

Les
Cahiers
du BAC®

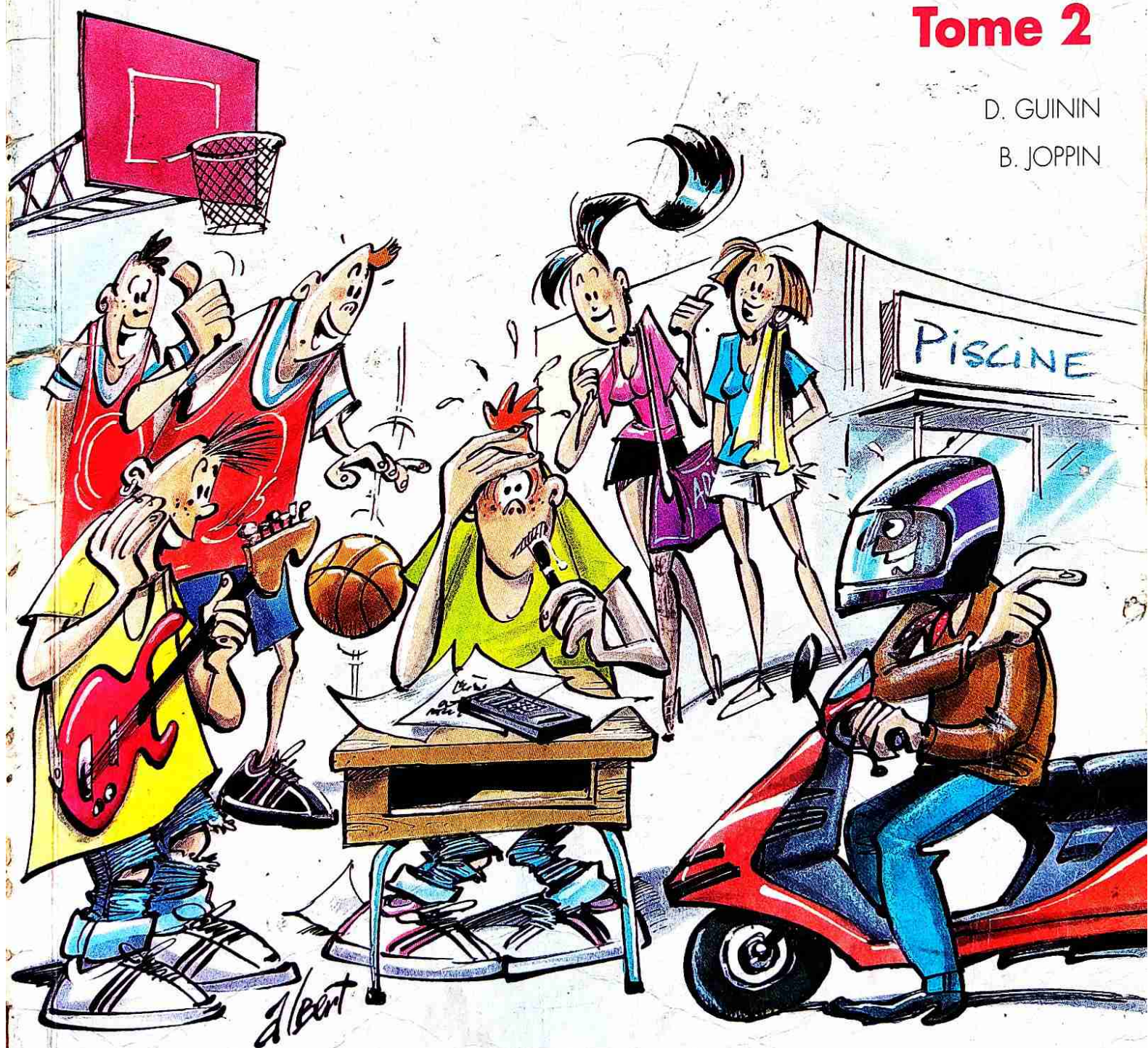
MATHÉMATIQUES

TERMINALE S

Tome 2

D. GUININ

B. JOPPIN



COURS ET EXERCICES RÉSOLUS

MATHÉMATIQUES

TERMINALE S

ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE

Tome 2

par

Bernard JOPPIN

Daniel GUININ

Professeurs agrégés

ABC éditions

Les Cahiers du BAC

1, Rue de Rome 93561 Rosny Cedex

Avertissement au lecteur

Cet ouvrage vous propose ce qu'un élève de Terminale S doit assimiler pour aborder dans les meilleures conditions l'examen du Baccalauréat.

Nous nous sommes attachés à clairement préciser les notions clés, de manière à ce que vous disposiez d'informations précises en vue de la résolution d'exercices ou problèmes.

Ce tome est consacré aux nombres complexes et à la géométrie.

Quatre chapitres concernent plus particulièrement l'enseignement de spécialité.

Chacun des huit chapitres est composé :

- d'un résumé de cours très complet, contenant les définitions, théorèmes et formules utiles ainsi que les principales méthodes à mettre en œuvre.
- d'exercices résolus, regroupés par thèmes, avec solutions détaillées et commentées, largement assez nombreux pour illustrer les différents aspects du chapitre abordé.

Les sujets sont adaptés aux programmes de 1994. Nous avons essayé de tenir compte de la diversité des questions à aborder et de la fréquence présumée ou constatée des sujets proposés au Baccalauréat.

Nous espérons que cet ouvrage est assez clair et complet pour vous apporter une aide efficace tout au long de l'année.

Les Auteurs.

Table des matières

CHAPITRE 1 — Nombres complexes — Trigonométrie

Cours

I — Le Corps des nombres complexes	7
II — Conjugué — Module	8
III — Représentation géométrique	8
IV — Argument — Exponentielle complexe	9
V — Equations du second degré	11
VI — Trigonométrie	12
VII — Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	15
Exercices et problèmes résolus	16

CHAPITRE 2 — Systèmes linéaires

Cours

I — Généralités	37
II — Opérations élémentaires	38
III — Méthode de Gauss	39
Exercices et problèmes résolus	40

CHAPITRE 3 — Barycentres — Angles

Cours

I — Barycentre	47
II — Déterminant	50
III — Projections — Théorème de Thalès	52
IV — Points cocycliques ou alignés (<i>spécialité</i>)	53
Exercices et problèmes résolus	55

CHAPITRE 4 — Produit scalaire dans l'espace

Cours

I — Produit scalaire et orthogonalité	71
II — Problèmes de distances	73
III — Produit scalaire dans un repère orthonormal	74
IV — Equations cartésiennes de plans, de sphères	75
Exercices et problèmes résolus	77

CHAPITRE 5 — Produit vectoriel

Cours

I — Orientation de l'espace	91
II — Produit vectoriel	93
III — Produit mixte	94
IV — Méthodes	95
Exercices et problèmes résolus	96

CHAPITRE 6 — Isométries planes (spécialité)

Cours

I — Isométries — Rappels	103
II — Isométries planes	104
III — Propriétés d'une isométrie	104
IV — Décomposition à l'aide de réflexions	105
V — Déplacements	105
Exercices et problèmes résolus	107

CHAPITRE 7 — Similitudes directes (spécialité)

Cours

I — Définition	119
II — Décomposition d'une similitude directe	119
III — Ecriture complexe d'une similitude directe	120
IV — Descriptions d'une similitude directe	120
Exercices et problèmes résolus	121

CHAPITRE 8 — Coniques (spécialité)

Cours

I — Définition géométrique — Equation réduite	129
II — Etude graphique des coniques	131
III — Foyers — Directrices d'une conique à centre	133
IV — Transformé d'un cercle par affinité	135
V — Représentations paramétriques	136
Exercices et problèmes résolus	137

Chapitre I

Nombres complexes

Trigonométrie



I – Le Corps des nombres complexes

A. Définition

- d. 1** Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, muni d'une addition (+) et d'une multiplication ($\times$), et tel que :
1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
 2. l'addition (+) et la multiplication ($\times$) de $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$.
 3. pour tous réels x, y : $x + y = x + y$, $x \times y = x \times y$
 4. $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i , tel que $i^2 = -1$. ■ i n'appartient pas à $\mathbb{R}$.
 5. Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit $a + ib$ où a et b sont des réels.
- Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes**.

Remarques

La propriété 2. se traduit en disant que $\mathbb{C}$ ($+$, $\times$) est un **corps**.

La propriété 3. se traduit en disant que l'addition + et la multiplication $\times$ dans $\mathbb{C}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$.

En conséquence, les opérations dans $\mathbb{C}$ sont notées + et $\times$ comme dans $\mathbb{R}$.

B. Partie réelle, partie imaginaire

Théorème :

- t. 1** Si a, a', b et b' sont réels,
- $$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0 \quad , \quad a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Définitions :

- d. 2** Pour tout nombre complexe z , il existe un couple unique (a, b) de nombres réels, tel que $z = a + bi$.
 a est appelé la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$, b est appelé la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$.
- d. 3** Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :
 $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0$
 Un nombre complexe de partie réelle nulle est dit **imaginaire pur**. Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$
 $z \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(z) = 0$

Formulaire :

- f. 1** **Partie réelle, partie imaginaire et opérations dans $\mathbb{C}$** a, a', b, b' étant des réels :
- $$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$
- $$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$
- Si a et b sont non tous deux nuls : $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

II – Conjugué — Module

Définition :

- d. 4 On appelle **conjugué** du nombre complexe z , et on note $\bar{z}$, le nombre complexe $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.
Si $z = a + ib$, a et b réels, alors $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés :

- p. 1
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ▪ $\overline{\bar{z}} = z$ ▪ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 - $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ pour $z \neq 0$. ▪ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ pour $z_2 \neq 0$.

- p. 2
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ▪ $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. Il est imaginaire pur si et seulement si $z + \bar{z} = 0$.

Définition :

- d. 5 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$ est un réel positif.
Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$ est appelé **module** de z et noté $|z|$: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Remarques

- Si $z \in \mathbb{R}$, module de z et valeur absolue de z sont le même nombre réel positif. Ceci justifie la notation $|z|$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Propriétés :

- p. 3
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ pour tout $z \neq 0$. ▪ $|z| = 1 \iff z^{-1} = \bar{z}$.

- p. 4
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $z \neq 0$ ▪ $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ ▪ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $z' \neq 0$

Corollaire Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $|z^n| = |z|^n$. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- p. 5
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ ▪ $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ ▪ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

Corollaire $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

III – Représentation géométrique

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs du plan.

Définitions :

- d. 6 Au point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, on associe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On dit que z est l'**affixe** de M : $z = \operatorname{aff}(M)$.
Au nombre complexe z , on associe le point $M(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$. On dit que le point M est l'**image** de z .
- d. 7 Au vecteur $\vec{u}(x, y)$ de $\mathcal{V}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$.
On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$, $z = \operatorname{aff}(\vec{u})$.

Propriétés :

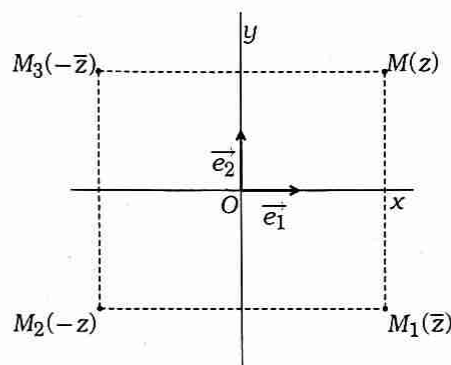
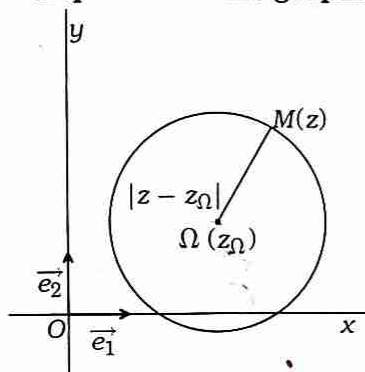
- p. 6** Soit M et N deux points de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$.
- $\text{aff}(\vec{MN}) = \text{aff}(N) - \text{aff}(M)$ ▪ $\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$.

Remarque : $\text{aff}(\vec{OM}) = \text{aff}(M)$.

- p. 7** ▪ $z = \text{aff}(M)$ $|z| = \|\vec{OM}\|$ ▪ $z = \text{aff}(\vec{u})$ $|z| = \|\vec{u}\|$

- p. 8** Le cercle de centre Ω (d'affixe z_Ω) et de rayon r est l'ensemble des points M , (d'affixe z), tel que : $|z - z_\Omega| = r$.

- p. 9** Soit M d'affixe z :
- $\bar{z}$ est l'affixe de M_1 , symétrique de M par rapport à $(O, \vec{e}_1)$.
 - $-z$ est l'affixe de M_2 , symétrique de M par rapport à O .
 - $-\bar{z}$ est l'affixe de M_3 , symétrique de M par rapport à $(O, \vec{e}_2)$.

Représentations graphiques

- p. 10** Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ d'affixe a .
Pour tout point M d'affixe z , l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z + a$.

IV - Argument — Exponentielle complexe**1. Argument d'un nombre complexe non nul****Définitions :**

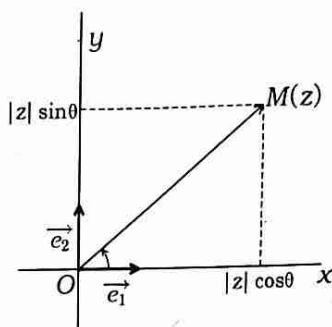
- d. 8** On appelle **plan complexe** un plan $\mathcal{P}$ orienté, rapporté à un repère orthonormal **direct** $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- d. 9** Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe z . Une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \vec{u})$ s'appelle **argument** de z .
On note $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{u})} = \arg z$.

Propriétés :

- p. 11** Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}_1$ de centre O et $\theta = \widehat{(\vec{e}_1, \vec{OM})}$. Alors
- $\text{aff}(M) = \cos \theta + i \sin \theta$ ▪ $\theta = \arg(\text{aff}(M))$
- p. 12** Soit $z \neq 0$, d'argument θ .
- $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ (forme trigonométrique d'un nombre complexe).
 - $\cos \theta = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$ ▪ $\sin \theta = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}$.

Remarque

$\arg\left(\frac{z}{|z|}\right) = \arg z$ provient de $\widehat{(\vec{e}_1, k\vec{u})} = \widehat{(\vec{e}_1, \vec{u})}$ pour $k > 0$.



p. 13 | Un nombre complexe est imaginaire pur si il a pour argument : $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près (ou $\frac{\pi}{2}$ à π près).

Un nombre complexe est réel si il a pour argument :

0 (nombre réel positif) ou π (nombre réel négatif) à 2π près.

p. 14 | ■ $z \neq 0$: $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$

Conséquence de :

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

p. 15 | ■ $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$

Conséquence de :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \end{aligned}$$

p. 16 | ■ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ ■ $\arg(-z) = \pi + \arg z$ ■ $z' \neq 0$: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

p. 17 | Soit a, b, c , des complexes d'images A, B, C tels que $A \neq B, A \neq C$: ■ $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \widehat{(AB, AC)}$

p. 18 | **Formule de Moivre**

- Pour tout $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \arg z$
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

2. Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Définition :

d. 10 | Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Propriétés :

p. 19 | ■ Pour tout réel x , $|e^{ix}| = 1$
 ■ Le nombre complexe z non nul, d'argument θ , s'écrit : $z = |z| e^{i\theta}$.

p. 20 | ■ $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ ■ $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1} = \overline{(e^{i\theta})}$ ■ $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$
 ■ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ■ $e^{i\pi} = -1$ ■ $e^{2i\pi} = 1$

p. 21 | **Formule de Moivre :** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

p. 22

Formules d'Euler ■ $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ ■ $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

3. Interprétation géométrique de $z \mapsto az$, $|a| = 1$

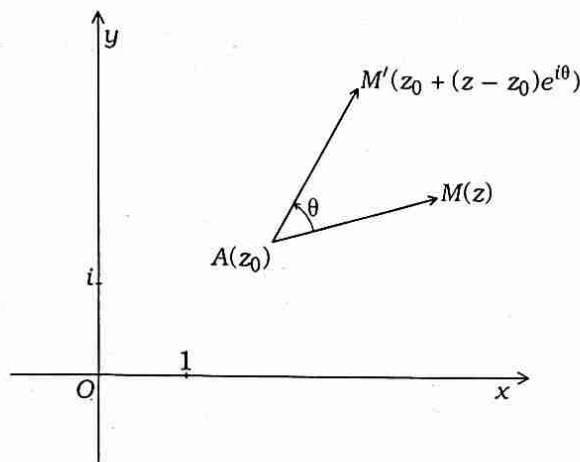
Le cas général $z \mapsto az$, avec a quelconque, sera étudié dans le chapitre 7 : Similitudes.

p. 23

Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $a = e^{i\theta}$.
Pour tout point M d'affixe z , l'image de M , par la rotation de centre O et d'angle θ , a pour affixe $z e^{i\theta}$.

Rotation de centre A :

Le point A ayant pour affixe z_0 , l'image M' de M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle θ , a pour affixe $z_0 + (z - z_0) e^{i\theta}$.



V - Equations du second degré

Théorème :

t. 2

Tout nombre complexe non nul z admet deux racines carrées, solutions de l'équation : $Z \in \mathbb{C}, Z^2 = z$.

Si $z = r e^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, ses racines carrées sont : ■ $\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et ■ $-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Remarque

- Le nombre complexe 0 admet 0 pour seule racine carrée.
- En dehors du cas où z est un **réel positif**, on n'utilisera jamais le symbole radical pour la notation de l'une ou de l'autre des racines carrées de z .

Propriété :

p. 24

Si p est un nombre réel positif, ses racines carrées sont $\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$.
Si r est un nombre réel négatif, ses racines carrées sont $i\sqrt{-r}$ et $-i\sqrt{-r}$.

Théorème :

t. 3

Soit a, b, c trois nombres **réels**, $a \neq 0$.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation $E : z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = 0$ est un nombre réel.

- $\Delta \geq 0$ Les solutions de E sont les nombres réels $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ (résultat familier).
- $\Delta < 0$ Les solutions de E sont les nombres complexes conjugués $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Propriétés :

p. 25 Soit z_1 et z_2 les deux racines de l'équation $E : z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = 0$, a, b, c réels, $a \neq 0$, alors :

$$\blacksquare \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \blacksquare \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

p. 26 Avec $b = 2b'$ (et dans le cas où le nombre b' est simple), on utilise le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$.

$$\blacksquare \quad \Delta' \geq 0 \quad \text{les racines de } E \text{ sont } \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ et } \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$\blacksquare \quad \Delta' < 0 \quad \text{les racines de } E \text{ sont } \frac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a} \text{ et } \frac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

Thème d'exercices - MéthodeRecherche algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, a et b réels.

■ On cherche $Z = x + iy$, x et y réels, tel que $Z^2 = z$. Cela s'écrit :

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 - y^2 = a \quad (\text{parties réelles de } Z^2 \text{ et } z) \\ (3) & 2xy = b \quad (\text{parties imaginaires de } Z^2 \text{ et } z) \\ (2) & x^2 + y^2 = |z| \quad (\text{modules de } Z^2 \text{ et } z) \end{array}$$

■ De (1) et (2), on déduit :
$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|z| + a) \\ y^2 = \frac{1}{2}(|z| - a) \end{cases} \quad \text{Ce qui donne } |x| \text{ et } |y|.$$

(3) indique si x et y sont de même signe ou de signes contraires (suivant le signe du réel b).

VI - TrigonométrieA. Formulaires1. Valeurs utilesFormulaire :

f. 2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cotan \theta$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

2. Principales relationsNotation :

n. 1 La notation $\theta_1 = \theta_2 [\alpha]$ signifie que $\theta_1 = \theta_2 + k \alpha$, où k est un entier relatif.

Formulaires :

f. 3 Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Pour tout $\theta \neq 0 [\pi]$, $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.
 Pour tout $\theta \neq 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$, $\tan \theta = \frac{1}{\cotan \theta}$ et $\cotan \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

f. 4 Pour tout θ , $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ Pour tout $\theta \neq 0 [\pi]$, $1 + \cotan^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

f. 5

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cotan(-\theta) = -\cotan \theta$
$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$	$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$	$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$	$\cotan(\theta + \pi) = \cotan \theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\cotan(\pi - \theta) = -\cotan \theta$
$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$	$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$	$\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cotan \theta$	$\cotan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\tan \theta$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cotan \theta$	$\cotan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$

3. Formules d'addition

Formulaires :

f. 6

$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$	$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'$
$\sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$	$\sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$
$\tan(\theta + \theta') = \frac{\tan \theta + \tan \theta'}{1 - \tan \theta \tan \theta'}$	$\tan(\theta - \theta') = \frac{\tan \theta - \tan \theta'}{1 + \tan \theta \tan \theta'}$

f. 7

$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$	

4. Equations trigonométriques

Formulaires :

f. 8 Etant donné α réel, les solutions de l'équation :

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sin \alpha$ sont les réels $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos \alpha$ sont les réels $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

f. 9 Etant donné α réel, différent de $\frac{\pi}{2} [\pi]$, les solutions de l'équation :

$x \in \mathbb{R}$, $\tan x = \tan \alpha$ sont les réels $\alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. Transformations usuelles

1) Transformation de somme en produit

Règles :

- r. 1 | Etant donné p et q réels, $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
 $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
- r. 2 | Etant donné α réel, $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

2) Linéarisation

Règle :

- r. 3 | Etant donné θ et θ' réels,
- $\sin \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \theta') + \sin(\theta - \theta')]$
 - $\sin \theta \sin \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta')]$
 - $\cos \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \theta') + \cos(\theta + \theta')]$

B. Tangente de l'angle moitié

Règles :

- r. 4 | Pour tout $\alpha \neq \pi \pmod{2\pi}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, en posant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, $\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$
- r. 5 | Pour tout $\alpha \neq \pi \pmod{2\pi}$, en posant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

C. Thèmes d'exercices – Méthodes

Utilisation de la formule de Moivre

Objectif Exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ à l'aide de $\cos \theta$ ou $\sin \theta$.

Méthode

- $\cos n\theta$ est la partie réelle de $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ c'est-à-dire de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$.
- de même $\sin n\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$
- On développe $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ suivant la formule du binôme de Newton.
- Remarque : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ s'applique lorsque a ou b sont dans $\mathbb{C}$.

Utilisation des formules d'Euler

Objectif Exprimer $(\cos \theta)^n$ ou $(\sin \theta)^n$, ou leur produit, à l'aide des cosinus ou sinus de multiples entiers de θ . Cela s'utilise en pratique pour n entier naturel et s'appelle une **linéarisation** de produits trigonométriques.

Méthode ▪ $(\cos \theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ ▪ $(\sin \theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

- On développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ ou $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n$ suivant la formule du binôme de Newton.
- Remarque : Cette méthode permet de traiter algébriquement des problèmes trigonométriques. C'est un autre aspect du calcul trigonométrique qui, par ailleurs, peut se traiter par une connaissance claire des formules d'addition et de leurs conséquences immédiates.

VII - Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Définition :

- d. 11 Soit z un nombre complexe et n un entier naturel, $n \geq 2$.
Les **racines $n^{\text{ièmes}}$** de z sont les nombres complexes Z tels que $Z^n = z$.

Remarque

- 0 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de 0.
- Les racines carrées de -1 sont i et $-i$.

Théorèmes :

- t. 4 $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: z admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$
En écrivant $z = |z| e^{i\theta}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ sont : $Z_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right)}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Remarque

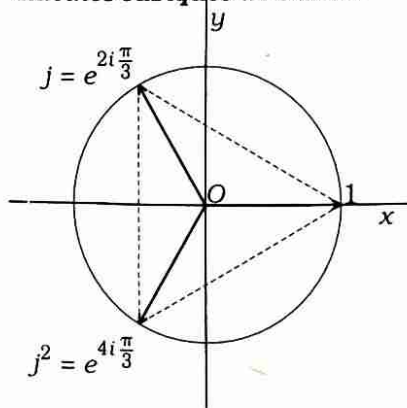
- Le symbole $\sqrt[n]{}$ s'applique exclusivement à un nombre réel positif, et ne doit **jamais** être utilisé pour une racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non réel positif.
- Les racines $4^{\text{ièmes}}$ de 1 sont $1, i, -1$ et $-i$.

- t. 5 Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.
Leurs images, dans le plan complexe, sont les sommets d'un polygone régulier, à n côtés, inscrits dans le cercle trigonométrique et dont un sommet est l'image de 1.

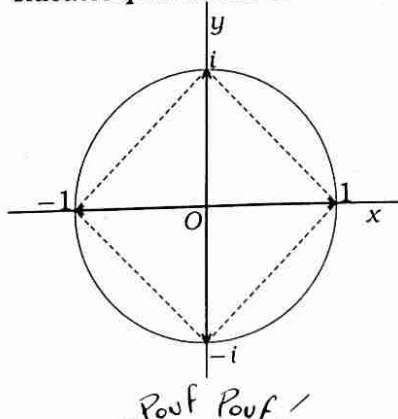
Propriétés :

- p. 27 Soit $Z \in \mathbb{U}_n$ alors $\bar{Z} = \frac{1}{Z} \in \mathbb{U}_n$.
Soit Z et Z' éléments de $\mathbb{U}_n$, alors ZZ' est dans $\mathbb{U}_n$.
- p. 28 Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$.
- p. 29 Soit $z \in \mathbb{C}$ et Z_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de z .
On obtient toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z en multipliant Z_0 par chacun des éléments de $\mathbb{U}_n$.
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z , $z \neq 0$, ont pour images les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{|z|}$ et de centre O .

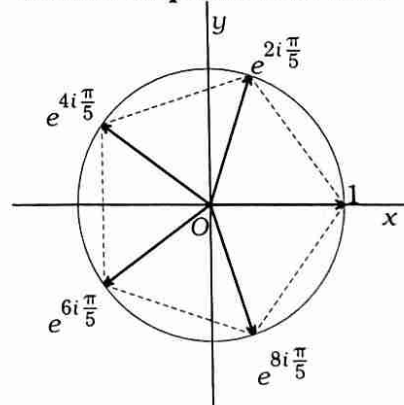
Racines cubiques de l'unité



Racines quatrièmes de l'unité



Racines cinquièmes de l'unité



Exercices résolus

Pour les applications géométriques, le plan est supposé rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Forme algébrique - Conjugué - Module

EX 1

Déterminer $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\frac{3z+1}{z-1}$ soit réel.

$\frac{3z+1}{z-1}$ est réel si et seulement si $\frac{3z+1}{z-1} = \frac{3\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$.
 C'est-à-dire $3z\bar{z} - 3z + \bar{z} - 1 = 3z\bar{z} - 3\bar{z} + z - 1$ donc $z = \bar{z}$.
 Les solutions sont donc les nombres réels autres que 1.

c'est-à-dire z réel

EX 2

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $z - 2\bar{z} = 2i$.

On écrit $z = a + ib$ alors $z - 2\bar{z} = a + ib - 2(a - ib) = -a + 3ib$

donc $z - 2\bar{z} = 2i$ donne $a = 0$, $b = \frac{2}{3}$

c'est-à-dire $z = \frac{2i}{3}$.

Autre solution

$z - 2\bar{z}$ est imaginaire pur donc $z - 2\bar{z} + \overline{(z - 2\bar{z})} = 0$.

C'est-à-dire $z - 2\bar{z} + \bar{z} - 2z = 0$ ou $z + \bar{z} = 0$; z est donc imaginaire pur.

On a donc $z - 2\bar{z} = 3z$ et l'équation se lit $3z = 2i$.

c'est-à-dire $z = \frac{2i}{3}$.

$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$2i$ est imaginaire pur.

EX 3

Résoudre $z \in \mathbb{C}$, $z + 2\bar{z} = 6 + i$.

1^{ère} solution

Soit $z = x + iy$, (x et y réels), d'où $z + 2\bar{z} = 3x - iy$

On a donc $z + 2\bar{z} = 6 + i$ si et seulement si $3x - iy = 6 + i$

c'est-à-dire $\begin{cases} 3x = 6 \\ -y = 1 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Il y a donc une solution et une seule : $2 - i$.

2^{ème} solution

On a $z + 2\bar{z} = 6 + i$ si et seulement si $\bar{z} + 2z = 6 - i$

et donc si et seulement si $\begin{cases} z + 2\bar{z} = 6 + i \\ 2z + \bar{z} = 6 - i \end{cases}$

En ajoutant, il vient $3(z + \bar{z}) = 12$, soit $\frac{z + \bar{z}}{2} = 2$,

et en retranchant $z - \bar{z} = -2i$ ou encore $\frac{z - \bar{z}}{2i} = -1$

et donc $z = 2 - i$.

$\bar{z} = x - iy$

$\overline{z + 2\bar{z}} = \bar{z} + 2z$, $\overline{6 + i} = 6 - i$

$\frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z)$

$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$

EX 4

Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z}' + \bar{z}z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \end{aligned}$$

De même, on a $|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$

d'où le résultat $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

car $\bar{z}z'$ est le conjugué de $z\bar{z}'$.

EX 5

Soit u et v deux nombres complexes de module 1 tels que $uv \neq -1$.

- 1) Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.
- 2) Que vaut ce réel quand u et v sont en outre conjugués ?

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{u+v}{1+uv} - \frac{\bar{u}+\bar{v}}{1+\bar{u}\bar{v}} &= \frac{u+v+u\bar{v}\bar{u}+\bar{u}v\bar{v}-\bar{u}-\bar{v}-\bar{u}uv-uv\bar{v}}{|1+uv|^2} \\ &= \frac{u+v+\bar{u}+\bar{v}-\bar{u}-\bar{v}-v-u}{|1+uv|^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

On peut aussi noter que $\frac{1}{u} = \bar{u}$, $\frac{1}{v} = \bar{v}$

$$\text{et donc } \frac{u+v}{1+uv} = \frac{\frac{1}{\bar{v}} + \frac{1}{\bar{u}}}{\frac{1}{\bar{u}\bar{v}} + 1} = \frac{\bar{v} + \bar{u}}{\bar{u}\bar{v} + 1} \quad \text{et } \frac{u+v}{1+uv} \text{ est réel}$$

2) Si $v = \bar{u}$, on a $1+uv = 1+u\bar{u} = 2$, et $u+v = u+\bar{u} = 2\operatorname{Re}(u)$

d'où $\frac{u+v}{1+uv} = \operatorname{Re}(u)$.

on compare $\frac{u+v}{1+uv}$ et son conjugué

car $u\bar{u} = 1$, $v\bar{v} = 1$

car égal à son conjugué

u et v ayant pour module 1

en divisant par uv

car égal à son conjugué

qui est réel

EX 6

Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ une famille de n nombres complexes deux à deux distincts et tous différents de 0.

On pose $a_k = \frac{z_k}{|z_k|}$ pour $1 \leq k \leq n$, et on suppose que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

1) Montrer que $\sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z - z_k)$ est un réel négatif pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z - z_k|$.

1) Avec $\bar{a}_k(z - z_k) = \bar{a}_k z - \bar{a}_k z_k = \bar{a}_k z - |z_k|$,

$$\text{il vient } \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z - z_k) = z \left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \right) - \sum_{k=1}^n |z_k| = - \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Par suite, on a $\sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z - z_k) < 0$

$$2) \text{ On a } \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z_k - z) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z_k - z) = \left| \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z_k - z) \right|$$

avec la définition de a_k

puisque $\sum_{k=1}^n \bar{a}_k = 0$

tous les $|z_k|$ sont strictement positifs

calcul précédent et $\sum_{k=1}^n \bar{a}_k(z_k - z) > 0$

Avec $\left| \sum_{k=1}^n \overline{a_k}(z_k - z) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\overline{a_k}(z_k - z)|$

et $|a_k| = 1$, il vient $\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z|$

majoration usuelle, inégalité triangulaire

Représentation géométrique

EX 7

Interpréter géométriquement l'égalité $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (voir exercice 4).

Soit A et B les points d'affixe z et z'.

On construit C : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

$$z + z' = \text{aff}(C) = \text{aff}(\overrightarrow{OC})$$

$$|z + z'| = OC$$

$$|z| = OA = BC$$

$$z - z' = \text{aff}(\overrightarrow{BA})$$

$$|z - z'| = AB$$

$$|z'| = OB = AC$$

$|z + z'|^2 + |z - z'|^2$ est la somme des carrés des diagonales de OACB ;

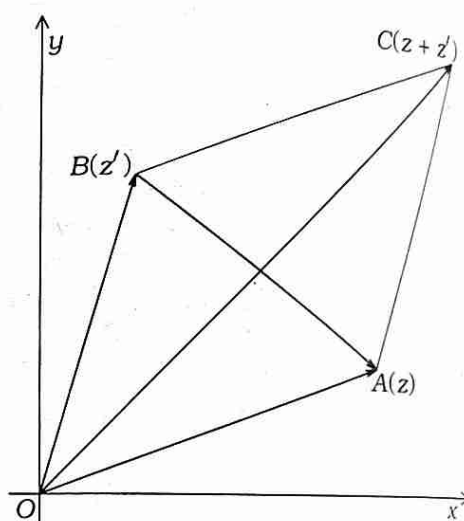
$2(|z|^2 + |z'|^2)$ est la somme des carrés des côtés.

Conclusion

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

$$OC^2 + AB^2 = OB^2 + BC^2 + CA^2 + AO^2$$

OACB est un parallélogramme



EX 8

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$, d'affixe z, tels que $\frac{3z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

$$\frac{3z+1}{z-1} \text{ est imaginaire pur lorsque } z \neq 1 \text{ et } \frac{3z+1}{z-1} + \frac{3\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire } 3z\bar{z} + \bar{z} - 3z - 1 + 3z\bar{z} + z - 3\bar{z} - 1 = 0$$

$$\text{ou encore } 6z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 2 = 0 \text{ soit } |z|^2 - \frac{2}{3}\text{Re}(z) - \frac{1}{3} = 0$$

Cette condition s'écrit :

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \text{ ou } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}.$$

On reconnaît le cercle de centre $\Omega \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

De cet ensemble, il faut éliminer le point d'affixe 1, c'est-à-dire $I(1, 0)$, qui fait effectivement partie du cercle $\left(\Omega, \frac{2}{3}\right)$.

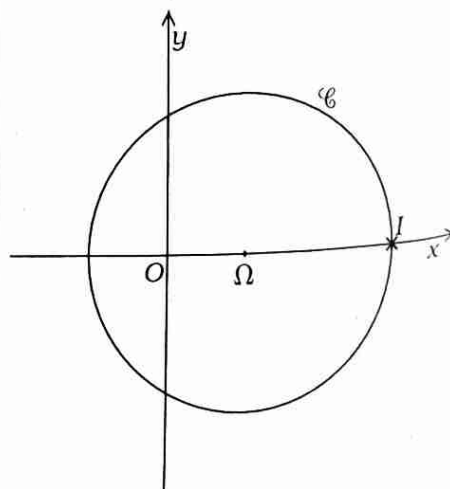
En conclusion, l'ensemble demandé est $\mathcal{C} \left(\Omega, \frac{2}{3}\right) \setminus \{I\}$.

$$z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$$

et toujours $z \neq 1$

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$x = \text{Re}(z), \quad y = \text{Im}(z)$$



AK 3

Remarque On a $|z - a|^2 = |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{a}z) + |a|^2$.

Donc, pour a réel :

$$|z - a|^2 = |z|^2 - 2a \operatorname{Re}(z) + a^2, \quad |z - a|^2 - a^2 = |z|^2 - 2a \operatorname{Re}(z).$$

On a donc dans cet exemple $|z|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z) - \frac{1}{3} = \left| z - \frac{1}{3} \right|^2 - \frac{4}{9}$.

En conséquence :

$$|z|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z) - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{équivalent à} \quad \left| z - \frac{1}{3} \right|^2 = \frac{4}{9} \quad \text{ou} \quad \left| z - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3}.$$

Ce qui permet de retrouver le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) \\ &= z\bar{z} - (z\bar{a} + a\bar{z}) + a\bar{a} \end{aligned}$$

$$|z|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z) - \frac{1}{3} = \left| z - \frac{1}{3} \right|^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$$

sans avoir à utiliser les coordonnées de M

EX 9

On considère les nombres complexes : $z_1 = x - 4 + i(y + 5)$ et $z_2 = x + 4 + i(1 - y)$ où x et y sont des nombres réels.

Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 1) Pour quel point M a-t-on $z_1 = 3z_2$?
- 2) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $z_1 - z_2$ soit un nombre réel.
- 3) On appelle A le point d'affixe $-2i$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - (a) $z_1 z_2$ est imaginaire pur et
 - (b) $|z + 2i| = 5$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $z_1 z_2$ soit un imaginaire pur.

1) $z_1 = 3z_2$ équivaut à $x - 4 + i(y + 5) = 3(x + 4) + 3i(1 - y)$

soit $\begin{cases} x - 4 = 3(x + 4) \\ y + 5 = 3(1 - y) \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2x = -16 \\ 4y = -2 \end{cases}$

L'unique point tel que $z_1 = 3z_2$ est donc $M\left(-8, -\frac{1}{2}\right)$

2) $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 0$

soit $2y + 4 = 0$ ou encore $y = -2$.

L'ensemble des points M tels que $z_1 - z_2$ soit réel est donc la droite $\mathcal{D} : y = -2$

3) $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$

On en déduit que $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$

soit $x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 21 = 0$

soit $\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 5$

soit $|x + (y + 2)i| = 5$

soit $|z + 2i| = 5$

Or, $|z + 2i| = |z - (-2i)| = AM$

donc $z_1 z_2$ est imaginaire pur si et seulement si $AM = 5$ c'est-à-dire M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 5.

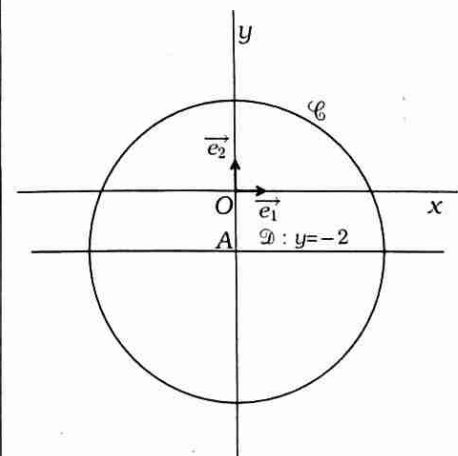
car deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

$$z_1 - z_2 = -8 + i(2y + 4)$$

Or $\operatorname{Re}(z_1 z_2)$

$$\begin{aligned} &= (x - 4)(x + 4) - (y + 5)(1 - y) \\ &= x^2 - 16 + y^2 + 4y - 5 \\ &= x^2 + y^2 + 4y - 21 \end{aligned}$$

Représentation graphique



EX 10

Déterminer l'ensemble des points M , d'affixe z , tel que $z + \bar{z} = |z|$.

Soit $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. $z + \bar{z} = 2x$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

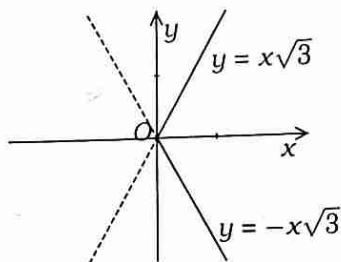
$z + \bar{z} = |z|$ se lit donc :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit encore } \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{3} - y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{3} + y = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points M cherché est donc la réunion des demi-droites :

$$x\sqrt{3} - y = 0, \text{ et } x\sqrt{3} + y = 0, \text{ avec } x \geq 0.$$



$$2x = |z| \text{ donne } x \geq 0.$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x\sqrt{3} - y)(x\sqrt{3} + y) = 0 \end{cases}$$

Ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

EX 11

1) Soit : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ A, M_0, M'_0 les points d'affixes $1, z_0 + 1, z_0^2 + 2$.

Montrer que A, M_0 et M'_0 sont alignés.

2) Déterminer l'ensemble des points P d'affixe z tel que les points $A(1), M(z + 1), M'(z^2 + 2)$ soient alignés.

1) $\overrightarrow{AM_0}$ a pour affixe z_0 , $\overrightarrow{AM'_0}$ a pour affixe $z_0^2 + 1$.

A, M_0, M'_0 sont alignés si et seulement si il existe λ réel tel que $\overrightarrow{AM'_0} = \lambda \overrightarrow{AM_0}$

et donc si et seulement si le rapport $\frac{z_0^2 + 1}{z_0}$ est réel,

c'est-à-dire lorsque $z_0 + \frac{1}{z_0}$ est réel.

$$\text{Or, } |z_0| = 1 \text{ et donc } \frac{1}{z_0} = \bar{z}_0$$

$$z_0 + \frac{1}{z_0} = z_0 + \bar{z}_0 = 2 \operatorname{Re}(z_0) \text{ est bien réel, donc } A, M_0 \text{ et } M'_0 \text{ sont alignés.}$$

2) L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $P(z)$ tel que $A(1), M(z + 1), M'(z^2 + 1)$ soient alignés contient $P(z_0)$

La même démarche que dans 1) montre que A, M, M' sont alignés

si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est réel ou si $z = 0$.

$$\text{Pour } z \neq 0, \quad z + \frac{1}{z} \text{ est réel si et seulement si } z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\text{donc si et seulement si } (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ demandé est donc la réunion de la droite réelle (axe des abscisses) et du cercle unité centré à l'origine des axes.

$$\operatorname{aff}(\overrightarrow{AM_0}) = \operatorname{aff}(M_0) - \operatorname{aff}(A)$$

$$z_0 \neq 0$$

$$|-1 + i| = \sqrt{2}, \quad \left| \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}$$

question précédente

si $z = 0, A = M$ et donc A, M, M' sont alignés

propriétés 1 et 2

$$z + \frac{1}{z} - \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} = (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{z\bar{z}} \right)$$

c'est-à-dire z réel ou z de module 1.

EX 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M d'affixe z tels que les points A d'affixe 1, M et M' d'affixe z^3 soient alignés.

- 1) Remarquons d'abord que si deux des points sont confondus alors ces points A, M, M' sont alignés. Les points M correspondant à cette situation font donc partie de l'ensemble cherché.

- $M = A$ équivaut à $z = 1$
- $M' = A$ équivaut à $z^3 = 1$ c'est-à-dire $z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2$.
- $M' = M$ équivaut à $z^3 = z$ c'est-à-dire $z(z^2 - 1) = 0$ donc $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}$ contient les points O, A, A', J et J' d'affixes respectives $0, 1, -1, j, -j$.

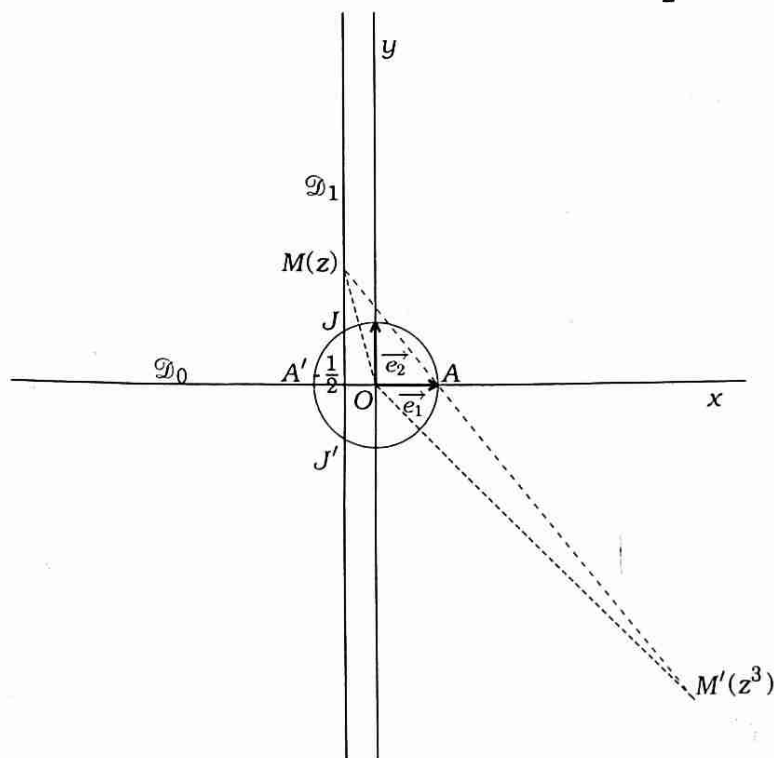
- 2) Pour M distinct de O, A, A', J ou J' , les points A, M, M' sont deux à deux distincts, et sont donc alignés si et seulement si $\frac{z^3 - 1}{z - 1}$ est réel.

C'est-à-dire si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

Pour $z = x + iy$ avec x et y réels, on a : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ donc $z^2 + z + 1$ est réel si et seulement si $y(2x + 1) = 0$

c'est-à-dire $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

- 3) En remarquant que les points J et J' sont sur la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et que les points O, A, A' sont sur la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire le support de l'axe $(O, \vec{e}_1)$), on conclut finalement que l'ensemble cherché est la réunion des droites $\mathcal{D}_1$ ($x = -\frac{1}{2}$) et $\mathcal{D}_0$ ($y = 0$).



Soit M_1, M_2, M_3 trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 .

Ces trois points sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0 \text{ } [\pi]$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\arg \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) = 0 \text{ } [\pi]$$

ou encore si et seulement si

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ est réel.}$$

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

...TROIS ANS QUE JE
REDOUBLE, JAMAIS
VU ÇA !!!...



Module - Argument

EX 13

Déterminer le module et l'argument de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}$.

$$1) \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{donc } \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{17} \right| = (\sqrt{2})^{17} = 256\sqrt{2}$$

2) Soit $\theta_1 = \arg(1+i\sqrt{3})$, on a :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

Soit $\theta_2 = \arg(1-i)$, on a :

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{En conséquence } \arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12},$$

$$\text{et donc } \arg\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}\right] = 17 \frac{7\pi}{12} = 10\pi - \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{En conclusion : } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17} = 256\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

On peut compléter le calcul avec :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

EX 14

Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^{-1} , j^2 et j^3 .

$$1) |j|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{et donc } |j| = 1.$$

$$\text{On a donc } j^{-1} = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \text{ Soit } \theta = \arg(j), \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{on a donc } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$|j^2| = |j|^2 = 1$$

$$\arg(j^2) = 2 \arg(j) = \frac{4\pi}{3} \quad \text{à } 2\pi \text{ près.}$$

$$\text{On a donc } j^2 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{C'est-à-dire } j^2 = \bar{j}.$$

$$|1+i\sqrt{3}|^2 = 1+3=4$$

$$|1-i|^2 = 1+1=2$$

$$|z^{17}| = |z|^{17}$$

à 2π près

à 2π près

$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg z_2 - \arg z_1$$

$$\arg z^n = n \arg z$$

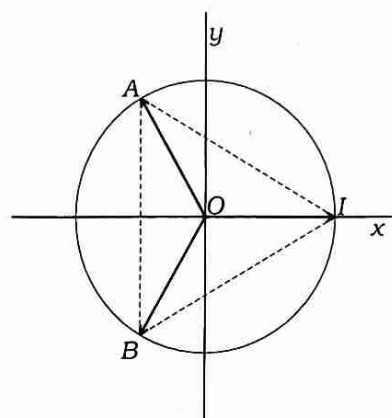
propriété 3

toujours à 2π près

$$\text{donc aussi } \arg(j^2) = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

3) On a $j^3 = j \times j^2 = j \times \bar{j}$
et $j^3 = |j|^3 = 1$

I , (d'affixe 1), A , (d'affixe j), B , (d'affixe j^2 ou $\bar{j}$), sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$.



EX 15

Calculer le module et l'argument de :

1) $\frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$
2) $\frac{(1 - i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^4}$

1) $\begin{aligned} |5 + 11i\sqrt{3}|^2 &= 25 + 363 = 388 \\ |7 - 4i\sqrt{3}|^2 &= 49 + 48 = 97 \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \left| \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} \right|^2 = 4$

$$\begin{aligned} \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} &= \frac{(5 + 11i\sqrt{3})(7 + 4i\sqrt{3})}{7^2 + (4\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-97 + 97i\sqrt{3}}{97} \\ &= -1 + i\sqrt{3} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2e^{2i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Le module est 2 et l'argument $\frac{2\pi}{3}$ à 2π près.

2) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1 - i)^3 = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$

$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et donc $(1 - i\sqrt{3})^4 = 16e^{-4i\frac{\pi}{3}}$

En conséquence :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^4} &= \frac{2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}}{16e^{-4i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

Le module est $\frac{\sqrt{2}}{8}$ et l'argument est $\frac{7\pi}{12}$ à 2π près.

$\arg(5 + 11i\sqrt{3})$ a pour cosinus $\frac{5}{\sqrt{388}}$, qui n'est pas usuel.

cela s'arrange bien pour le module, mais pour l'argument, on ne peut raisonnablement pas utiliser les arguments du numérateur et du dénominateur

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|1 - i\sqrt{3}| = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

EX 16

Soit θ un réel, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer le module et l'argument de :

- 1) $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$
- 2) $\frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$

1) On a $1 - i \tan \theta = \overline{1 + i \tan \theta}$

$$\text{d'où } \left| \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right| = \frac{|1 + i \tan \theta|}{|1 - i \tan \theta|} = 1$$

$$\text{et } 1 + i \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta), \quad 1 - i \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\text{d'où } \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = e^{2i\theta}$$

$$\text{On retrouve } \left| \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right| = 1$$

$$\text{et en outre } \arg \left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right) = 2\theta.$$

$$2) \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{(1 - i \tan \theta)(1 + i \tan \theta)} = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$$

Ce qui donne d'après le 1) :

$$\left| \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} \right| = 1, \quad \arg \left(\frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} \right) = 2\theta$$

Complément

$$\frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\text{On a donc : } \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

qui expriment classiquement les cosinus et sinus d'un nombre en fonction de la tangente de la moitié de ce nombre.

EX 17

- 1) Calculer le module et l'argument de $(1 + i)$. En déduire $(1 + i)^8$.
- 2) Calculer $(1 + i)^8$ au moyen de la formule du binôme.
- 3) En déduire les valeurs respectives des sommes : $\binom{0}{8} - \binom{2}{8} + \binom{4}{8} - \binom{6}{8} + \binom{8}{8}$ et $\binom{1}{8} - \binom{3}{8} + \binom{5}{8} - \binom{7}{8}$.
- 4) Vérifier ces résultats en calculant les coefficients $\binom{k}{8}$, $0 \leq k \leq 8$, au moyen du triangle de Pascal.

1) Soit ρ et θ le module et l'argument demandés.

$$\text{On a } \rho^2 = 2, \text{ donc } \rho = \sqrt{2}, \text{ et } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi, on peut écrire : } 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ donc, } (1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i8\frac{\pi}{4}},$$

$$\text{soit } (1 + i)^8 = 16.$$

$$|z| = |\bar{z}|, \quad 1 + i \tan \theta \neq 0$$

$$\text{et } \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 1 \quad (z \neq 0).$$

$$\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}$$

$$x \text{ réel, } |e^{ix}| = 1$$

$$\arg(e^{ix}) = x, \quad (\text{à } 2\pi \text{ près})$$

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$|z| = 1, \quad \alpha = \arg z$$

$$z = x + iy \quad x, y \text{ réels}$$

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\text{avec } t = \tan \frac{x}{2}.$$

Il faut se laisser guider par l'énoncé, la troisième question va tout naturellement se ramener à une identification de parties réelles et imaginaires.

2) On a d'autre part : $(1+i)^8 = \binom{8}{0} + i\binom{8}{1} + i^2\binom{8}{2} + \dots + i^7\binom{8}{7} + i^8\binom{8}{8}$.

ce que l'on peut écrire : $(1+i)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} i^k$

Cette formule s'écrit aussi :

$$(1+i)^8 = \binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} + i(\binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7})$$

D'après le 1), en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 16 \quad \text{et} \quad \binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7} = 0$$

3) Le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre 8 s'écrit :

1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Donc $\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 1 - 28 + 70 - 28 + 1$

et $\binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7} = 8 - 56 + 56 - 8$

soit $\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 16$ et $\binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7} = 0$

Equations du second degré

EX 18

Résoudre l'équation $E \quad z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 6z + 10 = 0$.

- Le discriminant réduit est $\Delta' = 9 - 10 = -1 = (i)^2$.
Les racines de E sont donc $3+i$ et $3-i$.
- On peut aussi remarquer que $z^2 - 6z + 10 = (z-3)^2 + 1$
L'équation se lit donc $(z-3)^2 = -1 = i^2$
On en déduit $z-3 = i$ ou $z-3 = -i$.
soit encore $z = 3+i$ ou $z = 3-i$.

d'après la formule du binôme

compte tenu de : $i^2 = -1, i^4 = 1, i^6 = -1,$
et de : $i^3 = -i, i^5 = i, i^7 = -i,$

c'est-à-dire plus généralement
 $i^{2k} = (-1)^k$, et $i^{2k+1} = (-1)^k i$

voir Tome 1 - Chapitre 1 : Dénombrement

... ET ENCORE,
ON EN EST QU'AU
DÉBUT ...



théorème 3

EX 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

- $2x^2 - 10x + 13 = 0 \quad (E_1)$
- $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = 0 \quad (E_2), \quad \theta \text{ donné dans } \mathbb{R}.$

