

HARMATTAN BURKINA **MATHEMATIQUES, classe de Tle**

TOME I

***Méthodes et conseils
pratiques, Rappels,
Sujets tests,
Sujets corrigés***

***Mamadou TRAORE
Sehidou OUEDRAOGO***

ANNALES



ANNALES HARMATTAN BURKINA

MATHEMATIQUES, Classe de Tle

TOME -I

- Méthodes et conseils pratiques
- Rappels
- Sujets tests
- Sujets corrigés

**Mamadou TRAORE, Professeur certifié des Lycées et Collèges
(Burkina Faso)**

**Sehidou OUEDRAOGO, Professeur certifié des Lycées et Collèges,
chevalier de l'ordre des palmes académiques (Burkina Faso)**

Tous Droits réservés
© HARMATTAN BURKINA, Nov2010
Av. Mahamar KADAFI
12 BP 226 Ouagadougou 12
Tél : (+226) 50 37 54 36
harmattanburkina@fasonet.bf
infos@harmattanburkina.com
www.harmattanburkina.com
Dépôt légal BNB N°10-913
ISBN : 978-2-266-46281-5
EAN : 9782266462815

Ce livre traite du programme de Mathématique des classes de terminales des Lycées et collèges d'enseignement général au Burkina Faso.

Pour chaque chapitre, il en fait un bref rappel de cours puis suivent des exercices qui vous permettent de tester vos connaissances et vos capacités. Les exercices se trouvent à la fin du livre. Mais pour un bon apprentissage, il est conseillé de pousser assez loin vos réflexions sur un exercice qui vous pose des difficultés avant de consulter les corrigés.

Quelques sujets récents d'examens proposés au BAC vous permettront d'avoir une idée sur les sujets d'examens.

Nous exprimons notre gratitude à tous ceux qui ont contribué à ce que ce document paraisse.

A tous ceux qui utiliseront ce document nous souhaiterons recevoir vos remarques et vos suggestions pour l'amélioration de la qualité du document.

Nous vous souhaitons une bonne exploitation de document et qu'il vous soit utile.

Les auteurs

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I- Analyse combinatoire.....	5
Exercices.....	9
Corrigés.....	11
CHAPITRE II- Trigonométrie.....	15
Exercices.....	18
Corrigés.....	22
CHAPITRE III- Nombre Complexes.....	29
Exercices.....	44
Corrigés.....	54
CHAPITRE IV- Les Courbes Paramétrées.....	84
Exercices.....	89
Corrigés.....	94
CHAPITRE V- Probabilité.....	109
Exercices.....	112
Corrigés.....	120
CHAPITRE VI- Produit Scalaire Produit Vectoriel.....	137
Exercices.....	144
Corrigés.....	147

CHAPITRE I : ANALYSE COMBINATOIRE

1) Rappels sur les ensembles

Dans toute la suite, lorsque nous parlons d'ensembles il s'agit d'ensembles finis.

Un ensemble est dit fini lorsqu'on peut dénombrer le nombre de ses éléments.

Soit E un ensemble et A une partie de E (ou sous-ensemble de E). On note $A \subset E$ et on lit « A inclus dans E ».

- On appelle complémentaire de A dans E noté $\bar{A}$ ou C_E^A l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas A . Soit $x \in E$, $(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow (x \notin A)$.
- Deux sous ensembles A et B forment une partition d'un ensemble E si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et $A \cup B = E$. Exemple Si A est un sous ensemble de E , A et $\bar{A}$ forment une partition de E ($A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$).
- Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de A par B noté $A \times B$ l'ensemble des couples dont le premier terme est élément de A et le second terme est élément de B . $A \times B = \{(u, v), u \in A \text{ et } v \in B\}$.
- Etant donné un ensemble fini E et un entier naturel non nul p , on appelle p -liste ou p -uplet d'éléments de E , tout élément du produit cartésien $E^p = \underbrace{ExEx...xE}_{p \text{ fois}}$

Une P -liste d'éléments de E est donc toute liste ordonnée de p éléments distincts ou non de E .

Exemple: $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , (a_5, a_6) sont trois 2-listes d'éléments de E . $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ est une 5-liste d'éléments de E .

2) Cardinal d'un ensemble fini.

Définition

- Un ensemble est fini lorsqu'on peut connaître le nombre total de ses éléments.
- On appelle cardinal d'un ensemble fini E noté $\text{card}(E)$ le nombre des éléments de E .

Exemple : $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ $\text{Card}E = 7$

Propriété

- L'ensemble vide est fini et $\text{card } \emptyset = 0$
- Soit A et B deux sous ensembles d'un ensemble fini E.
 - $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$
- Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B$
 - $\text{card } E = \text{card } A + \text{card } \bar{A}$ donc $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$
 - $\text{card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{card } B$.
 - Si $A \subset B$, alors $\text{card } A \leq \text{card } B$
- $\mathcal{P}(E)$ désignant l'ensemble des parties de E, $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card } E}$.
- Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier non nul. Le nombre total de p-liste d'éléments de E est n^p . ($\text{card } E^p = n^p$)

3) P-arrangement**a- Définition**

Soit E un ensemble fini de cardinal n ; p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux disjoints. On dit aussi p-arrangement d'éléments de E.

Exemple: $E = \{e, i, o, u, a\}$; $\{e, i, o\}$, $\{e, o, i\}$, $\{e, o, u\}$ sont 3-arrangements d'éléments de E.

b- Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de p-arrangements d'éléments de E noté A_n^p est : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} ; p \in \mathbb{N}, (p \leq n)$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p) \times \dots \times 2 \times 1$$

$n!$ se lit « factorielle n » A_n^p se lit « A, n, p »

$$0! = 1$$

c- Permutation

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement des n éléments de E.

Exemple : $E = \{e, i, o, u\}$

$\{e, i, o, u\}$, $\{i, o, u, e\}$, $\{o, u, e, i\}$ sont des permutations de E.

Propriété

Le nombre total des permutations d'un ensemble de cardinal n est

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

4- Combinaison

a- Définition

E étant un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $1 < p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments. On dit aussi p-combinaison d'éléments de E. C'est donc une liste non ordonnée de p éléments deux à deux distincts de E.

b- Propriété

Soit n et p deux entiers naturels non nul tel que $p \leq n$. E un ensemble de n éléments. Le nombre de p-combinaison d'éléments de E est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad C_n^p \text{ se lit « C, n, p »}.$$

Remarque

Comment dénombrer un ensemble de résultats ? Pour effectuer le dénombrement des résultats possibles issus de tirages, de choix ou d'un jeu, décrits dans un énoncé, il est conseillé de répondre aux questions suivantes.

- 1- Parmi combien d'éléments chaque élément est-il choisi ?
La réponse sera notée n.
- 2- Combien d'éléments choisit-on pour constituer un résultat ?
La réponse sera notée p.
- 3- Un résultat correspond-il à un choix ordonné de p éléments ?
C'est-à-dire : le résultat est-il différent si on choisit les mêmes éléments dans un autre ordre ?
- 4- Les p éléments choisis sont-ils nécessairement deux à deux distincts ?

Le tableau ci-dessous indique, selon les réponses aux questions 3 et 4, l'objet du dénombrement. Dans chaque case figure aussi le cardinal de l'ensemble dénombré.

Les p éléments choisis parmi n éléments sont	Deux à deux distincts	Deux à deux distincts ou non
Ordonnés	$p \leq n$ arrangement : A_n^p	P-liste n^p
	$P = n$ Permutation : $n !$	
Non ordonnés	Combinaison C_n^p	

Remarque : Lorsque les p éléments sont choisis simultanément (ou bien peuvent l'être sans modifier le résultat), il s'agit d'un choix non ordonné de p éléments.

- tirages simultanés : C_n^p
- tirages successifs avec remise : n^p
- tirages successifs sans remise : A_n^p

5) Anagrammes

a) Définition

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et N une liste ordonnée de n objets (distincts ou non).

On appelle anagramme de la liste N , toute liste ordonnée composée par la totalité des n objets de N .

Exemple : le mot « tribu » est un anagramme du mot « bruit » parce qu'il est obtenu par permutation des lettres du mot initial.

b) Nombre d'anagrammes.

Soit N une liste ordonnée de n objets composée à partir d'un ensemble de n objets distincts $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$. Par exemple colonne est une liste de 7 objets formée à partir d'un ensemble de 5 objets distincts $\{c, o, l, n, e\}$.

Le nombre total d'anagrammes de la liste N est : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_p!}$, où n_i

représente le nombre de fois qu'apparaît l'objet a_i dans la liste N , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

6) Coefficients binomiaux

- Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$,

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

- Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $n > 0$

$$\text{et } 0 \leq p \leq n ; C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

- Pour tout entier naturel $n > 0$:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots +$$

$$C_n^n a^0 b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$$

Définition

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $n > 0$ et $1 \leq p \leq n$, les nombres C_n^p sont appelés coefficients binomiaux.

- Triangle de Pascal

$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ ($n, p \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq p \leq n$; est la formule à la base du triangle de Pascal

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Chaque nombre est la somme du nombre juste au-dessus et du nombre au-dessus et à gauche.

EXERCICES

Exercice 1

- 1) Le questionnaire d'une enquête comporte 12 questions. A chacune d'elles, on peut répondre soit par OUI, soit par NON, soit s'abstenir. Quel est le nombre de fiches, réponses différentes possibles ?
- 2) Un touriste veut visiter trois villes parmi les cinq suivantes : FADA, KAYA, YAKO, DJIBO, Gourcy. Quel est le nombre d'itinéraires possibles.
- 3) De combien de façon peut-on garer six voitures dans dix places de parking numérotées de 1 à 10 ?
- 4) 32 élèves d'une classe se serrent la main. Dénombrer le nombre de poignées de mains échangées.

Exercice 2

Au bridge, une main est composée de 13 cartes choisies dans un jeu de 32 cartes

- a) combien ya t-il de mains distinctes
- b) combien ya t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent exactement un as ?

Exactement trois as ? Au moins deux as ?

- c) combien ya t-il de mains distinctes contenant exactement trois piques et deux as ?
- d) combien ya t-il de mains distinctes contenant exactement deux honneurs (as, roi, dame ou valet) ?
- e) quel est le nombre de mains distinctes qui contiennent au moins un honneur et au moins un pique ?

Exercices 3

Un jury est composé de 12 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

- 1) combien de jurys différents peut-on former ?
- 2) combien de jurys comportant 6 hommes et 6 femmes peut-on former ?
- 3) monsieur X refuse de siéger avec madame Y. Dénombrer le nombre de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes.

Exercice 4 (non corrigé)

Un numéro de téléphone est une suite de 8 chiffres pris dans :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- 1- Déterminer le nombre de numéros de téléphone.
- 2- Déterminer le nombre de numéros de téléphone ayant 8 chiffres distincts.
- 3- Déterminer le nombre de numéros de téléphone formés avec deux 1 quatre 3 et quatre 7.
- 4- Déterminer le nombre de numéros de téléphone comportant trois 1 et trois seulement.
- 5- Déterminer le nombre de numéros de téléphone formés de deux chiffres distincts et deux seulement.
- 6- Déterminer le nombre de numéros de téléphone tels que le produit des dix chiffres est divisible par deux.

Exercice 5

Le mot « tribu » est un anagramme du mot « bruit » parce qu'il est obtenu par permutation des lettres du mot initial.

- a- Quel est le nombre d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot « bruit » ?
- b- Combien y-en a-t-il commençant par une consonne ?
- c- Combien y-en a-t-il finissant par une voyelle ?
- d- Dénombrer ceux qui remplissent à la fois les conditions des questions b et c.
- e- Quel est le nombre d'anagrammes des mots : sonore, ananas.

Exercice 6

Une urne contient 15 boules : 5 noires ; 7 vertes et 3 rouges. On tire successivement 5 boules.

- 1) le tirage s'effectue avec remise.
- a- Dénombrer tous les tirages possibles
- b- dénombrer les tirages comprenant
 - 3 noires et 2 rouges dans cet ordre.
 - 3 noires et 2 rouges
 - 2 noires une verte et 2 rouges.

• exactement 3 vertes.

2) Le tirage s'effectue sans remise.

Répondre aux mêmes questions.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

1) Une réponse est un choix ordonné de 12 éléments pris parmi les éléments de l'ensemble $\{ \text{OUI, NON, ABSTENTION} \}$.

Une réponse est une 12 liste d'un ensemble à 3 éléments. Le nombre de fiches réponses différentes possibles est 3^{12} .

2) Un itinéraire est une liste ordonnée de trois villes distinctes choisies parmi les cinq proposées. Le nombre d'itinéraires est $A_5^3 = 30$.

3) $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ sont les 10 places du parking, $v_1, v_2, \dots, v_6$ sont les 6 voitures.

Il y a A_{10}^6 manières de garer les 6 voitures.

Le nombre de façons de garer les 6 voitures dans le parking de 10 places est $A_{10}^6 =$

4) 32 élèves d'une classe se serrent la main. Un poignée de mains est une combinaison de deux éléments pris dans un ensemble de 32 mains. Le nombre de poignées est donc : $C_{32}^2 = 496$.

Exercice 2

Une main est composée de 13 cartes dans un jeu de 32 cartes.

a- Nombre de mains distinctes

$$C_{52}^{13} = 635 \times 10^9$$

b- Nombre de mains distinctes dans lesquelles figurent exactement un as.

$$C_4^1 \times C_{48}^{12} = 4 \times C_{48}^{12}$$

- Nombre de mains distinctes dans lesquelles figurent exactement trois as :

$$C_4^3 \times C_{48}^{10} = 4 \times C_{48}^{10}$$

- Nombre de mains dans lesquelles figurent au moins deux as.

$$N_2 = C_{52}^{13} - (C_{48}^{13} + 4 C_{48}^{12})$$

C_{48}^{13} nombre de mains contenant aucun as ; $4 C_{48}^{12}$ le nombre de mains contenant au moins deux as.

$$\text{Ou encore : } N = C_4^2 \times C_{48}^{11} + C_4^3 \times C_{48}^{10} + C_4^4 \times C_{48}^9$$

c) Nombre de mains distinctes contenant exactement trois piques et deux as.

- Nombre de mains distinctes contenant trois piques et deux as dont l'as du pique :

$$C_3^1 \times C_{12}^2 \times C_{36}^9 \times C_1^1$$

- Nombre de mains distinctes contenant exactement trois piques et deux as sans l'as du pique : $C_3^2 \times C_{12}^3 \times C_{36}^8$

d) Nombre de mains distinctes contenant exactement deux honneurs (as, roi, dame ou valet).

Le nombre des honneurs est 16.

$$N = C_{16}^2 \times C_{36}^{11}$$

e) Nombre de mains distinctes qui contiennent au moins un honneur et au moins un pique.

Le complémentaire est l'ensemble des mains qui sont sans honneurs ou sans piques.

A « ensemble des mains sans honneurs » : card A = C_{36}^{13}

B « ensemble des mains sans pique » : card B = C_{39}^{13}

$A \cap B$ « ensemble des mains sans honneurs et sans piques » :

$$\text{card } A \cap B = C_{27}^{13}$$

$$\text{Card } A \cup B = \text{card A} + \text{card B} - \text{card } A \cap B$$

$$= C_{36}^{13} + C_{39}^{13} - C_{27}^{13}$$

Le nombre de mains distinctes contenant au moins un honneur et au moins un pique est :

$$C_{52}^{13} - (C_{36}^{13} + C_{39}^{13} - C_{27}^{13}).$$

Exercice 3

Un jury est composé de 12 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1) Nombre de jurys différents qu'on peut former.

$$N = C_{17}^{12} = 6188$$

2) Nombre de jurys comportant 6 hommes et 6 femmes qu'on peut former :

$$N' = C_8^6 \times C_9^6 = 2352$$

3) Nombre de jurys comportant 6 hommes sachant que monsieur X et madame Y refusent de siéger ensemble.

Le nombre de jurys où siègent ensemble madame Y et monsieur X est :

$$N'' = C_7^5 \times C_8^5 = 1176$$

Le nombre de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes sachant que monsieur X et madame Y refusent de siéger est :

$$A = N' - N'' = C_8^6 \times C_9^6 - C_7^5 \times C_8^5$$

$$A = 2352 - 1176 = 1176$$

Exercice 5

a) Nombre d'anagrammes du mot bruit

$$E = \{ B, R, U, I, T \}$$

$$N = 5 !$$

b) Nombre d'anagrammes commençant par une consonne.

$$N = 3 \times 4 !$$

c) Nombre d'anagrammes finissant par une voyelle

$$N = 2 \times 4 !$$

d) Nombre d'anagrammes remplissant à la fois la condition des questions b et c

$$N = 3 \times 2 \times 3 !$$

e) Nombre d'anagrammes du mot sonore

$$E = \{ S, O, N, R, E \}$$

$$N = \frac{6!}{2!}$$

- Nombre d'anagrammes du mot ananas

$$E = \{ A, N, S, \} \quad N = \frac{6!}{3!2!}$$

Exercice 6

1) Les tirages s'effectuent avec remise.

a) Nombre de résultats possibles. $N = 15^5 = 759375$

b) 1- Nombre de résultats comprenant 3 noires et 2 rouges dans cet ordre
 $N = 5^3 \times 3^2 = 1125$

2- Nombre de résultats comprenant 3 noires et 2 rouges. En désignant par : n n n r r le tirage de 3 boules noires et deux boules rouges dans cet ordre, tout autre ordre est une anagramme de la liste : n n n r r.

Le nombre de tirages correspondant à un ordre donné est : $5^3 \times 3^2$ et le nombre total d'anagrammes de n n n r r est : $\frac{5!}{3!2!}$. D'où le nombre de tirage possibles est :

$$N = (5^3 \times 3^2) \times \frac{5!}{3!2!} = 11250$$

3- Nombre de résultats comportant 2 noires, une verte et deux rouges :

$$N = (5^2 \times 7 \times 5^2) \times \frac{5!}{2!1!2!} = 47250$$

4- Nombre de résultats comportant exactement 3 vertes on a : (3 vertes et 2 noires) ou (3 vertes et 2 rouges) ou (3 vertes, 1 noire et 1 rouge).

$$N = (7^3 \times 5^2) \times \frac{5!}{3!2!} + (7^3 \times 5^2) \times \frac{5!}{3!2!} + (7^3 \times 5 \times 3) \times \frac{5!}{3!} = 219520$$

2) Les tirages s'effectuent sans remise

a) Nombre de résultats possibles : $N = A_{15}^5 = 360360$.

b) 1- Nombre de tirages comprenant 3 noires et 2 rouges dans cet ordre :

$$N = A_5^3 \times A_3^2 = 360$$

2- Nombre de tirages comprenant 3 noires et 2 rouges (voir 1 b) 2)

$$N = A_5^3 \times A_3^2 \times \frac{5!}{3!2!} = 3600$$

3- Nombre de tirages comportant 2 noires, 1 verte et 2 rouges :

$$N = (A_5^3 \times A_7^1 \times A_3^2) \times \frac{5!}{2!1!2!} = 25200$$

4- Nombre de tirages comportant exactement 3 vertes : on a : (3 vertes et 2 noires) ou (3 vertes et 2 rouges) ou (3 vertes 1 noires et 1 rouge).

$$N = (A_7^3 \times A_5^2) \times \frac{5!}{3!2!} + (A_7^3 \times A_3^2) \times \frac{5!}{3!2!} + (A_7^3 \times A_5^1 \times A_3^1) \times \frac{5!}{3!} = 117600$$

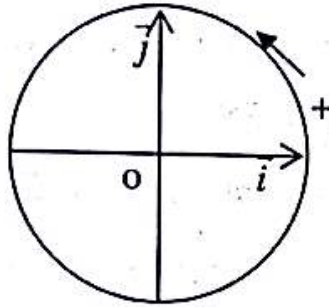
$$N = 117600$$

CHAPITRE II- : TRIGONOMETRIE

Rappels de cours

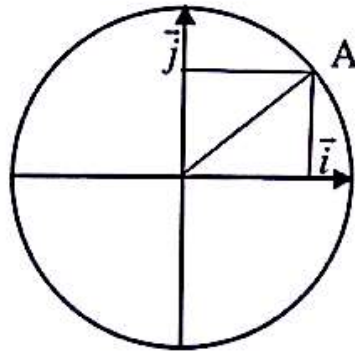
1) Définitions

* Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon un (1) et orienté positivement. On appelle sens positif ou sens direct le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre.



* Soit un angle $\hat{\alpha}$ et A le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$.

* On appelle cosinus et sinus de l'angle $\hat{\alpha}$, et l'on note $\cos \hat{\alpha}$ et $\sin \hat{\alpha}$, les coordonnées de A dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$



$$\overrightarrow{OA} = (\cos \hat{\alpha}) \vec{i} + (\sin \hat{\alpha}) \vec{j}.$$

- Soit α un réel et $\hat{\alpha}$ l'angle dont α est une mesure en radians. On a $\cos \alpha = \cos \hat{\alpha}$ et $\sin \alpha = \sin \hat{\alpha}$.
- Soit $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on appelle tangente de α et on note

$$\tan \alpha, \text{ le rapport } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \tan = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Soit $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on appelle cotangente de α et on note $\cotan \alpha$, le rapport $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; $\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

2) Propriétés

Pour tout réel x , et pour tout entier relatif k , on a :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\tan(x + k\pi) = \tan x$.

Pour tout réel $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Pour tout réel $x + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$.

Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	////////
$\cotan x$	////////	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

2) Formules trigonométriques

a) Angles associés

Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

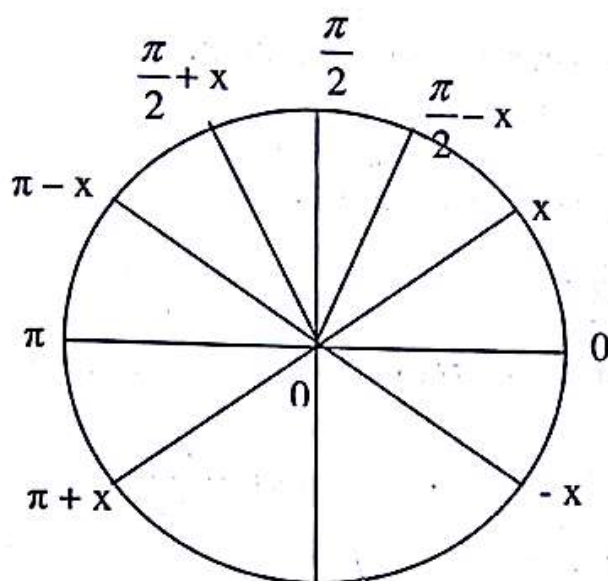
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

Pour tout $x \neq k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan x ; \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan x$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

b) Formules d'addition

Pour tous réels a et b

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour tous nombres réels $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) et $b \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$, ($k' \in \mathbb{Z}$)

tel que $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k''\pi$, ($k'' \in \mathbb{Z}$) et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k'''\pi$, ($k''' \in \mathbb{Z}$)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} ; \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

c) Formules de duplication et de linéarisation

Des formules précédentes, en prenant $a = b$, nous déduisons :

Théorème :

Quel que soit le réel a , on a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Quel que soit le réel $a \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $a \neq \frac{\pi}{2} + k' \pi$ ($k' \in \mathbb{Z}$)

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

d) Equations trigonométriques

* $\cos x = a$

- si $a \notin]-1; 1[$ l'équation n'a pas de solutions

- si $a \in [-1; 1]$, $S = \{x_0 + 2k\pi; -x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ où x_0 est une solution particulière de $\cos x_0 = a$

* $\sin x = a$

- si $a \notin]-1; 1[$ l'équation n'a pas de solutions

- si $a \in [-1; 1]$, $S = \{x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ où x_0 est une solution particulière de $\sin x_0 = a$

* soit $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), $\tan x = \tan x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

EXERCICES

A- Formules trigonométriques

Exercice 1

Ecrire chaque expression en fonction de $\cos \alpha$, ou $\sin \alpha$, ou des deux

$$A = \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + \pi); \quad B = \sin(\alpha - 3\pi) + \sin(\alpha + 3\pi)$$

$$C = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \pi\right); \quad D = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 3\pi\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \pi - \alpha\right)$$

Exercice 2

a - Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ en utilisant l'égalité $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

b - Exprimer $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ et $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

c - Exprimer $\cos(x - 2\frac{\pi}{3})$ et $\sin(x - 2\frac{\pi}{3})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 3

a - En utilisant l'égalité $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

b- Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $\sin(x + \frac{\pi}{4})$; $\cos(x + \frac{\pi}{3})$;
 $\cos(x + 2\frac{\pi}{3})$; $\sin(x + 2\frac{\pi}{3})$.

Exercice 4

a- Exprimer en fonction de $\sin 2a$: $(\cos a + \sin a)^2$; $(\cos a - \sin a)^2$

b- Exprimer en fonction de $\cos 2a$ et $\sin 2a$: $\cos^4 a - \sin^4 a$; $\cos^4 a + \sin^4 a$.

Exercice 5

a- Vérifier que $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2$; $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2$

En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ (sachant qu'ils sont positifs).

b) En remarquant que $2\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. Calculer

$\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

Exercice 6

a- Montrer que, pour tout réel x , on a $\sin x = \sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$.

b- Calculer $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

et $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$.

En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Exercice 7

a) En utilisant les formules d'additions, exprimer les sommes suivantes en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$:

$\cos(a+b) + \cos(a-b)$; $\cos(a+b) - \cos(a-b)$; $\sin(a+b) + \sin(a-b)$;

$\sin(a+b) - \sin(a-b)$

b) On pose: $a + b = p$ et $a - b = q$.

Démontrer les égalités suivantes

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

c) Application:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Résoudre de même : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

puis $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

Exercice 8

Démontrer les relations suivantes :

a) $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$

b) $\tan 2a - \tan a = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos 3a}$;

c) $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

En déduire l'expression de $\tan a - \tan b$.

Exercice 9

a- Montrer que, lorsque x n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$,

alors $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\sin x} = 2$

b- Avec les hypothèses du a) exprimer plus simplement :

1) $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$; 2) $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$; 3) $\frac{\sin 4x}{\sin 2x} - \frac{\cos 4x}{\cos 2x}$

Exercice 10

a) Montrer que $\frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$

b) Calculer $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

c) Après avoir vérifié que $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$ et $\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24}$, montrer que :

$$16 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = 1$$

d) Soit x un réel différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), montrer que :

$$\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x}$$

$$\text{En déduire } \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \text{ et } \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$$

Exercice 11

a) Déterminer $\cos x$ sachant que :

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[; \quad 2) \sin x = -\frac{1}{4} \text{ et } x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[;$$

b) Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

$$1) \cos x = -\frac{1}{3} ; \quad 2) \cos x = \frac{4}{5} ; \quad 3) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Calculer $\sin 2x$ dans chaque cas :

$$1) \sin x = \frac{3}{5} \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] ; \quad 2) \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } x \in [\pi; 2\pi] ;$$

$$3) \sin x = -\frac{3}{5} \text{ et } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

Exercice 12

Sachant que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, quelles sont les valeurs possibles de $\cos \frac{\alpha}{2}$ et $\cos 3\alpha$.

B- Equations trigonométriques

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad b) \cos x = -\frac{1}{2} ; \quad c) \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$d) \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3} - x) ; \quad e) \cos(\frac{5\pi}{6} - 2x) = \cos(4x - \frac{\pi}{3}) ;$$

$$f) 2\cos^2 x - 1 = 0$$

Exercice 2

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les équations suivantes et placer les points associés aux solutions sur le cercle trigonométrique

a) $\cos 5x \cos x - \sin 5x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 3x = \sin x$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

a) $\sin 2x = \cos x$; b) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3})$; c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(4x - \frac{\pi}{4})$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

a) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$; b) $2\cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 3 = 0$; c) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$;

d) $2\cos^2 x - (2 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$

(on pourra remarquer que $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$)

Exercice 5

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\tan(3x - \frac{\pi}{6}) = \tan(x + \frac{\pi}{6})$; b) $\tan^2(x + \frac{\pi}{3}) = 3$; c) $2\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

d) $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

Exercice 6

a) Etant donné deux réels a et b (non tous nuls), montrer qu'il existe un réel α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) tel que : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$ quelque soit le réel x .

b) Application

1) Résoudre les équations suivantes :

$\cos x - \sin x = 1$; $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$; $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$.

2) Montrer que l'équation $3\cos x - 4\sin x = 6$ est sans solution.

CORRIGES DES EXERCICES

A) Formules trigonométriques

Exercice 1

$$A = \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + \pi) = \cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha - \cos \alpha$$

$$A = -2\cos \alpha$$

$$B = \sin(\alpha - 3\pi) + \sin(\alpha + 3\pi) = \sin(\alpha - \pi) + \sin(\alpha + \pi)$$

$$= -\sin \alpha - \sin \alpha = -2 \sin \alpha ;$$

$$B = -2 \sin \alpha$$

$$C = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2} - \pi) = -\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi - (-\frac{\pi}{2} + \alpha))$$

$$= -\cos\alpha - \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha); \quad C = -\cos\alpha - \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} D &= \sin(\alpha - \frac{\pi}{2} - 3\pi) - \cos(-\frac{\pi}{2} - \pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} + \pi + \alpha) \\ &= +\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha; \quad D = \cos\alpha - \sin\alpha \end{aligned}$$

Exercise 2

$$a) \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$b) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\begin{aligned} c) \cos(x - \frac{2\pi}{3}) &= \cos x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin x \sin \frac{2\pi}{3} = \cos x \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + \sin x \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= -\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\cos x + \sqrt{3} \sin x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x - \frac{2\pi}{3}) &= \sin x \cos \frac{2\pi}{3} - \cos x \sin \frac{2\pi}{3} = \sin x \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) - \cos x \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= -\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2} \end{aligned}$$

Exercise 3

$$a) \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} ; \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} = \pi - \frac{7\pi}{12}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) = -\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) = \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{b) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin x \sin \frac{2\pi}{3} = \cos x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \cos x \sin \frac{2\pi}{3} = \sin x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4

$$\text{a) } (\cos a + \sin a)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a + 2 \cos a \sin a = 1 + \sin 2a$$

$$(\cos a - \sin a)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \cos a \sin a = 1 - \sin 2a$$

$$\text{b) } \cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$

$$\cos^4 a + \sin^4 a = (\cos^2 a + \sin^2 a)^2 - 2 \cos^2 a \sin^2 a$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (4 \cos^2 a \sin^2 a) = 1 - \frac{1}{2} (2 \cos a \sin a)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$$

Exercice 5

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\text{a) } \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \frac{\pi}{12})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}; \text{ donc } \cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos(2 \cdot \frac{\pi}{12})}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2$$

Comme $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{12} > 0$, on a : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\text{b) } 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(2 \cdot \frac{\pi}{8})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos(2 \cdot \frac{\pi}{8})}{2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, par conséquent

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{c) } \cos \frac{3\pi}{8} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}; \quad \cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 6

$$a) x \in \mathbb{R} \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cancel{\cos x} + \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cancel{\cos x} + \cos\frac{\pi}{3}\sin x \\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin x = \sin x \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x.$$

$$b) \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{4\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\bullet \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ce qui donne } \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

Exercice 7

$$a) \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b; \quad \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b; \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b$$

$$b) a+b = p \text{ et } a-b = q \Leftrightarrow a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2}$$

$$\text{d'après a) on a : } \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

$$\Leftrightarrow \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$

$$\Leftrightarrow \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$$

$$\Leftrightarrow \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b \Leftrightarrow \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$c) \text{ Application: résolution dans } \mathbb{R} \text{ de } \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x + (\cos x + \cos 3x) = \cos 2x + 2\cos 2x \cdot \cos x \\ = \cos 2x \cdot (1 + 2\cos x)$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x \cdot (1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + (\sin x + \sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x (1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} ;$$

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{2} ; \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow (\cos x + \cos 3x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos 3x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x (\cos 2x + \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x \cdot 2\cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow 4\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + 2k\pi ; \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 8

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\cos(a+b) \sin(a-b) &= 2[(\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\sin a \cos b - \sin b \cos a)] \\ &= 2(\cos a \sin a \cos^2 b - \cos^2 a \sin b \cos b - \sin^2 a \sin b \cos b + \sin^2 b \cos a \sin a) \\ &= 2[\cos a \sin a (\cos^2 b + \sin^2 b) - \sin b \cos b (\cos^2 a + \sin^2 a)] \\ &= 2(\cos a \sin a - \sin b \cos b) = 2\cos a \sin a - 2\sin b \cos a = \sin 2a - \sin 2b \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2\cos(a+b) \sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$$

$$\text{b) } \tan 2a - \tan a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} - \tan a = \tan a \left(\frac{2}{1 - \tan^2 a} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \tan a \left(\frac{2}{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}} - 1 \right) = \tan a \left(\frac{2 \cos^2 a - \cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a - \sin^2 a} \right) \\
 &= \frac{\sin a}{\cos a (\cos^2 a - \sin^2 a)} = \frac{\sin a}{\cos a \cos 2a} = \frac{\sin a}{\frac{1}{2}(\cos a + \cos 3a)}
 \end{aligned}$$

$$\tan 2a - \tan a = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos 2a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \tan a - \tan b &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\
 \tan(a-b) &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}
 \end{aligned}$$

Exercise 9

$$\text{a) } x \neq \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} \\
 &= 2 \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } x \neq \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\sin 5x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x+x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin 4x}{\sin x \cdot \cos x} \\
 &= \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x \cdot \cos x} = 4 \cos 2x
 \end{aligned}$$

$$* \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin 5x \cos x - \sin x \cos 5x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 4x}{\sin x \cos x} = 4 \cos 2x$$

$$* \frac{\sin 4x}{\sin 2x} - \frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \frac{\sin 4x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cos 4x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

Exercise 10

$$a) \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \right)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

$$b) A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2$$

$$A = 2$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2$$

$$B = 2$$

$$c) \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24} = \frac{12\pi - 5\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}; \quad \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24} = \frac{12\pi - 11\pi}{24} = \frac{\pi}{24}$$

$$\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24} \right) \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24} \right) \sin \frac{11\pi}{24}$$

$$= \cos \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}$$

$$= \left(\cos \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} \right) \left(\cos \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \right) = \frac{1}{4} \sin \frac{11\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{11\pi - 5\pi}{12} \right) - \cos \left(\frac{11\pi + 5\pi}{12} \right) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3} \right) \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{16}$$

$$\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$16 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = 1$$

$$d) x \neq \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x = 4\sin 2x \cos 2x \cos 4x$$

$$\sin 8x = 8\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \Leftrightarrow \frac{\sin 8x}{8\sin x} = \cos x \cos 2x \cos 4x.$$

$$\text{Pour tout } x \neq \frac{k\pi}{2}; \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8\sin x}$$

Application

$$* \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$$

$$* \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$$

Exercice 11

a) Calcul de $\cos x$

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } \cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ or } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[. \text{ Donc } \cos x < 0. \text{ Par suite}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$2) \sin x = -\frac{1}{4}; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}. \text{ Comme } x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$$

$$\cos x > 0. \text{ Par suite } \cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

b) calcul de $\cos 2x$; $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$$1) \cos x = -\frac{1}{3}.$$

$$\cos 2x = 2.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}.$$

$$2) \cos x = \frac{4}{5} ; \cos 2x = 2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

$$3) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \cos 2a = 1 - 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

c) Calcul de $\sin 2x$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$1) \sin x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{or} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \cos x \geq 0 ;$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = 2 \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{24}{25}$$

$$2) \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x \in [\pi; 2\pi]$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{comme } x \in [\pi; 2\pi], \sin x \leq 0$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \sin 2x = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3) \sin x = -\frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right] ; \cos x \leq 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5} ;$$

$$\sin 2x = 2 \left(-\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{3}{5} \right) = \frac{24}{25}$$

Remarque : $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ d'où $\frac{\alpha}{2} \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

$$\text{donc } \cos \frac{\alpha}{2} > 0 ; \text{ donc } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Exercice 12

On sait que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$; donc $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Leftrightarrow$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Sachant que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, on a : $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$ donc $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha = 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha); \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha\end{aligned}$$

Sachant que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, on obtient $\cos 3\alpha = 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} - 1 = -\frac{23}{27}$

$$\cos 3\alpha = -\frac{23}{27}$$

B- Equations trigonométriques

Exercice 1

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$b) \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 2\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$d) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$$

$$\text{ou } 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{48} + \frac{1}{2}k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{24} + k\pi;$$

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{48} + \frac{1}{2}k\pi ; \frac{11\pi}{24} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$e) \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} - 2x = 4x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } \frac{5\pi}{6} - 2x = -4x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -6x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{ou } 2x = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k}{3}\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{7\pi}{36} + \frac{k}{3}\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f) 2\cos^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$$

$$S = \left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 2

$$a) \cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 6x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 6x = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36} + \frac{k}{3} \pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k}{3} \pi, k \in \mathbb{Z}; S_{\mathbb{R}} = \left\{ \pm \frac{\pi}{36} + \frac{k}{3} \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S_{[0; 2\pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{36}, \frac{11\pi}{36}, \frac{23\pi}{36}, \frac{35\pi}{36}, \frac{47\pi}{36}, \frac{59\pi}{36}, \frac{\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{25\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}, \frac{49\pi}{36}, \frac{61\pi}{36} \right\}$$

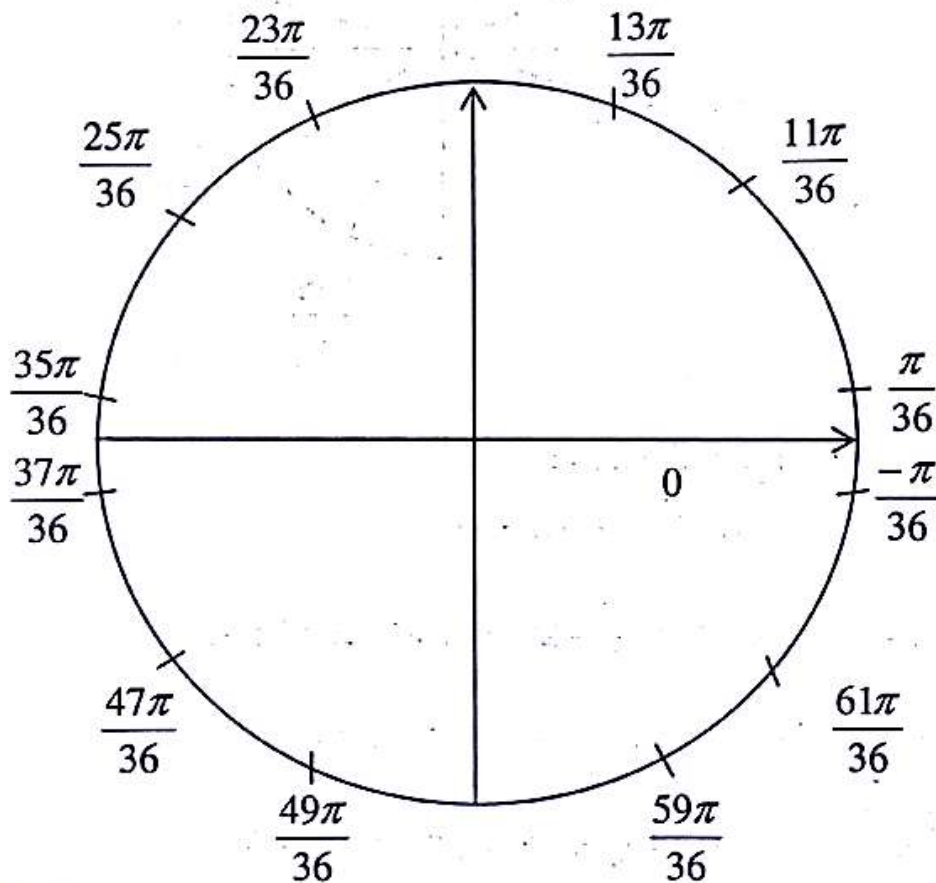


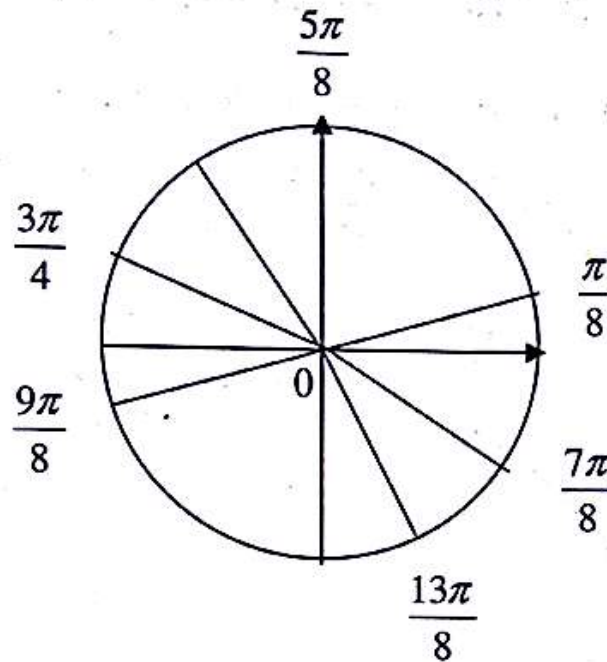
Figure 1

$$b) \cos 3x = \sin x \text{ on } a : \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 3x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad S_{[0; 2\pi[} = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right\}$$



Exercise 3

Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations

a) $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x = -x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k'\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \quad k' = k$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k'\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k'\pi ; k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = 2\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos(4x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(4x - \frac{\pi}{2}) \\
 &\Leftrightarrow 2x = 4x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -4x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow -2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 6x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}k\pi ; k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}k\pi ; \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 4

Résolution dans $\mathbb{R}$.

a) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$. Posons $X = \sin x$

l'équation devient : $2X^2 + 3X + 1 = 0$; $\Delta = 1$; $X_1 = -1$; $X_2 = -\frac{1}{2}$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$. Posons $X = \cos x$

L'équation devient $2X^2 + \sqrt{3}X - 3 = 0$; $\Delta = 27 = (3\sqrt{3})^2$;

$$X_1 = -\sqrt{3} \text{ et } X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x = -\sqrt{3} \text{ impossible ; } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 5 - 6\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 7\cos^2 x - \sin^2 x = 5 \Leftrightarrow 7(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow -8\sin^2 x = -2 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $2\cos^2 x - (2 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$. Posons $\cos x = X$

L'équation deviant : $2X^2 - (2 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$X_1 = + \frac{\sqrt{3}}{2} ; X_2 = 1$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi . k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 5

Résolution dans $\mathbb{R}$

a) $\tan(3x - \frac{\pi}{6}) = \tan(x + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow ; S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\tan^2(x + \frac{\pi}{3}) = 3 \Leftrightarrow \tan(x + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} \text{ ou } \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) \text{ ou } \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + k\pi ; k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $2\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \text{ ou } \tan x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$d) \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{7\pi}{12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{13\pi}{12} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{13\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 6

a) ($0 \leq \alpha < \pi$) a et b des réels non tous nuls

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) ; \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

De même $b^2 \leq a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1], \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1] \text{ et } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Donc il existe un réel $\alpha \in [0; \alpha]$ tel que $\sin \alpha =$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \text{ et } \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + x)$$

b) Application

• $\cos x - \sin x = 1$. D'après $a = b = 1$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\bullet \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\bullet \cos x - \sqrt{3} \sin x = -1 \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} - x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi + 2k\pi ; S = \left\{ -\pi + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

7) Résolution de l'équation: $3\cos x - 4\sin x = 6$

$$3\cos x - 4\sin x = 5 \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x \right) = 5 \sin(\alpha - x) \text{ avec } \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{et } \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

$$3\cos x - 4\sin x = 6 \Leftrightarrow 5 \sin(\alpha - x) = 6 \Leftrightarrow \sin(\alpha - x) = \frac{6}{5} \text{ or } \frac{6}{5} > 1 ; S = \emptyset$$

CHAPITRE III: NOMBRES COMPLEXES

I) Généralités

1) Définition

On appelle ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ où i vérifie $i^2 = -1$, a et b étant des nombres réels.

Si $Z = a + bi$, a est la partie réelle de Z , notée $\Re(Z)$; b est la partie imaginaire de Z , notée $\Im(Z)$.

Exemple $Z = 3 - 2i$, $\Re(Z) = 3$ et $\Im(Z) = -2$.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un réel ; un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé : « imaginaire pur ».

Les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ et remplacer à chaque fois i^2 par -1 .

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Si $Z = a + bi$ avec a et b non tous nuls on a :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

2) Complexe conjugué

Si $Z = a + bi$, le nombre complexe $a - bi$ est appelé le conjugué du nombre complexe Z . Il est noté $\bar{Z}$.

$$\text{Si } Z = a + bi \text{ alors } \bar{Z} = a - bi ; Z \cdot \bar{Z} = a^2 + b^2$$

Exemple : Si $Z = 4 + 3i$ alors $\bar{Z} = 4 - 3i$

Pour tous complexes Z et Z' on a :

$$\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'} ; \overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z'} ; \overline{(-Z)} = -\bar{Z}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\bar{Z}} (Z \neq 0) ; \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}} (Z' \neq 0)$$

$$Z + \bar{Z} = 2\Re(Z) ; Z - \bar{Z} = 2i\Im(Z)$$

$$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \text{est réel} ; \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow Z \text{ est imaginaire pur.}$$

3) Module d'un complexe

Soit $Z = a + bi$

On appelle module du complexe Z , Le réel noté $|Z|$ et défini par :

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour tous complexes Z et Z'

$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2 ; |Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'| ; |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

Si $Z' \neq 0$, $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$. Si $|Z| = 1$ alors $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$

4) Représentation géométrique d'un nombre complexe.

a) Définition

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Le point

$M(a; b)$ est appelé point image du nombre complexe $Z = a + bi$

Le complexe $Z = a + bi$ est appelé affixe du point $M(a; b)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé vecteur image du complexe $Z = a + bi$ et le

complexe $Z = a + bi$ est appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le plan muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé plan complexe. Un point M d'affixe Z de ce plan est souvent noté $M(Z)$.

Les droites $(0, \vec{e}_1)$ et $(0, \vec{e}_2)$ sont respectivement appelés axe réel et axe des imaginaires.

Repère

b) Propriétés

- Si A et B sont deux points d'affixe Z_A et Z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $Z_B - Z_A$. $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$.

$$AB = |Z_B - Z_A| = |Z_A - Z_B| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe $Z_{\vec{u}}$ et $Z_{\vec{v}}$; $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}}$.

- Pour tout réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe $kZ_{\vec{u}}$.

- Si $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ et $\vec{v} = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2$ alors $\vec{u} + \vec{v} = (a + a')\vec{e}_1 + (b + b')\vec{e}_2$
 $Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}} = (a + a') + (b + b')i$

- Si M a pour affixe Z , alors $OM = |Z|$

$Z \neq 0$, $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ est appelé argument de Z et on note $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \arg Z$.

- Si M d'affixe Z distinct de A et B , $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un argument de $\frac{Z - Z_B}{Z - Z_A}$

et $\frac{MB}{MA} = \frac{|Z - Z_B|}{|Z - Z_A|}$

II) Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

a) Racine carrées d'un nombre complexe.

Soit t_0 un nombre complexe donné. L'équation $Z^2 = t_0$ admet deux solutions distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$. Ces solutions s'appellent les racines carrées du complexe t_0 .

$$\text{Si } t_0 = a + bi \text{ et } z = x + yi, z^2 = t_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

b) Equation du second degré dans $\mathbb{C}$: $aZ^2 + bZ + c = 0$ $a \in \mathbb{C}^*$

L'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, distinctes ou confondues : On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ . Les solutions de l'équation sont alors :

$$Z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } Z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

III) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

a) Théorème et Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout nombre complexe $Z \neq 0$, il existe un nombre réel θ défini à $2k\pi$ près tel que $Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Si M est l'image du nombre complexe Z alors θ est une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

L'écriture $Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe Z . Le réel θ est appelé argument de Z et noté : $\arg Z = \theta$. Tout réel de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) est aussi un argument du nombre complexe Z .

$Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ se note aussi $Z = [|Z|; \theta] = [R, \theta]$ avec $R = |Z|$

b) Propriétés

$$\bullet \text{ Si } Z = a + bi = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow \begin{cases} a = |Z| \cos \theta \\ b = |Z| \sin \theta \\ |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- Si $Z = [R, \theta]$ et $Z' = [R', \theta']$ alors : $Z \cdot Z' = [RR', \theta + \theta']$; $Z/Z' = [R/R', \theta - \theta']$; $1/Z = [1/R, -\theta]$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
 $Z^n = [R^n, n\theta]$; $Z = [R, -\theta]$.
- $Z = Z' \Leftrightarrow R = R'$ et $\theta' = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\arg Z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors Z est un réel.
- Si $\arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors Z est un imaginaire pur.

c) Formule de Moivre

Pour tout nombre réel θ , pour tout entier relatif n ,
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Si $Z = \cos \theta + i \sin \theta$ alors $|Z| = 1$

Si $Z = \cos \theta + i \sin \theta$, alors $Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ et $\bar{Z}^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$: ce qui donne : $Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos n\theta$ et $Z^n - \bar{Z}^n = 2i \sin(n\theta)$ $n \in \mathbb{Z}$.

d) Formule d'Euler

1- Définition

Pour tout nombre réel θ on pose $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$. Cette écriture est appelée forme exponentielle du nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$.

Exemple : $e^{i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Si ($Z \neq 0$), $Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ a pour forme exponentielle $Z = |Z| e^{i\theta}$.

2) Propriétés

1- Caractérisation des figures simples du plan

- L'ensemble des points M d'affixe Z vérifiant $|Z - Z_A| = r$ avec $r > 0$ caractérise le cercle de centre A et de rayon r . En particulier l'ensemble des points M d'affixe Z vérifiant $|Z| = r$ caractérise le cercle de centre O et de rayon r .
- Soit A, B, C des points d'affixe respectives Z_A, Z_B, Z_C . L'ensemble des points M d'affixe Z vérifiant $|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$ caractérise la médiatrice du segment $[AB]$.
- ABC est un triangle isocèle de sommet A si et seulement si $|Z_B - Z_A| = |Z_C - Z_A|$
- ABC équilatéral $\Leftrightarrow |Z_C - Z_B| = |Z_A - Z_C| = |Z_B - Z_A|$

• ABC rectangle en A $\Leftrightarrow |Z_C - Z_B|^2 = |Z_A - Z_B|^2 + |Z_A - Z_C|^2$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• A, B et C sont alignés si et seulement si : $Z_B - Z_A = k(Z_C - Z_A), k \in \mathbb{Z}$

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2- Nombre complexes et transformations du plan.

• Translation

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a :

$$P \rightarrow P$$

$$M(Z) \mapsto M'(Z')$$

$Z' = Z + a$ est l'écriture complexe de t .

• Homothétie

Soit H l'homothétie de centre Ω d'affixe Z_0 et de rapport k avec $k \in \mathbb{R}^*$

$$P \rightarrow P$$

$$H: M(Z) \mapsto M'(Z')$$

$Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ est l'écriture complexe de H .

• Rotation

Soit R la rotation de centre Ω d'affixe Z_0 et d'angle θ

$$P \rightarrow P$$

$$R: M(Z) \mapsto M'(Z')$$

$Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ est l'écriture complexe de R .

EXERCICES

Exercice 1

1) Ecrire sous forme algébrique les complexes ci-dessous

$(2+i) + (-1+5i)$; $2(2+i) - 3(-1+5i)$; $(2+i)^2 + (-1+5i)^2$; $(2+i)^2(1+i)^2(4-3i)$

$(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$; $\frac{i}{2+3i}$; $\frac{5i+4}{1-2i}$; $\frac{3+i}{2+5i}$;

$$\frac{1}{(2+3i)(2-3i)}$$

2) a- On donne : $Z = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z' = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i$. Calculer $Z + Z'$; $Z - Z'$; $\frac{Z}{Z'}$; puis Z^2 ; Z'^2 ; $Z^2 - Z'^2$.

b) On pose $Z = -(1 - \sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3})i$. Calculer Z^2 ; Z^3 et Z^4 .

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $(1 - 2i)Z + 1 - 4i = 0$

b) $2iZ - 3i + (1 + i)Z = 0$

c) $2Z - 2 + iZ = 8 - 6i + (1 + 2i)Z$

d) $(3Z - 1)^2 + (Z - 2)^2 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} (1 - 2i)Z + 5iZ' = 13 + 14i \\ (2 + i)Z - (3 + i)Z' = -14 + 8i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (1 + 2i)Z + (1 + i)Z' = 1 + 5i \\ (4 - 2i)Z + (3 - i)Z' = 2 - i \end{cases}$$

(Les complexes solutions seront écrites sous forme algébrique).

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous

a) $Z^2 + 4Z + 5 = 0$

b) $3Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 7 = 0$

c) $Z^3 - 8 = 0$

d) $4Z^4 - 1 = 0$

e) $Z^4 + 5Z^2 + 4 = 0$

f) $Z^2 = -3 + 4i$

g) $(2 + i + Z)^2 = 1$

h) $Z^2 - \bar{Z} + 1 = 0$

Exercice 3

On considère l'équation (E) : $Z^3 - (1 - 4i)Z^2 - (1 + 2i)Z - 3 + 6i = 0$

1) Vérifier que i est solution de (E)

2) Montrer que (E) admet une solution α imaginaire pure distincte de i

3) Achèver la résolution de (E)

Exercice 4

1) Soit $P(Z)$ un polynôme de degré 4 à coefficients réels :

$P(Z) = aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e$. Démontrer que si $Z_0 \in \mathbb{C}$ est racine de p , il en est de même de $\bar{Z}_0$

2) On pose $P(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

a) Montrer que si Z_0 est solution de l'équation $P(Z) = 0$, alors $\frac{1}{Z_0}$ est

aussi solution.

b) Calculer $P(1 + i)$; $1 + i$ est-il solution de l'équation $P(Z) = 0$?

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

3) Trouver une factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $x \mapsto P(x)$

Exercice 5

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défini par : $f(Z) = Z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)Z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)Z - 2 - 2i$

- 1) Calculer $f(1 + i)$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $f(Z) = 0$
- 3) Représenter dans le plan complexe P les points A, B, C image des solutions de l'équation (E) (Unité 4 cm). (A désigne l'image de $1 + i$; B est celui des deux autres points dont l'ordonnée est positive. Montrer que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 6 (BAC)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $P(Z)$ le polynôme défini par : $P(Z) = Z^3 + (1-5i)Z^2 - 4Z + 16$ ou Z désigne un nombre complexe.

- 1) a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure Z_0 .
b) Achever la résolution de l'équation $P(Z) = 0$. On appelle Z_1 et Z_2 les deux autres racines, avec la partie réelle de Z_1 négative.
c) Ecrire Z_0 , Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.
- 2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et Z_0 . Déterminer en radians, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, puis en déduire la nature du triangle ABC.

- 3) Soit r la rotation de centre o et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- a- Calculer $Z_{A'}$ l'afixe du point A' tel que $A' = r(A)$.
- b- Quelle est la nature du quadrilatère OACA' ?

Exercice 7

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}'$ le sous-ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est non nul. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Soit

l'application $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{(Z-1)(\bar{Z}+1)}{Z+\bar{Z}}$, $\bar{Z}$ étant le conjugué de Z .

- a) Soit $Z \in \mathbb{C}'$, $f(Z) = Z'$ avec $Z = x + iy$ et $Z' = X + iY$ x, y, X et Y étant des réels. Calculer X et Y en fonction de x et y .
- b) Calculer $f(1)$ et $f(1 + i)$.
- c) Déterminer l'ensemble E des points M d'afixe Z tels que $Z' = f(Z)$ soit imaginaire pure.

d) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe Z tels que la partie imaginaire Y de $Z' = f(Z)$ soit une constante k réelle donnée.

e) Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}'$ on a : $f(Z) = f\left(-\frac{1}{\bar{Z}}\right)$

Exercice 8

A tout point M d'affixe Z ; ($Z \neq -1$) on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{-iZ - 2}{Z + 1}$. On note A le point d'affixe -1 .

1) On pose $Z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1; 0)$. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z' .

2) a- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que Z' soit réel.

b- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que Z' soit imaginaire pur.

3) Démontrer que $|Z + 1||Z' + i| = \sqrt{5}$. En déduire que si M appartient au cercle de centre A d'affixe -1 et de rayon 3 , alors M' appartient à un cercle de centre et de rayon à préciser.

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm). On note A le point d'affixe $-1 + i$ et B celui d'affixe $\frac{1}{2}i$.

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-1 + i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$

1) Quel est l'ensemble D des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 2$?

2) On pose $z = x + iy$, x et y sont réels :

a) Exprimer, en fonction de x et y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z , tels que $f(z)$ soit réel.

c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M d'affixe z , tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

3) Soit C le point d'affixe $-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.

a) Vérifier que B appartient à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{P}$ et que C appartient à $\mathcal{P}$.

Placer B et C sur la figure.

b) Quelle est la nature du triangle ABC . Justifier.

Exercice 10

1) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants.

$$Z_1 = \cos \theta - i \sin \theta ; Z_2 = -\sin \theta + i \cos \theta ; Z_3 = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$Z_4 = \sin \theta + i \cos \theta ; Z_5 = -\sin \theta - i \cos \theta ; Z_6 = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

$$Z_7 = 1 + i \tan \theta \left(\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\right] ; Z_8 = \frac{1}{1 + i \tan \theta} \quad \theta \in \left(\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\right)$$

2) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes ci-dessous.

$$Z_1 = -\frac{1}{1+i} ; Z_2 = \frac{3}{1-i} ; Z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} ; Z_4 = \frac{1+i}{1-i} e^{-2i\frac{\pi}{3}} ; Z_5 = \frac{1+\sqrt{3}i}{e^{3i\frac{\pi}{4}}} ;$$

$$Z_6 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^2 ; Z_7 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}} ; Z_8 = \left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^n$$

Exercice 11

1) Soient les nombres complexes $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $Z' = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes Z et Z'

b) En déduire la forme trigonométrique de : $Z \cdot Z'$; $\frac{Z}{Z'}$; Z'^3 ; $Z'^6 \cdot \frac{Z^5}{Z'^2}$

2) On considère les complexes $Z_1 = \sqrt{3} + i$ et $Z_2 = 1 - i$

a) Déterminer $|Z_1|$ et $|Z_2|$; $\arg Z_1$ et $\arg Z_2$.

b) Calculer $\frac{Z_1}{Z_2}$ à l'aide des formes algébriques de Z_1 et de Z_2 puis à l'aide des formes trigonométriques de Z_1 et Z_2 .

c) En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) On donne $Z = \frac{(-6-2i\sqrt{3})^2}{(-3+3i)^3}$. Ecrire Z sous forme algébrique puis sous

forme trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

1) Soient les nombres complexes $Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ et $Z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ et $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$.

- Ecrire Z_3 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument des complexes Z_3 et Z_1 .
- Déduire des résultats précédents le module et un argument de Z_2 ainsi que les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2) On donne $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

a) Mettre sous forme trigonométrique Z , Z' et $Z'' = \frac{Z}{Z'}$.

b) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

c) On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$.

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 13

Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) a) Calculer j^2, j^3, j^4, j^5, j^6 . Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$

b) On considère la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres complexes définie par $z_n = j^n$. Montrer que la suite est périodique. Préciser sa période.

c) En déduire suivant les valeurs de n , le calcul de j^n . En déduire j^{2002} ; j^{2003} et j^{2004} .

2) On pose $S_n = 1 + j + j^2 + j^3 + \dots + j^n$.

a) Calculer S_2, S_3, S_8, S_{13} .

b) Exprimer en fonction de n la somme S_n . Simplifier S_n suivant les valeurs de n .

Exercice 14

1) On donne le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1)}{2 + i\sqrt{2}}$

a) Ecrire a sous la forme algébrique et sous la forme exponentielle.

b) Déterminer l'ensemble I des entiers naturels n tels que a^n soit un réel.

c) Déterminer l'ensemble J des entiers naturels p tels que a^p soit de la forme λi , $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

d) 2004 est-il élément de I ? Est-il élément de J ? Justifier la réponse.

2) On désigne par T la transformation du plan complexe dans lui-même

qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

a) Préciser la nature de T .

b) Soit A le point d'affixe $Z_A = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$, et A' son image par T . Ecrire Z_A sous forme exponentielle. En déduire l'affixe de A' . En déduire

$$\text{que : } \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Donner alors une forme très simple de $\tan \frac{\pi}{12}$.

c) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$ l'équation $(2 - \sqrt{3})\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2cm. On considère le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$, le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et le milieu Q de $[OB]$.

1) Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q . Déterminer l'affixe Z_K du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

2) Démontrer que $\frac{Z_K - a}{Z_K}$ est un imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ? Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$. Placer les points A , B , Q , et K dans le plan.

3) Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$. Calculer $\frac{Z_K - b}{Z_K - C}$.

Que peut-on en déduire pour les points B , C et K ? Placer le point C sur la figure.

Exercice 16

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.

Soit K, L et M les points d'affixes respectives $Z_K = 1 + i$; $Z_L = 1 - i$ et $Z_M = -i\sqrt{3}$. On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

2) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe Z_N du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

3) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives Z_A et Z_C des points A et C.

4) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives Z_D et Z_B des points D et B ;

5) Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].

Montrer que $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 17

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit d le nombre complexe défini par :

$$d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2.$$

a) Ecrire d sous forme algébrique, puis déterminer les racines carrées de d.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - (3 + 2i)Z - 1 + 13i = 0$. On notera Z_1 la solution de partie réelle positive et Z_2 l'autre solution.

2) On désigne par A et B les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .

a) Déterminer l'affixe du point C, dont l'image dans la translation t de vecteur d'affixe $4i$ est le point B.

b) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{CA}, \vec{CB})$

3) M étant le point d'affixe z distincte de $4 - i$, on considère le nombre

$$\text{complexe } Z = \frac{iz + 3 + i}{z - 4 + i}.$$

a) Vérifier que $Z = \frac{i(z + 1 - 3i)}{z - 4 + i}$

b) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit de module 1.

Exercice 18

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (o, \vec{u}, \vec{v})$;
unité : 2cm.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système :
$$\begin{cases} iZ + \bar{Z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{Z} - iZ' = -2 \end{cases}$$
- 2) Soit A et B les points d'affixes respectives $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z_B = -\sqrt{3} - i$.
 - a) Ecrire Z_A , Z_B et $Z_A \cdot Z_B$ sous forme trigonométrique
 - b) Montrer que Z_A^3 est réel et que Z_B^3 est imaginaire pur.
- 3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - a) On pose $r(A) = C$. Calculer l'affixe (Z_C) de C.
 - b) On pose $r(C) = D$. Calculer l'affixe (Z_D) de D.
 - c) Placer les points A, B, C et D.
- 4) a- Montrer que O est le milieu de [AD] et [BC].
 - b- Calculer le module et un argument de $\frac{Z_A}{Z_B}$.
 - c- En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 19 (Non corrigé)

- 1) Soit Z le nombre complexe $Z = \cos \theta + i \sin \theta$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,
 $Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ (Formule de Moivre).
- 2) Ecrire le nombre complexe $1 + i$ sous forme trigonométrique.
En utilisant la question précédente, démontrer que : $(1 + i)^{100} = -2^{50}$.
- 3) Justifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

En déduire la valeur de $\left[\frac{\sqrt{6}}{4}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i) \right]^{2004}$

Exercice 20 (Non corrigé)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$. On note $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ distincts de A.

Soit f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}^*$ d'affixe z

associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que $Z = i \left(\frac{z-2i}{z+i} \right)$

1) a- Soit M_1 le point d'affixe i et M_2 le point d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. Déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

b- Déterminer le point M de $\mathcal{P}^*$ tel que $f(M) = 0$.
Déterminer le point M de $\mathcal{P}^*$ tel que $f(M) = N$ où N est le point d'affixe $2 - i$.

2) Déterminer et construire :

a) L'ensemble $\mathcal{L}$ des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images $f(M)$ ont pour affixe un nombre imaginaire pur.

b) L'ensemble $\mathcal{P}$ des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images $f(M)$ ont pour affixe un nombre réel.

c) L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1 .

Exercice 21

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2cm .

Soit A_0 le point d'affixe 2 , A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement, si A_n est un point d'affixe Z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iZ_n et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note φ_n et θ_n le module et l'argument de Z_n .

1) a- Déterminer les affixes des points $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$. Placer ces points sur une figure.

b- Calculer $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

2) a- Pour tout entier n , exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n . En déduire Z_n en fonction de n .

b- Etablir les expressions de φ_n et θ_n en fonction de n .

c- Déterminer la suite de φ_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

d- Comparer les modules et les arguments de Z_n et Z_{n+8} .

3) Etablir que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.

Après avoir exprimé $A_n A_{n+1}$ en fonction de n . Déterminer en fonction de n , la longueur ℓ_n de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$. Déterminer la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

1) Ecrivons sous forme algébrique

- $(2 + i) + (-1 + 5i) = (2-1) + (1+5)i = 1 + 6i$
- $2(2 + i) - 3(-1 + 5i) = 4 + 2i + 3 - 15i = (4+3) + (2-15)i = 7 - 13i$
- $(2 + i)^2 + (-1 + 5i)^2 = 4 + 4i - 1 + 1 - 10i - 25 = -21 - 6i$
- $(2 + i)^2 (1 + i)^2 (4 - 3i) = (3 + 4i)(2i)(4 - 3i) = 4 + 22i$
- $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$
 $= (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = (1 + \frac{3}{4})(1 + \frac{1}{2}) = \frac{21}{8}$
- $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
- $\frac{5i+4}{1-2i} = \frac{(4+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{6}{5} + \frac{13i}{5}$
- $\frac{3+i}{2+5i} = \frac{(3+i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}i$
- $\frac{1}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{1}{13}$

2) a- $Z = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z' = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(\sqrt{3} + i)$

Calculons $Z+Z'$; $Z-Z'$; $Z.Z'$; Z/Z' puis Z^2 ; Z'^2 ; $Z^2 - Z'^2$.

- $Z + Z' = (-1 + i\sqrt{3}) + (\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i) = (-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + i(\sqrt{3} + \frac{1}{3})$
- $Z - Z' = (-1 + i\sqrt{3}) - (\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i) = (-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + i(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$
- $Z.Z' = (-1 + i\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i) = \frac{i}{3}(\sqrt{3} + i)^2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}i$
- $Z/Z' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\frac{1}{3}(\sqrt{3} + i)} = \frac{i(\sqrt{3} + i)}{\frac{1}{3}(\sqrt{3} + i)} = \frac{i}{\frac{1}{3}} = 3i$

$$\bullet Z^2 = (-1 + i\sqrt{3})^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\bullet Z'^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}i\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9}i$$

$$\bullet Z^2 - Z'^2 = (-2 - 2i\sqrt{3}) - \left(\frac{2}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9}i\right) = -\frac{20}{9} - \frac{20\sqrt{3}}{9}i$$

b) $Z = -(1 - \sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3})i$. Calculons Z^2 ; Z^3 et Z^4

$$\bullet Z^2 = [(1 - \sqrt{3}) + 2(1 + \sqrt{3})i]^2 = (1 - \sqrt{3})^2 + 4(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})i - 4(1 + \sqrt{3})^2$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} - 8i - 16 - 8\sqrt{3} = -12 - 10\sqrt{3} - 8i$$

$$Z^2 = -2(6 + 5\sqrt{3}) - 8i$$

$$Z^3 = Z - Z^2 = [-(1 - \sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3})i](-2(6 + 5\sqrt{3}) - 8i)$$

$$Z^3 = (-34 - 18\sqrt{3}) + (92 - 36\sqrt{3})i$$

$$Z^4 = (Z^2)^2 = [-2(6 + 5\sqrt{3}) - 8i]^2 = 4(6 + 5\sqrt{3})^2 + 32i(6 + 5\sqrt{3}) - 64$$

$$Z^4 = (380 + 240\sqrt{3}) + 32(6 + 5\sqrt{3})i$$

Exercice 2

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations

$$a) (1 - 2i)Z + 1 - 4i = 0 \Leftrightarrow Z = \frac{-1 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(-1 + 4i)(1 + 2i)}{5}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{-9 + 2i}{5}; \quad S = \left\{ \frac{-9}{5} + \frac{2}{5}i \right\}$$

$$b) 2iZ - 3i + (1 + i)Z = 0 \Leftrightarrow (2i + 1 + i)Z = 3i \Leftrightarrow (1 + 3i)Z = 3i$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{3i}{1 + 3i} = \frac{3i(1 - 3i)}{10} \Leftrightarrow Z = \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i; \quad S = \left\{ \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i \right\}$$

$$c) 2Z - 2 + iZ = 8 - 6i + (1 + 2i)Z \Leftrightarrow (2 + i - 1 - 2i)Z = 8 - 6i + 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - i)Z = 10 - 6i \Leftrightarrow Z = \frac{(10 - 6i)}{1 - i} = 8 + 2i; \quad S = \{8 + 2i\}$$

$$d) (3Z - 1)^2 + (Z - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3Z - 1)^2 - [i(Z - 2)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3Z - 1 - iZ + 2i)(3Z - 1 + iZ - 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((3 - i)Z - 1 + 2i)((3 + i)Z - 1 - 2i) = 0 \Leftrightarrow Z = \frac{1 - 2i}{3 - i} \text{ ou } Z = \frac{1 + 2i}{3 + i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ou } Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; \quad S = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

2) Résolution dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ des systèmes

$$a) \begin{cases} (1-2i)Z + 5iZ' = 13+14i \\ (2+i)Z - (3+i)Z' = -14+8i \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-2i & 5i \\ 2+i & -3-i \end{vmatrix} = (1-2i)(-3-i) - 5i(2+i) = -5i$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 13+14i & 5i \\ -14+8i & -3-i \end{vmatrix} = (-3-i)(13+14i) - 5i(-14+8i) = -5i(-3+3i)$$

$$\Delta_{z'} = \begin{vmatrix} 1-2i & 13+14i \\ 2+i & -14+8i \end{vmatrix} = (1-2i)(-14+8i) - (2+i)(13+14i)$$

$$\Delta_{z'} = -5i(-2i+1) ; \quad Z' = \frac{\Delta_{z'}}{\Delta} = 1-2i ; \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -3+3i$$

$$S = \{(-3+3i ; 1-2i)\}$$

$$b) \begin{cases} (1+2i)Z + (1+i)Z' = 1+5i \\ (4-2i)Z + (3-i)Z' = 2-i \end{cases}$$

Résolution par combinaison linéaire

$$(4-2i)x \begin{cases} (1+2i)Z + (1+i)Z' = 1+5i \\ (1+2i)x \begin{cases} (4-2i)Z + (3-i)Z' = 2-i \end{cases}$$

$$(1+2i)x \begin{cases} (4-2i)Z + (3-i)Z' = 2-i \end{cases}$$

$$\text{On élimine ainsi } Z \text{ et on obtient } Z' = -\frac{35}{10} + \frac{45}{10}i$$

$$(3-i) \begin{cases} (1+2i)Z + (1+i)Z' = 1+5i \\ (1+i) \begin{cases} (4-2i)Z + (3-i)Z' = 2-i \end{cases}$$

$$(1+i) \begin{cases} (4-2i)Z + (3-i)Z' = 2-i \end{cases}$$

$$\text{On élimine } Z' \text{ et on obtient alors } Z = \frac{34}{10} - \frac{28}{10}i ;$$

$$S = \{(\frac{34}{10} - \frac{28}{10}i ; -\frac{35}{10} + \frac{45}{10}i)\}$$

3) Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré.

$$a) Z^2 + 4Z + 5 = 0 ; \Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i ; \quad Z_2 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i ; \quad S = \{-2-i ; -2+i\}$$

$$b) 3Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 7 = 0 ; \Delta = 12 - 84 = -72 = (6\sqrt{2})^2$$

$$Z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 6\sqrt{2}i}{6} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}i}{6}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}i}{3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i}{3} ; S = \{ \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}i}{3} ; \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i}{3} \}$$

$$c) Z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow Z^3 - 2^3 = 0 \Leftrightarrow (Z-2)(Z^2 + 2Z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = 2 \text{ ou } Z^2 + 2Z + 4 = 0$$

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0 \quad \Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$Z_1 = -1 - \sqrt{3}i \quad Z_2 = -1 + \sqrt{3}i; S = \{2; -1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$$

$$d) 4Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2Z^2 - 1)(2Z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}Z - 1)(\sqrt{2}Z + 1)(\sqrt{2}Z + i)(\sqrt{2}Z - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } Z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } Z = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ou } Z = \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -i\frac{\sqrt{2}}{2}; i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$e) Z^4 + 5Z^2 + 4 = 0 \text{ posons } Z = z^2, \text{ l'équation devient: } z^2 + 5z + 4 = 0;$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2; z_1 = \frac{-5-3}{2} = -4; \quad z_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

$$z = Z^2 = -4 \Leftrightarrow Z = 2i \text{ ou } Z = -2i; \quad z = Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z = i \text{ ou } Z = -i$$

$$S = \{-2i; -i; i; 2i\}$$

$$f) Z^2 = -3 + 4i. \text{ Posons } Z = x + iy; \quad Z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$Z^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3(1) \\ x^2 + y^2 = 5(2) \\ xy = 2(3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ donne: } 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$(2) - (1) \text{ donne } 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = -2$$

$$(3) \quad xy = 2 \text{ donc } x \text{ et } y \text{ sont de même signe.}$$

$$Z = 1 + 2i \text{ ou } Z = -1 - 2i; \quad S = \{-1 - 2i; 1 + 2i\}$$

$$g) (2 + i + Z)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 + i + Z = 1 \text{ ou } 2 + i + Z = -1$$

$$\Leftrightarrow Z = -1 - i \text{ ou } Z = -3 - i \Leftrightarrow S = \{-1 - i; -3 - i\}$$

$$h) Z^2 - \bar{Z} + 1 = 0. \text{ Posons } Z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$Z^2 - \bar{Z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - x + 1) + y(2x + 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 1 = 0 \text{ et } (y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2})$$

$$\bullet y = 0 \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta = -3 \text{ impossible car } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet x = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}; \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \right\}$$

Exercice 3

$$(E) : Z^3 - (1 - 4i)Z^2 - (1 + 2i)Z - 3 + 6i = 0$$

1) Vérifions que i est solution de (E)

$$i^3 - (1 - 4i)(i)^2 - (1 + 2i)(i) - 3 + 6i = -i + 1 - 4i - i + 2 - 3 + 6i = -6i + 6i + 3 - 3 = 0 \quad i \text{ est donc solution de (E).}$$

2) Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure α autre que i .

Soit a un réel non nul ($a \neq 1$). Posons $\alpha = ai$, $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$

$$(ai)^3 - (1 - 4i)(ai)^2 - (1 + 2i)(ai) - 3 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^3i + (1 - 4i)a - (ai - 2a) - 3 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a^3 - 4a^2 - a + 6)i + (a^2 + 2a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a^3 - 4a^2 - a + 6 = 0 & (1) \\ a^2 + 2a - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 3) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = -3$$

$a = -3$ vérifie l'équation (1). Donc $\alpha = -3i$

3) Résolution de l'équation (E)

$$Z^3 - (1 - 4i)Z^2 - (1 + 2i)Z - 3 + 6i = (Z - i)(Z + 3i)(Z - b)$$

$$-3 + 6i = -3b \Leftrightarrow b = 1 - 2i; \quad S = \{i; -3i; -1 + 2i\}$$

Exercice 4

$$1) P(Z) = aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e$$

Soit Z_0 une racine de p : $P(Z_0) = 0$

$$\begin{aligned} P(\overline{Z_0}) &= a(\overline{Z_0})^4 + b(\overline{Z_0})^3 + c(\overline{Z_0})^2 + d(\overline{Z_0}) + e \\ &= \overline{aZ_0^4 + bZ_0^3 + cZ_0^2 + dZ_0 + e} \\ &= \overline{aZ_0^4 + bZ_0^3 + cZ_0^2 + dZ_0 + e} \end{aligned}$$

$$= aZ_0^4 + bZ_0^3 + cZ_0^2 + dZ_0 + e$$

$P(\overline{Z_0}) = \overline{P(Z_0)} = \overline{0} = 0$. $\overline{Z_0}$ est aussi racine de P . Si Z_0 est une racine de P alors $\overline{Z_0}$ aussi racine de P .

$$2) P(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$$

a) Soit Z_0 est une racine de l'équation $P(Z) = 0$

On a $Z_0 \neq 0$ car $P(0) = 1 \neq 0$

$$P\left(\frac{1}{Z_0}\right) = \frac{1}{Z_0^4} - \frac{3}{Z_0^3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{Z_0^2} - \frac{3}{Z_0} + 1$$

$$= \frac{Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1}{Z_0^4} = \frac{1}{Z_0^4} \cdot P(Z_0) = 0$$

$P\left(\frac{1}{Z_0}\right) = 0$. Si Z_0 est une racine de l'équation $P(Z) = 0$, alors $\frac{1}{Z_0}$ est aussi racine.

b) Calculons $P(1+i)$

$$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + \frac{9}{2}(1+i)^2 - 3(1+i) + 1 \\ &= -4 - 3(2i-2) + 9i - 3 - 3i + 1 \\ &= (-4 + 6 - 3 + 1) + (-6 + 9 - 3)i = 0 \end{aligned}$$

$P(1+i) = 0$ $1+i$ est une racine du polynôme P .

c) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$. Comme $1+i$ est racine de P , $\overline{1+i} = 1-i$ est aussi racine de P (d'après 1).

D'après (2-a) $\frac{1}{1+i}$ et $\frac{1}{1-i}$ sont aussi des racines du polynôme P .

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}; \quad \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \quad P(Z) = 0 \text{ a pour ensemble de solutions.}$$

$$S = \left\{ \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{2}; 1-i; 1+i \right\}$$

3) Factorisons dans $\mathbb{R}$ le polynôme $x \mapsto P(x)$

$$\begin{aligned} P(Z) &= \left(Z - \left(\frac{1-i}{2} \right) \right) \left(Z - \left(\frac{1+i}{2} \right) \right) (Z - (1-i))(Z - (1+i)) \\ &= \left(\left(Z - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}i \right) \left(\left(Z - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}i \right) ((Z-1)+i)((Z-1)-i) \\ &= \left(\left(Z - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) ((Z-1)^2 + 1) = \left(Z^2 - 2Z + \frac{1}{2} \right) (Z^2 - 2Z + 2) \end{aligned}$$

$$P(x) = \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) (x^2 - 2x + 2), \quad (x \in \mathbb{R})$$

Exercice 5

$$f(Z) = Z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)Z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)Z - 2 - 2i$$

1) Calculons $f(1+i)$

$$f(1+i) = (1+i)^3 - (2 + \sqrt{3} + i)(1+i)^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)(1+i) - 2 - 2i$$

$$f(1+i) = 0$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$

$f(1+i)=0$ il existe un polynôme Q complexe de degré 2 tel que $f(Z) = (Z-1-i)Q(Z)$.

Posons $Q(Z) = Z^2 + aZ + b$

$$f(Z) = (Z-1-i)(Z^2 + aZ + b)$$

$$= Z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)Z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)Z - 2 - 2i$$

On a $-b(1+i) = -2(1+i)$ donc $b = 2$

$$aZ^2 + (-1-i)Z^2 = (a-1-i)Z^2 = (-2-\sqrt{3}+i)Z^2$$

$$\text{Donc } a-1-i = -2-\sqrt{3}+i \Leftrightarrow a = -1-\sqrt{3}$$

$$f(Z) = (Z-1-i)(Z^2 - (1+\sqrt{3})Z + 2)$$

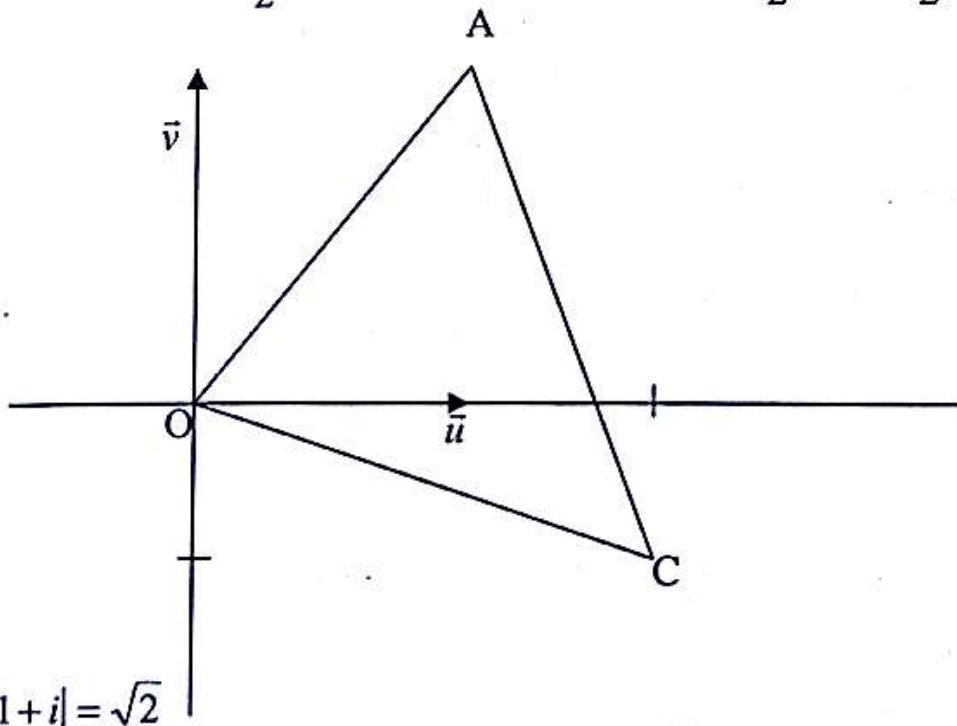
$$f(Z) = 0 \Leftrightarrow Z-1-i=0 \text{ ou } Z^2 - (1+\sqrt{3})Z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = 1+i \text{ ou } Z = \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2} \text{ ou } Z = \frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$S = \left\{ 1+i; \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2}; \frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{2} \right\}$$

3) $(o, \vec{u}, \vec{v})$ repère orthonormé du plan complexe unité : 4 cm.

$$A(1+i) \text{ et } C\left(\frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{2}\right) \text{ donc } A(1;1); B\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}; -\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$



$$OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$OC = \left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4} + \frac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

$$AC = \left| \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - 1 \right) i \right| = \sqrt{\frac{(-1+\sqrt{3})^2}{4} + \frac{(-1-\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{2}$$

OA = OC = AC = $\sqrt{2}$. Donc OAC est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Exercice 6

$$P(Z) = Z^3 + (1 - 5i)Z^2 - 4Z + 16$$

1) a- Montrons $P(Z) = 0$ admet une racine imaginaire pure. Posons $Z_0 = bi$, $b \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} P(Z_0) = 0 &\Leftrightarrow (bi)^3 + (1 - 5i)(bi)^2 - 4(bi) + 16 \\ &\Leftrightarrow (-b^2 + 16) + i(-b^3 + 5b^2 - 4b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 16 = 0 & (1) \\ -b^3 + 5b^2 - 4b = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 & \text{ou } b = 4 \\ -b^2 + 5b - 4 = 0 & (b \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$b = 4$ vérifie simultanément les équations (1) et (2). D'où $Z_0 = 4i$

b- Achéons la résolution de l'équation $P(Z) = 0$

$$P(Z) = (Z - 4i)(\alpha Z^2 + \beta Z + \delta) \text{ où } \alpha, \beta \text{ et } \delta \text{ sont des complexes}$$

$$= \alpha Z^3 + (\beta - 4i\alpha)Z^2 + (\delta - 4i\beta)Z - 4i\delta$$

= Par identification des coefficients on a:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4i\alpha = 1 - 5i \\ -4i\delta = 16 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 - i \\ \delta = 4i \end{cases}$$

$$\text{D'où } P(Z) = (Z - 4i)(Z^2 + (1 - i)Z + 4i)$$

$$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 4i \text{ ou } Z^2 + (1 - i)Z + 4i = 0$$

$$\Delta = (1 - i)^2 - 16i = -18i$$

$$\Delta = -18i = 9(-2i) = 3^2(1 - i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-1+i-3+3i}{2} \text{ ou } Z_2 = \frac{-1+i+3-3i}{2}$$

$$Z_1 = -2 + 2i \text{ ou } Z_2 = 1 - i$$

$$S = \{4i; -2 + 2i; 1 - i\}$$

$$Z_0 = 4i; Z_1 = -2 + 2i; Z_2 = 1 - i$$

c) Ecrivons Z_0, Z_1 ; et Z_2 sous forme trigonométrique

$$Z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_1 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$Z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2) Déterminons une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

$A(Z_1)$; $B(Z_2)$ et $C(Z_0)$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_0 - Z_1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\frac{3}{2}i$$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$, le triangle $A B C$ est donc rectangle en A .

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Calculons $Z_{A'}$, affixe de $A' = r(A)$

$$\begin{aligned} r(A) = A' &\Leftrightarrow Z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} (-2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow Z_{A'} = 2 + 2i \end{aligned}$$

b) Nature du quadrilatère $OACA'$

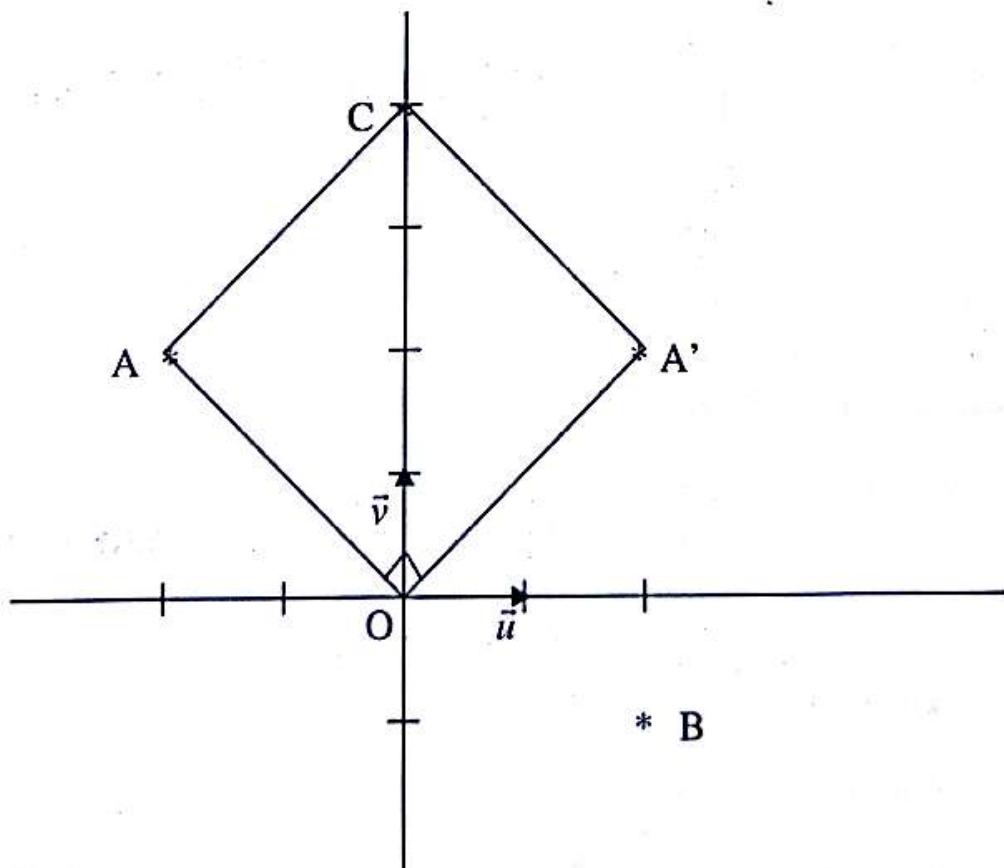
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 4i - (-2 + 2i) = 2 + 2i$$

$$Z_{\overrightarrow{OA'}} = Z_{A'} = 2 + 2i = Z_{\overrightarrow{AC}}$$

D'où $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AC}$, $OACA'$ est donc un parallélogramme.

$$r(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De plus ce parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur. C'est donc un carré.



Exercice 7

$$f(Z) = \frac{(Z-1)(\bar{Z}+1)}{Z+\bar{Z}}; Z = x+iy; Z' = X+iY = f(Z)$$

$$Z' = X+iY = f(x+iy) = \frac{(x+iy-1)(x-iy+1)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2+y^2-1}{2x} + \frac{y}{x}i$$

$$X = \frac{x^2+y^2-1}{2x} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{x}$$

$$b) f(1) = 0; f(1+i) = \frac{i(-i+2)}{2} = \frac{1}{2} + i$$

c) Déterminons l'ensemble E des points M d'affixe Z tels que $Z' = f(Z)$ soit imaginaire pure.

$$f(Z) \text{ imaginaire pure} \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x \neq 0)$$

E a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$ et $(x \neq 0)$. E est le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points de coordonnées (0 ; -1) et (0 ; 1)

d) F est l'ensemble des points d'affixe Z tels que la partie imaginaire Y de $Z' = f(Z)$ soit une constante k réelle $Y = \frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$ avec $x \neq 0$.

F est la droite d'équation $y = kx$ privée du point O(0 ; 0)

e) $Z \in \mathbb{C}'$. Montrons que $f(\frac{-1}{\bar{Z}}) = f(Z)$

$$f\left(\frac{-1}{\bar{Z}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\bar{Z}}-1\right)\left(-\frac{1}{\bar{Z}}+1\right)}{-\frac{1}{\bar{Z}}-\frac{1}{Z}} = \frac{(-1-\bar{Z})(-1+Z)}{-Z-\bar{Z}} = \frac{(\bar{Z}+1)(Z-1)}{Z+\bar{Z}} = f(Z)$$

$$\text{Pour tout } Z \in \mathbb{C}' \quad f\left(\frac{-1}{\bar{Z}}\right) = f(Z)$$

Exercice 8

$$Z' = \frac{-iZ-2}{Z+1}. \quad A \text{ d'affixe } -1$$

1) $Z = x+iy$ avec x et y réels tels que $(x,y) \neq (-1;0)$.

Déterminons en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z' .

$$Z' = \frac{-i(x+iy)-2}{x+iy+1} = \frac{[(y-2)-ix][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{(-2x + y - 2) + i(-x^2 - y^2 - x + 2y)}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\Re(Z') = \frac{-2x + y - 2}{(x+1)^2 + y^2} \quad \Im(Z') = \frac{-x^2 - y^2 - x + 2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

2) a- Déterminons l'ensemble des points $M(Z)$ tels que Z' soit réel.

$$Z' \text{ réel} \Leftrightarrow \Im(Z') = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 - x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) + (y^2 - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$$

L'ensemble des points $M(Z)$ tel que Z' soit réel est le cercle de centre

$$A\left(\frac{1}{2}; 1\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

b- Déterminons l'ensemble des points $M(Z)$ tels que Z' soit imaginaire pur.

$$Z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \Re(Z') = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

L'ensemble des points $M(Z)$ tel que Z' soit imaginaire pur est la droite (D) d'équation : $2x - y + 2 = 0$ privé du point de coordonnées $(-1; 0)$.

3) Démontrer que : $|Z+1||Z'+i| = \sqrt{5}$

$$|Z+1||Z'+i| = |Z+1| \left| \frac{-iZ-2}{Z+1} + i \right| = |Z+1| \left| \frac{-iZ-2+iZ+i}{Z+1} \right|$$

$$|Z+1||Z'+i| = |-2+i| = \sqrt{5}$$

Soit M appartenant au cercle de centre $A(-1; 0)$ et de rayon 3.

$$M \in \mathcal{E}(A(-1;0);3) \Leftrightarrow |Z+1| = 3. \text{ Or } |Z+1||Z'+i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z'+i| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

M' appartient au cercle de centre $A'(0;-1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Exercice 9

$(o, \vec{u}, \vec{v})$ repère orthonormé du plan complexe unité : 4 cm.

$$A(-1+i); B\left(\frac{1}{2}i\right) \text{ c'est-à-dire } A(-1; 1); B\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$Z \in \mathbb{C}/\{-1+i\} \quad f(Z) = \frac{2Z-i}{Z+1-i}$$

1) Déterminons l'ensemble D des points M d'affixe Z tel que $|f(Z)| = 2$

$$|f(Z)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2Z-i}{Z+1-i} \right| = 2 \Leftrightarrow |2Z-i| = 2|Z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|Z - \frac{1}{2}i\right| = 2|Z + 1 - i| \Leftrightarrow |Z - Z_B| = |Z - Z_A|$$

$$|f(Z)| = 2 \Leftrightarrow |Z - Z_B| = |Z - Z_A| \Leftrightarrow BM = AM$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$. L'ensemble D des points M d'affixe Z tel que $|f(Z)| = 2$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2) $Z = x + iy$

a) Exprimons en fonction de x et y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(Z)$

$$f(Z) = f(x + iy) = \frac{2(x + iy) - i}{(x + iy) + (1 - i)} = \frac{2x + i(2y - 1)}{(x + 1) + i(y - 1)}$$

$$= \frac{(2x + i(2y - 1))((x + 1) - i(y - 1))}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{16}\right] + i(x + 2y - 1)}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$$

$$X = \frac{2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{16}\right]}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{x + 2y - 1}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$$

b) $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $f(Z)$ soit réel.

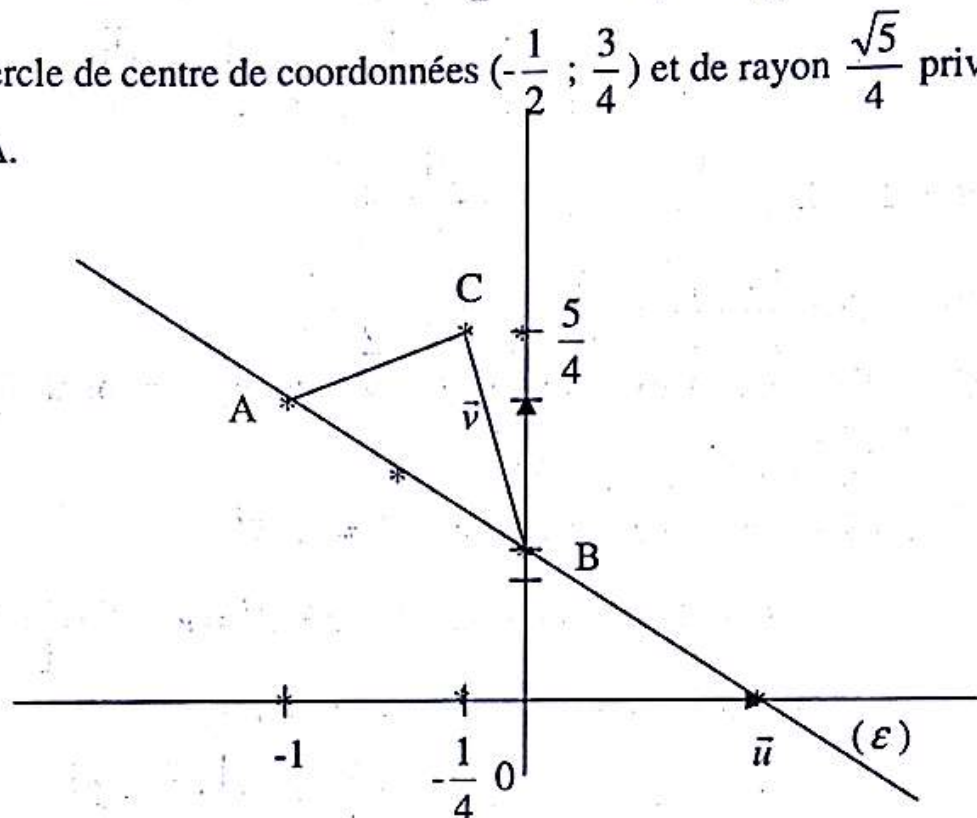
$$f(Z) \text{ réel} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0; (x; y) \neq (-1; 1)$$

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation : $x + 2y - 1 = 0$ privé du point A .

c) $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $f(Z)$ soit imaginaire pur.

$$f(Z) \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{16}$$

$\mathcal{P}$ est le cercle de centre de coordonnées $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ privé du point A.



3) C d'affixe $-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

a) Vérifions que $B \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{P}$ $B(0; \frac{1}{2})$

$$(\mathcal{E}: x + 2y - 1 = 0 \quad 0 + 2(\frac{1}{2}) - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ donc } B \in (\mathcal{E})$$

$$\mathcal{P}: (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{16} : B(0; \frac{1}{2})$$

$$(0 + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} ; B \in \mathcal{P}$$

$$C(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}) : \text{Vérifions que } C \in \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}: (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{16}$$

$$(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{5}{4} - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16} \text{ donc } C \in \mathcal{P}$$

b) Déterminons la nature du triangle ABC

$$AC = |Z_C - Z_A| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i + \frac{4}{4} - \frac{4}{4}i \right| = \left| \frac{3}{4} + i\frac{1}{4} \right| = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i - \frac{1}{2}i \right| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i \right| = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$AB = |Z_B - Z_A| = \left| \frac{1}{2}i + 1 - i \right| = \left| 1 - \frac{1}{2}i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AC^2 + BC^2 = \frac{10}{16} + \frac{10}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \quad ; \quad AB^2 = \frac{5}{4}$$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ et $AC = BC$, ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

Exercice 10

1) Ecrivons sous forme trigonométrique

$$Z_1 = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = [1; -\theta]$$

$$Z_2 = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = \left[1; \theta + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$Z_3 = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) = [1; \theta + \pi]$$

$$Z_4 = \sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left[1; \frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

$$Z_5 = -\sin \theta - i \cos \theta = -(\sin \theta + i \cos \theta) = e^{i\pi} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} = e^{i(\frac{3\pi}{2} - \theta)} = \left[1; \frac{3\pi}{2} - \theta \right] = \left[1; -\frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

$$Z_6 = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i2\theta} = [1; -2\theta]$$

$$Z_7 = 1 + i \tan \theta = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta} \text{ . Comme } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ cos} \theta$$

> 0

$$Z_7 = \left[\frac{1}{\cos \theta}; \theta \right]$$

$$Z_8 = \frac{1}{1 + i \tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta \cdot e^{-i\theta} \text{ or } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\text{ donc } \cos \theta < 0$$

$$Z_8 = (-\cos \theta)(-e^{-i\theta}) = (-\cos \theta)e^{i(\theta - \pi)} = [-\cos \theta; \pi - \theta]$$

2) Déterminons le module et un argument des complexes ci-dessous.

$$\bullet Z_1 = -\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$|Z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \arg(Z_1) = \frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

$$\bullet Z_2 = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; |Z_2| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ et } \arg(Z_2) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\bullet Z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}; |Z_3| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(Z_3) = \frac{7\pi}{12} (2\pi)$$

$$\bullet Z_4 = \frac{1+i}{1-i} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3})} = e^{-i\frac{\pi}{6}}; |Z_4| = 1 \text{ et } \arg(Z_4) = -\frac{\pi}{6} (2\pi)$$

$$\bullet Z_5 = \frac{1+\sqrt{3}i}{e^{3i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{3i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4})} = 2e^{-5i\frac{\pi}{12}}; |Z_5| = 2 \text{ et } \arg(Z_5) = -\frac{5\pi}{12} (2\pi)$$

$$\bullet Z_6 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^{30} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \right)^{30} = 2^{15} \cdot \frac{1}{e^{i\frac{15\pi}{2}}} = 2^{15} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}; |Z_6| = 2^{15} \text{ et } \arg(Z_6) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\bullet Z_7 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}})}{e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{-2i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_7 = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{6} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}; \quad Z_7 = \left[\tan\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\bullet Z_8 = \left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} \right)^n = \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} \right)^n = \frac{e^{in\theta}}{e^{-in\theta}} = e^{i2n\theta}; |Z_8| = 1 \text{ et } \arg(Z_8) = 2n\theta,$$

$n \in \mathbb{N}$

Exercice 11

1) On donne $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $Z' = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$

a) Déterminons le module et un argument de Z et Z'

$$\bullet Z = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)}{2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6})} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}; |Z|=1 \text{ et } \arg Z = -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\bullet Z' = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}; |Z'|=2 \text{ et } \arg(Z') = \frac{5\pi}{6}$$

b) Ecrivons sous forme trigonométrique les complexes $Z \cdot Z'$; $\frac{Z}{Z'}$; Z^3 ;

$$Z^6 \cdot \frac{Z^5}{Z^2}$$

$$\bullet Z \cdot Z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{-i(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \left[2; \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\bullet \frac{Z}{Z'} = \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{-i(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\bullet Z^3 = (2e^{i\frac{5\pi}{6}})^3 = 2^3 \cdot e^{i\frac{15\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = \left[8; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\bullet * Z^6 \cdot \frac{Z^5}{Z^2} = Z^4 \cdot Z^5 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4 \cdot \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 16 \cdot e^{i\frac{20\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 16 \cdot e^{i0} = [16; 0]$$

$$2) Z_1 = \sqrt{3} + i \text{ et } Z_2 = 1 - i$$

a) Déterminons $|Z_1|$; $|Z_2|$; $\arg(Z_1)$ et $\arg(Z_2)$

$$Z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; |Z_1|=2 \text{ et } \arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$$

$$Z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}; |Z_2| = \sqrt{2}; \arg(Z_2) = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$

b) Ecrivons $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

c) Déterminons les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

Par identification: $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3) On donne $Z = \frac{(-6-2i\sqrt{3})^2}{(-3+3i)^3}$. Ecrivons Z sous forme algébrique

$$Z = \frac{[2\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)]^2}{27(-1+i)^3} = \frac{12(2+2\sqrt{3})^2}{27(2+2i)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \right)$$

$$Z = \frac{4}{3} \cdot \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{9} + \frac{-2+\sqrt{3}}{9}i$$

Ecrivons Z sous forme trigonométrique

$$Z = \frac{\left(4\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} = \frac{48e^{i\frac{14\pi}{6}}}{18\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = \frac{4\sqrt{2}}{9} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right)$$

Déduction des valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$$Z = \frac{2+2\sqrt{3}}{9} + \frac{-2+2\sqrt{3}}{9}i = \frac{4\sqrt{2}}{9} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right)$$

Par identification on a :

$$2+\sqrt{3} = 4\sqrt{2} \cos\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$-2+2\sqrt{3} = 4\sqrt{2} \sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 12

$$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i ; Z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i \text{ et } Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$$

a) Ecrivons Z_3 sous forme algébrique

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} =$$

$$\frac{(2\sqrt{3} + 2i)}{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i} = \frac{(2\sqrt{3} + 2i)((1 + \sqrt{3}) - i(1 - \sqrt{3}))}{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \frac{8 + 8i}{8} = 1 + i$$

$$Z_3 = 1 + i$$

b) Module et arguments de Z_3 et Z_1 .

$$Z_3 = 1 + i ; |Z_3| = \sqrt{2} \quad \arg(Z_3) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \quad |Z_1| = 4 \quad \arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

c) Module et argument de Z_2

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow Z_2 = \frac{Z_1}{Z_3} ; |Z_2| = \frac{|Z_1|}{|Z_3|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) = \arg(Z_1) - \arg(Z_3) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} \quad |Z_2| = 2\sqrt{2} \quad \arg(Z_2) = -\frac{\pi}{12} (2\pi)$$

Valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$Z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} \\ 1 - \sqrt{3} = -2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ et } Z' = 1 - i$$

a) Donnons la forme trigonométrique de Z , Z' et $Z'' = \frac{Z}{Z'}$.

$$Z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} ; \quad Z' = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z'' = \frac{Z}{Z'} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

b) Valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$Z'' = \frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

$$Z'' = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

Par identification : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$

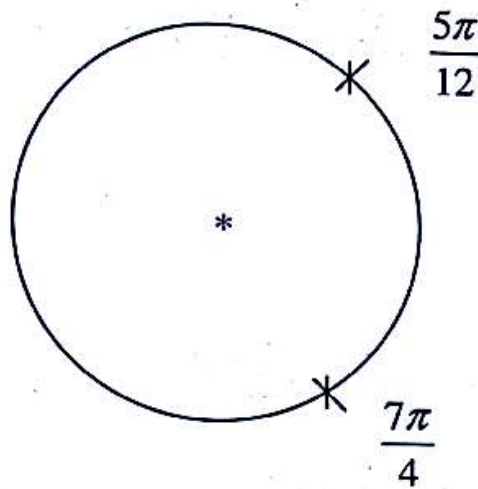
$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2 \Leftrightarrow 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \sin x \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{12} - x \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{12} - x \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{Z}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}; S_{[0, 2\pi[} = \left\{ \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{12} \right\}$$



Exercice 13

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1) a- Calculons $j^2; j^3; j^4; j^5; j^6$

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = e^{i2\pi} = 1; j^4 = j^3 \times j = j; j^5 = j^3 \times j^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^6 = (j^3)^2 = 1$$

Vérifions que $1 + j + j^2 = 0$

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

b- $z_n = j^n \quad n \in \mathbb{N}$

Montrons que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique

$$z_3 = j^3 = 1; z_4 = j^4 = j; z_5 = j^5 = j^2; z_6 = j^6 = 1 = z_3; z_{n+3} = j^{n+3} = j^n \times j^3 = j^n = z_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+3} = z_n$. La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

c) Déduisons $j^{2002}; j^{2003}$; et j^{2004}

$$\text{Si } n = 3k, k \in \mathbb{N}, j^n = (j^3)^k = 1$$

$$\text{Si } n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}, j^n = j^{3k} \times j = j$$

$$\text{Si } n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}, j^n = j^{3k} \times j^2 = j^2$$

$$2002 = 667 \times 3 + 1; j^{2002} = j; 2003 = 667 \times 3 + 2; j^{2003} = j^2; 2004 = 668 \times 3;$$

$$j^{2004} = 1$$

2) $S_n = 1 + j + j^2 + \dots + j^n$

a- Calculons S_2, S_3, S_8, S_{13}

$$S_2 = 1 + j + j^2 = 0 \quad (1.a)$$

$$S_3 = 1 + j + j^2 + j^3 = j^3 = 1$$

$$S_8 = 1 + j + j^2 + \dots + j^7 + j^8 = \frac{1-j^9}{1-j} = 0$$

$$S_{13} = 1 + j + j^2 + \dots + j^{12} + j^{13} = \frac{1-j^{14}}{1-j} = \frac{1-j^2}{1-j} = 1+j; \quad S_{13} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Exprimons S_n en fonction de n .

$$S_n = 1 + j + j^2 + \dots + j^n = \frac{1-j^{n+1}}{1-j}$$

Simplifions S_n suivant les valeurs de n .

$$\text{Si } n = 3k, k \in \mathbb{N}, n+1 = 3k+1 \text{ or } j^{3k+1} = j$$

$$\text{Si } n = 3k, S_n = \frac{1-j^{n+1}}{1-j} = \frac{1-j}{1-j} = 1$$

$$\text{Si } n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, n+1 = 3k+2 \text{ or } j^{3k+2} = j^2$$

$$S_n = \frac{1-j^{n+1}}{1-j} = \frac{1-j^2}{1-j} = 1+j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n = 3k+2, k \in \mathbb{N}, n+1 = 3k+3 \text{ or } j^{3k+3} = j^3 = 1$$

$$S_n = \frac{1-j^{n+1}}{1-j} = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

Exercice 14

$$1) \text{ On donne } a = \frac{\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1)}{2+i\sqrt{2}}$$

a) Ecrire a sous la forme algébrique et sous la forme exponentielle

$$a = \frac{(\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1))(2-i\sqrt{2})}{(2+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})} \text{ soit } a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On a } |a|=1, \arg a = \theta \text{ avec } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$a = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 1e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b) Déterminer I

$$I = \{n \in \mathbb{N} : a^n \text{ réel}\}$$

D'après la formule de Moivre, $a^n = e^{in\frac{\pi}{4}}$, $\arg a^n = n\frac{\pi}{4}$

$$a^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg a^n = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k \ k \in \mathbb{N}$$

I est l'ensemble des naturels multiples de 4

$$I = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$$

c) Déterminer J

$$J = \{\rho \in \mathbb{N}, a^\rho = \lambda i, \lambda > 0\}$$

$$a^\rho = \lambda i, (\lambda > 0) \Leftrightarrow \rho\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \rho = 2 + 8k'$$

J est l'ensemble des termes d'une suite arithmétique de 1^{er} terme 2 et de raison 8.

$$J = \{2, 10, 18, 26, \dots\}$$

d) 2004 est-il élément de I ? de J ?

$$2004 \in I \text{ si } 2004 = 4k \text{ soit } k = 501 \in \mathbb{Z}; 2004 \in I$$

$$2004 \in J \text{ si } 2004 = 2 + 8k \text{ soit } k = \frac{1001}{4} \notin \mathbb{Z}, 2004 \notin J$$

2) a- Préciser la nature de T

$$T: M'(z) \mapsto M'(z'): z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z. \text{ On a } z' = az = e^{i\frac{\pi}{4}}z. T \text{ est la rotation}$$

de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Ecrire z_A sous forme exponentielle. $z_A = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$|z_A| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg z_A = \theta \text{ avec } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{6}. \text{ D'où } z_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

En déduire l'affixe de $A' = T(A)$

$$z_{A'} = az_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{6}[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)]$$

$$\text{D'où } z_{A'} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}+1) + i\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}-1)$$

Déduction de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

En identifiant les deux formes de $z_{A'}$, on déduit que :

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}+1) \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}-1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Donner une valeur simple de $\tan \frac{\pi}{12}$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 = \frac{1}{2}(4-2\sqrt{3}).$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

c) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$, l'équation $(2 - \sqrt{3})\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3} - 1$

L'équation équivaut à $\frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3} - 1$

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{12} \sin 2x = (\sqrt{3} - 1) \cos \frac{\pi}{12} = (\sqrt{3} - 1) \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{D'où} \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k'\pi \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k'\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En variant k et k' dans $\mathbb{Z}$, on a : $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} \right\}$

Exercice 15 :

$(o, \vec{u}, \vec{v})$ repère orthonormé d'unité 2cm. A point d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$; B tel que OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et le milieu Q de [OB].

1) Démontrons que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. L'écriture complexe de la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$. B est l'image de A

onc $b = e^{i\frac{\pi}{3}} a$.

$$b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (5 - i\sqrt{3}) = 4 + 2i\sqrt{3}.$$

Q est le milieu de [OB] donc $q = \frac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}$. ABQK est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$. Donc $b - a = q - z_K$ d'où $z_K = q + a - b = 3 - 2i\sqrt{3}$. $z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$.

2) Démontrons que $\frac{z_K - a}{z_K}$ est un imaginaire pur.

$$\frac{z_K - a}{z_K} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

*Nature du OKA

$$(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{AK}) = \arg\left(\frac{z_K - a}{z_K}\right) = \arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Le triangle OKA est rectangle en K.

*Nature du quadrilatère OQAK

ABQK est un parallélogramme donc $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{QB}$ et Q est le milieu de [OB].

Donc $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QB}$. D'où $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OQ}$. Par suite OQAK est un parallélogramme.

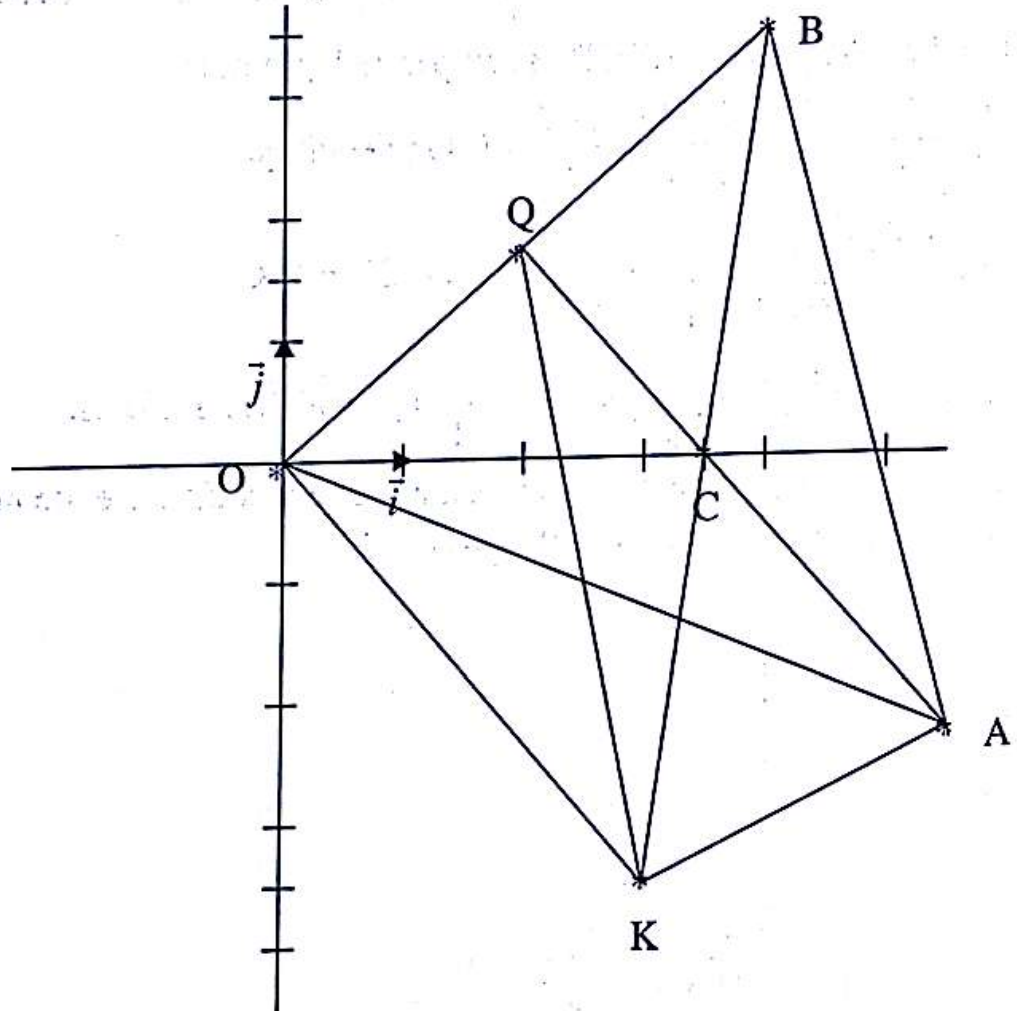
Le triangle OAK étant rectangle en K, le parallélogramme OQAK est un rectangle.

3) $c = \frac{2a}{3}$. Calculons $\frac{z_K - b}{z_K - c}$

$$\frac{z_K - b}{z_K - c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10}{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{3}} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i\sqrt{3}} = 3$$

$$(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{BK}) = \arg\left(\frac{Z_K - b}{Z_K - c}\right) = \arg(3) = 0 \pmod{2\pi}$$

$(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{BK}) = 0 \pmod{2\pi}$; les points A, C, et K sont alignés.



Exercice 16

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; $\Delta = -4 = (2i)^2$

$$Z_1 = 1 - i ; Z_2 = 1 + i \quad S = \{1 - i ; 1 + i\}$$

2) N est le symétrique du point M par rapport au point L. Donc L est le

milieu de [NM] et $Z_L = \frac{1}{2} (Z_M + Z_N)$. D'où $Z_N = 2Z_L - Z_M$

$$\text{soit } Z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$$

3) L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{est } Z' - Z_O = i(Z - Z_O) \text{ soit } Z' = iZ \text{ donc } Z_A = iZ_M = \sqrt{3}$$

$$\text{et } Z_C = iZ_N = (2 - \sqrt{3}) + 2i.$$

4) L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ est :

$Z' = Z + 2i$. Donc $Z_D = Z_M + 2i = (2 - \sqrt{3})i$; $Z_B = Z_N + 2i = 2 + i\sqrt{3}$

$$5) \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{2 + i\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i}{2} = 1 + i = Z_K ;$$

$$\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i}{2} = 1 + i = Z_K \quad K \text{ est le milieu des segments}$$

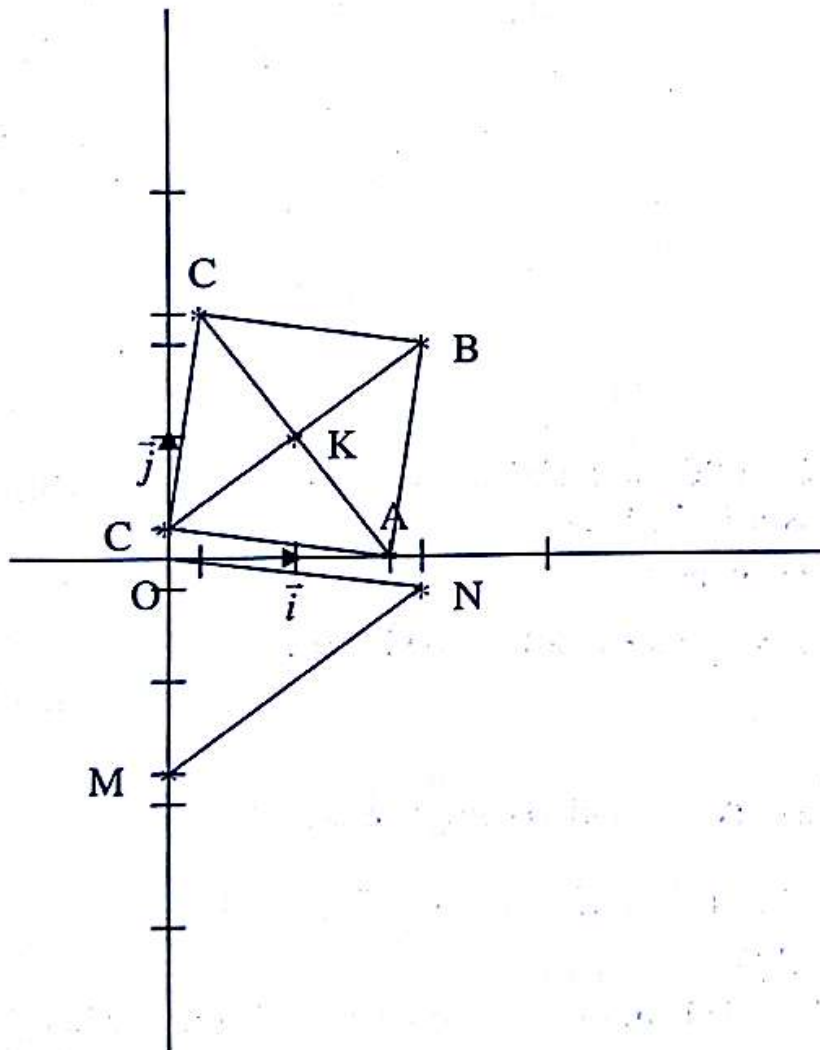
[DB] et [AC]. Donc ABCD est un parallélogramme.

$$\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2i - 1 - i}{2 + i\sqrt{3} - 1 - i} = i. \text{ On déduit que}$$

$$\left| \frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} \right| = \frac{|Z_C - Z_K|}{|Z_B - Z_K|} = \frac{CK}{BK} = 1. \text{ D'où } CK = BK.$$

De plus $\arg \left(\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} \right) = \arg i = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{KB}; \overrightarrow{KC})$. ABCD est

parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires et de même longueur. Donc ABCD est un carré.



Exercice 17

$$1) d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$$

a) Ecrivons d sous forme algébrique

$$d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$$

$$d = \frac{(3-i)(1+2i)}{5} - i(2+i) + 7 - 11i - 28i = \frac{5+5i}{5} - 2i + 1 + 7 - 39i = 1+i - 2i + 8 - 39i$$

$$d = 9 - 40i$$

• Déterminons les racines carrées de d

$$\text{Soit } Z = x + iy ; Z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy ;$$

$$|Z^2| = |Z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} = 41. \text{ On obtient le système } \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 40 \\ xy = -20 \end{cases}$$

(1)

$$(2) \quad (1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5 \\ y^2 = 16 \Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = -4 \end{cases}$$

(3)

$$(1), (2) \text{ et } (3) \Rightarrow (x, y) = (5; -4) \text{ et } (x, y) = (-5; 4).$$

Les racines carrées de d sont donc : $5-4i$ et $-5+4i$

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - (3+2i)Z - 1 + 13i = 0$

$$\Delta = (3+2i)^2 - 4(-1+13i) = 5 + 12i + 4 - 52i$$

$$\Delta = 9 - 40i ; Z_1 = \frac{3+2i+5-4i}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{3+2i-5+4i}{2}$$

$$Z_1 = 4 - i \text{ et } Z_2 = -1 + 3i \quad S = \{4-i; -1+3i\}$$

2) Soient A(4 - i) et B(-1 + 3i)

a) B est image de C(Z) par la translation t dont le vecteur a pour affixe $4i$.

Déterminons l'affixe de C. $Z_B = Z_C + 4i$

$$\Leftrightarrow Z_C = Z_B - 4i = -1 + 3i - 4i = -1 - i. \text{ C a pour affixe } -1 - i.$$

b) Déterminons une mesure en radiations de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

$$Z_{\overrightarrow{CA}} = Z_A - Z_C = 4 - i + 1 + i = 5; Z_{\overrightarrow{CB}} = Z_B - Z_C = -1 + 3i + 1 + i = +4i$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CB}}}{Z_{\overrightarrow{CA}}}\right) = \arg\left(\frac{4i}{5}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2} \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$3) M(z) \text{ avec } z \neq 4 - i \quad Z = \frac{iz + 3 + i}{z - 4 + i}$$

a) On a $i(z+1-3i) = iz + i + 3$. On a donc: $Z = \frac{i(z+1-3i)}{z-4+i}$

b) Donnons une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z .
On a $A(4-i)$; $B(-1+3i)$, $M(Z)$.

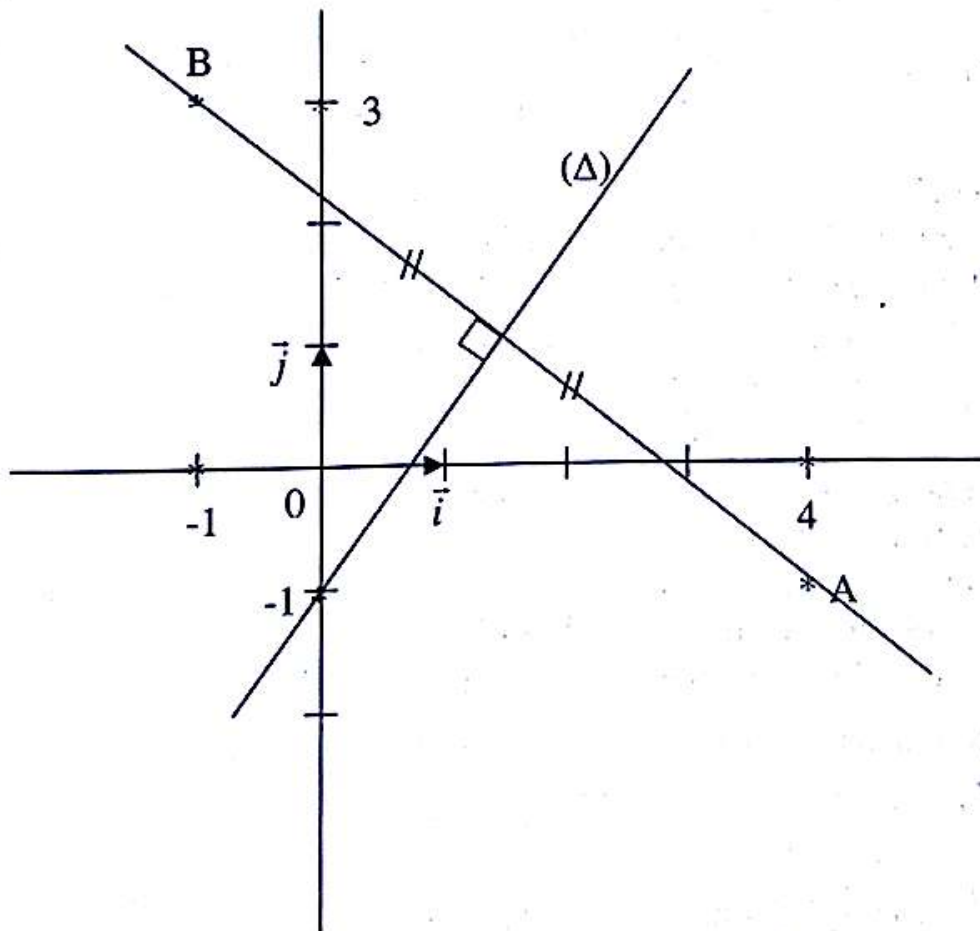
$$|Z| = \frac{|z - (-1+3i)|}{|z - (4-i)|} = \frac{|z - z_B|}{|z - z_A|} = \frac{BM}{AM}$$

$$\text{Arg}(Z) = \arg[i(z+1-3i)] - \arg(z-4+i) =$$

$$\frac{\pi}{2} + \arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$$

$$\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$$

c) $|Z| = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ est sur la médiatrice de $[AB]$. L'ensemble des points M du plan tel que $|Z| = 1$ est la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.



Exercice 18

1) Résolution du système

$$\begin{cases} iZ + \bar{Z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{Z} - iZ' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iZ + \bar{Z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{Z} - iZ' = -2 \end{cases} \quad (-i) \Leftrightarrow \begin{cases} iZ + \bar{Z}' = -2\sqrt{3} \\ -iZ + \bar{Z}' = 2i \end{cases}$$

$$2\bar{Z}' = -2\sqrt{3} + 2i \Leftrightarrow \bar{Z}' = -\sqrt{3} + i \Leftrightarrow Z' = -\sqrt{3} - i$$

$$\bar{Z} - iZ' = -2 \Leftrightarrow \bar{Z} = iZ' - 2 = i\sqrt{3} + 1 - 2 = -i\sqrt{3} - 1$$

$$\Leftrightarrow Z = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$S = \{-1 + i\sqrt{3}; -\sqrt{3} - i\}$$

$$2) Z_A = -1 + i\sqrt{3}, Z_B = -\sqrt{3} - i$$

Ecriture de Z_A , Z_B , et $Z_A \cdot Z_B$ sous la forme trigonométrique.

$$Z_A = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$Z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} Z_A \cdot Z_B &= 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}\right)\right] = 4\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right] \\ &= 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{aligned}$$

b) Calcul de Z_A^3 et Z_B^3

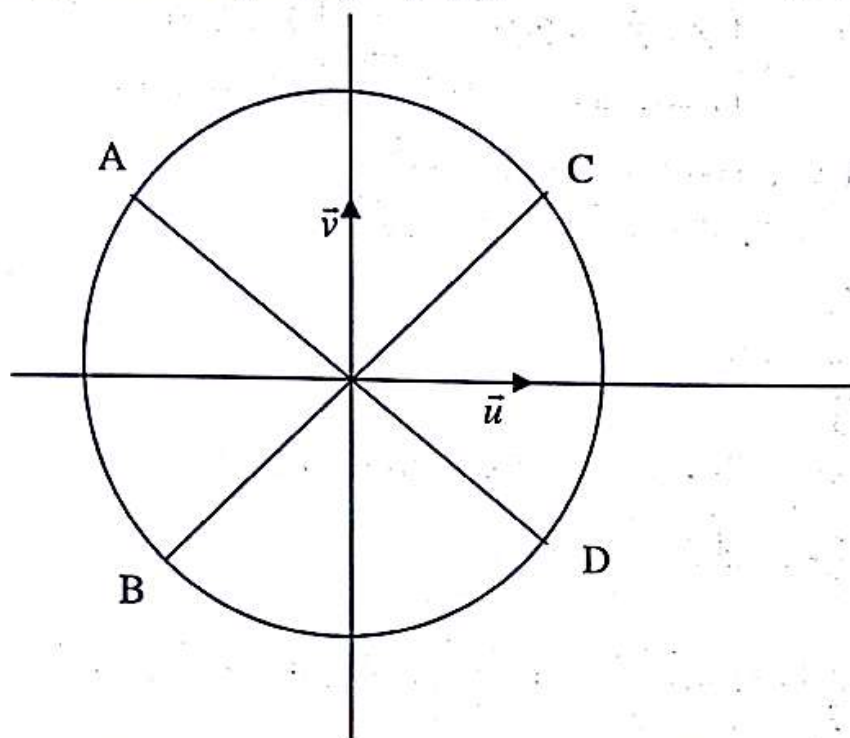
$$Z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}; Z_A^3 = 2^3 e^{i\frac{2\pi}{3} \times 3} = 8e^{i2\pi} = 8$$

$$Z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}; Z_B^3 = 2^3 e^{i\frac{7\pi}{6} \times 3} = 8e^{i\frac{21\pi}{6}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$$

 Z_A^3 est un réel et Z_B^3 est un imaginaire pur.

3) a) $r(A) = C \Leftrightarrow Z_C = -iZ_A = \sqrt{3} + i$

b) $r(C) = D \Leftrightarrow Z_D = iZ_C = 1 - i\sqrt{3}$



4) a- $Z_A + Z_D = 0 = Z_0$ d'où 0 est milieu de $[AD]$

$Z_B + Z_C = 0 = Z_0$ d'où est le milieu de $[BC]$

b- $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}} = \frac{-i(-i - \sqrt{3})}{-i - \sqrt{3}} = -i$

$\left| \frac{Z_A}{Z_B} \right| = |-i| = 1; \arg\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

c- Nature de ABDC

D'après 4)a. ABDC est un parallélogramme.

D'après 4)b., les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

D'où ABDC est un carré.

CHAPITRE IV : COURBES PARAMETREES

I. Définition d'une courbe paramétrée

1) Définition

- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$. Soit deux fonctions numériques f et g définies sur le même intervalle I . L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$, $t \in I$, est une courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

t est la paramètre (il peut être désigné par une autre lettre : u, v, w ,) Le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$ est appelé point de paramètre t .

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j}$$

$\begin{cases} f(t) \\ g(t) \end{cases} \quad t \in I$ est le système d'équations paramétriques de la courbe, appelé aussi représentation paramétrique de la courbe

Exemples

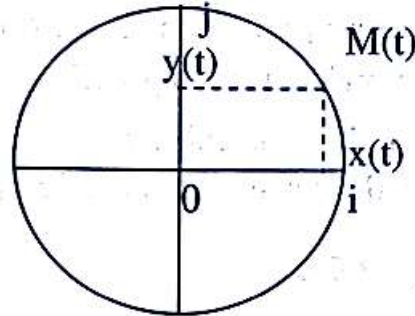
1) Le système d'équations paramétrées $\begin{cases} x(t) = -1 + 3t \\ y(t) = -2 + 2t \end{cases}$

Définit la droite Δ passant par le point $A(-1; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 3 \vec{i} + 2 \vec{j}$; le plan muni étant d'un repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Dans le repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$, une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{C}$ de centre o et de rayon R est :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi[$$

La représentation paramétrique $x \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est l'arc de cercle représenté en rouge par la figure ci-contre



II) Tangente à une courbe paramétrée

1) Définition

Soit f et g deux fonctions dérivables en un nombre réel t_0 d'un intervalle

I , $(\mathcal{C})$ la courbe paramétrée d'équation $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in I$

dans le plan muni d'un repère $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle vecteur dérivé au point $M(t_0)$ de la courbe $(\mathcal{C})$ le vecteur $\vec{V}(t_0)$ défini par :

$$\vec{V}(t_0) = f'(t_0) \vec{i} + g'(t_0) \vec{j}$$

Ce vecteur se note aussi $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$

2) Exemple

La représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ de centre 0 et de rayon R

$$x = f(t) \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} t \in [0 ; 2\pi[\text{ on déduit que le vecteur dérivé } \vec{V}(t)$$

$$\text{s'écrit : } \vec{V}(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}$$

$\|\vec{V}(t)\| = R$, donc $\vec{V}(t)$ n'est pas le vecteur nul. De plus $\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{V}(t) = 0$; $\vec{V}(t)$ est donc orthogonal à la droite $(OM(t))$, c'est donc un vecteur directeur de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en $M(t)$.

Remarque

Du point de vue cinématique, si le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$ détermine la position du point de mobile $M(t)$ en fonction du temps t , le

vecteur dérivé $\vec{V}(t_0) = x'(t_0) \vec{i} + y'(t_0) \vec{j}$ est le vecteur vitesse instantanée du point mobile $M(t)$ à l'instant t_0 .

Définition

Soit I un intervalle, $(\mathcal{C})$ une courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Soit t_0 un point de I . On suppose les fonctions f et g dérivables en t_0 , et telles que le vecteur dérivé $\vec{V}(t_0)$ soit un vecteur non nul.

La droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{V}(t_0)$ est la tangente à $(\mathcal{C})$ en $M(t_0)$.

4) Propriétés des fonctions coordonnées et interprétation géométrique.

Soit la courbe $(\mathcal{C})$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

dans le repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$. Lorsque les fonctions x et y présentent des particularités (périodicité, partie), celles-ci se traduisent par des propriétés de la courbe $(\mathcal{C})$.

a. Périodicité

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si x et y sont deux fonctions périodiques qui admettent le réel positif T pour plus petite période commune, alors la courbe $(\mathcal{C})$ est obtenue complètement, en faisant varier t dans un intervalle d'amplitude T .

Exemple : $(\mathcal{C})$ est la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Les fonctions de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont périodiques de périodes respectives

2π et 4π , la plus petite période commune est 4π . La courbe $(\mathcal{C})$ est obtenue en faisant varier t dans un intervalle d'amplitude 4π par exemple $]-2\pi; 2\pi[$.

b. Parité

Lorsque les fonctions x et y sont paires ou impaires sur I , les points $M(t)$ et $M'(-t)$ ont des positions relatives remarquables, et la courbe possède alors certaines propriétés de symétrie. Le tableau ci-dessous regroupe les différents cas possibles pour les fonctions x et y , et donne la propriété de la courbe correspondante.

	X paire	X impaire
Y paire	$M(t)$ et $M'(-t)$ sont confondus. La courbe $\mathcal{C}$ est entièrement obtenue en faisant varier t dans $I \cap \mathbb{R}_+$.	$M(t)$ et $M'(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, qui est axe de symétrie de la courbe
Y impaire	$M(t)$ et $M'(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, qui est axe de symétrie de la courbe	$M(t)$ et $M'(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine O , qui est le centre de symétrie de la courbe

III) Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Soit la courbe $(\mathcal{C})$ définie par les équations $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$

1. Choix de l'intervalle d'étude**a) Périodicité**

* Etudier la périodicité éventuelle des fonctions f et g . Si T est une période commune à ces deux fonctions, on choisit pour intervalle d'étude

$$\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$$

b) Parité

Etudier la parité des fonctions f et g . Si ces deux fonctions sont paires ou impaires, on réduit l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{T}{2}\right]$.

c) Symétrie

- Calculer $f\left(\frac{T}{2}-t\right)$ et $g\left(\frac{T}{2}-t\right)$; comparer les à $f(t)$ et $g(t)$ de façon à mettre en évidence une autre symétrie éventuelle de la courbe $(\mathcal{C})$ et à réduire l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{T}{4}\right]$

- si I désigne l'intervalle d'étude réduit et $(\mathcal{C}_1)$ la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à I , préciser les transformations permettant d'obtenir $(\mathcal{C})$ à partir de $(\mathcal{C}_1)$.

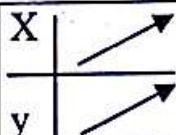
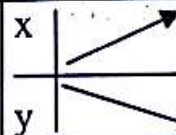
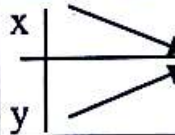
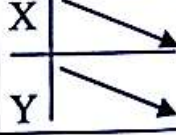
2) Etude des variations de f et g

- Résumer les résultats obtenus dans un tableau de variations communes aux deux fonctions f et g .
- Préciser les points particuliers (points en lesquels la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle aux axes de coordonnées).

3) Tracé de la courbe

- Tracer la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à t éléments de I
- Compléter le tracé de $(\mathcal{C})$ comme prévu au 1 ci-dessus.
- Déterminer éventuellement les points communs à $(\mathcal{C})$ et aux axes de coordonnées
- Il peut être utile de mettre en évidence le sens dans lequel le point M décrit la courbe $(\mathcal{C})$ lorsque t croît dans E .

Le tableau ci-dessous donne quatre situations de référence dans la construction du courbe :

Extrait du tableau de variations				
Allure de la courbe				

EXERCICES

Exercice 1

Donner une représentation paramétrique de la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$. Caractériser la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 2

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = \frac{b}{\sin t} \end{cases} \quad a > 0, b > 0 ; t \in]-\pi; \pi[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

a- Etudier les éléments de symétrie de cette courbe. Montrez que $(\mathcal{C})$ a pour équation cartésienne $y^2 = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}$.

Exercice 3

Etudier et représenter la courbe $(\mathcal{C})$ dont un système d'équation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont un système d'équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Etudier la courbe $(\mathcal{C})$
- Exprimer x en fonction de y . en déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$
- En prenant y pour paramètre, trouver un vecteur directeur de la tangente au point $K(-1; 1)$ obtenu par $t = \pi/2$
- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$

Exercice 5

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = -\sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Pour tout réel t , calculer $x(t + 2\pi)$; $y(t + 2\pi)$; $x(-t)$; $y(-t)$; $x(\pi/2 + t)$; $x(\pi/2 - t)$; $y(\pi/2 + t)$ et $y(\pi/2 - t)$.

En déduire les propriétés géométriques de la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 6

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont un système d'équations paramétrique, dans un

repère orthonormal direct $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a) En utilisant la parité et la périodicité des fonctions f et g , réduire l'intervalle d'étude et déterminer les symétries éventuelles de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Etudier les variations des fonctions x et y

c) Montrer que si $t \neq \pi$, la droite $\overline{OM}(t)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(t)$ avec $\vec{u}(t) = +\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$.

d) tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la courbe $(\mathcal{C})$

d'équation paramétrique :
$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Préciser les valeurs de t correspondant

a) Aux points où la courbe $(\mathcal{C})$ coupe les axes

b) Aux points d'abscisses 1

2) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (On admettra que la tangente à $\mathcal{C}$ au point $K(1,$

1) a pour coefficient directeur $9/4$

Exercice 8

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

a) Comparer les points $M(-t)$ et $M(+t)$. Quelle propriété en déduisez-vous pour la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0, \pi/2[$

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 9

Soit la courbe $(\mathcal{C})$ définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}\sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) a) Comparer les points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ puis $M(t)$ et $M(-t)$. Déduire qu'il suffit d'étudier x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.

b) Soit $(\mathcal{C}_1)$ la portion de $(\mathcal{C})$ obtenue lorsque $t \in [0; \pi]$. Préciser les transformations qui permettent d'obtenir $(\mathcal{C})$ à partir de $(\mathcal{C}_1)$ $(\mathcal{C})$

2) Etudier les variations de x et y sur $[0; \pi]$.

3) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 10 (Non corrigé)

Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes :

a) $(\Gamma_1) \quad \begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $(\Gamma_2) \quad \begin{cases} x(t) = \cos t + \sqrt{3} \sin t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Exercice 11 (Non corrigé)

Γ est le cercle trigonométrique (centre O , rayon 1). Soit P le point de Γ de coordonnées $(\cos t; \sin t)$. P se projette orthogonalement en A sur l'axe $(\vec{o}, \vec{i})$, et en B sur l'axe $(\vec{o}, \vec{j})$. Soit P' le point de Γ de

coordonnées $\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \right)$. P' se projette orthogonalement en

A' sur l'axe $(\vec{o}, \vec{i})$ et en B' sur l'axe $(\vec{o}, \vec{j})$.

Soit M le point d'intersection (lorsqu'il existe), des droites (AB) et $(A'B')$.

a) Montrer que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point $M(t)$

vérifient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t \cdot \cos t \cdot (\sin t - \cos t) \\ y(t) &= \sin t \cdot \cos t \cdot (\sin t + \cos t) \end{aligned}$$

b) Comparer $M(-t)$ et $M(t)$ ainsi que $M(\pi - t)$ et $M(t)$. En déduire que les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont des axes de symétrie du lieu du point $M(t)$ pour $t \in [0; 2\pi]$.

c) Etudier et représenter le lieu $\mathcal{C}$ des points $M(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de deux couleurs différentes.

Exercice 12 (Non corrigé)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (ox) et (oy) (pour la figure demandée, on prendra 2 cm pour unité).

1) Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t - 2 \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a- Comparer les points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$.

b- Montrer que les points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ sont symétriques par rapport à O.

2) On appelle $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ pour t éléments de

l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On pourra montrer que sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$y'(t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2} + \tan\right)$ et introduire l'unique réel α de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}.$$

b) Déterminer les coordonnées des points $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et donner

un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en chacun de ces points.

En quel point la tangente à $\mathcal{C}_1$ est-elle parallèle à (oy) ? Donner les valeurs approchées, à 10^{-2} près, des coordonnées de $M(\alpha)$.

3) Construire la courbe $\mathcal{C}$; placer en particulier les points introduits en 2.b.

4) Trouver une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 13 (Non corrigé)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de tracer la courbe $\mathcal{C}$, ensemble des points du plan dont les coordonnées sont définies en fonction de la variable réelle t par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = 4 \cos t \sin^2 t \\ y(t) = 4 \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

1) Préciser la transformation ponctuelle transformant, quelque soit le réel t , le point $M(t)$ en :

a) le point $M(t + 2\pi)$.

b) le point $M(-t)$

c) le point $M(\pi - t)$

d) le point $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

On appelle $\mathcal{C}_1$ la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de t comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Expliquer comment on peut déduire la courbe $\mathcal{C}$ de la courbe $\mathcal{C}_1$.

2) Etudier les variations de x et y sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. On remarquera que y'

s'annule pour une valeur t_0 , que l'on ne cherchera pas à calculer, mais dont on donnera une valeur approchée.

3) Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ de deux couleurs différentes. Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points de paramètre $t_1 = 0$; $t = \frac{\pi}{4}$.

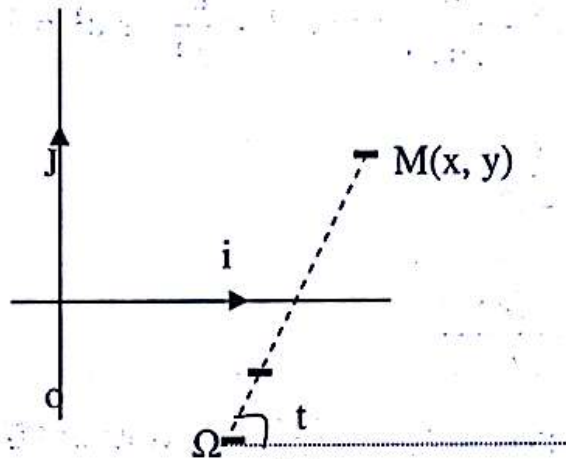
4) $Z(t)$ étant l'affixe du point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_1$, calculer en fonction de t , le module et un argument de $Z(t)$.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{E}) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

($\mathcal{C}$) est le cercle de centre $\Omega(1 ; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$, soit $M(x ; y)$.



En posant $t = (\vec{i} ; \overrightarrow{\Omega M})$ on obtient $\overrightarrow{\Omega M} = \sqrt{2} \cos t \vec{i} + \sqrt{2} \sin t \vec{j}$

$$\text{Soit } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos t \\ y = -1 + \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad t \in]-\pi ; \pi] \text{ en prenant la mesure}$$

principale de $(\vec{i} ; \overrightarrow{\Omega M})$

Exercice 2

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = \frac{b}{\sin t} \end{cases} \quad a > 0, b > 0, t \in]-\pi ; \pi[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

a) Déterminons les éléments de symétrie de ($\mathcal{C}$)

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

$M(-t)$ se déduit de $M(t)$ par symétrie par rapport à (ox), ce qui permet d'obtenir la partie de courbe pour $t \in]-\pi ; -\pi/2[\cup]-\pi/2 ; 0[$ à partir de celle sur $]0, \pi/2[\cup]\pi/2 ; \pi[$ par symétrie par rapport à (ox)

$$\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$$

$M(\pi - t)$ se déduit donc de $M(t)$ par symétrie par rapport à (oy) , ce qui permet d'obtenir la courbe sur $] \pi/2, \pi [$ à partir de celle sur $]0, \pi/2[$ par symétrie par rapport à (oy) .

Les axes (ox) et (oy) sont des axes de symétrie de $(\mathcal{C})$. En composant ces deux symétries axiales, $(\mathcal{C})$ a donc l'origine pour centre de symétrie.

b) Déterminons une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$

$$y^2 = \frac{b^2}{\sin^2 t} = \frac{b^2}{1 - \cos^2 t} \quad \text{or} \quad x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{a^2}{x^2}; \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$$

$$\text{par suite : } y^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}$$

$$\text{Tout point } (\mathcal{C}) \text{ vérifie } y^2 = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}$$

Réciproquement, peut-on à partir de $y^2 = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}$, retrouver $(\mathcal{C})$?

$$y^2 = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2} \text{ est définie pour } x^2 > a^2 \text{ soit } |x| > a$$

Si $\cos t$ décrit $] -1 ; 1[\setminus \{0\}$, $\frac{1}{\cos t}$ décrit $] -\infty ; -1[\cup]1, +\infty[$

On peut donc poser $x = \frac{a}{\cos t}$, $t \in] -\pi, \pi[\setminus \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$

(pour obtenir $x \neq a$, $x \neq -a$)

$$y^2 = \frac{\frac{a^2 b^2}{\cos^2 t}}{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a} = \frac{b^2}{\sin^2 t}, \quad y = \frac{b}{\sin t} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{b}{\sin t}$$

Le changement de t en $-t$ échange ces deux formules. On peut donc prendre $y = \frac{b}{\sin t}$, La courbe $(\mathcal{C})$ a bien pour équation

$$\text{cartésienne } y^2 = \frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}.$$

Exercice 3

1) Détermination de l'intervalle d'étude

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ ont pour périodes respectives

2π et π . la plus petite période commune est alors 2π , la courbe complète est obtenue sur $I =]-\pi ; \pi]$ par exemple.

La fonction $t \mapsto x(t)$ est paire et la fonction $t \mapsto y(t)$ est impaire. $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à (ox). Nous pouvons réduire l'intervalle d'étude à $J = [0, \pi]$.

2) Etude des variations simultanées des fonctions coordonnées

x et y sont dérivables sur l'intervalle J et pour tout $t \in J$

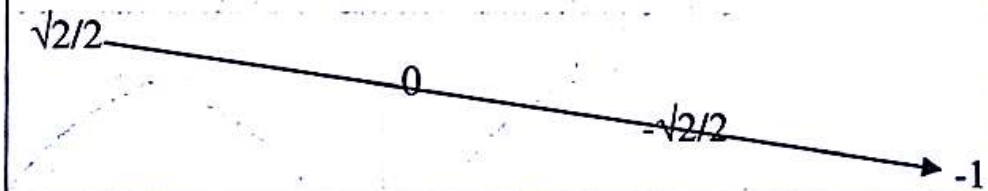
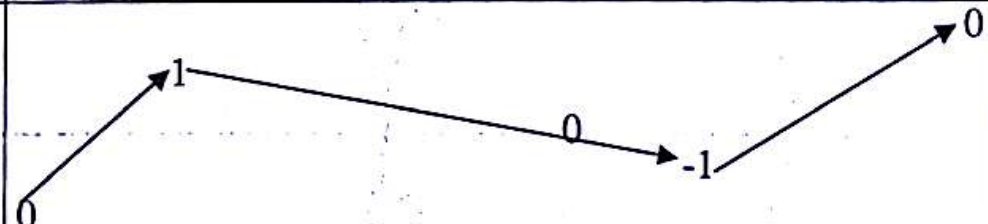
$$x'(t) = -\sin t \text{ et } y'(t) = 2 \cos 2t.$$

Pour tout $t \in J$, $x'(t) \leq 0$

Pour $t \in J$, $y'(t)$ se factorise sous la forme :

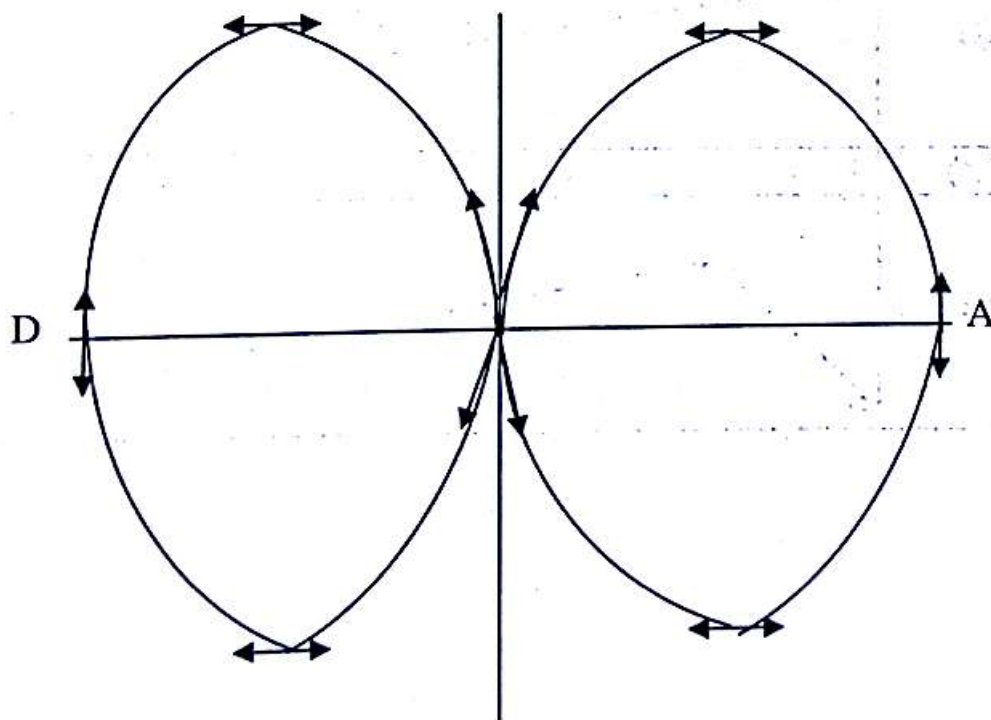
$$Y'(t) = 4 (\cos t - 1/\sqrt{2})(\cos t + 1/\sqrt{2})$$

Tableau de variation

Tableau de variation										
t	0	$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π		
$x'(t)$	0	-	$-\sqrt{2}/2$	-	-1	-	$-\sqrt{2}/2$	-	0	
$x(t)$										
$y'(t)$	2	+	0	-	-2	-	0	+	2	
$y(t)$										

2) Tracé de la courbe

points	t	x(t)	y(t)	$\vec{V}(t)$	remarque
A	0	1	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{V} \parallel (\vec{o}, \vec{j})$
B	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\vec{V} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{V} \parallel (\vec{o}, \vec{i})$
O	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$O \in \mathcal{C}$
C	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\vec{V} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{V} \parallel (\vec{o}, \vec{i})$
D	π	-1	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{V} \parallel (\vec{o}, \vec{j})$



Exercice 4

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

a) Etude de $(\mathcal{C})$

$x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$, la courbe $(\mathcal{C})$ est complètement obtenue en faisant varier t dans $[-\pi ; \pi]$.

$$x(-t) = -x(t) \text{ et } y(-t) = y(t)$$

les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont donc symétriques par rapport à O .

Il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $[0, \pi]$ et de compléter par rapport à O .

$$x(\pi - t) = \sin(3\pi - 3t) = \sin 3t ; y(\pi - t) = \sin t.$$

b) $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont confondues, sur $[0, \pi]$, la courbe est décrite deux fois ; il suffit d'étudier $(\mathcal{C})$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

x et y sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a :

$$x'(t) = 3\cos 3t, y'(t) = \cos t$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t > 0$, y est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = 0, 3t \in]0, 3\frac{\pi}{2}]$; $\cos 3t$ s'annule pour :

$$3t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{\pi}{6} \text{ et } 3t = 3\frac{\pi}{2}, t = \frac{\pi}{2}$$

Sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, $3t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos 3t > 0$, donc x est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, $3t \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$, $\cos 3t < 0$, donc x est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

Tableau de variation

t	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$x'(t)$	+	0	0
$x(t)$	0	1	-1
$y'(t)$		+	0
$y(t)$	0	1/2	1

$$\vec{V}(0) = 3\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{V}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \text{ . En } M\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

La tangente est verticale $\vec{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{0}$

b) expression de x en fonction de y

$$\begin{aligned} \sin 3t &= \sin(2t + t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t \\ &= 2 \sin t \cos^2 t + (1 - 2 \sin^2 t) \sin t \\ &= 2 \sin t (1 - \sin^2 t) + \sin t - 2 \sin^3 t \end{aligned}$$

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$$

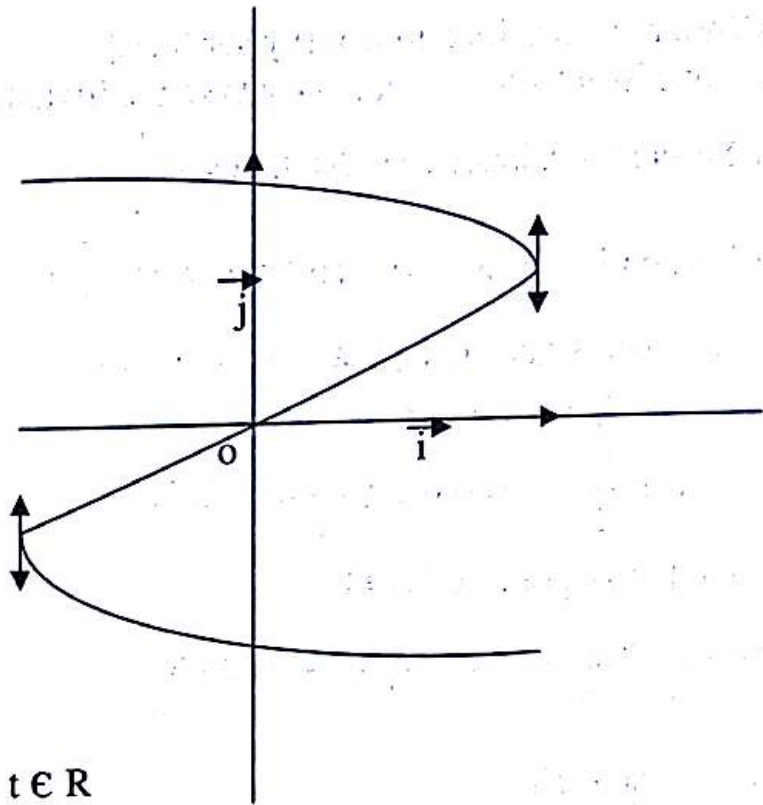
$x = 3y - 4y^3$; $y = \sin t$ donc y décrit $[-1; 1]$. Une équation cartésienne de la courbe ($\mathcal{C}$) est donc $x = 3y - 4y^3$, $|y| \leq 1$.

c) Vecteur directeur de la tangente au point $K(-1; 1)$ pour $t = \frac{\pi}{2}$

On peut paramétrer la courbe par :
$$\begin{cases} x = 3y - 4y^3 \\ y = y \end{cases} \quad y \in [-1, 1]$$

Le vecteur dérivé $\vec{V}_1(y) = (3 - 12y^2)\vec{i} + \vec{j}$. Le point $K(-1; 1)$ est obtenu pour $y = 1$. $\vec{V}(1) = -9\vec{i} + \vec{j}$.

Donc la tangente en $K(-1; 1)$ admet pour vecteur directeur : $-9\vec{i} + \vec{j}$



Exercice 5

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = -\sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont périodiques de période 2π . La courbe complète est obtenue en faisant varier t sur $[-\pi, \pi[$
 $x(t + 2\pi) = x(t)$; $y(t + 2\pi) = y(t)$

- $t \mapsto x(t)$ est paire et $t \mapsto y(t)$ est impaire : la courbe $(\mathcal{C})$ est symétriquement par rapport à l'axe des abscisses.

- $x(\frac{\pi}{2} + t) = -x(\frac{\pi}{2} - t)$ et $y(\frac{\pi}{2} + t) = -y(\frac{\pi}{2} - t)$. les points

$M(\frac{\pi}{2} - t)$ et $M(\frac{\pi}{2} + t)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. L'origine O est centre de symétrie.

Exercice 6

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cdot \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \cdot \sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a) $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont périodiques de période 2π , on peut étudier $(\mathcal{C})$ sur $[-\pi; \pi]$, ($M(t) = M(t + 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$).

$t \mapsto x(t)$ est paire et $t \mapsto y(t)$ est impaire. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On peut étudier

($\mathcal{G}$) sur $[0, \pi]$. $I = [0, \pi]$.

b) Variations des fonctions x et y sur $[0, \pi]$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables sur $[0, \pi]$

$$x'(t) = -\sin t - 2\sin t \cdot \cos t = -2\sin t \left(\cos t + \frac{1}{2} \right)$$

$$y'(t) = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = 2\left(\cos t + 1\right)\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)$$

- étude du signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur $[0, \pi]$
- si $t \in [0, \pi]$, alors $\sin t \geq 0$
- $\cos t + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \geq -\frac{1}{2}$ soit $[0, 2\pi/3]$

$\cos t + 1 \geq 0$ pour $t \in [0, \pi]$

$\cos t - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \geq \frac{1}{2}$ soit $t \in [0, \pi/3]$

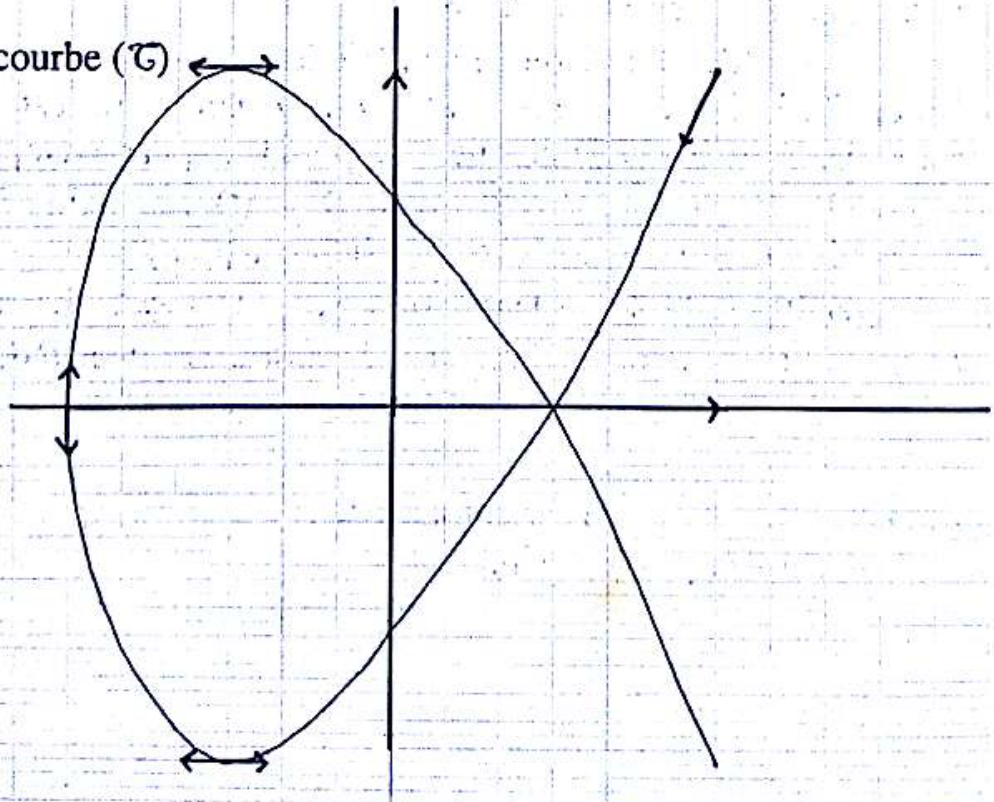
Tableau de variation

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	
$x'(t)$	0	-	-	-	0	
$x(t)$	2	$3/4$	0	$-1/4$	0	
$y'(t)$	2	+	0	-	-	0
$y(t)$	0	$3\sqrt{3}/4$	1	$\sqrt{3}/4$	0	

points	t	x(t)	y(t)	V (t)	remarques
A	0	2	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{V} // (\vec{o}, \vec{j})$
B	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\vec{V} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{V} // (\vec{o}, \vec{i})$
C	$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\vec{V} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	/
D	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{V} // (\vec{o}, \vec{j})$
E	π	0	0		$\vec{V}$ n'existe pas

c) Montrons que si $t \neq \pi$, la droite $\overline{OM}(t)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(t) = (1 + \cos t)(\cos \vec{i} + \sin t \vec{j})$ est colinéaire au vecteur non nul $\vec{u}(t) = \cos \vec{i} + \sin t \vec{j}$.

d) Tracé la courbe ($\mathcal{C}$)



Exercice 7

1) a- Valeurs de t correspondant aux points où $(\mathcal{C})$ coupe les axes.

- $\cos 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = (2k + 1) \frac{\pi}{4}$ où $k \in \mathbb{Z}$

La courbe coupe l'axe des ordonnées lorsque $x(t) = 0$, c'est-à-dire lorsque $t = (2k + 1) \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

- $\cos 3t = 0 \Leftrightarrow 3t = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = (2k + 1) \frac{\pi}{6}$ où $k \in \mathbb{Z}$

La courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses lorsque $y(t) = 0$, c'est-à-dire lorsque $t = (2k + 1) \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Valeurs de t correspondant aux points d'abscisse 1.

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow \cos 2t = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Les points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1 correspondant à

$$t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2) Etude et tracé de la courbe $(\mathcal{C})$.

- réduction de l'intervalle d'étude

- $t \mapsto x(t)$ est périodique de période π , $t \mapsto y(t)$ est périodique de période $2\pi/3$. Donc la plus petite période commune est 2π . On peut restreindre l'étude à un intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$.

- quel que soit t , $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus. On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

- quel que soit t , $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. La courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On peut réduire l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$

- Etude des variations des fonctions x et y

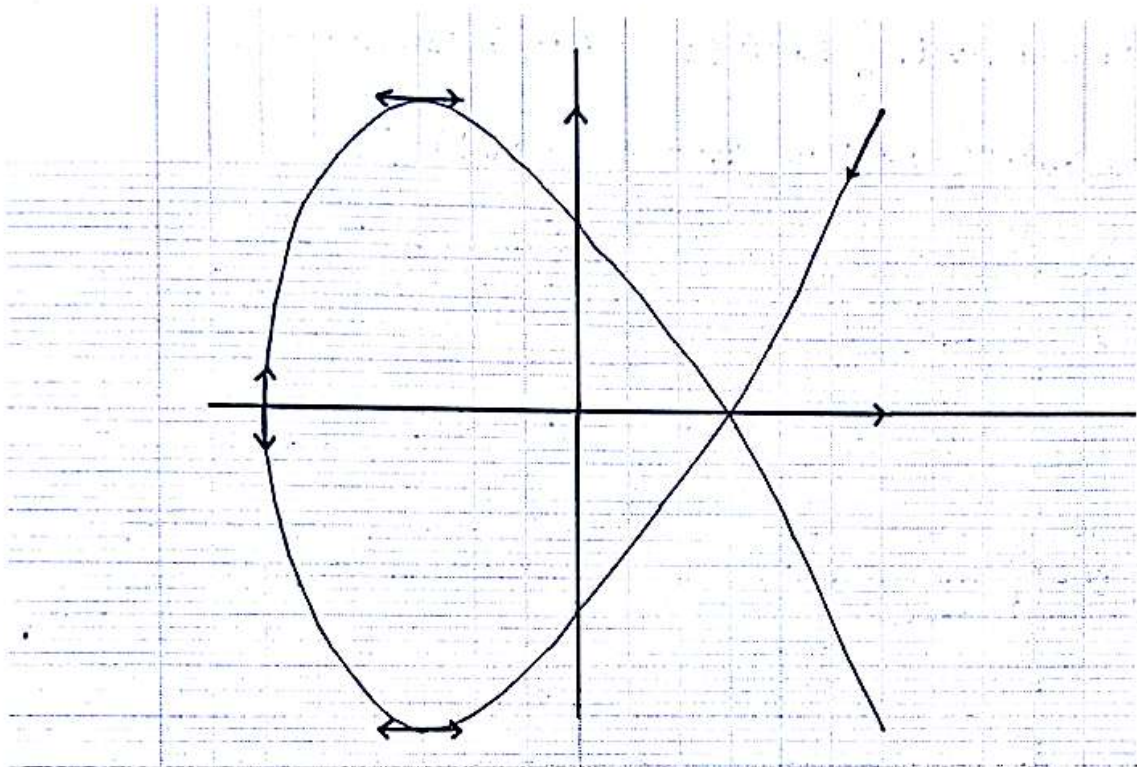
$$x'(t) = -2 \sin 2t \text{ et } y'(t) = -3 \sin 3t$$

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) \leq 0$ et $y'(t) \leq 0$. Les fonctions

$t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont décroissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$				
$x'(t)$	-	$-\sqrt{3}$	-	-1	-	$-\sqrt{3}$	-	0	
$x(t)$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1				
$y'(t)$	0	-	-3	-	$-3\sqrt{2}/2$	-	0	+	3
$y(t)$	1	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0				

points	t	x(t)	y(t)	V (t)	remarques
A	0	1	1	//	
B	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$	
C	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\vec{V} \begin{pmatrix} -1 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$	
D	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\vec{V} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{V} // (\vec{o}, \vec{i})$
E	$\frac{\pi}{2}$	-1	0	$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{V} // (\vec{o}, \vec{j})$



Exercice 8

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases} \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

a) $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On peut restreindre l'intervalle d'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$

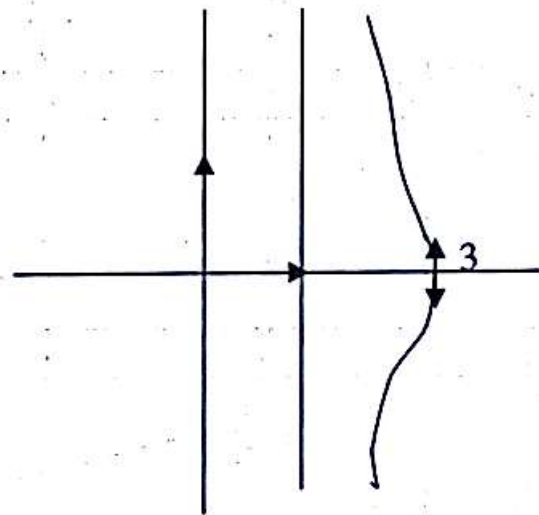
b) Variation des fonctions x et y sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$x'(t) = -2\sin t, \quad x'(t) \leq 0, \text{ pour tout } t \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$y'(t) = (1 + \tan^2 t) + 2\cos t, \quad y'(t) \geq 0, \text{ pour } t \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$t \mapsto x(t)$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $t \mapsto y(t)$ est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	0	-2
x(t)	3	1
y(t)		+
y'(t)	0	$+\infty$



Exercice 9

1) a- $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$. Les points $M(t+2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus. On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi; \pi]$.

$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'intervalle d'étude définitif est donc $[0, \pi]$.

b) $(\mathcal{C}_1)$ est la portion de $(\mathcal{C})$ obtenues pour tout $t \in [0, \pi]$. Soit $(\mathcal{C}'_1)$ le symétrique de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à l'axe des abscisses

$$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}'_1)$$

2) Etude des variations de x et y sur $[0, \pi]$

$$x'(t) = -\frac{1}{3}(2\sin t + 2\sin 2t) = -\frac{2}{3}(\sin t + \sin 2t) = -\frac{4}{3}\sin \frac{3t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}$$

$$y'(t) = \frac{2}{3} \cos 2t$$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{3t}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{t}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } t = \pi$$

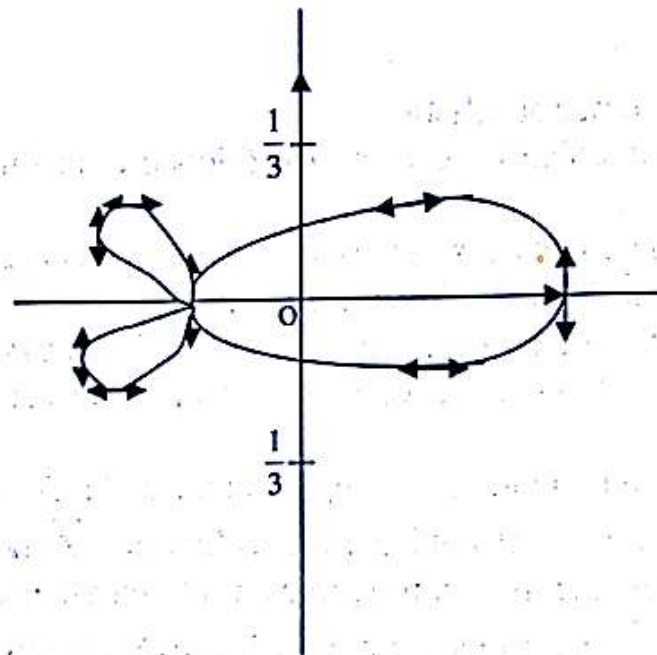
$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4}$$

Tableau de variation

t		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π	
$x'(t)$	0	-		-	0	+		+	0
$x(t)$	1			$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{3}$		
$y'(t)$		+	0		-		0		+
$y(t)$	0			$\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{3}$		0

3) Courbe (C)



CHAPITRE V : PROBABILITE

Probabilités

I) Vocabulaire probabiliste

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat.

L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers des possibles. On le note très souvent Ω .

On appelle évènement toute partie A de l'univers des possibles. On note $A \subset \Omega$; Ω est appelé évènement certain; $\emptyset$ est appelé évènement impossible.

Soit A un évènement. Le complémentaire de A dans Ω est appelé évènement contraire et noté $\bar{A}$. (A réalisé) $\Leftrightarrow$ ($\bar{A}$ ne l'est pas). A et B sont deux évènements incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Par exemple A et $\bar{A}$ sont incompatibles. Les évènements A et B constituent une partition de Ω si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

L'évènement « A ou B » est noté $A \cup B$; l'évènement « A et B » est noté $A \cap B$.

II) Probabilités

1) Définition

Soit Ω un univers fini non vide. On appelle probabilité toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeur dans $[0; 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$* P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\emptyset) = 0$$

$$* \text{ Si } A = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}, P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_r\})$$

Le nombre $P(A)$ s'appelle probabilité de l'évènement A .

2) Propriétés

Soit Ω un univers fini d'éventualités muni d'une probabilité P

Si A et B sont deux évènements incompatibles alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si A et B sont deux évènements quelconques, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A est un évènement alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Si A et B sont deux évènements tels que $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

3) Equiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, si A est un évènement

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

4) Probabilité conditionnelle

* Définition

Soit A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ est définie par

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

* Propriétés

- Si A et A' sont deux évènements et B un évènement de probabilité non nulle ; $P(A \cup A'/B) = P(A/B) + P(A'/B) - P(A \cap A'/B)$
- Si A est un évènement et $\bar{A}$ l'évènement contraire alors $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$

5) Indépendance de deux évènements

Soit A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

III) Variables aléatoires

1) Loi de probabilité

* Définition

- Soit une expérience aléatoire d'univers fini Ω . On appelle variable aléatoire (ou aléa numérique) sur Ω toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X s'appelle univers image et noté $X(\Omega)$
- Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire sur Ω d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On appelle loi de probabilités de X la donnée des probabilités :

$P_1 = P(X = x_1), P_2 = P(X = x_2), \dots, P_n = P(X = x_n)$ On utilise souvent la présentation sous forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	$\dots$	P_n

* Propriétés

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$ $P_i = P(X = x_i)$ est la loi de probabilité de X alors : $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

2) Caractéristiques d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Soit $P_i = P(X = x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, la loi de probabilité de X .

- On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire le nombre réel noté $E(X)$ et défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$$

- On appelle variance de la variable aléatoire le nombre réel positif noté

$$V(X) \text{ et défini par : } V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n P_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

- On appelle écart-type de la V.A. X , le nombre réel positif noté $\Gamma(X)$ et défini par : $\Gamma(X) = \sqrt{V(X)}$.

3) Fonction de répartition

* Définition

Soit X une V.A sur l'univers Ω . On appelle fonction de répartition de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $F(x) = P(X \leq x)$.

* Propriété

Soit X une V.A sur l'univers fini Ω . Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'univers-image de X (avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

La fonction F est croissante, constante sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}[$, nulle sur $]-\infty; x_1[$ et égale à 1 sur $[x_n; +\infty[$

* Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ $n \in \mathbb{N} : p \in [0; 1]$

Pour tout entier naturel k inférieur à n , la probabilité de l'évènement $(X = k)$ est : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $p + q = 1$ $E(X) = np$, $V(X) = npq$.

EXERCICES

Exercice 1

Soit un dé cubique parfait dont une face porte le chiffre 1 deux faces le chiffre 2 et trois faces le chiffre 3.

1) On lance une fois ce dé et on désigne par P_1 , P_2 et P_3 les probabilités d'obtenir respectivement 1, 2 et 3. Déterminer P_1 , P_2 et P_3 .

2) On lance ce dé deux fois de suite, déterminer la probabilité d'obtenir :

- deux fois le chiffre 2
- aucune fois le chiffre 3
- une somme égale à 4.

Exercices 2

Une urne contient n boules noires et $3n$ boules blanches

1) On tire simultanément deux boules de l'urne ; on suppose qu'il y a équiprobabilités des tirages possibles.

Démontrer que la probabilité P_n de tirer une boule de chaque couleur

vérifié
$$p_n = \frac{3n}{8n-2}$$

2) On tire une boule de l'urne, on l'y replace, puis on tire à nouveau une boule de l'urne. On suppose qu'il ya équiprobabilité des tirages. Démontrer que la probabilité de tirer une boule de chaque couleur est égale $\frac{3}{8}$.

3) Quelle est la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers $+\infty$. A partir de quelle valeur de n la différence $P_n - \frac{3}{8}$ est-elle inférieure à un centième ?

Exercices 3

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Les boules portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, sont blanches, celles portant les numéros 6, 7, 8 sont bleues, celles portant les numéros 9 et 10 sont vertes. On tire deux boules simultanément de l'urne.

On admet que tous les tirages possibles sont équiprobables. On considère les événements suivants :

E_1 : "les deux boules tirées portent des numéros pairs. "

E_2 : " les deux boules tirées sont de même couleur. "

E_3 : "les deux boules tirées portent des numéros pairs et sont de même couleur. "

E_4 : " les deux boules tirées sont de couleurs différentes. "

E_5 : "les deux boules tirées portent des numéros pairs et sont de couleurs différentes. "

E_6 : " sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, elles portent des numéros pairs. "

Si E est un évènement, $P(E)$ désignera sa probabilité.

1) a- calculer $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$

b- E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?

2) a- Calculer $P(E_5)$; b) En déduire $P(E_6)$

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles.

Exercices 4

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :

- si le joueur obtient "un six ", il gagne 100f.

- s'il obtient un "un", un "deux" ou un "trois", il ne gagnera rien et le jeu s'arrête.

- s'il obtient un "quatre", ou un "cinq", le joueur lance le dé une deuxième fois.

- s'il obtient un "six", il gagne alors 50f, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 20f. soit G la variable aléatoire qui, à chaque partie effectuée par un joueur donné, associe son gain.

1) Quelles sont les valeurs prises par G ?

2) Premier cas : le joueur joue avec un dé bien équilibré.

a) Montré que $P(G = 30) = \frac{1}{18}$

b) Déterminer la loi de probabilité de G , puis l'espérance mathématique de G . Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?

2) Deuxième cas : le joueur joue avec un dé pipé.

On note P_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \leq i \leq 6$.

On sait que P_6 est le double de P_1 et que : $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$

a) Déterminer les valeurs de P_i pour $1 \leq i \leq 6$

b) Montrer alors que $P(G = 3) = \frac{4}{49}$

c) Déterminer la loi de probabilité de G .

Exercices 5

Dans une urne, il y a dix boules numérotées de 0 à 9.

On tire deux boules, sans remise, de l'urne. A chaque tirage on associe le plus petit des deux numéros sortis.

On note X la variable aléatoire associée.

a) Quel est l'univers image de X .

b) Déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition.

c) Déterminer les probabilités des événements $(X \leq 6)$; $(X > 5)$; $(3 < X \leq 8)$.

Exercices 6

Un dé cubique est piqué de telle façon que si on note P_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i on ait : $P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_5 = 2P_1$ et $P_6 = 2P_3$.

On lance le dé deux fois de suite et on note X la variable aléatoire qui donne la somme des deux faces apparues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer $E(X)$; $V(X)$ et $\Gamma(X)$.

Exercices 7

1) Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

Un essai consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne. Un joueur mise 500f

- Si les boules tirées sont rouges alors il reçoit 1000f

- Si les boules tirées sont blanches alors il récupère sa mise.

- Dans les autres cas, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Quelle est la probabilité de ne pas perdre.

2) Dans la même situation, le joueur effectue cinq essais ; pour chaque essai, il mise 500F.

Il y a succès lorsque le joueur tire 3 boules de même couleur et échec dans les autres cas.

Pour chaque succès, le joueur reçoit 1000F ; dans le cas contraire, il perd sa mise. Soit Y la variable aléatoire gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

b) Calculer l'espérance mathématique de Y .

c) Quelle est la probabilité pour que le joueur reparte avec un bilan positif après les 5 essais.

Exercices 8 (BAC)

Dans une école maternelle, l'enseignante demande à chaque enfant de choisir chaque matin 3 jouets parmi 9 rouges, 6 jaunes et 5 bleus. Tous les jouets se trouvent mélangés dans une caisse. L'enseignante s'intéresse plus particulièrement à Tanga qui choisit chaque matin les jouets au hasard. On suppose que tous les choix de 3 jouets sont équiprobables.

1) combien y- a- t- il de choix possibles de 3 jouets.

2) On désigne par A, B et C les événements suivants :

A : " Tanga a choisi un jouet de chaque couleur. "

B : " Tanga a choisi 3 jouets de la même couleur. "
 C : " Tanga a choisi exactement deux jouets rouges. "

a) Montrer que $P(A) = \frac{9}{38}$.

b) Déterminer $P(B)$ et $P(C)$.

3) L'enseignante observe Tanga pendant 5 matins consécutifs. Elle note le nombre de jours où il aura choisi trois jouets de trois couleurs différentes.

Quelle est la probabilité que ce nombre de jours soit au moins égal à 4 ?

Exercice 9 (BAC)

Un club de tennis comporte 500 adhérents : 300 hommes et 200 femmes. Le tennis en compétition est pratiqué par 90 hommes et 40 femmes. Les autres adhérents pratiquent ce sport uniquement pour le loisir. On choisit au hasard un adhérent.

On note :

H : l'évènement : "l'adhérent est un homme. "

F : l'évènement : "l'adhérent est une femme. "

C : l'évènement : "l'adhérent pratique la compétition. "

1) a- calculer les probabilités $P(H)$, $P(F)$, et $P_F(C)$

b- Décrire l'évènement " $C \cap F$ " et calculer sa probabilité.

c- Justifier l'égalité : $P(C) = \frac{13}{50}$.

d- L'adhérent choisi pratique la compétition. Quelle est la probabilité que cet adhérent soit une femme.

2) Chaque adhérent doit payer une cotisation annuelle de 3000f s'il pratique le tennis en compétition et de 2500f dans le cas contraire. De plus, pour la saison 2003-2004 une réduction exceptionnelle de 10% est consentie aux femmes pratiquant la compétition.

On appelle X la variable aléatoire égale au montant de la cotisation payée par l'adhérent choisi pour la saison 2003-2004.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 10

Une enquête est faite auprès des élèves d'un lycée. Elle révèle que 30% d'entre eux sont allés le mois précédent au moins 4 fois au cinéma.

1) d'après cette enquête, quelle est la probabilité pour qu'un lycéen, pris au hasard, y soit allé au plus 3 fois ?

2) on interroge trois élèves choisis au hasard et de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves, qui, parmi ces trois élèves, sont allés au moins 4 fois au cinéma le mois précédent.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X.
 b) Calculer l'espérance mathématique de X.
 3) Soit F la fonction de répartition de X. Représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité graphiques : 2cm par unité en abscisse et 10cm pour une unité en ordonnée).

Exercice 11 (BAC)

1) soit a un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définies pour tout entier naturel $n \geq 1$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$

a) soit (v_n) la suite des nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = 13u_n - 4$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k . exprimer v_n en fonction de n et a .

b) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2) un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement : "le professeur oublie ses clés le jour n " et $\bar{E}_n$ l'évènement contraire. Soit P_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\bar{E}_n$. On note a la probabilité P_1 qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le jour n , il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $n+1$ est $\frac{1}{10}$.

- Si le jour n , il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est $\frac{4}{10}$.

a- démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$.

Pour cela, on pourra d'abord calculer les probabilités conditionnelles $P(E_{n+1}/\bar{E}_n)$ et $P(E_{n+1}/E_n)$. En déduire l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n .

b- A l'aide des résultats de la question 1, donner l'expression de P_n en fonction de a et n .

La limite p de P_n dépend- elle de la condition initiale a .

Exercice 12

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 4 boules rouges et 2 boules blanches. L'urne U_2 contient 2 boules rouges et 4 boules blanches. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

- 1) On effectue dans l'urne U_1 4 tirages d'une boule avec remise.
 - a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement une boule rouge au bout des 4 tirages ?
 - b) Quelle est la probabilité de n'obtenir une boule rouge qu'au 4^{ème} tirage.
- 2) On lance une pièce de monnaie parfaite :
 - Si le résultat est "pile" on décide de tirer uniquement dans U_1
 - Si le résultat est "face" on décide de tirer uniquement dans U_2
 - a) Calculer la probabilité qu'elle soit rouge.
 - b) Calculer la probabilité qu'elle provienne de U_1 sachant qu'elle est rouge.

Exercice 13

Une urne contient 8 jetons dont trois portent le numéro 2, un le numéro 3 et les quatre autres le nombre 1. Les jetons sont indiscernables au toucher.

- 1) On tire un jeton de l'urne et on appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre marqué sur le jeton.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance.
- 2) On tire simultanément deux jetons de l'urne et on appelle y la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des nombres marqués sur les jetons.

Déterminer la loi de probabilité de y et sa fonction de répartition F . représenter graphiquement F .

Exercice 14

Une urne contient trois boules rouges portant les numéros $2^0, 2^2, 2^4$, c'est-à-dire 1, 4, et 16 et trois boules vertes numérotées $2^1, 2^3, 2^5$, c'est-à-dire 2, 8 et 32. Les boules sont toutes indiscernables au toucher. Une expérience consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur :

- le produit des numéros si les boules tirées sont rouges,
- la somme des numéros si les boules tirées sont vertes ;
- le plus grand des rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ c'est-à-dire $\sup \left\{ \frac{a}{b} ; \frac{b}{a} \right\}$ si les

boules sont de couleur différentes et portent les numéros a et b .

- 1) a- Déterminer l'ensemble des cas possibles si les boules tirées sont rouges.

b- Déterminer dans le cas général, l'ensemble des valeurs prises par X .

2) a- Dresser la loi de probabilité de X .

b- Calculer l'espérance mathématique de X .

c- Calculer la probabilité de l'évènement : $A = \{X \geq 32\}$

3) on réalise l'expérience trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Soit Z la variable aléatoire associée au nombre de fois où l'évènement A est réalisé. Déterminer la loi de probabilité de Z et calculer son espérance mathématique.

Exercice : 15 (non corrigé)

Dans une population p deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% des individus ; le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2 . Pour cela on applique un test qui réagit à la maladie sur 90% des malades de M_1 , sur 70% des malades de M_2 , et sur 10% des individus qui n'ont aucune des deux affections.

1) Quand on choisit au hasard un individu i de p , quelle est la probabilité pour que le test réagisse ? (On pourra utiliser un arbre de probabilité).

2) Sachant que pour cet individu i le test a réagi, donner les probabilités que ce soit à cause de la maladie M_1 , à cause de la maladie M_2 , sans que i ait l'une des deux maladies.

3) On hospitalise les gens dont le test est positif, pour examens divers et éventuellement traitement. En moyenne le coût pour un malade de M_1 est de 1500f, pour un malade de M_2 il est de 1000f, et pour un non-malade il est de 400f.

Donner la moyenne de ce coût sur l'ensemble des individus ayant un test positif.

Si on répartit le coût uniformément sur l'ensemble de la population $\mathcal{P}$, combien devra payer chaque individu de $\mathcal{P}$.

Exercice 16 (non corrigé)

Jean débute un jeu dans lequel il a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,6 et s'il perd une partie, la probabilité pour qu'il perde la partie suivante est 0,7.

On note pour tout entier naturel non nul n :

G_n l'évènement : "Jean gagne la n -ième partie."

P_n l'évènement : "Jean perd la n -ième partie."

1) a- Déterminer les probabilités : $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/P_1)$.

En déduire $P(G_2)$.

b- calculer $P(P_2)$

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = P(G_n)$ et $y_n = P(P_n)$

- a) Déterminer les probabilités $P(P_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/P_n)$.
- b) montrer que :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$
- 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = x_n + y_n$ et $W_n = 4x_n - 3y_n$.
- a) montrer que la suite (V_n) est constante préciser son terme général.
- b) Montrer que la suite (W_n) est géométrique et exprimer W_n en fonction de n .
- c) exprimer x_n et y_n en fonction de n .
- 4) Jean joue deux parties. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par Jean. Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 17 (non corrigé)

Un sondage effectué récemment dans une région de notre pays à propos de construction d'un barrage donne les résultats suivants ; 65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ; parmi les personnes qui sont contre cette construction 70% sont des écologistes ;

Parmi les personnes favorables à la construction, 20% sont des écologistes.

On note : C l'évènement : "la personne interrogée est contre la construction" et $\bar{C}$ l'évènement contraire ; E l'évènement : "la personne interrogée est écologiste" ; F l'évènement : "la personne interrogée est contre la construction et n'est pas écologiste."

- 1) Calculer les probabilités $P(C)$; $P(E/C)$; $P(E/\bar{C})$.
- 2) a- calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit contre la construction du barrage et soit écologiste.
- b- calculer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit pour cette construction et soit écologiste.
- c- En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
- 3- a- Montrer que la probabilité de F est égale à 0,195.
- b- on choisit au hasard 5 personnes parmi celle qui ont été interrogée lors du sondage. Quelle est la probabilité qu'il en ait au moins une qui soit contre la construction du barrage et ne soit pas écologiste ? (on suppose que les choix des 5 personnes soit indépendant les uns des autres.)

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 11) $\Omega = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ $\text{card } \Omega = 6$

"Considérons les événements suivants" A : "Obtenir 1" ; B : "Obtenir 2" ; C : "Obtenir 3"

$$P_1 = P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{6} ;$$

$$P_2 = P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} ;$$

$$P_3 = P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2)

2 ^{ème} lancer 1 ^{er} lancer	1	2	2	3	3	3
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 3)	(1 ; 3)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 3)	(2 ; 3)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 3)	(2 ; 3)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 3)	(3 ; 3)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 3)	(3 ; 3)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 3)	(3 ; 3)

Considérons les événements suivants :

D : "Obtenir deux fois le chiffre 2" ; E : "Aucune fois le chiffre 3". F : "Une somme égale à 4"

$$P(D) = \frac{\text{card}D}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} ;$$

$$P(E) = \frac{\text{card}E}{\text{card}\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} ;$$

$$P(F) = \frac{\text{card}F}{\text{card}\Omega} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Exercice 2

n boules noires ; 3n boules blanches.

$$1) \text{Card}\Omega = C_{4n}^2 = \frac{4n!}{2!(4n-2)!} = \frac{4n(4n-1)}{2} = 2n(4n-1)$$

A : "tirer une boule de chaque couleur"

$$\text{Card}A = C_n^1 \times C_{3n}^1 = 3n^2$$

$$P_n = P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3n^2}{2n(4n-1)} = \frac{3n}{8n-2}$$

2) B₁ "tirer une boule noire puis une boule blanche".

$$P(B_1) = \frac{n}{4n} \times \frac{3n}{4n} = \frac{3}{16}$$

B : "tire une boule de chaque couleur". $B = B_1 \cup B_2$; $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

$P(B) = \frac{3}{8}$. La probabilité de tirer une boule de chaque couleur est $\frac{3}{8}$

$$3) \quad P_n = \frac{3n}{8n-2} = \frac{3}{8 - \frac{2}{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{3}{8};$$

$$P_n - \frac{3}{8} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3n}{8n-2} - \frac{3}{8} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{6}{8(8n-2)} \leq \frac{1}{100}$$

$$P_n - \frac{3}{8} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 8n \geq 77, \text{ comme } n \in \mathbb{N}, n \geq 10$$

Pour $n \geq 10$ on a $P_n - \frac{3}{8} \leq \frac{1}{100}$

Exercice 3

1) Soit Ω l'ensemble des tirages possibles $\text{card}\Omega = C_{10}^2 = 45$.

a) E_1 : "Les deux boules tirées portent des numéros pairs".

$$\text{card}E_1 = C_5^2 = 10. \text{ D'où } P(E_1) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

E_2 : "Les deux boules tirées sont de même couleur".

$$\text{card}E_2 = C_5^2 + C_3^2 + C_2^2 = 14. \text{ D'où } P(E_2) = \frac{14}{45}$$

E_3 : "Les deux boules tirées portent des numéros pairs et sont de même couleur".

L'événement E_3 est réalisé dans les cas où l'on a tiré les boules numérotées 2 et 4 ; ou les boules numérotées 6 et 8.

$$P(E_3) = \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{45}$$

$$b) E_3 = E_1 \cap E_2, P(E_1) \times P(E_2) = \frac{2}{9} \times \frac{14}{45} \neq \frac{2}{45}; P(E_1) \times P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2).$$

Les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

2- a) E_5 : « Les deux boules tirées portent les numéros pairs et sont des couleurs différentes.

Parmi les boules portant un numéro pair, il y en a deux blanches, deux bleues et une verte. $E_5 = \{(2;6); (2;8); (2;10); (4;6); (4;8); (4;10); (6;10); (8;10); \}$

$$\text{card}E_5 = 8; P(E_5) = \frac{8}{45}.$$

b) E_6 : "Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, elles portent des numéros pairs".

L'événement E_6 est : E_5 sachant que E_4 est réalisé. Or l'événement E_5 implique E_4 .

$$P(E_6) = P(E_5/E_4) = \frac{P(E_5 \cap E_4)}{P(E_4)} = \frac{P(E_5)}{P(E_4)}; E_4 \text{ est le contraire de } E_2;$$

$$P(E_4) = 1 - P(E_2) = \frac{31}{45}. \text{ Ainsi } P(E_6) = \frac{P(E_5)}{1 - P(E_2)} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{31}{45}} = \frac{8}{31}$$

Exercice 4

1) Soit G la variable aléatoire qui, à chaque partie effectuée par un joueur, associe son gain. Les valeurs prises par G sont $\{-20; 30; 80\}$

2) a- Nous avons $G = 30F$ lorsque le joueur a misé 20F puis gagné 50F, c'est-à-dire lorsqu'il a obtenu un quatre ou un cinq au premier lancer de dé (probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$) puis obtenu un 6 (probabilité $\frac{1}{6}$).

Les deux lancers étant indépendants, nous avons donc :

$$P(G = 30) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

b) Nous avons $G = 80F$ lorsque le joueur a misé 20F puis gagné 100F en obtenant un 6 au lancer du premier dé. Par la suite $P(G = 80) = \frac{1}{6}$

Le joueur perd 20F dans les autres cas, donc : $P(G = -20) + P(G = 30) + P(G = 80) = 1$

$$P(G = -20) = \frac{7}{9}.$$

La loi de probabilité de G est donc la suivante :

x_i	-2	3	8
$P(G = x_i)$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$

$$E(G) = -2 \times \frac{7}{9} + 3 \times \frac{1}{18} + 8 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}$$

3) a- Nous savons : $P_6 = 2P_1$ et $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$

Puisque $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$, nous en déduisons que : $7P_1 = 1$

$$\text{Donc } P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{7}, P_6 = 2 \times P_1 = \frac{2}{7}$$

b) La probabilité d'obtenir un 4 ou un 5 à l'issue du premier lancer est égale à $\frac{2}{7}$ et la probabilité d'obtenir un 6 au deuxième lancer est $\frac{2}{7}$.

Puisque les deux lancers s'effectuent de façon indépendante, nous avons

$$P(G = 30) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}, \quad P(G = 80) = \frac{4}{49}.$$

c) Nous avons $G = 80$ lorsque le joueur a obtenu un 6 au premier lancer de dé. Par conséquent $P(G = 80) = \frac{2}{7}$.

Puisque $P(G = -20) + P(G = 30) + P(G = 80) = 1$, nous en déduisons que :

$$P(G = -20) = \frac{31}{49}.$$

La loi de G est :

x_i	-20	30	80
$P(G = x_i)$	$\frac{31}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{7}$

Exercice 5

a) Soit $X(\Omega)$ l'univers image de X .

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

b) Loi de probabilité de X . $\text{Card}\Omega = C_{10}^2 = 45$

$$(X = 0) = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9)\}$$

$$(X = 1) = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9)\}$$

$$(X = 2) = \{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9)\}$$

$$(X = 3) = \{(3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9)\}$$

$$(X = 4) = \{(4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9)\}$$

$$(X = 5) = \{(5,6), (5,7), (5,8), (5,9)\}$$

$$(X = 6) = \{(6,7), (6,8), (6,9)\}$$

$$(X = 7) = \{(7,8), (7,9)\}$$

$$(X = 8) = \{(8,9)\}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$

Fonction de répartition de X

Si $x < 0$, $F(x) = 0$;

Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{9}{45}$

Si $1 \leq x < 2$, $F(x) = \frac{17}{45}$

Si $2 \leq x < 3$, $F(x) = \frac{24}{45}$

Si $3 \leq x < 4$, $F(x) = \frac{30}{45}$

Si $4 \leq x < 5$, $F(x) = \frac{35}{45}$

Si $5 \leq x < 6$, $F(x) = \frac{39}{45}$

Si $6 \leq x < 7$, $F(x) = \frac{42}{45}$

Si $7 \leq x < 8$, $F(x) = \frac{44}{45}$

Si $8 \leq x$, $F(x) = 1$

$$c) P(X \leq 6) = \frac{42}{45} ; P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = \frac{6}{45}$$

$$P(3 < X \leq 8) = P\{(X=4) \cup (X=5) \cup (X=6) \cup (X=7) \cup (X=8)\}$$

$$= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$$

$$P(3 < X \leq 8) = \frac{15}{45}$$

Exercice 6

a) Loi de probabilité de X

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 \Leftrightarrow P_1 + P_1 + 3P_1 + 2P_1 + 2P_1 + 6P_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 15P_1 = 1 \Leftrightarrow P_1 = \frac{1}{15}$$

$$P_1 = \frac{1}{15} ; P_2 = \frac{1}{15} ; P_3 = \frac{3}{15} ; P_4 = \frac{2}{15} ; P_5 = \frac{2}{15} ; P_6 = \frac{6}{15}$$

1 ^{er} lancer \ 2 ^{ème} lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, \dots, 11, 12\}$$

On note (i, j) le résultat des deux lancer $P(i, j) = P_i \times P_j$

$$P(X = 7) = P(2, 5) + P(5, 2) + P(3, 4) + P(4, 3) + P(1, 6) + P(6, 1)$$

$$= 2P_2 \times P_5 + 2P_4 \times P_3 + 2P_1 \times P_6$$

$$= 2\left(\frac{1}{15} \times \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{15} \times \frac{6}{15}\right) = \frac{28}{225}$$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{225}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{7}{225}$	$\frac{10}{225}$	$\frac{17}{225}$	$\frac{28}{225}$	$\frac{28}{225}$	$\frac{44}{225}$	$\frac{28}{225}$	$\frac{24}{225}$	$\frac{36}{225}$

Exercice 7

1) X prend les valeurs : -500 ; 0 ; 500

x_i	-500	0	500
$P(X = x_i)$	$\frac{C_6^2 \times C_4^1 + C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_6^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_4^3}{C_{10}^3}$

Soit

x_i	-500	0	500
$P(X = x_i)$	$\frac{96}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{4}{120}$

2) a- Les valeurs possibles prises par Y sont : -2500, -1500, -500, 500, 1500, 2500

D'où la loi de probabilité suivante :

x_i	-2500	-1500	-500	500	1500	2500
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{96}{125}\right)^5$	$5 \cdot \frac{24}{120} \left(\frac{96}{120}\right)^4$	$10 \cdot \left(\frac{24}{120}\right)^2 \left(\frac{96}{120}\right)^3$	$10 \cdot \left(\frac{24}{120}\right)^3 \left(\frac{96}{120}\right)^2$	$5 \cdot \left(\frac{24}{120}\right)^4 \cdot \frac{96}{120}$	$\left(\frac{24}{120}\right)^5$

$$b) E(Y) = \sum_{i=1}^6 y_i P(Y = y_i)$$

$$E(Y) = -2500 \times \left(\frac{96}{125}\right)^5 - 1500 \times 5 \cdot \frac{24}{120} \cdot \left(\frac{96}{120}\right)^4 - 5000 \times \left(\frac{24}{120}\right)^2 \left(\frac{96}{120}\right)^3 + 5000 \left(\frac{24}{120}\right)^3 \left(\frac{96}{120}\right)^2 + 1500 \times 5 \times \left(\frac{24}{120}\right)^4 \times \frac{96}{120} + 2500 \times \left(\frac{24}{120}\right)^5$$

$$E(Y) = 5 \times \frac{24}{120} = 1$$

$$\begin{aligned} c) P &= C_5^3 \left(\frac{24}{120}\right)^3 \left(\frac{96}{120}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{24}{120}\right)^4 \times \frac{96}{120} + \left(\frac{24}{120}\right)^5 \\ &= 10 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^5 \\ &= \frac{10 \times 16 + 5 \times 4 + 1024}{5^5} = \frac{1204}{5^5} \Leftrightarrow P = \frac{1204}{3125} \approx 0,39 \end{aligned}$$

Exercice 8

1) La caisse comprend 20 jouets et Tanga choisit 3 jouets au hasard.

Il y a $C_{20}^3 = 1140$ choix distincts possibles de 3 jouets.

2) a- A : "Tanga a choisi un jouet de chaque couleur"

$$CardA = C_9^1 \times C_6^1 \times C_5^1 = 9 \times 6 \times 5 = 270 ; P(A) = \frac{270}{1140} = \frac{9}{38} ; P(A) = \frac{9}{38}$$

b) B : "Tanga a choisi trois jouets de la même couleur"

$$CardB = C_9^3 + C_6^3 + C_5^3 = 114 ; P(A) = \frac{114}{1140} = \frac{1}{10} ; P(B) = \frac{1}{10}$$

C : "Tanga a choisi exactement deux jouets rouge"

$$CardC = C_9^2 \times C_{11}^1 = 36 \times 11 ; P(C) = \frac{36 \times 11}{1140} = \frac{33}{95} ; P(C) = \frac{33}{95}$$

2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où Tanga a choisi trois jouets de couleurs différentes. Puisque les tirages sont effectués de façon indépendante chaque matin, on n'en déduit que

X est la variable aléatoire de loi binomiale $\beta\left(5; \frac{9}{38}\right)$

$$\text{Déplus : } P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^4 \left(\frac{9}{38}\right)^4 \left(\frac{29}{38}\right) + C_5^5 \left(\frac{9}{38}\right)^5 \left(\frac{29}{38}\right)^0$$

$$P(X \geq 5) = 5 \left(\frac{9}{38}\right)^4 \left(\frac{29}{38}\right) + 1 \left(\frac{9}{38}\right)^5 = \frac{505197}{39617584}$$

La probabilité que Rémi ait choisi trois jouets de couleurs différentes au moins 4 jours sur les 5 est : $P(X \geq 5) = \frac{505197}{39617584}$

Exercice 9

Soient H, F et C les événements :

H : "L'adhérent est un homme"

F : "L'adhérent est une femme". ($\bar{H} = F$)

C : "L'adhérent pratique la compétition".

1) a- Le club comporte 500 adhérents dont 300 hommes. On en déduit que $P(H) = \frac{300}{500}$; $P(H) = \frac{3}{5}$

La probabilité que l'adhérent soit un homme est égale à $\frac{3}{5}$.

Puisque le club comporte 200 femmes, nous avons $P(F) = \frac{200}{500}$;

$$P(F) = \frac{2}{5}$$

La probabilité que l'adhérent soit une femme est égale à $\frac{2}{5}$.

Le tennis en compétition est pratiqué par 40 femmes ; la probabilité que l'adhérent pratique la compétition sachant que c'est une femme

$$\text{est : } P(C/F) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$$

La probabilité que l'adhérent pratique la compétition sachant que c'est une femme est égale à $\frac{1}{5}$.

b) $C \cap F$ est l'événement : "L'adhérent est une femme qui pratique la compétition"

$$P(C \cap F) = P(C/F) \times P(F) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

La probabilité que l'adhérent soit une femme qui pratique la compétition est égale à $\frac{2}{25}$.

c) Les événements F et H forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales donne :

$$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap H) = \frac{2}{25} + P(C/H) \times P(H)$$

$P(C) = \frac{2}{25} + \frac{90}{300} \times \frac{3}{5}$ car sur les 300 hommes qui adhèrent au club, 90 pratiquent la compétition. Par suite $P(C) = \frac{13}{50}$

La probabilité qu'un adhérent pratique la compétition est égale à $\frac{13}{50}$.

d) L'adhérent pratique la compétition. La probabilité que cet adhérent soit une femme est $P(F/C)$ avec

$$P(F/C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{13}{50}} = \frac{2}{25} \times \frac{50}{13} = \frac{4}{13}$$

La probabilité que l'adhérent soit une femme sachant qu'il pratique la compétition est égale à $\frac{4}{13}$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au montant de la cotisation payée par l'adhérent choisi pour la saison 2003-2004. L'ensemble des valeurs prises par X est : 2500 ; 2700 ; 3000.

a) L'adhérent paye 2500F de cotisation lorsqu'il ne pratique pas la compétition. On en déduit que :

$$P(X = 2500) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{13}{50} = \frac{37}{50} ; P(X = 2500) = \frac{37}{50}$$

L'adhérent paye 3000F lorsque ce dernier est un homme qui pratique la compétition.

Par suite : $P(X = 3000) = P(C \cap H) = P(C/H) \times P(H) = \frac{90}{300} \times \frac{3}{5} ;$

$$P(X = 3000) = \frac{9}{50}$$

Enfin, l'adhérent paye 2700F (3000F avec réduction de 10%) lorsque c'est une femme qui pratique la compétition, d'où :

$$P(X = 2700) = P(C \cap F) = \frac{2}{25}$$

Remarquons que l'on a : $P(X = 2500) + P(X = 2700) + P(X = 3000) = 1$
La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	2500	2700	3000
$P(X = x_i)$	$\frac{37}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{9}{50}$

b) L'espérance mathématique de X est donné par :

$$E(X) = 2500 \times P(X = 2500) + 2700 \times P(X = 2700) + 3000 \times P(X = 3000)$$

$$E(X) = 1850 + 216 + 540$$

$$E(X) = 2606$$

L'espérance mathématique de X est égale à 2606.

Exercice 10

1) On interroge un lycéen au hasard. L'événement "Le lycéen est allé au plus 3 fois au cinéma" est l'événement contraire de : "Le lycéen est allé au moins 4 fois au cinéma" de probabilité $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$. Par conséquent : la probabilité pour qu'un lycéen pris au hasard soit allé au plus 3 fois au cinéma est égale $1 - \frac{3}{10} = 1 - 0,3 = 0,7$.

2) On interroge trois élèves choisis au hasard et de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui, parmi ces trois élèves, sont allés au moins 4 fois au cinéma le mois précédent, Notons A_i où $i \in \{1, 2, 3\}$, l'événement "le i-ème lycéen est allé au moins 4 fois au cinéma".

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$(0,7)^3$	$C_3^1 \times (0,7)^2 \times (0,3)$	$C_3^2 \times (0,7) \times (0,3)^2$	$(0,3)^3$

Soit

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

c) L'espérance mathématique $E(X)$ de X est donné par :

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3)$$

$$E(X) = 0,9$$

L'espérance mathématique de X est égale à 0.9

3- Soit F la fonction de répartition de X.

F est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(X) = P(X \leq x)$

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

$$F(x) = 0,343 \text{ si } 0 \leq x < 1$$

$$F(x) = 0,343 + 0,441 \text{ si } 1 \leq x < 2$$

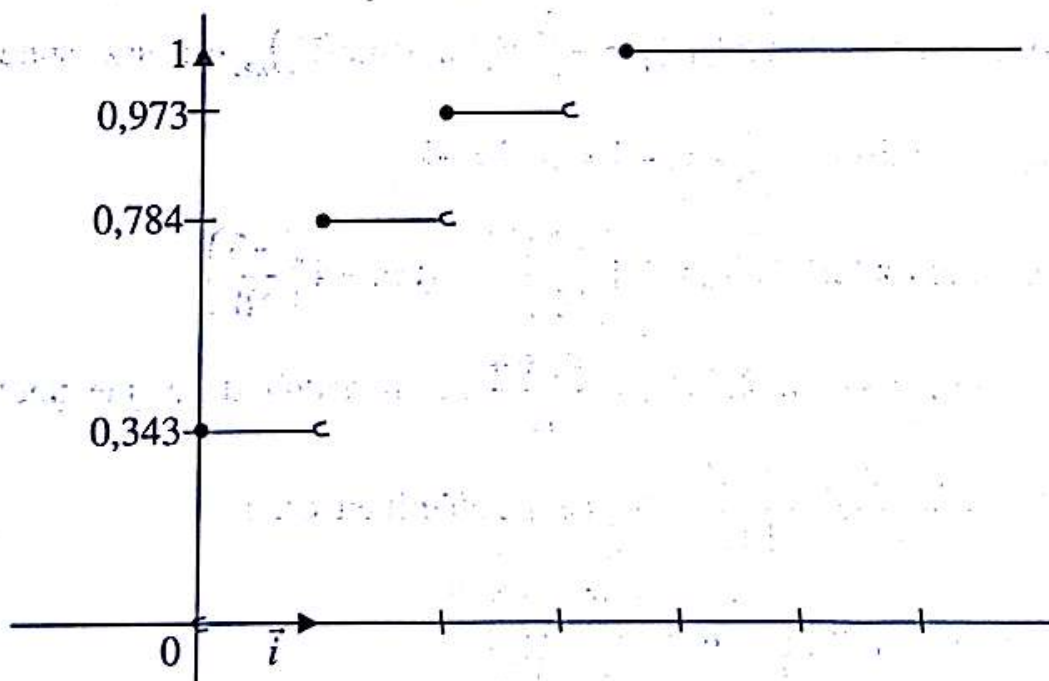
$$F(x) = 0,343 + 0,441 + 0,189 \text{ si } 2 \leq x < 3$$

$$F(x) = 0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 \text{ si } x \geq 3$$

Soit

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 0,343 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 0,784 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0,973 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

On en déduit la représentation graphique de F dans un repère orthogonal du plan.



Exercice 11

1) La suite (U_n) est définie par la condition initiale $U_1 = a$ et la relation de récurrence : pour tout entier $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}U_n$.

a) Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $V_n = 13U_n - 4$. On a pour tout $n \geq 1$, $V_{n+1} = 13U_{n+1} - 4$ ce qui donne, compte tenu de la relation de récurrence $V_{n+1} = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}U_n\right) - 4 = -\frac{39}{10}U_n + \frac{12}{10}$.

Sachant que $V_n = 13U_n - 4$, on obtient

$$U_n = \frac{V_n + 4}{13} \text{ puis } V_{n+1} = -\frac{39}{10} \cdot \frac{V_n + 4}{13} + \frac{12}{10}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$V_{n+1} = -\frac{3}{10}V_n - \frac{3 \times 4}{10} + \frac{12}{10} = -\frac{3}{10}V_n - \frac{12}{10} + \frac{12}{10}$$

On a donc pour tout $n \geq 1$, $V_{n+1} = -\frac{3}{10}V_n$. La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{10}$ et $V_1 = 13U_1 - 4 = 13a - 4$.

$$\text{On obtient pour tout } n \geq 1, V_n = V_1 \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = (13a - 4) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

b) Sachant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{V_n + 4}{13}$ on en déduit de a) que pour

$$n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{13a - 4}{13} \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} \text{ ce qui s'écrit encore :}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

2- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement : "le professeur oublie ses clés le jour n ", et $\bar{E}_n$ l'évènement contraire. On pose.

$$P_n = P(E_n), q_n = P(\bar{E}_n) \text{ et } a = P_1$$

Par hypothèse on a : $P(E_{n+1} / E_n) = \frac{1}{10}$ et $P(E_{n+1} / \bar{E}_n) = \frac{4}{10}$,

Pour $n \geq 1$ $(E_n, \bar{E}_n)$ constitue une partition. On a donc pour

$$\begin{aligned} n \geq 1 \quad P(E_{n+1}) &= P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) \\ &= P(E_{n+1} / E_n)P(E_n) + P(E_{n+1} / \bar{E}_n)P(\bar{E}_n) \end{aligned}$$

$$P_{n+1} = P(E_{n+1}) \frac{1}{10} \cdot P_n + \frac{4}{10} \cdot q_n, \text{ pour tout } n \geq 1$$

$\bar{E}_n$ étant l'évènement contraire de E_n , on en déduit que :

$$q_n = 1 - p_n \text{ puis } P_{n+1} = \frac{1}{10} p_n + \frac{4}{10} (1 - p_n)$$

Finalement on obtient pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} p_n$.

b) les suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ vérifient la même relation de récurrence. D'autre part, on a $p_1 = U_1$ on en déduit que ces suites sont égales. On a donc pour tout $n \geq 1$ $p_n = U_n$ c'est-à-dire

$$p_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right) \times \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}, -\frac{3}{10} \in]-1, 1[. \text{ On en déduit que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{4}{13}\right) \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = 0 \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{13}$$

La limite de la suite (p_n) pour $n \geq 1$ est indépendante de la condition initiale a.

Exercice 12

1) On effectue 4 tirages d'une boule avec remise dans u_1

a) La probabilité d'avoir une boule rouge lors d'un tirage dans

$$u_1 \text{ est } p_{u_1}(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

L'évènement considéré étant une épreuve de Bernoulli, la probabilité d'avoir exactement une boule rouge au bout des 4 tirages

$$\text{est } p_1 = C_4^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81} \quad p_1 = \frac{8}{81}$$

b) La probabilité d'en avoir une boule rouge qu'au 4^{ème} tirage est

$$p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81} \quad p_2 = \frac{2}{81} = \frac{1}{4} p_1$$

2) La probabilité de tirer une boule rouge dans U_2 est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

a) Quand on tire une boule rouge dans les conditions de l'expérience, la probabilité qu'elle soit rouge est :

$$P(R) = P(\text{pile}) \cdot P_{U_1}(R) + P(\text{Face}) + P_{U_2}(R)$$

$$p(R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Posons $P(U_1/R)$ la probabilité que la boule provienne de U_1 sachant qu'elle est rouge

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(U_1) \times P(R/U)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(U_1/R) = \frac{2}{3}$$

Exercice 13

1) 3 jetons portent le n°2, 1 le n° 3 et le 4 le n°1

2) Soit $X(\Omega)$ l'univers image de X . On a.

$$X(\Omega) = \{2; 3; 1\}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8}; \quad P(X=3) = \frac{1}{8}; \quad P(X=1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

La loi de la probabilité de X est déterminée par le tableau

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{13}{8}; \quad V(X) = 31$$

2) L'univers image de Y est $E(Y) = \{2; 3; 4; 5\}$

$$P(Y=2) = P((1;1)) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{3}{14}$$

$$P(Y=3) = P((2;1)) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{3}{7}$$

$$P(Y=4) = P((2;2) \cup (3;1)) = \frac{C_3^2}{C_8^2} + \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=5) = P((2;3)) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

La loi de probabilité de Y est déterminée par le tableau :

y_i	2	3	4	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$

Soit F la fonction de répartition de Y

* Si $x \in]-\infty ; 2[$ $F(x) = 0$

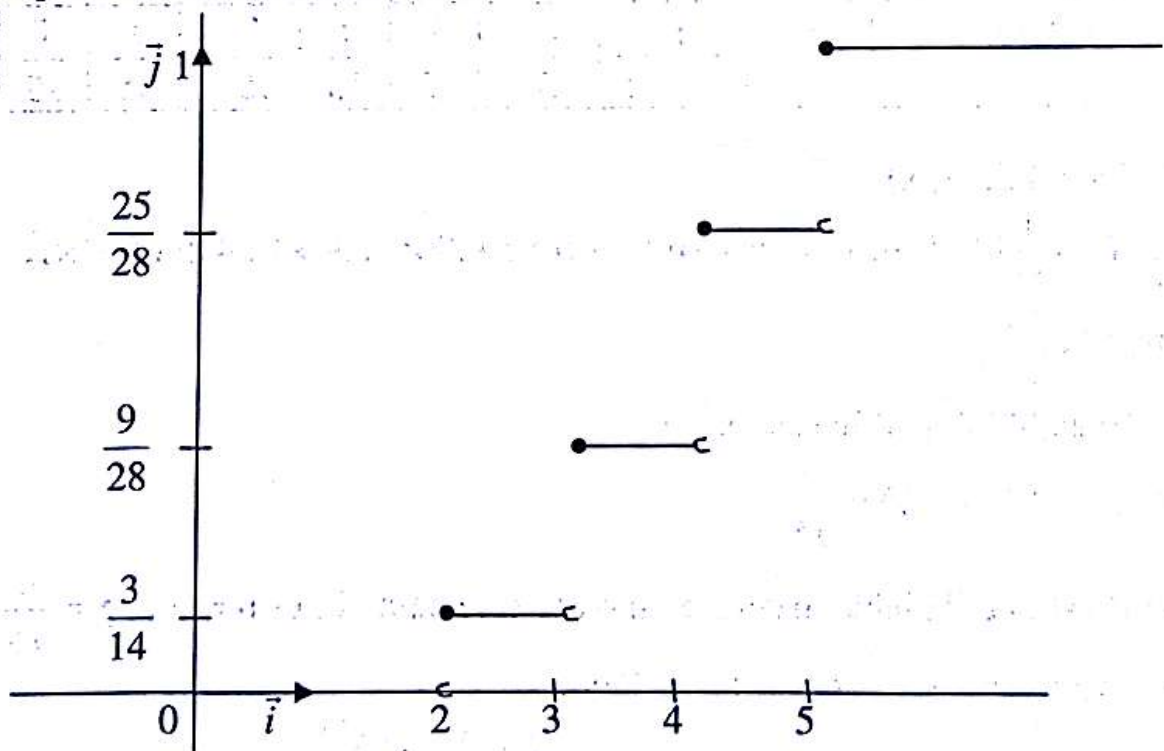
* Si $x \in [2 ; 3[$ $F(x) = \frac{3}{14}$

* Si $x \in [3 ; 4[$ $F(x) = \frac{3}{14} + \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$

* Si $x \in [4 ; 5[$ $F(x) = \frac{9}{14} + \frac{1}{4} = \frac{25}{28}$

* Si $x \geq 5$ $F(x) = \frac{25}{28} + \frac{3}{28} = 1$

Représentation graphique de F



Exercice 14

1) a- Si les boules tirées sont rouges les éventualités qui réalisent cet événement sont : (1 ; 4), (1 ; 16), et (4 ; 16), donc X prend les valeurs 4 ; 16 et 64.

b- Si les boules tirées sont vertes les éventualités qui réalisent cet événement sont : (2 ; 8), (2 ; 32), et (8 ; 32), donc X prend les valeurs 10 ; 34 et 40.

Si les boules sont de couleurs différentes les éventualités qui réalisent cet événement sont : (1 ; 2), (1 ; 8), (1 ; 32), (4 ; 2), (4 ; 8), (4 ; 32), (16 ; 2), (16 ; 8), et (16 ; 32), donc X prend les valeurs 2 ; 8 et 32.

L'ensemble des valeurs possibles de X est : {2 ; 4 ; 8 ; 10 ; 16 ; 32 ; 34 ; 40 ; 64}

2) a- Le nombre total de cas possibles est $C_6^2 = 15$. En comptant le nombre d'apparitions de chacun des nombres on obtient le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

k	2	4	8	10	16	32	34	40	64
$P(X=k)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

b) Calcul de $E(X)$

$$E(X) = \frac{1}{15} (2 \times 5 + 4 \times 1 + 8 \times 3 + 10 \times 1 + 16 \times 1 + 32 \times 1 + 34 \times 1 + 40 \times 1 + 64 \times 1)$$

$$E(X) = \frac{78}{15}$$

c- Probabilité de l'événement A

$$P(A) = P(X \geq 32) = \frac{4}{15}$$

3) Z est une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{4}{15}$.

Ses valeurs possibles sont : 0, 1, 2 et 3.

Sa loi de probabilité est $P(Z = k) = C_3^k \left(\frac{4}{15}\right)^k \left(\frac{11}{15}\right)^{3-k}$ avec $k = 0, 1, 2$ ou 3.

3. D'où le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(Z = k)$	$\left(\frac{11}{15}\right)^3$	$3\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{11}{15}\right)^2$	$3\left(\frac{11}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)^2$	$\left(\frac{4}{15}\right)^3$

Son espérance mathématique est : $E(Z) = n.p = 3 \times \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$

CHAPITRE VI : PRODUIT SCALAIRE- PRODUIT VECTORIEL

I) Produit scalaire

1) définitions

a) on appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathcal{E}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

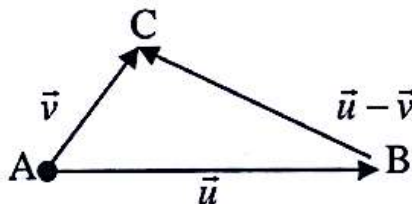
- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

b) le produit scalaire de deux vecteurs est le nombre réel noté et défini par :

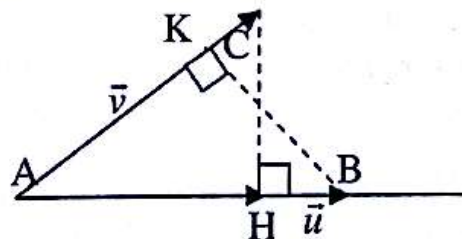
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$



c) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et A un point. Soit B et C les points définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Désignons par H le projeté orthogonal de C sur (AB) et par K le projeté orthogonal de B sur (AC).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK}$$



2) Propriétés

* soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et de même sens, alors on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et de sens contraires, alors on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = - \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

* Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et α un nombre réel. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

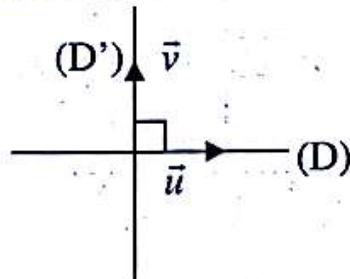
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

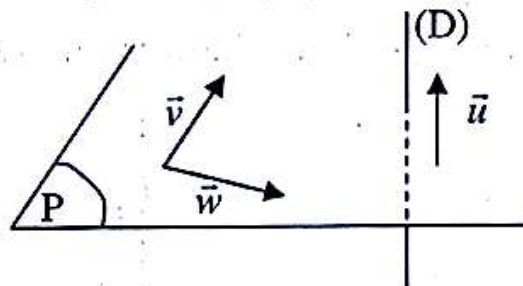
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} ; (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

3) Orthogonalité de droites et de plans

* Deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



* Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v}, \vec{w})$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$



4) Vecteur normal à un plan.

- On appelle vecteur normal à un plan (P) tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à (P)
- Soit A un point de l'espace $\mathcal{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul ; l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.

Réciproquement, soit P un plan. Quel que soit le point A de P et le vecteur $\vec{n}$ normal à P, P est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels

que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On dit que P est le plan passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

5) Expression analytique du produit scalaire

a) Définition

- une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$ est dite orthonormale lorsque les trois vecteurs sont unitaires ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$) et deux à deux orthogonaux :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

- un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace $\mathcal{E}$ est appelé repère ortho normal lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale.

Propriété

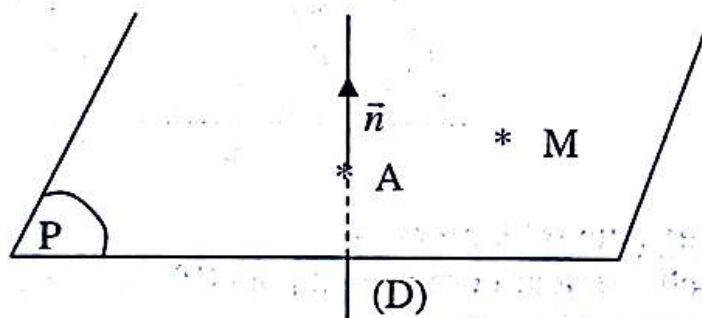
Si des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans la base ortho normale alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

b) Equation d'un plan*** caractérisation**

Soit (P) un plan défini par un point A et un vecteur $\vec{n}$ normal à (P). Le plan (P) est le plan passant par A et orthogonal à la droite de repère $(A, \vec{n})$.

**Propriété**

Etant donné un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Equation d'un plan*Propriété**

- Tout plan (P) de l'espace admet, dans un repère ortho normal une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c, d sont des nombres réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
- Toute équation $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c, d des nombres réels tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est l'équation d'un plan dans un repère ortho normal, un vecteur normal à ce plan ayant pour coordonnées (a, b, c)

6) Distance d'un point à un plan

* la distance d'un point M à un plan P passant par A de vecteur normal

$$\vec{n} \text{ est calculée par : } d(M, P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

* Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace $\mathcal{E}$. La distance de M_0 au plan P est : $d(M_0, P) =$

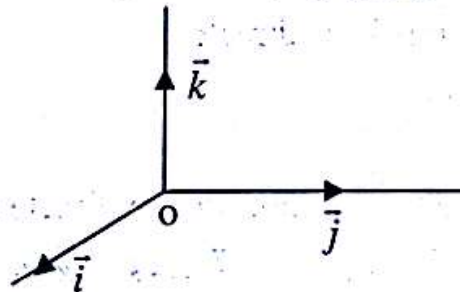
$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

II) Produit vectoriel**1) Espace orienté****a- Repères ortho normaux directs****Définitions**

1) soit $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère ortho normal de l'espace.

On dit que R est direct lorsque un observateur situé sur la demi-droite $[0, \vec{k})$, les pieds en 0 regardant dans la direction de $\vec{i}$ a le vecteur $\vec{j}$ sur sa gauche.

- un repère orthonormal de l'espace est indirect s'il n'est pas direct.



$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct.

Toute permutation circulaire des trois vecteurs conserve l'orientation ; si

$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct, $(0, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(0, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ le sont également ;

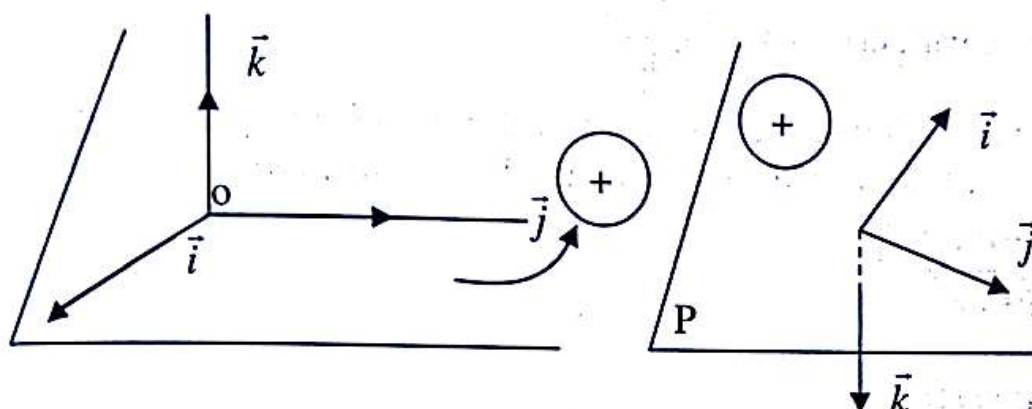
$(0, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(0, \vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ et $(0, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ sont indirects

2) Une base ortho normal de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si, quelque soit le point 0 de l'espace, le repère ortho normal est $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct.

b- Orientation d'un plan de l'espace.

On considère un plan (P) contenu dans l'espace ($\mathcal{E}$). On oriente positivement une droite orthogonale au plan (P) par le choix d'un

vecteur, $\vec{k}$ de norme un (1). Alors, toute base ortho normale $(\vec{i}, \vec{j})$ de (P) telle que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base directe de $(\mathcal{E})$ est une base directe de (P).



II) Produit vectoriel

1) définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur de l'espace noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe

* $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Exemples

1) Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$;

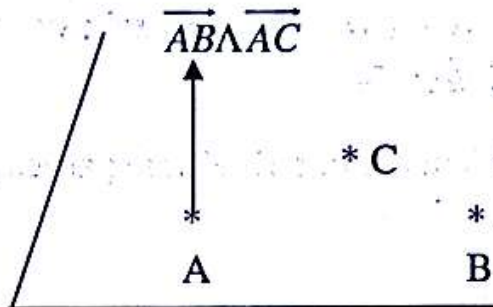
$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

2) Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base ortho normale directe.

2) Propriétés du produit vectoriel

a) vecteur normal à un plan

Si A, B, C sont trois points non alignés de l'espace alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

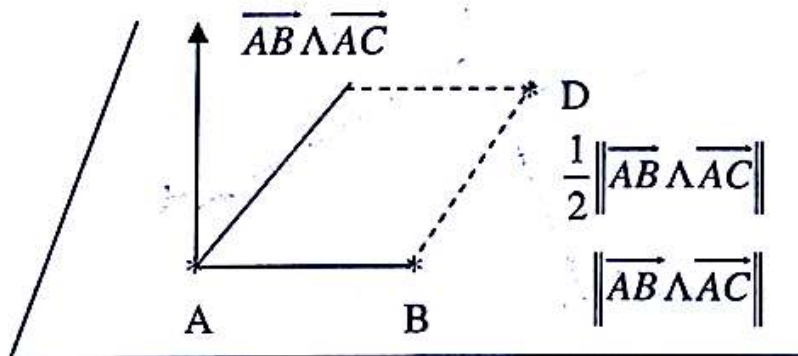


b) produit vectoriel et aires

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Le nombre $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ est :

- le double de l'aire du triangle ABC
- l'aire du parallélogramme ABCD construit sur les segments [AB] et [AC]



c) Produit vectoriel et colinéarité

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

d) Produit vectoriel et opérations

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel α :

- * $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- * $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- * $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$

3) Expression analytique du produit vectoriel

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base ortho normale directe, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') . Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées dans cette base : $(yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$.

Si $\vec{u} (x, y, z)$ et $\vec{v} (x', y', z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} (yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$.

4) calcul de distance, d'aires, de volumes

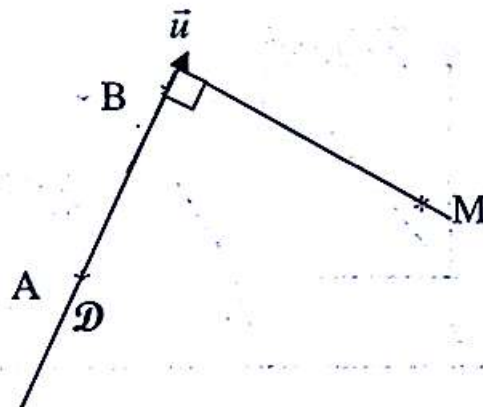
- distance d'un point à une droite.

La distance $d(M, D)$ d'un point M à une droite D définie par les points A

et B est égale à : $d(M, D) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$

La distance $d(M, D)$ d'un point à une droite D définie par un vecteur

directeur est égale à : $d(M, D) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$



- distance d'un point à un plan P .

- la distance $d(M, P)$ d'un point M à un plan P définie par trois points A, B, C non alignés est égale à :

$$d(M, P) = \frac{|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

La distance $d(M, p)$ d'un point M à un plan P définie par un point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à :

$$d(M, P) = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

- volume d'un tétraèdre

Le volume d'un tétraèdre ABCD est $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$

EXERCICES

Exercice 1

- 1) Soit les points A (1, 1, 3), B ($\sqrt{2} + 1, 0, 2$) et C ($\sqrt{2} + 1, 2, 2$)
Calculer AB, AC et l'angle $\widehat{CAB}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?
- 2) On donne A (-1, 2, 3), B (1, -2, 2) et C (4, 1, -1). Déterminer une équation du plan P passant par A et perpendiculaire à (BC). Soit D (3, -2, 5). Calculer la distance du point D au plan P.
- 3) Soit $\vec{n}$ (1, 2, -1), A (0, 1, 2), R (1, 3, 5). Soit (P) le plan passant par A et normal à $\vec{n}$. Montrer que R n'appartient pas à (P). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n}$. En déduire la distance de R à (P).
- 4) Soit A (3, -4, -2); B (-1; 3, 2) et C (7; -1; 3). Quelle est la nature du triangle ABC. Calculer les valeurs approchées des mesures en degrés des angles du triangle ABC.
- 5) Soit A (-2, -4, 3), B (1, -3, 5) C (-1; -2; 6) et D (-1, 3, -2) démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 2

- 1) soient les vecteurs $\vec{u}_1$ (1; -2; 4), $\vec{u}_2$ (-3; 2; 0) et $\vec{u}_3$ (2; -3; 5).
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$ sont colinéaires.
- 2) le plan est muni d'un repère ortho normal direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points
A (1; 2; -1) B (4; 0, 1) et C (1; 3; -2).
Calculer l'aire du triangle ABC. Déterminer une équation du plan (ABC).
- 3) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A (1; 2; 3), B (-3; -1; 2) et C (-1; 2; 2).
a- les points A, B et C sont-ils alignés ?
b- déterminer une valeur approchée des angles du triangle ABC
- 4) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit A(1, 2, 3) B (-1, 4, 3), C (2, 0, 1) et D (0, 4, 15).
a- Déterminer un vecteur normal au plan (ABC). En déduire une équation du plan (ABC).
b- Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
c- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3

- 1) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$. A-t-on nécessairement $\vec{v} = \vec{w}$?
- 2) Soient A, B, C trois points non alignés. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
- 3) Soient A, B, C trois points non alignés et I le milieu de [AC]. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$
- 4) A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace orienté tel que :
 - a) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
 - b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$
 - c) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \wedge (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

Exercice 4**1) Distance de deux droites parallèles.**

Soient (Δ) et (Δ') deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}$ et H un point de (Δ) . On désigne par H' le projeté orthogonal de H sur Δ' .

a) Démontrer que, pour tout point A de (Δ) et pour tout point A' de (Δ') :

$$\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$$

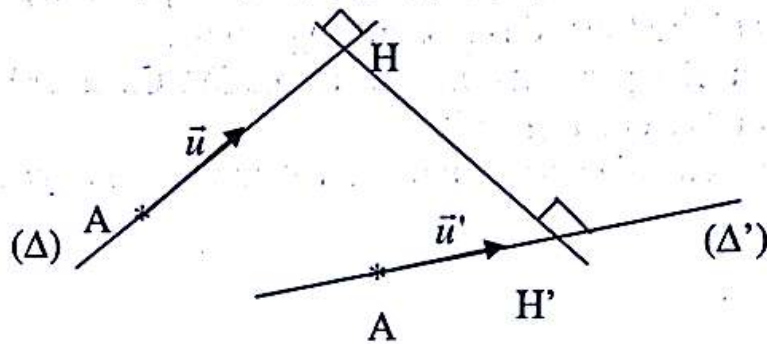
b) En déduire que $HH' = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

c) Application numérique :

Soit A (-1 ; 2 ; 5) et A' (4 ; -1 ; 9) ; (Δ) et (Δ') deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2 ; 2 ; 1)$ contenant respectivement A et A' ; calculer la distance de (Δ) à (Δ') .

2) Distance de deux droites non parallèles.

Soient deux droites non parallèles (Δ) et (Δ') . (Δ) est définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$; (Δ') est définie par un point A' et un vecteur $\vec{u}'$. On admet qu'il existe une droite (D) orthogonale à (Δ) et à (Δ') et coupant respectivement (Δ) et (Δ') en H et H'. (HH') est la perpendiculaire commune aux droites (Δ) et (Δ')



a) démontrer que : $\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$

b) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont colinéaires.

En déduire que $HH' = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$; (HH') est la distance entre les droites

(Δ) et (Δ')

c) application numérique

La droite (Δ) est définie par A (-3 ; 5 ; -1) et $\vec{u}$ (3 ; 4 ; -5) et la droite (Δ') par A' (2 ; -1 ; 3) $\vec{u}'$ (-4 ; -6 ; 7)

Calculer la distance entre (Δ) et (Δ') .

Exercices 5

Dans l'espace rapporté à un repère ortho normal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points A (3 ; 2 ; -1) et H (1 ; -1 ; 3).

1) Calculer la distance AH.

2) Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).

3) On donne les points : B (-6 ; 1 ; 1), C (4 ; -3 ; 3) et D (-1 ; -5 ; -1).

a- Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).

b- Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

c- Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.

d- Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{145}{3}$.

- 4) a- Calculer l'aire du triangle ABC.
b- Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points A (1, 1, 1) B (-2 ; 0 ; 1) C (1, 2, 3), D (-2, 1, 3) et E (-1 ; 0 ; 2)

- 1) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Calculer en unités d'aire l'aire de ce parallélogramme.
2) Le point E appartient-il au plan (ABC) ? Calculer la distance d (E, (ABC)) de E au plan (ABC).
3) calculer en unités de volume, le volume V de la pyramide de base (ABC) et de sommet E.

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité graphique : 3 cm).

Soient les points A (2 ; 1 ; 2), B (2 ; 2 ; 1), C (2 ; -1 ; -1) et D (1 ; 3 ; 0).

- 1) a- calculer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$
b- les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?
2) a- déterminer les coordonnées du point E tel que BDEC.

Soit un parallélogramme.

b- Déterminer en cm^2 l'aire du parallélogramme BDEC.

- 3) Déterminer en cm^3 le volume V de la pyramide de sommet A et de base le parallélogramme BDEC.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

- 1) (1, 1, 3) ; B($\sqrt{2} + 1$; 0 ; 2) ; C($\sqrt{2} + 1$; 2 ; 2)

Calculons AB, AC et l'angle $\widehat{CAB}$

$$\overrightarrow{AB} (\sqrt{2} + 1 - 1 ; 0 - 1 ; 2 - 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} (\sqrt{2} ; -1 ; -1)$$

$$\overrightarrow{AC} (\sqrt{2} + 1 - 1 ; 2 - 1 ; 2 - 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} (\sqrt{2} ; 1 ; -1)$$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 ;$$

$$AC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Donc $AB = AC = 2$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot (-1) - 1(1) = 2 + 1 - 1 = 2 ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{CAB}) \Leftrightarrow \cos(\hat{CAB}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$$

$$\cos(\hat{CAB}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ soit } \hat{CAB} = \frac{\pi}{3}$$

Nature du triangle ABC.

ABC est un triangle isocèle ($AB = AC$) ayant un angle de $\frac{\pi}{3}$. ABC est donc un triangle équilatéral.

2) $A(-1; 2; 3)$; $B(1; -2; 2)$ et $C(4; 1; -1)$. Déterminons une équation du plan P passant par A et perpendiculaire à (BC)

$$\overrightarrow{BC} (4-1; 1+2; -1-2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} (3; 3; -3)$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\vec{n} \text{ avec } \vec{n} (1; 1; -1); \vec{n} \text{ est un vecteur normal à P.}$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de P. $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) + (y-2) - (z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$$

Un équation de P est : $x + y - z + 2 = 0$

$D(3; -2; 5)$. Soit $d(D; P)$ la distance du point D au plan (P)

$$d(D, P) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$d(D, P) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3) $\vec{n} (1; 2; -1)$; $A(0, 1, 2)$; $R(1, 3, 5)$. (P) est le plan passant par A et normal à $\vec{n}$.

* Montrons que $R \notin (P)$

$$\overrightarrow{AR} (1; 3-1; 5-2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} (1; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-1) = 2 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} \neq 0. \text{ Donc } R \notin (P)$$

$$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} = 2$$

Soit $d(R, (P))$ la distance du point R au plan (P)

$$d(R, (P)) = \frac{|\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d(R, (P)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) $A(3; -4; -2)$; $B(-1; 3; 2)$ et $C(7; -1; 3)$; déterminons la nature du triangle ABC.

$$\overrightarrow{AB}(-4; 7; 4); \overrightarrow{AC}(4; 3; 5); \overrightarrow{BC}(8; -4; 1)$$

$$AB = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9; AC = \sqrt{16 + 9 + 25} = 5\sqrt{2}; BC = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9$$

$AB = AC$. ABC est un triangle isocèle en B.

* Calculons les valeurs approchées des mesures des angles de ABC.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -16 + 21 + 20 = 25$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{25}{45\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{18}$$

$(\widehat{BAC}) = 66,9^\circ$. Comme ABC est isocèle en B on a: $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$.

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 2 \cdot 66,9 = 46,2^\circ$$

5) $A(-2; -4; 3)$, $B(1; -3; 5)$, $C(-1; -2; 6)$ et $D(-1; 3; -2)$

Démontrons que (AD) est orthogonale au plan (ABC)

$$\overrightarrow{AD}(1; 7; -5); \overrightarrow{AB}(3; 1; 2); \overrightarrow{AC}(1; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-5) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$. Donc (AD) est orthogonale au plan (ABC)

Exercice 2

1) $\vec{u}_1(1; -2; 4)$, $\vec{u}_2(-3; 2; 0)$ et $\vec{u}_3(2; -3; 5)$.

Démontrons que les vecteurs $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$ sont colinéaires

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2(-8; -12; -4); \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3(2; 3; 1); \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -4(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3)$$

Donc les vecteurs $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$ sont colinéaires.

2) $A(1; 2; -1)$ $B(4; 0; 1)$ et $C(1; 3; -2)$.

* Calculons l'aire du triangle ABC

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}(3; -2; 2); \overrightarrow{AC}(0; 1; -1); \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(0; 3; 3)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

* Déterminons une équation du plan (ABC)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

(ABC) : $3y + 3z + d = 0$, $A \in (ABC)$

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 6 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

(ABC) : $y + z - 1 = 0$

3) A (1 ; 2 ; 3), B (-3 ; -1 ; 2) et C (-1 ; 2 ; 2).

a- les points A, B et C sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB} (-4 ; -3 ; -1)$; $\overrightarrow{AC} (-2 ; 0 ; -1)$; $\overrightarrow{BC} (2 ; 3 ; 0)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (3 ; -2 ; -6)$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaire, les points A, B, C ne sont pas alignés.

b- Déterminons une valeur approchée des angles du triangle ABC

$$AB = \sqrt{26} ; AC = \sqrt{5} ; BC = \sqrt{13} ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -17 ;$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{9}{\sqrt{130}} \approx 0,79.$$

Donc $\widehat{BAC} = 37,9^\circ$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cos(\widehat{ABC}) \Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{17\sqrt{2}}{26} \approx 0,92$$

Donc $\widehat{ABC} = 22,4^\circ$

On déduit que : $\widehat{BCA} = 119,7^\circ$

4) A(1, 2, 3) B (-1, 4, 3), C (2, 0, 1) et D (0, 4, 15).

a) Déterminons un vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{AB} (-2 ; 2 ; 0)$; $\overrightarrow{AC} (1 ; -2 ; -2)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (-4 ; -4 ; 2)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{n}$ avec $\vec{n} (2 ; 2 ; -1)$

$\vec{n} (2 ; 2 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

- Déterminons une équation du plan (ABC)

(ABC) : $2x + 2y - z + d = 0$; $A \in (ABC)$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow 6 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

(ABC) : $2x + 2y - z - 3 = 0$ est une équation du plan (ABC)

b) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

D(0 ; 4 ; 15)

$2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 15 - 3 = 8 - 15 = -7 \neq 0$. Donc $D \notin (ABC)$ car les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation du plan.

c) Calculons le volume du tétraèdre ABCD

$V = \frac{1}{3} \times \text{surface de base} \times \text{hauteur}$: la surface de base est la surface du triangle ABC $h = d(D, (ABC))$

$$h = d(D, (ABC)) = \frac{|2x_D + 2y_D - z_D - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{10}{3} = \frac{10}{3}. \text{ Le volume du tétraèdre } V \text{ est } V = \frac{10}{3}$$

Exercice 3

1) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont deux vecteurs colinéaires

$$\vec{v} - \vec{w} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}, k \in \mathbb{R}.$$

Ce qui montre qu'on n'a pas nécessairement $\vec{v} = \vec{w}$.

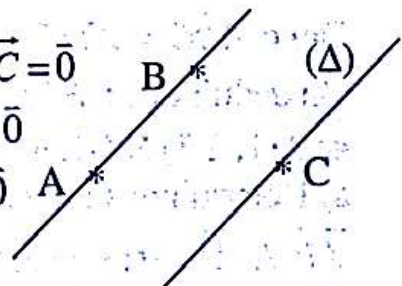
2) A, B, C sont trois points non alignés tel que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
Déterminons l'ensemble des points M

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont des vecteurs colinéaires. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB).

3) A, B, C sont trois points non alignés, I milieu de [AC]. Déterminons l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0} \text{ (I milieu de [AC])}$$

$$\text{alors } \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MI}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les points M, I, B sont alignés. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$ est la droite (IB)

4) A, B et C sont trois points non alignés.

a) Déterminons l'ensemble des points M tel que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
 $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, I étant le milieu de [AB]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. L'ensemble cherché est la droite passant par I et parallèle à la droite (BC)

b) Déterminons l'ensemble des points M tel que :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

Soit $G = \text{bary}\{(A,1); (B,2)\}$ et $G' = \text{bary}\{(B,1); (C,-3)\}$

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \wedge (-2\overrightarrow{MG'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MG'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \text{ et } \overrightarrow{MG'} \text{ sont colinéaires.}$$

Les points M, G, G' sont alignés. L'ensemble cherché est la droite (GG').

c) Déterminons l'ensemble des points M tel que :

$$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \wedge (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Soit G le barycentre de $\{(A,-1); (B,2); (C,1)\}$

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

$$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \wedge (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

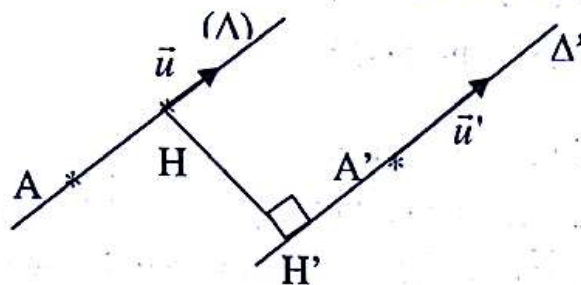
$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \wedge \overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

Les vecteurs $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires.

L'ensemble cherché est la droite passant par G et parallèle à la droite de vecteur directeur $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Exercice 4

1) Distance de deux droites parallèles $\Delta(A, \vec{u})$ et $\Delta'(A', \vec{u})$



a) Démontrons que $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{H'A'} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, de même $\overrightarrow{H'A'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Donc

$\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{H'A'} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$

b) Dédisons que $HH' = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. $\|\overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'}\| \cdot \|\vec{u}\|$

$$\begin{aligned}\text{D'après (a) } \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} &= \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}\| \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HH'}\| \cdot \|\vec{u}\|\end{aligned}$$

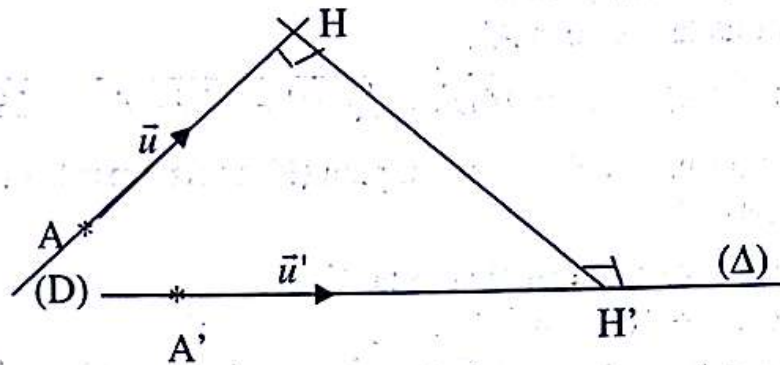
$$\text{D'où } HH' = \|\overrightarrow{HH'}\| = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

c) Application numérique :

$A(-1; 2; 5)$; $A'(4; -1; 9)$; $\vec{u}(-2; 2; 1)$; $\overrightarrow{AA'}(5; -3; 4)$; $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}(-11; -13; 4)$

$$HH' = \frac{\sqrt{(-11)^2 + (-13)^2 + 4^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{306}}{3} = \sqrt{34}$$

2) Distance de deux droites non parallèles



a) Démontrons que $\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$

$\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont orthogonaux. Or $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires. Donc $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux. Ce qui donne que $\overrightarrow{AH} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0$.

De même $\overrightarrow{H'A'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') + \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') + \overrightarrow{H'A'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \\ &= \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$

b) Prouvons que les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont orthogonaux or $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont aussi orthogonaux. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont colinéaires.

$$\text{Déduisons que : } \overrightarrow{HH'} = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{HH'} \text{ et } \vec{u} \wedge \vec{u}' \text{ sont colinéaires. } |\overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')| = \|\overrightarrow{HH'}\| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|$$

$$|\overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')| = |\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')| \Leftrightarrow \overrightarrow{HH'} \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| = |\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HH'} = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

c) Application numérique : $A(-3 ; 5 ; -1) ; A'(2 ; -1 ; 3) ; \vec{u}'(-4 ; -6 ; 7) ;$

$$\vec{u}(3 ; 4 ; -5) \quad \vec{u} \wedge \vec{u}'(-2 ; -1 ; -2), \quad \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\| = 3 \quad \overrightarrow{AA'}(5 ; -6 ; 4) ;$$

$$\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = -2 \times 5 - 1 \times (-6) - 2 \times 4 = -12$$

$$\overrightarrow{HH'} = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} = \frac{12}{3} = 4. \text{ La distance entre } (\Delta) \text{ et } (\Delta') \text{ est : } 4.$$

Exercice 5

A(3 ; 2 ; -1) et H(1 ; -1 ; 3)

1) Calculons la distance AH

$$\overrightarrow{AH}(-2 ; -3 ; 4) ; AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

2) Déterminons une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH)

 $\overrightarrow{AH}(-2 ; -3 ; 4)$ est normal au plan (P)

$$(P) : -2x - 3y + 4z + d = 0 \quad H \in (P)$$

$$-2x_H + 3y_H + 4z_H + d = 0 \Leftrightarrow -2 + 3 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -13$$

$$(P) : 2x + 3y - 4z + 13 = 0$$

3) B(-6 ; 1 ; 1), C(4 ; -3 ; 3) ; D(-1 ; -5 ; -1)

a- Démontrons que les points B, C, D appartiennent à (P)

$$* 2x(-6) + 3x(1) - 4(1) + 13 = -12 + 3 - 4 + 13 = 0 \quad B \in (P)$$

$$* 2x(4) + 3x(-3) - 4x(3) + 13 = 0 \quad C \in (P)$$

$$* 2x(-1) + 3x(-5) - 4(-1) + 13 = -2 - 15 + 4 + 13 = 0 \quad D \in (P)$$

Les points B, C, D appartiennent au plan (P).

b- Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{BC}(10 ; -4 ; 2) ; \overrightarrow{BD}(5 ; -6 ; -2) ; \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}(20 ; 30 ; -40)$$

c- Démontrons que l'aire du triangle BCD est $5\sqrt{29}$

$$A(BCD) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(20)^2 + (30)^2 + (-40)^2} = 5\sqrt{29}$$

L'aire du triangle BCD est $5\sqrt{29}$ d- Démontrons que le volume du tétraèdre est égal à $\frac{145}{3}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A(BCD) \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{145}{3}$$

Le volume du tétraèdre ABCD est à $\frac{145}{3}$

4) a- Calculons l'aire du triangle ABC

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}(-9 ; -1 ; 2) ; \overrightarrow{AC}(1 ; -5 ; 4) ; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(6 ; 38 ; 46)$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 38^2 + 46^2} = 6\sqrt{35}$$

b- Calculons la distance du point D au plan (ABC)

$$\begin{aligned}
 V(ABCD) &= \frac{1}{3} \cdot A(ABC) \cdot d(D, (ABC)) \\
 \Leftrightarrow \frac{145}{3} &= \frac{1}{3} \cdot A(ABC) \cdot d(D, (ABC)) \\
 \Leftrightarrow 145 &= 6\sqrt{35} \cdot d(D, (ABC)) \\
 \Leftrightarrow d(D, (ABC)) &= \frac{145}{6\sqrt{35}} = \frac{145\sqrt{35}}{6 \cdot 35} = \frac{8.29}{6.3.7} \sqrt{35}
 \end{aligned}$$

$$d(D, (ABC)) = \frac{29}{42} \sqrt{35}$$

Exercise 6

1) * Montrons que ABCD est un parallélogramme

$$\overrightarrow{AB}(-3; -1; 0); \overrightarrow{DC}(-3; -1; 0)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

* Calculons en unités d'aire, l'aire de ABCD

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}(-3; -1; 0); \overrightarrow{AC}(0; 1; 2); \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; 6; -3)$$

$$A = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

2) Le point E appartient-il au plan (ABC) ?

$$E \in (ABC) \Leftrightarrow d(E, (ABC)) = 0 \text{ or } d(E, (ABC)) = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0; \overrightarrow{AE} \cdot (-2; -1; 1)$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-3) = -5 \neq 0. \text{ Donc } E \notin (ABC)$$

$$d(E, (ABC)) = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{5}{7}$$

3) Calculons le volume de la pyramide de base ABC et de sommet E

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| = \frac{5}{6}; (|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| = 5)$$

Exercise 7

A(2; 1; 2); B(2; 2; 1) et D(1; 3; 0)

1) a- Calculons $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{BC}(0; -3; -2); \overrightarrow{BD}(-1; 1; -1); \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}(5; 2; -3)$$

b- Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

Les points A, B, C, et D sont coplanaires si $d(A, (BCD)) = 0$.

$$\text{Or } d(A, (BCD)) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD})|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$$

$$\overrightarrow{BA}(0; -1; 1); \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}(5; 2; -3); \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 0 \times 5 - 1 \times 2 + 1 \times (-3) = -5$$

$$\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38};$$

$$d(A, (BCD)) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD})|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|} = \frac{5}{\sqrt{38}} = \frac{5\sqrt{38}}{38}$$

$d(A, (BCD)) \neq 0$. Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a- Déterminons les coordonnées du point E tel que BDEC soit un parallélogramme.

BDEC soit un parallélogramme. BDEC parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$

$$\text{Or } \overrightarrow{BD}(-1; 1; -1); \overrightarrow{CE}(x_E - 2; y_E + 1; z_E + 1)$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = -1 \\ y_E + 1 = 1 \\ z_E + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 1 \\ y_E = 0 \\ z_E = -2 \end{cases} \quad E(1; 0; -2)$$

b- Calculons l'aire du parallélogramme ADEC

Soit A l'aire du parallélogramme BDEC en unité d'aires

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}\| \text{ or } \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}(-5; -2; 3);$$

$$A = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{38} \text{ cm}^2$$

L'aire du parallélogramme BDEC en cm^2 est : $9\sqrt{38} \text{ cm}^2$

3) Déterminons en cm^3 volume V de la pyramide de sommet A et de base

$$\text{le parallélogramme BDEC } V = \frac{1}{3} A \cdot d(A, (BCD)); \quad V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{38}$$

$$\frac{5}{\sqrt{38}} \cdot 3 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm}^3$$

Dans la même collection

Classe de Troisième

- Get your BEPC (Anglais)
 - SVT 3ème
 - Français 3ème
- Histoire-geographie 3ème
 - Mathématique 3ème
- Sciences physiques 3ème

Classe de Terminale

- Access to Success (Anglais)
 - SVT Tle
 - Français Tle
- Histoire-géographie Tle
 - Mathématiques Tle
- Sciences physiques Tle
- L'Essentiel en philosophie des classes de Tle

Livres imprimés sur des papiers labellisés
F S C
- *Certification garantissant une gestion durable de la forêt* -



Achevé d'imprimer sur les presses du
Centre Littéraire d'Impression Provençal
Marseille - France
www.imprimerieclip.fr

N° d'impression 10110821

Mathématiques, classe de Tle

Enseignants, voilà l'outil qu'il vous faut pour dispenser l'essentiel des mathématiques, en classe de Terminale des Lycées et Collèges.

Elèves des classes du 2nd cycle, voilà enfin l'outil qu'il vous faut pour affronter l'épreuve de mathématiques au baccalauréat, d'après le programme scolaire du Burkina Faso.

- Un aide-mémoire couvrant l'essentiel du programme .
- Un recueil de sujets inédits, corrigés et non corrigés...tel est le contenu de ce document conçu pour vous permettre d'aborder l'épreuve de mathématiques à l'examen sans inquiétude.

Dans la même collection

Classe de Terminale

- Access to Success (Anglais)
- SVT Tle
- Histoire-géographie Tle
- Mathématiques Tle
- Sciences physiques Tle
- Philosophie Tle

Classe de Troisième

- SVT 3ème
- Français 3ème
- Histoire-géographie 3ème
- Mathématique 3ème
- Sciences physiques 3ème

ISBN 978-2-266-46281-5



9 782266 462815

PRIX BF: 5000 F CFA