$$\begin{aligned}\Omega M = R &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2\\ &\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=\sqrt{3}^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-3=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y+1+1-3=0\\ &\Leftrightarrow x^2++y^2+z^2-2x+2y-1=0\end{aligned}$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

• Vérifions que le point A appartient à la sphère (S). On a :

$$\begin{aligned}\Omega A &= \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}\\ &= \sqrt{(0-1)^2+(0-(-1))^2+(1-0)^2}\\ &= \sqrt{1+1+1}\\ &\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où : $\Omega A = R$ alors $A\in(S)$

0.75 pt

2 - a) • Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$
Comme $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ d'où $\overrightarrow{AB}(1-0;1-0;1-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$

Et $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ d'où $\overrightarrow{AC}(2-0; 1-0; 2-1)$ donc $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (1 \times 1 \times 0)\vec{i} - (1 \times 1 - 2 \times 0)\vec{j} + (1 \times \times 1 - 2 \times 1)\vec{k}$$
$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

- Déduisons que $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
  On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (ABC)
  Donc : $(ABC) : x - y - z + d = 0$
  Et puisque $A \in (ABC)$ donc $x_A - y_A - z_A + d = 0$
  D'où $0 - 0 - 1 + d = 0$ donc $d = 1$
  Finalement $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.75 pt **b)**

- Calculons $d(\Omega, (ABC))$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega - y_\Omega - z_\Omega + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{|1 - (-1) - 0 + 1|}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{3}$$

Donc : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$

- Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A.
  On a : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} = R$ et puisque $A \in (ABC)$ et $A \in (S)$
  Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

0.25 pt **a)** Démontrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

Soit $M(x, y, z) \in (\Delta)$ on a : $\Omega \in (\Delta)$ Et puisque la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur à la droite (Δ) Par suite $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \\ z - 0 = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$$

D'où $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de ladroite (Δ)

0.5 pt

b) Déduisons les coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S)

Comme la droite (Δ) passante par Ω alors $d(\Omega,(\Delta))=0$

D'où la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points

On a $A\in(\Delta)$ et $A\in(S)$ donc A est un point d'intersection de (Δ) et (S)

Déterminons $H(x_H,y_H,z_H)$ le deuxième point d'intersection de (Δ) et (S)

$$\begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ (x_H-1)^2+(y_H+1)^2+(z_H-0)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ (1+t-1)^2+(-1-t+1)^2+(-t)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ t^2+t^2+t^2-3=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ 3(t^2-1)=0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_H=1+t \\ y_H=-1-t \\ z_H=-t \\ t=1 \text{ où } t=-1 \end{cases}$$

$$\text{On prend } t=1 \text{ Donc : } \begin{cases} x_H=1+1 \\ y_H=-1-1 \\ z_H=-1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x_H=2 \\ y_H=-2 \\ z_H=-1 \end{cases}$$

Finalement A et $H(2,-2,-1)$ sont les point d'intersection de (Δ) et (S)

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2-8z+25=0$

On a $\Delta=(-8)^2-4\times 25=64-100=-36$

Comme $\Delta<0$ alors $z_1=\dfrac{-(8)-i\sqrt{-\Delta}}{2}=\dfrac{8-i\sqrt{36}}{2}=4-3i$

Et $z_2=\bar{z_1}=4+3i$

Donc : $S = \{4-3i; 4+3i\}$

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a = 4+3i$, $b = 4-3i$ et $c = 10+3i$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

0,75 pt **a)** Montrons que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10+9i$.

Soit D d'affixe d l'image du point A par la translation T

Donc : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

D'où $aff(\overrightarrow{AD}) = aff(\overrightarrow{BC})$

Donc : $d - a = (c - b)$

Donc : $d = (c - b) + a$

Alors : $d = 10 + 3i - (4 - 3i) + 4 + 3i$

Donc : $d = 10 + 3i - 4 + 3i + 4 + 3i$

Donc : $d = 10 + 3i$

Donc l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10+9i$

1 pt **b)** • Vérifions que $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{d-a} &= \frac{4-3i-(4+3i)}{10+9i-(4+3i)} \\ &= \frac{4-3i-4-3i}{10+9i-4-3i} \\ &= \frac{-6i}{6+6i} \\ &= -\frac{i}{1+i} \\ &= -\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= -\frac{1+i)}{1^2+1^2} \\ &= -\frac{1}{2}(1+i)\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b-a}{d-a} = -\dfrac{1}{2}(1+i)$

• Écrivons le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique

On a $\left|-\frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(1+i) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc : $-\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

0.5 pt **c)** Montrons que : $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} &\equiv arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi] \\
&\equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)\right)[2\pi] \\
&\equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]
\end{aligned}$$

Donc : $\overline{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Vérifions que : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\
&= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}(u_n - 1)
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

0,5 pt **2 - a)** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ ona $u_0 = 2$ et $2 > 1$ d'où $u_0 > 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 1$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > 1$ c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - 1 > 0$

On a d'après la question 1) $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

Et puisque $u_n > 1$ alors $u_n - 1 > 0$

D'où $\frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned}(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} \\ &= -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5}(1 - u_n)\end{aligned}$$

Et puisque $u_n - 1 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $1 - u_n < 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est décroissante et aussi minorée par 1 $((\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)**

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

  $\forall n \in \mathbb{N})$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ (question 1)

  Donc $\forall n \in \mathbb{N})\,;\ v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

  Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

- Exprimons v_n en fonction de n

  $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ car $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

  Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

0,5 pt **b)**

- Déduisons que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  On sait que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$ d'où $u_n = v_n + 1$ et comme $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

  Donc : $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

- Calculons la limite de la suite (u_n).

$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

Car $-1 < \frac{1}{5} < 1$ c'est-à-dire $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

0,75 pt Donc $\lim u_n = 0$

Exercice 4 : (3 pts)

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : *quatre* jetons blancs, *trois* jetons noirs et *deux* jetons verts

On tire au hasard, simultanément, *trois* jetons du sac.

1 - Soient les deux événements suivants

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

1 pt Montrons que $P(A) = \frac{5}{84}$ et que $P(B) = \frac{2}{7}$

On considère l'univers Ω, Le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_9^3 = 84$t

jetons sont indiscernables au toucher signifie que $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ et $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

$A : (B, B, B)$ où (N, N, N) d'où $card(A) = C_4^3 + C_3^3 = 5$ Donc : $P(A) = \frac{5)}{84}$

$B : (B, N, V)$ d'où $card(B) = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ Donc : $P(B) = \frac{24)}{84} = \frac{2)}{7}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

0.25 pt **a)** Vérifions que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

Les boules tirées	La valeur de X
les trois boules sont $\bar{N}, \bar{N}, \bar{N}$	0
les trois boules sont $N, \bar{N}, \bar{N}$	1
les trois boules sont $N, N, \bar{N}$	2
les trois boules sont N, N, N	3

Donc : es valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3

1 pt **b)** Montrons que $P(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $P(X = 1) = \frac{15}{28}$

- Calculons $P(X = 2)$

On sait que : $(X = 2) : (N, N, \bar{N})$ donc $card(X = 2) = C_3^2 \times C_6^1 = 18$

Donc : $P(X = 2) = \frac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

-]Calculons $P(X=1)$

  $(X=1) : (N, \bar{N}, \bar{N})$ donc $card(X=1) = C_3^1 \times C_6^2 = 45$

  Donc : $P(X=1) = \dfrac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{84}$

0.75 pt **c)** Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

- Calculons $P(X=0)$

  On sait que : $(X=0) : (\bar{N}, \bar{N}, \bar{N})$ donc $card(X=0) = C_6^3 = 20$

  Donc : $P(X=0) = \dfrac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{84} = \dfrac{5}{21}$

  Donc : $P(X=0) = \dfrac{5}{21}$

- $P(X=1) = \dfrac{15}{28}$
- $P(X=2) = \dfrac{3}{14}$
- Calculons $P(X=0)$

  On sait que : $(X=3) : (N, N, N)$ donc $card(X=3) = C_3^3 = 1$

  Donc : $P(X=3) = \dfrac{card(X=3)}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{84}$

  Donc : $P(X=3) = \dfrac{1}{84}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$(\forall x \in \mathbb{R})$ on a : $2(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$

Donc $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 pt **b)**

- Montrons que $g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

  On a $u :\to x^2 - x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme sur $]0, +\infty[$)

  Et $v : x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur

$]0,+\infty[$)

Donc $g = u - v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0,+\infty[\quad g'(x) =' (x) - v'(x)$

Donc $g'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$

Donc $g'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$

Finalement : $(\forall x \in]0,+\infty[\quad g'(x) = \frac{2x^2-x-1}{x}$

- Déduisons que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

On sait que le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est le signe de $2x^2 - x - 1$

Étudions le signe de $2x^2 - x - 1$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1) = 0 \text{ où } (x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ où } x = 1$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après tableau de signe en déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,1]$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]1,+\infty[$

Donc g est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt

2 - Montrons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

Comme g est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

Alors g admet une valeur minimale absolue en 1

Donc : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g(x) \geq g(1)$

Donc : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g(x) \geq 0$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 - 1 = -1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -(\ln x)^2 = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

D'où (C) admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x = 0$

0.5 pt **b)**

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2 \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

0.25 pt **c)** Déduisons que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Alors (C) admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

1 pt **2 - a)** Montrons que : $f'(x) = 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. On sait que $f_1 : x \to x^2 - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme)

Et aussi la fonction $f_2 : x \to -(\ln x)^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Donc $f = f_1 + f_2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x) \\ &= 2x - 2 \times \frac{\ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2\ln x}{x} \\ &= 2\left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

b) • Vérifions que $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ Soit $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} + 1 &= \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 \\ &= \frac{x^2 - x - \ln x + x}{x} \\ &= \frac{x^2 - \ln x}{x} \end{aligned}$$

Donc : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$

• Déduisons que la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$. On a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = 2\left(\frac{g(x)}{x} + 1\right)$

Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Alors $\frac{g(x)}{x} + 1 \geq 0$

0.75 pt D'où $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) \geq 0$ donc : f est croissante sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrons que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1,0)$.

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

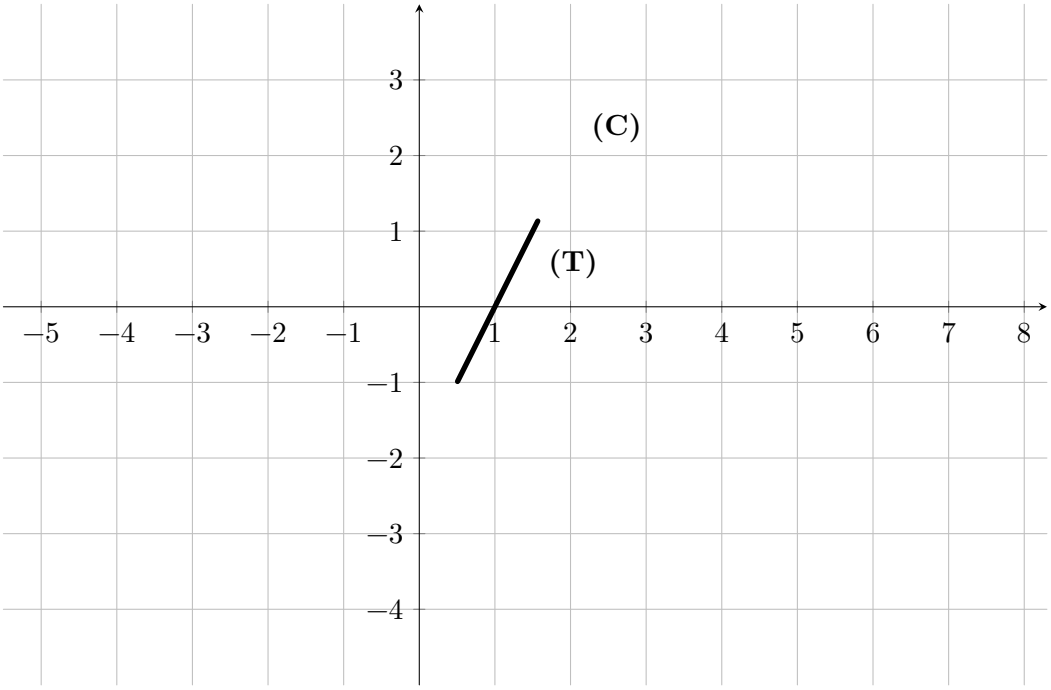
$$(T) : y = 2(x-1) + 0$$

$$(T) : y = 2x - 2$$

Car : $f'(1) = 2\left(\frac{1^2-\ln 1}{1}\right) = 2$ et $f(1) = 0$

Donc : $\boxed{(T) : y = 2x - 2}$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1, 0)$

0.75 pt **b)** Construisons, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C))



0.75 pt **4 - a)**

- Vérifions que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ On a H est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme le produit de deux fonction dérivables) et on a $\forall x \in]0, +\infty[$

  $H'(x) = 1(\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x = h(x)$

  $\boxed{\text{Donc : } H \text{ est une fonction primitive de la fonction } h \text{ sur }]0, +\infty[}$

- Montrons que : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = [x(\ln(x) - 1)]_1^e$$

$$= e(\ln e - 1) - 1(\ln(1) - 1)$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

$\boxed{\text{Donc : } \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1}$

0.5 pt

b) Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$

On pose : $\begin{cases} U(x) = (\ln x)^2 \\ V'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} U'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \\ V(x) = x \end{cases}$

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln(x)}{x} \times x \mathrm{d}x$$

$$= e\ln(e) - 1 \times \ln(1) - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$$

$$= e - 2$$

Car : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x = 1$

Donc : $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$

0.5 pt

c) Montrons que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 6\mathrm{e} + 8)\,\mathrm{cm}^2$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ On sait que $\mathcal{A} = \int_1^{\mathrm{e}} |f(x)|\mathrm{d}x = \times u.m.s$ Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 \leq f(x) \leq e^2 - 2$ car $f(e) = e^2 - 1 - (\ln e)^2 = e^2 - 2$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \times 1^2 cm^2 \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} x^2 - 1 - (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \times cm^2 \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} x^2 - 1 \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x.cm^2 \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{e} - (e-2).cm^2 \\
&= \frac{e^3}{3} - e - (\frac{1^3}{3} - 1) - e + 2.cm^2 \\
&= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3}.cm^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right).cm^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right).cm^2$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ et $C(0,5,0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, et en déduire que les point A , B, et C ne sont pas alignés

0.5 pt **b)** Montrer que $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **2 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2,0,0)$ et son rayon est 3.

0.75 pt **b)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

0.5 pt **c)** Déterminer lese coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

2 - On considère le nombre complexe : $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

0.5 pt **a)** Montrer que le module du nombre u est $\sqrt{2}$, et que $arg u \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

0.75 pt **b)** En utilisant la forme trigonométrique du nombre u, montrer que u^6 est un nombre réel

3 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, les deux points A et B d'ffixes respectives a et b tel que : $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit z l'affixe d'un point M du plan, et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0.5 pt **a)** Exprimer z' en fonction de z

0.5 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R, et en déduire que le triangle OAB est équilatéral

Exercice 3 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 13$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 7\ \forall n \in \mathbb{N}$

0.75 pt **1 -** Montrer, par récurrence, que $U_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Soit (V_n) la suite numérique telle que ; $V_n = 14 - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **a)** Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis exprimer V_n en fonction de n

0.75 pt **b)** En déduire que $U_n = 14 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (U_n)

0.5 pt **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n > 13.99$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2014 — 3 Pts

Un sac contient *neuf* jetons, indiscernables au toucher, et portants les nombres : $0,0,0,0,0,1,1,1,1$

1 - On tire au hasard, simultanément, *deux* jetons du sac.

Soit l'événement A : " La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1"

1 pt Montrer que $p(A) = \dfrac{5}{9}$

2 - On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, *deux* jetons du sac, et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1

1 pt **a)** Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\frac{1}{6}$

b) Saïd a joué le précédent jeu **trois** fois (**Il remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac**)

1 pt Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois

Exercice 5 — Session : NORMAL 2014 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, et en déduire que la fonction g et croissante sur $]0;+\infty[$

0.75 pt **2 -** Vérifier que $g(1) = 0$, puis en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]0;1]$ et que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[1;+\infty[$

Partie II

On considéré la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité $1cm$)

0.5 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, et donner une interprétation géométrique du résultat

0.25 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser : $t = \sqrt{x}$), puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

0.25 pt **c)** Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

1.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

1 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geqslant 2$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0.75 pt **4 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer)

5 - On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

0.5 pt **a)** Montrer que $H : x \mapsto x\ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $I = e$

0.5 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $J = 2e - 1$

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2014

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points : $A(0;3;1)$, $B(-1;3;0)$, et $C(0;5;0)$ et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$.

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$et en déduire que A, B et C sont non alignés.

on a $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;0;-1)$

Donc :

0.75 pt

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors ls deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

d'où les points A, B et C ne sont pas alignées.

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;1;-2)$ est un vecteur normal sur le plan (ABC)

donc l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit sous la forme

$$(ABC):2x-y-2z+d=0$$

0.5 pt

On a $C(0;5;0)\in(ABC)$ donc $2\times0-5-2\times0+d=0$

donc $d=5$

D'où $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$.

2 - a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2;0;0)$ et de rayon $R = 3$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 9 = 3^2 \end{aligned}$$

0.5 pt

Donc le centre de la sphere (S) est $\Omega(2;0;0)$ et son rayon $R = 3$.

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

$$\begin{aligned} d(\Omega,(ABC)) &= \frac{|2x_\Omega - y_\Omega - 2z_\Omega + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{|2\times 2 - 0 - 2\times 0 + 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{9}} \\ &= \sqrt{9} = 3 = R \end{aligned}$$

0.75 pt

Donc le plan (ABC) est tangente a la sphere (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

On a $d(\Omega,(ABC)) = R = 3$ donc le plan (ABC) est tangente a la sphere (S) au point H, c'est a dire H est le point d'itersection de la droite (Δ) passant par $\Omega(2;0;0)$ est perpendiculaire sur le plan (ABC).

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)

La droite (Δ) et perpendiculaire au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;-1;2)$ est directeur à la droite (Δ)

0.5 pt

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t\cdot\vec{n}/(t \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2t \\ y - 0 = -t \\ z - 0 = -2t \end{cases} /(t \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} /(t \in R)$$

on a H est le point d'intersection de (Δ) avec (P) :

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow H \in (\Delta) \text{ et } H \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

remplaçons $2 + 2t; -t$ et $-2t$ dans la dernière équation $(2x - y - 2z + 5 = 0$ on trouve : $t = -1$

remplaçons : $t = -1$ dans la représentation paramétrique on trouve : $H(0;1;2)$

D'où le point d'intersection de (Δ) avec (P) est : $H(0;1;2)$

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - 8\sqrt{2} + 2 = 0$$

On a : $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 2 - 8 = -6 \quad < 0$

0.75 pt Donc les solution de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

et

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

D'ou $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2 - Soit le nombre complexe u tel que :$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a) Écrire u sous forme trigonométrique.

$|u| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$

0.5 pt On pose $arg(u) \equiv \theta[2\pi]$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(u)}{|u|} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(u)}{|u|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'ou $arg(u) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) En déduire que u^6 est un réel.

la forme trigonométrique du nombre u est $u = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{3} + isin(\frac{\pi}{3}))$ En utilisant la relation de Moiver : $u^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + is\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6$

0.75 pt

$= (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) = 8(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$

$-\ 8(1 + i \times 0) = 8$

D'ou u^6 est un nombre réel

3 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}.\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respective :$a = 4 - 4i\sqrt{3}$, et $b = 8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle : $\frac{\pi}{3}$.

a) Écrire z' en fonction de z

0.5 pt

On a :

$$R(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' - z_0 = (z - z_0)e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow z' = z(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + is\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

D'où $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 4i\sqrt{3})$

$= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6$

$= 8 = b = z_B$

Donc $R(A) = B$ c'est a dire B est l'image de A par la rotation R

0.75 pt

• la nature du triangle OAB :

$$R(A) = B \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\frac{b}{a}| = |\frac{b-0}{a-0}| = 1 \\ arg(\frac{b}{a}) \equiv arg(\frac{b-0}{a-0}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{OB}{OA} = 1 \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

D'ou le triangle OAB est équilatérale.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}un_n + 7$ et $u_0 = 13$

1 - Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 14$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 13 < 14$

0.75 pt

supposons que $u_n < 14$, et montrons que :$u_{n+1} < 14$, on a :

$$u_n < 14 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 7$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 7 < 14$$
$$\Rightarrow u_{n+1} < 14.$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 14.$

2 - Soit (v_n) la suite définit par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 14 - u_n$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner (v_n) en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 14 - u_{n+1} &= 14 - (\frac{1}{2}u_n + 7) \\ &= 14 - \frac{1}{2}u_n - 7 \\ &= 7 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(14 - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

1 pt D'où (v_n) est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et du premier terme :

$v_0 = 14 - u_0 = 14 - 13 = 1.$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et du premier terme :$v_0 = 1.$

Alors le terme générale v_n de la suite (v_n) s'écrit sous la forme $v_n = v_0.q^n$

c'est a dire : $v_n = 1 \times (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n. \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$

b) En déduire que : $u_n = 14 - (\frac{1}{2})^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $v_n = 14 - u_n \Leftrightarrow u_n = 14 - v_n = 14 - (\frac{1}{2})^n.$

0.75 pt Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0.$ (car $-1 < (\frac{1}{2})^n < 1$).

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (14 - (\frac{1}{2})^n) = 14 - 0 = 14.$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 14.$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle :$u_n > 13,99.$

0.5 pt On a :

$$\begin{aligned} u_n > 13,99 &\Leftrightarrow 14-(\frac{1}{2})^n > 13,99 \\ &\Leftrightarrow 14-13,99 > (\frac{1}{2})^n \\ &\Leftrightarrow 0.01 > (\frac{1}{2})^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,01) > \ln((\frac{1}{2})^n) \\ &\Leftrightarrow \ln(10^{-2} > n\ln(\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow -2\ln(10) > -n\ln(2) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(10) < n\ln(2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} \\ &\Leftrightarrow n > 6,65 \end{aligned}$$

D'où $n = 7$ est la plus petite valeur d'entier naturel n pour laquelle on a $u_n > 13,99$.

Exercice 4 : (3 pts)

1 - On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac :

• Calculons $card(\Omega) = C_9^2 = 36$.

1 pt L'événement A"**La sommes des nombes egale a 1"**

c'est a dire tirer une jeton porte le numéro 1, et une jeton porte le numéro 0

Donc $card(A) = C_4^1 \times C_5^1 = 4 \times 5 = 20$.

D'où $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$.

2 - a) Montrer que la probabilité de gain de Said est :$\frac{1}{6}$

1 pt L'événement B"**tirer deux jetons portant tous les deux le numero 1"** (Said gagne la partie)

$card(B) = C_4^2 = 6$

Donc $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

Said a répété 3 fois cette expérience

La variable aléatoire X associée aux épreuves répétées et qui donne le nombre de succès, est appelé variable aléatoire binomiale de paramètres n et p.

- $n = 3$: Nombre de répétition de l'expérience.
- $k = 2$: Nombre de fois que Said gagne la partie (La réalisation de l'événement B).

1 pt
- $P = P(B)$: La Probabilité que Said gagne .

Donc La Probabilité que Said gagne la partie exactement deux fois est :

$$\begin{aligned} P(k=2) &= C_3^2 \times (P(B))^2 \times (1-P(B)) \\ &= 3 \times (\frac{1}{6})^2 \times (1-\frac{1}{6}) \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

D'où a Probabilité que Said gagne la partie exactement deux fois est : $\frac{5}{72}$

Probleme : (8 pts)

Partie I

$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$ et $D_g =]0, +\infty[$

1 - Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ et en déduire que g est croissante sur :$]0, +\infty[$.

Soit $x \in D_g =]0, +\infty[$

On a la fonction g est dérivable sur $D_g =]0, +\infty[$ comme somme des fonctions dérivables sur $D_g =]0, +\infty[$ **0.5 pt**

Donc
$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x))' \\ &= (1)' - ' (\frac{1}{x^2})' + (\ln(x))' \\ &= 0 - (\frac{-2x}{x^4}) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

On a $x > 0$ donc $x^3 > 0$ c'est a dire $\frac{2}{x^3} > 0$, et $\frac{1}{x} > 0$

Donc $\forall x \in D_g =]0, +\infty[$ on a : $g'(x) > 0$

D'où la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2 - Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que : $g(x) \leq 0 (\forall x \in]0; 1])$, et $g(x) \geq 0 (\forall x \in [1; +\infty[$. **0.75 pt**

- On a $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln(1) = 1 - 1 = 0$
- On a sur l'intervalle $]0; 1]$:

$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1)$(car g est croissante)$\Rightarrow g(x) \leq 0$.

D'où $g(x) \leq 0$ sur l'intervalle $]0; 1]$

- On a sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$ (car g est croissante)$\Rightarrow g(x) \geq 0$.

D'où $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$

PARTIE II

$f(x) = (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$, et $D_f =]0;+\infty[$

1 - Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(car $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x)) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$)

(C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.(l'axe des ordonnées).

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.25 pt

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$.

(car $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x)) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = 0$).

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$, puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

1 pt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln(x))^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})^2$$

On pose $t = \sqrt{x}$. si $x \longrightarrow +\infty$ alors $t \longrightarrow +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{t}} + 2\dfrac{\ln(t)}{t})^2 = 0$.

(car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$.)

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} + \dfrac{1}{x^3}) = 0$.

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}) = 0$.)

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

c) Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de$+\infty$

0.25 pt

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f)x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

3 - a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x} (\forall x \in]0;+\infty[)$

Soit $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = ((1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2})'$$
$$= ((1+\ln(x)^2)' + (\frac{1}{x^2})'$$
$$= 2(1+ln(x))(1+ln(x))' + (\frac{1}{x^2})'$$
$$= 2(1+ln(x)) \times \frac{1}{x} + \frac{-2x}{x^4}$$

1.5 pt Donc
$$= \frac{2(1+ln(x))}{x} - \frac{\frac{2}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2(1+ln(x)) - \frac{2}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2(1+ln(x) - \frac{1}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2g(x)}{x}$$

D'ou $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :$x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$.

D'apres la question .... On a :

- On a sur l'intervalle $]0;1]$: $g(x) \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante sur $]0;1]$.

- On a sur l'intervalle $[1;+\infty[$: $g(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geq 2.(\forall x \in]0;+\infty[)$

tableau des variation :

$f'(1) = (1+ln(1))^2 + \frac{1}{1^2} = (1+0)^2 + 1 = 2.$

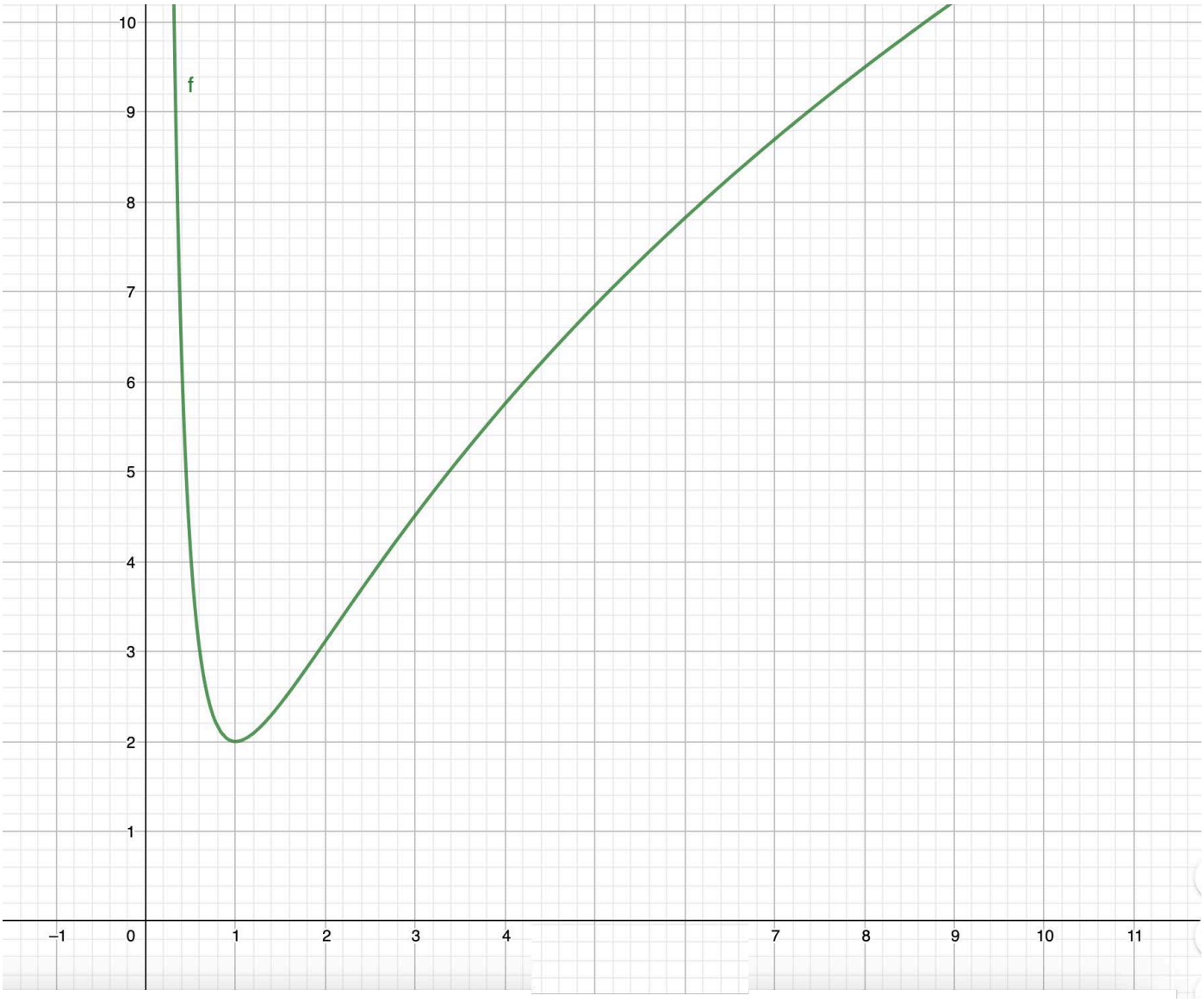
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

1 pt

On a $f(1)$ est une valeur minimal de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[\quad , \quad f(x) \geq f(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in]0;+\infty[\quad , \quad f(x) \geq 2.$

0.75 pt **4 -** la courbe C_f de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



5 - On considère les intégrales I et J suivants :$J = \int_1^e (1+\ln(x))^2 dx$, et $I = \int_1^e (1+\ln(x))dx$.

a) Monter que $H \longrightarrow xln(x)$ est une fonction primitive de $\longrightarrow 1 + ln(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $I = e$

La fonction : $H : x \longrightarrow xln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$H'(x) = (xln(x))'$$
$$= (x)'ln(x) + x(ln(x))'$$
0.5 pt $$= ln(x)) + x \times \frac{1}{x}$$
$$= ln(x) + 1$$
$$= h(x)$$

Donc $H(x)$ est une fonction primitive de la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

• : Calculons I :

$$I = \int_1^e (1 + \ln(x))dx$$
$$= \int_1^e h(x)dx$$
$$= [H(x)]_1^e$$
$$= H(e) - H(1)$$
$$= eln(e) - 1ln(1)$$
$$= e - 0 = e$$

$I = e$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $J = 2e - 1$.

On a : $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$:

On pose : $u(x) = (1 + \ln(x))^2$, et $v'(x) = 1$

Alors $u' = \frac{2(1 + \ln(x))}{x}$, et $v(x) = x$.

0.5 pt Donc :

$$J = [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - \int_1^e \frac{2(1 + \ln(x))x}{x}dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - \int_1^e 2(1 + \ln(x))dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - 2\int_1^e (1 + \ln(x))dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - 2I$$
$$= e(1 + ln(e))^2 - 1(1 + ln(1))^2 - 2e$$
$$= e(1 + 1)^2 - 1(1 + 0)^2 - 2e$$
$$= 4e - 1 - 2e$$
$$= 2e - 1.$$

$J = 2e - 1$

c) Soit A l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les droite :

0.5 pt $x = e$, et $x = 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_1^e |f(x)|dx(u.a) \\
&= \int_1^e f(x)dx \times 1cm \times 1cm \\
&= \int_1^e (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}dx \times 1cm^2 \\
&= \int_1^e (1+\ln(x))^2 dx \times 1cm^2 + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx \times 1cm^2 \\
&= \left(2e - 1 + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e\right) cm^2 \\
&= \left(2e - 1 + (\frac{-1}{e} + \frac{1}{1}\right) cm^2 \\
&= \left(2e - 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{1}\right) cm^2 \\
&= \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathrm{A} = \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2}$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le point $A(0,0,1)$; le plan (P) d'équation $2x+y-2z-7=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3 .

1 - a) Montrer que $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P). — **0,5 pt**

b) Vérifier que $H(2,1,-1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ). — **0,5 pt**

2 - a) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ où $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3. — **0,5 pt**

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S) — **0,75 pt**

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par :

$$u_1=5 \quad\text{et}\quad u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{1+u_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1 - Montrer par récurrence que $u_n>2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. — **0,75 pt**

2 - On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in N^*}$ définie par : $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1. — **1 pt**

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. — **0,75 pt**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. — **0,5 pt**

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

1 - On considère l'événement A :" Tirer deux cartes concernant la langue française "
et l'événement B :"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes "
Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{45}$ et que $p(B)=\dfrac{16}{45}$ — **1,5 pt**

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

a) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : $0,1$ et 2 — **0,25 pt**

b) Montrer que $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X — **1,25 pt**

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$

0,25 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{a - \omega}{b - \omega} = i$.

0,5 pt **b)** En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

3 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz + 1 - i$.

0,5 pt **b)** Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

0,5 pt **c)** Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2014 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)\,e^x$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = e^x\,(e^x - 1 + 2xe^x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0) = 0$.

0,5 pt **b)** Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $]-\infty, 0]$.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty, 0]$

1,25 pt puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$

0,75 pt et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$)

b) Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C), (on admettra que la courbe (C) possède

0,75 pt un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer).

0,75 pt **5 -** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$$

1 pt **6 -** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2014

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $A(0,0,1)$ et $(P) : 2x + y - 2z - 7 = 0$ et $(S) : S(\Omega; 3)$ telle que $\Omega(0,3,-2)$.

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point A et perpendiculaire sur le plan (P).

On a $2x + y - 2z - 7 = 0$ équation de le plan (P), alors le vecteur $\vec{n}(2,1,-2)$ est une vecteur normale sur le plan (P)

Puis que $(\Delta) \perp (P)$, donc le vecteur $\vec{n}(2,1,-2)$ vecteur détecteur de la droite (Δ)

Par suit on a $A \in (\Delta)$, donc la représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où } (\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donc la représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point $A(0,0,1)$ et perpendiculaire sur le plan (P) est : $(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Vérifions que $H(2,1,-1)$ point d'intersection de plan (P) et la droite (Δ).

On a : $(\Delta) \perp (P)$ donc la droite (Δ) qui coupe le plan (P) un seule pont.

Par suit $\begin{cases} x_H = 2t \\ y_H = t \\ z_H = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = t \\ -1 = 1-2t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc $H \in (\Delta)$.

D'autre part on a $2x_H + y_H - 2z_H - 7 = 2 \times 2 + 1 - 2 \times (-1) - 7$

$= 4 + 1 + 2 - 7 = 7 - 7 = 0.$

Donc $H \in (P)$.

D'où $H \in (\Delta) \bigcap (P)$.

Donc H est un point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ telle que $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

On a : $A(0,0,1)$ et $\Omega(0,3,-2)$

Alors $\overrightarrow{\Omega A}\,(x_A - x_\Omega; y_A - y_\Omega; z_A - z_\Omega)$ donc $\overrightarrow{\Omega A}\,(0-0; 0-3; 1-(-2))$ d'où $\overrightarrow{\Omega A}\,(0;-3;3)$

Par suit on a $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ donc $\vec{u}\,(2;1;-2)$

Alors

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 0 & 2 \\ \vec{j} & -3 & 1 \\ \vec{k} & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$= 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

Donc $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

0.5 pt **b)** Montrons que $d(\Omega, (\Delta)) = 3$

On a $\vec{u}(2,1,-2)$ vecteur directeur de la droite (Δ) et $A \in (\Delta)$

Alors $d(\Omega, (\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

On a par question $(2a)$, $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

Donc $d(\Omega, (\Delta)) = \dfrac{3\sqrt{1+2^2+2^2}}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}} = \dfrac{3\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{1+4+4}}$

$$= \frac{3\sqrt{9}}{\sqrt{9}} = 3$$

0.75 pt **c)** Déduisons que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) en H.

On a $d(\Omega, (\Delta)) = 3$

Puise que le rayon de la sphère est 3

Donc la droite (Δ) tangent à la sphère (S).

• On a $\Omega H = \sqrt{(x_H - x_\Omega)^2 + (y_H - y_\Omega)^2 + (z_H - z_\Omega)^2}$

$= \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

Donc $H \in (S)$

Par suit on a $H \in (\Delta)$

D'où la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) en point H.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la numérique $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.75 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de$\mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 1$ on a $u_1 = 5$ donc $u_1 > 2$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - \dfrac{2(1+u_n)}{(1+u_n)} = \dfrac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1+u_n}$

$= \dfrac{3u_n - 6}{1+u_n} = \dfrac{3(u_n - 2)}{1+u_n}$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n > 2 \Rightarrow u_n + 1 > 3$

$\Rightarrow u_n + 1 > 0$

et $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0$

Donc $\dfrac{3(u_n-2)}{1+u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - 2 > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 2.$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 2$.

1 pt **2 -** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrons que :$v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis Montrons que la suit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ arithmétique de raison 1.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - \dfrac{2(1+u_n)}{1+u_n}}$

$= \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1+u_n}} = \dfrac{3}{\dfrac{3u_n - 6}{1+u_n}}$

$= \dfrac{3}{\dfrac{3(u_n-2)}{1+u_n}} = 3 \times \dfrac{1+u_n}{3(u_n-2)} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1+u_n}{u_n-2} - \dfrac{3}{u_n-2} = \dfrac{1+u_n-3}{u_n-2}$

$= \dfrac{u_n-2}{u_n-2} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit arithmétique de raison 1.

0.75 pt **b)** Ecrivons v_n en fonction n et déduisons que $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

• On a $v_1 = \dfrac{3}{u_1-2} = \dfrac{3}{5-2} = \dfrac{3}{3} = 1$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit arithmétique de raison 1

Donc l'exprimons de v_n en fonction n est :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 + (n-1)\times 1 = 1 + n - 1 = n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n$

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \dfrac{3}{u_n-2}$

$\Rightarrow u_n - 2 = \dfrac{3}{v_n}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{v_n} + 2$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{n} + 2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

0.5 pt **c)** Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{n} = 2$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 3 : (3 pts)

Le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

Soient les deux événements suivants :A :" Tirer deux cartes concernant la langue française ".

B:"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".

1.5 pt **1 -** Montrons que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{45}$ et que $\mathbb{P}(B) = \dfrac{16}{45}$.

On considère l'univers Ω.

On a le tirage est successivement et sans remise, donc $card(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

Les cartes sont indiscernables au toucher, alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{A_2^2}{90} = \dfrac{2}{45\times 2} = \dfrac{1}{45}$.

On a l'événement B:"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes", alors carte de

concernant la langue française et carte de concernant les mathématiques, puis que le tirage est successivement et sans remise donc on tient compte de l'ordre, d'où le coefficient d'ordre noté **p** est $p = 2$.

Donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} \times p = \dfrac{A_2^1 \times A_8^1}{90} \times 2 = \dfrac{2 \times 8}{2 \times 45} \times 2 = \dfrac{16}{45}$.

D'où $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{45}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{16}{45}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

0.25 pt **a)** Vérifions que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 et 1 et 2.

• On tire deux carte de concernant les mathématiques, alors la variable aléatoire X associe le nombre 0.

• On tire carte de concernant la langue française et carte les mathématiques, alors la variable aléatoire X associe le nombre 1.

• On tire deux carte de concernant la langue française, alors la variable aléatoire X associe le nombre 2.

D'où $X(\Omega) = \{0;\quad 1;\quad 2\}$.

1.25 pt **b)** Montrons que $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$.

On a l'événement $(X = 0)$ deux carte tire de de concernant les mathématiques, alors $card(X = 0) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$;

Donc $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{card(X = 0)}{card(\Omega)} = \dfrac{56}{90} = \dfrac{28}{45}$.

D'où $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$.

• Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a l'événement $(X = 1)$ est l'événement B, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{16}{45}$.

Et On a l'événement $(X = 2)$ est l'événement A, donc $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{45}$.

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

$X(\Omega)$	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$	$\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{16}{45}$	$\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{45}$

Exercice 4 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4$ donc $\Delta < 0$

Alors l'équation admet deux solutions complexes sont :

$z_1 = \dfrac{4 - i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 - 2i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + 2i$

D'où $S = \{z_1 = 2 - 2i;\quad z_2 = 2 + 2i\}$.

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

0.25 pt **a)** Montrons que $\dfrac{a-w}{b-w} = i$

On a : $\dfrac{a-w}{b-w} = \dfrac{2+i-1}{2-i-1} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$

Donc $\dfrac{a-w}{b-w} = i$.

0.5 pt **b)** Déduisons que le triangle ΩAB rectangle et isocèle en Ω.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a-w}{b-w} = i &\Leftrightarrow \left|\frac{a-w}{b-w}\right| = |\ i\ | \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{a-w}{b-w}\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |\ a-w\ | = |\ b-w\ | \\ &\Leftrightarrow \Omega A = \Omega B \qquad (1)\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}\frac{a-w}{b-w} = i &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) = \arg(i) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2} \qquad (2)\end{aligned}$$

Donc par (1) et (2) le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

D'où le triangle ΩAB rectangle et isocèle en Ω.

3 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Montrons que $z' = iz + 1 - i$

On a $R_{(\Omega;\frac{\pi}{2})}(M) = M' \Leftrightarrow z' - w = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - w)$

$\Leftrightarrow z' - 1 = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - 1)$

Par suit : $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i = i$

Donc $z' = i(z-1) + 1$, alors $z' = iz - i + 1$

D'où $z' = iz + 1 - i$

0.5 pt **b)** Vérifions que $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

On a la relation complexe de la rotation R est : $z' = iz + 1 - i$

Alors : $ia + 1 - i = i(2+i) + 1 - i = 2i + i^2 + 1 - i = 2i - 1 + 1 - i = i = c$

Donc $R(A) = C$.

On a $id + 1 - i = i(-i) + 1 - i = -i^2 + 1 - i = 1 + 1 - i = 2 - i = b$

Donc $R(D) = B$.

D'où $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

0.5 pt **c)** Montrons que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

On a $R(A) = C$, alors $\Omega A = \Omega C$ (1)

et $R(D) = B$, alors $\Omega D = \Omega B$ (2)

Par suit : ΩAB triangle isocèle en Ω, donc $\Omega A = \Omega B$ (3)

Donc par (1) et (2) et (3) on obtient $\Omega A = \Omega C = \Omega D = \Omega B$

D'où les points A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre Ω

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

0.75 pt **1 -** Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - 1)e^x$

Puis que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - 1)e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

• Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)e^x$

Puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(xe^x - 1)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)\dfrac{e^x}{x}$

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$.

Alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)\dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

0.5 pt **b)** Déduisons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

Puis que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Alors : $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

1 pt **3 - a)** Montrons que :$f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$ puis Vérifions que $f'(0)=0$

On a la fonction $x\longmapsto x$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, comme fonction polynôme.

Et la fonction $x\longmapsto e^x$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, (car la fonction e^x dérivable sur l'ensemble de définition).

Alors : la fonction $x\longmapsto xe^x-1$ dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suit : $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=((xe^x-1)e^x)'=(xe^x-1)'+e^x(xe^x-1)$

$=(e^x+xe^x)e^x+e^x(xe^x-1)=e^x(1+x+xe^x-1)$

$=e^x(e^x+xe^x+xe^x-1)=e^x(e^x+2xe^x-1)$

D'où $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$.

• On a $f'(0)=e^0(e^0-1+20\times e^0)=1\times(1-1+0)=0$

D'où $f'(0)=0$.

0.5 pt **b)** Montrons que :$e^x-1\geq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$ et que $e^x-1\leq 0$ pour tout x de $]-\infty,0]$

• On a : $\forall x\in[0,+\infty[$, $\quad x\geq 0$

$\Rightarrow e^x\geq e^0$ (Car la fonction e^x fonction croissant).

$\Rightarrow e^x\geq 1$

$\Rightarrow e^x-1\geq 0$.

Donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $\quad e^x-1\geq 0$

• On a : $\forall x\in]-\infty,0]$, $\quad x\leq 0$

$\Rightarrow e^x\leq e^0$ (Car la fonction e^x fonction croissant).

$\Rightarrow e^x\leq 1$

$\Rightarrow e^x-1\leq 0$.

Donc $\forall x\in]-\infty,0]$, $\quad e^x-1\leq 0$

1.25 pt **c)** Montrons que : la fonction f est croissante sur $[0,+\infty$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty,0]$, puis dresserons le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad e^x>0$

Par suit : $\forall\in[0,+\infty[$, $x\geq 0$

$\Rightarrow \quad \forall\in\mathbb{R} \quad 2xe^x\geq 0$

Puis que $\forall\in\in[0,+\infty[$, $\quad e^x-1\geq 0$, alors $e^x-1+2xe^x\geq 0$ Comme la somme de deux fonctions positives.

Donc $\forall \in [0,+\infty[$, $\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ croissant sur $[0,+\infty[$.

• On a : $\forall \in \mathbb{R}$, $\quad e^x > 0$

Par suit : $\forall \in]-\infty,0]$, $x \leq 0$

$\Rightarrow \quad \forall \in]-\infty,0] \quad 2xe^x \leq 0$

Puis que $\forall \in]-\infty,0]$, $\quad e^x - 1 \leq 0$, alors $e^x - 1 + 2xe^x \leq 0$ Comme la somme de deux fonctions négatives .

Donc $\forall \in]-\infty,0]$, $\quad f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ décroissant sur $]-\infty,0]$.

D'où : la fonction f, est croissante su $[0,+\infty[$, et décroissante sur $]-\infty,0]$.

• On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(0)=-1$	↗	$+\infty$

0.75 pt **4 - a)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$).

• On a f continu sur $[0,+\infty[$; car f dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. et $f(0) = -1$

On sait que f croissant sur $[0,+\infty[$, donc $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$

Puis que $0 \in [-1,+\infty[$, donc $0 \in f([0,+\infty[)$.

On a aussi f strictement croissant sur $[0,+\infty[$.

Donc d'après **T.V.I** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,+\infty[$.

• On a $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1) \times e^{\frac{1}{2}} < 0$, $\quad$ car $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$

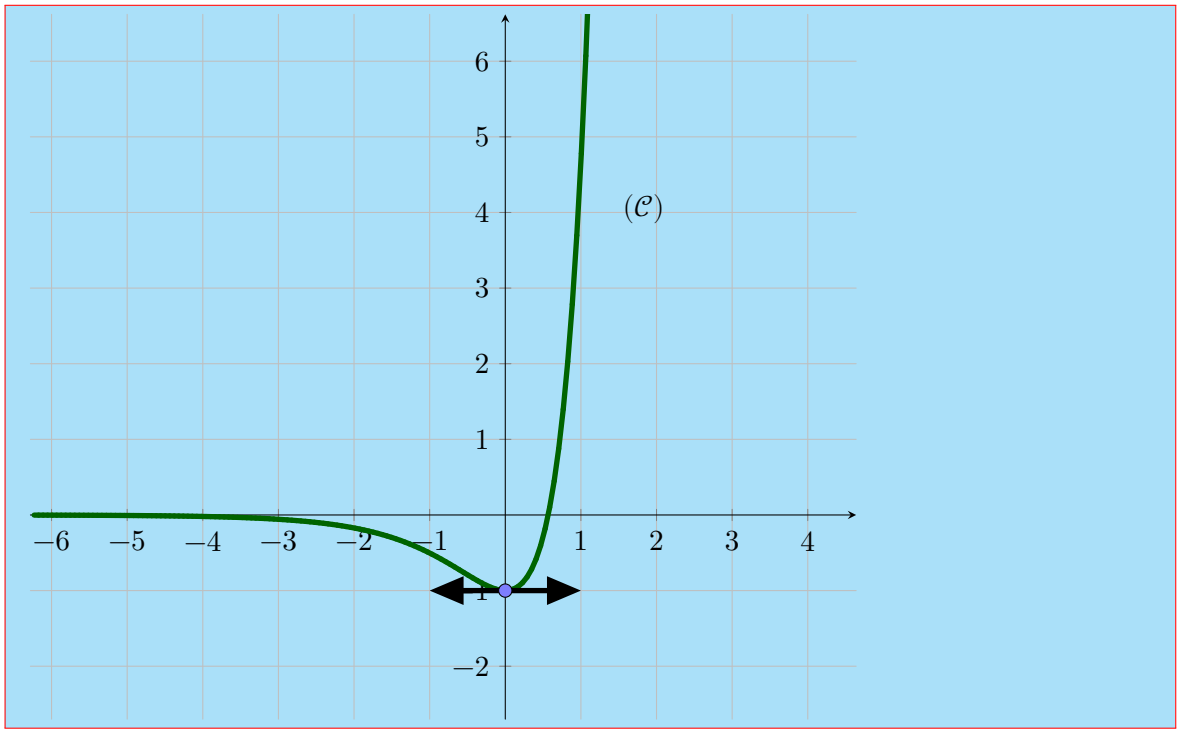
et $f(1) = (e-1) \times e > 0$, $\quad$ car $e > 1$

Alors $f(1) \times f(\frac{1}{2}) < 0$;

On sait que $]\frac{1}{2},1[\subset [0,+\infty[$, donc f continu et strictement croissant sur $]\frac{1}{2},1[$

Donc d'après **T.V.I**, $\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$.

0.75 pt **b)** Construisons,dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite la courbe $(\mathcal{C})$



0.75 pt **5 -** Montrons que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$

On pose $\begin{cases} U = x \\ V' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Donc par **I.P.P** on obtient, $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = [\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x}dx$

$= (\frac{1}{4}e - 0) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}(e-1) = \frac{1}{4}$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$

1 pt **6 -** Calculons en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

Soit **A** l'aire du domaine

Alors $\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx \times UA$

On sait que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad f(x) \leq 0$ donc $|f(x)| = -f(x)$

Par suit : $\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} -f(x)dx \times UA = -\int_0^{\frac{1}{2}} (xe^x - 1)e^x dx \times UA$

$= -\int_0^{\frac{1}{2}} (xe^{2x} - e^x)dx \times UA = -\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx \times UA$

$= -\frac{1}{4} + [e^x]_0^{\frac{1}{2}} \times UA = (-\frac{1}{4} + e^{\frac{1}{2}} - 1) \times UA = (-\frac{1}{4} + e^{\frac{1}{2}} - 1) \times 4cm^2 = -5 + 4\sqrt{e}cm^2.$

D'où $\mathbf{A} = -5 + 4\sqrt{e} \ \ cm^2$.

FIN

Exercice 1 Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les deux points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$. Soit (P) le plan passant par le point A et $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ son vecteur normal

0.5 pt **1 -** Montrer que $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 - Soit (S) l'ensemble de points M de l'espace qui vérifient la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

0.75 pt Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1,1,0)$ et de rayon 3

0.5 pt **3 - a)** Calculer la distance du point Ω du plan (P) puis en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C)

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle est le point $H(0,2,-1)$

0.75 pt **4 -** Montrer que $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 2 Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

I- On considère le nombre complexe a tel que : $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

0.25 pt **2 -** Vérifier que a $=2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

0.25 pt **3 - a)** En linéarisant $\cos^2\theta$ avec θ est un nombre réel, montrer que :$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$. .

0.5 pt **b)** Montrer que $a=4\cos^2\dfrac{\pi}{8}+4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$)

0.5 pt **c)** Montrer que $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a, puis montrer que $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

II- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$,et les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega=\sqrt{2}$ et $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

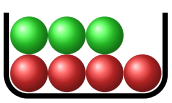
0.5 pt **1 -** Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est $2i$.

0.5 pt **2 -** Déterminer l'ensemble de points M d'affixe z tel que $|z-2i|=2$.

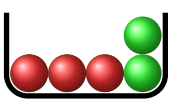
Exercice 3 Session : NORMAL1 2015 — 3 Pts

Une urne U_1 contient 7 boules : *quatre* boules rouges et *trois* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher)

Une autre urne U_2 contient 5 boules : *trois* boules rouges et *deux* boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher)



L'urne U_1



L'urne U_2

I) On considère l'épreuve suivante : On tire, simultanément, et au hasard, *trois* boules de l'urne U_1.

Soit l'événement A : "On tire *une seule* boule rouge et *deux* boules vertes"

Et l'événement B :" On tire *trois* boules de même couleur"

2 pt Montrer que $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$ **II)** On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2 .

Soit l'événement C : "On tire trois boules rouges".

1 pt Montrer que $p(C) = \frac{6}{35}$.

Exercice 4 — Session : NORMAL1 2015 — 11 Pts

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 2 cm).

I)

0,5 pt **1 -** Montrer que $D_f =]0;e[\cup]e;+\infty[$ $\left(D_f \text{ est l'ensemble de définition de la fonction } f\right)$

0,75 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage **0,5 pt** de $+\infty$ que l'on déterminera.

0,5 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique à ce résultat

$\left(\text{ pour calculer } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), \text{ remarquer que } x(1-\ln x) = x - x\ln x\right)$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f

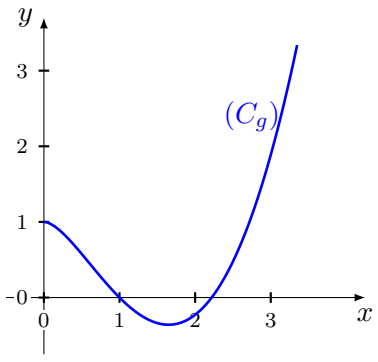
1 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle] 0,1] et croissante sur chacun des deux intervalles $[1,e[$ et $]e,+\infty[$

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f

II)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$

Et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (voir la figure).



1 - a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) tel que :

0,5 pt (E) : $g(x) = 0$, $x \in]0;+\infty[$

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2.1	2.2	2.3	2.4
$g(x)$	-0.14	-0.02	0.12	0.28

0,5 pt Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que : $2.2 < \alpha < 2.3$

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisses 1 et α

0,5 pt **c)** Déterminer, à partir de (C_g), le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1, \alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1, \alpha]$

1,25 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$

$\left(\right.$ remarquer que : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f $\left.\right)$

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ), et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

III)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $_N$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

$\left(\right.$ On pourra utiliser le résultat de la question **II) 2- c)** $\left.\right)$

0,75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal 1 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

0.5 pt

1 - Soit le plan (P) passant par le point A et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ est vecteur normal à (P).
Montrer que : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

$*$ 1ère Méthode :

On a le vecteur $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (P) passant par le point $A(2, 1, 0)$.

$D'o\grave{u}$: $M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 1 \times (x-2) + 1 \times (y-1) + (-1) \times z = 0$$

$$\iff x - 2 + y - 1 - z = 0$$

$$\iff x + y - z - 3 = 0$$

Donc : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du pan (P).

$*$ 2ème Méthode :

Le vecteur $\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (P).

donc une équation cartésienne du plan (P) est de la forme $x + y - z + d = 0$

sachant que le point $A(2; 1; 0) \in (P)$ d'où : $x_A + y_A - z_A + d = 0$ par suite $d = -3$

Donc : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du pan (P).

0.75 pt

2 - Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifie la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
Montrons que (S) est une sphère de centre $\Omega(-1; 1; 0)$ et de rayon 3

On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (x-2)(x+4) + (y-1)(y-1) + z^2 = 0$$

$$\iff x^2 + 2x - 8 + (y-1)^2 + z^2 = 0$$

$$\iff \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 9 + (y-1)^2 + z^2 = 0$$

$$\iff (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 9 = 3^2$$

Donc : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(-1;1;0)$ et de rayon $R = 3$

0,5 pt **3 - a) Calculer la distance du point Ω au plan (P) et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)**

$*$ Calculer $d(\Omega,(P))$:

On a : $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega - z_\Omega - 3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{3}$

Donc : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{3}$

$*$ Déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle :

Puisque le rayon du sphère est $R = 3$ et on a : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{3} < 3$ d'où le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).

0.5 pt **b) Montrer que le centre du cercle (C) est le point $H(0;2;-1)$**

On a le centre du cercle (C) est la projection orthogonale de Ω centre de la sphère (S) sur le plan (P) ou bien l'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par le centre Ω et orthogonale au plan (P) Donc :

- La droite (Δ) est orthogonale au plan (P).
- Le vecteur $\vec{u}\,(1;1;-1)$ est un vecteur normal du plan (P).

Donc : $\vec{u}\,(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et on a $\Omega\,(-1,1,0) \in (\Delta)$

Par conséquence une représentation paramétrique de le droite (Δ) est :

$$(\Delta): \begin{cases} x &= -1 + 1\times t = -1 + t \\ y &= 1 + 1\times t = 1 + t \\ z &= 0 + (-1)\times t = -t \end{cases} \quad ; \quad (t \in \mathbb{R})$$

On détermine les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

$$M(x;y;z)\in(P)\cap(\Delta) \iff \begin{cases} M\in(P) \\ M\in(\Delta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (-1+t)+(1+t)-(-t)-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t-3=0 \\ \begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -t \end{cases} \end{cases}$$

D'où : $t=1$ et $\begin{cases} x &= -1+1=0 \\ y &= 1+1=2 \\ z &= -1=-1 \end{cases}$

Donc : l'intersection de le droite (Δ) et le plan (P) est le point $H(0;2;-1)$

Alors le centre de cercle (C) est le point $H(0;2;-1)$

0.75 pt **4 - Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, en déduire la surface du triangle OHB**

∗ Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

On a : $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$

$$D'o: \quad \overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

∗ En déduire S_{OHB} la surface du triangle OHB

La surface est donnée par la formule suivante :

$S_{OHB}=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\|=\frac{1}{2}\|\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81}$

Donc : $S_{OHB}=\frac{9}{2}$ u.a (Unité d'aire)

Exercice 2 : (3 pts)

Partie I

On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0.5 pt **1 - Montrer que le module de a est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$**

On a : $$\begin{aligned} |a| &= \left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} \\ &= \sqrt{(4 + 4\sqrt{2} + 2) + 2} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} \\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donc : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

0.25 pt **2 - Vérifier que : $a = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$**

On a : $$\begin{aligned} 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= a \end{aligned}$$

0.25 pt **3 - a) Par la linéarisation de $\cos^2\theta$ tel que θ est un nombre réel, montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$**

D'après la **Formule d'Euler**, on a : $$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta-i\theta} + e^{-2i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\underbrace{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}_{2\cos(2\theta)} + 2e^0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\cos(2\theta) + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right) \end{aligned}$$

Donc : $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$. Alors : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

0.5 pt **b) Montrer que : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$**

(On rappelle que : $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$)

On a $$\begin{aligned} a &= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(1 + \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right) + 2i\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + 2i\left(2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

Donc : $a = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

0.5 pt

c) Montrer que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a puis montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

$*$ Montrer que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad a &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] \end{aligned}$$

D'autre part : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ d'où : $|a| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a.

$*$ montrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

On a : $a = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

D'après les questions précédentes on a : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $|a| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\right)^4 \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4\left[\cos\left(4\times\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)\right] \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 i = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i \end{aligned}$$

Donc : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

Partie II

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points Ω et A d'affixes respectives ω et a tel que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt

1 - Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est égale à $2i$

L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z' - \omega = (z-\omega)\,e^{i\theta}$

D'où : $z' - \sqrt{2} = \left(z - \sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $z' - \sqrt{2} = \left(z - \sqrt{2}\right) \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$z' = \left(z - \sqrt{2}\right) \times i + \sqrt{2}$; $\left(\text{car : } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right)$

$z' = iz - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$

D'où : L'écriture complexe de la rotation R est $z' = iz - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$

On pose que le point B d'affixe b' est l'image du point A par la rotation R.

On prouve que $b' = b = 2i$

$$\begin{aligned} R(A) = B &\iff b' = ia - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = i\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = 2i + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &\iff b' = 2i \end{aligned}$$

D'où : $b' = b = 2i$

0.5 pt **2 - Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z-2i|=2$**

On a : $|z-2i|=2 \iff |z-b|=2$

$\iff BM=2$

D'où : l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie $|z-2i|=2$ est le cercle de centre le point B et de rayon 2.

Exercice 3 : (3 pts)

2 pt **1 - On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément trois de boules de l'urne U_1**

Soient les événements suivants :

♣ A : **" On obtient une seule boule rouge et deux boules vertes "**

♣ B : **" On obtient trois boules de même couleur "**

Montrer que : $p(A)=\frac{12}{35}$ **et** $p(B)=\frac{1}{7}$

∗ Montrons que : $p(A)=\frac{12}{35}$

• On calcule $CardΩ$: (le nombre des tirages possible)

Tirer simultanément trois boules parmi les sept boules de l'urne U_1 présente une combinaison de 3 parmi 7

D'où le nombres de tirages possibles est : $CardΩ=C_7^3=\frac{A_7^3}{3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

• On calcule $CardA$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A)

L'événement A : " On obtient une seule boule rouge et deux boules vertes "

Tirées une boules rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 il se fait par $C_4^1=4$ façons différentes ;

Tirées deux boules vertes parmi 3 boules vertes de l'urne U_1 il se fait par $C_3^2=3$ façons différentes.

Donc le nombre de tirages qui réalise l'événement A est : $C_4^1\times C_3^2=4\times3=12$

Donc : $cardA=C_4^1\times C_3^2=12$

Alors : $p(A)=\frac{cardA}{cardΩ}=\frac{C_4^1\times C_3^2}{C_73}=\frac{4\times3}{35}=\frac{12}{35}$

∗ Montrons que : $p(B)=\frac{1}{7}$

On calcule $CardB$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B)

L'événement B : " On obtient trois boules de même couleur "

ou encoure l'événement B est " les 3 boules tirées sont vertes ou les 3 boules tirées sont rouges "

Les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne U_1 on a : $C_3^3=1$

Les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 on a : $C_4^3=4$

D'où : $cardB=C_3^3+C_4^3=1+4=5$

Donc : $p(B)=\frac{cardB}{cardΩ}=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_73}=\frac{1+4}{35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

1 pt **2 - On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_1 puis on tire une boule de l'urne U_2.**

Soit l'évènement C : " On obtient trois boules rouges ". Montrer que : $p(C)=\frac{6}{35}$

∗ On calcule $cardΩ'$ (car on a une autre expérience)

• On tire simultanément deux boules parmi 7 boules de l'urne U_1 il se fait par $C_7^2=21$ façons

différentes.

• On tire une boule de l'urne U_2 il se fait par $C_5^1 = 5$ façons différentes.

Donc : $card\Omega' = C_7^2 \times C_5^1 = 21 \times 5 = 105$

∗ On calcule $cardC$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C)

Soit l'évènement C : " On obtient trois boules rouges " ou encoure " on tire simultanément deux boules rouges de l'urne U_1 et une boule rouge de l'urne U_2 "

• On tire simultanément deux boules rouges parmi 4 boules rouges de l'urne U_1 il se fait par $C_4^2 = 6$ façons différentes.

• On tire une boule rouge parmi 3 boules rouges de l'urne U_2 il se fait par $C_3^1 = 3$ façons différentes.

Donc : $p(C) = \dfrac{cardC}{card\Omega'} = \dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^2 \times C_5^1} = \dfrac{6 \times 3}{105} = \dfrac{6}{35}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

0,5 pt **1 - Montrer que : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$**

On a : $x \in D_f \iff (x > 0 \quad et \quad x(1-\ln x) \neq 0)$

$\iff x > 0 \quad et \quad x \neq 0 \quad et \quad 1 - \ln x \neq 0$

$\iff x > 0 \quad et \quad \ln x \neq \ln e$

$\iff x > 0 \quad et \quad x \neq e$

$\iff x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$

Donc : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

0,75 pt **2 - a) Calculer : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats**

∗ Calculer : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$

On détermine le signe de $1 - \ln x$:

On a : $1 - \ln x \geq 0 \iff 1 \geq \ln x$

$\iff \ln e \geq \ln x$

$\iff e \geq x$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to e^+} 1 - \ln x = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to e^+} x = e$

• $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to e^-} 1 - \ln x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to e^-} x = e$

∗ Interpréter géométriquement ces deux résultats :

On a : $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = +\infty$

D'où la droite (D) d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à C_f.

0,5 pt **b) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction.**

∗ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

∗ Interpréter géométriquement ce résultat :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pt **c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat**

∗ Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-x\ln x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -x\ln x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$

∗ Interpréter géométriquement ce résultat :

On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

0,75 pt **3 - a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f**

On a la fonction f est dérivable sur D_f car elle est le produit et quotient de plusieurs fonctions dérivables sur D_f

On a : $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x(1-\ln x)}\right)'$

$=\dfrac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}$

$=-\dfrac{1-\ln x+x\times(-\frac{1}{x})}{(x(1-\ln x))^2}$

$=-\dfrac{-\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f

1 pt **b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,\mathrm{e}[$ *et sur* $]\mathrm{e},+\infty[$**

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln x$ sur D_f.

• Sachant que : $\ln x\leq 0$ sur l'intervalle $]0,1]$ donc $f'(x)\leq 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]0,1]$.

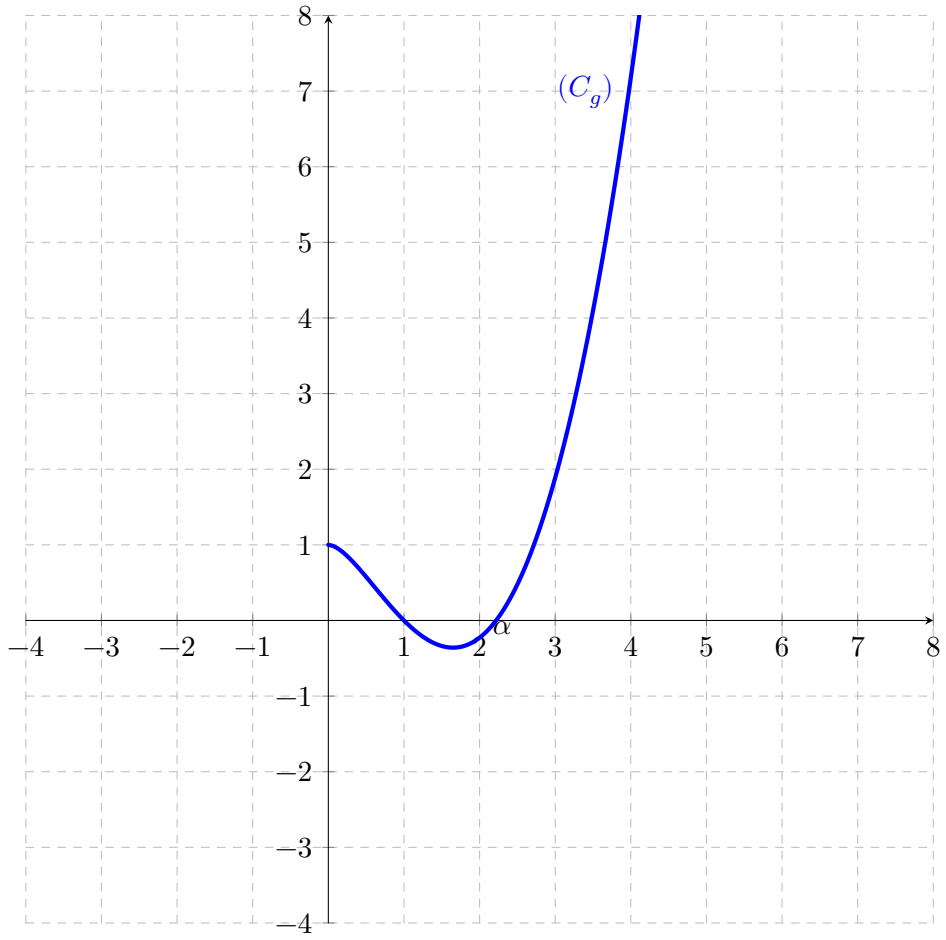
• Sachant que : $\ln x\geq 0$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc $f'(x)\geq 0$ sur chacun des intervalles $[1,\mathrm{e}[$ et $]\mathrm{e},+\infty[$ d'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[1,\mathrm{e}[$ et $]\mathrm{e},+\infty[$.

0,25 pt **c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f**

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Partie II

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$. Et soit (C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (voir la figure)



0,5 pt **1 - a) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation suivante :**

(E) : $g(x) = 0$; $x \in]0;+\infty[$

On cherche l'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses, graphiquement le nombre des points d'intersection est 2.

Donc : l'équation (E) a deux solutions.

0,5 pt **b) On donne le tableau des valeurs suivantes :**

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) admet une solution α tel que : $2,2 < \alpha < 2,3$

- Graphiquement la fonction g est continue sur l'intervalle $[2,2;2,3]$.
- D'après le tableau : $g(2,2) \times g(2,3) = -0,02 \times 0,12 < 0$.
- En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α de $]2,2;2,3[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

Donc : l'équation (E) admet une solution α tel que : $2,2 < \alpha < 2,3$

0,25 pt **2 - a) Vérifier que : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f**

On a : $f(x)-x = \dfrac{1}{x(1-\ln x)} - x$

$= \dfrac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}$

$= \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

Donc : $f(x)-x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f

0,5 pt **b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses respectives 1 et α.**

On étudie l'intersection de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y=x$, pour cela on résout l'équation : $f(x)=x$ pour tout $x \in D_f$

$(\forall x \in D_f)$; $f(x)=x \iff f(x)-x=0$

$\iff \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

$\iff g(x)=0$

Graphiquement on a deux solutions et d'après ce qui précède $g(\alpha)=0$ et $g(1)=0$.

Donc : La droite (Δ) d'équation : $y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points respectives d'abscisses 1 et α.

0,5 pt **c) A partir de la courbe (C_g), déterminer le signe de g sur $[1;\alpha]$ et montrer que $f(x)-x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$**

$*$ Déterminer le signe de g sur $[1;\alpha]$:

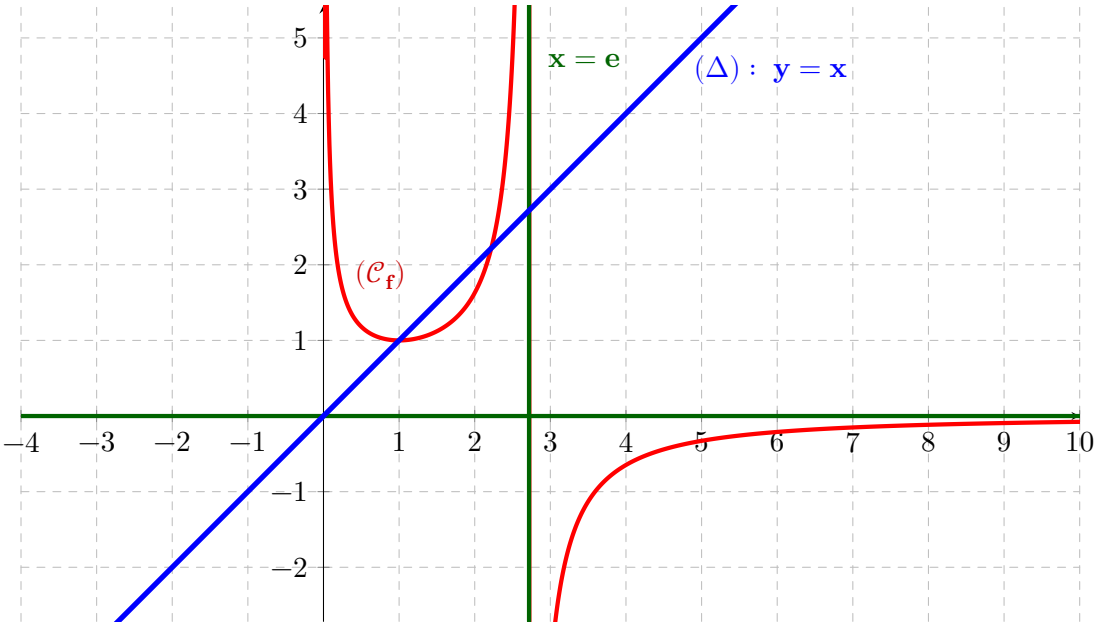
Sur l'intervalle $[1;\alpha]$: on a la courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses, d'où $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1;\alpha]$

$*$ Montrer que $f(x)-x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

Sur l'intervalle $[1;\alpha]$ on a $g(x) \leq 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)} \geq 1 > 0$ (d'après tableau de variations de la fonction f sur $[1;e[$) et on a : $[1;\alpha] \subset [1;e[$

d'où : $f(x)-x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)} = \overbrace{\dfrac{1}{x(1-\ln x)}}^{f(x)>0} \times g(x) \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

1,25 pt **3 - Construire dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) et la droite (Δ)**



0,75 pt

a) Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$

(remarquer que $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ **pour tout** x **de** D_f**)**

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx \\
&= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-(1-\ln x)'}{(1-\ln x)}\,dx \\
&= -\Big[\ln|1-\ln x|\Big]_1^{\sqrt{e}} \\
&= -\left(\left(\ln|1-\ln\sqrt{e}|\right) - \left(\ln|1-\ln 1|\right)\right) \;;\; \left(\ln|1-\ln\sqrt{e}| = \ln|1-\frac{1}{2}\ln e|\right) \\
&= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln 1\right) \;;\; \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2\right) \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \ln 2$

0,75 pt

b) Calculer en cm^2 **l'aire du domaine plan délimité par la courbe** (C_f) **et la droite** (Δ) **et les droites d'équations** $x = 1$ **et** $x = \sqrt{e}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left(\int_1^{\sqrt{e}} |f(x)-x|\,dx\right) \times u.a \quad avec \quad u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 4\ cm^2 \\
&= \left(\int_1^{\sqrt{e}} (x-f(x)\,dx\right) \times 4cm^2 \quad (\text{Car } (C_f) \text{ est au-dessous de } (\Delta) \text{ sur } [1;\sqrt{e}]) \\
&= 4\int_1^{\sqrt{e}} \left(x - \frac{1}{x(1-\ln x)}\right) dx\ cm^2 \\
&= 4\left(\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx\right) cm^2 \\
&= 4\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - 4\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx\ cm^2 \\
&= 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} - 4\ln 2\ cm^2 \\
&= 2\left(\sqrt{e}^2 - 1^2\right) - 4\ln 2\ cm^2 \\
&= -4\ln 2 + 2e - 2\ cm^2
\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{A} = -4\ln 2 + 2e - 2\ cm^2$

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq \alpha$ (1) pour tout n de $\mathbb{N}$**

• On vérifie que la relation est vraie pour $n = 0$

On a : $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$ (avec : $2,2 < \alpha < 2,3$) d'où la relation (1) est vrais pour $n = 0$

• On suppose que la relation (1) est vraie pour n (hypothèse se récurrence)

• On montre que la relation (1) est vraie pour $n+1$ c-à-d : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$

Donc : $1 \leq u_n \leq \alpha \implies f(1) \leq u_n \leq f(\alpha)$ (car la fonction f est croissante sur $[1;\alpha]$)

$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

D'où : la relation est vraie pour $n+1$

Donc : $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.**

(On pourra utiliser le résultat de la question $II.2.c$)

Pour cela on montre que : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou encoure : $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose : $x = u_n$ et on a $u_n \in [1;\alpha]$ car $1 \leq u_n \leq \alpha$

D'après le résultat de la question $II.2.c$ on a : $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1;\alpha]$

Donc : $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1;\alpha]$

D'où : $x \in [1;\alpha] \implies f(x) \leq x$

$\implies f(u_n) \leq u_n$

$\implies u_{n+1} \leq u_n$

Donc : la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **3 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

$*$ En déduire que la suite (u_n) est convergente :

On a :

• La suite (u_n) est décroissante ;

• La suite (u_n) est minorée par 1.

Donc la suite (u_n) est convergente.

$*$ On détermine sa limite l :

• La fonction f est continue sur $I = [1;\alpha]$ et $f(I) = f([1;\alpha]) = [f(1);f(\alpha)] = [1;\alpha] \subset [1;\alpha]$

• On a $u_0 = 2 \in [1;\alpha]$

• La suite (u_n) est convergente vers l avec $l \in \mathbb{R}$

Donc l est solution de l'équation : $f(x) = x$

On a $f(x) = x \Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$

comme (u_n) est décroissante pour tout n de $\mathbb{N}$, d'où : $u_n \leq u_0$ c-à-d : $u_n \leq 2$

Donc : $l \leq 2$

Alors : $l = 1$

Exercice 1 — Session : NORMAL2 2015 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt **1 - a)** Calculer le distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

0.5 pt **b)** Vérifier que le point $H(0;-2;-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S)

2 - On considère les deux points $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$

0.75 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

0.5 pt **b)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (OAB)

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de le droite (Δ) et de la sphère (S)

Exercice 2 — Session : NORMAL2 2015 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+10z+26=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs a, b, c et ω tels que : $a=-2+2i$, $b=-5+i$, $c=-5-i$ et $\omega=-3$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$

0.5 pt **b)** En déduire la nature du triangle ΩAB

3 - Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe d du point D est $1+3i$

0.75 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d}=2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$

Exercice 3 — Session : NORMAL2 2015 — 3 Pts

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (les boules son indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne

1.5 pt **1 -** On considère l'événement A suivant : "tirer une boule blanche au moins"
et l'événement B suivant : "tirer deux boules de même couleur"
Montrer que : $p(A)=\dfrac{13}{28}$ et $p(B)=\dfrac{1}{4}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de boules blanches tirées

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice **4** **Session : NORMAL2 2015** **11 Pts**

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$.

0.75 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

0.5 pt **3 -** En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$).

1 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.
(remarquer que $e^x - 2x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0.5 pt **b)** Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

1 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).
(on prendra $\dfrac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).

0.75 pt **4 - a)** Montrer que $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

0.5 pt **c)** Soit, en cm^2, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que : $1 - \dfrac{2}{e} \leq A(E) \leq \dfrac{1}{e-2}$.

Partie III

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$: $h(x) = f(x)$

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0.5 pt **2 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}.

Partie Ⅳ

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$).

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal-2 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

1 - on a : $(P) : x+y+z+4=0$ et $\Omega(1;-1;-1)$

a) $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|1-1-1+4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ **0.5 pt**

et puisque : $R = \sqrt{3}$ Alors : $d(\Omega;(P)) = R$

donc le plan (P) est tangent à la sphère (S). **0.25 pt**

b) on a : $(P) : x_H + y_H + z_H + 4 = 0 - 2 - 2 + 4 = 0$

Alors : $H \in (P)$ (1)

et on a : $\Omega H = \sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{3}$

Alors : $\Omega H = R$

Alors : $H \in (S)$ (2)

d'après (1) et (2), H est le point de contact du plan (P) et la sphère (S). **0.5 pt**

2 - on a : $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$

a) $*$ Alors : $\overrightarrow{OA}(2;1;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1;0;1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1-0)\vec{i} - (2-1)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ **0.5 pt**

$*$ on a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur normal au plan (OAB). Alors l'équation cartésienne du plan (OAB) s'écrit sous la forme : $x-y-z+d=0$.

et on a : $A \in (OAB)$. Alors : $x_A + y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2-1-1+d=0 \Leftrightarrow d=0$

donc : $(OAB) : x-y-z=0$ **0.25 pt**

b) puisque (Δ) est orthogonale au plan (P).

Alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur directeur de la droite (Δ).

et on a : $\Omega \in (\Delta)$

0.5 pt Alors : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est la représentation paramétrique de la droite Δ

c) (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

Alors : $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3$

Et puisque : (Δ) passant par Ω, alors elle coupe la sphère en deux points.

$$(\Delta) \cap (S) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3 \end{cases} ; \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Leftrightarrow (1+t-1)^2 + (-1-t+1)^2 + (-1-t+1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = 1 \quad ou \quad t = -1$

Alors le triplet des coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et

0.5 pt la sphère (S) sont : $(2;-2;-2)$ et $(0;0;0)$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.25 pt **1 -** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 10z + 26 = 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 26 = 100 - 104 = -4$

Comme $\Delta \leq 0$ alors l'équation admet deux solutions distincts dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{-(-4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-10 - 2i}{2} \\ &= -5 - i \end{aligned}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -5 + i$$

Donc : $S = \{-5-i; -5+i\}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $\dfrac{b-\omega}{b-\omega} = i$.

$$\begin{aligned}\frac{b-\omega}{b-\omega} &= \frac{-5+i+3}{-2+2i+3}\\ &= \frac{-2+i}{2i+1}\\ &= \frac{i\,(2i+1)}{2i+1}\\ &= i\end{aligned}$$

0.5 pt **b)** Déduisons la nature du triangle ΩAB. Puisque $\dfrac{b-\omega}{b-\omega} = i$ alors $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\Omega B = \Omega A$.

Alors ΩAB est un triangle rectangle isocèle .

0.5 pt **3 -** Montrons que : d l'affixe du point D est $1+3i$.

a)

$$\begin{aligned}T(C) = D &\Longleftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u}\\ &\Longleftrightarrow d - c = 6 + 4i\\ &\Longleftrightarrow d = 6 + 4i - 5 - i\\ &\Longleftrightarrow d = 1 + 3i\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2$.

$*$ On a : $\dfrac{b-d}{a-d} = \dfrac{-5+i-(1+3i)}{-2+2i-(1+3i)} = \dfrac{-6-2i}{-3-i} = \dfrac{2\,(-3-i)}{-3-i} = 2.$

$*$ On a : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2 \in \mathbb{R}$

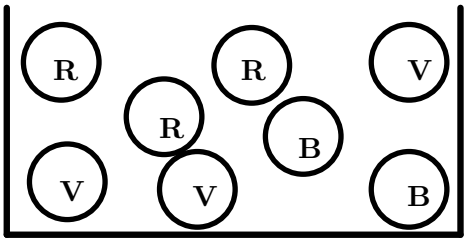
Donc les points B, D et A sont alignés et de plus $BD = 2AD$

Donc A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 : (3 pts)

On tire successivement sans remise (A_n^p), 2 boules de l'urne.

on a : $card(\Omega) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$



1 - Calculons $P(A)$:

$*$ Méthode (1)

A :"2×(B et $\overline{B}$) ou (B ; B)"

Alors : $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{2\times(A_2^1\times A_6^1)+A_2^2}{56}=\dfrac{2\times2\times6+2}{56}=\dfrac{26}{56}=\dfrac{13}{28}$ **0.75 pt**

$*$ Méthode (2)

$\overline{A}$:"n'obtenir aucune boule blanche"

c.à.d : $\overline{A}$: "$(\overline{B};\overline{B})$"

Alors : $P(\overline{A})=\dfrac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=\dfrac{A_6^2}{56}=\dfrac{6\times5}{56}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

Donc : $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{15}{28}=\dfrac{28-15}{28}=\dfrac{13}{28}$.

Calculons $P(B)$:

B :"(R ;R) ou (B ;B) ou (V ;V)"

$P(B)=\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{A_3^2+A_2^2+A_3^2}{56}=\dfrac{3\times2+2\times1+3\times2}{56}=\dfrac{14}{56}=\dfrac{1}{4}$. **0.75 pt**

2 - X est la variable aléatoire qui est égal au nombre d boules blanches tirées.

$(X=0)$: "n'obtenir aucune boule blanche tirée".

$(X=1)$: "obtenir exactement une seule boule blanche".

$(X=2)$: "obtenir exactement deux boules blanches".

Alors : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

a) Calculons $P(X=2)$:

$P(X=2)=\dfrac{A_2^2}{56}=\dfrac{2}{56}=\dfrac{1}{28}$. **0.5 pt**

Calculons $P(X=0)$:

$P(X=0)=P(\overline{A})=\dfrac{15}{28}$. **0.25 pt**

Calculons $P(X=1)$: **0.25 pt**

$*$ Méthode (1)

$(X=1)$: "2×(B et $\overline{B}$)"

Alors : $P(X=1)=\dfrac{2\times A_2^1\times A_6^1}{56}=\dfrac{2\times2\times6}{56}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

$*$ Méthode (2)

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-\dfrac{15}{28}-\dfrac{1}{28}=\dfrac{28-16}{28}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

b) ∗ Donc la loi de probabilité :

a_i	0	1	2
$P(X = a_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

0.25 pt

∗ L'espérance mathématique $E(X)$:

0.25 pt $E(X) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{12+2}{28} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I

Pour tout x de $\mathbb{R}$; on a :

$g(x) = e^x - 2x$

1 - soit x de $\mathbb{R}$; on a :

0.25 pt $g'(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$

− pour $x = ln(2)$ on a : $g'(ln(2)) = 0$

− si $x \geq ln(2) \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0$

Alors : $(\forall x \in [ln(2); +\infty[) : g'(x) \geq 0$

0.25 pt Donc g est croissante sur $[ln(2); +\infty[$.

− si $x \leq ln(2) \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow e^x - 2 \leq 0$

Alors : $(\forall x \in]-\infty; ln(2)]) : g'(x) \leq 0$

0.25 pt Donc g est décroissante sur $]-\infty; ln(2)]$.

2 - $g(ln(2)) = e^{ln(2)} - 2ln(2) = 2 - 2ln(2) = 2(1 - ln(2))$

0.5 pt et puisque $ln(2) \backsimeq 0.69$

Alors : $g(ln(2)) > 0$

3 - on a : $g(ln(2))$ est la valeur minimale de g, et puisque $g(ln(2)) > 0$

0.5 pt Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

0.5 pt **1 - a)** ∗ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 2} = 0$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

0.5 pt ∗ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-2)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-2} = \dfrac{-1}{2}$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

b) ∗ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

0.25 pt Alors $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

∗ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{2}$.

0.25 pt Alors $y = \frac{-1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x-2x}\right)' = \dfrac{x'(e^x-2x) - x(e^x-2x)'}{(e^x-2x)^2}$

$= \dfrac{e^x-2x-x(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} = \dfrac{e^x-2x-xe^x+2x}{(e^x-2x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$

0.75 pt Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$

b) on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$ et $(e^x-2x)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend au signe de $(1-x)$.

pour $x = 1$ on a : $f'(1) = 0$

∗ si $x \geq 1 \Leftrightarrow 1-x \leq 0$

Alors : $(\forall x \in [1;+\infty[) : f'(x) \leq 0$

0.25 pt donc f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

∗ si $x \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0$

Alors : $(\forall x \in]-\infty;1]) : f'(x) \geq 0$

0.25 pt donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1]$.

∗ tableau de signe de la fonction f :

0.25 pt

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-1}{2}$	↗	$f(1) = 1.39$	↘	0

c) la droite (T) est tangente à la courbe (C_f) au point $O(0;0)$.

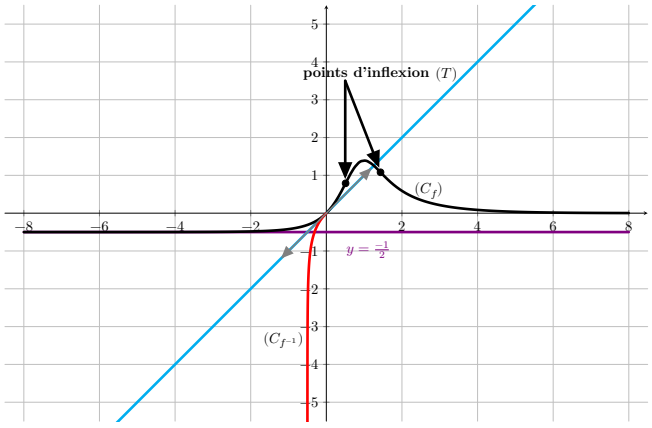
Alors : $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

et on a : $f'(0) = \dfrac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

et : $f(0) = \dfrac{0}{e^0-2\times0} = 0$

0.25 pt Donc : $y = x$ est l'équation de la tangente (T).

1.5 pt **3 -** La courbe de la fonction f et la courbe de la fonction réciproque h^{-1} :



4 - a) pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $e^x - 2x \leq e^x$

et puisque : $(\int x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^x - 2x > 0$ d'après la question $(P_1 - 3)$, c.à.d : $e^x - 2x \neq 0$

Alors : $\dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

c.à.d : $e^{-x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

0.25 pt d'où : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (1)

et on a d'après le tableau de variation de f, $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$.

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq f(1)$

0.25 pt d'où : $\dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (2)

0.25 pt d'après (1) et (2) on a : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

a) Montrons que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$

0.25 pt on pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} u(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

0.25 pt Alors : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$

$= [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$

0.25 pt $= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

b) puisque (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0;1]$.

Alors : $(\forall x \in [0;1]) : f(x) \geq 0$

0.25 pt Alors : $A(E) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x}dx$

et d'après question $(P_2 - 4 - a)$, on a :

$xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$

0.25 pt Alors : $\int_0^1 xe^{-x} \leq \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x} \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2}$

Donc : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

Partie III

1 - on a pour tout x de $]-\infty;0]$: $h(x) = f(x)$

0.25 pt Alors d'après le tableau de variation de la fonction f on a h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

d'où la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur :

0.25 pt $J = h(]-\infty;0]) =]\lim_{x\to-\infty} h(x); h(0)] =]\frac{-1}{2};0]$

Partie IV

1 - Montrons par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$ on a $u_0 = -2$ et $-2 \leq 0$ alors $U_0 \leq 0$ est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $u_n \leq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Donc $h(u_n) \leq h(0)$ car h croissante sur $]-\infty;0]$.

  0.5 pt Donc $u_{n+1} \leq 0$ $(h(0) = 0)$
- D'où d'après le principe de récurrence $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Montrons que (u_n) est croissante. On a $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n \geq 0$ car d'après la courbe

0.75 pt $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$.

Donc (u_n) est croissante.

3 - Déduisons que la suite (u_n) est convergente et calculons sa limite

— Comme (u_n) est croissante et $u_n \leq 0$ alors (u_n) est convergente.

— Soit $I =]-\infty;0]$, on a h est continue sur I , $f(I) = I$,$u_0 \in I$ et (u_n) est convergente

Alors $\lim u_n$ est une solution de l'équation $h(x) = x$

Et d'après la représentation graphique de la fonction f, on remarque que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$ sur $]-\infty;0]$.

0.75 pt Donc $\lim u_n = 0$.

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n.

0.75 pt **b)** En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

On cosidère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

1 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3.

0.5 pt **2 - a)** Calculer la distance du point Ω au plan (P).

0.5 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

1 pt **3 -** Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et détermier les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

0.75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

0.75 pt **b)** On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

Ecrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Montrer que : $z' = iz + 7 + i$.

0.5 pt **b)** Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.

0.5 pt **c)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ est la droite (BC).

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 3 Pts

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1 pt **1 -** Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".
Montrer que $p(A) = \dfrac{17}{125}$.

2 pt **2 -** Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2015 — 8 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ et croisssante sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 1cm).

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$).

2 - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage **0,75 pt** de$+\infty$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **4 -** Tracer, dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C).
(On admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et 2,5 et on prendra $f(0,3) = 0$)

0,5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x} dx = 1$.

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$

6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

0,75 pt **a)** Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,5 pt **b)** Tracer, dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe (C') représentant la fonction h.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2015

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 4$ et $4 < 5$ d'où $u_0 < 5$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n < 5$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} < 5$

c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - 5 < 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a :

$$u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}u_n - 2$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}(u_n - 5)$$

Et puisque $u_n < 5$ alors $u_n - 5 < 0$

D'où $\frac{2}{5}(u_n - 5) < 0$ donc $u_{n+1} - 5 < 0$ d'où $u_{n+1} < 5$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

- Vérifions que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + 3 \\ &= -\frac{3}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{3}{5}(5 - u_n)\end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$

- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$$

Et puisque $u_n - 5 < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $5 - u_n > 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **3 -** Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est croissante et aussi majorée par 5 $\quad((\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 5)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

4 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n.

- Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

$\forall n \in \mathbb{N})$ on a :

$$(\text{Soit } n \in \mathbb{N})\ \ v_{n+1} = 5 - u_{n+1} = 5 - \left(\frac{2}{5}u_n + 3\right).$$
$$= \frac{2}{5}(u_n - 5)$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

- Exprimons v_n en fonction de n

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$, car $v_0 = 5 - u_0 = 5 - 4 = 1$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

0.75 pt **b)** En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

- Déduisons que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On sait que : $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ d'où $u_n = 5 - v_n$ et comme $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Donc : $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

- Calculons la limite de la suite (u_n).

$\lim u_n = \lim\ 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 5$

Car $-1 < \frac{2}{5} < 1$, c'est-à-dire $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Donc $\lim u_n = 0$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

1 pt **1 -** Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3. ‘

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Donc (S) est une sphère du centre $\Omega(-1, 0, 1)$ et de rayon $R = 3$

0.5 pt **2 - a)** Calculons la distance du point Ω au plan (P).

On a :

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{|2 \times (-1) - 1 - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$$

Donc : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$

0.5 pt **b)** Déduisons que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

On a : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5} < R$.

Donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ)

1 pt **3 -** Montrons que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

- Montrons que le rayon du cercle (Γ) est 2 .

  soit r le rayon du cercle (Γ) , on a : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$.

  Donc $r = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2}$, d'où $r = \sqrt{4} = 2$

- Déterminons les coordonnées du point H centre du cercle (Γ).

  on a H est la projection orthogonale de Ω centre de (Γ) sur le plan (P)

  ou bien l'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par le point Ω

  et perpendiculaire au plan (P) .

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

Soit $M(x,y,z) \in (\Delta)$ on a : $\Omega \in (\Delta)$ Et puisque la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) alors $\overrightarrow{u}(2,0,-1)$ est un vecteur directeur à la droite (Δ)

Par suite $\overrightarrow{\Omega M} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, Donc : $\begin{cases} x+1 = 2t \\ y-0 = 0 \\ z-1 = -t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

D'où (Δ) : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de ladroite (Δ)

Déterminons $H(x_H, y_H, z_H)$ le point d'intersection de (Δ) et (P)

On a :

$$\begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 2x_H - z_H - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 2(-1+2t) - (1-t) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ -2+4t-1+t-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 5t-5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} x_H = -1+2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-1 = 0 \end{cases}$

Finalement $H(1,0,0)$ est le centre du cercle (Γ).

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 pt **1 - a)** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

On a $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 32 = 64 - 128 = -64$

Comme $\Delta < 0$ alors $z_1 = \dfrac{-(-8) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{8 - i\sqrt{64}}{2} = 4 - 4i$

Et $z_2 = \bar{z_1} = 4 + 4i$

Donc : $S = \{4 - 4i; 4 + 4i\}$

0.75 pt **b)** On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

puis en

- Écrivons le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique

  On a $|a| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} a &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

  Donc : $a = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- Déduisons que a^{12} est un nombre réel négatif.

$$\begin{aligned} a^{12} &= \left(4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left(\left(\cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left((\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) \\ &= \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left((-1 + 0\right) \\ &= -\left(4\sqrt{2}\right)^{12} < 0 \end{aligned}$$

  Donc : a^{12} est un nombre réel négatif.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt

a) Montrons que : $z^{'} = iz + 7 + i$.

on a

$$\begin{aligned} M' = R(M) &\Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c) \\ &\Leftrightarrow z' - c = i(z - c) \\ &\Leftrightarrow z' = iz - ic + c \\ &\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c \\ &\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i) \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4 \\ &\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i \end{aligned}$$

0.5 pt

b) Vérifions que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.

on a D l'image du point A par la rotation R, donc :

$$\begin{aligned} D = R(A) &\Leftrightarrow d = ia + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i \\ &\Leftrightarrow d = 3 + 5i \end{aligned}$$

0.5 pt

c) Montrons que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC).

$$\begin{aligned} |z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i| &\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)| \\ &\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A| \\ &\Leftrightarrow DM = AM \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est la droite (Δ) la médiatrice du segment $[AD]$,

montrons que (Δ) est (BC)

d'une part on a $R(A) = D$ alors $CA = CD$ donc $C \in (\Delta)$

D'autre part $DB = |b - d| = |2 + 3i - 3 - 5i| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et

$AB = |b - a| = |2 + 3i - 4 - 4i| = |-2 - i| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Alors $DB = AB$ donc $B \in (\Delta)$

Donc : $(\Delta) = (BC)$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1 pt

1 - Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".

Montrons que $p(A) = \dfrac{17}{125}$.

On considère l'univers Ω, Le tirage est successivement et avec remise

donc $card(\Omega) = 5^3 = 125$

les jetons sont indiscernables au toucher signifie que $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

$A : (B, B, B)$ où (V, V, V) où (R, R, R)

d'où $card(A) = 2^3 + 2^3 + 1^3 = 8 + 8 + 1 = 17$ Donc : $P(A) = \dfrac{17}{125}$

2 pt

2 - Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.

Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Les boules tirées	La valeur de X
les trois boules sont $\bar{B}, \bar{B}, \bar{B}$	0
les trois boules sont $\bar{B}, \bar{B}, B$ où $\bar{B}, B, \bar{B}$ où $B, \bar{B}, \bar{B}$	1
les trois boules sont $\bar{B}, B, B$ où $B, \bar{B}, B$ où $B, B, \bar{B}$	2
les trois boules sont B, B, B	3

Donc : les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3

la loi de probabilité de X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$
$$p(X = 1) = 3\frac{2^1 \cdot 3^2}{125} = \frac{54}{125}$$
$$p(X = 2) = 3\frac{2^2 \cdot 3^1}{125} = \frac{36}{125}$$
$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

0,5 pt **1 - a)** Montrons que $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

on a :
$$g'(x) = (1 - x + x\ln x)' = -1 + x'\ln x + x(\ln x)'$$
$$= -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x$$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g'(x) = \ln x$

0,5 pt **b)** Montrons que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

le signe de $g'(x)$ c'est le signe de $\ln x$,

et puisque $\forall x \in]0;1]\,; \quad \ln x \leq 0\,;$ Alors $\forall x \in]0;1]\,; \quad g'(x) \leq 0$

Donc g est décroissante sur $]0;1]$

et puisque $\forall x \in [1;+\infty[\,; \quad \ln x \geq 0\,;$ Alors $\forall x \in [1;+\infty[\,; \quad g'(x) \geq 0$

Donc g croissante sur $[1;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Calculons $g(1)$ et déduisons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

o on a :
$$g(1) = 1 - 1 + 1 \times \ln 1 = 1 - 1 + 1 \times 0 = 0$$

et puisque g admet un minimum au $1\,;$ Alors $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g(x) \geq g(1)$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad g(x) \geq 0.$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$
et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 1cm).

0,75 pt **1 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$).

- On a :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2} = -\infty$$

(Car : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$)

- Interprétation géométrique :

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C) .

2 - Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et déduisons la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ **0,75 pt**

- On a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=3$$
(Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)
- Interprétation géométrique :
la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3 - a) Montrons que $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0;+\infty[$. **0,75 pt**

On a :
$$\begin{aligned} f'(x)&=\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}\right)'\\ &=\frac{2x}{x^4}-2\frac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}\\ &=\frac{2}{x^3}-2\frac{(1-\ln x)}{x^2}\\ &=\frac{2}{x^3}-\frac{2-2\ln x}{x^2}\\ &=\frac{2-2x+2x\ln x}{x^3}\\ &=\frac{2\,(1-x+x\ln x)}{x^3}\\ &=\frac{2g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad .\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

b) Interprétation géométrique du résultat $f'(1)=0$. **0,25 pt**

On a :
$$f'(1)=\frac{2g(1)}{1}=0$$
et comme $f(1)=2$,

Donc : (C_f) admet une tangente horizontale (T) au point $(1,2)$.

c) Montrons que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

On a : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad .\ f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$.

Soit x de $]0;+\infty[$, on a $x^3>0$.

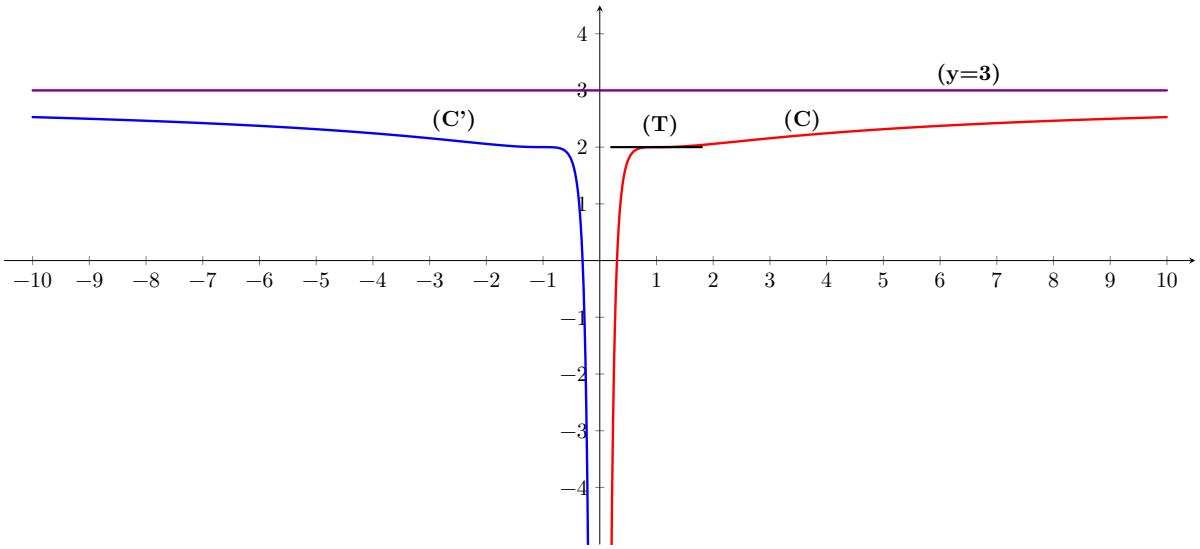
et d'après la question 2) partie I , on a : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad g(x)\geq 0$.

Donc $\forall x\in]0;+\infty[\,;\quad f'(x)\geq 0$.

Donc : la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **4 -** Construisons, dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe (C).

(On admettra que la courbe (C) possède deux point d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et $2,5$ et on prendra $f(0,3) = 0$)



0,5 pt **5 - a)** Montrons que : $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\, dx = 1.$

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^e (\ln x)'\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln^2(x)\right]_1^e \\ &= \ln^2(e) - \ln^2(1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\, dx = 1$

0,75 pt **b)** Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On sait que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\mathrm{d}x \times u.a$. Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$

Donc si $1 \leq x \leq e$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$

Donc $0 < 2 \leq f(x)$, car $f(1) = 2$

Donc $\forall x \in [1, e]$ on a $f(x) \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$.

Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x \times 1^2 cm^2 \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \times cm^2 \\ &= \left(\int_1^{\mathrm{e}} 3 - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right) \times .cm^2 \\ &= \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^{e} - 1\right) \times .cm^2 \\ &= 3e + \frac{1}{e} - 4 - 1 \times .cm^2 \\ &= \frac{1}{e}\left(3e^2 + 1 - 5e\right).cm^2\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{e}\left(3e^2 + 1 - 5e\right).cm^2$

6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

0,75 pt **a)** Montrons que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

- Montrons que la fonction h est paire :

  On a $D_h = \mathbb{R}^*$, donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

  Soit x de $\mathbb{R}^*$. On a :
  $$\begin{aligned}h(-x) &= 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x)\end{aligned}$$

  Alors $h(-x) = h(x)$ pour tout x de D_h . Donc la fonction h est paire

- Montrons que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$:

  Soit x de $]0;+\infty[$, on a :
  $$\begin{aligned}h(x) &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

  Car : $\forall x \in]0;+\infty[$; $|x| = x$ et $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

  Donc $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **b)** Construisons, dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe (C') représentant la fonction h.

On a : $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc la courbe (C') c'est la courbe (C) sur $]0;+\infty[$. et comme la fonction h est paire , alors sa courbe représentative est symétrique par rapport a l'axe des ordonnées . (voir le figure)

Exercice 1 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Vérifier que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

2 - Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer (u_n) en fonction de n. — **0,5 pt**

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). — **0,5 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. — **0,5 pt**

b) En déduire que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — **0,5 pt**

2 - a) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6. — **0,5 pt**

b) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). — **0,5 pt**

3 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) — **0,5 pt**

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B. — **0,5 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : — **0,75 pt**

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 2+5i$, $a = 5+2i$ et $b = 5+8i$

a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$. — **0,75 pt**

Vérifier que $u = 3+3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u). — **0,25 pt**

c) Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. — **0,75 pt**

d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. — **0,5 pt**

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1 pt — **1 -** Soit A l'évènement : "les deux boules tirées sont rouges ". Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

0,5 pt — **a)** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2, 3, 4\}$.

1,5 pt — **b)** Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 5 — Session : NORMAL 2016 — 8.5 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$. Et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : $1cm$)

Partie I

0.25 pt — **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au

0.5 pt — voisinage de $-\infty$

0.5 pt — **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt — **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 pt — **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.25 pt — **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(0) = 0$).

0.75 pt — **c)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

4 - a) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et

0.5 pt — qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

0.5 pt — **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0, -5)$.

0.75 pt — **c)** tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(on prendra $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$)

0.5 pt — **5 - a)** Montrer que $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x)\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}$.

b) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe

0,5 pt — des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.

Partie II

0,5 pt — **1 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y" - 3y' + 2y = 0$.

b) Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et

0,5 pt — $g'(0) = -2$.

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$. **0,75 pt**

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2016

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Vérifions que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrons par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.75 pt

• **Vérifions que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 3 &= \frac{3+U_n}{5-U_n} - 3 \\ &= \frac{3+U_n-3(5-U_n)}{5-U_n} \\ &= \frac{3+U_n-15+3U_n}{2+3-U_n} \\ &= \frac{4U_n-12}{2+(3-U_n)} \\ &= \frac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)} \end{aligned}$$

Donc : $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

• **Montrons par récurrence que $U_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**
⋆ Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 2 < 3$ (proposition vraie).
⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n < 3$ et montrons que $U_{n+1} < 3$.
Puisque $U_n < 3$ alors, $U_n - 3 < 0$, $3 - U_n > 0$ et $2 + (3 - U_n) > 0$
Donc, $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)} < 0$
D'ou, $U_{n+1} < 3$
Par conséquence d'apres le raisonnement par récurrence $U_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - a) **Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis déduisons que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.** 0.75 pt

• **Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned}
\frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{\frac{U_{n+1}-1}{3-U_{n+1}}}{\frac{U_n-1}{3-U_n}} \\
&= \frac{\frac{3+U_n}{5-U_n}-1}{3-\frac{3+U_n}{5-U_n}} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{\frac{3+U_n-5+U_n}{5-U_n}}{\frac{15-3U_n-3-U_n}{5-U_n}} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2U_n-2}{-4U_n+12} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2\left(U_n-1\right)}{4\left(3-U_n\right)} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Donc, $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Par conséquence (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et du premier terme $V_0 = \frac{U_0-1}{3-U_0} = 1$.

• **Déduisons que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned}
V_n &= V_p \times q^{n-p} \\
&= V_0 \times q^{n-0} \\
&= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc, $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) **Montrons que $U_n = \frac{1+3V_n}{1+V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimons (U_n) en fonction de n.** 0.5 pt

• **Montrons que $U_n = \frac{1+3V_n}{1+V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{U_n - 1}{3 - U_n} \\ &\Rightarrow V_n(3 - U_n) = U_n - 1 \\ &\Rightarrow 3V_n - V_n U_n - U_n = -1 \\ &\Rightarrow -U_n(V_n + 1) = -1 - 3V_n \\ &\Rightarrow U_n(1 + V_n) = 1 + 3V_n \\ &\Rightarrow U_n = \frac{1 + 3V_n}{1 + V_n} \end{aligned}$$

Donc, $U_n = \dfrac{1 + 3V_n}{1 + V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- **Exprimons (U_n) en fonction de n.**

Soit $n \in \mathbb{N}$

Puisque $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors, $U_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Donc, $U_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **c) Déterminons la limite de la suite (u_n).**

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$

Car : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Exercice 2 : (2.5 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

0.5 pt **1 - a) Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.**

On a : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

alors, $\overrightarrow{AB}\,(3-2, 1-1, 1-3)$

Donc, $\overrightarrow{AB}\,(1, 0, -2)$

et On a : $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$

alors, $\overrightarrow{AC}\,(2-2, 2-1, 1-3)$

Donc, $\overrightarrow{AC}\,(0, 1, -2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (0 \times (-2) - (-2) \times 1)\vec{i} - (1 \times (-2) - (-2) \times 0)\vec{j} + (1 \times 1 - 0 \times 0)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} - (-2)\vec{j} + \vec{k} \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Donc, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

0.5 pt **b) déduisons que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).**

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et un vecteur normale au plan (ABC).

Alors, l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrite sous la forme : $2x + 2y + z + d = 0$.

Déterminons la valeur de d.

On a :

$$\begin{aligned} A(2,1,3) \in (ABC) &\Rightarrow 2x_A + 2y_A + z_A + d = 0 \\ &\Rightarrow 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 + d = 0 \\ &\Rightarrow 9 + d = 0 \\ &\Rightarrow d = -9 \end{aligned}$$

Donc, $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - a) Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6.

0.5 pt

On a l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 + z^2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6^2 \end{aligned}$$

Donc, le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6.

b) Montrons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

0.5 pt

• **Montrons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$.**

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega,(ABC)) &= \frac{|\, 2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega - 9 \,|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|\, 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 - 9 \,|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc, $d(\Omega,(ABC)) = 3$

• **Déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).**

Puisque $d(\Omega,(ABC)) = 3 < 6$ alors, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

Donc, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

3 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

0.5 pt

On a : $(\Delta) \perp (ABC)$. Alors, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Or $\Omega \in (\Delta)$ alors, la représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

Donc, la représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

0.5 pt

b) Montrons que le centre du cercle (Γ) est le point B.

On a le centre du cercle (Γ) est la solution du système : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \quad /(t \in \mathbb{R}) \\ z = t \\ 2x+2y+z-9=0 \end{cases}$

il suffit de vérifier que : $B \in (\Delta)$ et $B \in (ABC)$.
On a : $B \in (ABC)$. Montrons que $B \in (\Delta)$.
On pose : $x_B = 1+2t_1$; $y_B = -1+2t_2$ et $z_B = t_3$
On a : $t_1 = \dfrac{x_B-1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $t_2 = \dfrac{y_B+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $t_3 = 1$.
Alors, $t_1 = t_2 = t_3$
Donc, $B \in (\Delta)$
Par conséquente $B \in (\Delta) \cap (ABC)$.
Donc, le centre du cercle (Γ) est le point B.

Exercice 3 : (2.5 pts)

0.75 pt

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ L'équation :$z^2 - 4z + 29 = 0$
On a : $a = 1$; $b = -4$ et $c = 29$
Alors,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 \\ &= 16 - 116 \\ &= -100 < 0 \end{aligned}$$

Puisque le discriminant $\Delta < 0$ alors, l'équation admet deux solutions complexes :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - i\sqrt{-(-100)}}{2 \times 1} = \frac{4 - i\sqrt{100}}{2} = \frac{4-10i}{2} = 2 - 5i$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + i\sqrt{-(-100)}}{2 \times 1} = \frac{4 + i\sqrt{100}}{2} = \frac{4+10i}{2} = 2 + 5i$$

Donc, $S_{\mathbb{C}} = \{2-5i; 2+5i\}$

2 - Considérons, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 9+i$, $a = 5+2i$ et $b = 5+8i$

a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$.Vérifions que $u = 3+3i$ puis montrons que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

0.75 pt

• **Vérifions que $u = 3+3i$.**
On a :

$$\begin{aligned} u &= b - \omega \\ &= 5+8i-(2+5i) \\ &= 5+8i-2-5i \\ &= 5-2+8i-5i \\ &= 3+3i \end{aligned}$$

Donc, $u = 3+3i$.

• **Montrons que** $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
On a : $|\ u\ | = |\ 3+3i\ | = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} u &= 3+3i \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{3\sqrt{2}}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminons un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u). **0.25 pt**

On a : $\arg \overline{u} = -\arg u = \frac{\pi}{4}$

c) Vérifions que $a-\omega = \overline{u}$ puis déduisons que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **0.75 pt**

- **Vérifions que $a-\omega = \overline{u}$**

On a :

$$\begin{aligned} a-\omega &= 5+2i-(2+5i) \\ &= 5+2i-2-5i \\ &= 5-2+2i-5i \\ &= 3-3i \\ &= \overline{u} \end{aligned}$$

Donc, $a-\omega = \overline{u}$.

- **Déduisons que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$**

On a : $u = b-\omega$ alors, $\mid u \mid = \mid b-\omega \mid = B\Omega$.
on a : $\overline{u} = a-\omega$ alors, $\mid \overline{u} \mid = \mid a-\omega \mid = A\Omega$.
Puisque $\mid u \mid = \mid \overline{u} \mid$ alors, $A\Omega = B\Omega$.
Donc, $A\Omega = B\Omega$.

$\star$ On a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) &= \arg(b-\omega) - \arg(a-\omega)\,[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &= \frac{2\pi}{4}[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc, $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle 2π. Déterminons l'image du point A par la rotation R. **0.5 pt**

On a : $\mid \frac{b-\omega}{a-\omega} \mid = 1$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Alors, la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{b-\omega}{a-\omega}$ s'écrite sous la forme :

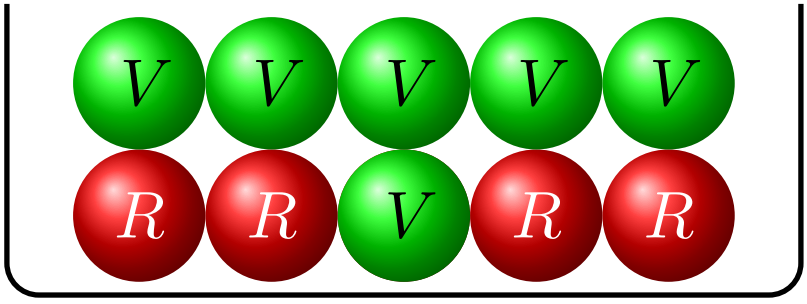
$$\begin{aligned}\frac{b-\omega}{a-\omega} &= \left|\frac{b-\omega}{a-\omega}\right|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1\times i\\ &= i\end{aligned}$$

Donc, $b-\omega = i(a-\omega) = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$

Donc, l'image du point A par la rotation R est le point B.

Exercice 4 : (2.5 pts)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).



On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Donc, On va utiliser les combinaisons C_n^p.

1 - **Soit A l'évènement :≪ les deux boules tirées sont rouges ≫. Montrons que $p(A)=\frac{2}{15}$.** **1 pt**

On a : $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Or, $Card(A)=C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2\times 2!}=\frac{12}{2}=6$

et $Card(\Omega)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\times 9\times 8!}{2\times 8!}=\frac{10\times 9}{2}=45$

Alors, $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

Donc, $p(A)=\frac{2}{15}$.

2 - **Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.**

3 - a) **Montrons que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$.** **0.5 pt**

- Si je tire 2 boules verts, les boules rouges restes sont 4.
- Si je tire un boule vert et un boule rouge, les boules rouges restes sont 3.
- Si je tire 2 boules rouges, les boules rouges restes sont 2.

Donc, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$

1.5 pt

b) Montrons que $p(X=3)=\frac{8}{15}$ puis déterminons la loi de probabilité de X.

- **Montrons que : $p(X=3)=\frac{8}{15}$**

On a : $p(X=3)=\frac{Card(X=3)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^1\times C_6^1}{45}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.

Donc, $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

- **Déterminons la loi de probabilité de X.**

On a : $p(X=2)=p(A)=\frac{2}{15}$.

Et $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

Et $p(X=4)=\frac{Card(X=4)}{Card(\Omega)}=\frac{C_6^2}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

X=x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{15}+\frac{8}{15}+\frac{1}{3}=1$

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$).

Partie I

0.25 pt

1 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x=-\infty$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^x=0\end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

0.5 pt

b) Montrons que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)&=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x-(2x-2)\\&=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^x\\&=0\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^x=0\end{cases}$

Donc, la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt

2 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^x\left(e^x-4\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty\end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interprétons géométriquement le résultat. **0.5 pt**

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^x\left(e^x-4\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}+\frac{e^x}{x}\left(e^x-4\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty\end{cases}$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

• interprétons géométriquement du résultat.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ alors, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de la direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 - a) Montrons que $f'(x)=2(e^x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$,

On a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(2x-2+e^{2x}-4e^x\right)' \\ &= (2x-2)'+\left(e^{2x}\right)'-\left(4e^x\right)' \\ &= 2+2e^{2x}-4e^x \\ &= 2\left(e^{2x}-2e^x+1\right) \\ &= 2\left(e^x-1\right)^2\end{aligned}$$

Donc, $f'(x)=2(e^x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **0.25 pt**

On a : $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Et

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow e^x-1=0 \\ &\Leftrightarrow e^x=1 \\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

Alors, le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

c) Montrons qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

0.75 pt

On a : la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[1; \ln 4]$.

et on a : $\begin{cases} f(1) = e^2 - 4e = e(e-4) \approx -3.51 < 0 \\ f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 = 2(\ln 4 - 1) \approx 0.77 > 0 \end{cases}$

Alors, $f(1) \times f(\ln 4) < 0$.

Donc, d'apres le théorème des valeurs intermédiaire il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

4 - a) Montrons que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

0.5 pt

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x-2) &= 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - (2x-2) \\ &= e^{2x} - 4e^x \\ &= e^x(e^x - 4) \end{aligned}$$

Puisque $e^x > 0$ alors, le signe de $f(x) - (2x-2)$ est le signe de $e^x - 4$.

On a : $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

• **Sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$

On a :

$$\begin{aligned} x > \ln 4 &\Rightarrow e^x > 4 \\ &\Rightarrow e^x - 4 > 0 \\ &\Rightarrow e^x(e^x - 4) > 0 \\ &\Rightarrow f(x) - (2x-2) > 0 \end{aligned}$$

Donc, la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.

• **Sur l'intervalle** $]-\infty, \ln 4[$

On a :

$$\begin{aligned} x < \ln 4 &\Rightarrow e^x < 4 \\ &\Rightarrow e^x - 4 < 0 \\ &\Rightarrow e^x(e^x - 4) < 0 \\ &\Rightarrow f(x) - (2x-2) < 0 \end{aligned}$$

Donc, la courbe (C_f) est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

0.5 pt

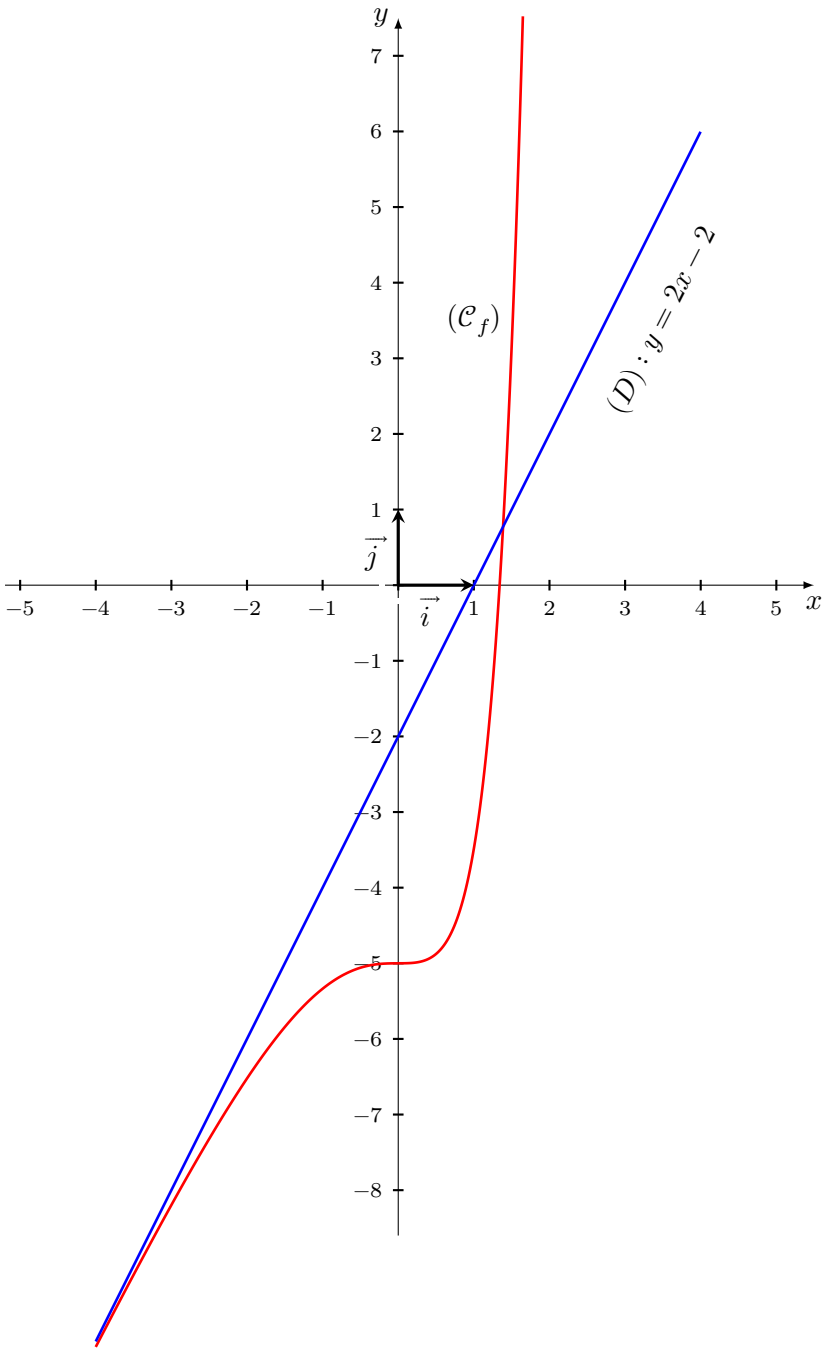
b) Montrons que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0,-5)$.

Puisque la fonction dérivé f' s'annule en 0 en ne changeant pas de singe, alors le point de coordonnées $(0;f(0))$ est une point d'inflexion.

Or $f(0)=-5$ alors, le point de coordonnées $(0;-5)$ est une point d'inflexion.

0.75 pt

c) traçons la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



0.5 pt

5 - a) Montrons que $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx=-\frac{9}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x\right]_0^{\ln 4}\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{2\times 0}-4e^0\right]\\ &= \left[\frac{1}{2}\times 16-4\times 4\right]-\left[\frac{1}{2}\times 1-4\times 1\right]\\ &= 8-16-\frac{1}{2}+4\\ &= -4+\frac{1}{2}\\ &= \frac{-9}{2}\end{aligned}$$

Donc, $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx = -\frac{9}{2}$.

b) Calculons en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$. **0.5 pt**

On a : $A = \int_0^{\ln 4} \mid f(x)-(2x-2) \mid dx \times \parallel \vec{i} \parallel \parallel \vec{j} \parallel$

Puisque : $f(x)-(2x-2) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[0;\ln 4]$ alors,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\ln 4} -\left(f(x)-(2x-2)\right)dx \times \text{cm}^1 \times \text{cm}^1\\ &= -\int_0^{\ln 4}\left(f(x)-(2x-2)\right)dx \times \text{cm}^2\\ &= -\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx \times \text{cm}^2\\ &= -(\frac{-9}{2}) \times \text{cm}^2\\ &= \frac{9}{2} \times \text{cm}^2\end{aligned}$$

Donc, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$ est $\frac{9}{2} \times \text{cm}^2$.

Partie II

1 - a) Résolvons l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$. **0.5 pt**

On a : l'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$

Puisque $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$.

Alors, l'équation caractéristique admet deux solutions distincts :

$r_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$r_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Donc, les solution de l'équation différentielle (E) sont les fonction $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

c'est-à-dire : les fonction $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

b) Déterminons la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$. **0.5 pt**

On a : la fonction g solution de l'équation (E) alors, $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminons les valeurs de α et β.
On a : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivé $g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$
Alors,

$$\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

alors, $g(x) = -4e^x + 1 \times e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc, $g(x) = e^{2x} - 4e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x).$$

a) **Montrons que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.** **0.75 pt**
On a : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x) = \ln(g(x)) = \ln(f(x) - (2x - 2))$.
• On a : la fonction g est continue et strictement positive sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.
(Car, la fonction g est une solution de l'équation (E), alors il est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et se trouve au-dessus de la droite(D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$) et la fonction ln est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en particulier continue sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$
Donc **la fonction h est continue sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$**.**
• On a : la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et sa fonction dérivé :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\ln(e^{2x} - 4e^x)\right)' \\ &= \frac{(e^{2x} - 4e^x)'}{(e^{2x} - 4e^x)} \\ &= \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} \\ &= \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ on a : $e^x - 2 > 0$ et $e^x - 4 > 0$ alors, $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]\ln 4, +\infty[$.
Donc **la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$.
Puisque la fonction h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.
Alors la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J telle que :

$$\begin{aligned} J &= h\left(]\ln 4, +\infty[\right) \\ &=]\lim_{x \to \ln 4^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)[\\ &=]-\infty; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

En effet, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \ln 4^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \ln 4^+} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x(e^x - 4) = +\infty \end{cases}$

b) **Vérifions que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminons $(h^{-1})'(\ln 5)$.** **0.75 pt**
• **Vérifions que $h(\ln 5) = \ln 5$**

On a :

$$\begin{aligned} h(\ln 5) &= \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) \\ &= \ln(e^{\ln 25} - 4 \times 5) \\ &= \ln(25 - 20) \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

• **Déterminons** $(h^{-1})'(\ln 5)$**.**
On a : la fonction h est dérivable en $\ln 5$ et $h'(\ln 5) = 6 \neq 0$.
Alors, la fonction h^{-1} est dérivable en $\ln 5$ est on a :

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(\ln 5) &= (h^{-1})'(h(\ln 5)) \\ &= \frac{1}{h'(\ln 5)} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc, $h(\ln 5) = \ln 5$ et $(h^{-1})'(\ln 5) = \dfrac{1}{6}$

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

0,5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

0,75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

0,5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

0,75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$.

0,75 pt **a)** Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

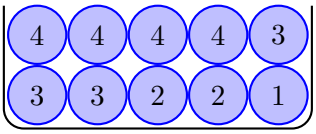
b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

0,75 pt Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher)



On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 - Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

2 - On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2 pt Montrer que $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 Session : RATTRAPAGE 2016 — 8 Pts

I - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0,25 pt **2 -** En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II - On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Monter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\left(\text{Remarquer que f(x) s'écrit sous la forme } f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]\right)$

b) Monter que la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont

0,5 pt la direction est celle de l'axe des ordonnées.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x - 1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1;0)$ à la courbe . (C_f)

0,75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$.

0,75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

0.5 pt **6 -** Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2016

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel n

0.5 pt **a)** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2 > 1$. Relation vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On suppose que : $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16} \\ &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$.

0.5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}\Big(u_n - 1\Big)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}\Big(u_n - 1\Big) \end{aligned}$$

On sait que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n - 1 > 0 \quad \Rightarrow \dfrac{-12}{16}\left(u_n - 1\right) < 0 \quad \Rightarrow$ $u_{n+1} - u_n < 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 ($(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$) alors elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{16}u_n + \dfrac{15}{16} - 1 = \dfrac{1}{16}u_n - \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{16}\left(u_n - 1\right) = \boxed{\dfrac{1}{16}v_n}$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{16}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

• On a : $v_n = v_0 q^n = 1 \times \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \boxed{v_n = \left(\dfrac{1}{16}\right)^n}$

0.75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

• On a $v_n = u_n - 1$ donc $u_n = v_n + 1$

Et puisque $v_n = \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ alors $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

• On a $-1 < \dfrac{1}{16} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n = 1 + 0 = 1$

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

0.5 pt **a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

On a $\overrightarrow{OA}(1; 3; 4) \qquad \overrightarrow{OB}(0; 1; 2)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \boxed{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}$$

0.5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

On sait que le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal au plan (OAB)

Alors l'équation de (OAB) s'écrit sous la forme : $2x - 2y + z + d = 0$

$O \in (OAB) \Rightarrow 2 \times 0 - 2 \times 0 + 0 + d = 0$

$\Rightarrow d = 0$

D'où $\boxed{(OAB) : \quad 2x - 2y + z = 0}$

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$.

0.5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3,-3,3)$ et pour rayon 5

$x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

$\Rightarrow x^2-6x+9-9+y^2+6y+9-9+z^2-6z+9-9+2=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=5^2$

D'où (S) est la sphère de centre $\Omega(3;-3;3;)$ et de rayon $r=5$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S)

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(OAB)) &= \frac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \\ &= \frac{|6+6+3|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{15}{3} \\ &= \boxed{5} \end{aligned}$$

Puisque $d(\Omega;(OAB))=R$, alors le plan (OAB) est tangent à la sphère (S)

Pour déterminer les coordonnées de H, on doit déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par (Ω) et perpendiculaire à (P).

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (OAB) donc c'est un vecteur directeur de (Δ).

Donc $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+t \end{cases}$

0.75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

L'intersection de (S) et (OAB) est la solution du système

$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \\ z=3+t \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

On remplace x, y et z dans la 4 ème équation, on trouve :

$6+4t+6+4t+3+t=0\Rightarrow 9t+16=0\Rightarrow t=\dfrac{-16}{9}=\dfrac{-5}{9}$

Donc $\begin{cases} x=3-\dfrac{10}{3}=\dfrac{-1}{3} \\ y=-3+\dfrac{10}{3}=\dfrac{1}{3} \\ z=3-\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\boxed{H\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)}$

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2-8z+41=0$.

$\Delta=(-8)^2-4\times 41=64-164=-100=(10i)^2$

$z_1=\dfrac{8+10i}{2}=4+5i \quad$ et $\quad z_2=\overline{z_1}=4-5i$

$\boxed{S=\{4+5i;4-5i\}}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B,C et Ω d'affixes respectives a,b,c et ω telles que $a=4+5i$, $b=3+4i$, $c=6+7i$ et $\omega=4+7i$.

0.75 pt **a)** Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A,B et C sont alignés.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{c-b}{a-b}&=\frac{6+7i-3-4i}{4+5i-3-4i}\\&=\frac{3+3i}{1+i}\\&=\frac{3(1+i)}{1+i}=3\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{c-b}{a-b}=3\in\mathbb{R}$ alors les points A, B et C sont alignés.

0.75 pt **b)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $z'=-iz-3+11i$.

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-\omega=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)\\&\Leftrightarrow z'=4+7i-i(z-4-7i)\\&\Leftrightarrow z'=4+7i-iz+4i-7\\&\Leftrightarrow \boxed{\text{z'=-iz-3+11i}}\end{aligned}$$

0.75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$.

- $z'=-iz-3+11i$

Donc

$$\begin{aligned} c' &= -ic - 3 + 11i \\ &= -i(6+7i) - 3 + 11i \\ &= -6i + 7 - 3 + 11i \\ &= 4 + 5i = a \end{aligned}$$

D'où $\boxed{R(C) = A}$

• On a :

$$\begin{aligned} \frac{a-\omega}{c-\omega} &= \frac{4+5i-4-7i}{6+7i-4-7i} = \frac{-2i}{2} = -i \\ &= 0 - 1i \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\frac{a-\omega}{c-\omega} = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 pt **1 -** Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

$card(\Omega) = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = \boxed{90}$

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{A_6^2}{90} = \frac{30}{90} = \boxed{\frac{1}{3}}$

2 pt **2 -** On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On répète la même expérience 3 fois de suite dans les mêmes conditions, donc la variable aléatoire X suit une loi binômiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$

$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{13}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$

$p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{13}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \frac{8}{27} = \boxed{\frac{8}{27}}$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{13}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$p(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{13}\right)^{3-3}=1\times\frac{1}{27}\times 1=\boxed{\frac{1}{27}}$$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x}-1+2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

0,25 pt

1 - Calculer $g(1)$.

$g(1)=\dfrac{2}{1}-1+2\ln 1=2-1+2\times 0=\boxed{1}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0,75 pt

2 - En déduire à partir du tableau que $g(x)>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variations, la fonction g admet un minimum

Alors pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x)\geq g(1)$

Et puisque $g(1)=1$ alors $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)\geq 1$

D'où $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)>0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt

1 - Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3-3x+2(x+1)\ln x)=\boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Alors la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) comme asymptote verticale.

0.5 pt

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Remarque que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x)=x\left[\dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right]$)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(3-3x+2(x+1)\ln x)\\&=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\\&=\boxed{+\infty}\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

0.5 pt

b) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

Alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt

3 - a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 - 3x + 2(x+1)\ln x)' \\ &= -3 + 2\left(\ln x + (x+1)\frac{1}{x}\right) \\ &= -3 + 2\ln x + 2(x+1)\frac{1}{x} \\ &= -3 + 2\ln x + 2 + \frac{2}{x} \\ &= -1 + 2\ln x + \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x \\ &= \boxed{g(x)} \end{aligned}$$

0.75 pt

b) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0,+\infty[$.

On a $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Alors $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.5 pt

4 - a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

$$f"(x) = g'(x) = \left(\frac{2}{x} - 1 + 2\ln x\right)'$$
$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x}$$
$$= \boxed{\frac{-2+2x}{x^2}}$$

$f"(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f"(x)$		$-$	0	$+$	

$f"(x)$ s'annule en 1 et change de signe, donc $I(1;0)$ est un point d'inflexion.

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x-1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1;0)$ à la courbe (C_f).

$f'(x) = g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

$f'(1) = \frac{2}{1} - 1 + 2\ln 1 = 1$

Donc l'équation de la tangente (T) s'écrit sous la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Rightarrow \quad y = 1(x-1) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(T) : y = x - 1}$

0.75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$

$$I = \int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2 + \frac{4}{4} - \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{5}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

0.75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\times 3^2\ln 2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(x+2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{x+2}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\Big[\ln x\Big]_1^2 \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - 0\Big) \\
&= \boxed{4\ln 2 - \frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

0.5 pt

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisseset les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times 2cm \times 2cm \\
&= \int_1^2 (3-3x+2(x+1)\ln x\mathrm{d}x \times 4cm^2 \\
&= \left(3\int_1^2 3(1-x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 (x+1)\ln x\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \\
&= \left[3\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2A\right] \times 4cm^2 \\
&= \left[3(2-2) - 3\left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\times\left(4\ln 2 - \frac{7}{4}\right)\right] \times 4cm^2 \\
&= \left[\frac{-3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2}\right] \times 4cm^2 \\
&= (8\ln 2 - 5) \times 4cm^2 \\
&= \boxed{(32\ln 2 - 20)cm^2}
\end{aligned}$$

0.5 pt

6 - Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

$$(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2(x+1)\ln x \geq 3x-3$$

$$\Leftrightarrow 3-3x+2(x+1)\ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=[1;+\infty[}$$

FIN

Exercice 1 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) pasant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(2;0;2)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1;1;0)$ est le point de contact .

0,25 pt **2 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).

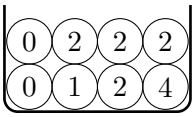
0,75 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$.

0,75 pt **3 -** Montrer que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

Exercice 2 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.



1,5 pt **1 -** Soit A l'événement : " Parmi les trois boules tirées , aucune ne porte le nombre 0 "
et B l'événement:" le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 "
Montrer que : $p(A)=\frac{5}{14}$ et que : $p(B)=\dfrac{1}{7}$

2 - Soit X le variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$.

1 pt **b)** Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X
Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

On considère les nombres complexes a et b tels que : $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que $b=(1+i)a$.

0,5 pt **b)** En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déduire ce qui précède que : $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c=-1+i\sqrt{3}$

0,75 pt **a)** Vérifier que : $c=ia$ et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

0,5 pt **b)** Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

0,5 pt **c)** En déduire que la quadrilatère $OABC$ est un carré.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2017 — 11 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$ On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $g(1) = 0$.

2 - À partir du tableau de variation de la fonction g ci-contre :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1 pt Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $]0;1]$
et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $[1;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$
Soit (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $1cm$).

0.5 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat .

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout x appartient à l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $(1 - \dfrac{2}{x})\ln x = 0$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

0,75 pt **c)** Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$.

1 pt **5 -** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

0.5 pt **6 - a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x} x = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $H : x \longrightarrow 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer, à l'aide une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x x = (1 - \ln 2)^2$.

0.5 pt **d)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

III- On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.(On pourra utiliser le résultat du question II-4)c))

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite..

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : NORMAL 2017

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) pasant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1;0;-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

On a (P) est le plan pasant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1;0;-1)$ est un vecteur normal alors une équation cartésienne du plan (P) est de la forme :

$$(P):\ 1\times x+0\times y-1\times z-(1\times 0+0\times 1-1\times 1)=0$$

D'où $$(P):\ x-z+1=0$$

Ainsi $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0.75 pt **b)** Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

• Calculons la distance entre (P) et Ω le centre de (S), on a

$$d(\Omega,(P))=\frac{|x_\Omega-z_\Omega+1|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}=\frac{|0-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Donc $d(\Omega,(P))$ est égale au rayon de (S)

D'où le plan (P) est tangent à la sphère (S)

• Vérifions que $B(-1;1;0)$ est le point de contact.

On a $(P):\ x-z+1=0$ et $-1-0+1=0$

Donc $B(-1;1;0)\in(P)$

D'autre part on a $\Omega B=\sqrt{(-1-0)^2+(1-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

D'où $B\in(S)$

Ainsi $B(-1;1;0)$ est le point de contact entre (P) et (S)

2 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passante par le point A et orthogonale au plan (P).

0,25 pt

On a $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$ est normal à (P) et $(P)\perp(\Delta)$, alors $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) de plus (Δ) passe par $A(0,1,1)$

Donc une représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Montrons que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$.

Il suffit de monter que $C\in(\Delta)$,$\Omega C=\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{\Omega C}.\overrightarrow{u}=0$.

- On a : $\begin{cases} 1 &= t \\ 1 &= 1 \\ 0 &= 1-t \end{cases} \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow C(1,1,0)\in(\Delta)$
- On a $\Omega C=\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, donc $C\in(S)$
- On a $\overrightarrow{\Omega C}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$, alors

$$\overrightarrow{\Omega C}.\overrightarrow{u}=1\times1+0\times0-1\times1=1-1=0$$

D'où la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$

0,75 pt **3 -** Montrons que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

On a $\overrightarrow{OB}(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{OC}(1;1;0)$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} &= \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 0\vec{i}-0\vec{j}+(1\times1-1\times(-1))\vec{k}\\ &= 2\vec{k}\end{aligned}$$

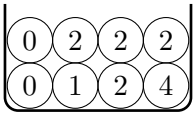
Alors $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

L'aire S_{OBC} du triangle OBC est

$$S_{OBC}=\tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\tfrac{1}{2}\left\|2\vec{k}\right\|=\tfrac{2}{2}=1$$

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1,5 pt **1 -** On a A l'événement : ≪ Parmi les trois boules tirées , aucune ne porte le nombre 0 ≫

et B l'événement :≪le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8≫

Montrons que : $p(A)=\frac{5}{14}$ et que : $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

Comme les boules sont indiscernables et le tirage se fait au hasard, alors on a l'hypothèse d'équiprobabilité.

Pour que A soit réalisé on doit tirer trois boules parmi les six boules qui ne portent pas le nombre 0, donc :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{\frac{6\times5\times4}{3!}}{\frac{8\times7\times6}{3!}} = \frac{6\times5\times4}{8\times7\times6} = \frac{5}{14}$$

Pour que B soit réalisé on doit tirer trois boules parmi les quatre boules qui portent le nombre 2 ou trois boules portent les nombres 1,2,4. Donc :

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4+4}{\frac{8\times7\times6}{3!}} = \frac{8}{8\times7} = \frac{1}{7}$$

2 - On a X le variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

0.5 pt **a)** Montrons que : $p(X=16) = \dfrac{3}{28}$.

On a $2\times2\times4 = 16$, alors :

$$p(X=16) = \frac{card(X=16)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{8\times7} = \frac{3}{28}$$

1 pt **b)** Calculons $p(X=0)$, $p(X=4)$ et $p(X=8)$

On a $p(X=8) = p(B) = \frac{1}{7}$

et $2\times2\times1 = 4$, donc $p(X=4) = p(X=16) = \frac{3}{28}$

l'événement $(X=0)$ signifie qu'au moins une boules porte le nombre 0, donc $(X=0) = \bar{A}$

Alors $p(X=0) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

(Autres manières : $p(X=0) = 1 - p(X=4) - p(X=8) - p(X=16) = \frac{28-3-4-3}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

et $p(X=0) = \frac{C_2^1\times C_6^2+C_2^2\times C_6^1}{C_8^3} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$)

Donc le tableau de la loi de X est :

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

Exercice 3 : (3 pts)

On considère les nombres complexes a et b tels que : $a = \sqrt{3}+i$ et $b = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $b = (1+i)a$.

On a $(1+i)a = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1 = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i = b$

D'où $b = (1+i)a$

0.5 pt **b)** Déduisons que $|b| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg b \equiv \dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

On a :

- $|b| = |(1+i)a| = |1+i|\,|a| = \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{2}\times 2 = 2\sqrt{2}$
- $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$
- $a = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2;\frac{\pi}{6}\right]$

D'où $b = (1+i)a = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\times\left[2;\frac{\pi}{6}\right] = \left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right] = \left[2\sqrt{2};\frac{5\pi}{12}\right]$

Ainsi $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

0.5 pt **c)** Déduisons de ce qui précède que : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

On a :

- $b = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$
- $b = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)i$

D'où $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1$

Ainsi $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

0.75 pt **2 - a)** Vérifions que : $c = ia$ et en déduire que $OA = OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

- On a $ia = i(\sqrt{3}+i) = i\sqrt{3}-1 = -1+i\sqrt{3} = c$

D'où $c = ia$

- On a $OC = |c| = |ia| = |i|\,|a| = 1\,|a| = OA$

Ainsi $OA = OC$

- On a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c}{a}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{ia}{a}\right)[2\pi] \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

0.5 pt **b)** Montrons que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Soit $A'(a')$ l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

Alors $a' = a+c = a+ia = (1+i)a = b$

D'où le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

0.5 pt **c)** Déduisons que le quadrilatère $OABC$ est un carré.

- Comme le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

- D'autre part on a $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi le quadrilatère $OABC$ est un carré.

Problème : (11 pts)

I- On a $\forall x \in]0;+\infty[\,; g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $g(1) = 0$.

On a $\boxed{g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2\ln(1) = 2 - 2 = 0}$

1 pt **2 -** À partir du tableau de variations de la fonction g, montrons que :

$g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0;1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$

D'après le tableau de variations de g, on a g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, de plus $g(1) = 0$, alors :

$\boxed{\text{pour tout } x \in]0;1] \text{ on a } g(x) \leq 0}$ et $\boxed{\text{pour tout } x \in [1;+\infty[\text{ on a } g(x) \geq 0}$

II- On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

Soit (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $1cm$).

0.5 pt **1 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat .

- On a $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0}$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

- **Interprétation :**

$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet à droite en 0 une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

0.25 pt **2 - a)** Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty}$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = (1 - 0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

0.75 pt **b)** Montrons que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

Ainsi la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

1 pt **3 - a)** Montrons que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout x appartient à l'intervalle $]0, +\infty[$.

• Soit $x \in]0;+\infty[$, on a f est dérivable sur $]0;+\infty[$ de plus :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x\right)' \\ &= 1 + \frac{2}{x^2}\ln x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + x - 2 + 2\ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

• On a $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, donc le signe de f' est celui de g.

• D'après la question **I-2** on a $\forall x \in]0;1]; g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[; g(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in]0;1]; f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[; f'(x) \geq 0$

Ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

0.25 pt **c)** Dressons le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

0.5 pt **4 - a)** Résolvons dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $(1 - \frac{2}{x})\ln x = 0$.

Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0 &\iff 1 - \frac{2}{x} = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \\ &\iff \frac{x-2}{x} = 0 \text{ ou } x = e^0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

D'où l'équation $\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x = 0$ admet deux solutions dans $]0, +\infty[$ qui sont 1 et 2.

0.5 pt **b)** Déduisons que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées. On a :

• $f(x) - x = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$ D'où $f(x) - x = 0 \iff x = 2$ ou $x = 1$

Ainsi la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points $A(1,1)$ et $B(2,2)$

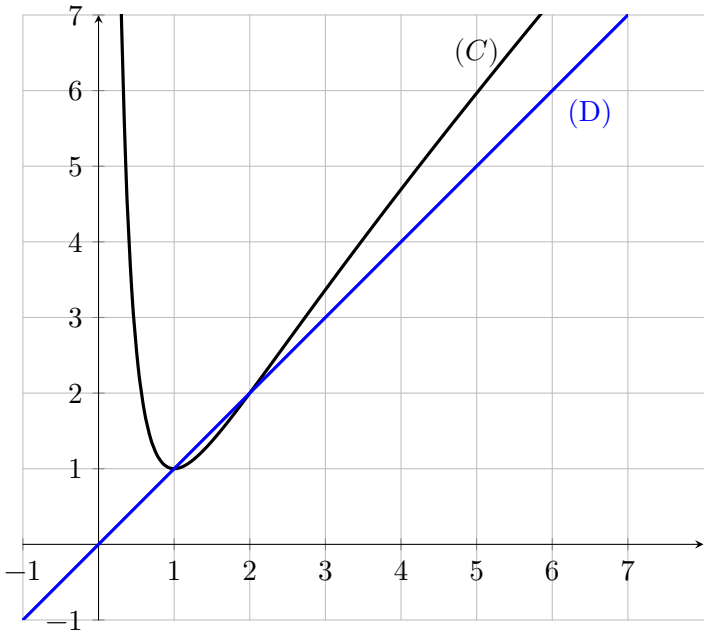
0.75 pt **c)** Montrons que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1;2]$ et déduisons la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$.

• On a $f(x) - x = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$ le tableau de signe de $f(x) - x$ est :

x	0		1		2		$+\infty$
$1 - \frac{2}{x}$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la courbe (C) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$.

1 pt **5 -** Traçons sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).



0.5 pt **6 - a)** Montrons que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx &= \int_1^2 \ln'(x) \ln x dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2} \left((\ln(x))^2\right)' dx \\
&= \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - 0 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2)^2
\end{aligned}$$

D'où $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0.25 pt **b)** Montrons que la fonction : $H : x \longrightarrow 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

On a H est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions dérivables) de plus :

$\forall x > 0; H'(x) = (2\ln x - x)' = 2\ln'(x) - 1 = \frac{2}{x} - 1$

Ainsi H est une fonction primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$.

0.5 pt **c)** Montrons, à l'aide une intégration par parties, que : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx &= \int_1^2 H'(x)\ln x dx \\
&= [H(x)\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 H(x)\ln'(x)dx \\
&= H(2)\ln(2) - 0 - \int_1^2 H(x)\frac{1}{x}dx \\
&= (2\ln 2 - 2)\ln(2) - \int_1^2 \left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right)dx \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^2 1dx \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln(2) - 2\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + [x]_1^2 \\
&= (\ln 2)^2 - 2\ln(2) + 1 \\
&= (1 - \ln 2)^2
\end{aligned}$$

Car d'après la question II-6-a on a $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

Ainsi $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$

d) Calculons, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et

0.5 pt les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On a $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x|\, dx \times 1cm^2$

D'après la question II-4-c on a $f(x) \leq x$ sur $[1; 2]$

Donc $|f(x) - x| = -(f(x) - x) = -\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x$

Alors $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx \times 1cm^2 = (1 - \ln 2)^2 cm^2$

III- On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

- On a $u_0 = \sqrt{3}$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n \leq 2$
- Montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $1 \leq u_n \leq 2$ est f strictement croissante sur $[1, 2]$

Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

D'où $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Car $f(1) = 1, f(2) = 2$ et $f(U_n) = u_{n+1}$

Finalement $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **2 -** Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

D'après la question II-4)c) $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1; 2]$

Or d'après la question précédente on a $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante

0.75 pt **3 -** Déduisons que la suite (u_n) est convergente puis déterminons sa limite.

On a f continue sur $I = [1, 2]$ et $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$

et comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1

alors elle est convergente.

De plus sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

Or d'après la question II-4-b $f(x) = x \iff x = 1$ ou $x = 2$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq 2$ et (u_n) est décroissante

Alors $\lim u_n = 1$

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

L'espace es trapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

0.5 pt **1 - a)** Montrer que la sphère (S) à pour centre le point $\Omega(1,1,1)$ et pour rayon est 2.

0.5 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

0.5 pt **c)** Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P).

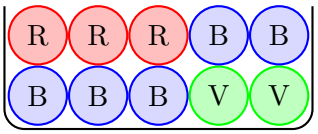
0.25 pt **a)** Montrer que $\vec{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

0.75 pt **b)** Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chaque points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (voir la figure ci-contre).



On tire au hasard, simultanément, **quatre** boules de l'urne.

1 - Soit A l'événement : " Parmi les quatre boules tirées, une seule boule verte "
et B l'événement : " Parmi les quatre boules tirées, il y 'a exactement trois boules de même couleur "

1.5 pt Montrer que $p(A)=\dfrac{8}{15}$ et que $p(B)=\dfrac{19}{70}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$.

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+8=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a=-2+2i,\qquad b=4-4i \quad\text{et}\quad c=4+8i.$$

0.5 pt **a)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
Montrer que $z'=-iz-4$.

0.75 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

3 - Soit ω l'affixe du point Ω, milieu du segment $[BC]$.

0.5 pt **a)** Montrer que $|c-\omega|=6$.

0.5 pt **b)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-\omega|=6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 2.5 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=17 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n>16$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique tel que $v_n=u_n-16$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

0.5 pt **b)** En déduire que $u_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

0.5 pt **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n<16,001$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 8.5 Pts

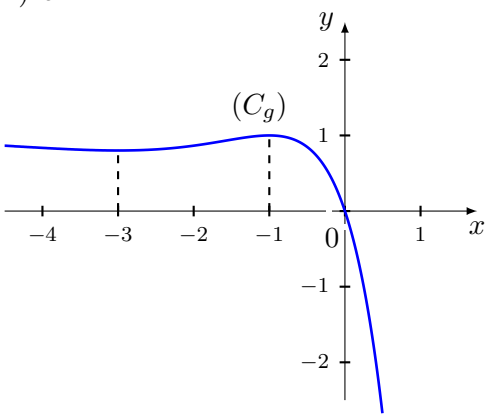
Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-(x+1)^2e^x$.

0.5 pt **1 -** Vérifier que : $g(0)=0$..

1 pt **2 -** A partir de la courbe représentative C_g (voir figure ci-contre)

Montrer que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty,0]$ et que $g(x)\leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$.



Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1-\left(x^2+1\right)e^x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 - a) Vérifier que $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. 0.75 pt

0.5 pt **b)** Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0.25 pt **c)** Montrer que la courbe (C_f) est en-dessous de la droite (D).

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$\left(\text{on pourra écrire } f(x) \text{ sous la forme } x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]\right)$

0.25 pt **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty,0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.75 pt **c)** Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1.

1 pt **4 -** Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f).

(on prendra $f(-3)\approx-2,5$ et $f(-1)\approx-0,75$).

0.5 pt **5 - a)** Vérifier que la fonction $H: x\mapsto(x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $\int_{-1}^{0} xe^x dx=\frac{2}{e}-1$.

0.75 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=-1$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2017

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et (P) le plan d'équation $y-z=0$

a) Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S)

0.5

On a : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0 \Leftrightarrow x^2--2x+y^2-2y+z^2-2z-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1+z^2-2z+1-1-1=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)-1-1-1-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4=2^2$

Donc, (S) est la sphère de centre $\Omega(1;1;1)$ et de rayon $R=2$

b) Calculons $d(\Omega,(P))$ et en déduisons que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)

0.5

✓ **Calculons** $d(\Omega,(P))$

On a : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0$

✓ **Déduisons que le plan** (P) **coupe la sphère** (S) **suivant un cercle** (C)

On a : $d(\Omega,(P))=0<R$ donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)

c) Déterminons le centre et le rayon de la sphère (C)

0.5

puisque : $d(\Omega,(P))=0$ donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) (La grand cercle)

Donc, (C) est la sphère de centre $\Omega(1;1;1)$ et de rayon $R=2$

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P)

0.25 **a) Montrons que : $\overrightarrow{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)**

On a (P) le plan d'équation $y-z=0$ donc $\overrightarrow{u}(0,1,-1)$ est un vecteur normal au plan (P)

Et puisque $(P)\perp(\Delta)$ donc, $\boxed{\overrightarrow{u}(0,1,-1) \text{ est un vecteur directeur de la droite } (\Delta)}$

0.75 **b) Montrons que : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ et déduisons que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points :**

✓ On a :$\overrightarrow{\Omega A}(0;-3;1)$ et $\overrightarrow{u}(0;1;-1)$

D'où : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i}$

par conséquence : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = 2$

D'autre part : $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

D'où : $\boxed{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$

✓ On a : $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = \sqrt{2}$

Donc $d(\Omega,(\Delta)) < R$, par suite $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ coupe la sphère } (S) \text{ en deux points}}$

c) Déterminons les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S)

0.5 On a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+t \\ z = 2-t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$, est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P)

Soit $M(x,y,z)$ un point appartient à l'intersection de (Δ) et (S),Alors :

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=2-t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2^2 \end{cases}$$

Après le remplacement en trouve l'équation $t^2-4t+3=0$, donc $\Delta=4$ et par suite $t_1=1$ ou $t_2=3$

Donc $t_1=1\Leftrightarrow(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-2+1=-1 \\ z=2-1=1 \end{cases}$ Et $t_2=3\Leftrightarrow(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=-2+3=1 \\ z=2-3=-1 \end{cases}$

Finalement, les point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) sont : $\boxed{M(1,-1,1) \text{ et } N(1,1,-1)}$

Exercice 2 : (3 pts)

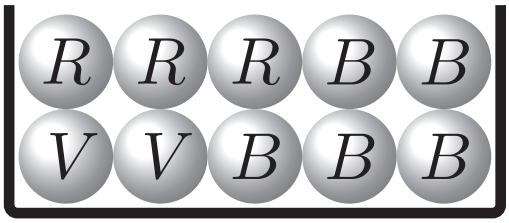
On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : "Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte"

B : "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur"



Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

1.5 **1 - Montrons que $p(A) = \frac{8}{15}$ et $p(B) = \frac{19}{70}$:**

On a $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

$Card(A) = C_2^1 \times C_8^3 = 2 \times 56 = 112$ (Car $A =$ "$V\bar{V}\bar{V}\bar{V}$")

Donc $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$, Alors $\boxed{p(A) = \frac{8}{15}}$

$Card(B) = C_3^3 \times C_7^1 + C_5^3 \times C_5^1 = 1 \times 7 + 10 \times 5 = 57$ (Car $B =$ "$RRR\bar{R}$" Ou "$BBB\bar{B}$"),

Donc $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$, Alors $\boxed{p(B) = \frac{19}{70}}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 **a) Montrons que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$**

L'événement $X = 2$ correspond à tirer deux boule vertes et deux boule non vertes

Donc $p(X = 2) = \frac{card(X = 2)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{2}{15}$, par suite $\boxed{p(X = 2) = \frac{2}{15}}$

1 **b) Donnons la loi de probabilité de X et montrons que l'espérance $E(X) = \frac{4}{5}$**

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

L'événement $X = 0$ correspond à tirer quatre boule non vertes.($\{X = 0\} =$ "$\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}$")

L'événement $X = 1$ correspond à tirer une seule boule verte.

Donc $\{X=1\}=A=$"$V\bar{V}\bar{V}\bar{V}$"), Alors $p(X=1)=p(A)=\dfrac{C_8^4}{210}=\dfrac{8}{15}$

D'après la question précédent : $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

X_i	0	1	2
$p(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

✓ **L'espérance mathématique :** $E(X)=\left(0\times\dfrac{1}{3}\right)+\left(1\times\dfrac{8}{15}\right)+\left(2\times\dfrac{2}{15}\right)=\boxed{\dfrac{4}{5}}$

Exercice 3 : (3 pts)

1 - Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+8=0$

0.75

On a : $\Delta=4^2-4\times8=-16<0$, Donc l'équation admet deux solution complexes :

$z_1=\dfrac{-4-i\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i$ Et $z_2=\dfrac{-4+i\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-4+4i}{2}=-2+2i$ Alors

$S=\{-2-2i;-2+2i\}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points $A(a=-2+2i)$, $B(b=4-4i)$, $C(c=4+8i)$

a) Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.5

✓ **Montrons que** $z'=-iz-4$

On a $R(M)=M'\Leftrightarrow z'-a=\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)\Leftrightarrow z'-(-2+2i)=-i\,(z-(-2+2i))$

$\Leftrightarrow z'=-iz-2i-2-2+2i\Leftrightarrow\boxed{z'=-iz-4}$

0.75

✓ **Vérifions que** $R(C)=B$ **et Déduisons la nature du triangle** ABC

On a $z'=-iz-4$

$-iz_C-4=-i(4+8i)-4=-4i+8-4=4-4i=b$, Donc $\boxed{R(C)=B}$

✓ On a : $R(C)=B$, Donc $\begin{cases} AC & = & AB \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) & = & -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Alors $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle au point } A}$

3 - Soit ω l'affixe du point Ω, milieu du segment $[BC]$

a) Montrons que $|c-\omega|=6$ **:**

0.5

On a $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{4-4i+4+8i}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

Donc $|c-\omega|=|\,(4+8i)-(4+2i)\,|=|6i|=6$

b) Montrons que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|c-\omega|=6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

0.5 On a $|c-\omega|=6 \equiv \Omega M=6$, donc l'ensemble des points M est le cercle de centre Ω et de rayon 6

Or Ω le milieu du segment $[BC]$, Alors $\Omega C=\Omega B=6$

D'autre part, $|a-\omega|=|-2+2i-4-2i|=|-6|=6 \equiv \Omega A=\Omega B=\Omega C=6$

Finalement, L'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4 : (2.5 pts)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0=17$ et $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 **1 - a) Montrons, par récurrence, que $u_n>16$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

✓ Pour $n=0$ on a $u_0=17$ donc $u_0>16$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $u_n>16$ et on montre que $u_{n+1}>16$

On a $u_n>16 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n>4 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n+12>16 \Rightarrow u_{n+1}>16$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Montrons que (u_n) est décroissante et convergente

0.5 On a $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+12-u_n=\left(\frac{1}{4}-1\right)u_n+12=-\frac{3}{4}u_n+12=-\frac{3}{4}(u_n-16)$

Et d'après la question **1-a)** , on a $u_n>16 \equiv u_n-16>0 \equiv -\frac{3}{4}(u_n-16)<0$

Alors $u_{n+1}-u_n<0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ D'où (u_n) est une suite décroissante

✓ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 16, Alors : la suite (u_n) est convergente

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n=u_n-16$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

0.5 On a $v_{n+1}=u_{n+1}-16=\frac{1}{4}u_n+12-16=\frac{1}{4}u_n-4=\frac{1}{4}(u_n-16)=\frac{1}{4}v_n$

Alors $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$, Finalement (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{4}$ et son premiere terme $v_0=u_0-16=17-16=1$

b) Montrons que $u_n=1+\left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et déterminons $\lim u_n$

0.5 Pour tout n de $\mathbb{N}$, On a : $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

D'autre $v_n=u_n-16 \Leftrightarrow u_n=v_n+16 \Leftrightarrow u_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c) Déterminons la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n<16,0001$

0.5 $u_n<16,0001 \Leftrightarrow 16+\left(\frac{1}{4}\right)^n<16,0001 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n<0,0001$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0001)$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,0001) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$

Donc la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,0001$ est : $\boxed{n = 7}$

Problème : (8.5 pts)

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$

Et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0.25 **1 - Vérifions que $g(0) = 0$:**

On a : $g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0 = 1 - 1 \times 1 = \boxed{0}$

2 - Graphiquement :

1 ✓ Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$; On a $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses, Alors : $g(x) \geq 0$

✓ Sur l'intervalle $[0; +\infty[$; On a $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de l'axe des abscisses, Alors : $g(x) \leq 0$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 2 cm)

1 - a) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ **, déduisons que** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.75

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x = x + 1 - x^2e^x - e^x = x + 1 - 4 \times \frac{x^2}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

$= x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = \boxed{-\infty}$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)]$ et déduisons l'interprétation graphique

0.5 ➠ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x - (x+1)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = 0$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

➠Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)] = 0.$

Alors $\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = x+1 \text{ est asymptote à } (Cf) \text{ au voisinage de } -\infty}$

c) Montrons que la courbe (Cf) est en dessous de la droite (D)

0.25 On a : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x \Leftrightarrow f(x) - (x+1) = -(x^2+1)e^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) - (x+1) < 0$, Alors $\boxed{\text{la courbe } (Cf) \text{ est en dessous de la droite } (D)}$

2 - a) **Montrons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0.5 On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-(x+\frac{1}{x}e^x)\right] = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} &= 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x} &= -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x &= +\infty \end{cases}$

b) **Montrons que** (Cf) **admet au voisinage de** $+\infty$**, une branche parabolique**

0.25 On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1+\frac{1}{x}-(x+\frac{1}{x})e^x = -\infty$

(Cf) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction (***l'axe des ordonnées***).

3 - a) **Montrons que** $f'(x) = g(x)$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$

0.75 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, Et on a : $f'(x) = \left(x+1-(x^2+1)e^x\right)' = 1-\left((x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'\right) = 1-\left(2xe^x+(x^2+1)e^x\right) = 1-\left(x^2+2x+1\right)e^x = 1-(x+1))^2e^x = g(x)$

En fin $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) **Montrons que** f **est croissante sur** $]-\infty;0]$ **et décroissante sur** $[0;+\infty[$ **et dressons le tableau de variations de** f **sur** $\mathbb{R}$

0.75 D'après la question précedent, on a $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

✓ Sur l'intervalle $]-\infty;0]$; On a $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, donc f croissante

✓ Sur l'intervalle $[0;+\infty[$; On a $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, donc f décroissante

➠ **Dressons le tableau de variations de** f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

c) **Montrons que** (Cf) **admet deux points d'inflexion d'abscisses** -3 **et** -1

0.75 La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, Et on a :

$f''(x) = (f'(x))' = g'(x) = (1-(x+1)^2e^x)' = -((x+1)^2)'e^x-(x+1)^2(e^x)' = -2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x = -(x+1)(x+3)e^x$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-(x+1)(x+3)$ $(e^x > 0)$, Donc

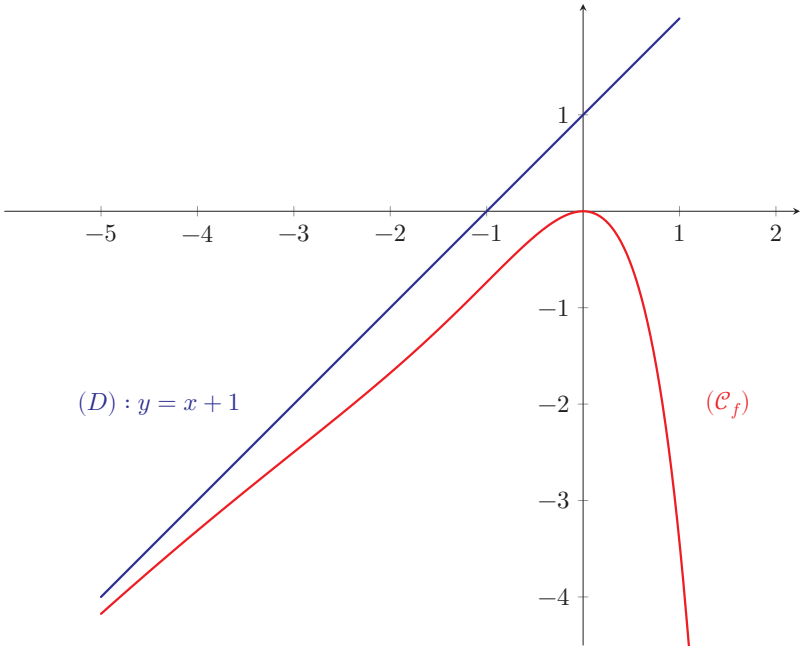
x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en -3 et -1

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1

1 **4 - Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) dans le repère $\left(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$**

(On prend : $f(-3) \simeq -2.5$; $f(-1) \simeq -0.75$)



0.5 **5 - a) Vérifions que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ et montrons que $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$**

✓ Les deux fonctions $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors H est dérivable sur $\mathbb{R}$, Et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$H'(x) = \left((x-1)e^x\right)' = (x-1)'e^x + (x-1)\left(e^x\right)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x)$

D'où $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$

✓ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = [(x-1)e^x]_{-1}^{0} = -1 - (-2e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1$

0.75 **b) En utilisant une intégration par parties, montrons que :**

$I = \int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x \mathbf{d}x = 3(1 - \frac{2}{e})$

On pose $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v'(x) = e^x$

Donc $u'(x) = 2x$ *et* $v(x) = e^x$

$$I = \left[(x^2+1)\,e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x dx$$
$$= 1 - 2e^{-1} - 2\int_{-1}^{0} (xe^x)\,dx$$
$$= 1 - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} + 2$$
$$= 3(1 - \frac{2}{e})$$

Finalement $\boxed{\int_{-1}^{0} (x^2+1)\,e^x \mathbf{d}x = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)}$

0.5 **c) Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$**

On a $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x) - (x+1)|\,dx\ u.a$ (Avec f continue et la courbes (C_f) sitúés au-dessous de la droite $(D) : y = x+1$

Donc $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} ((x+1) - f(x))\,dx \times 2cm \times 2cm$
$$= \int_{-1}^{0} (x^2+1)\,e^x dx \times 4cm^2$$
$$= 3\left(1-\frac{2}{e}\right) \times 4cm^2 = 12\left(1-\frac{2}{e}\right) cm^2$$

Finalement $\boxed{\mathcal{A} = 12\left(1-\frac{2}{e}\right) cm^2}$

FIN

Exercice 1 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$

1 pt **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ puis en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$

0.5 pt Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1;0;1)$ et pour rayon $R = 5$

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$, est une représentation paramétrque de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 pt **b)** Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)

0.75 pt **4 -** Vérifier que $d(\Omega;(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle, de rayon 4, dont on déterminera le centre

Exercice 2 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

0.25 pt **a)** Écrire, sous la forme trigonométrique, le nombre complexe : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, et le point B l'image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B

0.5 pt Montrer que : $b = da$

3 - Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, et le point C l'image du point B par la translation t et c l'affixe du point C

0.75 pt **a)** Vérifier que $c = b + a$, puis en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

0.75 pt **b)** Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral

Exercice 3 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules rouges portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et *quatre* boules blanches portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2

On considère l'expérience suivante : On tire, au hasard, et simultanément, *trois* boules de l'urne

Soit les évènements :

A : " Les trois boules tirées sont de même couleur"

B : " Les trois boules tirées portent le même nombre"

C : " Les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre"

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ et $p(C)=\frac{1}{42}$

2 - On répète l'expérience précédente trois fois, avec remise des trois boules tirées dans l'urne après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'évènement A

0.5 pt **a)** Déterminer les paramètres de la variable aléatoire X

1 pt **b)** Montrer que : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ et calculer $p(X=2)$.

Exercice 4 Session : NORMAL 2018 — 11 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=\mathrm{e}^x-x^2+3x-1$
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $g(0)=0$

0.5 pt **2 -** Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-x)\mathrm{e}^{-x}+x$
Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(unité : $1cm$)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $f(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}-\frac{x}{\mathrm{e}^x}+x$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

0.75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, puis en déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y=x$

0.5 pt **c)** Vérifier que $f(x)=\frac{x^2-x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x)-x$ et x^2-x ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x)=g(x)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que $f"(x)=(x^2-5x+4)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses successives 1 et 4

1 pt **5 -** Construire (D) et (C) dans le même repère $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(**On prend** $f(4)\approx 4.2$)

0.5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}}$

0.75 pt **b)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$

0.75 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie III

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **1 -** Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question $II - 3 - b$))

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

0.75 pt **3 -** En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2018

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3pts pts)

les points $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1 pt

1 - On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

Donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) donc on a :

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC)\right)\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y+2\\z+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2(y+2)+(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z+6=0$$

0.5 pt

$2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y-0)^2+z^2-2z+1-25=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=5^2$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $R=5$.

0.25 pt

3 - a) Soit (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1,0,1)$ et qui est perpendiculaire au plan (ABC).

Alors $\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta)$ on a $\overrightarrow{\Omega M}$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ sont colinéaires ;

D'où :

$$(\exists t \in \mathbb{R})/\overrightarrow{\Omega M} = t \times (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z-1 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1+t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de } (\Delta) \\ z = 1+t \end{cases}$

0.5 pt

b) Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2x+2y+z+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 9t+9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow H\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.è5 pt

Donc : $H(-1;-2;0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4 - On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(ABC)) &= \frac{|2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega + 6|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \\ &= \frac{|2\times 1 + 2\times 0 + 1 + 6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{9}} \\ &= 3 < 5 \end{aligned}$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle dont le centre est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC) or ce point est l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) donc c'est le point $H(-1;-2;0)$ et le rayon du cercle est : $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt

1 - Soit l'équation : $(E) : 2z^2+2z+5 = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 40 = -36$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{-1 - 3i}{2}$$
$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{et } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

D'où $S = \left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right); \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right\}$

2 - R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ **0.25 pt**

a) On a :

$$\begin{aligned} d &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Donc : $d = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ **0.5 pt**

b) Soit $A\left(a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

On a :

$$\begin{aligned} B = R(A) &\Leftrightarrow b = a \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow b = a \times \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow b = a \times d \end{aligned}$$

3 - t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. **0.75 pt**

a) On a :

$$\begin{aligned} C = t(B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &\Leftrightarrow c = b + a \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} c = b + a &\Leftrightarrow c = d \times a + a \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot (d + 1) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

0.75 pt

b) On a :

$$\begin{aligned} c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \arg\left(\dfrac{c}{a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1 \\ \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

On conclut que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

On tire simultanément 3 boules de la caisse : $\text{Card}\,\Omega = C_9^3 = 84$

1.5 pt

1 - ■ A « Les trois boules tirés sont de même couleur »
On a :

$$\text{Card}\,A = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$$
$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$
$$\text{Donc : } P(A) = \frac{1}{6}$$

■ B « Les trois boules tirés portent le même numéros »
On a :

$$\text{Card}\,B = C_3^3 + C_6^3 = 21$$
$$P(B) = \frac{\text{CardB}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$
$$\text{Donc : } P(B) = \frac{1}{4}$$

■ C « Les trois boules tirés sont de même couleur et portent le même numéros »
On a :

$$\text{CardC} = C_3^3 + C_3^3 = 2$$
$$P(C) = \frac{\text{CardC}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$
$$\text{Donc : } P(C) = \frac{1}{42}$$

0.5 pt

2 - X la variable aléatoire liée à « Nombre de fois que l'événement A est réalisé »

a) Les paramètres de la variable aléatoire X sont :

- $n = 3$ (nombre de fois qu'on répète l'expérience)
- $p = P(A) = \dfrac{1}{6}$ (la probabilité de l'événement A)

1 pt

b)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C_n^1 \times p^1 \times (1-p)^{n-1} \\ &= n \times p \times (1-p)^{n-1} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

Donc : $P(X=1)=\dfrac{25}{72}$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=C_n^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}\\&=C_3^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}\\&=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}\\&=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}\\&=\frac{5}{72}\end{aligned}$$

Donc : $P(X=2)=\dfrac{5}{72}$

Problème : (11 pts)

Partie I

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)=e^x-x^2+3x-1$

tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt

0.5 pt

1 - On a : $g(0)=e^0-0^2+3\times0-1=1-1=0$

2 - D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme on a $g(0)=0$ alors on a : $(\forall x\in]-\infty;0])\quad g(x)\leq 0\quad$ et $\quad(\forall x\in[0;+\infty[)\quad g(x)\geq 0$

Partie II

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x$

0.5 pt

1 - **a)**

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R})\quad \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x&=\frac{x^2-x}{e^x}+x\\&=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\\&=f(x)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x\right)\\&=+\infty\quad\left(\text{car : }\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{x^n}{e^x}}=0\quad(n\in\mathbb{N})\right)\end{aligned}$$

0.75 pt

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto+\infty}\left(f(x)-x\right)&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x-x\right)\\&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

On en déduit que $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite (D) d'équation $y = x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. **0.5 pt**

c)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \frac{x^2 - x}{e^x} + \frac{xe^x}{e^x}$$
$$= (x^2 - x)\, e^{-x} + x$$
$$= f(x)$$

- $$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \right)$$
$$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim_{x \mapsto -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = +\infty \right)$$

0.5 pt

d)

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\left(\frac{x^2 - x}{x} \right) e^{-x} + 1 \right)$$
$$= -\infty$$
$$\left(\text{Car : } \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x} \right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty \right)$$

Interpréter géométriquement :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction l'axe des ordonnées. **0.25 pt**

2 - a) On a : $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - x = (x^2 - x)\, e^{-x}$

Comme $(x \in \mathbb{R}) e^{-x} > 0$; Alors $f(x) - x$ et $(x^2 - x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

b)
- On a : $(\forall x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[) \quad x^2 - x \geq 0 \implies f(x) - x \geq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite (D) sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.
- $(\forall x \in [0; 1]) \quad x^2 - x \leq 0 \implies f(x) - x \leq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite (D) sur $[0; 1]$. **0.75 pt**

3 - a) On a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \left((x^2 - x)\, e^{-x} + x \right)'$$
$$= (x^2 - x)'\, e^{-x} + (x^2 - x)\, (e^{-x})' + 1$$
$$= (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)\, e^{-x} + 1$$
$$= (3x - x^2 - 1)\, e^{-x} + e^{-x} \times e^x$$
$$= (e^x - x^2 + 3x - 1)\, e^{-x}$$
$$= g(x) \cdot e^{-x}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ **0.5 pt**

b) D'après la question $I - 2)$ on a : $(\forall x \in]-\infty; 0]) \quad g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad g(x) \geq 0$

On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. **0.25 pt**

c) tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0.25 pt

4 - a) On a pour tout x dans $\mathbb{R}$:

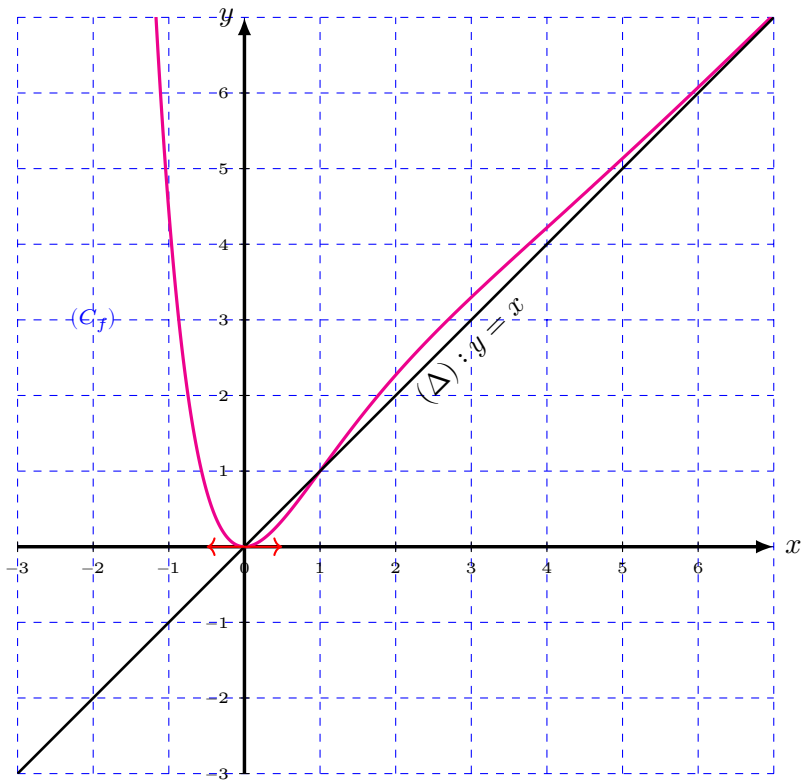
$$\begin{aligned} f''(x) &= (g(x)\cdot e^{-x})' \\ &= g'(x)\cdot e^{-x} - g(x)\cdot e^{-x} \\ &= (e^x - 2x + 3)\,e^{-x} - (e^x - x^2 + 3x - 1)\,e^{-x} \\ &= (x^2 - 5x + 4)\,e^{-x} \end{aligned}$$

0.5 pt

b) On a : $(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-4)$, donc $f''(x)$ s'annule et change le signe pour $x = 1$ et $x = 4$ alors les points d'abscisse respectifs 1 et 4 sont deux points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1 pt

5 - Construction graphique de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



0.5 pt

6 - a) On a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) &= \left((x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}\right)' \\ &= (2x+2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

Donc : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= -[H(x)]_0^1 \\ &= -(H(1) - H(0)) \\ &= -5e^{-1} + 2 \\ &= \frac{2e-5}{e} \end{aligned}$$

0.75 pt

b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-x}dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 (u'(x)v(x))\,dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (1 \times (-e^{-x} \\ &= -e^{-1} - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx \\ &= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) \\ &= 1 - 2e^{-1} \\ &= \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

D'où : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

0.75 pt

c) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$A = \int_0^1 |f(x) - x|dx \quad \text{(u.a)}$$

On sait que d'après ce qui précède $f(x) - x \leq 0$ sur $[0\,;1]$

Donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - f(x))dx \text{ (u.)} \\ &= \int_0^1 (x - x^2)\,e^{-x}dx \quad \text{(u.)} \\ &= \int_0^1 xe^{-x}dx - \int_0^1 x^2e^{-x}dx \quad \text{(u.a)} \\ &= \left(\frac{e-2}{e} - \frac{2e-5}{e}\right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3-e}{e} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Partie III

la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0.75 pt

1 - Montrons par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.

Initialisation

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ alors $0 \leq u_0 \leq 1$ donc la proposition est vraie.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose que : $0 \leq u_n \leq 1$.

Et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Longrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \quad \text{et comme } f \text{ est croissante sur } [0\,;1] \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

D'où d'après le principe de réccurence, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.
(On utilise le résultat de la question $II-3-b$))

0.5 pt

2 - le résultat de la question $II-2-b$) on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;1] \quad f(x) - x \leq 0 &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(u_n) - u_n \leq 0 \quad (\text{ Car } u_n \in [0;1]) \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante

0.75 pt

3 - La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Soit ℓ sa limite. On a :

$$\begin{cases} f(u_n) = u_{n+1} \\ f([0;1]) \subset [0;1] \\ f \text{ est continue sur } [0;1] \\ u_0 \in [0;1] \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
la question $II-2-b$) on a : $f(x) = x$ pour les valeurs $x = 0$ et $x = 1$;
Or la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc : $\ell \leq \dfrac{1}{2}$
D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon 3, et le plan (P) passant par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\overrightarrow{u}(4,0,-3)$ est un vecteur normal à (P).

0.5 pt **1 -** Montrer que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

0.5 pt **2 -** Vérifier que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à plan (P).

b) Déterminer les coordonnées du point H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

0.5 pt

0.25 pt **4 - a)** Calculer $d(\Omega,(P))$

0.75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

2 - Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

0.25 pt **a)** Écrire, sous forme trigonométrique, le nombre complexe a .

0.5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

0.5 pt **3 - a)** On considère le point C d'affixe $c=1+i$. Montrer que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, et le point D l'image du point B par la translation t.

0.5 pt Montrer que $OD=|b+c|$

0.5 pt **c)** En déduire que $OD\times BC=2\sqrt{3}$

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

Une urne contient 12 boules, indiscernables au toucher, réparties comme suit : 3 boules rouges portant chacune le nombre 1, 3 boules rouges portant chacune le nombre 2 et 6 boules vertes portant chacune le nombre 2.

On tire, au hasard et simultanément, deux boules de l'urne. Et on considère les événements suivants :

A:" Les deux boules tirées portent le même nombre.".

B:" Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ".

C:" Les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3".

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$ et $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $p(A \cap B) = \dfrac{3}{11}$.

0.5 pt **b)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse.

0.5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules qui portent le même nombre.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 2 Pts

0.5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$

1 pt **2 -** A l'aide d'une intégration par partie, Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 9 Pts

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$

Voila, ci-contre, le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0.5 pt **2 -** Á partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage $+\infty$

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

0.75 pt **2 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1 pt **4 -** Construire dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ (unité : 1 cm)

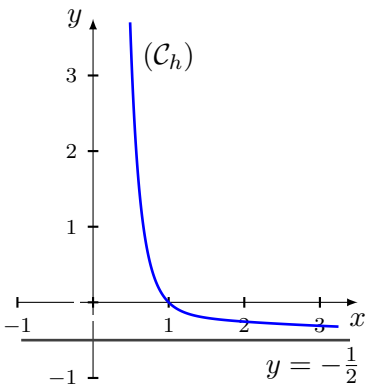
Partie III : On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

0.25 pt **1 -** **a)** Vérifier que $h(1) = 0$

0.75 pt **b)** Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{C}_h)$ est la représentation graphique de la fonction h.

Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, puis en déduire que :

$f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$



2 - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \text{e}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **a)** Montrer, par récurrence, que : $1 \leq u_n \leq \text{e}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

$\left(\text{ On pourra utiliser le résultat de la question } \textbf{III- 1- b)} \right)$

0.75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2018

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon $R=3$; et le plan (P) qui passe par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur qui lui est normal.

1 - Montrons que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) : **0.5 pt**

Soit $\left(M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)$ $/(S)$ est la sphére de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon $R=3$ donc :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{\Omega M}\|=3 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=3\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=9\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0\end{aligned}$$

Alors : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

2 - Vérifions que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P) : **0.5 pt**

Soit $\left(M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P)\right)$, on a $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-3)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 &\Leftrightarrow (x+1)\times 4+y\times 0+(z-3)\times(-3)=0\\ &\Leftrightarrow 4x+4-3z+9=0\\ &\Leftrightarrow 4x-3z+13=0\end{aligned}$$

D'où : $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à plan (P) :

On a (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1, 0, 1)$ et qui est perpendiculaire au plan (P), donc $\vec{u}(4, 0, -3)$ est un vecteur directeur de (Δ).

Alors $\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta)$ on a : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ (t ∈ IR)

D'où : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ (t ∈ IR) est une représentation paramétrique de (Δ).

b) Déterminons les coordonnées du point H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan

0.5 pt (P) :

Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (P) Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 4x - 3z + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 4(2 + 4t) - 3(2 - 3t) + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 25t + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ t = -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

Donc H a pour coordonnées $(-\frac{2}{5}; 1; \frac{19}{5})$.

0.25 pt **4 - a)** Calculons $d(\Omega, (P))$:

On a :

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|4x_\Omega - 3z_\Omega + 13|}{\|\vec{u}\|}$$
$$= \frac{|4 \times 2 - 3 \times 1 + 13|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

0.75 pt **b)** Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera :

On a $d(\Omega; (P)) = 3 = R$ donc le plan (P) est tangent à la sphère (S) et leur point de contact est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) or ce point est intersection de la droite (Δ) et du plan (P) donc c'est le point $H\left(-\frac{2}{5}; 2; \frac{19}{5}\right)$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudrons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$:
On a le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = 8 - 16 = -8$
D'où $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes et conjugués :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2 \times 1} = \sqrt{2}(1-i) \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2}(1+i)$$
$$\text{D'où } S = \{(\sqrt{2}(1-i)); (\sqrt{2}(1+i))\}$$

2 - Soit $A(a = \sqrt{2}(1-i))$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.25 pt **a)** Écrivons, sous forme trigonométrique, le nombre complexe a ;
On a : $a = \sqrt{2}(1-i) \Rightarrow |a| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
Donc $a = \sqrt{2}1 - \sqrt{2}i = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Donc : $a = a = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

0.5 pt **b)** Vérifions que l'affixe du B l'image du point A par la rotation R est $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$:
On a :

$$\begin{aligned} B = R(A) &\Leftrightarrow b - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times (a - 0) \\ &\Leftrightarrow b = a \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow b = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) \times (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ &\Leftrightarrow b = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})\right) \\ &\Leftrightarrow b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Donc : $b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

0.5 pt **3 - a)** Montrons que $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$:
On a :

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= 2^2 \times \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 - (1+i)^2 \\ &= 4 \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - (1^2 + 2ii^2) \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2}i - 2i = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$

0.5 pt **b)** Montrons que $OD = |b + c|$:
On a :

$$\begin{aligned} D = t(B) &\Leftrightarrow d = b + c \\ &\Leftrightarrow |d| = |b + c| \Leftrightarrow OD = |b + c| \end{aligned}$$

0.5 pt **c)** Déduisons que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$:

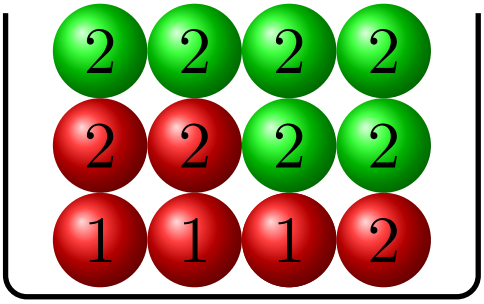
$$\begin{aligned} OD \times BC &= |b + c| \times |c - b| = |(b + c)(c - b)| \\ &= |(c + b)(c - b)| = |c^2 - b^2| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $OD \times BC = 2\sqrt{3}$ -

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 12 boules, indiscernables au toucher, réparties comme suit :

— 3 boules Rouges portent chacune le numéro 1.
— 3 boules Rouges portent chacune le numéro 2.
— 6 boules Vertes portent chacune le numéro 2.



On tire au hasard, simultanément deux boules de la caisse, donc $\text{Card}\,\Omega = C_{12}^2 = 66$

1.5 pt **1 -** Montrons que : $p(A) = \frac{13}{22}$, $p(B) = \frac{6}{11}$ et calculons $p(C)$:

— A:" Les deux boules tirées portent le même nombre."

$\text{CardA} = C_3^2 + C_9^2 = 39$ $\{1,1\}$ ou $\{2,2\}$.
Donc : $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{39}{66}$
D'où : $P(A) = \frac{13}{22}$

— B:" Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ".

$\text{CardB} = C_6^1 \times C_6^1 = 36$ $\{R, V\}$.
Donc : $P(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{36}{66}$
D'où : $P(B) = \frac{6}{11}$

— C:" Les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3".

$\text{CardC} = C_3^1 \times C_9^1 = 27$ $\{1,2\}$.
Donc : $P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{27}{66}$
D'où : $P(C) = \frac{9}{22}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$:

On a : $(A \cap B)$: "Obtenir 2 boules qui portent le même numéros et de couleurs différentes"
$\text{Card}(A \cap B) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$ $\{R_2, V_2\}$.
Donc : $P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{18}{66}$
D'où : $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$

0.5 pt **b)** On a : $P(A) \times P(B) = \frac{13}{22} \times \frac{6}{11} \neq \frac{3}{11}$, donc : $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$
D'où les événements A et B ne sont pas indépendants.

0.5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculons la probabilité de tirer deux boules qui portent le même nombre :
l'événement "Sachant que B est réalisé ; obtenir deux boules qui portent le même numéro " c'est l'evenement A sachant B ; Calculons $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{1}{2}$$

Donc $P_B(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 4 : (2 pts)

1 - a) (0.5 pt) Montrons que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$:
On a h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$,d'autre part :$H'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ Donc la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

b) (0.5 pt) Déduisons que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$:
On a :

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = e$$

donc

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$$

2 - (1 pt) A l'aide d'une intégration par partie, Calculons $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$:
On pose :
$u(x) = x^2+2x-1 \quad u'(x) = 2x+2$

$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx &= \left[(x^2+2x-1)\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx \\ &= (1^2+2-1)\,e^1 - (0^2+0-1)\,e^0 - 2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2e \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx = 1$$

Exercice 5 : (9 pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$, et son tableau de variation ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0,25 pt **1 -** Calculons $g(1)$:
On a : $g(1) = 1^3 - 1 - 2\ln^2 1 + 2\ln 1 = 0$

0,5 pt **2 -** Déterminons le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$:
D'après le tableau de variation de g; la fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et comme on a $g(1) = 0$ alors on a :
$(\forall x \in]0;1]) \Longrightarrow \quad x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \leq 0$, et $(\forall x \in [1;+\infty[) \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow g(x) \geq 0$.

Partie II

f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

0,5 pt **1 - a)** Vérifions que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = 0\right)$

b) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au
0,5 pt voisinage $+\infty$:

On a : $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right) = 0$

D'où la droite (D) d'équation : $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$.

0,25 pt **c)** Déterminons la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$:
Étudions le signe de $\left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right]$:

$$\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) > 0 \quad (\forall x \in]0;+\infty[)$$

On en déduit que la courbe(C) est au-dessus de la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interprétons le résultat géométriquement :

On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty\right)$

Interprétation géométrique

La courbe(C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

1 pt **3 - a)** Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)'$

$= 1 - \frac{4x}{(2x^2)^2} + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)$

$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{4x^3} + 2\frac{\frac{1}{x}\times x - lnx}{x^2} \times \frac{lnx}{x}$

$= \frac{x^3-1}{x^3} + \frac{2(1-\ln x)\times \ln x}{x^3}$

$= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

0.5 pt **b)** Montrons que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

D'après la question Partie I-2- on a :

— $(\forall x \in]0;1]) \quad g(x) \leq 0 \quad$ Donc : $f'(x) \leq 0$.

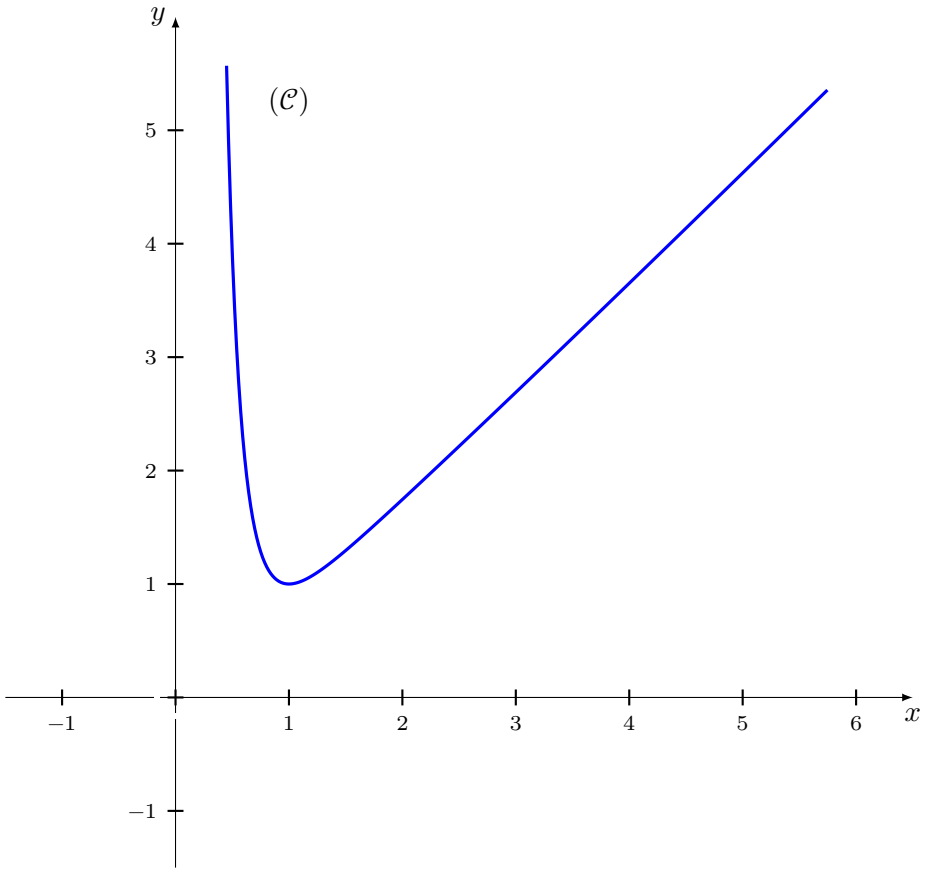
— $(\forall x \in [1;+\infty[) \quad g(x) \geq 0$ Donc $f'(x) \geq 0$.

D'où la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

1 pt **4 -** Construisons de la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité de mesure est 1 cm)



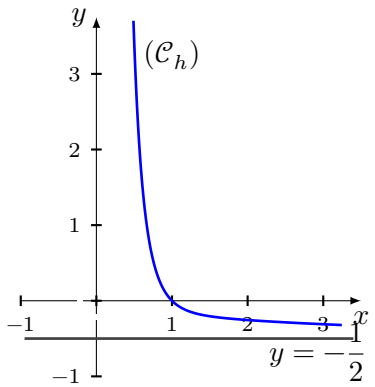
Partie III

la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifions que $h(1) = 0$:
On a : $h(1) = f(1) - 1 = 0 \quad (f(1) = 1)$

0,75 pt **b)** Déterminons le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, puis déduisons que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$:
D'après le graphique ci-dessous (C_h) est la courbe de la fonction h.



— $h(x) \geq 0$ sur l' intervalle $]0,1]$.
— $h(x) \leq 0$ sur l' intervalle $[1,+\infty[$.
On en déduit que pour tout x dans l'intervalle $[1,+\infty[$ on a : $f(x) \leq x$.

2 - La suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

0,75 pt **a)** Montrons par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n :

— Initialisation :
Pour $n = 0$ On $a : 1 \leq U_0 = e \leq e$ Donc la propriété est vraie pour est vraie pour $n = 0$.
— Hérédité :
Soit $n \in IN$, Supposons que : $1 \leq U_n \leq$ e et montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq e$
On $a : 1 \leq U_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ alors :

$$1 \leq U_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$$
$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e \qquad \forall x \in [1, +\infty[f(x) \leq x$$

Donc : $0 \leq U_{n+1} \leq e$
— Conclusion
On a montré par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

0.75 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante

(D'après la question Partie III-1-b))on $a : h(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.
Et comme $1 \leq U_n \leq e$; alors : $h(U_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$
Donc : $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} \leq U_n$
D'où la suite (U_n) est décroissante

0.75 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite .

La suite (U_n) est minorée par 1 et décroissante donc elle est convergente.
On a :

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([1;e]) \subset [1;e] \\ f \text{ est continue sur } [1;e] \\ U_0 \in [1;e] \\ (U_n) \text{ est convergente} \\ \text{si } \lim_{n\to+\infty} U_n = l \text{ alors l est solution de l'équation } f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0. \end{cases}$$

D'après le graphique de h, $x = 1$ est la seule solution d'où : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

FIN

Exercice 1 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

0,75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

0,5 pt **b)** En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$

0,75 pt Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$.

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3 - On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

0,5 pt Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}az$

4 - Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $h = ip$

0,5 pt **b)** Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noir indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : ≪ **Obtenir trois boules vertes** ≫

B : ≪ **Obtenir trois boules de même couleur** ≫

C : ≪ **Obtenir au moins deux boules de même couleur** ≫

2 pt **1 -** Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{120}$ et $P(B) = \dfrac{7}{40}$

1pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2019 — 11 Pts

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité:1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0,5 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 pt **c)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

0,75 pt **d)** Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$

et pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$

1 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0,5 pt **b)** En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1pt **b)** Construire (Δ) et (C) dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H: x\mapsto x\ln x-x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

0,5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

0,5 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,75 pt **2 -** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2019

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

0.75 pt

1 - a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2+1\\1+1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\-2+1\\0+1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

D'où :

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1+2)\,\vec{i}-(-1+0)\,\vec{j}+(1+0)\,\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

0.5 pt

b) Le vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc l'équation du plan (ABC) est de la forme : $x+y+z+d=0$.

Le point $A(1,-1,-1)$ appartienne au plan (ABC) donc : $1-1-1+d=0$ d'où $d=1$.

0.75 pt

Conclusion : $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - On considère la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$.

on vérifie que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=\sqrt{5}$

on a :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0\Leftrightarrow\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}-1+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow(\mathrm{x}-2)^2-4+(\mathrm{y}+1)^2-1+(\mathrm{z}-1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow(\mathrm{x}-2)^2+(\mathrm{y}+1)^2+(\mathrm{z}-1)^2=5=\sqrt{5}^2$$

La dernière écriture représente l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2,-1,1)$ et de rayon $\mathbf{R=\sqrt{5}}$

0.5 pt **Conclusion :** la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=\sqrt{5}$

3 - a) On a : $d(\Omega,(ABC))=\frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

on remplace $x+y+z+1$ (sans écrire $=0$) par les coordonnées de $\Omega(2,-1,1)$)

0.5 pt **Conclusion :** $d(\Omega,(\text{ABC}))=\sqrt{3}$

b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ)

Puisque le rayon du cercle est $R=\sqrt{5}$ et on a ; $d(\Omega,(\text{ABC}))=\sqrt{3}<\sqrt{5}$ d'où l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) sera un cercle (Γ).

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\mathrm{z}^2-2\mathrm{z}+4=0$.

On calcule :le discriminant Δ : On a : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$.

D'où l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times1}=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}\text{ ou }z_2=\bar{z}_1=1-i\sqrt{3}$$

0.5 pt **Conclusion :** ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$

2 - a) On a

$$c-d=\sqrt{3}+i-(-2+2\sqrt{3})=-\sqrt{3}+2+i$$

$$a-d=1-i\sqrt{3}-(-2+2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}=-\sqrt{3}(\underbrace{-\sqrt{3}+2+i}_{c-d})=-\sqrt{3}(c-d)$$

donc $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

Conclusion : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

0.25 pt **b)** On a :

- Le vecteur $\overrightarrow{DA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DA}}=a-d$.
- Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DC}}=c-d$

$$\mathbf{a-d=-\sqrt{3}(c-d)}\Leftrightarrow\mathbf{z_{\overrightarrow{DA}}=-\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}}}$$
$$\Leftrightarrow\mathbf{\overrightarrow{DA}=-\sqrt{3}\overrightarrow{DC}}$$

Par suite les deux vecteurs $\overrightarrow{\text{DA}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$ sont colinéaires donc les points A et C et D sont alignés .

0.5 pt **Conclusion :** les points A , C et D sont alignés .

3 - L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z'-\omega=(z-\omega)\mathrm{e}^{i\theta}$ avec ω est l'affixe

du centre de la rotation et θ est l'angle de la rotation.

D'où : $z' - 0 = (z-0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{z'} &= z \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\
&= z \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= z\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{2}az \quad ;(\text{car} : 1 - i\sqrt{3} = a)
\end{aligned}$$

0.5 pt

4 - a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R(B) = H} &\Leftrightarrow \mathbf{h} = \frac{1}{2}\mathbf{ab} \\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i) \\
&\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\
&\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3}) \\
&\Leftrightarrow h = i(-i - \sqrt{3}) + i(\underbrace{1 - i\sqrt{3}}_{-c}) \\
&\Leftrightarrow h = i(a - c) \\
&\Leftrightarrow h = ip
\end{aligned}$$

0.5 pt

D'où : h= ip

b) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i \Rightarrow &\begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ \overrightarrow{(OP, OH)} \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right)[2\pi] \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \frac{\text{OH}}{\text{OP}} = 1 \\ \overrightarrow{(OP, \text{OH})} \equiv \arg(\text{i})[2\pi]; \left(\frac{\text{h}}{\text{p}} = \text{i}\right) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \text{OH} = \text{OP} \\ \overrightarrow{(OP, OH)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc on a :

- OH = OP d'où le triangle OHP est isocèle en O.
- $\overrightarrow{(\text{OP}, \text{OH})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où le triangle OHP est rectangle en O.

Conclusion : le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 : (3 pts)

2 pt

1 - ▷ On calcule card Ω : (ou encore le nombre des tirages possibles).

Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 10 ,.

d'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 10 ce nombre est :

$$\text{card}\,\Omega = C_{10}^3 = \frac{10\times9\times8}{1\times2\times3} = 120.$$

$$\text{donc : } \text{card}\,\Omega = C_{10}^3 = 120.$$

On calcule cardA : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A).

l'événement A « les 3 boules tirées sont vertes » Tirées 3 boules vertes simultanément parmi 3 boules vertes de l'urne ceci présente une combinaison de 3 parmi 3 .

Donc le nombre des tirages qui réalisent l'événement A est $C_3^3 = \frac{3\times2\times1}{1\times2\times3} = 1$

donc : $\text{card A} = \text{C}_3^3 = 1$

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{cordO}} = \frac{C_3^3}{C^3} = \frac{1}{120}$.

▷ On calcule cardB : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B).

l'événement B «les 3 boules tirées sont de même couleur»

ou encore l'événement B est B «les 3 boules tirées sont vertes ou les boules sont rouges ».

• les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne on a :

$$\text{cardA} = C_3^3 = 1$$

• les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 6 boules rouges de l'urne on a :

$$C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

D'où : $\text{cardB} = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

donc : $p(B) = \frac{\text{cardB}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7\times\not{3}}{\not{3}\times40} = \frac{7}{40}$.

Conclusion : $p(B) = \frac{7}{40}$

1 pt

2 - On calcule cardC : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C) .

C « au moins deux boules de même couleur »

ou encore C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

L'événement contraire de l'événement C est l'événement $\overline{\mathbf{C}}$

$\overline{\text{C}}$ « les trois boules de couleurs différentes »

Donc : $\text{card}\,\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3\times6\times1 = 18.$

Par suite $\text{card}\,\text{C} = \text{card}\,\Omega - \text{card}\,\bar{C} = 120 - 18 = 102.$

Donc :

$$p(C) = \frac{\text{cardC}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{card}\,\Omega - \text{card}\,\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120-18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6\times 17}{6\times 20} = \frac{17}{20}$$

Conclusion : $p(C) = \frac{17}{20}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

0.5 pt

1 - On calcule : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. On a :

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$= \text{ D'où : } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty.$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

On interprète le résultat géométriquement :

Puisque on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $\mathbf{x = 0}$.

0.25 pt

2 - a) On a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

0.5 pt

Conclusion : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x = +\infty$.

0.5 pt

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x\right) = +\infty$.

c) On a :

$$\begin{aligned}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{(\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}; (\ln x^r = r\ln x; r\in\mathbb{Q})\\ &= \frac{4(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}\\ &= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2; (t=\sqrt{x}; x\to+\infty; t\to+\infty)\\ &= 0 \quad ; \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0\right)\end{aligned}$$

0.75 pt Conclusion : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d) $\triangleright \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x} = 1.$

$\left(\text{ car } \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0\right)$

D'où : $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$.

$\triangleright \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x - x = +\infty \quad (\text{car} : \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty)$

donc $b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$

Par suite :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ et $b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$.

Conclusion : (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation x=y

0.5 pt

3 - a) $\triangleright$ Montrons que : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$

On a : $0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)+\ln x \leq 0$ (car la somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif)

Donc : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$

▷ Montrons pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$.

On a : $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)+\ln x \leq 0$ (car la somme de deux nombres positifs est un nombre positif)

Donc : pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$.

Conclusion : $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de }]0,1] : (x-1)+\ln x \leq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [1,+\infty[: (x-1)+\ln x \geq 0 \end{cases}$

1 pt

b) Pour tout x de $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2)' \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

0.5 pt

4 - a) Pour tout x de $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\frac{x-1+\ln x}{x})' \\ &= \frac{(1+\frac{1}{x})\times x-(x-1+\ln x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

0.5 pt

b) Le singe de f'' dépend du singe de $2-\ln x$.

• On a : $2-\ln x = 0 \Leftrightarrow ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

Alors f'' s'annule en e^2

• Et on a : $2-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

Alors f''est positive sur $]0,e^2[$

• Et on a : $2-\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$

Alors f''est négative sur $]e^2,+\infty$

D'où le singe de f'' est donné par le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$\triangleright$ On déduit que la fonction f'' s'annule et change le singe en e^2,

alors (C) admet un point d'inflexion de coordonnées $(e^2, f(e^2))$ avec $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2}$ **0.5 pt**

5 - a) On a : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$, alors

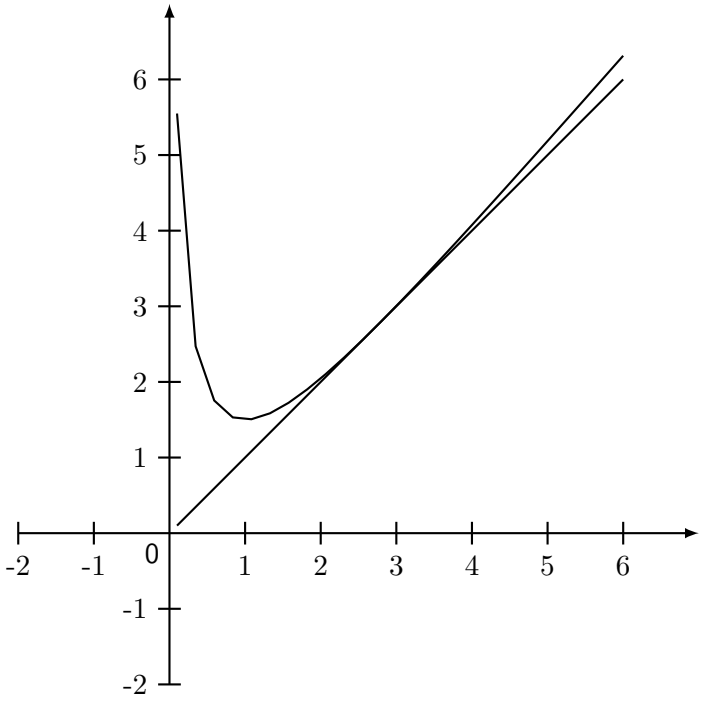
$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2\ln x + (\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \end{aligned}$$

On étudie le singe de $f(x) - x$.

Puisque $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$,

Alors (C) se trouve au dessus de (Δ) sur $]0, +\infty[$. **1 pt**

b) Construire (C) et (Δ) dans le même repère.



0.5 pt

6 - a) • Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, donc la fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x\ln x - x)' \\ &= x' \times \ln x + x \times (\ln x)' - 1 \\ &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

0.75 pt

b) On pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x}{x} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \int_1^e v(x) \times u'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_1^e - \int_1^e u(x) \times v'(x)dx \\ &= [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)dx \\ &= [x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \ln x dx \\ &= e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2[x\ln x - x]_1^e \\ &= e - 0 - 2(e\ln e - e - 1\ln 1 + 1] \\ &= e - 0 - 2(e\ln e - e - 1\ln 1 + 1] \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

0.5 pt

c) On a $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$, et on a : $(\Delta) : y = x$.

Puisque $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé d'unité 1 cm, alors $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm, donc l'unité d'aire est $u \cdot a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1$ cm^2.

L'aire cherchée est : $\mathcal{A} = \left(\int_1^e |f(x) - x|dx\right) \times 1$ cm^2

On sait d'après la question 5)a) que $f(x) - x$ est positif sur $]0;+\infty[$ ((C) est au dessous de (D) sur $]0;+\infty[$).

Alors pour tout $x \in [1,e]$: $|f(x)-x| = f(x)-x$ Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left(\int_1^e f(x)-x dx\right) \times 1 \text{ cm}^2 \\
&= \left(\int_1^e x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx\right) \text{cm}^2 \\
&= \left[\frac{x}{2}\right]_1^e - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)\text{cm}^2 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - (e\ln e - e - 1\ln 1 + 1) + \frac{e}{2} - 1 \text{ cm}^2 \\
&= e - \frac{3}{2} - (e - e - 0 + 1)\text{cm}^2 \\
&= e - \frac{3}{2} - 1 \text{ cm}^2 \\
&= (e - \frac{5}{2}) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Partie II

0.5 pt

1 - a) $\triangleright$ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$, et $1 \leqslant 1 \leqslant e$.

Alors la propriété est vraie pour $n = 0$

$\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leqslant u_n \leqslant e$,

et on montre que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e$

On sait que d'après la question I) 3)c) que f est croissante sur $[1;+\infty[$, donc elle croissante sur $[1;e]$

Et par suite, en utilisant l'hypothèse de **récurrence** :

$$\begin{aligned}
1 \leqslant u_n \leqslant e &\Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(e) \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant e \\
&\Rightarrow 1 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant e
\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant e$$

0.5 pt

b) On sait d'après la question I)5)a) que $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) - x \geqslant 0$

Alors en particulier : $\forall x \in [1;e] : f(x) \geqslant x$ $(*)$

D'autre part on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant e$

c-à-d : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [1;e]$

Alors tous les termes de la suite (u_n) vérifient aussi la relation $(^*)$. Ce qui donne

$$f(u_n) \geqslant u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

0.5 pt

c-à-d : $u_{n+1} \geqslant u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.75 pt

c) On a (u_n) est une suite **croissante et majorée** par e,alors elle est convergente.

2 - $\triangleright\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

$\triangleright$ La fonction f est continue sur $[1; e]$

$\triangleright\ f([1; e]) = [\frac{3}{2}; e] \subset [1; e]$

$\triangleright$ La suite (u_n) est convergente

$\triangleright\ u_0 = 1 \in [1; e]$

Alors la limite de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ (dans l'intervalle $[1; e]$).

On a déjà montré que :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Alors : $\lim u_n = e$.

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$, et $C(1,1,3)$.

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,75 pt **2 -** Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

0,75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

0,5 pt **b)** On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.

0,5 pt **2 -** On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2 = i$

0,5 pt **3 -** On pose $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que $c = ib$.

0,25 pt **b)** En déduire la nature du triangle OBC.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur "

B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées "

C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées "

2 pts **1 -** Monter que $p(A) = \dfrac{1}{6}$ et $p(B) = \dfrac{8}{27}$

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 11 Pts

Partie I

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **b)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.25 pt **b)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2-2x+4>0$.

c) Monter que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$.

0.75 pt

0.5 pt **d)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5 - a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$.

0.5 pt

0.25 pt **b)** Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.5 pt **c)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^{x-4}\mathrm{d}x$

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

0.75 pt

Partie II

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

0.25 pt **a)** Calculer $g(4)$

0.5 pt **b)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $g(x) = -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

c) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4}-1 \leq 0$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x) \leq 0$

0.5 pt

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) - x = \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

0.25 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) \leq x$.

3 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Monter par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

0.75 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2019

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère direct $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les point $A(1,2,2); B(3,-1,6) et C(1,1,3)$

1 - a) On a : $\overrightarrow{AB}(3-1,-1-2,6-2), donc\vec{(}2,-3,4)$

Et on a : $\overrightarrow{AC}(1-1,1-2,3-2), donc\vec{(}0,-1,1)$

Alors : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=((-3)\times 1-(-1)\times 4)\vec{i}-(2\times 1-0\times 4)\vec{j}+(2\times(-1)-0\times(-3))\vec{k}$

$=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

b) On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$ est une vecteur normale du plan (ABC).

Donc l'équation cartésienne du plan (ABC)s'écrit :$x-2y-2z+d=0$

puisque $A\in(ABC)$.alors $x_A-2y_A-2z_A+d=0$,donc $(1-2\times 2-2\times 2+d=0)$ donc

$d=7$

d'où $(ABC): x-2y-2z+7=0$

2 - On a :$M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-x\\ 1-y\\ 4-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1-x\\ 1-y\\ 12-z\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(5-x)(-1-x)+(1-y)(1-y)+(4-z)(12-z)=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+(1-y)^2+z^2-16z+43=0$

$\Leftrightarrow(x^2-4x+4)+(y-1)^2+(z^2-16z+64)+43-4-64=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2+(z-8)=25$

Alors (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon : $R=\sqrt{25}=5$

3 - a) On a : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{1\times 2-2\times 1-2\times 8+7}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

b) On a : $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=5$ donc $d(\Omega,(ABC))<R$

Danc le plan coupe la sphère selon un cercle (Γ) de rayon r

d'où : $r=\sqrt{R^2-d(\Omega,(ABC))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

Exercice 2 : (3 pts)

1 - a) Le discriminant Δ de l'équation est : $\Delta=3^2-4\times 3=-3=(\sqrt{3}i)^2$.

Donc l'équation admet deux solution sont :
$z_1=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$ et $z_2=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

b) On a : $a=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}(cos(\dfrac{\pi}{6})+isin(\dfrac{\pi}{6}))$

2 - On a : $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,alors :

$b^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2(1+i)^2=\dfrac{2}{4}(1+2i-1)=\dfrac{1}{2}(2i)=i$

3 - On a :$h=cos(\dfrac{\pi}{12})+isin(\dfrac{\pi}{12})$ alors :

$h^4+1=cos(\dfrac{4\pi}{12})+isin(\dfrac{4\pi}{12})+1=cos(\dfrac{\pi}{3})+isin(\dfrac{\pi}{12})+1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$,on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Puisque le point $C(c)$est l'image du point $B(b)$ par la rotation R alors :

$z_c-z_o=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_O)$

$\Leftrightarrow c=(cos(\frac{\pi}{2})+isin(\frac{\pi}{2}))b$

$\Leftrightarrow c=(0+i)b$

$\Leftrightarrow c=ib$

b) on a :$c=ib$,donc $\dfrac{c}{b}=i$

alors $\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o}=[1;\frac{\pi}{2}]$,donc $|\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o}|=1 et arg(\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $OB=OC et(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

alors le triangle OBC est un triangle rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On a : $card(\Omega)=6^3=216; card(A)=1^3+2^3+3^3=36$

et $cad(B)=4^3=64$

Donc $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{36}{216}=\dfrac{1}{6}; p(A)=\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{64}{216}=\dfrac{8}{27}$

2 - On a : $card(C)=3\times(2^2\times 4^1)=48$, donc : $p(C)=\dfrac{card(C)}{card(\Omega)}=\dfrac{48}{216}=\dfrac{2}{9}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$f(x) = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2 e^{x-4}$
et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité $1cm$)

1 - a) On a : $lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x-2}{x} = 1$ et $lim_{x\longrightarrow-\infty}e^{x-4} = 0$ donc
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 + 8 \times 1^2 \times 0 = 2$
Donc la droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage $-\infty$

b) On a $\lim_{x\to0}(\frac{x-2}{x})^2 = +\infty$,
$lim_{x\to0}e^{x-4} = e^{-4}$, donc :
$\lim_{x\to0} f(x) = 2 + 8 \times (+\infty) \times e^{-4} = +\infty$
donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

2 - a) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty$,$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2+8\times1^2\times(+\infty) = +\infty$

b) On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et on a :
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}}{x}$
$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} + 8(\frac{x-2}{x})^2\frac{e^{x-4}}{x}$
$0+8\times1\times(+\infty) = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 - a) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :
$f' = 0 + 8 \times 2(\frac{x-(x-2)}{x^2})(\frac{x-2}{x})e^{x-4} + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}$
$= 8 \times 2 \times (\frac{2}{x^2})(\frac{x-2}{x}e^{x-4} + 8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}$
$= \frac{8(x-2)(2\times2+x(x-2))e^{x-4})}{x^3}$
$= \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4})}{x^3}$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3, or(x-1)^2 \geq 0$
alors $(x-1)^2+3 > 0$, d'où : $x^2-2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) On a pour tout x de $\mathbb{R}, x^2-2x+4 > 0$ et $e^{x-4} > 0, alors 8(x^2-2x+4)e^{x-4} > 0$, donc le signe de f' est le même que celui de $\frac{x-2}{x^3}$.

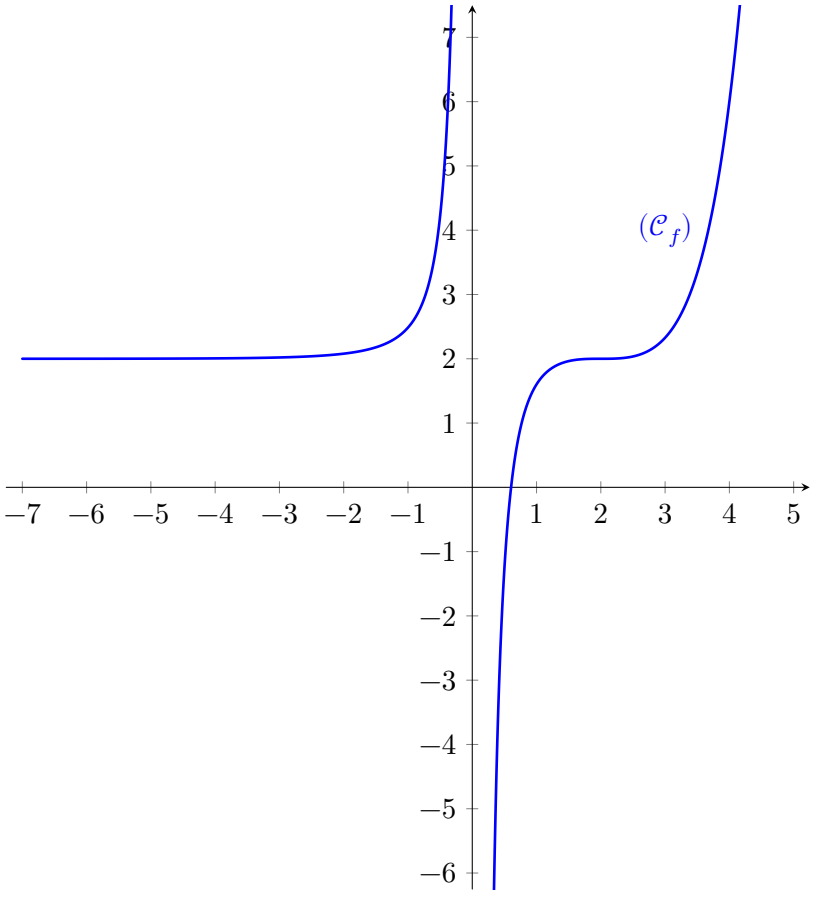
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x^3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc f est strictement décroissante sur $]0;2]$, et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[et[2;+\infty$.

d) Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f		$+\infty$ ↗	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	

4 - La courbe (C)



5 - a) On a H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors H est dérivable sur $[2;4]$,alors :

$H'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} = (\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x})e^{x-4}$

$\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} = h(x)$

Donc la fonction H est une primitive de la fonction f sur $[2;4]$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$f(x) = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4} = 2 + 8(\frac{x^2-4x+4}{x^2})e^{x-4}$

$2 + 8(1 - 4(\frac{x-1}{x^2}))e^{x-4} = 2 + 8e^{x-4} - 32(\frac{x-1}{x^2})e^{x-4}$

c) On a : $\int_2^4 e^{x-4}dx = [e^{x-4}]_2^4 = e^0 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2-1}{e^2}$

d) L'aire du domaine plan limité par (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est :

$A = \int_2^4 |f(x)|dx = \int_2^4 f(x)dx$; car $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geqslant 0$.

$A = \int_2^4 2 + 8e^{x-4} - 32(\frac{x-1}{x^2})e^{x-4}dx = 2\int_2^4 dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 h(x)dx$

$A = 2[x]_2^4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32[H(x)]_2^4$

$A = 2(4-2) + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4}e^{4-4} - \frac{1}{2}e^{2-4})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{e^2-2}{4e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 8(\frac{e^2-2}{e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1-e^2+2}{e^2})$

$A = 4 + \frac{8}{e^2}$

Partie II

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2;4]$ par :

$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.

a) On a : $g(4) = 8(4-2)e^{4-4} - 4^2 = 16 - 16 = 0$

b) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2 = -(x^2 - 8x - 16)e^{x-4} - x^2 + x^2e^{x-4}$

$= -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$

c) Si $2 \leqslant x \leqslant 4$, alors $2 - 4 \leqslant x - 4 \leqslant 4 - 4$, alors $-2 \leqslant x - 4 \leqslant 0$ alors $e^{-2} \leqslant e^{x-4} \leqslant e^0$, donc $e^{x-4} \leqslant 1$, d'où $e^{x-4} - 1 \leqslant 0, \forall x \in [2;4]$

Pour tout x de $[2;4]$, on a : $e^{x-4} - 1 > 0$ et $e^{x-4} > 0$ donc $-(x-1)^2e^{x-4} \leqslant 0$ et $x^2(e^{x-4} - 1) \leqslant 0$, donc $-(x-1)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1) \leqslant 0$, d'où $g(x) \geqslant 0, \forall x \in [2;4]$

2 - a) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$f(x) - x = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4} - x$

$$= (\frac{x-2}{x^2})(\frac{2x^2}{x-2} + 8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3-2x^2}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^2(x-2)}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - x^2)$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})g(x).$$

b) Pour x de $[2;4]$, on a $x-2 \geqslant 0$; donc $\frac{x-2}{x^2} \geqslant 0$, or $g(x) \leqslant 0$, alors $\frac{x-2}{x^2}g(x) \leqslant 0$ donc $f(x) - x \leqslant 0$, d'où :$f(x) \leqslant x; \forall x \in [2;4]$

3 - Soit $(Un)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = f(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pour $n = 0$, on a :$U_0 = 3$, donc $2 \leqslant U_0 \leqslant 4$

Supposons que : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, et en montrons que :$2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

On a : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, donc $2 \leqslant f(U_n) \leqslant 4$ car f et continue et croissante sur $[2;4]$. donc $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$, car $f(2) = 2$ et $f(4) = 4$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence :

$2 \leqslant U_n \leqslant 4 \ \forall n \in [2;4]$.

b) d'après la question 2)b), on a :$\forall x \in [2;4] : f(x) = -x = 0$, et puisque : $U_n \in [2;4]$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$(f(U_n) - U_n \leqslant 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} \leqslant U_n$

donc la suite (U_n) est décroissante. et puisque la suite (U_n) est décroissante et minoré par 2 alors (U_n) est convergente

c) La fonction f est continue et croissante sur $[2;4]$, donc $f([2;4]) = [f(2); f(4)] = [2;4]$ alors $f([2;4]) \subset [2;4]$, or $U_0 \in [2;4]$, et puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la limite de suite (U_n) est le nombre réel l la solution $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow f(l) - l = 0$
$\Leftrightarrow (\frac{l-2}{l^2})g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l - 2 = 0$ ou $g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l = 2$ ou $l = 4$

puisque la suite (U_n) est décroissante, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_n < U_0$ donc $U_n < 3$

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2020 — 4 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **1 -** Calculer u_1.

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$,

puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4 - On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **b)** Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 — Session : NORMAL 2020 — 5 Pts

1 - Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

0,5 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

1 pt **b)** En déduire les solutions de l'equation (E) .

2 - Soient les nombres complexes :

$$a = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

0,75 pt **a)** Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

0,5 pt **b)** Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique..

0,5 pt **c)** En déduire que : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$.

0,25 pt **b)** Déterminer l'image du point C par la rotation R .

0,25 pt **c)** Déterminer la nature du triangle OBC.

0,75 pt **d)** Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés .

Exercice 3 — Session : NORMAL 2020 — 4 Pts

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est croissante sur $[1; +\infty[$.

0,5 pt **c)** En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$).

1 pt **d)** Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que la fonction : $G : x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **b)** Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x)dx$.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2020 — 7 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

0,5 pt **2 - a)** Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) **0,75 pt** sur l'intervalle $]-\infty; 2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$.

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,75 pt **5 -** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C).

0,5 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$.

1 pt **7 -** Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous (on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$).

0,5 pt **8 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère).

0,5 pt **c)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3) = 2+\ln 3$).

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2020

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (4 pts)

0.25 pt **1 -** On a : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n + 5}$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0}{2u_0 + 5}, \\ &= \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

0.5 pt **2 -** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$

On a $u_0 = \dfrac{3}{2} > 0$

Donc la proposition est vrai pour $n = 0$.

Supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$

montrons que : $u_{n+1} > 0$

On a :

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Longrightarrow 2u_n > 0 et 2u_n + 5 > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0 \\ &\Longrightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Donc d'après le raisonnement par récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$

1 pt **3 - a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5} u_n$

On a d'après la question présidente $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$

Donc $u_{n+1} > 0$

Et on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n &= \frac{2u_n}{2u_n+5} - \frac{2}{5}u_n \\ &= \frac{10u_n - 2u_n(2u_n+5)}{5(2u_n+5)} \\ &= \frac{-4u_n^2 - 10u_n + 10u_n}{10u_n+25} \\ &= \frac{-4u_n^2}{10u_n+25} \leq 0 \end{aligned}$$

Alors $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

0.5 pt **b)** — Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

Pour : $n = 0$ on a : $0 < u_1 \leq \frac{2}{5}u_0$

Pour : $n = 1$ on a : $0 < u_2 \leq \frac{2}{5}u_1$

Pour : $n = 2$ on a : $0 < u_3 \leq \frac{2}{5}u_2$

.....

.....

.....

Pour : $n-1$ on a : $0 < u_n \leq \frac{2}{5}u_{n-1}$

On fait la multiplication coté par coté et on obtient :

$0 < u_1 \times u_2 \times ... \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$

$0 < \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times ... \times \cancel{u_{n-1}} \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \times \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times ... \times \cancel{u_{n-1}}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

— On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad \left(car : -1 < \frac{2}{5} < 1\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

0.75 pt **4 - a)** Montrons que : $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

On a : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\ &= \frac{4\times\dfrac{2u_n}{2u_n+5}}{2\times\dfrac{2u_n}{2u_n+5}+3} \\ &= \frac{\dfrac{8u_n}{\cancel{2u_n+5}}}{\dfrac{4u_n+6u_n+15}{\cancel{2u_n+5}}} \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{4u_n}{10u_n+15} \\ &= \frac{2}{5}\times u_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **b)** On a : $v_0 = \dfrac{4u_0}{2u_0+3} = 1$

On a : $(v_n)_n$ suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Exercice 2 : (5 pts)

0.5 pt **1 - a)** On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2 - 4\times 1\times 16 \\ &= 4(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - 64 \\ &= 4(8+4\sqrt{3}) - 64 \\ &= 16\sqrt{3} - 32 \\ &= -4(6-4\sqrt{3}+2) \\ &= -4(8-4\sqrt{3}) \\ &= -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 < 0 \end{aligned}$$

1 pt **b)** L'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6}) - 2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} - i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

Et

$$z_2 = \bar{z_1}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

0.75 pt **2 - a)** On a :

$$b\bar{c} = (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$= a$$

D'où $b\bar{c} = a$

On a :

$$b\bar{c} = a \implies b\bar{c}c = ac$$
$$\implies ac = b|c|^2$$
$$\implies ac = b\left(\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2\right)$$
$$\implies ac = 4b$$

0.5 pt **b)** On a :

$$b = 1 + i\sqrt{3}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Et

$$c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

0.5 pt **c)** On a : $c = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\bar{c} = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

Et on a :

$$\begin{aligned} a &= b\bar{c} \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \end{aligned}$$

0.5 pt **3 - a)** On a :

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\iff z' - z_o = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \\ &\iff z' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) z \end{aligned}$$

On a : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{4}a$

D'où $R(M) = M' \iff z' = \frac{1}{4}az$

0.25 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{4}a \times c \\ &= \frac{1}{4} \times 4b \quad \text{(d'après la question 2-a, on a ac=4b)} \\ &= b \end{aligned}$$

D'où B est l'image de C par la rotation R.

c) On a :

$$\begin{aligned} R(C) = B &\iff \frac{b - z_o}{c - z_o} = e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &\iff \left|\frac{b - z_o}{c - z_o}\right| = 1 \; et \; Arg\left(\frac{b - z_o}{c - z_o}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \\ &\iff BO = CO \; et \; Arg\left(\frac{b - z_o}{c - z_o}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc OBC est triangle isocèle en O.

0.75 pt **d)** — On a : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc

$$\begin{aligned} a^4 &= 4^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^4 \\ &= 256\left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 128(1+i\sqrt{3}) \\ &= 128b \end{aligned}$$

— On a :

$$\frac{a^4}{b}=128 \Longrightarrow \frac{d-z_o}{b-z_o}=128\in\mathbb{R}$$

D'où D, B et O sont alignés.

Exercice 3 : (4 pts)

0.5 pt **1 - a)** On a g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc pour touts x de $]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}-\frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x} \end{aligned}$$

0.5 pt **b)** On a : $(\forall x\in[1,+\infty[)$

$$\begin{aligned} x\geq 1 &\Longrightarrow \sqrt{x}\geq 1 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x}-1\geq 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x}\geq 0 \end{aligned}$$

D'où $(\forall x\in[1,+\infty[)\,,\ g'(x)\geq 0$

Donc g est croissante sur $]0,+\infty[$

0.5 pt **c)** Pour touts $x\in[1,+\infty[$, on a $x\geq 1\Longrightarrow \ln x\geq 0$

Comme g est croissante sur $[1,+\infty[$, donc $g(x)\geq g(1)=0$

D'où $2\sqrt{x}-2-\ln(x)\geq 0\Longrightarrow \ln(x)\leq 2(\sqrt{x}-1)\leq 2\sqrt{x}$

Donc $\forall x\in[1,+\infty[\,,\ 0\leq\ln(x)\leq 2\sqrt{x}$

1 pt **d)** On a : $\forall x\in[1,+\infty[$

$$0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} \implies 0 \leq \ln^3(x) \leq 8x\sqrt{x}$$
$$\implies 0 \leq \frac{\ln^3(x)}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$
$$\implies 0 \leq \frac{\ln^3(x)}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2} = 0$

2 - a) On a G est dérivable sur $]0,+\infty[$

0.75 pt Et $(\forall x \in]0,+\infty[)$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \\ &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1 \\ &= 2\sqrt{x - 2 - \ln(x)} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} \int_1^4 g(x)\,dx &= \left[x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)\right]_1^4 \\ &= 4\left(-1 + \frac{8}{3} - \ln(4)\right) - \left(-1 + \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{28}{3} - 3 - 4\ln 4 \end{aligned}$$

Problème : (7 pts)

0.5 pt **1 -** On a : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) \\ &= +\infty \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to-\infty} x - 2 = -\infty \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) \\ &= -\infty \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty) \end{aligned}$$

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-y &= \lim_{x\to-\infty} \cancel{x}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+\cancel{x}-\frac{5}{2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\\ &= 0 \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to-\infty} x-2=-\infty \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} e^{x-2}=0)\end{aligned}$$

D'où la droite (Δ) d'équation : $y=-x+\dfrac{5}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned}e^{x-2}-4=0 &\iff e^{x-2}=4\\ &\iff e^{x-2}=e^{\ln 4}\\ &\iff x-2=\ln 4\\ &\iff x=\ln 4+2\end{aligned}$$

On a : $f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

Donc le signe de $f(x)-y$ est l'opposé de $e^{x-2}-4$

Et on a :

x	$-\infty$		$2+\ln 4$		$+\infty$
$e^{x-2}-4$		$-$	0	$+$	

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4;+\infty[$.

0.5 pt **3 -** On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} -1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{x-2}}{x}\left(e^{x-2}-4\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} -1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{x-2}}{x-2}\times\frac{x-2}{x}\left(e^{x-2}-4\right)\end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-2}}{x-2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ (avec $t=x-2$)

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x=1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

Alors $(\mathcal{C}_f)$admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **4 - a)** On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) - \frac{1}{2}e^{x-2}\times e^{x-2} \\ &= -1 - \frac{1}{2}\left(e^{x-2}\right)^2 + 2e^{x-2} - \frac{1}{2}\left(e^{x-2}\right)^2 \\ &= -1 - \left(e^{x-2}\right)^2 + 2e^{x-2} \\ &= -\left(\left(e^{x-2}\right)^2 - 2e^{x-2} + 1\right) \\ &= -\left(e^{x-2}-1\right)^2 \end{aligned}$$

0.25 pt **b)** On a $f'(x) = -\left(e^{x-2}-1\right)^2 \leq 0$. D'où

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

0.75 pt **5 -** On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\left(e^{x-2}-1\right)^2\right)' \\ &= -2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \end{aligned}$$

Le signe de f'' est le signe opposé de $\left(e^{x-2}-1\right)$

Et on a :

$$\begin{aligned} e^{x-2}-1=0 &\implies e^{x-2}=1 \\ &= x-2=0 \\ &= x=2 \end{aligned}$$

Et

$$e^{x-2}-1>0 \implies x>2$$

D'où

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{x-2}-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

On f'' s'annule en 2 et elle change leur signe, alors $A(2,2)$ est le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

0.5 pt **6 -** On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[2+\ln 3; 2+\ln 4]$.

Et on a f est strictement décroissante sur $[2+\ln 3; 2+\ln 4]$.

Et on a :

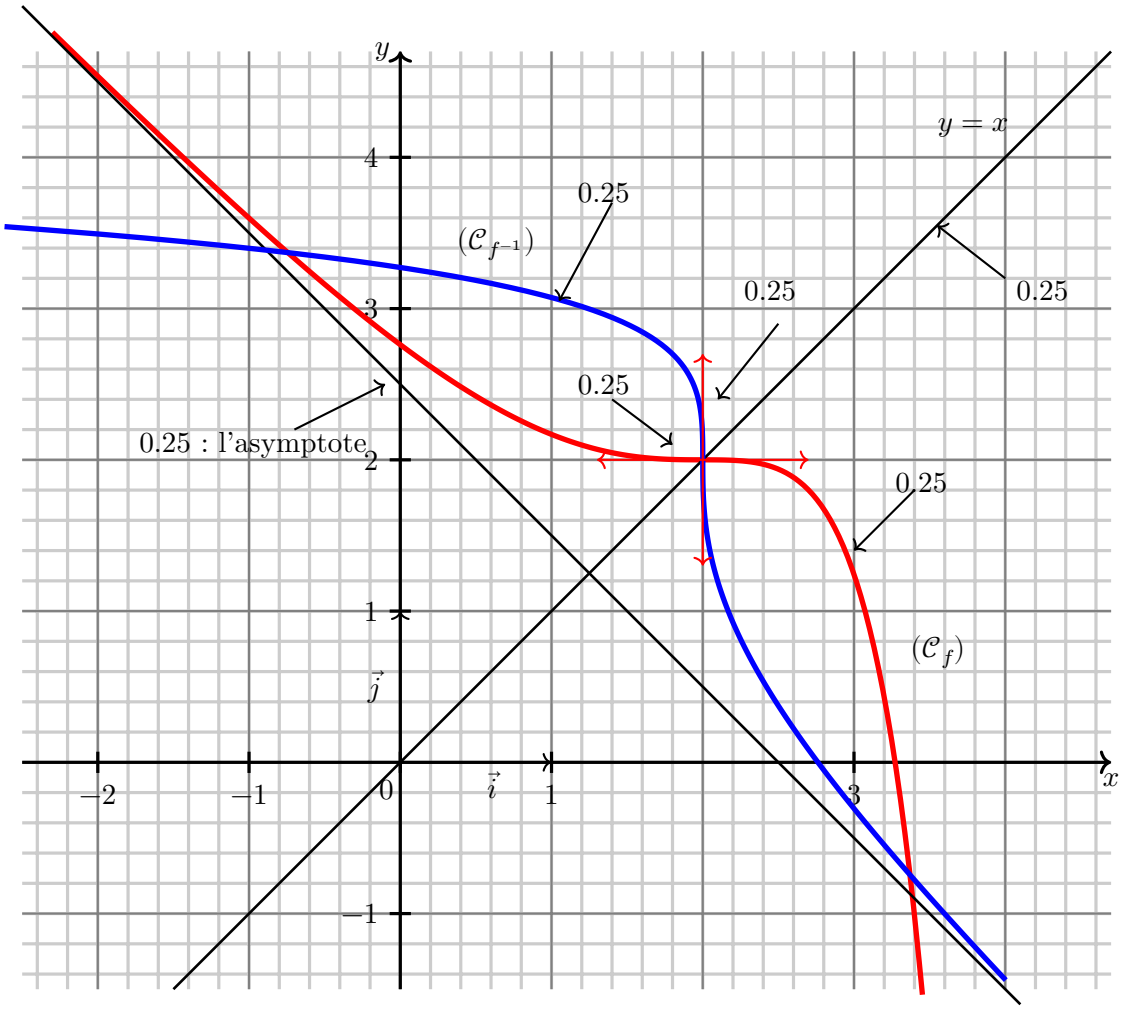
$$\begin{aligned} f(2+\ln 3) &= -2-\ln 3+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{\ln 3}(e^{\ln 3}-4) \\ &= -2-\ln 3+\frac{5}{2}+\frac{3}{2} \\ &= 2-\ln 3>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+\ln 4) &= -2-\ln 4+\frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}-\ln 4<0 \end{aligned}$$

D'où $f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)<0$

Donc d'après Théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α avec $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

7 -



0.5 pt **8 - a)** On a f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) La construction de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

0.5 pt **c)** On a :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2-\ln 3) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2-\ln 3)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(2+\ln 3)} \\ &= \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 2 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

0,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

0,75 pt **b)** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 5 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2 - On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

0,75 pt **a)** Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

0,5 pt **b)** Soit le nombre complexe $b = \cos(\frac{\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})$. Prouver que $b^2 = a$.

3 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

0,25 pt **a)** Vérifier que $z' = bz$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $|a - b| = |b - c|$ puis déduire la nature du triangle ABC.

0,5 pt **b)** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.

5 - Soit T la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ et D l'image de A par la translation T.

0,25 pt **a)** Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 4 Pts

On considère la fonction numérique $\mathcal{U}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{U}(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^2 + 2}{\mathrm{e}^x}$.

0,25 pt **b)** Poser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{U}$ (sans calcul de limite).

0,5 pt **c)** En déduire le signe de la fonction $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$ (**remarquer que** $\mathcal{U}(0) = 0$).

2 - Soit la fonction numérique $\mathcal{V}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3$.

0,5 pt **a)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^x\,\mathcal{U}(x)$.

0,5 pt **b)** En déduire le signe du fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction $\mathcal{W}$ définie par $\mathcal{W}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + (4 - 2x)\mathrm{e}^x - 3x$ est une primitive de la fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Calculer l'intégrale $\int_0^2 \mathcal{V}(x)\mathrm{d}x$.

0,75 pt **c)** Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 9 Pts

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{(1-x)} + \frac{1}{x} - 2$

0,5 pt **1 -** Monter que $g'(x) < 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **2 -** Déduire le tableau de variations de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (remarquer que $g(1) = 0$).

II - On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(1-x)} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

0,75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (on admet $f(2) \approx 1,25$)

0,5 pt **4 -** Sachant que $f(3) \approx 0,5$ et $f(4) \approx -1,9$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

1 pt **5 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III - On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de $[1;2]$.

0,5 pt **1 - a)** A partir du tableau de variations de la fonction h ci contre, montrer que $f(x) \leq x$, pour tout x de $[1;2]$.

0,25 pt **b)** Montre que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1;2]$.

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

2 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2020

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2 pts)

1 - Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$:

0.5 pt

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 < 2$, Donc proposition vraie pour $n = 0$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < 2$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2 \Rightarrow 2u_n - 5 < -1$ Donc $\frac{1}{2u_n-5} > -1$(Ce nombre est négatif)

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2 \Rightarrow 3u_n - 8 < -2$

$\forall n \in \mathbb{N}, -(3u_n - 8) > 2$

Donc $\frac{-(3u_n-8)}{2u_n-5} > -2$ Finalement $\frac{(3u_n-8)}{2u_n-5} < 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} < 2$

D'après le principe de récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

2 - a) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 : On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n-8}{2u_n-5} - 3}{\frac{3u_n-8}{2u_n-5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{-3u_n - 7}{-u_n + 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{2u_n - 4}{u_n - 2} = 2 \end{aligned}$$

Donc la suite v_n est arithmétique de raison 2.

0.75 pt

b) l'expression du terme générale de v_n : $v_n = v_0 + \times n = 2 + 2n$

Déduisons l'expression du terme générale de u_n :

on a $\frac{u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2 - 1}{u_n - 2} = 1 - \frac{1}{u_n - 2}$

Donc : $\dfrac{1}{u_n-2}=1-v_n \quad \Rightarrow \quad u_n-2=\dfrac{1}{1-v_n}$

$\Rightarrow u_n=2+\dfrac{1}{1-v_n}=2+\dfrac{1}{1-(2+2n)}=2-\dfrac{1}{1+2n}=\dfrac{1+4n}{1+2n}$

D'où : $u_n=\dfrac{1+4n}{1+2n}$

0.25 pt **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4n}{1+2n}=\dfrac{4}{2}=2$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

Exercice 2 : (5 pts)

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

On calcule $\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{2})^2-4\times1\times1=2-4=-2\leq0$

0.75 pt Donc : l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2=\overline{z_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2 - On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

a) Ecrivons a sous forme trigonométrique :

0.75 pt On a : $|a|=1$ Donc $a=1\left(\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

Déduisons que a^{2020} est un nombre réel :

On utilise la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} a^{2020}&=1^{2020}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2020} \\ &=1\left(\cos\left(\frac{2020\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2020\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &=\cos(505\pi)+\mathrm{i}\sin(505\pi) \\ &=\cos(505\pi)=-1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc : a^{2020} est un nombre réel

b) Prouvons que : $b^2=a$:

on a $b^2=\left(\cos(\frac{\pi}{8})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})\right)^2$

0.5 pt (Formule de Moivre) $\Rightarrow \quad b^2=\left(\cos(\frac{2\pi}{8})+\mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{8})\right)=\left(\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right)=a$

Donc : $b^2=a$

3 - a) Vérifions que $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}z=bz$:

0.25 pt On a $z'-\omega=(z-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ Avec $\omega=0$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{8}} z = bz$

b) - Déterminons l'image de C par la rotation R :

L'image de C par la rotation R est $z' = bc = b$

0.5 pt Donc l'image de C par R est B.

- Montrons que A est l'image de B par R :

On a l'image de B par R est $z' = bb = b^2 = a$ (D'après question 2-b)).

0.5 pt Donc A est l'image de B par R.

4 - a) Montrons que $|a-b| = |b-c|$ et déduisons la natrue du tiangle ABC :

on a :

$$\begin{aligned} |a-b| &= |b(b-1)| \\ &= |b||(b-1)| \\ &= |b-1| \\ &= |b-c| \quad \text{(Puisque c=1)} \end{aligned}$$

Donc : $|a-b| = |b-c|$

0.75 pt Alors, le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

b) Déterminons une mesure de l'angle$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$:

On a :

$$\begin{aligned} \arg((\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})) &= \arg(\frac{a-b}{b-c}) \\ &= \arg(\frac{b(b-1)}{b-1}) \\ &= \arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi]$

5 - a) Vérifions que l'affixe de D est b^2+1 :

On a $z' = z + u$ avec u l'affixe du vecteur $\vec{u}$

Donc $z' = z + 1$

Ceci implique que $d = a + 1 = b^2 + 1$

0.25 pt Alors : $d = b^2 + 1$

b) Montrons que $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$ et déduisons que les points D et O et B sont alignés :

On a : $\frac{b^2+1}{b} = b + \frac{1}{b} = b + \frac{\overline{b}}{b\overline{b}} = b + \overline{b}$

D'où : $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$

Puisque : $\dfrac{b^2+1-0}{b-0} = \dfrac{d-0}{b-0} = b+\overline{b} = 2\Re(b) \in \mathbb{R}$

0.75 pt

Donc les points D et O et B sont alignés.

Exercice 3 : (4 pts)

1 - a) Motrons que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x}$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) &= (\mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x})' \\ &= \mathrm{e}^x - 2 + 3\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x + 1 + 2}{\mathrm{e}^x}\end{aligned}$$

0.5 pt

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x}$

b) Posons le tableau de variation de la fonction u :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x} > 0$

- Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt

c) Déduisons le signe de la fonction u :

- Pour $x \in]-\infty;0]$, $x \leq 0$;

Puisque u est croissante sur $]-\infty;0]$ $\iff$ $u(x) \leq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in]-\infty;0]\, x \leq 0\ ,\ u(x) \leq 0$$

- Pour $x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$;

Puisque u est croissante sur $[0;+\infty[$ $\iff$ $u(x) \geq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in [0;+\infty[\, , x \geq 0\ ,\ u(x) \geq 0$$

- Tableau de signe de la fonction u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

2 - a) Vérifions que : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ V(x) &= \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \mathrm{e}^x u(x)\end{aligned}$$

D'où : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$

0.5 pt

b) Duiduisons le signe de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{e}^x > x$, donc le signe de $V(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$V(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

3 - a) Montrons que la fonction W est une prémitive de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

- On calcul la dérivé de $W(x)$

$$\begin{aligned}W'(x) &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + (4-2x)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3x\right)'\\ &= \frac{1}{2}\times 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^(x) - 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3 = V(x)\end{aligned}$$

D'où : $W(x)$ est une primitive de $V(x)$ sur $\mathbb{R}$

0.5 pt

b) Calculons l'intérgrale : $\displaystyle\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x$:

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x &= [W(x)]_0^2\\ &= W(2) - W(0)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + (4-4)\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - 6 - \left(\frac{1}{2} + 4\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}$

0.5 pt

c) Montrons que $\dfrac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$:

On a la dérivé de la fonction W s'annule en $x = 0$ $(V(0) = 0)$

Donc la fonction $W(x)$ admet un extremum en point $x = 0$.

Calculons $W''(x)$:

On a : $W''(x) = (W'(x))' = V'(x) = \mathrm{e}^x u(x) + \mathrm{e}^x u'(x)$

Donc : $W''(x)$ est positif en $x = 0$

0.75 pt

D'où le point $(0, W(0) = \frac{9}{2})$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 : (9 pts)

Partie I

1 - Montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) < 0$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) &= (\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2)' \\ &= -\mathrm{e}^{1-x} - \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1}{x^2}\end{aligned}$$

et $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $-\dfrac{x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1}{x^2} < 0$

Alors : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) < 0$

0.5 pt

2 - Déduisons le tableau de signe de $g(x)$:

0.5 pt

- Pour $x \in [0;1]\ ,\ x \leq 1$

Puisque g est décroissante sur $[0;1] \iff g(x) \geq g(1) = 0$

Donc : $\forall x \in [0;1]\,,\ g(x) \geq 0$

- Pour $x \in [1;+\infty[\ ,\ x \geq 1$

Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[\iff g(x) \leq g(1) = 0$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ,\ g(x) \leq 0$

- Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

0.5 pt

PARTIE II

1 - Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x) = +\infty$

$(\text{car } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty)$

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$

On pose $t = 1 - x \iff x = 1 - t$ donc si $x \to +\infty$ alors $x \to -\infty$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t - (1-t)^2 + 5(1-t) - 3 - 2\ln(1-t)\\
&= \lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t + (1-t)^2\left(-1 + \frac{5}{1-t} - \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

0.5 pt $(\text{Car } \lim\limits_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t = 0 \text{et } \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{5}{1-t} - \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2} = 0)$

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$:

0.5 pt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x}}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{5x-3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} = -\infty
\end{aligned}$$

$(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} = 0 \text{ , } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ , } \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} -x + 5 = -\infty)$

Interprétation :

(C) admet une branche parabolique de direction les axes des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.25 pt

1 pt **3 - a)** Calcul de la dérivé : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \left((1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)\right)'$$
$$= -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 5 - \frac{2}{x} = -2\mathrm{e}^{1-x} + x\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 1 + 4 - \frac{2}{x}$$
$$= -2\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right) + x\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)$$
$$= (x-2)\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)$$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ f'(x) = (x-2)g(x)$

b) Etudions la monotonie de f :

Puisque le signe de g est déterminé (d'après la question I-2) donc le signe de $f'(x)$ est donnée par le tableau suivant **0.75 pt**

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x) = (x-2)g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau précédent sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$, on a $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$. et dans l'intervalle $[1;2]$ la dérivé f' est positive , donc f est croissante sur $[1;2]$. **0.25 pt**

c) tableau de variation

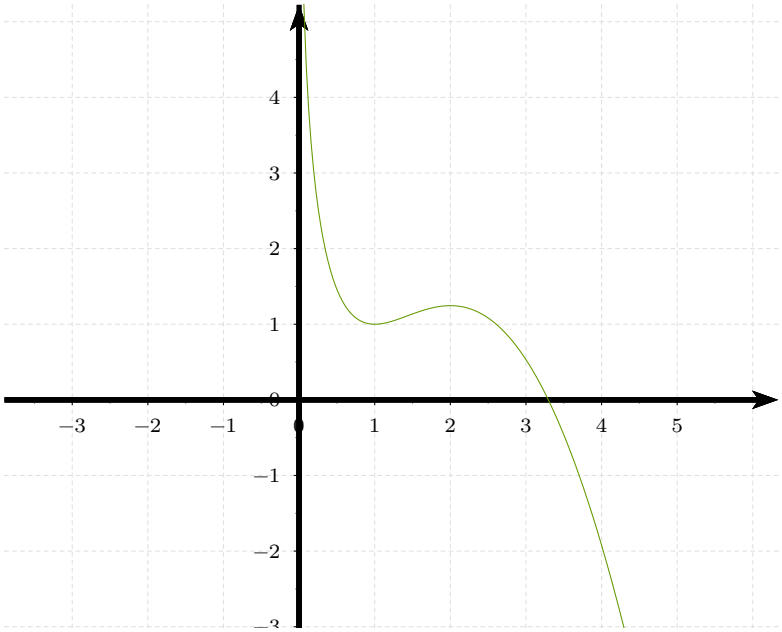
x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	1.25	↘	$-\infty$

4 - La fonction f est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ et en particulier $]3;4[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $]3;4[$ et le $f(3) \times f(4) < 0$ **0.5 pt**

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

5 - Construction de la figure **1 pt**



Partie III

1 - a) dans l'intervalle $[1;2]$ la fonction admet un maximum pour $x = 0$

0.5 pt Donc $h(x) \leq 0 \iff f(x) - x \leq 0$

$$\boxed{\forall x \in [1;2] \ , \ f(x) \leq x}$$

b) On a la fonction h est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

et comme $0 \in h([1;2])$; donc l'équation $h(x) = 0$ admet unique solution dans l'intervalle $[1;2]$

Or $h(1) = 0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[1;2]$

0.25 pt $\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = x \text{ admet 1 comme une unique solution dans l'intervalle } [1;2]}$.

0.75 pt **2 - a)** a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$, montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. On a

$$1 \leq u_n \leq 2 \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1,2]} f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

et comme $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1,2]$ alors $f(2) \leq 2$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2}$$

0.5 pt **b)** Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

On a pour tout $x \in [1,2], f(x) \leq x$

et comme $u_n \in [1,2]$, donc $f(u_n) \leq u_n$

D'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} \leq u_n$$

Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduisons que la suite est convergente

0.75 pt

On a : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. et comme elle est minorée par 1 , alors elle est convergente.

Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

On a :

i. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$

ii. $u_0 \in [1, 2]$.

iii. f est continue sur $[1, 2]$

iv. $f([1, 2]) \subset [1, 2]$

v. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Donc sa limite ℓ $(\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1, 2]$

Puisque 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1, 2]$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2021 — 2 Pts

1 - a) (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

b) (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leqslant 0$

c) (0,5 pt) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

2 - (0,5 pt) Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2021 — 4 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - (0,25 pt) Calculer u_1

2 - (0,5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$

3 - a) (0,5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$

b) (0,5 pt) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

4 - a) (0,75 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

b) (0,5 pt) On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$

5 - a) (0,5 pt) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$

b) (0,5 pt) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2021 — 5 Pts

1 - (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{id\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a) (0,25 pt) Écrire a sous forme algébrique .

b) (0,5 pt) Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

3 - (0,5 pt) Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4 - Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a) (0,5 pt) Ecrire z' en fonction de z et a

b) (0,25 pt) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.

c) (0,5 pt) Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.

5 - a) (0,75 pt) Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$

b) (0,5 pt) Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

c) (0,5 pt) Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right)$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2021 — 9 Pts

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$ si $x>0$
et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (**unité : 1cm**)

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$

0,5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

1 pt **b)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(on prend : $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5$)

0,5 pt **5 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$

0,5 pt **b)** En déduire : $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

0,25 pt **6 - a)** Déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln x\geqslant\dfrac{x-1}{x}$.

7 - Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1;+\infty[$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}h(x)=x^3+3x \;\;;\;\; x\leqslant 0\\ h(x)=2x\ln x-2x \;\;;\;\; x>0\end{cases}$

0,5 pt **a)** Étudier la continuité de h au point 0

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

0,25 pt **c)** La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2021

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2 pts)

0.5 pt **1 - a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$**

On a $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4 \times e^x + 3 = 0$

On effectue le changement d'inconnue $t = e^x$

Il vient $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 = 0 \end{cases}$

On s'est ainsi ramené à la résolution de l'équation du deuxième degré $t^2 - 4t + 3 = 0$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

L'équation a deux racines réelles distinctes $t_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $t_2 = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$

Finalement $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t = 1 \text{ ou } t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3$

Comme $1 > 0$ et $3 > 0$, alors l'équation proposée admet deux racines : $\boxed{\mathcal{S} = \{0, \ln 3\}}$.

0.5 pt **b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$**

On a $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 \leq 0 \end{cases}$

Étudions le signe du trinôme $t^2 - 4t + 3$, les racines de ce trinôme sont : 1 et 3

Par conséquent, nous obtenons le tableau de signe suivant :

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
t^2-4t+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 3$

En conclusion, $\boxed{\mathcal{S} = [0, \ln 3]}$.

0.5 pt **2 - Calculons** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$

Posons $t=e^{x}$, on a $t=e^{x}\xrightarrow{x\to 0}1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^{2}-4t+3}{t^{2}-1}$

Les racines du trinôme $t^{2}-4t+3$ sont : 1 et 3, donc $t^{2}-4t+3=(t-1)(t-3)$

Donc $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^{2}-4t+3}{t^{2}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t-3)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-3}{t+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=-1}$

0.5 pt **3 - Montrons que l'équation $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ admet une solution dans $[-1,0]$.**

Soit $f:x\mapsto e^{2x}+e^{x}+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$.

Les trois fonctions $x\mapsto e^{x}$, $x\mapsto e^{2x}$ et $x\mapsto 4x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$.

Et on a $f(0)=2>0$ et $f(-1)=\dfrac{1}{e^{2}}+\dfrac{1}{e}-4<1+1-4=-2<0$ $\left(\text{car } \dfrac{1}{e^{2}}<1 \text{ et } \dfrac{1}{e}<1\right)$

Donc f est continue sur $[-1,0]$ (car elle est continue sur $\mathbb{R}$) et on a $f(0)\times f(-1)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,0]$

D'où $\boxed{\text{l'équation } e^{2x}+e^{x}+4x=0 \text{ admet une solution dans } [-1,0]}$

Exercice 2 : (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **1 - Calculons** u_1

On utilise la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour $n=0$ et on obtient $u_{0+1}=\dfrac{u_0}{3-2u_0}$

C'est à dire $u_1=\dfrac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}\Rightarrow u_1=\dfrac{1}{2(3-1)}$, d'où $\boxed{u_1=\dfrac{1}{4}}$

0.5 pt **2 - Montrons par récurrence que $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

- **Initialisation :** On a $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $0<\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{2}$ donc $0<u_0\leq\dfrac{1}{2}$
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$, montrons que $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$

  On a $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\times\dfrac{1}{2}\leq -2u_n<-2\times 0$

  $\Rightarrow 3-1\leq 3-2u_n<3-0$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

  On multiplie membre à membre les deux inégalités $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

  Donc $0\times\dfrac{1}{3}<u_n\times\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$ c'est à dire $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}$ d'où $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$
- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence $\boxed{0<u_n\leq\dfrac{1}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt **3 - a) Montrons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{u_n}}{3-2u_n} \times \frac{1}{\cancel{u_n}}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et d'après la question précédente, nous avons $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors $\frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}$, par conséquent $\frac{1}{3} < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt **b) Déduisons la monotonie de la suite (u_n)**

D'après la question précédente, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Puisque $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors $u_n \times \frac{u_{n+1}}{u_n} < u_n \times 1$

Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, d'où $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

0.75 pt **4 - a) Montrons que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculons $\lim u_n$**

✓ **Montrons que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

➠ Première méthode (*On utilise un raisonnement par récurrence*)

- **Initialisation :** On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ donc $0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, montrons que $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

  D'après la question **3-b)** on a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

  On multiplie membre à membre les inégalités $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

  Donc $0 \times 0 < \cancel{u_n} \times \frac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1}{2}$ d'où $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence $\boxed{0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

➠ Deuxième méthode

On a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \frac{u_1}{u_0} \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 < \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ On multiplie donc : } 0 < \frac{\cancel{u_1}}{u_0} \times \frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}} \times \ldots \times \frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_{n-1}}} \times \frac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Donc $0 < \frac{u_{n+1}}{u_0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ c'est à dire $0 < u_{n+1} \leq u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$, par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Et puisque $0 < u_0 = \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ alors $\boxed{0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

✓ **Calculons** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Et comme $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors d'apès le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

0.5 pt **b) Calculons** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **où** $v_n = \ln(3-2u_n)$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-2u_n = 3$

Et la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors elle est continue en 3

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(3-2u_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 3-2u_n\right)$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 3}$

0.5 pt **5 - a) Vérifions que** $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3-2u_n}{u_n} - 1$

$$= \frac{3}{u_n} - 2 - 1$$

$$= 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

Donc $\boxed{\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt **b) Déduisons** u_n **en fonction de** n **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

➠ Première méthode

Soit (α_n) la suite définie par $\alpha_n = \frac{1}{u_n} - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On a $\alpha_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$ alors $\alpha_{n+1} = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$, par conséquent $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$

Cela signifie que (α_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

Et de premier terme $\alpha_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1$

Donc $\alpha_n = 3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et puisque $\alpha_n = \frac{1}{u_n} - 1$ alors $\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n$

Par conséquent $\frac{1}{u_n} = 3^n + 1$, d'où $\boxed{u_n = \frac{1}{3^n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

➠ Deuxième méthode

On a $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc :

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\frac{1}{u_1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_0} - 1\right) \\ \cancel{\frac{1}{u_2}} - 1 = 3\left(\cancel{\frac{1}{u_1}} - 1\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cancel{\frac{1}{u_n}} - 1 = 3\left(\cancel{\frac{1}{u_{n-1}}} - 1\right) \\ \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\cancel{\frac{1}{u_n}} - 1\right) \end{array}\right\} \text{ On multiplie membre à membre, alors : } \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3^{n+1}\left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$$

Donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 3^{n+1}(2-1)+1$ c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{1}{3^{n+1}+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = \dfrac{1}{3^n+1}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3^0+1}$ d'où $\boxed{u_n = \dfrac{1}{3^n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

Exercice 3 : (5 pts)

0.75 pt **1 - Résolvons l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$**

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 3 - 4 = -1 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}}$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 pt **a) Écrivons a sous forme algébrique**

On a : $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\boxed{a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

0.5 pt **b) Vérifions que $\overline{a}b = \sqrt{3}$**

On a $\overline{a}b = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i - \dfrac{3}{4}i - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i^2$

$= \dfrac{4\sqrt{3}}{4}$

Donc $\boxed{\overline{a}b = \sqrt{3}}$

0.5 pt **3 - Montrons que le point $B(b)$ est l'image du point $A(a)$ par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport**

On a $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|a| = 1$ d'où $a\overline{a} = 1$ (car $z\overline{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z)

D'après la question précédente, on a : $\overline{a}b = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{a\overline{a}}_{1} b = a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow b = a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}$

Donc $\boxed{B \text{ est l'image de } A \text{ par l'homothétie } h \text{ de cenre } O \text{ et de rapport } k = \sqrt{3}}$

4 - $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 pt **a) Ecrivons z' en fonction de z et a**

On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

$\Leftrightarrow z' = i(z-a) + a$

$\Leftrightarrow z' = iz - ia + a$

Donc $\boxed{z' = iz - ia + a}$

0.25 pt **b) Soit $D(d)$ l'image de $C(\overline{a})$ par la rotation R, montrons que $d = a + 1$**

On a : $R(C) = D \Leftrightarrow d = i\overline{a} - ia + a$

$\Leftrightarrow d = i(\overline{a} - a) + a$

$\Leftrightarrow d = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + a$

$\Leftrightarrow d = i \times (-i) + a$

$\Leftrightarrow d = 1 + a$

Donc $\boxed{d = a + 1}$

0.5 pt **c) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrons que $ADIO$ est un losange**

D'après la question précédente on a : $d = a + 1$ alors $d - a = 1 - 0$

Par conséquent $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}$, cela signifie que $ADIO$ est un parallélogramme $(\star)$

D'autre part $AD = |d - a| = |1| = 1$ et $OA = |a| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$ donc $AD = OA$ $(\star\star)$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on a $ADIO$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux

D'où $\boxed{ADIO \text{ est un losange}}$

0.75 pt **5 - a) Vérifions que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$, et déduisons un argument du nombre $d - b$**

✓ **Vérifions que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$**

On a : $d - b = a + 1 - b$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

Donc $\boxed{d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)}$

✓ **Déduisons un argument du nombre $d - b$**

On a $|1 - i| = \sqrt{2}$ donc : $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et on a $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \in \mathbb{R}_*^+ \Rightarrow \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \equiv 0\,[2\pi]$

Par conséquent $\arg(d-b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + (1-i)\,[2\pi]$

D'où $\boxed{\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]}$

0.5 pt **b) Écrivons le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique**

On a $b = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc : $1-b = 1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

D'où $\boxed{1-b = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

0.5 pt **c) Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)$**

On a $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)\,[2\pi]$

$$\equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\,[2\pi]$$
$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$$
$$= -\frac{19\pi}{12}\,[2\pi]$$
$$= -\frac{19\pi}{12} + 2\pi\,[2\pi]$$
$$= \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$$

D'où $\boxed{\frac{5\pi}{12} \text{ est une mesure de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)}$

Exercice 4 : (8 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - 2x\ ;\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0.5 pt **1 - Montrons que f est continue à droite au point 0**

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln x - 2x = 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ cela signifie que $\boxed{f \text{ est continue à droite au point } 0}$

0.5 pt **2 - a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x - 2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\ln x - 1)$

$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

0.5 pt **b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprétons géométriquement le résultat**

✓ **Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} - \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x - 2$

$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

✓ **Interprétons géométriquement le résultat**

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe } (\mathcal{O}y) \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.75 pt **3 - a) Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interprétons géométriquement le résultat**

✓ **Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$**

On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} - \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} 2\ln x - 2$

$= -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty}$

✓ **Interprétons géométriquement le résultat**

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

Par conséquent f n'est pas dérivable à droite au point 0

Et $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une demi-tangente verticale au point } \mathcal{O}(0,0) \text{ à droite dirigée vers le bas}}$

0.5 pt **b) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$**

La fonction polynôme $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et $x \mapsto \ln x$ est une fonction logarithme népérien donc dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence et produit de deux fonctions dérivables

Et pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = (2x\ln x - 2x)'$

$$= 2 \times \ln x + 2\cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 2$$

$$= 2\ln x + \cancel{2} - \cancel{2}$$

D'où $\boxed{f'(x) = 2\ln x \text{ pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[}$

0.5 pt **c) Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$**

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x$

Et on sait que $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

0.5 pt **4 - a) Résolvons dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$**

✓ **Résolvons $f(x) = 0$ dans $]0,+\infty[$**

On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ ou $e^{\ln x} = e^1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$

Puisque $0 \notin]0,+\infty[$ et $e \in]0,+\infty[$

Alors l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ dans $]0,+\infty[$ est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{e\}}$

✓ **Résolvons $f(x) = x$ dans $]0,+\infty[$**

On a $f(x) = x \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = x$

$\Leftrightarrow 2x\ln x - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(2\ln x - 3) = 0$

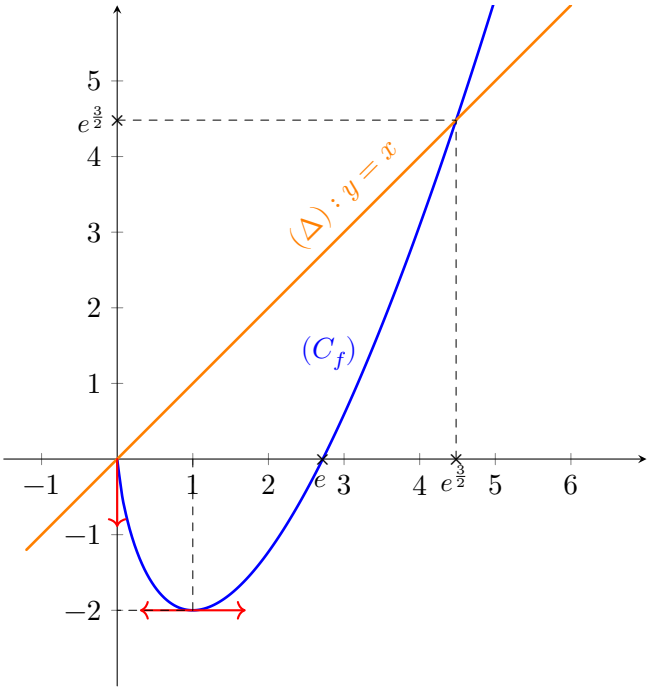
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$

Puisque $0 \notin]0,+\infty[$ et $e^{\frac{3}{2}} \in]0,+\infty[$

Alors l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ dans $]0,+\infty[$ est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}}$

1 pt **b) Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$**



0.5 pt **5 - a) Montrons que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{1+e^2}{4}$, à l'aide d'une intégration par parties**

Soient : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc on a : $\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx$

$= \frac{e^2}{2} \times \ln e - \frac{1^2}{2} \times \ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)$

$= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

D'où $\boxed{\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{1+e^2}{4}}$

0.5 pt **b) Déduisons $\int_1^e f(x) \, dx$**

On a : $\int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e (2x \ln x - 2x) \, dx$

$= 2\int_1^e x \ln x \, dx - \int_1^e 2x \, dx$

$= 2 \times \frac{1+e^2}{4} - [x^2]_1^e$

$= \frac{1+e^2}{2} - e^2 + 1$

$= \frac{1+e^2-2e^2+2}{2}$

D'où $\boxed{\int_1^e f(x)\,dx = \dfrac{3-e^2}{2}}$

0.25 pt **6 - a) Déterminons le minimum de f sur $]0,+\infty[$**

La fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

Donc f admet un minimum au point 1 est $f(1) = -2$

D'où $\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } -2}$

0,5 pt **b) Déduisons que $\ln x \geqslant \dfrac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$**

D'après la question précédente -2 est le minimum de la fonction f sur $]0,+\infty[$

Donc pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $f(x) \geq -2 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x \geq -2$

$$\Leftrightarrow x\ln x - x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x\ln x \geq x-1$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x}$$

D'où $\boxed{\ln x \geq \dfrac{x-1}{x} \text{ pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[}$

7 - Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt **a) Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $\mathcal{J}$ qu'on déterminera**

✓ Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1}

D'aprés la question **3-** f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc elle est continue sur $]0,+\infty[$

D'où g est continue sur $]1,+\infty[$ $(\star)$

Et puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Alors g est strictement monotone $(\star\star)$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit que $\boxed{g \text{ admet une fonction réciproque } g^{-1}}$

✓ Déterminons le domaine de définition $\mathcal{J}$ de la fonction réciproque g^{-1}

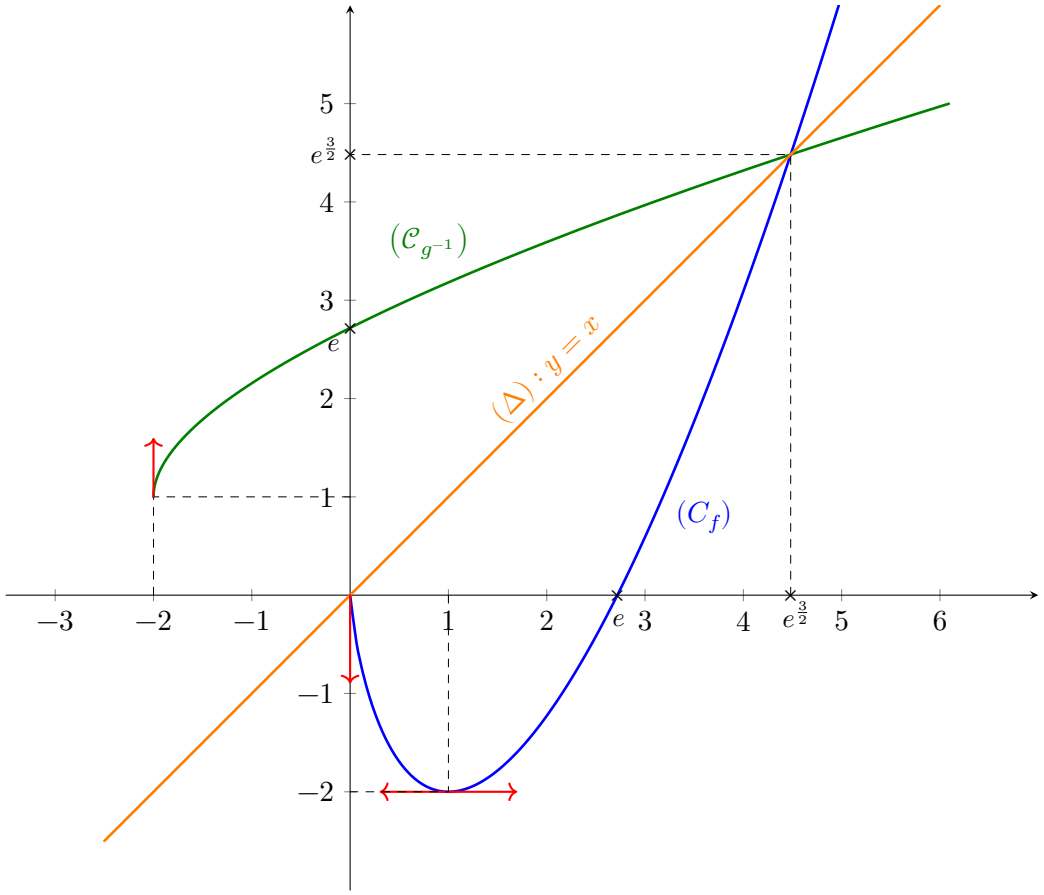
La fonction réciproque g^{-1} est définie sur $\mathcal{J} = g([1,+\infty[)$

$$= \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$

$$= [-2,+\infty[$$

D'où $\boxed{g^{-1} \text{ est définie sur } \mathcal{J} = [-2,+\infty[}$

0.75 pt **b) Construisons la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère**



8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x \quad ; \quad x \leqslant 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x \quad ; \quad x > 0 \end{cases}$

0.5 pt

a) Étudions la continuité de la fonction h au point 0

On a $h(0) = 0^3 + 3 \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 + 3x = 0$

D'aprés la question **1-** on a $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$

D'où $\boxed{h \text{ est continue au point } 0}$

0.5 pt

b) Étudions la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interprétons le résultat géométriquement

✓ Étudions la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3 + 3x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + 3$

$= 3$

Donc $\boxed{h \text{ est dérivable à gauche au point } 0 \text{ et } h'_g(0) = 3}$

✓ Interprétons le résultat géométriquement

Puisque h est dérivable au point 0 à gauche et $h'_g(0) = 3$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_h) \text{ admet une demi-tangente au point } \mathcal{O}(0,0) \text{ à gauche de coefficient directeur } 3}$

0.25 pt

c) Étudions la dérivabilité de la fonction h au point 0

D'aprés la question **3-a)** la fonction f n'est pas dérivable en 0 à droite

Et puisque $h(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, alors h aussi n'est pas dérivable en 0 à droite

D'où $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable au point } 0}$.

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 4 Pts

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par : $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{3}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1+\mathcal{U}_n}{3-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \mathcal{U}_n < 1$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{(\mathcal{U}_n - 1)^2}{3 - \mathcal{U}_n}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente.

3 - On pose $\mathcal{V}_n = \frac{1}{1-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,75 pt **b)** Déterminer $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire $\mathcal{U}_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **c)** Calculer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

0,5 pt **4 -** A partir de quelle valeur de n, a-t-on $\mathcal{U}_n \geqslant \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 5 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3+2i$; $b = 3-2i$ et $c = -1-2i$.

0,5 pt **a)** Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

0,5 pt **b)** En déduire la nature de triangle ABC.

3 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.

0,5 pt **a)** Écrire z' en fonction de z.

0,25 pt **b)** Vérifier que C et l'image de point A par R.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que les point A, C et D sont alignés.

0,5 pt **b)** Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D.

0,5 pt **c)** Déterminer l'affixe m du point E pour que la quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

0,5 pt **b)** En déduire que quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 3 Pts

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$.

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0 + \infty[$.

0,5 pt **2 -** Déterminer $h(]0;+\infty[)$.

0,5 pt **3 - a)** En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que $0 < \alpha < 1$.

0,5 pt **4 - a)** Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 8 Pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$.

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$).

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$.

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,5 pt **4 - a)** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

1 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(2) \simeq 1,25$).

0,5 pt **6 -** Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1} \geq x$.

0,5 pt **7 - a)** En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x}dx$.

0,5 pt **b)** En déduire que $\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}$.

8 - Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$.

0,5 pt **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0,75 pt **b)** Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pt **c)** A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2021

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (4 pts)

0.5 pt **1 -** Par récurrence :

Pour $n = 0$, on a : $0 < u_0 = \frac{1}{3} < 1$.

Supposons que $0 < u_n < 1$ pour un certain rang n et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $1 + u_n > 0$ et $3 - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Montrons que $u_{n+1} < 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+u_n}{3-u_n} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{3-u_n}$$

Or $u_n < 1$, on aura $u_n - 1 < 0$ et comme $3 - u_n > 0$ en déduire que $u_{n+1} - 1 < 0$.

Ainsi que : $0 < u_{n+1} < 1$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < 1$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{3-u_n} - u_n = \frac{1+u_n-u_n(3-u_n)}{3-u_n} = \frac{1-2u_n+u_n^2}{3-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$.

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n} \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante. Or (u_n) est majorée par 1 $(0 < u_n < 1)$ donc elle est convergente.

0.75 pt **3 - a)** On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{1-u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2u_n-2}{u_n-3}} = \frac{u_n-3}{2(u_n-1)}$$

D'autre part :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n-3}{2(u_n-1)} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{2}$$

D'où (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0 = \frac{1}{1-u_0} = \frac{3}{2}$.

0.75 pt **b)** Déterminons v_n en fonction de n. Comme (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$ on a :

$$v_n = v_0 + \frac{1}{2}n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{n+3}{2}$$

Donc $v_n = \frac{n+3}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrons que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On a :

$$v_n = \frac{1}{1-u_n} \Leftrightarrow 1-u_n = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{\frac{n+3}{2}} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{2}{n+3}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n+1}{n+3}$$

D'où $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **c)** On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

0.5 pt **4 -** On a :

$$u_n \geq \frac{1011}{1012} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+3} \geq \frac{1011}{1012} \Leftrightarrow 1012n + 1012 \geq 1011n + 3033 \Leftrightarrow n \geq 2021$$

Donc $u_n \geq \frac{1011}{1012}$ à partir de $n = 2021$.

Exercice 2 : (5 pts)

0.75 pt **1 -** On résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$.

Donc l'équation admet deux solutions complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$$

D'où $S = \{3 + 2i; 3 - 2i\}$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-1 - 2i - (3 - 2i)}{3 + 2i - (3 - 2i)} = \frac{-4}{4i} = -\frac{1}{i} = i$$

Donc $\dfrac{c-b}{a-b} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **b)** On a : $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

0.5 pt **3 - a)** $M(z)$ est l'image de point $M'(z')$ par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b) &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b) + b \\ &\Leftrightarrow z' = i(z - 3 + 2i) + 3 - 2i \\ &\Leftrightarrow z' = iz - 5i + 1 \end{aligned}$$

D'où $z' = iz - 5i + 1$.

0.25 pt **b)** On a :

$$ia - 5i + 1 = i(3 + 2i) - 5i + 1 = -1 - 2i = c$$

Donc C est l'image de A par la rotation R.

0.5 pt **4 - a)** On a :

$$\frac{c-a}{d-a} = \frac{-1 - 2i - (3 + 2i)}{-3 - 4i - (3 + 2i)} = \frac{-4 - 4i}{-6 - 6i} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

D'où les points A, C et D sont alignés.

0.5 pt **b)** Noter k le rapport de l'homothétie h de centre C qui transforme A en D. On a :

$$d - c = k(a - c) \Leftrightarrow k = \frac{d-c}{a-c} = \frac{-3 - 4i - (-1 - 2i)}{3 + 2i - (-1 - 2i)} = \frac{-2 - 2i}{4 + 4i} = -\frac{1}{2}$$

Donc l'homothétie h est de rapport $k = -\dfrac{1}{2}$.

0.5 pt **c)** On sait que $BCDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ et on a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow c - b = d - m$$
$$\Leftrightarrow m = d - c + b$$
$$\Leftrightarrow m = 1 - 4i$$

D'où $m = 1 - 4i$.

0.5 pt **5 - a)** On a :

$$\frac{d-a}{m-d} = \frac{-6-6i}{-2-2i} = 3 \in \mathbb{R}$$

0.5 pt **b)** On a $\dfrac{d-a}{m-d} = 3$ donc $d - a = 3(m - b)$ ceci est équivalant à $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BE}$.
D'autre part, on a $\dfrac{b-a}{m-d} = \dfrac{-4i}{4} = -i$ donc $AB = ED$.
En déduire que $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : (3 pts)

0.5 pt **1 -** Montrons que h est strictement croissante. On a :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \text{ (car : } x > 0)$$

D'où h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Comme h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et de plus h est continue sur $]0; +\infty[$.
On a :

$$h(]0; +\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} h(x); \lim_{x\to+\infty} h(x)[$$

et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(x) = +\infty$.
D'où $h(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

0.5 pt **3 - a)** Comme h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $0 \in h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.
D'après le T.V.I l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

0.5 pt **b)** On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $h(1) = 1$ donc $0 \in h(]0; 1])$.
Par suite : $0 < \alpha < 1$.

0.5 pt **4 - a)** D'après la question précédente on a :

$$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\ln(\alpha)$$

D'autre part : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \ln(\alpha)$.

D'où $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

0.5 pt **b)** On a :

$$h(\alpha) - 2 = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0$$

D'où $h(\alpha) > 2$.

Problème : (8 pts)

0.5 pt **1 -** On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} 2 - xe^{-x}e$$

Or $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ (On pose : $X = -x$). D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Interprétation géométrique :

(C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - xe^{-x+1}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} -x + 1 = +\infty$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - xe^{-x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - e^{-x+1}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'autre part, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'où (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **3 - a)** On a :

$$f'(x) = (2 - xe^{-x+1})' = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}$$

D'où $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $e^{-x+1} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

0.5 pt **4 - a)** On a $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$ donc :

$$f''(x) = ((x-1)e^{-x+1})' = e^{-x+1} - (x-1)e^{-x+1} = (2-x)e^{-x+1}$$

D'où $f''(x) = (2-x)e^{-x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudiant le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

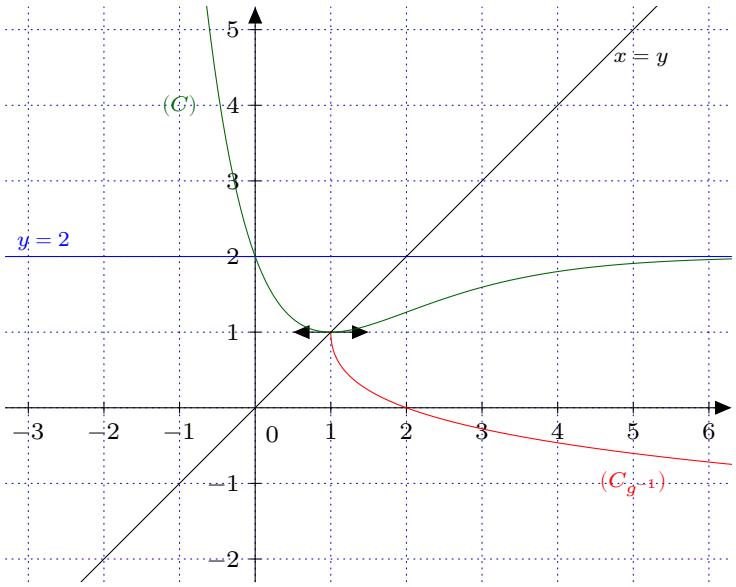
Comme $e^{-x+1} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2-x$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2-x$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau f'' s'annule et change de signe en 2.

Donc (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

1 pt **5 -** Construction de la courbe (C) :



0.5 pt **6 -** D'après le tableau de variations f' s'annule et change de singe sur $\mathbb{R}$ en 1.

Donc $f(1)$ est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$.

Et par suite $f(x) \geq f(1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, c'est à dire que :

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow 2 - xe^{-x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq xe^{-x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x+1}} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$$

D'où $e^{x-1} \geq x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **7 - a)** On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

Comme u et v sont dérivables telles que u' et v' continues. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x}dx &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx \\ &= -2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 \\ &= -2e^{-2} + (-e^{-2} + 1) \\ &= -3e^{-2} + 1. \end{aligned}$$

D'où $\int_0^2 xe^{-x}dx = -3e^{-2} + 1.$

0.5 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 2 - xe^{-x+1}dx \\ &= \int_0^2 2dx - e\int_0^2 xe^{-x}dx \\ &= 4 - e(-3e^{-2} + 1) \\ &= 4 - e + 3e^{-1}. \end{aligned}$$

D'où $\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}.$

0.5 pt **8 - a)** g est la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 1]$. Donc g continue est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et par suite, elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J où

$$\begin{aligned} J &= g(]-\infty; 1]) \\ &= \Big[g(1); \lim_{x\to-\infty} g(x)\Big[\\ &= \Big[f(1); \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big[\\ &= [1; +\infty[\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** On sait que la courbe représentative de g^{-1} sur $[1;+\infty[$ est la symétrique de la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$. Voir la figure précédente.

0.25 pt **c)** La courbe représentative de g^{-1} admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 0.}$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$ et (E ;2 ;4)7

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

0.25 pt **b)** En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

0.5 pt Déterminer une équation de la sphère (S).

0.5 pt **3 -** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 pt **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

0.5 pt **c)** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0.5 pt **1 -** Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

0.5 pt Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

0.5 pt **3 - a)** Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0.5 pt **b)** En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0.25 pt **a)** Vérifier que $|z+2| = 2$

0.5 pt **b)** Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

0.25 pt **c)** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.

0.75 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement **"N'obtenir aucune boule rouge"**

0.75 pt **2 -** Calculer $p(B)$; où B est l'évènement **"Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"**

0.75 pt **3 -** Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement **"Obtenir exactement une boule rouge"**

0.75 pt **4 -** Calculer (D) ; où D est l'évènement **"Obtenir au moins deux boules rouges"**

Exercice 4 — Session : NORMAL 2022 — 2.5 Pts

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)\,e^x$

0.75 pt **1 - a)** Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

0.75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par partie calculer $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,e^x\,dx$

0.5 pt **2 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Exercice 5 — Session : NORMAL 2022 — 8.5 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

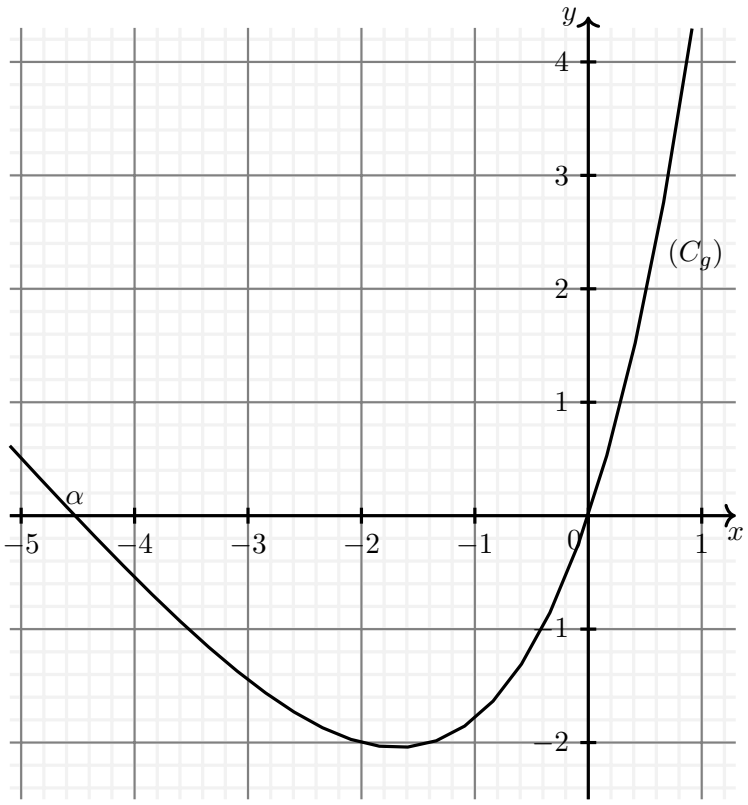
0.5 pt **b)** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0.5 pt **5 - a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} g(x)$
où $g(x) = (2x+4)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** A partir de la courbe ci-après (page suivante) de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)

0.5 pt **c)** Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.



1 pt **6 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$
(On prend : $\ln(4) \simeq 1,4$; $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$)

0.5 pt **7 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0.25 pt **b)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$

8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

0.5 pt **d)** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2022

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

0.5 pt **1 - a) Montrons que :** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}(1-0,2-1,0-1)\Longrightarrow\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1-0,1-1,2-1)\Longrightarrow\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & -1\\ \vec{j} & 1 & 0\\ \vec{k} & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$.

0.25 pt **b) Equation cartésienne du plan** (ABC)

Méthode 1 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal du plan (ABC). Donc $(ABC):x+z+d=0$

Or $A(0,1,1)\in(ABC)\Longrightarrow 0+1+d=0\Longrightarrow d=-1$

Alors $\boxed{(ABC):x+z-1=0}$

Méthode 2 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal du plan (ABC).

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)\Longleftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\Longleftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\Longleftrightarrow(x-0)\times 1+(y-1)\times 0+(z-1)\times 1=0\Longleftrightarrow x+z-1=0$

Alors $\boxed{(ABC):x+z-1=0}$

Méthode 3 : Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

Alors les trois points A,B et C sont non alignés. Donc ils forment un seul plan (ABC).

Pour que l'équation $x+z-1=0$ soit une équation du plan (ABC), il suffit que les coordonnées des points A, B et C vérifient cette équation :

- Pour $A(0,1,1)$: $0+1-1=0$
- Pour $B(1,2,0)$: $1+0-1=0$
- Pour $C(-1,1,2)$: $-1+2-1=0$

Donc $x+z-1=0$ est une équation du plan (ABC), alors $\boxed{(ABC): x+z-1=0}$

0.5 pt **2 - Soit $(S)\left(\Omega(1,1,2); R=\sqrt{2}\right)$. Déterminons une équation de la sphère (S).**

$(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Longrightarrow (S): x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=2$

$\Longrightarrow \quad \boxed{(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0}$

0.5 pt **3 - Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A**

Méthode 1 : On calcul la distance du point Ω au plan (ABC) :

$d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$

Donc le plan (ABC) est tangente à la sphère (S).

- Vérifions que $A\in(S)$:

$0^2+1^2+1^2-2\times0-2\times1-4\times1+4=0$ Donc $A\in(S)$

Puisque $A\in(ABC)$, alors le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A.

Méthode 2 : Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace, on a $M\in(ABC)\cap(S)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+z-1=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(1-x-2)^2=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(x+1)^2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ x^2-2x+1+(y-1)^2+x^2+2x+1=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ 2x^2+(y-1)^2=0 \end{cases}$$

Comme $2x^2\geq0$, $(y-1)^2\geq0$ et $2x^2+(y-1)^2=0$

Alors $2x^2=0 \Longrightarrow x=0$ et $(y-1)^2=0 \Longrightarrow y=1$

Puisque $z=1-x \Longrightarrow z=1$. Par suite $M(0,1,1)=A(0,1,1)$.

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 pt **a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)**

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) et (Δ) est orthogonale au (ABC) en C , alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Comme $C(-1,1,2) \in (\Delta)$ alors : $\boxed{(\Delta): \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+t \end{cases}}$

0.5 pt

b) Montrons que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S)

On suppose que $D(x,y,z)$ est un point de (Δ) et de (S).

Donc il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow (-1+t)^2+1^2+(2+t)^2-2(-1+t)-2\times 1-4(2+t)+4=0$

$\Longrightarrow t^2-2t+1+1+t^2+4t+4+2-2t-2-8-4t+4=0 \Longrightarrow 2t^2-4t+2=0$

$\Longrightarrow 2(t^2-2t+1)=0 \Longrightarrow (t-1)^2=0 \Longrightarrow t=1$

$\Longrightarrow \begin{cases} x=-1+t \Longrightarrow x=0 \\ y=1 \\ z=2+t \Longrightarrow z=3 \end{cases}$ Donc $\boxed{D(0,1,3)}$

Finalement, la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en point $D(0,1,3)$.

0.5 pt

c) Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, et la distance $d(A,(\Delta))$

Méthode 1 : (géométriquement)

$\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ $\left(\text{car } \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{AC}\right) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0}$

Méthode 2 : (analytiquement)

On a $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ et $\left(\vec{i}+\vec{k}\right)(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=(-1)\times 1+0\times 0+1\times 1=0 \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0}$

- Calcul de la distance $d(A,(\Delta))$:

Méthode 1 : Calcul direct

On a $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\left(\vec{i}+\vec{k}\right) \Longrightarrow \left(\vec{i}+\vec{k}\right)$ est un vecteur directeur de (Δ) donc $(AC)\perp(\Delta)$

Comme $C\in(\Delta) \Longrightarrow \boxed{d(A,(\Delta))=AC=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}}$

Méthode 2 : Calcul de $\overrightarrow{AC}\wedge\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$ après on calcule $d(A,(\Delta))$.

On a $\overrightarrow{AC}\wedge\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 1 \\ \vec{j} & 0 & 0 \\ \vec{k} & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{j}$

Puisque $C\in(\Delta)$ et le vecteur $\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) alors :

$$d(A,(\Delta)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \left(\vec{i}+\vec{k}\right)\right\|}{\left\|\vec{i}+\vec{k}\right\|} = \frac{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d(A,(\Delta)) = \sqrt{2}}$$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

0.5 pt **1 - Soit D l'image du point B par la translation t**

$t(B) = D \Longrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \Longrightarrow aff\left(\overrightarrow{BD}\right) = aff\left(\overrightarrow{OA}\right) \Longrightarrow d-b = a-0 \Longrightarrow d = a+b$

$\Longrightarrow d = \left(-1-i\sqrt{3}\right) + \left(-1+i\sqrt{3}\right) = -1-i\sqrt{3}+-1+i\sqrt{3} = -2$

Donc $\boxed{d=-2}$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

0.5 pt **Soit C image du point B par la rotation R**

$R(B) = C \Longrightarrow z_C - z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_D) \Longrightarrow c-d = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d)$

$\Longrightarrow c = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d) + d = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}-(-2)\right) + (-2)$

$= -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}+2\right) - 2 = -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) - 2 = -\frac{1}{2}\left(1^2 - \left(i\sqrt{3}\right)^2\right) - 2$

$\Longrightarrow c = -\frac{1}{2}(1+3) - 2 = -\frac{4}{2} - 2 = -2-2 = -4$

Donc $\boxed{c=-4}$

0.5 pt **3 - a) Écriture du nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique**

Méthode 1 :

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}-(-4)}{-1-i\sqrt{3}-(-4)} = \frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{3^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{b-c}{a-c} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{b-c}{a-c} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Méthode 2 :

$b-c = -1+i\sqrt{3}-(-4) = 3+i\sqrt{3} \Longrightarrow \|b-c\| = \sqrt{3^2+(i\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow b-c = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$$

$$a-c = -1-i\sqrt{3}-(-4) = 3-i\sqrt{3} = \overline{(b-c)} = \overline{\left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]} = \left[2\sqrt{3}\ ,\ -\frac{\pi}{6}\right]$$

Donc $\frac{b-c}{a-c} = \frac{\left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]}{\left[2\sqrt{3}\ ,\ -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\ ,\ \frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[1\ ,\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right] = \left[1\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{b-c}{a-c} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

0.5 pt **b) Conclure que** $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$

On a $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **(1)**

Puisque C est l'image de B par la rotation $R\left(D\ ,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors :

$c-d = \left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d) \implies \dfrac{c-d}{b-d} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on conclure que : $\boxed{\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0.25 pt **a) Vérifions que** $|z+2| = 2$

On a $M(z) \in (\Gamma) \implies DM = 2 \implies |z_M - z_D| = 2 \implies |z-(-2)| = 2 \implies \boxed{|z+2| = 2}$

0.5 pt **b) Montrons que** $z + \overline{z} = -8$

On a $M(z) \in (\Gamma') \implies OM = 4 \implies |z_M - z_O| = 4 \implies |z| = 4 \implies |z|^2 = z\overline{z} = 16$

Or $|z+2| = 2 \implies |z+2|^2 = (z+2)\,\overline{(z+2)} = (z+2)\left(\overline{z}+\overline{2}\right) = (z+2)\left(\overline{z}+2\right) = 4$

$\implies z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} + 4 = 4 \implies 16 + 2\left(z+\overline{z}\right) = 0 \implies \left(z+\overline{z}\right) = \dfrac{-16}{2} = -8$

Donc $\boxed{z + \overline{z} = -8}$

0.25 pt **c) Conclure que les deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique**

Soit $M(z)$ un point d'intersection des deux cercles (Γ) et (Γ').

Supposons que $z = x + \mathrm{i}y$ est la forme algébrique de z.

On a $z + \overline{z} = -8$ Donc $x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = -8 \implies 2x = -8 \implies x = -\dfrac{8}{2} = -4$

Donc $z = -4 + \mathrm{i}y$, et puisque $|z| = 4 \implies \sqrt{(-4)^2 + (\mathrm{i}y)^2} = 4 \implies (-4)^2 + y^2 = 16$

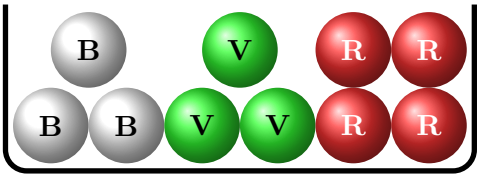
Alors $16 + y^2 = 16$ D'où $y^2 = 0 \implies y = 0$

Donc $z = -4 + \mathrm{i} \times 0 = -4 = c$

Donc les deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique C d'affixe $c = -4$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.



Tirage simultanéé de trois boules

Puisque les tirage est **simultanément** de **trois boules** parmi **dix boules**, alors chaque possibilité est **une combinaison de trois éléments parmi dix éléments**. Le nombre de cas possible est **le nombre de combinaison de** 3 **parmi** 10, donc :

$Card(\Omega) = C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 10\times 3\times 4 = 120$

Puisque les dix boules sont **indiscernables au toucher**, alors la condition **d'équiprobabilité** est vérifiée le long de l'exercice. Donc : $p(evenement) = \dfrac{Card(evenement)}{Card(\Omega)}$

0.75 pt **1 -** A « **Aucune boule rouge tirée** » : $\{\overline{R};\overline{R};\overline{R}\}$

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_6^3}{120} = \frac{\frac{A_6^3}{3!}}{120} = \frac{\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}}{120} = \frac{5\times 4}{120} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \boxed{p(A) = \frac{1}{6}}$$

0.75 pt **2 -** B « **Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes** » : $\{B;B;B\}$ ou $\{V;V;V\}$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_3^3}{120} = \frac{1+1}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \Longrightarrow \boxed{p(B) = \frac{1}{60}}$$

0.75 pt **3 -** C « **Obtenir exactement une boule rouge** » : $\{R;\overline{R};\overline{R}\}$

$$p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{C_4^1\times C_6^2}{120} = \frac{\frac{4\times A_6^2}{2!}}{120} = \frac{\frac{4\times 6\times 5}{2\times 1}}{120} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{p(C) = \frac{1}{2}}$$

0.75 pt **4 -** D « **Obtenir au moins deux boules rouges** » : $\{R;R;\overline{R}\}$ ou $\{R;R;R\}$

Méthode 1 :

$$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{C_4^2\times C_6^1 + C_4^3}{120} = \frac{(6\times 6)+4}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{p(D) = \frac{1}{3}}$$

Méthode 2 : L'évènement contraire de D est « **tirer exactement une boule rouge ou bien aucune boule rouge tirée.** »

On a $\overline{D} = A\cup C \Longrightarrow p\left(\overline{D}\right) = p(A) + p(C) - p\left(A\cap C\right)$.

Or les évènements A et C ne peuvent pas être réalisés en même temps, alors $p\left(A\cap C\right) = 0$

Donc $p\left(\overline{D}\right) = p(A) + p(C) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+3}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Et puisque $p(D) = 1 - p\left(\overline{D}\right)$ alors $p(D) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{p(D) = \frac{1}{3}}$

Exercice 4 : (2.5 pts)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$

0.75 pt **1 - a) Vérifions que $x\mapsto x\mathrm{e}^x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$; et calculons** $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (x\mathrm{e}^x)' = (x)'\,\mathrm{e}^x + x\,(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + xx'\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x = h(x)$

Donc $x\mapsto x\mathrm{e}^x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

- Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$:

$$I = \int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{0} = 0\times\mathrm{e}^0 - (-1)\times\mathrm{e}^{-1} = 0 + \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Longrightarrow \boxed{I = \int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

0.75 pt **b) Calculons** $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ **(Intégration par parties) :**

Soient $U'(x) = \mathrm{e}^x$ et $V(x) = (x+1)^2$

Donc $U(x) = \mathrm{e}^x$ et $V'(x) = 2(x+1)'(x+1) = 2(x+1)$

$\Longrightarrow J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} U'(x)V(x)\mathrm{d}x = \Big[U(x)V(x)\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} U(x)V'(x)\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow J = \Big[(x+1)^2\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \Big((0+1)^2\mathrm{e}^0 - ((-1)+1)^2\,\mathrm{e}^{-1}\Big) - 2\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow J = 1 - 2I = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \Longrightarrow \boxed{J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}$

0.5 pt **2 - a) Résolvons l'équation différentielle** $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation est : $r^2 - 2r + 1 = 0$

Donc $(r-1)^2 = 0 \Longrightarrow r - 1 = 0 \Longrightarrow r = 1$ (Solution unique)

D'où les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme :

$y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{rx}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x \quad / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **b) Montrons que h est la solution de (E) vérifiant :** $h(0) = 1$ **et** $h'(0) = 2$

On a $y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x \; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation (E).

On a $y(0) = 1 \Longrightarrow (\alpha \times 0 + \beta)\mathrm{e}^0 = 1 \Longrightarrow \beta = 1$

$\forall x, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; ; \; y'(x) = \Big(\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x\Big)' = (\alpha x + \beta)'\mathrm{e}^x + (\alpha x + \beta)\,(\mathrm{e}^x)' = \alpha\mathrm{e}^x + (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x$

Donc $y'(0) = 2 \Longrightarrow \alpha\mathrm{e}^0 + (\alpha \times 0 + 1)\mathrm{e}^0 = 2 \Longrightarrow \alpha + 1 = 2 \Longrightarrow \alpha = 1$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ on a $y(x) = (x+1)\mathrm{e}^x = h(x) \Longrightarrow h$ est une solution de (E).

On a $h(0) = (0+1)\mathrm{e}^0 = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; h'(x) = \Big((x+1)\mathrm{e}^x\Big)' = (x+1)'\mathrm{e}^x + (x+1)\,(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$

Donc $h'(0) = (0+2)\mathrm{e}^0 = 2$

Donc h est la solution de (E) vérifiant : $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème : (8.5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$; $\left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm\right)$

0.5 pt **1 - Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2\right) = +\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) = -1 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (-1)^2 = 1$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \implies \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2\right) = -\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

0.5 pt **2 - Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ en donnant l'interprétation géométriquement du résultat**

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

- Interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **3 - a) Montrons que (Δ) : $y = x$ est une asymptote de (C) au voisinage de $-\infty$**

Méthode 1 :

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} \Big(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - x\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - 1\Big)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) - 1\Big)\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) + 1\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - 1\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 + 1\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \Big(2 \times \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

Alors $2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = 0$

D'où la droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a $f(x) = x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1\Big) = x + x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = x + 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

$\implies f(x) - x = x + 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) - x = 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

Alors $2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = 0$

D'où la droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

Méthode 3 :

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc on calcul $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (-1)^2 = 1$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

On calcul $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x)-x\Big)$; On a (méthode 1 ou 2) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x)-x\Big)=0$

Donc la droite (Δ) : $y=x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 pt **b) Étudions le signe de $(f(x)-x)$ et la position relative de (C) et (Δ)**

- Étudions le signe de $(f(x)-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a :

$f(x)-x=x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2-x=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)$

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $f(x)-x=0$ donc :

$x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)=0 \iff x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2=0$

$x=0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=2 \iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=\ln(2)$

D'où $x=0$ ou $x=2\ln(2)=\ln(4)$

Donc $f(x)-x=0 \iff x=0$ ou $x=\ln(4)$

$f(x)-x>0 \iff x\in\,]-\infty;0[\cup]\ln(4);+\infty[$

$f(x)-x<0 \iff x\in\,]0;\ln(4)[$

Tableau de signe de $(f(x)-x)$:

x	$-\infty$		0		$\ln(4)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Étudions la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) :

On a $f(x)-x=0 \iff x=0$ ou $x=\ln(4)$ veut dire que la courbe (C) et la droite (Δ) se rencontrent en deux points d'abscisses $x=0$ et $x=\ln(4)$

On a $f(x)-x>0 \iff x\in\,]-\infty;0[$ ou $x\in\,]\ln(4);+\infty[$ veut dire que la courbe (C) est en dessus de la droite (Δ) sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]\ln(4);+\infty[$

On a $f(x)-x<0 \iff x\in\,]0;\ln(4)[$ veut dire que la courbe (C) est au dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]0;\ln(4)[$

0.5 pt **4 - a) Montrons que : $f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$ pour tout x de $\mathbb{R}$**

$\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\Big(x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2\Big)'=(x)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\Big(\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2\Big)'$

$\Longrightarrow f'(x)=1\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\Big(\frac{x}{2}\Big)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$

$\Longrightarrow f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)}$

0.5 pt **b) Vérifions que $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$**

Méthode 1 :

- Si $x\in\mathbb{R}^+$ alors $x\geqslant 0$

$x\geqslant 0 \Longrightarrow \frac{x}{2}\geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\geqslant \mathrm{e}^0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\geqslant 1$

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\geqslant 0 \Longrightarrow x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

- Si $x\in\mathbb{R}^-$ alors $x\leqslant 0$

$x\leqslant 0 \Longrightarrow \frac{x}{2}\leqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant \mathrm{e}^0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant 1$

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\leqslant 0 \Longrightarrow x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^-$; $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0}$

Méthode 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a :

$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)=0 \iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}-1=0$

$\iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}=1$

$\iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=\ln(1)=0$

$\iff x=0$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0}$

Tableau de signe de $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$		$+$	0	$+$	

Méthode 3 : Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $h'(x)=\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'=(x)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'$

$\implies h'(x)=1\times\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

Si $x=0$ on a $h'(0)=0$

Si $x>0$ on a $e^{\frac{x}{2}}-1>0$ et $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}>0$

$\implies h'(x)>0$

Si $x<0$ on a $e^{\frac{x}{2}}-1<0$ et $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}<0$

$\implies h'(x)<0$

Tableau des variations et de signe de $h(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h(x)\geqslant 0$ et finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0}$

0.25 pt **c) Tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$**

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\geqslant 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}\ ; f'(x)\geqslant 0$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

5 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(2x+4)\,e^{\frac{x}{2}}-x-4$

0.5 pt **a) Montrons que $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$**

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f''(x)=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'+\left(xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'$

$\implies f''(x)=2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+(x)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'$

$\implies f''(x)=2\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+xe^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}$

$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}$

$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1+e^{\frac{x}{2}}-1+\frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)=e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)$

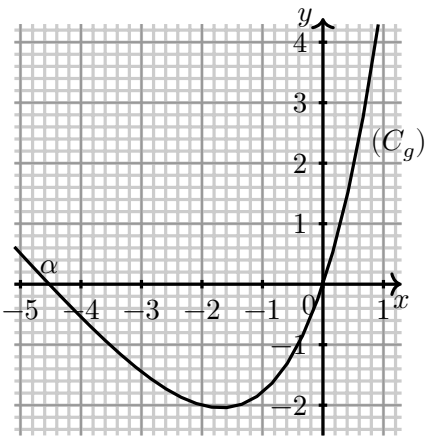
$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2+xe^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(4e^{\frac{x}{2}}-4+2xe^{\frac{x}{2}}-x\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left((2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4\right)$

Comme $g(x)=(2x+4)\,e^{\frac{x}{2}}-x-4$ alors $\boxed{f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)}$

b) Déterminons le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe sachant que $g(\alpha)=0$

0.5 pt

D'après la courbe de g on remarque que :



- $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$ sont les abscisses des points de rencontre de la courbe de la fonction g et l'axe des abscisses.
- $g(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$ car la courbe de la fonction g est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]\alpha; 0[$.
- $g(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$ car la courbe de la fonction g est en dessus de l'axe des abscisses sur les deux intervalles $]-\infty; \alpha[$ et $]0; +\infty[$.

0.5 pt

c) Étudions la concavité de la courbe (C).

$\forall x \in \mathbb{R}$; on a $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$, comme $e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$; on a :

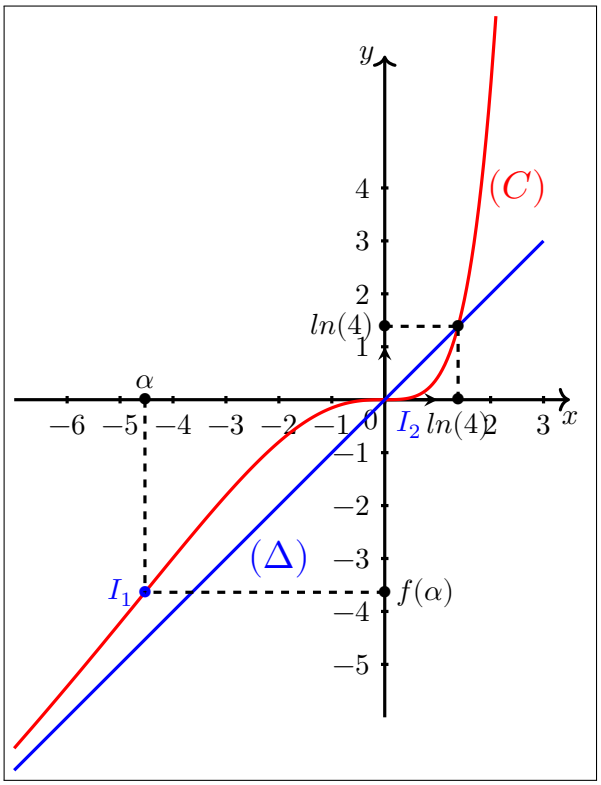
- $g(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$, alors $f''(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$. D'où (C) est concave sur $]\alpha; 0[$.
- $g(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$, alors $f''(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$. D'où (C) est convexe sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]0; +\infty[$.
- $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$ Donc $f''(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$. Donc (C) admet deux poionts d'inflexion $I_1\,(\alpha; f(\alpha))$ et $I_2(0; 0)$.

Tableau de concavété de (C) sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
(C)		*convexe*	I_1	*concave*	I_2	*convexe*	

1 pt

6 - Construction de la courbe (C)



0.5 pt **7 - a) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$**

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(\mathbb{R})$ telle que :

$J = f(\mathbb{R}) = f\Big(\,]-\infty;+\infty[\,\Big) = \Big]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Donc la fonction f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$**

D'après le resultat de la question **3 - b)** on a $\ln(4)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$; donc $f(\ln(4)) = \ln(4)$.

Alors $f(\ln(4)) = \ln(4) \iff f^{-1}(\ln(4)) = \ln(4)$

$\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \dfrac{1}{f'(\ln(4))}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

$\implies f'(\ln(4)) = \left(e^{\frac{\ln(4)}{2}} - 1\right)^2 + \ln(4).e^{\frac{\ln(4)}{2}}\left(e^{\frac{\ln(4)}{2}} - 1\right) = \left(e^{\ln(2)} - 1\right)^2 + \ln(4).e^{\ln(2)}\left(e^{\ln(2)} - 1\right)$

$\implies f'(\ln(4)) = (2-1)^2 + \ln(4) \times 2(2-1) = \boxed{1 + 2\ln(4)}$

Donc $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \dfrac{1}{f'(\ln(4))} = \dfrac{1}{1+2\ln(4)}$

Donc $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{1+2\ln(4)}}$

8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a) Montrons par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$:**

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 < \ln(4)$ (Vraie).
- Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < u_n < \ln(4)$ et montrons que : $0 < u_{n+1} < \ln(4)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \ln(4)$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(0) < f(u_n) < f(\ln(4))$

Comme $f(0) = 0$; $f(\ln(4)) = \ln(4)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_{n+1} < \ln(4)$.

D'après le raisonnement par raisonnement par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < u_n < \ln(4)}$

0.5 pt **b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :**

D'après le résultat de la question **3 - b)** on a : $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $]0;\ln(4)[$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \ln(4) \implies u_n \in]0;\ln(4)[$

Donc $f(u_n) - u_n < 0 \implies u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0.25 pt **c) Convergence de la suite (u_n) :**

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

0.5 pt **d) Calcul de la limite de la suite (u_n) :**

On a :

- $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- f est continue sur l'intervalle $I =]0; \ln(4)[$.
- $f(I) \subset I$.
- $u_0 \in I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Donc si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ avec l solution de l'équation $f(x) = x$.

D'aprés le résultat de la question **3 - b)** on a $f(x) = x$ admet deux solutions réelles 0 et $\ln(4)$. Donc $l = 0$ ou bien $l = \ln(4)$.

Puisque (u_n) est décroissante et $u_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leqslant u_0 = 1$ et $l \leqslant 1 \implies l = 0$.

Finalement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0}$

FIN

Exercice 1 Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$

0,75 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$

0,5 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son première terme

0,5 pt **b)** Écrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$

0,25 pt **c)** Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots\cdots + \mathcal{U}_{2021}$

Exercice 2 Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

0,25 pt **1 - a)** Calculer la distance ΩA

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires

0,25 pt **c)** Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $M_a \in \mathbb{R}$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$

0,5 pt **c)** Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S)

Exercice 3 Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$

0,25 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

2 - Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

0,5 pt Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h

3 - On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

0,5 pt déterminer l'image de B par la rotation R

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

0,25 pt **a)** Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF

0,5 pt **d)** Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Une urne contient *trois* boules blanches, et *quatre* boules rouges et *cinq* boules vertes, indiscernables au toucher, on tire au hasard et simultanément **trois** boules de l'urne

1 - On considère les événements suivantes :

A : "Obtenir exactement *deux* boules rouges"

B:" Obtenir exactement *une* boule verte"

0,75 pt **a)** Montrer que : $P(A) = \frac{12}{55}$ et $P(B) = \frac{21}{44}$

0,75 pt **b)** Calculer $P(A/B)$, la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

1 pt **a)** Déterminé la loi de probabilité de X

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 8.5 Pts

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis détermine la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

0,5 pt **4 - a)** Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$

0,5 pt **b)** Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

1 pt **5 - a)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$)

0,5 pt **b)** En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$

6 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g est paire

0,5 pt **b)** Construire $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,5 pt **7 - a)** On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{6 - e^5}{25}$

0,5 pt **b)** On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$.

Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

0,5 pt **c)** Déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}I$

0,5 pt **d)** Calculer l'aire du domine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2022

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

Pour $n = 0$ on a : $(\mathcal{U}_0 = 2)$ et $2 > 1$ donc $\mathcal{U}_n > 1$ (vraie).

supposons que : $\mathcal{U}_n > 1$ et montrons que : $\mathcal{U}_{n+1} > 1$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_n > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n > 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 1\end{aligned}$$

Donc d'aprés le raisonnement par récurrence on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

0,75 pt **b)** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente.

Soit n un entier naturel,on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \mathcal{U}_n\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n - \frac{2}{2}\mathcal{U}_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2})\mathcal{U}_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2}\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$

0,75 pt Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente :

On a:pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$

donc :pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n - 1 > 0$

De plus,$\sqrt{2}-2<0$d'où $\mathcal{U}_{n+1}-\mathcal{U}_n<0$

Il s'ensuit que la suite $(\mathcal{U}_n)$est décroissante.

Et comme $(\mathcal{U}_n)$ est minorée par 1 alors elle est convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n=\mathcal{U}_n-1$.

0,5 pt **a)** Montrons que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminons sa raison et son premier terme.

Soit n de $\mathbb{N}$,on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n+1}&=\mathcal{U}_{n+1}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n+\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n+\frac{2-\sqrt{2}-2}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathcal{U}_n-1)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{V}_n\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme :

$\mathcal{V}_0=\mathcal{U}_0-1=2-1=1$

0,5 pt **b)** Ecrivons $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduisons la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

On sait que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme :

$\mathcal{V}_0=1$ donc :$\forall n\in\mathbb{N}$ on a :$\mathcal{V}_n=\mathcal{V}_0\times q^{n-0}$

Donc :$(\forall n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{V}_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ et comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n=\mathcal{U}_n-1$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n=\mathcal{V}_n+1$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{V}_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+1$

En déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

Puisque :$-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ alors $\lim(\frac{\sqrt{2}}{2})^n=0$ donc : $\lim\mathcal{U}_n=1$

0,25 pt **c)** Calculons la somme $S=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots\cdots+\mathcal{U}_{2021}$.

On a :$S=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots\cdots+\mathcal{U}_{2021}$

$S=\mathcal{V}_0+1+\mathcal{V}_1+1+\mathcal{V}_2+1+\cdots\cdots+\mathcal{V}_{2021}+1$

$S=\mathcal{V}_0+\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2+\cdots\cdots+\mathcal{V}_{2021}+1+1+1+\cdots\cdots+1$

$$\begin{aligned}&=\mathcal{V}_0\times\frac{1-q^{(2021-0+1)}}{1-q}+(2021-0+1)\times 1\\&=1\times\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2022}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}+2022\\&=\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2022}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}+2022\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2^{2022}-\sqrt{2}^{2022}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$
$$= \frac{\frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$
$$= \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} + 2022$$
$$= \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{1}{2^{2021}} + 2022$$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

0,25 pt **1 - a)** Calculons la distance ΩA :

$\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\|$
$= \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$
$= \sqrt{(1-3)^2 + (-1-0)^2 + (1-(-1))^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{4+1+4}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

0,5 pt **b)** Montrons que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

On a :$\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

de plus,$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 1 \times 2$
$= -4 + 4 = 0$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

Par suite,les droites (Δ) et (ΩA)sont perpendiculaires.

0,25 pt **c)** Déduisons la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S).

On a $\Omega A = 3 = R$ donc $A \in (S)$

D'autre part,$A \in (\Delta)$et les droites (Δ) et (ΩA)sont perpendiculaires

donc (Δ)est tangente à la sphère (S) en A.

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduisons que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On a :$\overrightarrow{AM_a} = (x_{M_a - x_A})\vec{i} + (y_{M_a - y_A})\vec{j} + (z_{M_a - z_A})\vec{k}$
$= (2a-3-1)\vec{i} + (3-2a+1)\vec{j} + (a-1-1)\vec{k}$

$= (2a-4)\vec{i} + (4-2a)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= 2(a-2)\vec{i} - 2(a-2)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= (a-2)(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}}$

Par suite,les deux vecteurs $\vec{u}$et$\overrightarrow{AM_a}$sont colinéaires

et comme $A \in (\Delta)$alors $M_a \in (\Delta)$

0,5 pt **3 - a)** Vérifions que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

On a:le plan (P_a) est perpendiculaire à la droite (Δ)

De plus,$\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

donc $\vec{u}$est un vecteur normal au plan (P_a)

d'où une une équation cartésienne du plan (P_a) s'écrit :

$(P_a) : 2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

et puisque $M_a \in (\Delta)$ alors $2x_{Ma} - 2y_{Ma} + z_{Ma} + d = 0$

donc $2(2a-3) - 2(3-2a) + a - 1 + d = 0$ donc $4a - 6 - 6 + 4a + a - 1 + d = 0$ donc

$9a - 13 + d = 0$ donc $9a - 13 + d = 13 - 9a$

d'où $(P_a) : 2x - 2y + z + 13 - 9a = 0$

b) Montrons que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$

On a :$d(\Omega,(P_a)) = \dfrac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|2\times 3 - 2\times 0 + 1\times(-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|2\times 3 - 2\times 0 + 1\times(-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|6 - 0 + -1 + 13 - 9a|}{\sqrt{4+4+1}}$

$= \dfrac{|18-9a|}{\sqrt{9}}$

$= 3\dfrac{|6-3a|}{3}$

$= |6-3a|$

0,5 pt donc $\boxed{d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|}$

0,5 pt **c)** Déterminons les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Comme le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) alors $d(\Omega,(P_a)) = R$

Donc $|3a-6| = 3$

c-à-d :$3a - 6 = 3$ ou $3a - 6 = -3$

c-à-d :$3a = 3 + 6$ ou $3a = 6 - 3$

c-à-d :$3a = 9$ ou $3a = 3$

c-à-d : $\boxed{a = 3 \text{ ou } a = 1}$

Exercice 3 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

0,25 pt **1 -** Déterminons le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

On a : D est le milieu du segment $[AC]$

donc $Z_D = \dfrac{Z_A + Z_C}{2}$

$Z_D = \dfrac{1 + 5i + 5 - 3i}{2}$

$Z_D = \dfrac{6 + 2i}{2}$

$Z_D = 3 + i$

0,5 pt **2 -** Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminons le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de point B par h.

On a : $h(B) = E \iff \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\iff Z_E - Z_A = \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$

$\iff Z_E = Z_A + \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(1 - 5i - (1 + 5i))$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(1 - 5i - 1 - 5i)$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(-10i)$

$\iff Z_E = 1 + 5i - 5i$

$\iff Z_E = 1$

0,5 pt **3 -** On considère la rotation R de center C d'angle $\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$, déterminons l'image de B par R.

Soit B' l'image de B par R

$R(B) = B' \iff Z_{B'} - Z_C = e^{-}\dfrac{\pi}{2}(Z_B - Z_C)$

et comme $e^{-\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}) = -i$

alors $R(B) = B' \iff Z_{B'} = -i(1 - 5i - 5 + 3i) + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = -i(-4 - 2i) + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = 4i - 2 + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = 3 + i = Z_D$

donc l'image de B par R est D

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

0,25 pt **a)** Vérifions que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

On a : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \dfrac{3 + i - (1 + 5i)}{-1 + i - (1 + 5i)} \times \dfrac{-1 + i - 1}{3 + i - 1}$

$= \dfrac{3 + i - 1 - 5i}{-1 + i - 1 - 5i} \times \dfrac{-2 + i}{2 + i}$

$= \dfrac{2-4i}{-2-4i} \times \dfrac{-2+i}{2+i}$
$= -\dfrac{2(1-2i)}{2(1+2i)} \times \dfrac{i(1+2i)}{i(1-2i)}$
$= -\dfrac{1-2i}{1+2i} \times \dfrac{1+2i}{1-2i}$
$= -1$

b) En déduisons que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.
On a : $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv arg(\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A}) + arg(\dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E})[2\pi]$
$\equiv arg(\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E})[2\pi]$
$\equiv arg(-1)[2\pi]$
$\equiv \pi[2\pi]$
Donc $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.

0,5 pt

0,5 pt **c)** Déterminons la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$
On a : $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1-(-1+i)}{1+5i-(-1+i)}$
$= \dfrac{1+1-i)}{1+5i+1-i)}$
$= \dfrac{2-i}{2+4i}$
$= \dfrac{-i(1+2i)}{2(1+2i)}$
$= \dfrac{-1}{2}i$
$= \dfrac{1}{2}(0-i)$
$= \dfrac{1}{2}(cos(\frac{\pi}{2}) - isin(\frac{\pi}{2}))$
$= \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
Donc $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
déduisons la nature du triangle AEF.
On a : $\overline{(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE})} \equiv arg(\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F})[2\pi]$
et d'après ce qui précède on a : $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
donc $arg(\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$
d'où $\overline{(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE})} \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$
ce qui nous permet de déduire que le triangle AEF est rectangle en F

0,5 pt **d)** Déduisons que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.
On a : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$
et $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{-1}{2}i \Rightarrow \dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} \in i\mathbb{R}$
$\Rightarrow$les points A, E et F ne sont pas alignés.

Il s'ensuit que les points A, D, E et F sont cocycliques.

Et comme le triangle AEF est rectangle en F

alors les points A, D, E et F appartiennent au cercle (Γ) de diamètre$[AE]$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient trois boules blanches, et quater boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements :

1 - On considère les événements suivantes : A : "Obtenir exactement deux boules rouges"

B :" Obtenir exactement une boule verte"

0,75 pt

a) Montrons que : $P(A) = \frac{12}{55}$ et $P(B) = \frac{21}{44}$

A : "Obtenir exactement deux boules rouges"$\longrightarrow$ RR$\overline{R}$

alors $card(A) = C_4^2 \times C_8^1 = 48$

donc $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$

B :" Obtenir exactement une boule verte"$\longrightarrow$ V$\overline{V}\overline{V}$

alors $card(B) = C_5^1 \times C_7^2 = 105$

donc $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$

0,75 pt

b) Calculons $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.

$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$(A \cap B) = \{RRV\}$ alors $card(A \cap B) = C_4^2 \times C_5^1 = 30$

donc $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{220}}{\frac{21}{44}} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{21}{44}} = \frac{2}{7}$

Déduction : Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Puisque $P(A/B) \neq P(A)$ alors Les événements A et B ne sont pas indépendants .

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

1 pt

a) Déterminons la loi de la de probabilité X.

Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ;2 ;3

X=0 $\longrightarrow \overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

X=1 $\longrightarrow$ V $\overline{V}\,\overline{V}$

X=2 $\longrightarrow$ V V $\overline{V}$

X=3 $\longrightarrow$ V V V

On a :$P(X = 0) = \frac{C_7^3}{card(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

$P(X = 1) = P(B) = \frac{21}{44}$

$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$

$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{card(\Omega)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

Donc on peut résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

0,5 pt

b) calculons la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{7}{22} + \frac{1}{22} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

Donc la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est :$P(X \geq 2) = \frac{4}{11}$

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 - Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Déterminons la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4(\ln x-1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x - 1)^2 = +\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$)

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

alors : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2 - a) Montrons que f est continue à droite au point 0. Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x^4(\ln x - 1)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} \left(x^2(\ln x - 1)\right)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} \left(x^2\ln x - x^2\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$

0.25 pt

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$ alors f est continue à droite au point 0.

b) Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{x^4(\ln x-1)^2}{x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to0^+} x^3(\ln x - 1)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} x \times (x(\ln x - 1))^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} x \times (x\ln x - x)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$

Alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

• Interprétation géométrique :

on a $f'_d(0) = 0$ alors (C) admet une demi tangente horizontale à droite de 0.

3 - a) Montrons que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

on sait que la fonction $x \mapsto x^4$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme) et $x \mapsto (\ln x - 1)^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (car $x \mapsto lnx$ est dérivable sur $]0;+\infty[$).

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur

$]0;+\infty[$. Alors :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = (x^4)'(\ln x - 1)^2 + \left((\ln x - 1)^2\right)' x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1)'(\ln x - 1)x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1)x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^3(\ln x - 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2(\ln x - 1) + 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 2 + 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$

Donc : $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Dressons le tableau de variations de f.

Étudions le signe de $f'(x)$

On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : 2x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$

$(\ln x - 1)(2\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 ou 2\ln x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 1 ou \ln x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = e ou x = e^{\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x = e ou x = \sqrt{e}$

Si : $x > e \Leftrightarrow \ln x > \ln(e) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x > 1$

Si : $x < e \Leftrightarrow \ln x < \ln(e) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x < 1$

Si : $x > \sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x > \ln(\sqrt{e}) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2\ln x > 1$
$\Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0$

Si : $x < \sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln(\sqrt{e}) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2\ln x < 1$
$\Leftrightarrow 2\ln x - 1 < 0$

En déduire que :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$lnx - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(lnx - 1)(2\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f est :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$lnx-1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln x-1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	0	↗	$\frac{e^2}{4}$	↘	0	↗ $+\infty$

$f(e)=(e^2)^2(\ln e-1)^2=0$ $f(\sqrt{e})=\left(\sqrt{e}^2\right)^2(\ln\sqrt{e}-1)^2=\frac{e^2}{4}$

4 - Étudions le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.
On a $(\forall x\in]0;+\infty[):2x^2>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $(6\ln x-5)(lnx)$
$(6\ln x-5)(lnx)=0\Leftrightarrow 6\ln x-5=0 ou lnx=0$
$\Leftrightarrow \ln x=\frac{5}{6} ou x=1$
$\Leftrightarrow x=e^{\frac{5}{6}} ou x=1$

Si : $x>e^{\frac{5}{6}}\Leftrightarrow \ln x>\ln(e^{\frac{5}{6}})(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x>\frac{5}{6}\Leftrightarrow 6\ln x>5\Leftrightarrow 6\ln x-5>0$

Si : $x<e^{\frac{5}{6}}\Leftrightarrow \ln x<\ln(e^{\frac{5}{6}})(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x<\frac{5}{6}\Leftrightarrow 6\ln x<5\Leftrightarrow 6\ln x-5<0$

Si : $x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln(1)(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x<0$

Si : $x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln(1)(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x>0$

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	0		1		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$6\ln x - 5$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
lnx	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion. D'après le tableau de signe de $f''(x)$ on a f'' s'annule en 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ et aussi change le signe, donc les points A et B d'abscisses respective 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ sont des points d'inflexions.

5 - a) Construisons la courbe (C) dans le repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$

b) En utilisant la courbe (C), déterminons le nombre de solutions de l'équation (E) : $x^2(\ln x - 1) = -1$
L'équation (E) est définie si $x > 0$ et $\ln x - 1 < 0$ c'est à dire $x \in]0, e[$

$$x^2(\ln x - 1) = -1 \Leftrightarrow x^4(\ln x - 1)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 1$$

Alors $(\forall x \in]0, e[)$ on a d'après la courbe (C) on a la droite $y = 1$ coupe la courbe (C) en deux points.
Donc le nombre de solutions de l'équation (E) : $x^2(\ln x - 1) = -1$ est 2.

6 - On considère la fonction g définie sur par $g(x) = f(|x|)$

a) Montrons que la fonction g est paire. •$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\forall -x \in \mathbb{R}$ car les éléments de $\mathbb{R}$ sont symétriques par rapport à 0 (1)
•$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ (2)
D'après (1) et (2) g est une fonction paire.

b) Construire $\left(C_g\right)$ la courbe représentative de g dans le même repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$
Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ on a : $|x| = x$ donc $g(x) = f(x)$ alors $\left(C_g\right)$ et (C) sont confondus.
Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, $\left(C_g\right)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir la figure).

7 - a) on pose $\begin{cases} u'(x) = x^4 \\ v(x) = \ln x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^5}{5} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ alors :

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{5} dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^e - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^e \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1) - \frac{x^5}{25}\right]_1^e \\
&= \frac{e^5}{5}(\ln e - 1) - \frac{e^5}{25} - \left(\frac{1^5}{5}(\ln 1 - 1) - \frac{1^5}{25}\right) \\
&= \frac{e^5}{5}(1-1) - \frac{e^5}{25} - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) \\
&= -\frac{e^5}{25} + \frac{6}{25} \\
&= \frac{6-e^5}{25}
\end{aligned}$$

Donc : I $= \frac{6-e^5}{25}$.

b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$
Vérifions que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.
On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : h(x) = x \times x^4(\ln x - 1)^2 = xf(x)$
h est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in]0;+\infty[) : h'(x) = 5x^4(\ln x - 1)^2 + 2x^5 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1) \\
&= 5x^4(\ln x - 1)^2 + 2x^4(\ln x - 1) \\
&= 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)
\end{aligned}$$

Donc : $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

c) En déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$ On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{h'(x)}{5} - \frac{2x^4(\ln x - 1)}{5}$,alors :

$$\begin{aligned}
&\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{h'(x)}{5} - \frac{2x^4(\ln x - 1)}{5} dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^e h'(x)dx - \frac{2}{5}\int_1^e x^4(\ln x - 1)\,dx \\
&= \frac{1}{5}[h(x)]_1^e - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}[h(e) - h(1)] - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}\left(e^5(\ln e - 1)^2 - 1^5(\ln 1 - 1)^2\right) - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}\left(e^5(1-1)^2 - 1\right) - \frac{2}{5}I \\
&= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I
\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$

d) Calculons l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. On a : $A = \int_1^e |f(x)|\,dx \times u.a = = \int_1^e f(x)dx \times u.a$ car $(\forall x \in [1;e]) : f(x) \geq 0$ donc :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e f(x)dx \times u.a \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I\right) \times 1cm^2 \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{6-e^5}{25}\right)\right) cm^2
\end{aligned}$$

Donc l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est : A $= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{6-e^5}{25}\right)\right) cm^2$

Exercice 1 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

0.5 pt **b)** En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

2 - Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

0.5 pt **b)** En déduire que $d(\Omega,(ABC)) = 3$

3 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

0.5 pt **a)** Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

0.5 pt **b)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

4 - Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

0.5 pt Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

0.25 pt **1 -** Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $b - d = c$

0.5 pt **b)** Montrer que $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que $ac = 2b$

0.5 pt **b)** En déduire que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

4 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.25 pt **a)** Montrer que $z' = \frac{1}{2}az$

0.5 pt **b)** En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

0.5 pt **c)** Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Une urne U_1 contient *six* boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient *cinq* boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher

On considère l'expérience aléatoire suivante :

" On tire une boule de l'urne U_1, et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte "

On considère les événements suivants :

A : " La boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 "

B : " Le produit ab est égal à 2 "

0.5 pt **1 - a)** Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A

0.5 pt **b)** Montrer que $p(B) = \dfrac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

0.75 pt **2 -** Calculer $p(A/B)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé

3 - Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 pt **a)** Montrer que $p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

0.5 pt **b)** Donner la loi de probabilité de X

(Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

c) On considère les événements

M : " Le produit ab est pair non nul "

N : " le produit ab est égal à 1 "

0.5 pt Montrer que les événements M et N sont équiprobables

Exercice 4 Session : NORMAL 2023 — 11 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 1 cm)

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

0.5 pt **c)** Déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

0.75 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 -** Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}$

3 - En exploitant le tableau de variations ci-dessous, de la fonction dérivé f' de f sur $]0;+\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $f'(\beta)$	$\searrow$ 0

(On donne : $\beta \approx 4.9$)

0.5 pt **a)** Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f

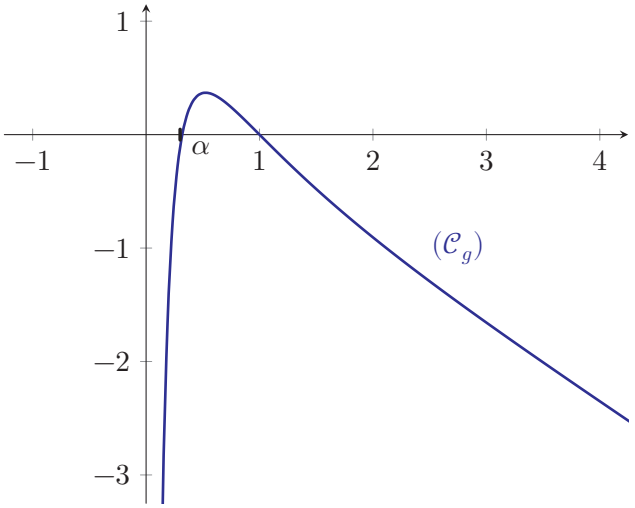
0.5 pt **b)** Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f" de la fonction f sur $]0;+\infty[$

c) Déduire la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les abscisses de ses deux points

1 pt d'inflexion

4 - La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0.3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$



0.5 pt **a)** A partir de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, déterminer le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduire que la droite (Δ) est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

1.5 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On prend : $\alpha \simeq 0.3$; $\beta \simeq 4.9$ et $f(\beta) \simeq 1.9$)

0.5 pt **6 - a)** Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha;1]$

1 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\alpha}^{1} (1-\ln x)^2 \mathrm{d}x = 5(1-\alpha) + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

0.75 pt **c)** Déduire, en fonction de α, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

7 - Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 \in]\alpha;1[$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer, par récurrence, que $\alpha < \mathcal{U}_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante (on peut utiliser la question $4-b$))

0.75 pt **c)** En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculer sa limite

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2023

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

0.25 **1 - a) Montrons que :** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

On a : $\overrightarrow{AB}(2;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 8\vec{i} - (-8+4)\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})}$

0.5 **b)** Déduisons la surface du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

✓ **La surface S_{ABC} du triangle ABC**

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(8;4;8)$

Donc $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144} = \frac{1}{2} \times 12 = \frac{12}{2} = 6(ua)$

$\boxed{S_{ABC} = 6(ua)}$

✓ **La distance** $d(B,(AC))$

(AC) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$

Donc $d(B,(AC)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{12}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{36}} = \dfrac{12}{6} = 2$

$\boxed{d(B,(AC)) = 2}$

2 - Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 **a) Vérifions que** $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

On a $x_D = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $y_D = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $z_D = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Donc $D(1;3;2)$ et on a $\Omega(3,4,4)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$

D'autre part $\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ a pour coordonnées le triplet $(2;1;2)$

Par conséquence $\boxed{\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})}$

0.5 **b) Déduisons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$**

On a $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{D\Omega}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est le vecteur normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est aussi normal au plan (ABC)

D'autre part, on a D est le milieu de $[AC]$, c.à.d. $D \in (AC)$ donc $D \in (ABC)$

Donc $d(\Omega,(ABC)) = D\Omega = \left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\| = \dfrac{1}{4}\left\|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right\| = \dfrac{1}{4} \times 12 = 3$

Par conséquence $\boxed{d(\Omega,(ABC)) = 3}$

Remarque *On peut aussi déterminer une équation du plan (ABC) puis montrer la distance $d(\Omega,(ABC)) = D\Omega = \left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\| = 3$*

3 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

0.5 **a) Déterminons le centre et le rayon de la sphère (S)** On a : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y + z^2 - 8z + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 8z + 16) - 9 - 16 - 16 + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9 = 3^2$

Donc, $\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(3;4;4) \text{ et de rayon } R = 3}$

0.5 **b) Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera**

On a $d(\Omega,(ABC)) = 3 = R$ donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

et puisque $D \in (ABC)$ et $D\Omega = R = 3$ donc $D \in (S)$

Et par conséquence $\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ est tangent à la sphère } (S) \text{ au point } D}$

0.5 **4 - Déterminons une équation cartésienne pour chacun des plans (Q_1) et (Q_2) parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$**

Soit (Q) un plan parallèle à (ABC)

On a $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc $\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$ est un vecteur normal à (Q)

D'où une équation cartésienne de (Q) s'écrit comme suit : $(Q) : 2x + y + 2z + d = 0$

D'autre part on a : $d(\Omega;(Q)) = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

Et on a $d(\Omega;(Q)) = \dfrac{|2x_\Omega + y_\Omega + 2z_\Omega + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{|2 \times 3 + 4 + 2 \times 4 + d|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|18 + d|}{3} = 2$

D'où $|18 + d| = 6$ c.à.d. $18 + d = 6$ ou $18 + d = -6$ D'où $d = -12$ ou $d = -24$

Donc $(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0$ et $(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$ Et par conséquence :

$\boxed{(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0}$ et $\boxed{(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0}$

Exercice 2 : (3 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient les points $A(a = \sqrt{2} + i\sqrt{2})$, $B(b = 1 + \sqrt{2} + i)$, $C(c = \bar{b})$ et $D(d = 2i)$

0.25 **1 - Écrivons le nombre complexe a sous forme trigonométrique**

On a $|a| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, donc $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Par conséquence $\boxed{a = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

0.25 **2 - a) Vérifions que $b - d = c$**

On a $b - d = 1 + \sqrt{2} + i - 2i = (1 + \sqrt{2}) - i = \bar{b} = c$, donc $\boxed{b - d = c}$

0.5 **b)** Montrons que $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d$ et déduisons que les points A, B et D sont alignés

✓ **Montrons que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$**

On a $(\sqrt{2}+1)(b-a) = (\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+1)(1+i-i\sqrt{2})$

Donc $(\sqrt{2}+1)(b-a) = \sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i+1+i-i\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-i = \bar{b} = c = b-d$

Ainsi $\boxed{(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d}$

✓ **Déduisons que les points A, B et D sont alignés**

On a $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d$ donc $\frac{b-d}{b-a} = \sqrt{2}+1$

Puisque $\frac{b-d}{b-a} \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } D \text{ sont alignés}}$

0.25 **3 - a) Vérifions que $ac = 2b$**

On a $ac = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-i) = \sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2}$

$ac = 2+2\sqrt{2}+2i = 2(1+\sqrt{2}+i) = 2b$

Donc $\boxed{ac = 2b}$

0.5 **b) Déduisons que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$**

On a $2b = ac$ donc $2b = a\bar{b}$, donc $arg(2b) \equiv arg(a\bar{b})[2\pi]$

Donc $arg(2) + arg(b) \equiv arg(a) + arg(\bar{b})[2\pi]$ donc $0 + arg(b) \equiv arg(a) - arg(b)[2\pi]$

Donc $2arg(b) \equiv arg(a)[2\pi]$

Ainsi $\boxed{2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]}$

4 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.25 **a) Montrons que** $z' = \frac{1}{2}az$

On a $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - 0 = \mathbf{e}^{i\frac{\pi}{4}}(z-0) \Leftrightarrow z' = \left(\mathbf{cos}\,\frac{\pi}{4} + i\,\mathbf{sin}\,\frac{\pi}{4}\right)z$

$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2} \times 2\left(\mathbf{cos}\,\frac{\pi}{4} + i\,\mathbf{sin}\,\frac{\pi}{4}\right)z = \frac{1}{2}az$

Par conséquence $\boxed{z' = \frac{1}{2}az}$

0.5 **b) Déduisons que** $R(C) = B$ **et que** $R(A) = D$

✓ On a $z' = \frac{1}{2}az$

$\frac{1}{2}az_C = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 2b = b = z_B$ (car $ac = 2b$)

Donc $\boxed{R(C) = B}$

✓ On a $z' = \frac{1}{2}az$

$\frac{1}{2}az_A = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2} \times i\sqrt{2} - 2) = \frac{1}{2}(4i) = 2i = d = z_D$

Donc $\boxed{R(A) = D}$

0.5 **c)** Montrons que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$

✓ **Montrons que** $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$

On a $\frac{b-a}{c-a} = \frac{b-a}{\overline{b}-a} = \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i(1-\sqrt{2})}{1-i(1+\sqrt{2})}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(1+i(1-\sqrt{2}))(1+i(1+\sqrt{2}))}{(1-i(1+\sqrt{2}))(1+i(1+\sqrt{2}))} = \frac{1+i(1+\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1+(1+\sqrt{2})^2}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+2i-(1-2)}{1+1+2\sqrt{2}+2} = \frac{2+2i}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+i)}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+i)}{4-2}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}(1+i) = \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}-2}{4}a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a$

D'où $\boxed{\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

✔ *Autre méthode*

On a $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a^2$ car $ac = 2b$ et $R(A) = D$ c.à.d. $d = \frac{1}{2}a \times a$

Donc $(\sqrt{2}+1)(b-a) = \frac{1}{2} \times a(c-a)$, d'où $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{\sqrt{2}+1} = a \times \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

Finalement $\boxed{\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

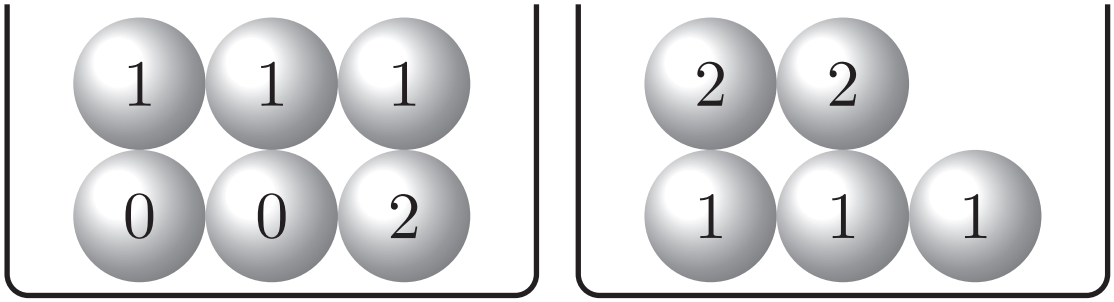
✓ **Déduisons une mesure de l'angle** $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$

On a $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)[2\pi] \equiv \left(arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + agr\,(a)\right)[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(0+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\left(\text{car } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \in \mathbb{R}_+^*\right)$

Alors $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 3 : (3 pts)



L'urne U_1 L'urne U_2

On considère l'expérience aléatoire suivante :

" On tire une boule de l'urne U_1, et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte "

On considère les événements suivants :

A : " La boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 "

B : " Le produit ab est égal à 2 "

Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

0.5 **1 - a) Calculons $p(A)$**

On a $card(\Omega) = C_6^1 \times C_6^1 = 36$

Et l'événement A est réalisé lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1

Donc $card(A) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$

Donc $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{18}{36}$

Alors $\boxed{p(A) = \frac{1}{2}}$

0.5 **b) Montrons que $p(B) = \frac{1}{4}$ (*On peut utiliser l'arbre des possibilités*)**

➠ *Première méthode*

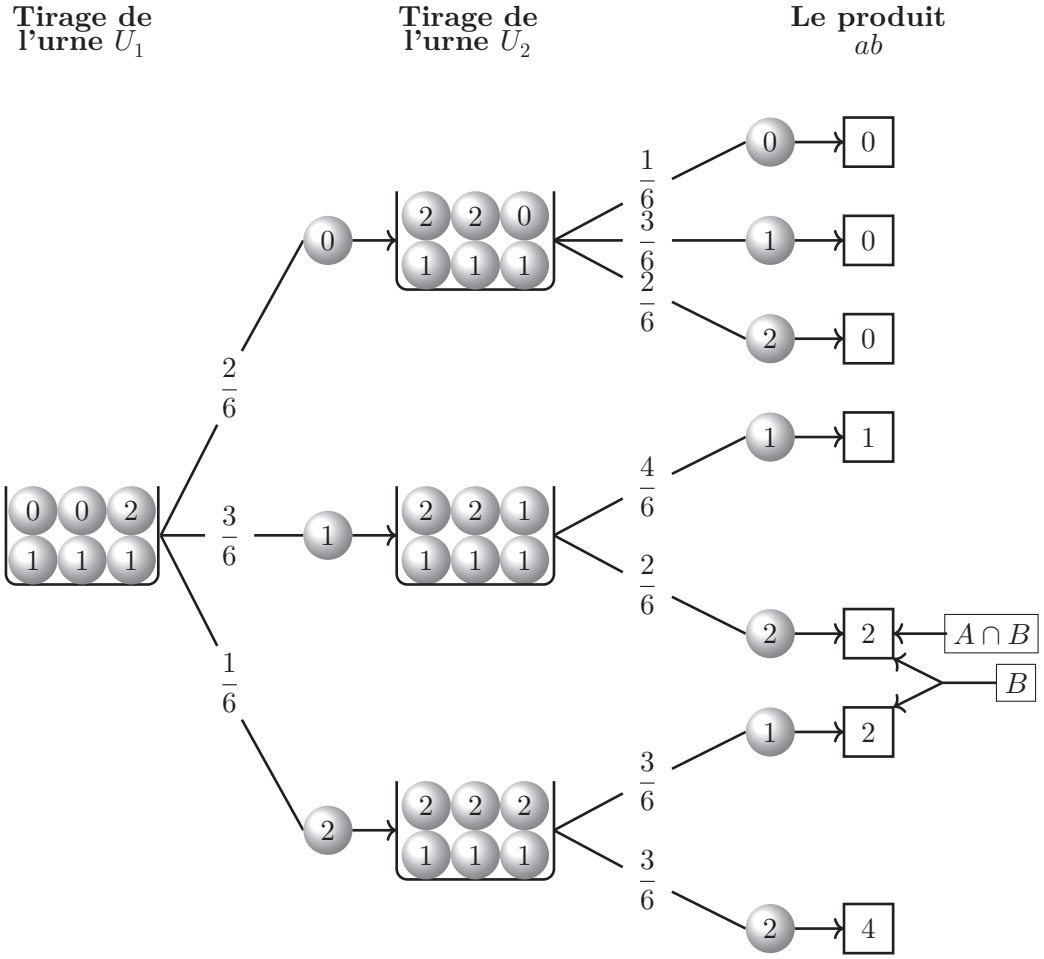
L'événement B est réalisé lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 2 de l'urne U_2 ***ou*** lorsqu'on tire une boule portant le nombre 2 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 1 de l'urne U_2

Donc $card(B) = C_3^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1 = 3 \times 2 + 1 \times 3 = 6 + 3 = 9$

Donc $p(B) = \dfrac{carg(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{9}{36}$

Alors $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{4}}$

➠ *Deuxième méthode* (arbre des possibilités)



D'après l'arbre des possibilités ci-dessus, on trouve que

$p(B) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{6}$ $p(B) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{9}{36}$

Alors $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{4}}$

0.75 **2 - Calculons** $p(A/B)$

➠ *Première méthode*

On a $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

L'événement $A \cap B$ est réalisé lorsque les deux événements A et B sont réalisé à la fois c.à.d. lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 2 de l'urne U_2

Donc $card(A \cap B) = C_3^1 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$, donc $p(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Or $p(B) = \dfrac{1}{4}$ donc $p(A/B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{6} \times 4 = \dfrac{4}{6}$

Alors $\boxed{p(A/B) = \dfrac{2}{3}}$

➠ *Deuxième méthode* (arbre des possibilités)

On a $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

D'après l'arbre des possibilités, on a $p(A \cap B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

Donc $p(A/B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{6} \times 4 = \dfrac{4}{6}$

Alors $\boxed{p(A/B) = \dfrac{2}{3}}$

3 - Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 **a) Montrons que** $p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

L'événement $X = 0$ correspond à tirer une boule portant le nombre 0 de l'urne U_1 et une boule quelconque de l'urne U_2

Donc $card(X = 0) = C_2^1 \times C_6^1 = 2 \times 6 = 12$, par suite $p(X = 0) = \dfrac{12}{36}$

Remarque : *On peut avoir le même résultat en utilisant l'arbre des possibilités*

Alors $\boxed{p(X = 0) = \dfrac{1}{3}}$

0.5 **b) Donnons la loi de probabilité de** X

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$

$p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

$p(X = 1) = \dfrac{card(X = 1)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^1 \times C_4^1}{36} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

$p(X = 2) = p(B) = \dfrac{1}{4}$

$p(X = 4) = \dfrac{card(X = 4)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{36} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

c) On considère les événements

M : "Le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1"

0.5 **Montrons que les événements M et N sont équiprobables**

Montrer que ces deux événements sont équiprobables revient a montrer que $p(M) = p(N)$

L'événement M est équivalent à trouver que $ab = 2$, ou $ab = 4$ c.à.d. au événements $X = 2$ ou $X = 4$, donc $M = (X = 2) \cup (X = 4)$

Et comme $(X = 2) \cap (X = 4) = \emptyset$, alors $p(M) = p(X = 2) + p(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Et l'événement N est équivalent à trouver $ab = 1$, c.à.d. au événement $X = 1$

Donc $p(N) = p(X = 1) = \frac{1}{3}$

Donc $p(M) = p(N)$, et par suite les événements M et N sont équiprobables

Remarque : *On peut avoir les mêmes résultats en utilisant l'arbre des possibilités*

Exercice 4 : (11 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

0.25 **1 - a) Vérifions que** : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$

Pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

$$= \frac{2x - 2 + x(1 - \ln x)^2}{x}$$

$$= \frac{2x - 2 + x\left(1 - 2\ln x + (\ln x)^2\right)}{x}$$

$$= \frac{2x - 2 + x - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

Alors $f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$

0.5 **b)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

➠**Montrons que** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\sqrt{x} \ln\left(\sqrt{x^2}\right)\right)^2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(2\sqrt{x} \ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$

Soit $t = \sqrt{x}$, on a $x \to 0^+ \Rightarrow t \to 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{t \to 0} (2t \ln t)^2 = 0$

Car $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} t \ln t = 0$

Finalement $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0$

➠**Montrons que** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $t=\sqrt{x}$, on a $x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln t}{t}\right)^2=0$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

En fin $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0}$

0.5 **c)** Déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

Déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3x-2=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x(\ln x)^2=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2=-2$ et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{-2}{x}=-\infty$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}=-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty}$

Interprétons géométriquement le résultat

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$

Alors $\boxed{\text{la droite d'équation } x=0 \text{ (}\textbf{\textit{l'axe des ordonnées}}\text{) est une asymptote verticale à } (\mathcal{C}_f)}$

0.75 **d)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis trouvons la branche parabolique de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\dfrac{2}{x}+(1-\ln x)^2=+\infty$

Montrons que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$=0$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

D'où $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe } (Ox) \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.5 **2 - Montrons que pour tout** $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

La fonction $x\mapsto 2-\dfrac{2}{x}$ est une fonction rationelle dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto \ln x$ fonction logarithme népérien dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto 1-\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ d'où $x\mapsto(1-\ln x)^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables

Et, pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = 0 - 2 \times \dfrac{-1}{x^2} + 2\,(1-\ln x)'\,(1-\ln x)$

$$= \frac{2}{x^2} + 2 \times \frac{-1}{x} \times (1-\ln x)$$
$$= \frac{2}{x^2} + \frac{2\,(\ln x - 1)}{x}$$
$$= \frac{2\,[1 + x\,(\ln x - 1)]}{x^2}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}}$

3 - En exploitant le tableau de variations de la fonction dérivé f' de f sur $]0;+\infty[$

0.5 **a)** Prouvons que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dressons le tableau de variations de f

Prouvons que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après le tableau de variations de f'

0 est la valeur minimale absolue de la fonction f' sur l'intervalle $]0,+\infty[$

Donc $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ (avec l'égalité ssi $x = 1$)

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$

Dressons le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

0.5 **b) Donnons le tableau de signe de la dérivée seconde $f"$ de la fonction f sur** $]0;+\infty[$

D'après le tableau de variations de f'

La fonction f' est strictement décroissante sur les deux intervalles $]0,1[$ et $[\beta,+\infty[$

Donc f'' est strictement négative sur chacun des deux intervalles $]0,1[$ et $]\beta,+\infty[$

Et f' est strictement croissante sur $[1,\beta]$, alors f'' est strictement positive sur $]1,\beta[$

Et puisque f' est est dérivable en 1 et β (car elle est dérivable sur $]0,+\infty[$), et change sa monotonie en 1 et β alors f'' s'annule en 1 et β

x	0		1		β		$+\infty$
$f"(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Déduisons la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et précisons les abscisses de ses deux points d'inflexion

1

Déduisons la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ On a $\forall x \in]0,1[\cup [\beta, +\infty[\ \ f''(x) < 0$ donc $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ est concave sur }]0,1[\text{ et } [\beta, +\infty[}$

Et $\forall x \in]1,\beta[\ \ f''(x) > 0$ donc $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ est convexe sur }]1,\beta[}$

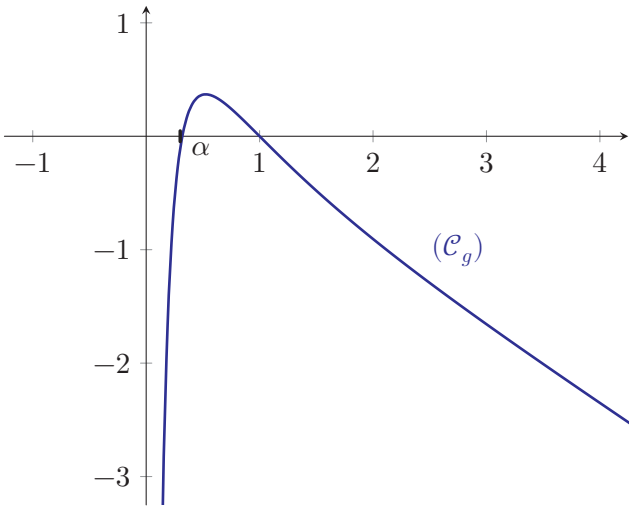
x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathcal{C}_f)$	‖	∩	point d'inflexion	∪	point d'inflexion	∩	

Précisons les abscisses des deux points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

La fonction f'' s'annule et change de signe en 1 et β

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion $\boxed{\mathcal{A}(1, f(1)) \text{ et } \mathcal{B}(\beta, f(\beta))}$

4 - La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0.3$), et (Δ) la droite d'équation $y = x$



a) **Déterminons le signe de la fonction** g **sur** $]0;+\infty[$

D'après la représentation graphique de la fonction g on a :

La courbe $(\mathcal{C}_g)$ est en dessous de l'axe des abscisses sur chacun des deux intervalles $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$, donc $\boxed{g(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle }]0,\alpha] \cup [1,+\infty[}$

Et $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1,\alpha]$

Donc $\boxed{g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [\alpha,1]}$

0.5

b) **Déduisons la position relative de la droite** (Δ) **et la courbe** $(\mathcal{C}_f)$ **sur les intervalles** $[\alpha;1]$**,** $]0;\alpha]$ **et** $[1;+\infty[$

D'après la question précédente on a $\forall x \in]0,\alpha] \cup [1,+\infty[\ \ g(x) \leq 0$

Donc $\forall x \in]0,\alpha] \cup [1,+\infty[\ \ f(x) \leq x$

D'où la droite (Δ) est au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]0,\alpha]$ et $[1,+\infty[$

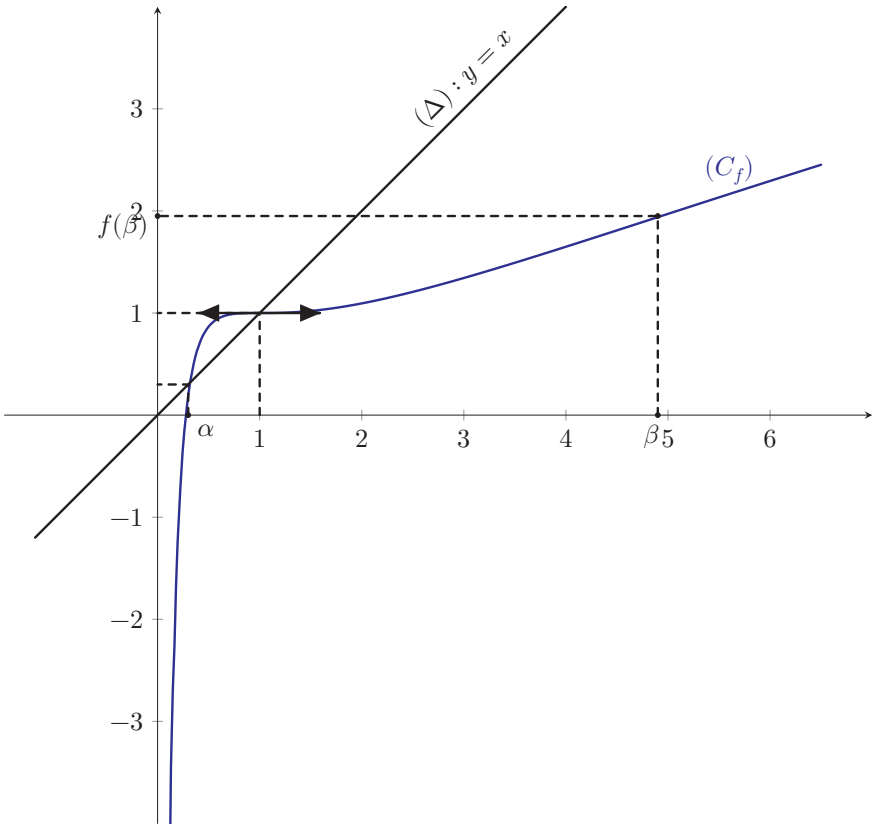
D'autre part on a $\forall x \in [\alpha,1]\ \ g(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in [\alpha,1]\ \ f(x) \geq x$

D'où la droite (Δ) est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[\alpha,1]$

1.5 **5 - Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $\left(\mathbf{O},\vec{i},\vec{j}\right)$**

(On prend : $\alpha \simeq 0.3$; $\beta \simeq 4.9$ et $f(\beta) \simeq 1.9$)



0.5 **6 - a) Vérifions que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha;1]$**

Les deux fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto -x$ sont des fonctions polynômes dérivables sur $[\alpha,1]$

Et $x \mapsto \ln x$ une fonction logarithme népérien donc dérivable sur $[\alpha,1]$

Alors $x \mapsto 2x - x\ln x$ est dérivable sur $[\alpha,1]$

Et pour tout x de $[\alpha,1]$ on a :

$$(2x - x\ln x)' = (2x)' - (x\ln x)'$$
$$= 2 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$$
$$= 2 - \ln x - 1$$
$$= 1 - \ln x$$

D'où $\boxed{x \mapsto 2x - x\ln x \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto 1 - \ln x \text{ sur } [\alpha, 1]}$

1 **b) En utilisant une intégration par parties, montrons que :**

$$\int_\alpha^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha$$

On va utiliser une intégration par parties sur l'intégrale : $I = \int_\alpha^1 1 \times (1 - \ln x)^2\, dx$

On pose $u(x) = (1 - \ln x)^2$ et $v'(x) = 1$

Donc $u'(x) = \dfrac{-2(1 - \ln x)}{x}$ et $v(x) = x$

$$I = \left[x(1 - \ln x)^2\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 x \times \frac{-2(1 - \ln x)}{x} dx$$
$$= (1 - \ln 1)^2 - \alpha(1 - \ln\alpha)^2 + 2\int_\alpha^1 (1 - \ln x)\, dx$$
$$= 1 - \alpha(1 - \ln\alpha)^2 + 2\Big[2x - x\ln x\Big]_\alpha^1$$
$$= 1 - \alpha\left(1 - 2\ln\alpha + \ln(\alpha)^2\right) + 2(2 - \ln 1 - 2\alpha + \alpha\ln\alpha)$$
$$= 1 - \alpha + 2\alpha\ln\alpha - \alpha(\ln\alpha)^2 + 4 - 4\alpha + 2\alpha\ln\alpha$$
$$= 5 - 5\alpha + 4\alpha\ln\alpha - \alpha(\ln\alpha)^2$$

Finalement $\boxed{I = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha}$

0.75 **c) Déduisons, en fonction de α, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$**

On a $\mathcal{A} = \int_\alpha^1 |f(x)|\, dx$ $u.a$ et f continue et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$

Donc $\forall x \in [\alpha, 1]$ on a $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(1)$

Et puisque $g(\alpha) = g(1) = 0$ alors $f(\alpha) = \alpha$ et $f(1) = 1$

D'où $\alpha \leq f(x) \leq 1$ pour tout x de $[\alpha, 1]$, c'est-à-dire f est positive sur $[\alpha, 1]$

Par conséquent : $\mathcal{A} = \int_\alpha^1 f(x)\, dx$ $u.a$
$$= \int_\alpha^1 \left(2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2\right) dx \ u.a$$
$$= \left(\Big[2x - 2\ln|x|\Big]_\alpha^1 + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha\right) u.a$$
$$= (2 - 2\alpha + 2\ln\alpha + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha)\, cm^2$$
$$\mathcal{A} = \left(7(1-\alpha) + (2 + 4\alpha - \alpha\ln\alpha)\ln\alpha\right) cm^2$$

Finalement $\boxed{\mathcal{A} = \left(7(1-\alpha) + (2+4\alpha-\alpha\ln\alpha)\ln\alpha\right)cm^2}$

7 - Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 \in]\alpha;1[$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 **a)** **Montrons, par récurrence, que $\alpha < \mathcal{U}_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

Pour $n = 0$ on a $u_0 \in]\alpha, 1[$ donc $\alpha < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\alpha < u_n < 1$ et on montre que $\alpha < u_{n+1} < 1$

On a $\alpha < u_n < 1$ et f une fonction dérivable (d'après la question **2-**) donc continue et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$

Donc $f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$ et puisque $f(\alpha) = \alpha$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$

Alors $\alpha < u_{n+1} < 1$

Et d'après le principe de récurrence on a $\boxed{\alpha < u_n < 1, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 **b)** Montrons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante (on peut utiliser la question $4-b)$)

D'après la question **4-b)** on a $f(x) > x$ pour tout x de $]\alpha, 1[$

Et d'après la question précédente on a $u_n \in]\alpha, 1[$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors $f(u_n) > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante}}$

0.75 **c)** Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculons sa limite

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1

Alors : $\boxed{\text{la suite } (\mathcal{U}_n) \text{ est convergente}}$ **Calcule de $\lim u_n$**

Soit $I =]\alpha, 1[$, on a f continue sur I, $f(I) = I$, $u_0 \in I$ et (u_n) convergente

Alors $\lim u_n$ est une solution de l'équation $f(x) - x = 0$ ou $g(x) = 0$

Et d'après la représentation graphique de la fonction g, les solutions sont α et 1

Donc $\lim u_n = \alpha$ ou $\lim u_n = 1$, et comme (u_n) est croissante alors $u_n > u_0 > \alpha$

D'où $\boxed{\lim u_n = 1}$

FIN

Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

On considère la suite numérique $(u)n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$

0.5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente

3 - On pose $v_n = \dfrac{3}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme

0.5 pt **b)** Exprimer u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de (u_n)

4 - On pose $w_n = \mathrm{e}^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

0.5 pt **b)** Calculer la limite de la somme S_n

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soient les points $A\,(2;1;2)$, $B\,(-2;0;5)$, $C\,(4;-5;7)$ et $\Omega\,(1;-1;0)$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

0.25 pt **b)** Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **c)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2 - Soient (P) le plan d'équation $3x+4y+z+1 = 0$ et (Δ) la droite passant par A et orthogonale au plan (P)

0.5 pt **a)** Montrer que (Δ) coupe (P) au point $H\left(\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right)$

0.5 pt **b)** Déterminer les coordonnées de D tel que H soit milieu de $[AD]$

3 - Soit (Q) le plan passant D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0.25 pt **a)** Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

0.5 pt **b)** Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

1 - On considère le nombre complexe : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

0.25 pt **a)** Montrer que $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

0.25 pt **b)** Déduire que a^{2022} est un nombre réel

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, soient les points $A(a)$ et $B(\bar{a})$

0.5 pt Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

3 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$

Soient z et $\bar{z}$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation E_α

Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe

0.5 pt **a)** Justifier que $\alpha > \dfrac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $|z| = |z - \sqrt{3}|$

0.5 pt **c)** Déduire que M et N appartiennent à (Δ) la médiatrice de $[OP]$

0.5 pt **d)** Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduisons dans ca cas les points d'intersection de (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

Une urne contient *quatre* boules blanches et *deux* boules noires, indiscernables au toucher

1 - On tire au hasard et simultanément *deux* boules de l'urne

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de l'événement A : " Tirer au moins une boule noire "

0.5 pt **b)** Soit l'événement B : " Obtenir *deux* boules de même couleur ". Montrer que $p(B) = \dfrac{7}{15}$

c) On répète cette expérience **cinq** fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage

0.5 pt Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé trois fois

2 - Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule *blanche* pour la première fois

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience

0.25 pt **a)** Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3

0.25 pt **b)** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

0.5 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 pt **d)** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)} \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) \ ; \ x > 2 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$; $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = xe^{x(2-x)} - x.\dfrac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Montrer que f est dérivable à gauche en 2

0.75 pt **c)** Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

0.75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)\mathrm{e}^{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout $x > 2$, $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$

0.5 pt **c)** Résoudre dans l'intervalle $]2;+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2) \leq 0$

0.75 pt **d)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

1 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On donne : $f(3) = 1$; $2 + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 2.6$ et $f\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \approx 0.8$)

6 - Soit $\lambda \in]2;3[$

0.5 pt **a)** En utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$\int_{\lambda}^{3} (x-2)^2 \ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2)\right)$$

0.5 pt **b)** Déduire en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y = 1$; $x = \lambda$ et $x = 3$

0.25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 2 \\ \lambda > 2}} \mathcal{A}(\lambda)$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2023

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$

0.5 **1 -** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

Raisonnons par récurrence

✓ Pour $n = 0$; on a $u_0 = 0 > -1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > -1$ est montrons que $u_{n+1} > -1$

$u_{n+1} - (-1) = u_{n+1} + 1 = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5} + 1 = \dfrac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} = \dfrac{3u_n + 3}{2u_n + 5} = \dfrac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5}$

Or d'après l'hypothèse on a $u_n > -1$ donc $u_n + 1 > 0$ et $2u_n > -2$

Donc $3(u_n + 1) > 0$ et $2u_n + 5 > 3 > 0$, d'où : $u_{n+1} + 1 > 0$ c.à.d. $u_{n+1} > -1$

✓ D'après le principe de la récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > -1$

0.5 **2 -** Montrons que la suite (u_n) est décroissante, puis déduisons que (u_n) est convergente

✍ Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - 2 - 2u_n^2 - 5u_n}{2u_n + 5} - u_n = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5} = \dfrac{-2u_n^2 - 4u_n - 2}{2u_n + 5} = \dfrac{-2(u_n + 1)^2}{2u_n + 5} < 0$

Donc u_n est décroissante

✍ Déduisons que (u_n) est convergente

(U_n) est décroissante est minorée par -1, donc (u_n) est convergente

3 - On pose $v_n = \dfrac{3}{1 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 **a)** Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminons son premier terme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{1+u_{n+1}} - \dfrac{3}{1+u_n}$, or $1 + u_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \dfrac{3(u_n+1)}{2u_n+5}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{\dfrac{3(u_n+1)}{2u_n+5}} - \dfrac{3}{1+u_n} = \dfrac{2u_n+5}{u_n+1} - \dfrac{3}{1+u_n} = \dfrac{2u_n+5-3}{u_n+1} = \dfrac{2(u_n+1)}{u_n+1} = 2$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

et de premier terme : $v_0 = \dfrac{3}{1+u_0} = \dfrac{3}{1+0}$

$v_0 = 3$

0.5 **b)** Exprimons u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduisons la limite de (u_n)

✍ Exprimons u_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit n de $\mathbb{N}$

On a (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$ _ Donc son terme général s'écrit : $v_n = v_0 + rn = 3 + 2n$

Or $v_n = \dfrac{3}{1+u_n}$ donc $1 + u_n = \dfrac{3}{v_n}$ c.à.d. $u_n = \dfrac{3}{v_n} - 1$

D'où $u_n = \dfrac{3}{3+2n} - 1$

✍ Déduisons la limite de (u_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{3+2n} - 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+2n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{3+2n} = 0$

4 - On pose $w_n = \mathbf{e}^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 **a)** Montrons que (w_n) est une suite géométrique et déterminons sa raison et son premier terme

On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = 2n + 3$, donc : $w_n = \mathbf{e}^{3-(2n+3)} = \mathbf{e}^{3-2n-3} = \mathbf{e}^{-2n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $w_{n+1} = \mathbf{e}^{-2(n+1)} = \mathbf{e}^{-2n-2} = \mathbf{e}^{-2n}\mathbf{e}^{-2} = \mathbf{e}^{-2}\mathbf{e}^{-2n} = \mathbf{e}^{-2}w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathbf{e}^{-2}$

Et de premier terme : $w_0 = \mathbf{e}^{-2\times 0} = \mathbf{e}^0 = 1$

0.5 **b)** Calculons la limite de la somme S_n

S_n est la somme de n termes successifs d'une suite géométrique (w_n) de raison $q = \mathbf{e}^{-2}$ et de premier terme $w_0 = 1$

Donc : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = w_0 \times \left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] = 1 \times \left[\dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}\right] = \dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Car $-1 < \mathbf{e}^{-2} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{e}^{-2})^{n+1} = 0$

Exercice 2 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(2;1;2)$, $B(-2;0;5)$, $C(4;-5;7)$ et $\Omega(1;-1;0)$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

0.5 **1 - a)** Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduisons que les points A, B et C ne sont pas alignés

On a : $\overrightarrow{AB}(4;-1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-6;5)$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-5+18)\vec{i} - (-20-6)\vec{j} + (24+2)\vec{k}$$

$$= 13\vec{i} + 26\vec{j} + 26\vec{k}$$

$$= 13\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

On a $\overrightarrow{\Omega A}(2-1;1-(-1);2-0)$

Donc $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ Alors $\vec{u}(1;2;2)$ par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}}$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{O}$, donc $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$

0.25 **b)** Vérifions que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

L'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit : $(ABC) : ax + by + cz + d = 0$

Et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1;2;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc $(ABC) : x+2y+2z+d = 0$

Or $A \in (ABC)$, donc $x_A + 2y_A + 2z_A + d = 0$, c.à.d. $2 + 2 + 4 + d = 0$, donc $d = -8$

Par conséquence $\boxed{(ABC) \ : \ x + 2y + 2z - 8 = 0}$

0.5 **c)** Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

On a $d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|x_\Omega + 2y_\Omega + 2z_\Omega - 8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|1 + 2\times(-1) + 2\times 0| - 8}{\sqrt{9}} = \dfrac{|1-2-8|}{3} = \dfrac{|-9|}{3} = 3 = R$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

Et puisque $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal au plan (ABC), alors A est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) Donc $\boxed{(ABC) \text{ est tangent à } (S) \text{ au point } A}$

2 - Soient (P) le plan d'équation $3x+4y+z+1 = 0$ et (Δ) la droite passant par A et orthogonale au plan (P)

0.5 **a)** Montrons que (Δ) coupe (P) au point $H\left(\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right)$

On a $(P) : 3x + 4y + z + 1 = 0$, donc $\vec{v}(3;4;1)$ est un vecteur normal au plan (P)

Et puisque $(P) \perp (\Delta)$, donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) passant par

$A(2;1;2)$

Donc une représentation paramétrique de (Δ) s'écrit : $(\Delta):\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+4t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)\Leftrightarrow\begin{cases} 3x+4y+z+1=0 \\ x=2+3t \\ y=1+4t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+2+t+1=0\Leftrightarrow 26t+13=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Donc (Δ) coupe (P) en un seul point H de coordonnées : $\begin{cases} x_H=2+3\times\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y_H=1+4\times\dfrac{-1}{2}=-1 \\ z_H=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

D'où $H(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2})$ est le point d'intersection de (Δ) et (P)

0.5 **b)** Déterminons les coordonnées de D tel que H soit milieu de $[AD]$

H est le milieu du segment $[AD]$

Donc : $x_H=\dfrac{x_A+x_D}{2}$ et $y_H=\dfrac{y_A+y_D}{2}$ et $z_H=\dfrac{z_A+z_D}{2}$

Donc : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+x_D}{2}$ et $-1=\dfrac{1+y_D}{2}$ et $\dfrac{3}{2}=\dfrac{2+z_D}{2}$

Donc : $1=2+x_D$ et $-2=1+y_D$ et $3=2+z_D$

Donc : $x_D=-1$ et $y_D=-3$ et $z_D=1$

Alors $D(-1;-31)$

3 - Soit (Q) le plan passant D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0.25 **a)** Montrons que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

On a $\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal au plan (Q) et $D\in(Q)$, alors $d(\Omega,(Q))=\Omega D$

Et puisque : $\Omega D=\sqrt{(-1-1)^2+(-3+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

Donc $d(\Omega,(Q))=\Omega D=3=R$ donc le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

(car D est le projeté orthogonal de Ω sur (Q))

0.5 **b)** Montrons que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

On a le plan (ABC) est de vecteur normal $\vec{u}(1;2;2)$, et le plan (Q) est de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car il nexiste pas de réel k tel que $\vec{u}=k\overrightarrow{\Omega D}$)

Donc les plan (Q) est (ABC) sont sécantes

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{\Omega D} = 0 \Leftrightarrow -2(-1-x) - 2(-3-y) + 1 - z = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2x + 6 + 2y + 1 - z = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + z + 9 = 0$ (c'est une équation cartésienne de (Q))

Montrons que $B \in (Q)$ et $C \in (Q)$

On a $2x_B + 2y_B + z_B + 9 = -4 + 0 - 5 + 9 = 0$, et $2x_C + 2y_C + z_C + 9 = 8 - 10 - 7 + 9 = 0$

W Donc $B \in (Q)$ et $C \in (Q)$

Et puisque B et C sont deux points distincts appartiens au plans (ABC) et (Q)

Alors les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère le nombre complexe : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

0.25 **a)** Montrons que $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

On a : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, donc $|a| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right) + \left(\dfrac{9}{4}\right)} = \sqrt{\left(\dfrac{12}{4}\right)} = \sqrt{3}$

D'où : $a = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc : $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

0.25 **b)** Déduisons que a^{2022} est un nombre réel

On a : $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, donc $a^{2022} = \left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{2022}$

$a^{2022} = \sqrt{3}^{2022}\left(\cos\dfrac{2022\pi}{3} + i\sin\dfrac{2022\pi}{3}\right)$

$a^{2022} = \left(\sqrt{3}^2\right)^{1011}(\cos 674\pi + i\sin 674\pi)$

$a^{2022} = 3^{1011}(1 + i \times 0) = 3^{1011} \in \mathbb{R}$

Donc a^{2022} est un nombre réel

2 - On considère les points $A(a)$ et $B(\bar{a})$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

0.5 Déterminons une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

R est la rotation de centre O et d'angle θ et qui transforme B en A

Donc : $R(B) = A$ signifie $z_A - z_O = \mathbf{e}^{i\theta}(z_B - z_O)$

donc $\dfrac{z_A}{z_B} = \mathbf{e}^{i\theta}$, c.à.d. $\dfrac{a}{\bar{a}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{3}}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{3}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\mathbf{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{e}^{i\theta}$

Donc $\dfrac{2\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de la rotation R

3 - Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$

Soient z et $\bar{z}$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation E_α

Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe

0.5 **a)** Justifions que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$

Pour que l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées, il faut que son discriminant Δ soit strictement inférieur à 0, c.à.d. $\Delta < 0$

c.à.d. $(-\sqrt{3})^2 - 4\alpha < 0$, donc $3 - 4\alpha < 0$, donc $3 < 4\alpha$

Alors : $\boxed{\alpha > \frac{3}{4}}$

Et on a $\boxed{z\bar{z} = \frac{\alpha}{1} = \alpha}$ (le produit des solutions z_1 et z_2 d'une équation de deuxième degré de type $az^2 + bz + c = 0$ est égale à $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$)

0.5 **b)** Montrons que : $|z| = |z - \sqrt{3}|$

L'équation (E_α) admet deux solutions z et $\bar{z}$

Alors $z + \bar{z} = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$ (la somme des solutions z_1 et z_2 d'une équation de deuxième degré de type $az^2 + bz + c = 0$ est égale à $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$)

D'où : $\bar{z} = \sqrt{3} - z$, donc $|\bar{z}| = |\sqrt{3} - z|$

Et comme $|\bar{z}| = |z|$ et $|\sqrt{3} - z| = |\sqrt{3} - z|$

Donc $\boxed{|z| = |z - \sqrt{3}|}$

0.5 **c)** Déduisons que M et N appartiennent à (Δ) la médiatrice de $[OP]$

On a $|z| = |z - \sqrt{3}|$ alors $OM = PM$, donc $M \in (\Delta)$

Et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$, donc $OM = PM$, alors M appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

Et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$ donc $|\bar{z}| = |z - \bar{\sqrt{3}}|$, donc $|\bar{z}| = |\bar{z} - \sqrt{3}|$ donc $ON = NP$, alors N appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

Finalement $\boxed{M \text{ et } N \text{ appartiennent à la médiatrice } (\Delta) \text{ du segment } [OP]}$

0.5 **d)** Déterminons la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduisons dans ca cas les points d'intersection de (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

✍ On a $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$, donc $|z| = \sqrt{3}$

Et puisque $\alpha = z\bar{z}$ et $z\bar{z} = |z|^2$, donc $\alpha = |z|^2 = \sqrt{3}^2$

Donc $\boxed{\alpha = 3}$

✍ On a $M(z) \in (\Delta)$, donc $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$, donc $|z_M - z_P| = \sqrt{3}$, donc $MP = \sqrt{3}$

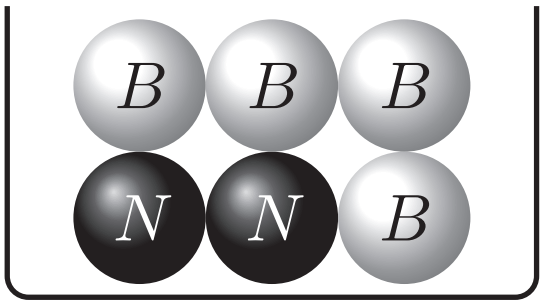
Et on a $N(\bar{z}) \in (\Delta)$, donc $|\bar{z} - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$, donc $|z_N - z_P| = \sqrt{3}$, donc $NP = \sqrt{3}$

D'où les points M et N appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Par conséquence $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont les pointes d'intersection de la droite } (\Delta) \text{ et le cercle de centre } P \text{ et de rayon } \sqrt{3}}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient *quatre* boules blanches et *deux* boules noires, indiscernables au toucher



Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

1 - On tire au hasard et simultanément *deux* boules de l'urne

On a $Card(\Omega) = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6\times 5\times 4!}{2!4!} = \dfrac{30}{2} = 15$

0.5 **a)** Calculons la probabilité de l'événement A : " Tirer au moins une boule noire "

L'événement A est équivalent a tirer deux boules noires ou une boule noir et une boule blanche

$p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_2^1C_4^1 + C_2^2}{15} = \dfrac{2\times 4+1}{15} = \dfrac{9}{15}$

Donc $\boxed{p(A) = \dfrac{3}{5}}$

0.5 **b)** Soit l'événement B : " Obtenir *deux* boules de même couleur ". Montrer que $p(B) = \dfrac{7}{15}$

L'événement B est équivalent a tirer deux boules noires ou deux boule blanches

$p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_2^2 + C_4^2}{15} = \dfrac{1+6}{15}$

Donc $\boxed{p(B) = \dfrac{7}{15}}$

c) On répète cette expérience **cinq** fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage

0.5 Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé trois fois

On va utiliser une variable aléatoire binomiale Y de paramètres $n = 5$ et $p = 3$

$p(Y=3) = C_5^3 p(B)^3(1-p(B))^2 = 10\times\left(\dfrac{7}{15}\right)^3\left(1-\dfrac{7}{15}\right)^2$

$p(Y=3) = 10\times\left(\dfrac{7}{15}\right)^3\left(\dfrac{8}{15}\right)^2 = \dfrac{10\times 7^3\times 8^2}{15^3\times 15^2}$

Donc $\boxed{p(Y=3) = \dfrac{43904}{158875}}$

2 - Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule *blanche* pour la première fois

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience

0.25 **a)** Justifions que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3

➥ Si la première boule tirée est blanche, on arrête donc l'expérience au premier tirage, donc X peut avoir la valeur 1

➥ Si la première boule tirée est noire et la seconde est blanche, on arrête donc l'expérience au deuxième tirage, donc X peut avoir la valeur 2

➥ Si les deux premières boules tirées sont noire, et la troisième est blanche, on arrête donc l'expérience au troisième tirage, donc X peut avoir la valeur 3

D'où : $\boxed{X(\Omega) = \{1; 2; 3\}}$

0.25 **b)** Montrons que $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

$X = 2$ signifie que la première boule tirée est noire et la seconde boule tirée est blanche

$p(X = 2) = \dfrac{A_2^1 A_4^1}{A_6^2} = \dfrac{2 \times 4}{30} = \dfrac{8}{30}$, donc $\boxed{p(X = 2) = \dfrac{4}{15}}$

0.5 **c)** Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

➠ $X = 1$ signifie que la première boule tirée est blanche : $p(X = 1) = \dfrac{A_4^1}{A_6^1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

➠ $X = 2$ signifie que la première boule tirée est noire et la seconde boule tirée est blanche : $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

➠ $X = 3$ signifie que les deux premières boules tirées sont noires et la troisième boule tirée est blanche : $p(X = 3) = \dfrac{A_2^1}{A_6^1} \times \dfrac{A_1^1}{A_5^1} \times \dfrac{A_4^1}{A_4^1} = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

0.5 **d)** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

La probabilité d'obtenir au moins une boule noire c'est équivalente à avoir une ou deux boules noires, c.à.d. $X = 2$ ou $X = 3$

Donc $p = p(X = 2) + p(X = 3) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5}{15}$

Alors $\boxed{p = \dfrac{1}{3}}$

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \mathbf{e}^{x(2-x)} \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) \ ; \ x > 2 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 1 cm)

0.5 **1 -** Montrons que la fonction f est continue au point 2

On a f est continue à gauche de 2 et on a $f(2) = 1$

Et on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (1 - (x-2)^2 \ln(x-2))$

On pose : $X = x - 2$ (si $x \to 2^+$ alors $X \to 0^+$)

On obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} (1 - X^2 \ln X) = 1 = f(2)$ (car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0$)

D'où f est continue à droite de 2

Par suite f est continue au point 2

0.25 **2 - a)** Vérifions que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$; $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\dfrac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

Soit x un réel non nul tel que : $x < 2$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \frac{(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{x^2\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2x\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x)\mathbf{e}^{x(2-x)}}{x-2} + \frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)}}{x-2} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \\ &= x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\dfrac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

0.5 **b)** Montrons que f est dérivable à gauche en 2

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \\ &= 2\mathbf{e}^0 - 2(\text{car } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = 1 \text{on posant } X = x(2-x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2) = 0$

0.75 **c)** Montrons que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2) - 1}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)^2 \ln(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x-2)\ln(x-2) \\ &= 0(\text{on posant } X = x-2)) \end{aligned}$$

On a

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2) = 0$

Conclusion : f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_g(2) = f'_d(2) = 0$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$

Par conséquence $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point $I(2; f(2))$

0.25 **3 - a)** Vérifions que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}$

Soit $x \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= (x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= x^2\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2x\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (x^2-2x)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}$

0.5 **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprétons géométriquement le résultat

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}\right)$

On pose $X = x(2-x)$ (si $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$)

On obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (-X\mathbf{e}^X + \mathbf{e}^X) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathbf{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0$)

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangent horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

0.75 **c)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + (x-2)^2 \ln(x-2)\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$)

Et on a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{(x-2)^2}{x} \ln(x-2)\right) = +\infty$

(car $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)^2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x-2) = +\infty$)

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.5 **4 - a)** Montrons que pour tout $x < 2$, $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)\mathbf{e}^{x(2-x)}$

Soit $x < 2$; on a $f(x) = (x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)}\right)' \\ &= \left((x-1)^2\right)' \mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2 \left(\mathbf{e}^{x(2-x)}\right)' \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2 \left(x(2-x)\right)' \mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2(-2x+2)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2(x-1)^2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \left(2 - 2(x-1)^2\right) \\ &= \left(2 - 2(x-1)^2\right)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= \left(2 - 2(x^2-2x+1)\right)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (2 - 2x^2 + 4x - 2)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (-2x^2 + 4x)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x(2-x)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)}$

0.5 **b)** Montrons que pour tout $x > 2$, $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$

Soit $x \geqslant 2$; on a $f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2)$

f est dérivable sur $]2;+\infty[$ comme produit et composé de fonctions dérivables sur $]2;+\infty[$

et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+(x-2)^2\ln(x-2)\right)' \\ &= 0 + \left((x-2)^2\right)'\ln(x-2) + (x-2)^2\left(\ln(x-2)\right)' \\ &= 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2)^2\frac{1}{x-2} \\ &= 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = (x-2)\left(2\ln(x-2)+1\right)}$

0.5 **c)** Résolvons dans l'intervalle $]2;+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2) \leq 0$

$$\begin{aligned} 1+2\ln(x-2) < 0 &\Leftrightarrow 2\ln(x-2) < -1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x-2) < \frac{-1}{2} \\ &\Leftrightarrow x-2 < e^{\frac{-1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}} + 2 \\ &\Leftrightarrow x < 2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Donc $S = \left]-\infty; 2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cap]2;+\infty[$

D'où $\boxed{S = \left]2; 2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right[}$

0.75 **d)** Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

➥ Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ on a $(2-x)e^{x(2-x)} > 0$ et on a :

x	$-\infty$		0		1		2
$2x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

➥ Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ on a $x-2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1+2\ln(x-2)$

et on a :

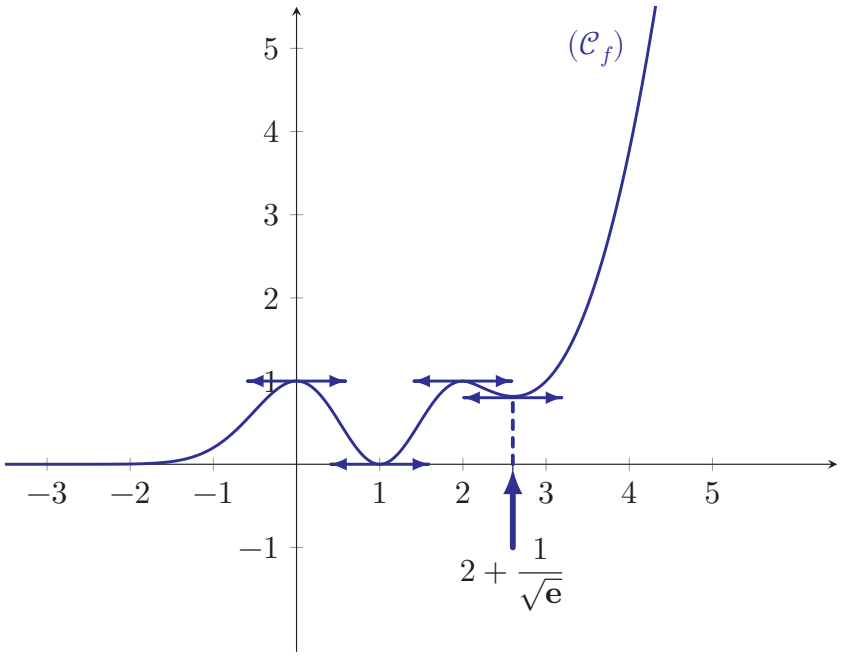
x	2		$2+\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$1+2\ln(x-2)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		1		2		$2+\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	1	↘	0	↗	1	↘	$f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↗	$+\infty$

1 **5 -** Construisons la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)



6 - Soit $\lambda\in\,]2;3[$

0.5 **a)** Montrons, en utilisant une intégration par partie, que :

$$\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

On pose : $U(x)=\ln(x-2)$ et $V'(x)=(x-2)^2$

Alors : $U'(x)=\frac{1}{x-2}$ et $V(x)=\frac{(x-2)^3}{3}$

D'après la formule de l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)\right]_{\lambda}^{3}-\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)\right]_{\lambda}^{3}-\frac{1}{9}\left[(x-2)^3\right]_{\lambda}^{3}\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)-\frac{1}{9}(x-2)^3\right]_{\lambda}^{3}\\ &= \frac{1}{3}\times 1^3\ln 1-\frac{1}{9}\times 1^3-\left(\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(\lambda-2)^3\right)\\ &= 0-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)\end{aligned}$$

Donc $\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$

0.5 **b)** Déduisons, en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y=1$; $x=\lambda$ et $x=3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^{3} |f(x)-y|\mathbf{d}x \quad ua \\ &= \int_{\lambda}^{3} \left|1+(x-2)^2\ln(x-2)-1\right|\mathbf{d}x \quad ua \ (\text{car } [\lambda;3]\subset]2;+\infty[\,) \\ &= \int_{\lambda}^{3} \left|(x-2)^2\ln(x-2)\right|\mathbf{d}x \quad ua\end{aligned}$$

Et on a $x\in[\lambda;3]$ c.à.d. $\lambda\leqslant x\leqslant 3$ donc $\lambda-2\leqslant x-2\leqslant 1$ donc $\ln(x-2)<0$

D'où $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{3} -(x-2)^2\ln(x-2)\mathbf{d}x ua$

Donc $\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\right)\right]cm^2}$

0.25 **c)** Calculons $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda) &= \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(\lambda-2)^3\right)\end{aligned}$$

On pose $\gamma=\lambda-2$ (si $\lambda\to 2^+$ alors $\gamma\to 0^+$)

On obtient $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\substack{\gamma\to 0\\ \gamma>0}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\gamma^3\ln\gamma-\frac{1}{9}\gamma^3\right)$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{1}{9}}$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=0$)

FIN

Exercice 1 — Session : NORMAL 2024 — 3 Pts

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

0.25 pt **2 - a)** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : NORMAL 2024 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

0.25 pt **1 -** Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0.25 pt **2 -** Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

0.5 pt **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (T) de rayon à déterminer.

0.5 pt **4 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

0.5 pt **b)** Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 pt **c)** Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2024 — 4 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B daffixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 pt **1 -** Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) i$; puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 pt **b)** En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

0.5 pt **a)** Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés. — **0.5 pt**

c) Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$ — **0.5 pt**

d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O — **0.5 pt**

Exercice 4 — Session : NORMAL 2024 — 2 Pts

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

1 - Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'évènement "les deux boules tirées portent le même numéro" — **0.5 pt**

2 - Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'évènement "La somme des numéros des boules tirées est 4" — **0.5 pt**

3 - Calculer $p(A \cap B)$ — **0.5 pt**

4 - Les événements A et B sont -ils indépendants ? Justifier. — **0.5 pt**

Exercice 5 — Session : NORMAL 2024 — 8 Pts

Partie I

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1 - Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v — **0.5 pt**

2 - Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ — **0.25 pt**

3 - Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ — **0.5 pt**

Partie II

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

1 - a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ — **0.25 pt**

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$ — **0.5 pt**

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat. — **0.5 pt**

2 - a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ — **0.25 pt**

b) Vérifier que pour tout $x < 0, f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$ — **0.5 pt**

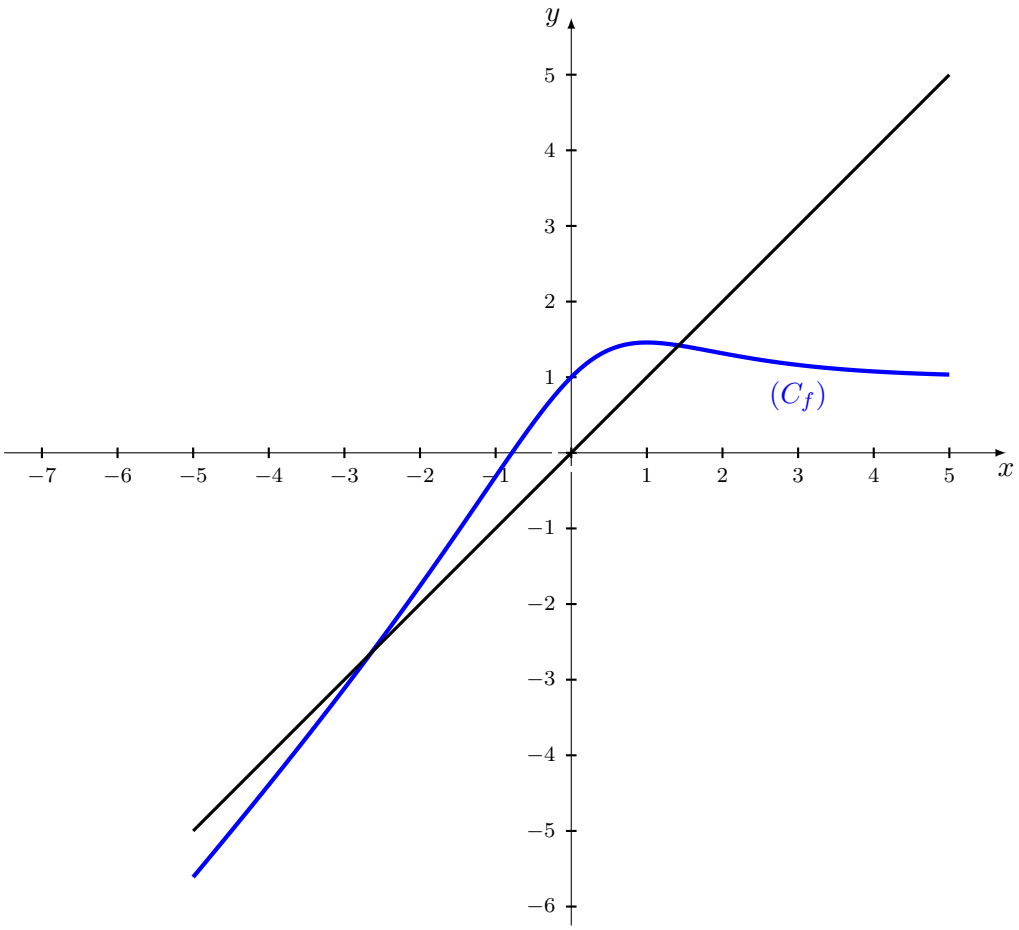
c) Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$ — **0.75 pt**

3 - a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ — **0.5 pt**

b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ — **0.5 pt**

0.75 pt **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$

4 - La courbe (C_f) ci-après est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé



0.5 pt **a)** Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

0.5 pt **b)** Montrer que : $e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

5 - Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]-\infty, 1]$

0.5 pt **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0.75 pt **b)** Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1. Et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2024

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 4 - \frac{6}{1+u_n} &= \frac{4(u_n+1)}{1+u_n} - \frac{6}{1+u_n} \\ &= \frac{4+u_n+4-6}{1+u_n} \\ &= \frac{4u_n-2}{1+u_n} \end{aligned}$$

$$4 - \frac{6}{1+u_n} = u_{n+1}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$

0.5 pt **b)** Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

Pour n=0 on a $u_0 = 4$ et $2 \leq 4 \leq 4$

donc $2 \leq u_0 \leq 4$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$

supposons que $2 \leq u_n \leq 4$, pour n fixé de $\mathbb{N}$

Et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

On a :

$$\begin{aligned}
2 \leqslant u_n \leqslant 4 &\Longrightarrow 3 \leqslant 1+u_n \leqslant 5 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{1+u_n} \leqslant \frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \frac{6}{1+u_n} \leqslant \frac{6}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \frac{6}{1+u_n} \leqslant 2 \\
&\Longrightarrow -2 \leqslant \frac{-6}{1+u_n} \leqslant -\frac{6}{5} \\
&\Longrightarrow 4-2 \leqslant 4-\frac{6}{1+u_n} \leqslant 4-\frac{6}{5} \\
&\Longrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{14}{5} \\
&\Longrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \qquad (car \frac{14}{5} \leq 4)
\end{aligned}$$

D'où d'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq 4$

0.25 pt **2 - a)** Montrons que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 2}{1+u_n} - u_n \\
&= \frac{4u_n - 2 - u_n(1+u_n)}{1+u_n} \\
&= \frac{4u_n - 2 - u_n - u_n^2}{1+u_n} \\
&= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{1+u_n}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(u_n - 1)(1 - u_n)}{1+u_n} &= \frac{2u_n - u_n^2 - 2 + u_n}{1+u_n} * \\
&= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{1+u_n}
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - 4_n)}{1 + u_n}$

0.5 pt

- — Montrons que la suite (u_n) est décroissante

  On a pour tout entier naturel n : $u_{n+2} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ On sait que : $2 \leqslant u_n \leqslant$

  Donc : $1 \leqslant u_n - 1 \leqslant 3$ D'où $u_n - 1 > 0$

  Et $2 \leqslant 2 - u_n \leqslant 0$ D'où $2 - u_n \leqslant 0$

  Alors $(u_n - 1)(2 - u_n) \leq 0$

  Et puisque : $3 \leqslant 1 + u_n \leqslant 5$ d'où $u_n + 1 > 0$

Donc $\dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n} \leq 0$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1}-u_n \leq 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante décroissante.

- Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est décroissante et minorée par $2\,;\,(un \geq 2)$

Donc la suite (u_n) est convergente

3 - Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **a)** Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2-u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\ &= \frac{2-\frac{4u_n-2}{1+u_n}}{1-\frac{4u_n-2}{1+u_n}} \\ &= \frac{\frac{2(4+u_n)-(4u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{1+u_n-(4u_n-2)}{1+u_n}} \\ &= \frac{2+2u_n-u_n+2}{1+u_n-4u_n+2} \\ &= \frac{-2u_n+4}{-3u_n+3} \\ &= \frac{2(-u_n+2)}{3(-u_n+1)} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2-u_n}{1-u_n}\right) \\ &= \frac{2}{3}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

0.5 pt **b)** Montrons que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme v_0

Donc $v_n = v_0 \cdot q^n = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$

car $v_0 = \dfrac{2-u_0}{1-u_0} = \dfrac{2-4}{1-4} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Et on a :

$$v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n} \Rightarrow v_n(1-u_n) = 2-u_n$$

$$\Rightarrow v_n - v_n \cdot u_n = 2-u_n$$

$$\Rightarrow u_n - v_n \cdot u_n = 2-v_n$$

$$\Rightarrow u_n(1-v_n) = 2-v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1-v_n}{1-v_n} + \frac{1}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

0.5 pt **c)** Calculons la limite de la suite (u_n).

$$\lim u_n = \lim 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = 1+1 = 2$$

Car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

D'où $\lim u_n = 2$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

0.25 pt **1 -** Montrons que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

On a (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$

Soit $M(x;y;z) \in (P)$ on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2(x+1) + (-2) \times (y-0) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\iff 2x+2-2y+z+1 = 0$$

$$\iff 2x-2y+z+3 = 0$$

D'où l'équation du plan (P) est $2x - 2y + z + 3 = 0$

0.25 pt **2 -** Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S)

On a (S) est la sphère de centre $\Omega(2; -1; 0)$ et de rayon $R = 5$

Soit $M(x, y, z) \in (S)$

On a :
$$\begin{aligned}\Omega M^2 = R^2 &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2 = 5^2\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25\\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 25\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 5 - 25 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0\end{aligned}$$

D'où l'équation cartésienne de la sphère (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

On a :
$$\begin{aligned}d(\Omega; (P)) &= \frac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}\\ &= \frac{|2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 + 3|}{\sqrt{4+4+1}}\\ &= \frac{|4+2+3|}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{9}{3}\\ &= d(\Omega; (P))3\end{aligned}$$

D'où $d(\Omega; (P)) = 3$

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (T) de rayon à déterminer.

0.5 pt

On a : $d(\Omega; (P)) = 3 < R$

donc le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de rayon r

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{R^2 - d^2}\\ &= \sqrt{5^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{16}\\ r &= 4\end{aligned}$$

4 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) **0.5 pt**

On a (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soient $M(x,y,z) \in (\Delta)$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\overrightarrow{\Omega M} = t\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2t \\ y+1=-2t \quad /(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-2t \quad /(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (Δ) est (Δ) : $\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1-2t \backslash (t\in\mathbb{R}) \\ z &= t \end{cases}$

b) Montrons que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ) **0.5 pt**

On a (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

Et le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H

Donc H est le projeté orthogonale de Ω sur (P)

$$\text{donc } H \in (P)\cap(\Delta) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+2t \\ y_H = -1-2t \backslash (t\in\mathbb{R}) \\ z_H = t \\ 2x_H - 2y_H + z_H + 3 = 0 \end{cases}$$

Donc : $2(2+2t)-2(-1-2t)+t+3=0$ D'où : $4+4t+2+4t+t+3=0$ Alors : $9t+9=0$

Donc : $t = -1$ Finalement : $\begin{cases} x_H = 2 + 2 \times (-1) = 0 \\ y_H = -1 - 2 \times (-1) = 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$

D'où $H(0;1;-1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 pt

c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

On a : $\vec{n}(2;-2;1)$ et $\overrightarrow{AB}(2;2;0)$

donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = 4 - 4 = 0$

donc $(AB) \perp (\Delta)$

Déterminons les coordonnées du milieu de $[AB]$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$
$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(-1) + (-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc H est le milieu du segment $[AB]$

donc $H \in (\Delta)$

D'où (Δ) est la médiatrice de $[AB]$

Exercice 3 : (4 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B daffixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 pt

1 - Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ On a $a = \sqrt{3}(1-i)$

Donc :

$$\begin{aligned} |a| &= |\sqrt{3}(1-i)| \\ &= |\sqrt{3}| \cdot |1-i| \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}(1-i) \\ &= \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc $|a| = \sqrt{6}$ et $\arg(a) \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$.

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$; On a :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}(1-i)} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}i + i\sqrt{3} + i^2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}i+3i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+3} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}+3\sqrt{3}i+3i}{6} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3(\sqrt{3}+1)i}{6} \end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)i$

Vérifions que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{3}{3+\sqrt{3}}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}\times\frac{3}{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

0.75 pt

b) En **Déduisons une forme trigonométrique du complexe** b

On a : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc :
$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right) a \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{3}\right) e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Donc : $b = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \mathbf{cos}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\,\mathbf{sin}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Vérifions que b^{24} est un nombre réel.

$$\begin{aligned} b^{24} &= \left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \cdot \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{24} \\ &= \left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)^{24} \cdot \left(\mathbf{cos}(24\frac{\pi}{12}) + i \cdot \mathbf{sin}\left(24\frac{\pi}{12}\right)\right) \quad \text{(Formule de Moiver)} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^{24} \cdot (\mathbf{cos}(2\pi) + i \cdot \mathbf{sin}(2\pi)) \end{aligned}$$

D'où $b^{24} = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^{24} \in \mathbb{R}$

3 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

On pose $R(B) = B', R(A) = A'$ et $R\left(A'\right) = A''$

a) Vérifions que $z' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot (z-0) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\mathbf{cos}\,\frac{\pi}{6} + i \cdot \mathbf{sin}\,\frac{\pi}{6}\right) \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \cdot z \end{aligned}$$

0.5 pt

Vérifions que $\arg\left(a'\right) \equiv \dfrac{-\pi}{12}[2\pi]$ **où** a' **est l'affixe du point** A'

$R(A) = A' \Leftrightarrow a' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \cdot a$

Donc :
$$\begin{aligned}\textbf{arg}\left(a^{'}\right) &\equiv \textbf{arg}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\cdot a\right) \quad [2\pi]\\ &\equiv \textbf{arg}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right) + \textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi] \quad \text{car :} \quad \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)=e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\\ &\equiv \frac{2\pi-3\pi}{12}[2\pi)\\ \textbf{arg}\left(a^{'}\right) &\equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi].\end{aligned}$$

Donc : $\textbf{arg}\left(a^{'}\right) \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$

b) Montrons que l'affixe du point $A^{''}$ est $a^{''} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$\begin{aligned}R\left(A^{''}\right) = a^{''} &\Leftrightarrow a^{''} = e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot a^{'}\\ &\Leftrightarrow a^{''} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^2\cdot a\end{aligned}$$

Donc :
$$\begin{aligned}|a^{''}| &= \left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|^2\cdot|a|\\ &= 1\cdot\sqrt{6}\\ &= \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Par suite :
$$\begin{aligned}\textbf{arg}(a^{''}) &\equiv \textbf{arg}\left(\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^2\cdot a\right)\\ &\equiv \textbf{arg}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2\right)+\textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &\equiv 2\cdot\textbf{arg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &= \frac{2\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]\\ a^{''} &= \sqrt{6}\cdot\left(\textbf{cos}\,\frac{\pi}{12}+i\cdot\textbf{sin}\,\frac{\pi}{12}\right)\\ a^{''} &= \sqrt{6}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

D'où l'affixe du point $A^{''}$ est $a^{''} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.5 pt **Déduisons que les points $O, A^{''}$ et B sont alignés.**

On a :

$$\frac{b-0}{a''-0} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}+6}{6} = \frac{\sqrt{3}+3}{3} \in \mathbb{R}$$

Comme $\frac{b-0}{a''-0} \in \mathbb{R}$

Alors les points O, A'' et B sont alignés

0.5 pt **c)** Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

$R(B) = B' \Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot b$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times a \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$ car : $b = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{12}}$ (Voir question 2-b)

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{3\pi}{12}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \bar{a}$ car : $\bar{a} = \sqrt{6}e^{-(-i\frac{\pi}{4})} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

0.5 pt **d) Déduisons que le triangle OAB' est rectangle en O**

Comme : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \left(\frac{b'-0}{a-0}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{b'}{a}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\bar{a}}{a}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot i\right)$ $[2\pi]$ (Car :$\bar{a} = i \cdot a$)

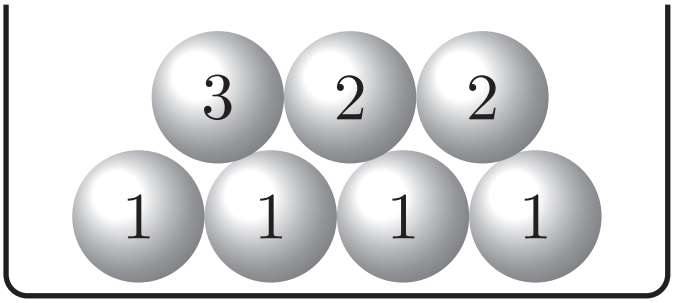
$\equiv \mathbf{arg}(i)[2\pi]$ $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}^+\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $(2\pi]$

Donc le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 : (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



L'urne U

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 pt **1 -** Montrons que $P(A) = \frac{1}{3}$

Soit Ω l'univers des éventualités

On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne

Donc : $card(\Omega) = C_7^2 = 21$

Puisque les boules sont indiscernables au toucher alors on a une situation équiprobabilité

D'où : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)}$

A : tirée deux boules portent le nombre 2 , où bien 1

$card(A) = C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7$

Donc : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

0.5 pt **2 -** Montons que $P(B) = \frac{5}{21}$

B : Tirées deux poules portent les nombres 1 et 3 où bien 2 et 2

Donc $card(B) = C_4^1 + C_2^2 = 4 + 1 = 5$

Donc : $P(B) = \frac{card(B)}{card(\omega)} = \frac{5}{21}$

0.5 pt **3 -** Calculons $P(A \cap B)$

$A \cap B$: tirée deux boules de même couleur dont la somme égale à 4 (les deux boules tirées

portent le nombre 2)

$card(A \cap B) = C_2^2 = 1$

Donc : $P(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card(\omega)} = \dfrac{1}{21}$

0.5 pt **4 -** l'indépendance des événements A et B.

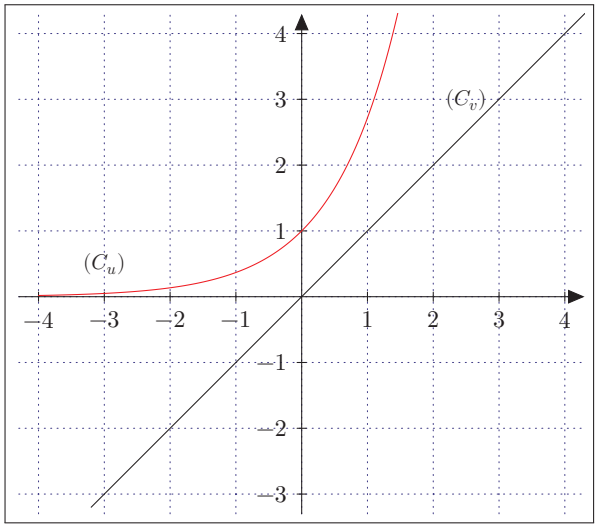
On a $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{21} = \dfrac{5}{63} \neq P(A \cap B)$

Donc A et B ne sont pas indépendants

Problème : (8 pts)

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

0.5 pt **1 -** Traçons dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v



0.25 pt **2 -** Justifions graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; (C_u) est en dessus de (C_v)

Alors pour tout x de $\mathbb{R}$; $e^x - x > 0$

3 - Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites

0.5 pt d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites

d'équations $x=0$ et $x=1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 |u(x)-x|\mathbf{d}dx.u.s \\ &= \int_0^1 |e^x-x|\mathbf{d}dx.u.s \\ &= \int_0^1 e^x-x\mathbf{d}dx.u.s \quad \text{car}\,;\ e^x-x>0 \\ &= \left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1.u.s \\ &= \left(e-1\frac{1}{2}-(e^0-0)\right).u.s \\ \mathcal{A} &= \left(e-\frac{3}{2}\right).us\end{aligned}$$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x+1-\ln(e^x-x)$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que f est définie sur $\mathbb{R}$

Soit D_f la domaine de la définition de la fonction f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\mathbb{R}\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/e^x-x>0\}$

D'après question 2 ***Partie I*** on a $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ e^x-x>0$.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)=1-\ln(1-xe^{-x})$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) &= x+1-\ln\left(e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right) \\ &= x+1-\left(\ln(e^x)+\ln\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right) \\ &= x+1-x-\ln(1-xe^{-x}) \\ &= 1-\ln(1-xe^{-x})\end{aligned}$$

Car : $\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$ et $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\quad ;\quad (a,b)\in\mathbb{R}_+^*$

Donc : $f(x)1-\ln(1-xe^{-x})$

0.5 pt **c)** Déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, puis interprétons géométriquement ce résultat.

On pose $t=-x$ si $x\to+\infty$ on a $t\to-\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-xe^{-x}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-xe^{-x})=0$

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln(1-xe^{-x})=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Alors la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$

0.25 pt **2 - a)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On pose $t=-x$ si $x\to-\infty$ on a $t\to+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{t} = +\infty$ car : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - xe^{-x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.5 pt **b)** Vérifions que pour tout $x<0, f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

Soit $x<0$

$$f(x) = x+1-\ln(e^{x}-x)$$
$$= x+1-\ln\left(-x\left(\frac{e^{x}}{-x}+1\right)\right)$$
$$f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

Donc : $\forall x<0\,;\ f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

0.75 pt **c)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis déduisons que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{t} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Donc : (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **a)** Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^{x}-x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \left(x + 1 - \ln(e^x - x)\right)$

$$= 1 - \frac{(\mathbf{e}^x - x)'}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$= 1 - \frac{\mathbf{e}^x - 1}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$= \frac{\mathbf{e}^x - x - \mathbf{e}^x + 1}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$f'(x) = \frac{1 - x}{\mathbf{e}^x - x}$$

Alors $\boxed{f'(x) = \frac{1 - x}{\mathbf{e}^x - x}}$

0.5 pt **b)** Étudions le signe de la fonction dérivé de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

Le signe de f' est celui de $1 - x$ car $\mathbf{e}^x - x > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

Déduisons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$2 - \ln(\mathbf{e} - 1)$	↘	1

$f(1)1 + 1 - \ln(\mathbf{e}^1 - 1) = 2 - \ln(\mathbf{e} - 1)$

0.75 pt **c)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1; 0[$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est dérivable sur $\mathbb{R}$), et donc continue sur $[-1; 0]$

f est strictement croissante sur $[-1; 0]$ (voir tableau de variation de f)

✍ $f(-1) = -1 + 1 - \ln(\mathbf{e}^{-1} + 1) = -\ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1)$

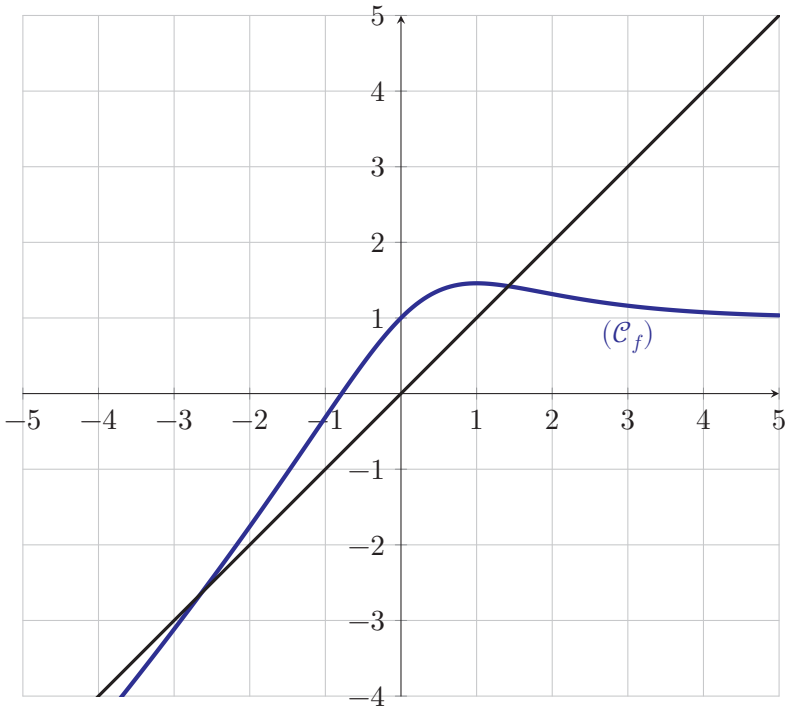
Or $\frac{1}{\mathbf{e}} + 1 > 1 \Rightarrow \ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1) > 0 \Rightarrow -\ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1) < 0$

✍ $f(0) = 0 + 1 - \ln(\mathbf{e}^0 - 0) = 1 - 1 > 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

, $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique dans l'intervalle }]-1; 0[}$

3 - La courbe (C_f) suivante est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé



0.5 pt **a)** Justifions graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β

On remarque d'après la figure que la courbe (C_f) de la fonction f coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points d'abscisses α et β

Donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β

0.5 pt **b)** Montrons que $\mathbf{e}^{\alpha} - \mathbf{e}^{\beta} = \alpha - \beta$

(Il y as d'autre méthodes pour aboutir au résultat)

On a α et β sont solutions de l'équation $f(x) = x$, donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$

$$f(\alpha) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\alpha} - \alpha = \mathbf{e} \qquad ①$$

$$f(\beta) = \beta \Rightarrow f(\beta) - \beta = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\beta} - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\beta} - \beta) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\beta} - \beta = \mathbf{e} \qquad ②$$

De ① et ② on a $\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha = \mathbf{e}^{\beta} - \beta$

D'où $\mathbf{e}^{\alpha} - \mathbf{e}^{\beta} = \alpha - \beta$

0.5 pt **4 - a)** Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

On a g est continue sur $]-\infty;1]$ (car dérivable sur $]-\infty;1]$)

Et g est strictement croissante sur $]-\infty;1]$ (tableau de variation)

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$$\begin{aligned} J &= g(I) \\ &= g(]-\infty;1]) \\ &= \left]\lim_{-\infty\to g(x)};g(1)\right] \\ &=]-\infty;2-\mathbf{ln}(\mathbf{e}-1)] \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{J=]-\infty;2-\mathbf{ln}(\mathbf{e}-1)]}$

0.75 pt

b) Vérifions que g^{-1} est dérivable en 1 et calculons $\left(g^{-1}\right)'(1)$

On a $f(0)=1$, donc $g(0)=1$

Or g est dérivable en 0 et $g'(0)=\dfrac{1-0}{\mathbf{e}^0-0}=1\neq 0$

Donc $\boxed{g^{-1} \text{ est dérivable en } 1}$

Et on a :

$$\begin{aligned} \left(g^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{g'(0)} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\left(g^{-1}\right)'(1)=1}$

Exercice 1 Session : RATTRAPAGE 2024 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1;1;0)$ et $\Omega(-1;1;-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P)

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P)

2 - Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

0.5 pt **a)** Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon

0.5 pt **b)** Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon

3 - Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel

0.25 pt **a)** Vérifier que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

0.25 pt **c)** Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier

Exercice 2 Session : RATTRAPAGE 2024 — 4 Pts

I) On considère dans l'espace des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2-4z+9=0$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2$

0.5 pt **2 -** Résoudre l'équation (E)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les point A, B et C d'affixes respectives $a=2+i\sqrt{5}$, $b=2-i\sqrt{5}$ et $c=2-\sqrt{5}$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $|a|=3$

0.25 pt **b)** Montrer que le triangle OAB est isocèle

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que $\dfrac{a-c}{b-c}=i$

0.5 pt **b)** Déduire la nature du triangle ABC

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

0.5 pt **b)** Montrer que $ADBC$ est un carré

4 - On pose $x_n = \left(\dfrac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \dfrac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul

0.25 pt **a)** Vérifier que $x_n\overline{x_n}=1$

0.5 pt **b)** Montrer que $y_n+\overline{y_n}=1$ puis déduire la partie réelle de y_n

Exercice 3 Session : RATTRAPAGE 2024 — 2 Pts

Une urne contient huit boules : quarte boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement est sans remise trois boules de l'urne

0.25 pt **1 -** Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336

0.5 pt **2 -** Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches »

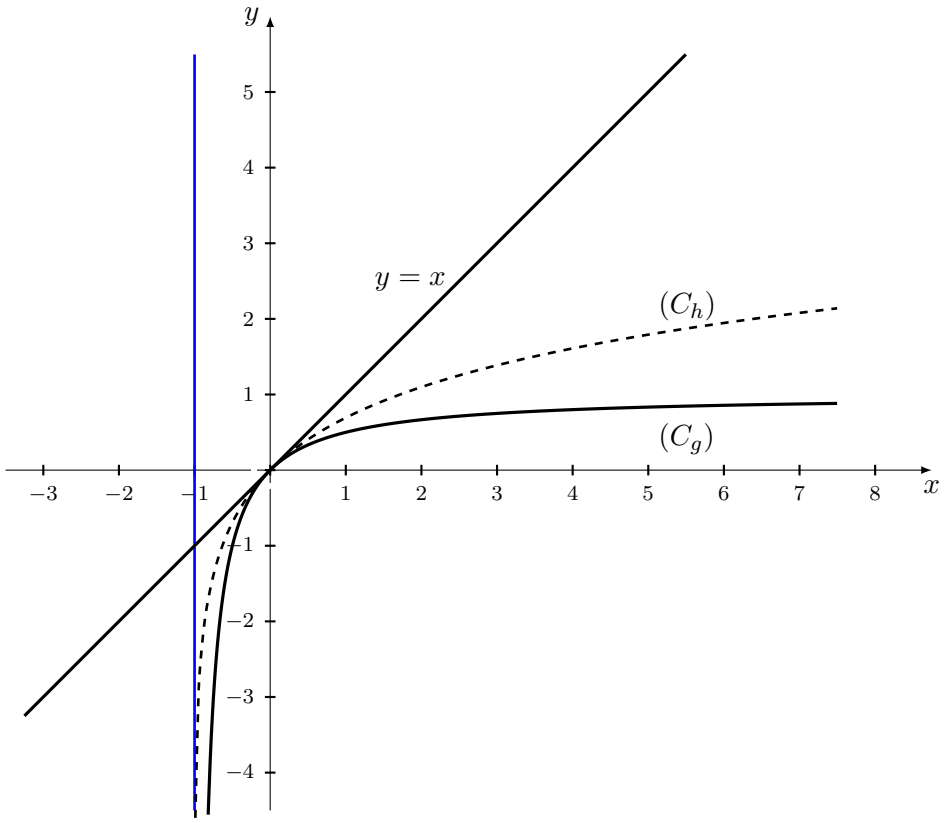
0.75 pt **3 -** Montrer que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \dfrac{5}{56}$

0.5 pt **4 -** Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes »

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2024 — 11 Pts

Partie I

La figure ci-après représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé



0.5 pt **1 - a)** A partir de cette figure, justifier que :
$\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $]-1;+\infty[$

0.25 pt **b)** En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$,
pour tout x de $]-1;+\infty[$

0.5 pt **c)** Prouver que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$,
pour tout x de $\mathbb{R}$

2 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$
et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On peut utiliser la question 1- a))

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

0.75 pt **d)** Déterminer la limite de (u_n)

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat

0.5 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} - \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$

0.5 pt **b)** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \left(1+\mathrm{e}^{x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)}$

0.5 pt **c)** Déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1- c) de la Partie I)

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0

0.25 pt **b)** Vérifier que la tangente (T) passe par le point $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

0.75 pt **c)** Construire (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(On prend $\ln 2 \approx 0.7$)

0.5 pt **4 - a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)

0.5 pt **b)** Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right)$

5 - Soit λ un réel strictement positif

0.25 pt **a)** Vérifier que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \ln(2) - \ln(1+\mathrm{e}^{-\lambda})$

0.5 pt **c)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x$ (Remarquer que $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} - f'(x)$)

0.5 pt **d)** Déduire en fonction de λ, l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

0.5 pt **e)** Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$

FIN

ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2024

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1;1;0)$ et $\Omega(-1;1;-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifions que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P)

✍ On a $x_A + z_A - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$, donc $A(1;1;0) \in (P)$

✍ On a $(P) : x + z - 1 = 0$, ç.à.d. $(P) : 1x + 0y + 1z - 1 = 0$

Donc $\vec{n}(1;0;1)$ est un vecteur normal du plan (P)

0.5 pt **b)** Montrons que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P)

On a $\vec{n}(1;0;1)$ est un vecteur normal du plan (P)

Et on a $\overrightarrow{\Omega A}(2;0;2)$

Donc $\overrightarrow{\Omega A} = 2\vec{n}$

Alors $(\Omega A) \perp (P)$

2 - Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

0.5 pt **a)** Montrons que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon

On a $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$

ç.à.d. $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 4z + 4 - 1 - 1 - 4 - 3 = 0$

ç.à.d. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9 = 3^2$

Donc (S) est une sphère de centre $\Omega(-1;1;-2)$ et de rayon 3

0.5 pt **b)** Montrons que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon

✍ On a $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|-1+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Or $2\sqrt{2} < 3$, donc (P) coupe (S) selon un cercle

✍ On a $A \in (P)$ et $\Omega A = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} = d(\Omega;(P))$

Donc (P) coupe (S) selon un cercle de centre A

Et de rayon $r = \sqrt{9-8} = 1$

3 - Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel

0.25 pt **a)** Vérifions que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$

On a $x_A + y_A + mz_A - 2 = 1+1-m\times 0-2 = 0$

Donc $A \in (Q_m)\ \forall m \in \mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Déterminons la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

$$(Q_m)\perp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_{(Q_m)}.\overrightarrow{n}_{(P)} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times m = 0$$
$$\Leftrightarrow m = -1$$

Finalement $m = -1$

0.25 pt **c)** Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifions

(Q_m) coupe la sphère (S)suivant un cercle de centre $A \Rightarrow d(\Omega;(Q_m)) = \Omega A$

$$\Rightarrow \frac{|-1+1-2m-2|}{\sqrt{1^2+1^2+m^2}} = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow |m+1| = \sqrt{2m^2+4}$$
$$\Rightarrow (m+1)^2 = 2m^2+4$$
$$\Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0$$

Or $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 3 = -8 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution

Donc (Q_m) ne va jamais couper (S) selon un cercle de centre A

Exercice 2 (4pts)

I) On considère dans l'espace des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

0.25 pt **1 -** Vérifions que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2$

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 16 - 36 = -20 = -(2\sqrt{5})^2 = (2i\sqrt{5})^2$

Finalement $\boxed{\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2}$

0.5 pt **2 -** Résolvons l'équation (E)

On sait que $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2 Is0$ donc l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{4 + 2i\sqrt{5}}{2} = 2 + i\sqrt{5}$ et $z_1 = \dfrac{4 - 2i\sqrt{5}}{2} = 2 - i\sqrt{5}$

Alors $\boxed{S = \{2 + i\sqrt{5}; 2 - i\sqrt{5}\}}$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les point A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $|a| = 3$

On a $|a| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9}$

Donc $\boxed{|a| = 3}$

0.25 pt **b)** Montrons que le triangle OAB est isocèle

On a $|b| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$

Comme $OA = |a| = 3$ et $OB = |b| = 3$, donc $\boxed{OAB \text{ est isocèle en } O}$

0.5 pt **2 - a)** Vérifions que $\dfrac{a - c}{b - c} = i$

On a $\dfrac{a - c}{a - b} = \dfrac{2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}}{2 - i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} + i\sqrt{5}}{\sqrt{5} - i\sqrt{5}} = \dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)^2}{2}$

Alors $\boxed{\dfrac{a - c}{b - c} = i}$

0.5 pt **b)** Déduisons la nature du triangle ABC

✍ On a d'une part $\dfrac{a - c}{b - c} = i$, donc $\dfrac{AC}{BC} = \left|\dfrac{a - c}{b - c}\right| = |i| = 1$

Donc $AC = BC$

✍ Et on a d'autre part $(\widehat{\vec{CB}; \vec{CA}}) \equiv arg\left(\dfrac{a - c}{b - c}\right)[2\pi] \equiv arg(i)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\boxed{ABC \text{ est rectangle et isocèle en } C}$

0.5 pt **3 - a)** Déterminons l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\vec{CA}$

On a

$$T_{\overrightarrow{CA}}(B) = D \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow d - b = a - c$$

$$\Rightarrow d = a - c + b$$

$$\Rightarrow d = 2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 - i\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow d = 2 + \sqrt{5}$$

Finalement $\boxed{d = 2 + \sqrt{5} \text{ est l'affixe du point } D}$

0.5 pt **b)** Montrons que $ADBC$ est un carré

On a $T_{\overrightarrow{CA}}(B) = D \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ donc $ADBC$ est un parallélogramme

Or ABC est rectangle isocèle en C, ç.à.d. $CA = CB$

Donc $\boxed{ADBC \text{ est un carré}}$

4 - On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1 - x_n}$, avec n un entier naturel non nul

0.25 pt **a)** Vérifions que $x_n\overline{x_n} = 1$

On a $x_n\overline{x_n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n . \overline{\left(\frac{a}{3}\right)^n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n . \left(\frac{\bar{a}}{3}\right)^n = \left(\frac{a\bar{a}}{9}\right)^n$

$$= \left(\frac{(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})}{9}\right)^n = \left(\frac{9}{9}\right)^n$$

Finalement $\boxed{x_n\overline{x_n} = 1}$

0.5 pt **b)** Montrons que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

On a $y_n + \overline{y_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \overline{\left(\frac{1}{1 - x_n}\right)} = \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{1 - \overline{x_n}} = \frac{1 - \overline{x_n} + 1 - x_n}{(1 - x_n)(1 - \overline{x_n})} = \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{1 - \overline{x_n} - x_n + x_n.\overline{x_n}}$

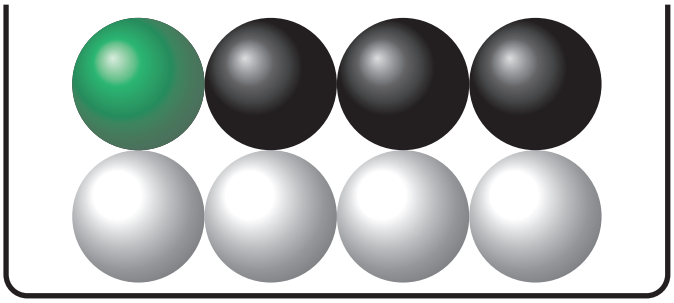
$$= \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{2 - \overline{x_n} - x_n} \text{ car } x_n\overline{x_n} = 1$$

Finalement $\boxed{y_n + \overline{y_n} = 1}$

Exercice 3 (2pts)

Une urne contient huit boules : quarte boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



On tire au hasard successivement est sans remise trois boules de l'urne

0.25 pt **1 -** Vérifions que le nombre de tirages possibles est égal à 336

Il s'agit d'un tirage successif sans remise de trois boules parmi huit boules, le nombre de tirage possible est :

$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

0.5 pt **2 -** Calculons la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches »

$p(A) = \dfrac{A_4^3}{336} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{336} = \dfrac{24}{336}$

Finalement $p(A) = \dfrac{1}{14}$

0.75 pt **3 -** Montrons que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est

$p(B) = \dfrac{5}{56}$

$p(B) = \dfrac{A_4^3 + A_3^3}{336} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1}{336} = \dfrac{30}{336}$

Finalement $p(B) = \dfrac{5}{56}$

0.5 pt **4 -** Calculons la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes »

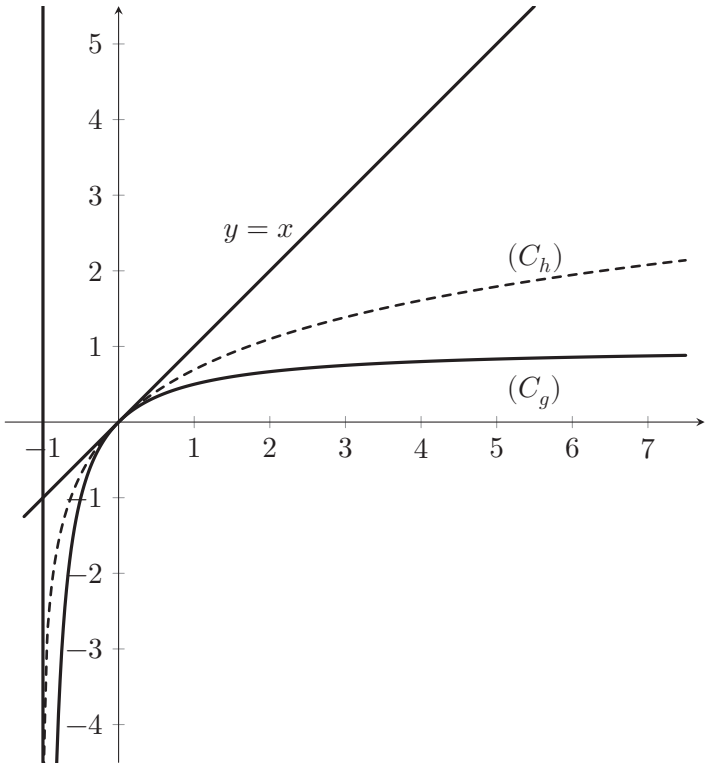
$p(C) = 1 - p(B) 1 - \dfrac{5}{56}$, car $C = \bar{B}$

Finalement $p(C) = \dfrac{51}{56}$

Problème (11pts)

Partie I

La figure ci-après représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé



0.5 pt **1 - a)** A partir de cette figure, justifions que : $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $]-1;+\infty[$

Soit $x \in]-1;-\infty[$

Graphiquement, la droite d'équation $y = x$ est au dessus de $(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_h)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Donc $\boxed{\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x}$

0.25 pt **b)** Déduisons que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $]-1;+\infty[$

On a $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Donc $x \leq (1+x)\ln(1+x)$ comme $1+x > 0$

Alors $\boxed{(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0}$

0.5 pt **c)** Prouvons que $\mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\ln(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Or $\mathbf{e}^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbf{e}^x \in]-1;-\infty[$

Alors $\mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$; $\forall x \imath \mathbb{R}$

2 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrons par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

✍ Pour $n = 0$, on a $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ est vraie

✍ Supposons que $0 < u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$0 < u_n \leq 1 \Rightarrow g(0) < g(u_n) \leq g(1)$ puisque g est strictement croissante $\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 1$ puisque $g($

Ainsi $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante (On peut utiliser la question 1- a))

On a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

Or $(\mathcal{C}_g)$ est en dessous de la droite d'équation $y = x$, donc $g(x) \leq x$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Et comme $u_n \in]0;1]$ donc $g(u_n) \leq u_n$

Par conséquent la suite (u_n) est décroissante

0.25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente

On a (u_n) est une suite décroissante et minorée par 0

Donc (u_n) est convergente

0.75 pt **d)** Déterminons la limite de (u_n)

✍ On a $u_{n+1} = g(u_n)$

✍ Et $u_0 \in]0;1]$

✍ Et g est une fonction continue sur $]0;1]$ et $g(]0;1]) \subset]0;1]$ (graphiquement)

Alors, la limite l de (u_n), vérifie $g(l) = l$

Graphiquement on trouve : $g(l) = l \equiv l = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^{-x}\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Calculons $f(0)$ et vérifions que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

✍ $f(0) = \mathbf{e}^{0}\ln(1+\mathbf{e}^{0}) = 1 \times \ln(1+1) = \ln 2$

Finalement : $\boxed{f(0) = \ln 2}$

✍ Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \mathbf{e}^{x} > 0$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \mathbf{e}^{x}+1 > 1$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ln(\mathbf{e}^{x}+1) > 0$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

D'où $\mathbf{e}^{-x}\ln(\mathbf{e}^{x}+1) > 0$

Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) > 0}$

0.5 pt **b)** Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, puis donnons une interprétation géométrique de ce résultat

✍ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(+t)}{t} (\text{ On posant } t = \mathbf{e}^{x})$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$

✍ $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis donnons une interprétation géométrique de ce résultat

✍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{1+\mathbf{e}^{x}} \frac{1+\mathbf{e}^{x}}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \frac{t}{t-1} (\text{ On posant } t = 1+\mathbf{e}^{x})$$

$$= 0 \times 1$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

✍ $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^{x}} - \mathbf{e}^{-x}\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \left(\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})\right)'$$

$$= \left(\mathbf{e}^{-x}\right)'\ln(1+\mathbf{e}^{x}) + \mathbf{e}^{-x}(\ln(1+\mathbf{e}^{x}))'$$

$$= -\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x}) + \frac{\mathbf{e}^{-x}\mathbf{e}^{x}}{1+\mathbf{e}^{x}}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^{x}} - \mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x}) \ \forall x \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **b)** Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{x} - \left(1+\mathbf{e}^{x}\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)}{\mathbf{e}^{x}\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - \mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^x)$$

$$= \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - \frac{\ln(1+\mathbf{e}^x)}{\mathbf{e}^x}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - \left(1+\mathbf{e}^x\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^x\right)}{\mathbf{e}^x\left(1+\mathbf{e}^x\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **c)** Déduisons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1- c) de la Partie I)

On a d'après $I)1-c) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\ln(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $\mathbf{e}^x > 0$ et $1+\mathbf{e}^x > 0$

Donc $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

0.5 pt **3 - a)** Déterminons l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0

L'équation de l droite (T) s'écrit $y = f(0)(x-0) + f'(0)$ ç.à.d. $y = f(0) \times x + f'(0)$

On a $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \dfrac{\mathbf{e}^0 - \left(1+\mathbf{e}^0\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^0\right)}{\mathbf{e}^0\left(1+\mathbf{e}^0\right)} = \dfrac{1-2\ln 2}{1\times 2} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$

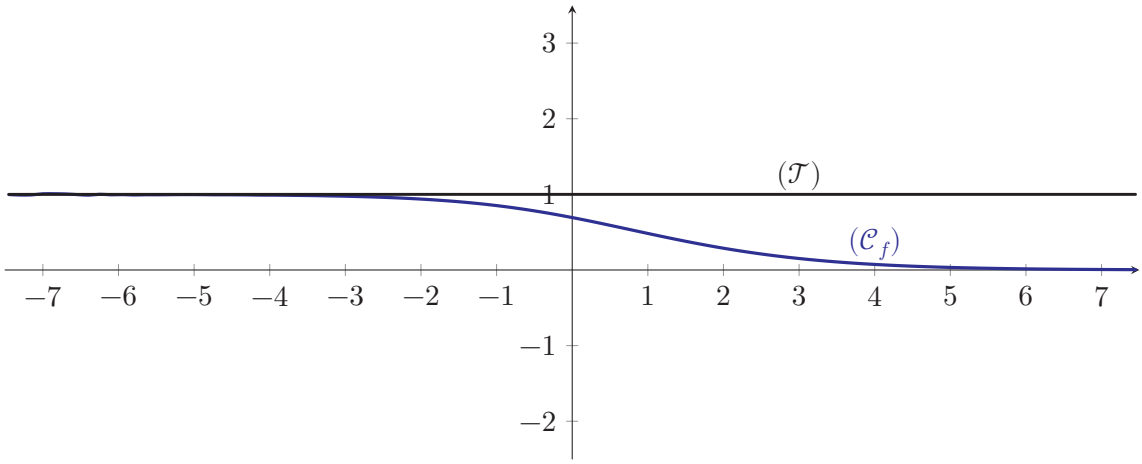
Donc $\boxed{(T) : y = \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)x + \ln 2}$

0.25 pt **b)** Vérifions que la tangente (T) passe par le point $A\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

On a $\left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right) \times x_A + \ln 2 = \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right) \times 1 + \ln 2 = \dfrac{1}{2} - \ln 2 + \ln 2 = \dfrac{1}{2} = y_A$

Donc $\boxed{A\left(1; \dfrac{1}{2}\right) \in (T)}$

0.75 pt **c)** Construisons (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(On prend $\ln 2 \approx 0.7$)



0.5 pt **4 - a)** Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]0;1[$

Finalement $J =]0;1[$

0.5 pt **b)** Vérifions que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculons $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right)$

On a $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \dfrac{2}{1-2\ln 2}$

Finalement $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right) = \dfrac{2}{1-\ln 4}$

5 - Soit λ un réel strictement positif

0.25 pt **a)** Vérifions que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

Finalement $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrons que $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \ln(2) - \ln(1+\mathrm{e}^{-\lambda})$

$$\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x = \int_0^{\lambda} \frac{\mathbf{e}^{-x}}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\int_0^{\lambda} -\frac{\mathbf{e}^{-x}}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\int_0^{\lambda} \frac{(1+\mathbf{e}^{-x})'}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\left[\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-x})\right]_0^{\lambda}$$

$$= -\left(\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{0})\right)$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})$$

Finalement $\boxed{\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x = \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})}$

0.5 pt **c)** Montrons que $\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \mathbf{ln}(2) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$ (Remarquons que $f(x) = \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - f'(x)$)

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \int_0^{\lambda} \mathbf{e}^{-x}\Big(\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^x)\Big))\mathbf{d}x$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - f'(x)\mathbf{d}x(\text{ d'après la remarque donnée })$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - \int_0^{\lambda} f'(x)\mathbf{d}x$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - [f(x)]_0^{\lambda}$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - (f(\lambda) - f(0))$$

$$= f(0) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$$

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x}$

0.5 pt **d)** Déduisons en fonction de λ, l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

$$A_\lambda = \int_0^{\lambda} |f(x)|\mathbf{d}x\text{u.a.}$$

$$= \int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x\text{u.a.(car } f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R})$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x\text{u.a.(d'après la question précédente)}$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{u.a.(d'après la question } II)5-b)$$

$$= 2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{u.a.}$$

Finalement $\boxed{A_\lambda = 2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{ u.a.}}$

0.5 pt **e)** Calculons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\right)$$

$$= 2\,\mathbf{ln}\,2\text{(car : } \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) = 0)$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 2\,\mathbf{ln}\,2}$

FIN