

- Cours détaillé
- Série d'exercices
- Correction des séries

NOUVEAU PROGRAMME

MATHS

Deuxième baccalauréat sciences expérimentales

Semestre : 01



Sommaire :

Programme du semestre 01

➤ Chapitre 01 : Continuité d'une fonction	02..... 13
✓ Série d'exercices 01 : Continuité d'une fonction	14.....16
✓ Correction de série 1 : Continuité d'une fonction	17..... 26
➤ Chapitre 02 : Dérivabilité d'une fonction	27.....36
➤ Série d'exercices 02 : Dérivabilité d'une fonction	37.....37
➤ Correction de série 02 : Dérivabilité d'une fonction	38.....43
➤ Chapitre 03 : Etude des fonctions	44 55
➤ Série 03 : Etude des fonctions	56 56
➤ Correction de série 03 : Etude des fonctions	57 64
➤ Chapitre 04 : Limite d'une suite	65 74
➤ Série 04 : Limite d'une suite	75 75
➤ Correction de série 04 : Limite d'une suite	76 88
➤ Chapitre 05 : Primitive d'une fonction	87 89
➤ Série 05 : Primitive d'une fonction	90 90
➤ Correction de série 05 : Primitive d'une fonction	91 91
➤ Chapitre 06 : Fonction logarithme népérienne	92.....102
➤ Série 06 : Fonction logarithme népérienne	103.....104
➤ Correction de série 6 : Fonction logarithme	105 122
➤ Chapitre 07 : Nombre complexe (Partie I)	123.....137
➤ Série 07 : Nombre complexe (Partie I)	138 139
➤ Correction de série 7 : Nombre complexe (Partie I)	140 ... 152

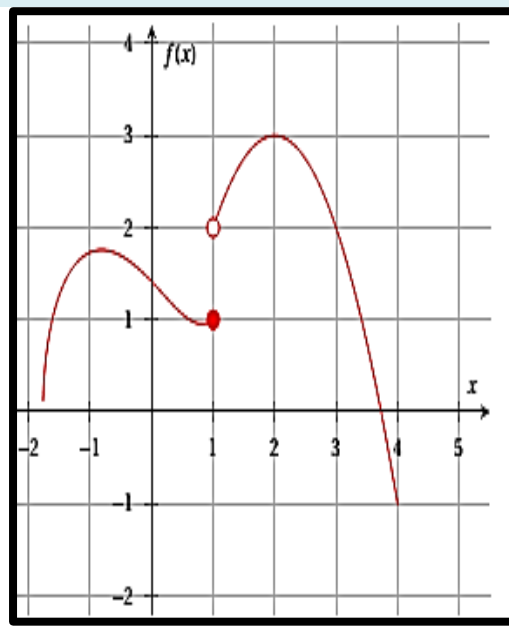
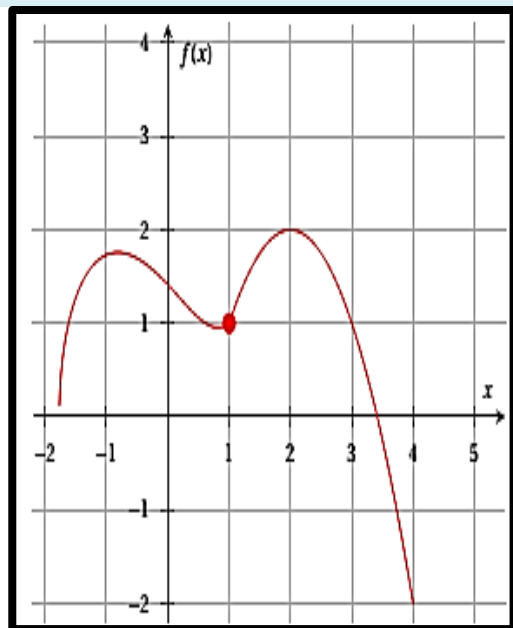
I) Continuité d'une fonction en un point

1. Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

Définition :

f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



La fonction f est continue en 1 f n'est pas continue en 1

EXEMPLES

1) f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $a = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)$$

$$= 1$$

$$= f(2)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en $a = 2$

2) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $a = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) ;$

D'où f est continue en $a = 1$



2. Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

a. Définition :

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; a + r[; r > 0$

f est continue à droite de a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I =]a - r; a]; r > 0$

f est continue à gauche de a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

b. Propriété :

la fonction f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche du point a

Exercice 03

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1 & x \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & ; x < 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$4) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

Solution :

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 = f(1)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1);$$

D'où f est continue à gauche de a = 1

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -(1+x) \\ &= -2 = f(1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

D'où f est continue à droite de a = 1

Conclusion : f est continue en 1

$$\begin{aligned} 2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{\sin(x)}{x} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0) \end{aligned}$$

$$\text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où f est continue à droite de 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x})^2 - \sqrt{3}^2}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + \cos x - 3}{x^2 (\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2 (\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(1 - \cos x)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3})} \quad \text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{2 + \cos 0} + \sqrt{3})} \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)
 \end{aligned}$$

D'où f est continue à gauche de 0

Conclusion : f est continue en 0

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $|f(x)| = \left| \sin x \sin \frac{1}{x} \right| = |\sin x| \left| \sin \frac{1}{x} \right|$
 $\leq |\sin x|$; Car $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$

Donc : $-|\sin x| \leq f(x) \leq |\sin x|$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} -|\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$;

d'où f est continue en 0

On a : $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & ; \text{si } x > 1 \\ -(x - 1) & ; \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 = f(1)$

D'où f est continue à droite de 1

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$

D'où f n'est continue à gauche de 1

Conclusion : f est discontinue en 0

Exercice 04

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue en 1

Solution :

Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$

On pose : $X = x - 1$ donc $x = X + 1$, d'où : $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(X + 1))}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi X + \pi)}{X} \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi X)}{\pi X} \times \pi = -1 \times \pi = -\pi = a
 \end{aligned}$$

**III) Continuité sur un intervalle****1) Définitions**

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

2) Exemple des fonction usuelles continue sur un intervalle**Propriétés :**

- 1) Toute fonction polynomiale est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 2) Les fonctions rationnelles sont continus en tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
- 3) La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur tout intervalles inclus dans $[0; +\infty[$
- 4) La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 5) Les fonctions cos et sin sont continus sur $\mathbb{R}$

3) Opérations sur les fonctions continues**a) Somme -produit-quotient**

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\alpha \cdot v)$ est continue sur I ssi u est continue sur I
- La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = \left(\frac{u}{v}\right)$ est continue sur I ssi u est continue et v continue sur I et $\forall x \in I; v(x) \neq 0$

EXEMPLES

- 1) la fonction $f: x \rightarrow x^3 + x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynome
- 2) Montrons que la fonction $f: x \rightarrow 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$
 - On a la fonction $u: x \rightarrow 2 \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$
 - Et on a la fonction $v: x \rightarrow x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une polynome en particulier sur $[0; +\infty[$;
 - Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$
- 3) Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

1ère méthode :

g est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3 \neq 0$)

2ème méthode :

On a la fonction $u: x \rightarrow x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

- On a la fonction $v: x \rightarrow x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynome); et on a $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 3 \neq 0$
- Donc la fonction $g = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Propriétés :

La fonction $f = \sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I , ssi la fonction u est continue sur I et $\forall x \in I; u(x) \geq 0$

EXEMPLE ;

Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$
 On a la fonction $u: x \rightarrow x + 3$ est continue sur $[0; 1[$ (poly)
 Et on a $\forall x \in [0; 1[, x + 3 \geq 0$;
 Donc $g = \sqrt{u}$ est continue sur $[0; 1[$



Exercic 05

$$f \text{ une fonction Définie par : } \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} ; x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition

2) Montrer que f est continue en 2.

3) Etudier la continuité de f sur D_f

Solution :

1) Considérons la fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ et $v: x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

$$x \in D_u \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ ou } x \neq -1$$

$$\text{Donc } D_u =]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $]2; +\infty[$ est définie sur :

$$D_u \cap]2; +\infty[=]2; +\infty[$$

$$x \in D_v \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } \sqrt{x+2} \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x + 2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_v =]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $] -\infty; 2[$ est définie sur :

$$D_v \cap] -\infty; 2[=]-2; 2[$$

➤ Donc $D_f =]-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$, car $f(2) = \frac{8}{3}$

➤ D'où $D_f =]-2; +\infty[$

2) Montrer que f est continue en 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{x+1} = \frac{8}{3} = f(2) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite de 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2+5-3^2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-2^2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2^2+5}+3)} \\ &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = f(2) \quad ; f \text{ est continue à gauche de 2} \end{aligned}$$

Conclusion : f est continue en 2

➤ 3) La fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur toutes intervalles inclu dans D_u ; car c'est une fonction rationnelle
Donc elle est continue sur $]2; +\infty[$

➤ La fonction $x \rightarrow -3$ est continue sur $] -2; 2[$
La fonction $x \rightarrow x^2 + 5$ est continue sur $] -2; 2[$
Et $\forall x \in] -2; 2[: x^2 + 5 \geq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $] -2; 2[$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5} - 3$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ La fonction $x \rightarrow -2$ est continue sur $] -2; 2[$
La fonction $x \rightarrow x + 2$ est continue sur $] -2; 2[$
Et $\forall x \in] -2; 2[: x + 2 \geq 0$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x+2} - 2$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ En on a : $\forall x \in] -2; 2[: \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ D'où la fonction f est continue sur $] -2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

Et d'après la question 2) on a f est continue en 2

Donc f est continue sur $] -2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\} =]-2; +\infty[$

VI) Image d'un intervalle - Théorème des valeurs intermédiaire

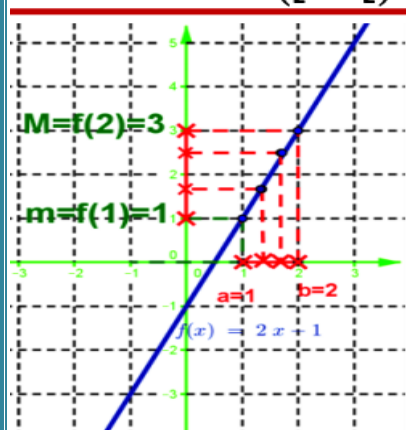
1) Image d'un intervalle par une fonctions continue

Théorème :

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$.

Alors $f([a, b]) = [m, M]$

Exemple 1 : $f([1, 2]) = [1, 3]$



Exemple 2 : $f([a, b]) = [m, M]$

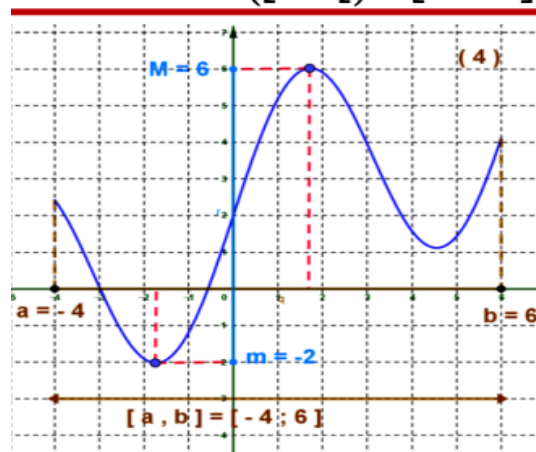


Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

f est strictement croissante sur I	f strictement décroissante
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$f([a; b]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a; b]) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$f(]a; b]) =]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty; b]) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$f(]-\infty; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Exercice 06

1) Soit f une fonction tel que ; $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$

Déterminer $f(]-\infty; +\infty[)$

2) Soit g une fonction tel que ; $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Déterminer $f(]1; +\infty[)$

Solution :

1) Soit f tel que ; $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$; déterminer $f(]-\infty; +\infty[)$

Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$ f est dérivable, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$

➤ Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$

Alors : $f(]-\infty; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[$

Car on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

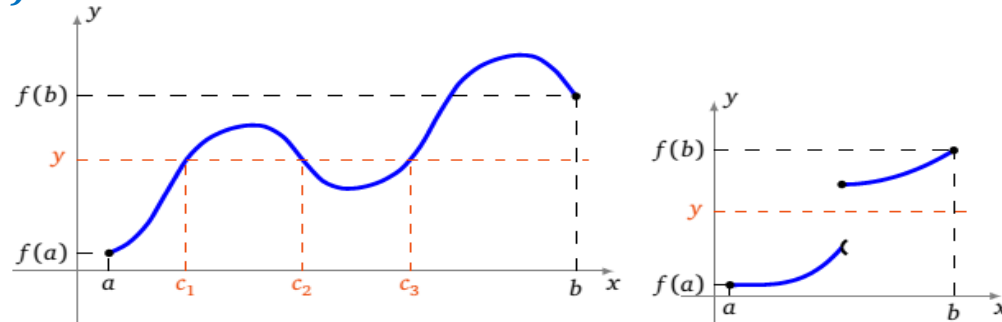
2) On a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$

➤ Donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$f(]1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)[=]2; +\infty[$

2) Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

a) Théorème :



Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe** un réel c dans $[a; b]$ tel que **$f(c) = k$**

En **d'autres termes** : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Démonstrator On a $f([a, b]) = [m, M]$ car f est continue sur $[a, b]$
 Si $f(a) \leq f(b)$ alors $k \in [f(a), f(b)] \subset [m, M]$ donc $k \in f([a, b])$
 Donc $(\exists c \in [a, b]); f(c) = k$

b) Corollaires du Théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 01

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$; alors
 l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]a, b[$
 De plus si f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors α est unique

Exercice 07

1) Montrons que l'équation $x^3 - 5 = 0$ possède au moins une solution dans $[0; 2]$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, 0]$

Solution :

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 5$
 f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynome) et on particulier sur $[0; 2]$
 De plus on a : $f(0) = -5$ et $f(2) = 3$ donc $f(0) \times f(2) < 0$
 D'après **TVI** $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0; 2]$

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2}$
 La fonction f est continue en tant que somme des fonctions continues,
 de plus $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $f(0) \cdot f(-\frac{\pi}{6}) < 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; alors $f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$
 alors f strictement croissante sur $[-\pi/6, 0]$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle

Corollaire 02

Si la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I et $k \in f(I)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans I

Exercice 08

Montrons que l'équation $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Solution :

On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Et de plus on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

Alors $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Exercice 09

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-dessous

Déterminer le nombre de solution

des équations suivantes
 puis encadrer ces solutions.

- $f(x) = 18$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = -3$
- $f(x) = 3$

x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

Solution :

a) L'équation $f(x) = 18$

Possède 1 solution compris dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.

b) L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $] -4 ; -3[$, $] -3 ; -1[$ et $] -1 ; 1[$.

c) L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

d) L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.

3) Principe de la méthode de dichotomie

f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$; l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans $[a, b]$

On peut obtenir des encadrements plus précis en procédant comme suit :

- On coupe $[a, b]$ en deux intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$
- On garde l'intervalle qui contient la solution de l'équation et on le divise en deux intervalles d'égales longueurs, Ainsi de suite jusqu'à obtenir la précision de l'encadrement souhaité.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ et on a $f(0) \cdot f(1) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que

$0 < \alpha < 1$. Déterminons un encadrement de α de longueur 0.25

➤ Le centre de $[0, 1]$ est $\frac{1}{2}$ et on a $f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$. Donc $f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) < 0$

donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 1/2 = 1/2$)

Le centre de $[\frac{1}{2}, 1]$ est $\frac{3}{4}$ et on a $f(\frac{3}{4}) = -\frac{17}{64}$ donc $f(1) \times f(\frac{3}{4}) < 0$

donc $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 3/4 = 1/4 = 0.25$)

A. Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1) Proposition :

Si f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I

Alors la fonction f est une bijection de I vers $J = f(I)$

de plus la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}

définit sur $J = f(I)$, par la relation suivantes

$$y = f^{-1}(x) \text{ et } x \in J \Leftrightarrow f(y) = x \text{ et } y \in I$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par ; $f(x) = x^2$
 f est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$,
donc f est une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ vers J avec

$$J = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$$

Pratiquement pour déterminer l'expression de f^{-1}

Pour déterminer f^{-1} , On suit le schéma suivant :

Soit $x \in J$ cherchons $y \in I$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

Et on cherche le y en fonction de x

c-à-dire on résout l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y

EXEMPLE :

f une fonction définie sur $I = [0; 1]$ par $f(x) = x^2 + 3$

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} ,
définit sur J que l'on déterminera

• f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on particulier sur $[0; 1]$
et on a pour tout $x \in]0; 1[$: $f'(x) = 2x > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J

$$\text{et on a : } J = f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [3; 4]$$

2) Déterminerons f^{-1} la fonction réciproque de f

Soit $x \in J = [3; 4]$; cherchons $y \in I = [0; 1]$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 3 = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x - 3} \text{ (car } y > 0)$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3} \text{ pour tout } x \in [3; 4]$$

Exercice 10

f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \sqrt{x} - 4$

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J (à déterminer)
- 2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Solution :

f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \sqrt{x} - 4$

1) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J (à déterminer)

➤ On a la fonction $u : x \rightarrow x - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$,
en particulier sur $[0; +\infty[$

Et on a la fonction $v : x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$;

Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$

➤ La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, donc f est strictement
croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J et $J = f(I)$

$$J = f(I) = f([0; +\infty[) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-4; +\infty[$$

2) Soit $x \in [-4; +\infty[$ cherchons $y \in [0; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$;
 $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{y} - 4 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2 + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x + 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad ; y \in [0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{17}{4};$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x + \frac{17}{4}} \quad ; \left(\text{car } x + \frac{17}{4} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{17}{4}} \quad ; \left(\text{car } \sqrt{y} + \frac{1}{2} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{17}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{17}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ pour tous } x \in [-4; +\infty[$$

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1}$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un
intervalle J à déterminer.

2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

3) Tracer la courbe de f et f^{-1} dans le même repère orthonormé

2) Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

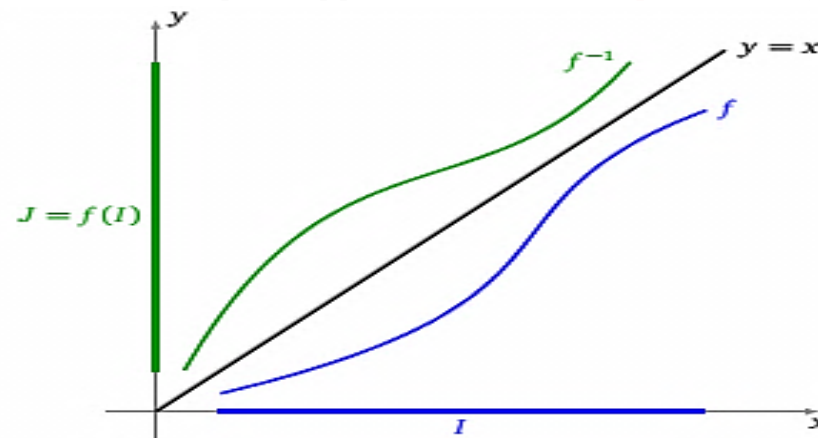
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un I
alors :

$$1) \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

2) f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que f

3) Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère
orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la première
bissectrice

(c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y=x$)



$$4) (\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad (\forall x \in J); f \circ f^{-1}(x) = x$$

B. Fonction racine n-ième

La fonction $x \rightarrow x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$

Cette fonction est appelée la fonction racine n-ième, et elle est notée par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

2. Propriétés du fonction racine n-ième

Soient x et y dans $[0; +\infty[$ et m et n dans $\mathbb{N}^*$:

- | | |
|---|--|
| 1) $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ | 6) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$ |
| 2) $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ et $\sqrt[1]{x} = x$ | 7) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$ |
| 3) $D_{\sqrt[n]{x}} = [0; +\infty[$ | 8) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ | 9) $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$ |
| 5) $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$ | |

EXEMPLES :

1) Comparer les nombres: $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$

$$\text{On a : } \sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 3]{3^3} = \sqrt[12]{27} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^4} = \sqrt[12]{32}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{2}$$

2) Simplifier le nombre $A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}}$

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}} = \sqrt[3 \times 4]{2^8} = \sqrt[3 \times 4]{2^{2 \times 4}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) x^3 = 8$

$$(E) \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc } S = \{-2\}$$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt[5]{(x+2)^2} - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$(E_2) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$$

Solution :

1) L'équation (E_1) est définie si $x+2 \geq 0$

Donc le domaine de définition est : $D_{(E_1)} = [-2; +\infty[$

$$(E_1) \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^2 - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2} = 1 \text{ ou } \sqrt[5]{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1^5 \text{ ou } x+2 = 3^5$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3^5 - 2$$

Les deux solutions sont dans $D_{E_1} = [-2; +\infty[$

$$\text{Donc } S = \{-1; 3^5 - 2\}$$

2) $x \in D_{(E_2)} \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0$ et $x+1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \geq -1$$

Donc le domaine de (E_2) est : $D_{(E_2)} = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$$(E_2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[2]{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[6]{(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Donc } S = \{0\}$$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - 8x$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}$

Solution :

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{9-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

Rappel ; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1-8}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} = \frac{1}{[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2]} \\ &= \frac{1}{[4 + 4 + 4]} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = 0$$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - 8x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3(1 + \frac{x}{x^3})} - 8x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \right) = -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 = 1 - 8 = -7$

5) $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1 = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^3 + (\sqrt[12]{x})^4 + 1}{(\sqrt[12]{x})^4 + (\sqrt[12]{x})^6 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^4 (1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^3}{(\sqrt[12]{x})^4} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^4})}{(\sqrt[12]{x})^6 (1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^4}{(\sqrt[12]{x})^6} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}})}{(\sqrt[12]{x})^2 (1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}})} = 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[12]{x})^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}} = 0$

Exercice 14

f une fct définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} \sqrt[3]{x} + 1$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur J que l'on déterminera

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

Solution :

$$1) f(x) = \sqrt{x} \sqrt[3]{x} + 1 = \sqrt[6]{x^3} \sqrt[6]{x^2} + 1 = \sqrt[6]{x^5} + 1$$

On a la fonction $x \mapsto x^5$ est continue sur $[0; +\infty[$

Et sur $\forall x \in [0; +\infty[: x^5 \geq 0$

Donc la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$

Soient $x, y \in [0; +\infty[$ tel que : $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^5 < y^5 \Rightarrow \sqrt[6]{x^5} < \sqrt[6]{y^5}$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{x^5} + 1 < \sqrt[6]{y^5} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

D'où f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} sur J et on a :

$$J = f(I) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1; +\infty[$$

Soit $x \in [1; +\infty[$ cherchons $y \in [0; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$;

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{y^5} + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{y^5} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[6]{y^5})^6 = (x - 1)^6 ;$$

$$\Leftrightarrow y^5 = (x - 1)^6$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[5]{(x - 1)^6}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[5]{(x - 1)^5(x - 1)} \Leftrightarrow y = (x - 1)\sqrt[5]{x - 1}$$

D'où : $f^{-1}(x) = (x - 1)\sqrt[5]{x - 1}$; pour tous $x \in [1; +\infty[$

2. Puissances rationnelles d'un nombre réel str positif :

Définition :

a un réel strictement positif et $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose $r = \frac{p}{q}$

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriété :

r et r' deux rationnels alors :

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} \quad ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$(ab)^r = a^r \times b^r \quad ; \quad \frac{1}{a^r} = a^{-r} \quad ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

Exercice 15

$$\text{Montrer que } \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$$

Solution :

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} &= \frac{(2 \times 5)^{\frac{5}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(3 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 5^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\ &= 2^{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \times 5^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} \times 3^0 \times 5^{\frac{3}{3}} \\ &= 2^1 \times 1 \times 5^1 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}} &= \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^2}}{2 \times (2^3)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{5}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2 \times 2^2 \times 2^{\frac{5}{4}}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - 1 - \frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{5}{4}} = 2^{\frac{2}{12} + \frac{3}{12} - \frac{12}{12} - \frac{5}{12}} \\ &= 2^{\frac{4+3-12-5}{12}} = 2^{\frac{-10}{12}} = 2^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3 \times 2}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Exercice 01

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

1)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1 & x \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

2)
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & ; x < 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

3)
$$\begin{cases} f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

4)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

Exercice 02

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 1

Exercice 03

1) Montrer que la fonction $f: x \rightarrow 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

2) Montrer que la fonction $g: x \rightarrow \frac{x+1}{x^3+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3) Montrer que la fonction $f: x \rightarrow 2 \sin x \sqrt{x} + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

4) Montrer que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$

Exercice 04

1) f une fonction : $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$, déterminer $f(\mathbb{R})$

2) Soit g une fonction tel que ; $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, déterminer $g(]1; +\infty[)$

Exercice 05

f une fct définie sur $] -2; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & ; -2 < x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Etudier la continuité de f sur $] -2; +\infty[$

Exercice 06

1) Montrons que l'équation $x^3 - 5 = 0$ possède au moins une solution dans $[0; 2]$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Exercice 07

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]0; 2[$.

2) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-contre
Déterminer le nombre de solution des équations suivantes Puis encadrer ces solutions.

x	-4	-3	-1	1
f		3	-1	19

1) $f(x) = 18$; 2) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = -3$; 4) $f(x) = 3$

Exercice 09

f une fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

2) Déterminer la fonction f^{-1} pour tout x dans J

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Soit g la restriction de f sur $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g

c) Résoudre dans $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt[5]{(x+2)^2} - 4\sqrt[5]{(x+2)} + 3 = 0; \quad (E_2) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$$

Exercice 12

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \quad ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - 8x \quad ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2} \quad ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}$$

Exercice 13

$$\text{Montrer que : } \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10 \text{ Et que : } \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} \times \sqrt[4]{32}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$$

Exercice 14

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [1; +\infty[$

a) Étudier le sens des variations de g sur I

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

Exercice 15

Montrer que l'équation (E) : $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} = 5 - x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; 5]$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f(\frac{-1}{4})$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

c) Montrer que $\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}$

d) En déduire que $\alpha = (-2 + \frac{2}{\alpha + 1})^2 - 1$

3) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^{12} - x^8 + 3x^4 + 1 = 0$



Exercice 01

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1 & x \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & ; x < 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$4) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

Solution :

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 = f(1)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1);$$

D'où f est continue à gauche de $a = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -(1+x) = -2 = f(1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) .$$

D'où f est continue à droite de $a = 1$

Conclusion : f est continue en 1

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{\sin(x)}{x} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0) \end{aligned}$$

$$\text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où f est continue à droite de 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x})^2 - \sqrt{3}^2}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+\cos x - 3}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(1-\cos x)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$\text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos 0} + \sqrt{3})} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)$$

D'où f est continue à gauche de 0

Conclusion : f est continue en 0



$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } |f(x)| = \left| \sin x \sin \frac{1}{x} \right| \\ = |\sin x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ \leq |\sin x| \quad ; \text{ Car } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$\text{Donc : } -|\sin x| \leq f(x) \leq |\sin x|$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} -|\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$; d'où f est continue en 0

$$4) \text{ On a : } |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & ; \text{ si } x > 1 \\ -(x - 1) & ; \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 = f(1)$$

D'où f est continue à droite de 1

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$$

D'où f n'est continue à gauche de 1

Conclusion : f est discontinue en 0

Exercice 02

$$f \text{ une fonction définie sur } \mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue en 1

Solution :

Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$

On pose : $X = x - 1$ donc $x = X + 1$,

d'où : $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(X + 1))}{X} \\ = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi X + \pi)}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi X)}{\pi X} \times \pi \\ = -1 \times \pi = -\pi = a$$

Exercice 03

5) Montrer que la fonction $f: x \rightarrow 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

6) Montrer que la fonction $g: x \rightarrow \frac{x+1}{x^3+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

7) Montrer que la fonction $f: x \rightarrow 2 \sin x \sqrt{x} + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

8) Montrer que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$

Solution :

4) Montrons que la fonction $f: x \rightarrow 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

➤ On a la fonction $u: x \rightarrow 2 \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$

➤ Et on a la fonction $v: x \rightarrow x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une polynome en particulier sur $[0; +\infty[$;

➤ Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$

5) Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

1ère méthode :

g est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 3 \neq 0$)

**2ème méthode :**

On a la fonction $u: x \rightarrow x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

➤ On a la fonction $v: x \rightarrow x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynome); et on a $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 3 \neq 0$

➤ Donc la fonction $g = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

6) Montrons que la fonction $f: x \rightarrow 2\sin x \sqrt{x} + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$

➤ On a la fonction $x \rightarrow 2\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$

➤ La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur dans $[0; +\infty[$

➤ Et on a la fonction $x \rightarrow x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une polynome en particulier sur $[0; +\infty[$;

➤ Donc la fonction est continue sur $[0; +\infty[$

7) Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$

On a la fonction $u: x \rightarrow x + 3$ est continue sur $[0; 1[$ (poly)

Et on a $\forall x \in [0; 1[, x + 3 \geq 0$;

Donc $g = \sqrt{u}$ est continue sur $[0; 1[$

Exercice 04

1) f une fonction : $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$, déterminer $f(\mathbb{R})$

2) Soit g une fonction tel que ; $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, déterminer $f(]1; +\infty[)$

Solution :

1) Soit f tel que ; $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$; déterminer $f(]-\infty; +\infty[)$

Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$ f est dérivable, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$

➤ Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$

Alors : $f(]-\infty; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[$

Car on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

2) On a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$

➤ Donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$f(]1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)[=]2; +\infty[$

Exercice 05

f une fonction Définie sur $]-2; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} ; x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $]-2; +\infty[$

Solution :

1) Montrer que f est continue en 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{x+1} \\ &= \frac{8}{3} = f(2) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite de 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + 5 - 3^2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2 - 2^2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2^2+5}+3)}$$

$$= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = f(2) \quad ;$$

Donc f est continue à gauche de 2 ; **Conclusion : f est continue en 2**

2) La fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur toutes intervalles

inclu dans $D_u = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$; car c'est une fonction rationnelle

Donc elle est continue sur $]2; +\infty[$

➤ **La fonction $x \rightarrow -3$ est continue sur $] -2; 2[$**

La fonction $x \rightarrow x^2 + 5$ est continue sur $] -2; 2[$

Et $\forall x \in] -2; 2[: x^2 + 5 \geq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 5}$ est continue sur $] -2; 2[$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 5} - 3$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ **La fonction $x \rightarrow -2$ est continue sur $] -2; 2[$**

La fonction $x \rightarrow x + 2$ est continue sur $] -2; 2[$

Et $\forall x \in] -2; 2[: x + 2 \geq 0$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x+2} - 2$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ **En on a : $\forall x \in] -2; 2[: \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$**

Donc La fonction $x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ **D'où la fonction f est continue sur $] -2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$**

Et d'après la question 2) on a f est continue en 2

Donc f est continue sur $] -2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\} =] -2; +\infty[$

Exercice 06

1) Montrons que l'équation $x^3 - 5 = 0$ possède au moins une solution dans $[0; 2]$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Solution :

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 5$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on particulier sur $[0; 2]$

De plus on a : $f(0) = -5$ et $f(2) = 3$ donc $f(0) \times f(2) < 0$

D'après TVI $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[0; 2]$

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme des fonctions

continues, de plus $f(\frac{-\pi}{6}) = \frac{-\pi}{6}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $f(0) \cdot f(\frac{-\pi}{6}) < 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; alors $f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$

alors f strictement croissante sur $[-\pi/6, 0]$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire , l'équation

$f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle

3) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

• **f est continue sur $\mathbb{R}$**

• **f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :**

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Et de plus on a :

• **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$**

Alors $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$



Exercice 07

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]0; 2[$.

5) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

6) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

Solution :

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ f est dérivable et, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{Et on a : } f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[\\ =]-\infty; +\infty[$$

Donc $0 \in f(\mathbb{R})$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

➤ Vérifions que $-1 < \alpha < 1$

On a : $f(-1) = -9$ et $f(1) = 1$; donc $f(-1) \times f(1) < 0$

Donc $-1 < \alpha < 1$

2) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Soit $x \in [\alpha; +\infty[$

Donc $x \geq \alpha$ et on a la fonction f est str croissante sur $[\alpha; +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Donc $f(x) \geq 0$

Soit $x \in]-\infty; \alpha]$

Donc $x \leq \alpha$ et on a la fonction f est str croissante sur $] -\infty; \alpha]$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Donc $f(x) \leq 0$

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

On a le centre de l'intervalle $]-1; 1[$ est $c = \frac{-1+1}{2} = 0$

on a : $f(c) = f(0) = -4$; et on a : $f(1) = 1$;

donc $f(0) \times f(1) < 0$

Donc $0 < \alpha < 1$ et on a l'amplitude $l = 1 - 0 = 1$

➤ On a le centre de l'intervalle $]0; 1[$ est $c' = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Et on a : $f(c') = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{32}$; et $f(0) = -4$;

donc $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et on a l'amplitude $l = \frac{1}{2} - 0 = 0,5$

D'où la précision souhaitée est obtenue

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-contre

Déterminer le nombre de solution des équations suivantes Puis encadrer ces solutions.

x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

1) $f(x) = 18$; 2) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = -3$; 4) $f(x) = 3$

Solution :

1) L'équation $f(x) = 18$

Possède 1 solution compris dans l'intervalle $]-1; 1[$.

Car donc $0 \in f(]-1; 1[) =]-1; 19[$

2) L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]-4; -3[$, $]-3; -1[$ et $]-1; 1[$.

3) L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

4) L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $]-1; 1[$.



Exercice 09

f une fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

3) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

4) Déterminer la fonction f^{-1}

Solution :

1) la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ (car c'est une polynome)

➤ f est dérivable sur $]1; +\infty[$

et on a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = 2x - 2$

➤ On a $x \in]1; +\infty[$

➤ Donc $2x > 2$

➤ Donc $2x - 2 > 0$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[$: $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Alors la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J

On a : $J = f(I) = f([1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [4; +\infty[$

2) Déterminer la fonction f^{-1} , la fonction réciproque de f

Avec f définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Soit $x \in J = [4; +\infty[$ et $y \in I = [1; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$, on a :
 $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 5 = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y = x - 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = x - 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = x - 4$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x - 4} \quad \text{ou} \quad y - 1 = -\sqrt{x - 4}$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x - 4} \quad (\text{car } y - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x - 4} + 1$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4} + 1$ pour tout $x \in J = [4; +\infty[$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Soit g la restriction de f sur $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g

c) Résoudre dans $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Solution :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{x \times \sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{4x - 1}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$



On a : $2\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1) > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

On dresse le tableau de variation de f

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$	$+\infty$

2) a) Montrons que g la restriction de f sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur J que l'on déterminera ($g(x) = f(x) = x - \sqrt{x}$)

➤ la fonction $x \rightarrow x$ est continue $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$
la fonction $x \rightarrow -\sqrt{x}$ est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Donc la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$
(car elle est somme de deux Fonction continue sur)

➤ D'après 1) on a g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Et on a vu que g est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Alors la fonction g admet une fonction réciproque, g^{-1} . D éfinit sur :

$$\begin{aligned} J &= g(I) = g\left(\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[\right) \\ &= \left[g\left(\frac{1}{4}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right[\\ &= \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[\end{aligned}$$

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g définit sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par : $g(x) = x - \sqrt{x}$

Soit $x \in J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ et $y \in I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y})^2 - 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \frac{1}{2})^2 = x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{y} - \frac{1}{2} = -\sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad (\text{car } \sqrt{y} - \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$$

Donc $g^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$ pour tout $x \in J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

c) Résoudre dans $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

$$g(x) = 6 \Leftrightarrow x = g^{-1}(6)$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\sqrt{6 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$$



Exercice 11

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt[5]{(x+2)^2} - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$(E_2) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$$

Solution :

1) L'équation (E_1) est définie si $x+2 \geq 0$ Donc le domaine de définition est : $D_{(E_1)} = [-2; +\infty[$

$$(E_1) \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^2 - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2} = 1 \text{ ou } \sqrt[5]{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1^5 \text{ ou } x+2 = 3^5$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3^5 - 2$$

Les deux solutions sont dans $D_{E_1} = [-2; +\infty[$ Donc $S = \{-1; 3^5 - 2\}$

$$2) \quad x \in D_{(E_2)} \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \geq -2$$

Donc le domaine de (E_2) est : $D_{(E_2)} = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

$$(E_2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[6]{(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc $S = \{0\}$

Exercice 12

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} ; 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - 8x ; 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}$$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{9-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\text{Rappel ; } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1-8}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} = \frac{1}{[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2]} \\ &= \frac{1}{[4+4+4]} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\begin{aligned}
 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - 8x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{x}{x^3}\right)} - 8x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \right) = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 = 1 - 8 = -7$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1 = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^3 + (\sqrt[12]{x})^4 + 1}{(\sqrt[12]{x})^4 + (\sqrt[12]{x})^6 + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^4 \left(1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^3}{(\sqrt[12]{x})^4} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^4}\right)}{(\sqrt[12]{x})^6 \left(1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^4}{(\sqrt[12]{x})^6} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^6}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}}\right)}{(\sqrt[12]{x})^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}}\right)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[12]{x})^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}} = 0$$

Exercice 13

Montrer que $\frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10$ et $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[3]{4 \sqrt[4]{32}}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$

Solution :

$$\begin{aligned}
 * \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} &= \frac{(2 \times 5)^{\frac{5}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(3 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\
 &= \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 5^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\
 &= 2^{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} \times 3^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} \times 5^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^0 \times 5^{\frac{3}{3}} \\
 &= 2^1 \times 1 \times 5^1 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[3]{4 \sqrt[4]{32}}} &= \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[8]{2^2}}{2 \times (2^3)^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \times \sqrt[12]{2^5}} \\
 &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{8}}}{2 \times 2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{5}{12}}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{8} - 1 - \frac{3}{6} - \frac{5}{12}} \\
 &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{12}} \\
 &= 2^{\frac{4+3-12-6-5}{12}} \\
 &= 2^{\frac{-16}{12}} = 2^{-\frac{4}{3}} \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}
 \end{aligned}$$



Exercice 14

f une fct définit par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I en utilisant la définition de la monotonie

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

Solution :

1) **Rappel :** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$ avec $a > 0$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$\text{➤ } x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1} = -\infty. \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

2)a) Soient $x, y \in [1; +\infty[$ tel que : $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x^2 - 1 < y^2 - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} < \sqrt[3]{y^2 - 1} \Rightarrow -\sqrt[3]{x^2 - 1} > -\sqrt[3]{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1} > 2 - \sqrt[3]{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow g(x) > g(y)$$

D'où g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

* La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est continue sur $I = [1; +\infty[$

$$\text{Et } \forall x \in [1; +\infty[: x^2 - 1 \geq 0$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $I = [1; +\infty[$

➤ D'où $g: x \mapsto 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ est continue sur $[1; +\infty[$

➤ La fonction est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J

$$J = f([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1) \right[=]-\infty; 2]$$

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

c) Soit $x \in]-\infty; 2]$ cherchons $y \in [1; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{y^2 - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2 - 1} = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y^2 - 1} \right)^2 = (2 - x)^3 ;$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = (2 - x)^3$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (2 - x)^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{(2 - x)^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(2 - x)^3 + 1} \quad ; y \in [1; +\infty[$$

D'où : $g^{-1}(x) = \sqrt{(2 - x)^3 + 1}$; pour tous $x \in]-\infty; 2]$



3)a) Considérons la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$

La fonction g est continue sur $[1; +\infty[$

Et la fonction $x \mapsto -x$ est continue sur $[1; +\infty[$

➤ **D'où la fonction h est continue sur $[1; +\infty[$**

La fonction g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Et la fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

D'où la fonction h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Car c'est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[1; +\infty[$

$$h(1) = g(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$h(2) = g(2) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

➤ **Donc $h(1) \times h(2) < 0$**

D'où l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

C-à-dire que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

On a $1 < \alpha < 2$

Le centre de l'intervalle $]1; 2[$ est $c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{on a } h(c) = h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6};$$

$$\text{Et on a } h(1) = -1$$

$$\text{Donc } h\left(\frac{3}{2}\right) \times h(1) < 0$$

$$\text{Donc } 1 < \alpha < \frac{3}{2} \text{ et on a l'amplitude } l = \frac{3}{2} - 1 = 0,$$

Exercice 15

Montrer que l'équation (E): $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} = 5 - x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; 5]$

Solution :

On pose pour tout $x \in [1; 5]$: $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} + x - 5$

On a La fonction $x \mapsto x - 1$ est continue et positive sur $[1; 5]$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x-1}$ est continue sur $[1; 5]$

et on a La fonction $x \mapsto x + 2$ est continue et positive sur $[1; 5]$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+2}$ est continue sur $[1; 5]$

et on a La fonction $x \mapsto x - 5$ est continue sur $[1; 5]$

D'où la fonction **f est continue** en tant que somme des fonctions continues sur $[1; 5]$,

Et $f(1) = \sqrt[3]{3} - 4 < 0$ et $f(5) = \sqrt[3]{4} + \sqrt{5} > 0$ donc **$f(1) \cdot f(5) < 0$**

Soient $x, y \in [1; 5]$ tel que : $x < y$

$$\text{On a : } x < y \Rightarrow x - 1 < y - 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} < \sqrt[3]{y-1}$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x-1}$ est strictement croissante sur $[1; 5]$

$$\text{Et on a : } x < y \Rightarrow x + 2 < y + 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2} < \sqrt[3]{y+2}$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+2}$ est strictement croissante sur $[1; 5]$

$$\text{On a : } x < y \Rightarrow x - 5 < y - 5$$

Donc la fonction $x \mapsto x - 5$ est strictement croissante sur $[1; 5]$

D'où f est strictement croissante sur $[1; 5]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; 5]$

**I) DERIVABILITÉ D'UNE FONCTION NUMERIQUE****1. DERIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT****Activité :**

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisses 2

Le réel $\frac{1}{2}$ est appelée **le nombre dérivé en 2**, on le note par **$f'(2)$**

$$\text{Donc : } f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}^2}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \end{aligned}$$

Donc dit que la fonction f n'est pas dérivable à droite de 1

Remarque :

La fonction f est dérivable au point d'abscisses 2 donc elle est dérivable à droite de 2 et dérivable à gauche de 2

a) Définition

Une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a élément de I .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l

$$\text{tel que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \quad \text{ou bien} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a .

Il est noté $f'(a)$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.

Montrons que f est dérivable en 1

1ère méthode :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - (1^2 + 2 \times 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2h + 2 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4 + h \\ &= 4 \end{aligned}$$

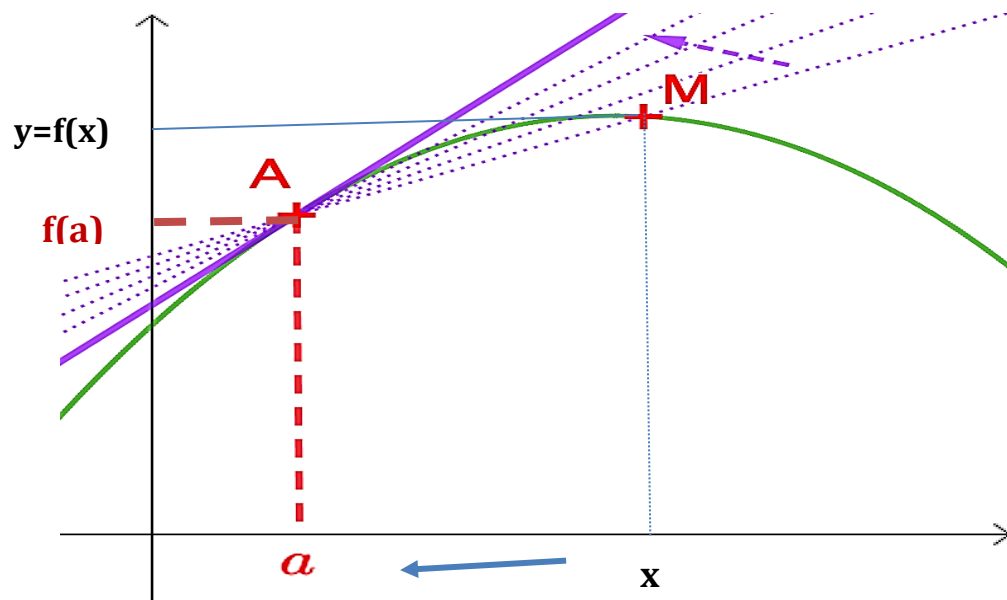
$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$

**b) Interprétation géométrique du nombre dérivée :**

Soit une fonction dérivable au point d'abscisse a

Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.



Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.

Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable au point d'abscisse a

- La tangente à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$
- La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe (Cf), de la fonction f au point d'abscisse a .
- La fonction $x \rightarrow f'(a)(x - a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a
- On écrit alors : $f(x) \cong f'(a)(x - a) + f(a)$ au voisinage de a

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a) Montrons que f est dérivable en 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Le nombre dérivé de f est égale à 2 donc $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$

Une équation de la tangente en 1 est: $y = 2(x - 1) + 1$

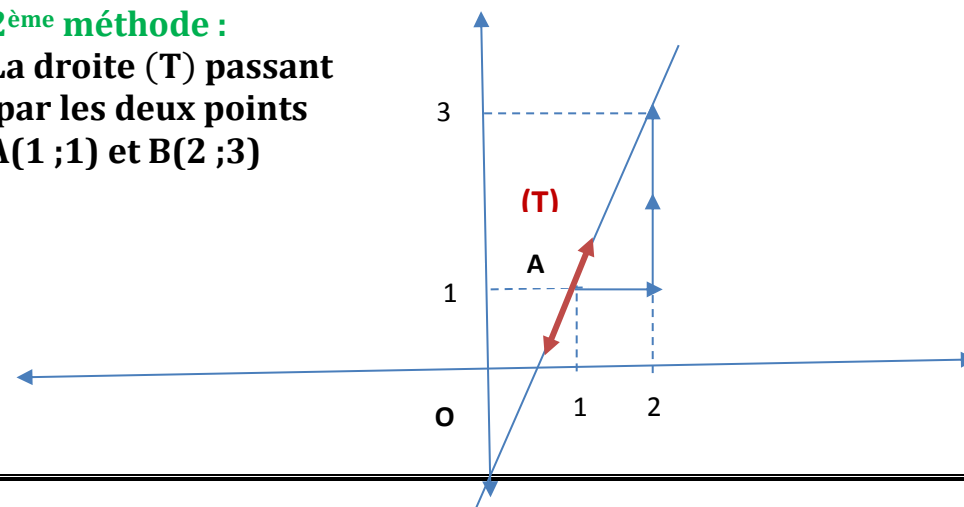
Donc (T) : $y = 2x - 1$

c) Construire la tangente (T) dans un repère orthonormé :

1^{ère} méthode : La droite (T) passant par A(1 ; 1) et un vecteur directeur de la droite (T) est $\vec{u}(1; f'(1))$ donc $\vec{u}(1; 2)$

2^{ème} méthode :

La droite (T) passant par les deux points A(1 ; 1) et B(2 ; 3)





Exercic 01

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

- 1) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$
- 2) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5
- 3) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 5
- 4) Déduire une valeur approchée de $f(5,001)$

Solution :

- 1) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{x^2-6x+5}{x-5} - 4}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{(x-5)(x-1)}{x-5} - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1) - 4}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x - 5} \\ &= 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 5 et $f'(5) = 1$

- 1) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5
- 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

La droite (T) d'équation $y = f'(5)(x - 5) + f(5)$

Et on a $f'(5) = 1$ et $f(5) = 4$

La droite (T) d'équation $y = 1 \times (x - 5) + 4$

Donc : $(T): y = x - 1$

- 4) Donner l'approximation affine de f au voisinage de 5

$f(x) \cong x - 1$ au voisinage de 5

- 5) Déduire une valeur approchée de $f(5,001)$

$$\begin{aligned} f(5,001) &\cong 5,001 - 1 \\ &\cong 5,001 - 1 \\ &\cong 4,001 \end{aligned}$$

2. DÉRIVABILITÉ À DROITE - DÉRIVABILITÉ À GAUCHE

Définition 01

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; a + r[$
On dit que f est dérivable à droite de a , s'il existe un réel l_d , tel que : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l_d$; Le nombre l_d , est appelé le nombre

dérivé de la fonction f à droite en a .

Il est noté $f'_d(a)$

Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$
d'équation : $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ tel que $x > a$

Définition 02

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a - r, a]$
On dit que f est dérivable à gauche de a , s'il existe un réel l_g ,

tel que : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l_g$; Le nombre l_g , est appelé le

nombre dérivé de la fonction f à gauche en a .

Il est noté $f'_g(a)$

Interprétation géométrique :

La courbe (Cf) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$
d'équation : $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ tel que $x < a$

Proposition :

Une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a , avec

$f'_d(a) = f'_g(a)$ et alors : $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$



3) Demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, alors la fonction f **non** dérivable en a

Interprétation géométrique

- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le **haut**
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le **bas**
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le **haut**
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le **bas**

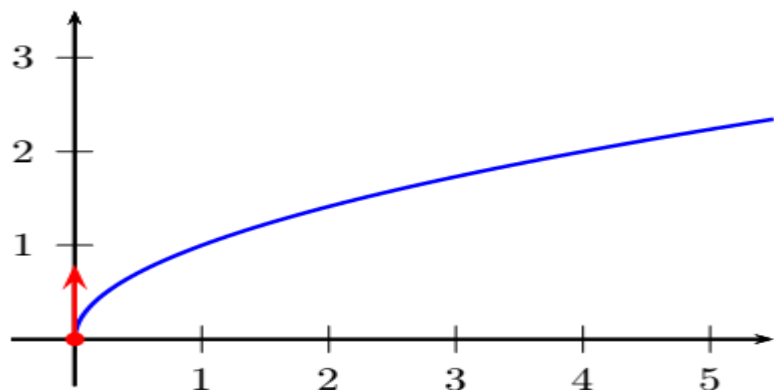
Exemple

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite de 0 car

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Interprétation géométrique

- La courbe (Cf) de f admet au point $O(0; 0)$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le **haut**



Exercice 02

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = x^3 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en $a=1$ puis donner une interprétation géométrique de chaque résultat obtenue

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3 - 2x + 1}{x(x - 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{x(x - 1)} = 1 \end{aligned}$$

D'où la fonction f est dérivable à droite en 1. et $f'_d(1) = 1$

Interprétation géométrique

Donc La courbe représentative de f admet une demi-tangente (T) d'équation $(T): y = f'_d(1)(x - 1) + f(1) ; x > 1$

$$(T): y = x + 1 ; x > 1$$

Dérivabilité à gauche en $a=1$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 2x + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 2x - 1}{(x - 1)} = +\infty \end{aligned}$$

D'où la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Interprétation géométrique

La courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale à gauche en point d'abscisse 1, dirigée vers le bas

Conclusion : la fonction f n'est pas dérivable en $a=1$

**II) Dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle I****1. Définitions :**

- f est dérivable sur l'intervalle ouvert]a; b[ssi f est dérivable en chaque point de l'intervalle]a; b[
- f est dérivable sur]a; b[et dérivable à droite de a et à gauche de b alors f est dérivable sur l'intervalle [a; b]
- si f est dérivable sur l'intervalle I alors la fonction dérivée de f sur I est la fonction définie sur par : $(\forall x \in I); f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2. Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n$ $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = a \times n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[\text{ ou }]-\infty; 0[$
$f(x) = ax^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$f'(x) = a \times n \times x^{n-1}$	$]0; +\infty[\text{ ou }]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. Opérations sur les fonctions dérivables**Proposition 01 :**

f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$; Alors

$$\text{➤ } (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad ; \quad (kf)'(x) = k \times f'(x) ;$$

$$\text{➤ } (f \cdot g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) ;$$

$$(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

$$\text{➤ Si g ne s'annule pas sur I alors : } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\text{➤ } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\text{➤ Si f est strictement positive sur I alors : } (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Exercice 03

Montrer que f est dérivable sur D_f puis calculer $f'(x)$

$$\text{a) } f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2) ; \quad \text{b) } f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} \quad ; \quad \text{d) } f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

Solution

$$\text{a) } f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une polynome

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3$$

$$= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x = 18x^2 - 38x + 10$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1} ; f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ car (c'est une quotient de deux fonction dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \neq 0)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^2 + 1 \rightarrow v'(x) = 2x$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{6(2x) - (6x-5)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 6x^3 - 6x + 5x^2 + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^3 + 17x^2 + 5}{(x^2+1)^2}$$



c) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \rightarrow 3x^2 + 2x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) : 3x^2 + 2x + 1 > 0$

On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$

avec $u(x) = 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 2$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x + 2}{2\sqrt{3x^2 + 2x + 1}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$$

d) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une polynome

On pose : $g(x) = (u(x))^4$

Avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc :

$$g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$$

VI) Application de la fonction dérivée

1) Sens des variations d'une fonction

Proposition

f une fonction dérivable sur un intervalle I

- $(\forall x \in I) ; f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est croissante sur I
- $(\forall x \in I) ; f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est décroissante sur I
- $(\forall x \in I) ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est constante sur I

Exercic 04

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

1) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations

Solution

1) Calculer f' sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

2) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Donc la fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$ et décroissantes sur l'intervalle $[0; 1]$

On dresse le tableau de variations de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 2$	$f(1) = 1$	$+\infty$

Exercic 05

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Étudier les variations de f.

**Solution**

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
2x	-	-	0	+
3x + 1	-	0	+	+
$\frac{2x}{3x+1}$	+	-	0	+

Donc la fonction f est définie sur $D_f =]-\infty ; -\frac{1}{3}[\cup [0 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = +\infty ; \left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^- \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} ; \left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3} \right)$$

2) On pose : $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$

$$u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

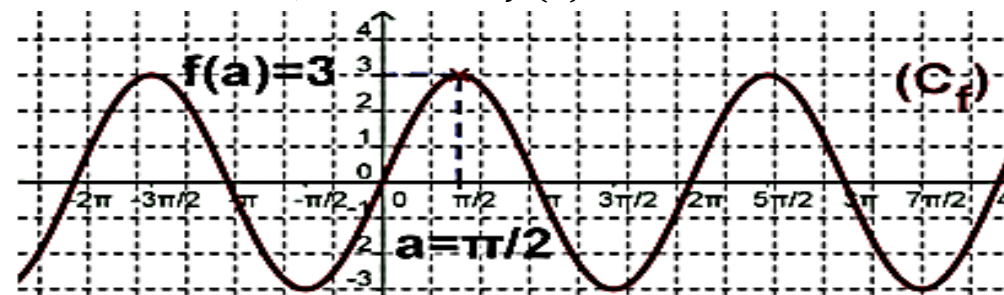
Et donc $f'(x) > 0$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
f'(x)	+	////////////////////	+	
f(x)	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\nearrow +\infty$	////////////////////	0 $\nearrow \sqrt{\frac{2}{3}}$	

2) Extrémums d'une fonction dérivable**Activité :**

La courbe au-dessous présente une fonction f dérivable sur un intervalle I et $a \in I$; Déterminer $f'(a)$

**Proposition**

f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

➤ Si f est dérivable en a et f' n'annule et change de signe en a alors la fonction f admet un extrémum en a

➤ Si f est dérivable en a et f admet un extrémum en a alors $f'(a) = 0$

Remarque

La réciproque est fautive : si

$f'(a) = 0$ n'implique pas que f admet un extrémum en a

Exemple

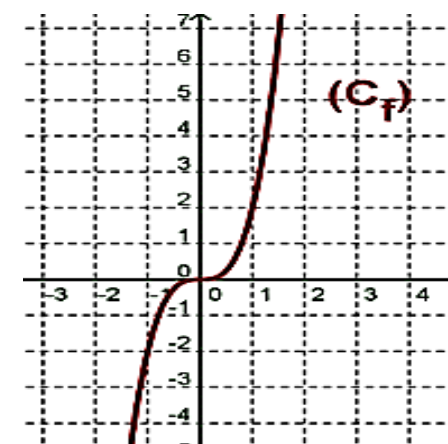
On considère la fonction f définie

par : $f(x) = 2x^3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = 6x^2 \text{ donc } f'(0) = 0$$

Mais f n'admet pas un extrémum en 0





Exercic 06

f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

- 1) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0
b) Donner une interprétation géométrique
- 3) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f sur D_f
b) Dresser le tableau de variations de f
c) Déterminer les extremus de f

Solution

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$\begin{aligned} 2)a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

b) Interprétation géométrique

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le bas

3)a) Soit $x \in]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (Somme de deux fonctions)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

Etudier les variations de f

Soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

Donc $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]0; +\infty[$ est le signe de $x - 1$ qui s'annule en 1

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

Donc la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$

et décroissante sur $]0; 1[$

b) On dresse le tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	$+\infty$

c) Déterminer les extremus de f

On a f' s'annule et change le signe en 1 donc f admet une valeur minimale -1 qui est atteint en 1

**III) Dérivée de la fonction composée - fonction Réciproque :****1) Dérivée de la fonction composée****Activité :**

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) ; g(x) = x^2 - 2x$$

1) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Calculer $f'(x) \times g'(f(x))$

3) Soit $h(x) = \text{gof}(x)$ Déterminer $h(x)$ puis calculer $h'(x)$

4) Comparer $h'(x)$ et $f'(x) \times g'(f(x))$

Proposition :

- Si f est dérivable en un réel a et g dérivable en $f(a)$ alors la fonction composée gof est dérivable en a et $\text{gof}'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$
- Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction composée gof est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$: $\text{gof}'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Exercice 07

1) Montrer que la fonction $u: x \rightarrow \cos(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ puis déterminer sa dérivée

2) Montrer que la fonction $v: x \rightarrow \sin(\sqrt{x^2 + 5})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée

Solution

1) En posant $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \sqrt{x}$ on aura pour $x \in \mathbb{R}^{++}$ $h(x) = \text{gof}(x)$

Puisque f est dérivable sur $]0, +\infty[$

Et que $f(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$

Et g est dérivable sur $\mathbb{R}$,

alors la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et de plus, Pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

2) En posant $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

On aura pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \text{gof}(x)$

On a la fonction $x \mapsto x^2 + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 5 > 0$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et on a $f(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$, car $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$

Et g est dérivable sur $]0, +\infty[$,

D'où la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 5}) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

2) Dérivée de la fonction Réciproque :**Proposition :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' s'annule pas sur I

Alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

De plus on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration :

Soit $x \in J = f(I)$, on a : $f \circ f^{-1}(x) = x$

Donc : $f'[f^{-1}(x)] \times (f^{-1})'(x) = 1$

$$\text{Donc : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$ et $b \in J$ tel que $f(a) = b$

Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$

Alors la fonction f^{-1} est dérivable en b et de plus

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



Exercic 08

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 3$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

2. Montrer que f^{-1} est dérivable en 5 et déterminer $(f^{-1})'(5)$

Solution

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une polynome

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J et :

$$J = f(\mathbb{R}) = f(-\infty; +\infty) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

2. On remarque $f(1) = 5$ donc $f^{-1}(5) = 1$

On a la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4 \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en 5 ; et on a : $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

Dérivée de la fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

Activité :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Considérons la fonction u définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt[n]{x}$

1. Étudier la dérivabilité de u à droite de 0

2. Calculer la dérivée de la fonction u

Proposition :

La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$

Et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Dérivée de la fonction $x \rightarrow x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$

Proposition :

Si f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I ,

Alors la fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(\sqrt[n]{f})'(x) = \frac{f'(x)}{n \times (\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$$

Exercic 09

Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition puis calculer sa dérivée de chacune des cas suivantes :

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad f(x) = \sqrt[4]{x^5} \quad ; \quad f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$$

Solution

1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2. On a la fonction $u: x \mapsto x^5$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$, de plus $u'(x) = 5x^4$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{(x^5)^3}} = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{x^{15}}}$$

3. On a la fonction $u: x \mapsto 1 + \cos^2(x)$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, de plus $u'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2(x))^3}} = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt[4]{(1 + \cos^2(x))^3}}$$



Exercice 01

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 5$
- 2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$
- 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

Exercice 02

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = x^3 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en $a=1$ puis donner une interprétation géométrique de chaque résultat obtenue

Exercice 03

Déterminer D_f puis calculer $f'(x)$

- 1) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$;
- 2) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$
- 3) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$;
- 4) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$
- 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
- 6) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$;
- 7) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$

Exercice 04

f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

- 4) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 5) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0
b) Donner une interprétation géométrique
- 6) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f
b) Dresser le tableau de variations de f
- 4) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 05

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$ puis en déduire le signe de f sur $[1, +\infty[$
- 3) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

Exercice 06

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1 - x} & ; x < 1 \end{cases}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter le résultat géométriquement
b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter.....
- 3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$
b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty ; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$
c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
- 4) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 07

Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} - x$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $\in]5, 6[$
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2, 3[$
b) Vérifier que $\sqrt[3]{\alpha + 1} = \frac{2}{3}\alpha$
- 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
b) Montrer que f^{-1} est dérivable en α et $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{4\alpha^2}{9 - 4\alpha^2}$



Exercic 01

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 5$
- 2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$
- 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

Solution :

- 1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x-1) = 4 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

D'où la fonction f est continue en 5

- 2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{x^2-6x+5}{x-5} - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{(x-5)(x-1)}{x-5} - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1) - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-5} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 5 et $f'(5) = 1$

- 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

La droite (T) d'équation $y = f'(5)(x-5) + f(5)$

Donc : $(T): y = x - 1$

Exercic 02

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = x^3 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en $a=1$ puis donner une interprétation géométrique de chaque résultat obtenue

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3 - 2x + 1}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{x(x-1)} = 1 \end{aligned}$$

D'où la fonction f est dérivable à droite en 1. et $f'_d(1) = 1$

Interprétation géométrique

Donc La courbe représentative de f admet une demi-tangente

(T) d'équation $(T): y = f'_d(1)(x-1) + f(1) ; x > 1$

$$(T): y = x + 1 ; x > 1$$

Dérivabilité à gauche en $a=1$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 2x + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 2x - 1}{(x-1)} = +\infty \end{aligned}$$

D'où la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Interprétation géométrique

La courbe représentative de f admet une demi-tangente

verticale à gauche en point d'abscisse 1, dirigée vers le bas

Conclusion : la fonction f n'est pas dérivable en $a=1$



Exercic 03

Montrer que f est dérivable sur D_f puis calculer $f'(x)$

$$1) f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2);$$

$$2) f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}; \quad 4) f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad 6) f(x) = \sqrt[4]{x^5}; \quad 7) f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$$

Solution

$$1) f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$$

f est dérivable sur IR car c'est une polynome

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3$$

$$= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x$$

$$= 18x^2 - 38x + 10$$

2) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$; f est dérivable sur IR car (c'est une quotient de deux fonction dérivable sur IR et $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \neq 0$)

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^2 + 1 \rightarrow v'(x) = 2x$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{6(x^2+1) - (6x-5)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2+6-12x^2+10x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+10x+6}{(x^2+1)^2}$$

$$3) f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$$

f est dérivable sur IR car la fonction $x \rightarrow 3x^2 + 2x + 1$ est dérivable sur IR et $(\forall x \in \mathbb{R}): 3x^2 + 2x + 1 > 0$

$$\text{On pose : } f(x) = \sqrt{u(x)}$$

$$\text{avec } u(x) = 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 2$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$$

$$4) g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

g est dérivable sur IR car c'est une polynome

$$\text{On pose : } g(x) = (u(x))^4$$

$$\text{Avec } u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$$

Donc :

$$g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x+3)(2x^2+3x-3)^3$$

5) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

6) On a la fonction $u: x \mapsto x^5$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$, de plus $u'(x) = 5x^4$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{(x^5)^3}} = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{x^{15}}}$$

7) On a la fonction $u: x \mapsto 1 + \cos^2(x)$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, de plus $u'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2(x))^3}} = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt[4]{(1+\cos^2(x))^3}}$$



Exercic 04

f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

7) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

8) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

b) Donner une interprétation géométrique

9) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f sur D_f

d) Dresser le tableau de variations de f

e) Déterminer les extremus de f

4) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

b) Interprétation géométrique

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le bas

3)a) Soit $x \in]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (Somme de deux fonctions)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

Etudier les variations de f

Soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

Donc $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]0; +\infty[$ est le signe de $x - 1$ qui s'annule en 1

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

Donc la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$

et décroissante sur $]0; 1[$

b) On dresse le tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	$+\infty$



4)a)* La fonction g est dérivable sur I donc elle est continue sur I

* La fonction g est **strictement croissante** sur I

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J et :

$$J = g([1, +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-1; +\infty[$$

b) Soit $x \in [-1; +\infty[$ cherchons $y \in [1; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;
 $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + (1)^2 = x + (1)^2 \quad ;$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2 = x + 1 ;$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{y} - 1| = \sqrt{x + 1} \quad ; \quad (\text{car } x + 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = \sqrt{x + 1} \quad ; \quad (\text{car } \sqrt{y} - 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow y = (\sqrt{x + 1} + 1)^2$$

$$g^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{17}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 \text{ pour tous } x \in [-1; +\infty[$$

Exercice 05

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$ puis déterminer le signe de f sur $[1, +\infty[$

3) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

Solution

1) * La fonction f est **continue sur I** car c'est une polynôme

* La fonction f est dérivable sur I , et pour tout x dans I on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$x \in [1, +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) \geq 0$$

Donc f est **strictement croissante** sur I

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J et :

$$J = f([1, +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-5; +\infty[$$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$ puis déterminer le signe de f sur $[1, +\infty[$

* La fonction f est **continue sur I** car c'est une polynôme

* La fonction f est **strictement croissante** sur I

* $f(2) = -1$ et $f(3) = 15$ donc $f(2) \times f(3) < 0$

• Le signe de f sur $I = [1, +\infty[$

Soit $x \in [1; \alpha]$

Donc $1 \leq x \leq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; \alpha]$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \leq 0$

Soit $x \in [\alpha, +\infty[$

Donc $x \geq \alpha$ et on a la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \geq 0$

3) On a $f(\alpha) = 0$ donc $f^{-1}(0) = \alpha$

On a la fonction f est dérivable en α et $f'(\alpha) = 3(\alpha^2 - 1) \neq 0$

Car : $2 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 3 < \alpha^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow 9 < 3(\alpha^2 - 1) < 24$

Donc f^{-1} est dérivable en 0 ; et on a :

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$$



Exercice 06

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que: $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur IR

4) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2\sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2|x| \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 1$$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{3}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente en 1 d'équation :

$$y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{Donc : } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x-1|} \times \sqrt{|x-1|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 1

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 1 dirigée vers le haut

4) a) Soit $x \in]1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ (fonction rationnelle)



$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

a) Soit $x \in]-\infty; 1[$

f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ (Somme de deux fonctions)

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x})}$$

c) On a f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

Donc $\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]-\infty; 1[$ est le signe de $-x$ qui s'annule en 0

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- //	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$
			0	$\nearrow$
				$+\infty$

4)a)* La fonction g est dérivable sur I donc elle est continue sur I

* La fonction g est strictement croissante sur I

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J et :

$$J = g([1, +\infty[) = [g(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0; 1[$$

b) Soit $x \in [0; 1[$ cherchons $y \in [1; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;
 $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1 - 1 - 1}{y^3 + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1}{y^3 + 1} - \frac{2}{y^3 + 1} = x = x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{y^3 + 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y^3 + 1} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1}{2} = \frac{1}{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 1 = \frac{2}{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{2}{1 - x} - 1 \quad (*)$$

On a : $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1 - x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1 - x} - 1 \geq 1$$

$$\text{Donc } (*) \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{2}{1 - x} - 1}$$

$$\text{D'où : } g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{1 - x} - 1} \text{ pour tous } x \in [0; +\infty[$$

**I) Etude des branches infinies (Rappel)**

Dans tout ce qui suit est une fonction de la variable réelle x , (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1) L'asymptote horizontale - L'asymptote verticale :

- La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la courbe (C_f) si, et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
- La droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** de la courbe (C_f) si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ au voisinage de $\pm\infty$

2) L'asymptote oblique :**Définition**

La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe (C_f) si, et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Proposition :

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe C_f si, SSI : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$

3) Les branches paraboliques :**Proposition :**

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors La courbe C_f admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$ On dit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$, au voisinage de ∞

Exercic 01

Etudier la nature des branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} ; \quad 2) f(x) = 2x - \sqrt{x}$$

Solution :

$$1) x \in D_f \Leftrightarrow (1+x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$D'ou D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = -2$$

Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale de la courbe C_f

$$2) x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$D_f = [0, +\infty[$$

Calcul $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$$

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = 2x$, au voisinage de $+\infty$

**II) Etude de la concavité d'une courbe :**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I

- La courbe (C_f) est convexe sur I si $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$
- La courbe C_f de f soit concave sur I , si $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$
- Le point $M(a, f(a))$ soit un **point d'inflexion** de (C_f) , si la dérivée seconde f'' s'annule en a , et change de signe en a

Exercice 02

Étudier la concavité de la courbe (C_f) tel que : $f(x) = x^3 + x^2$

Solution :

Soit x dans $\mathbb{R}$, On a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$ et $f''(x) = 6x + 2$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
	-		+
La convexité de la courbe (C_f)	concave $\cap$	le point $A(-\frac{1}{3}; f(-\frac{1}{3}))$ est point d'inflexion	convexe $\cup$

III) Axe de symétrie - Centre de symétrie :**Proposition :**

Pour que la droite (D) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe (C_f) , il faut et il suffit que Pour tout $x \in D_f$:

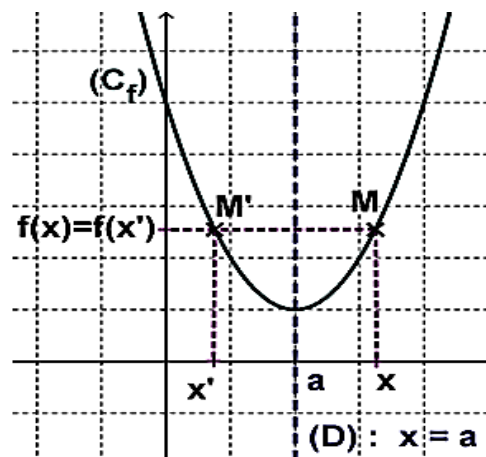
$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

Remarque :

On peut réduire l'étude de la

fonction f sur $D_E = D_f \cap [a; +\infty[$

D_E est appelée le domaine d'étude

**Exercice 03**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$
Montrons que la droite D d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) :

Solution :

$$\text{On a : } D_f =]-\infty, 5] \cup [-1, +\infty[$$

Soit $x \in D_f$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1) \Leftrightarrow (-6 - x \geq -1 \text{ ou } -6 - x \leq -5) \\ \Leftrightarrow (-6 - x) \in D_f$$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$f(-6 - x) = \sqrt{(-6 - x)^2 + 6(-6 - x) + 5} = \sqrt{x^2 + 6x + 5} = f(x)$$

Donc la droite $(D): x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Proposition :

Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe

(C_f) , ssi, pour tout $x \in D_f$:

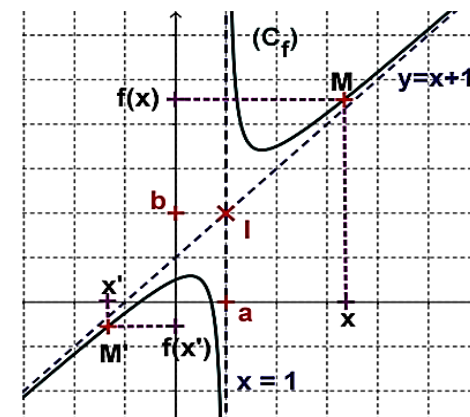
$$(2a - x) \in D_f$$

$$\text{et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

Remarque :

On peut réduire l'étude de la

fonction f sur : $D_E = D_f \cap [a; +\infty[$

**Exercice 04**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

Montrons que $\Omega(-2, 3)$ est un point de symétrie de la courbe C_f

Solution :

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$* x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq 2 \Leftrightarrow -4 - x \neq -2 \Leftrightarrow (-4 - x) \in D_f$$

$$* f(-4 - x) = \frac{3x + 13}{x + 2} = \frac{6(x + 2)}{x + 2} + \frac{1 - 3x}{x + 2} = 6 - f(x)$$

Donc, le point $\Omega(-2, 3)$ est un centre de symétrie de (C_f)



Exercice 05

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
- 3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de (C_f) s'il existe
- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Solution :

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− 0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 2$	$f(1) = 1$	$+\infty$

- 3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de la courbe (C_f) s'il existe

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

d'où le tableau de concavité suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
La convexité de la courbe (C_f)	concave $\cap$	le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est point d'inflexion	convexe $\cup$

- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$* x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1 - x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} * f(1 - x) + f(x) &= 2(1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 2 + 6x^2 - 6x - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 3 = 2 \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc, le point $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)



5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$ et interpréter le résultat géométriquement

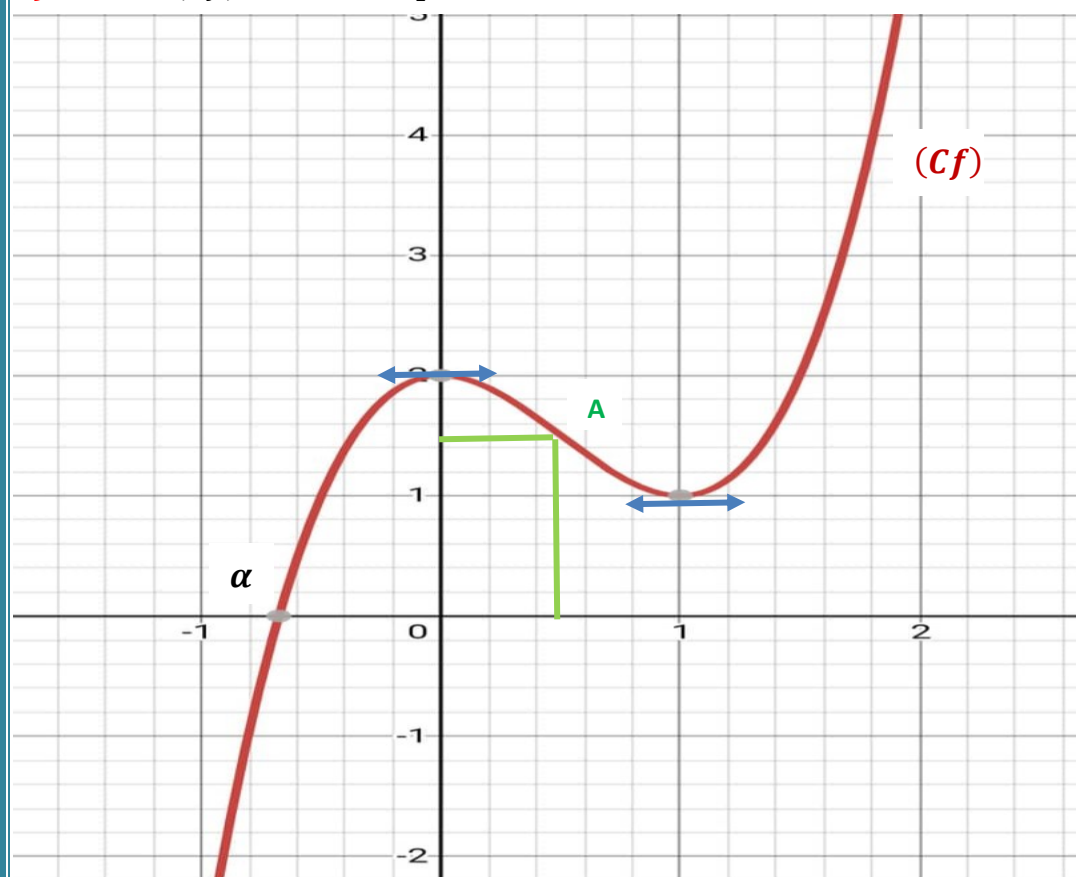
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$
- La fonction f est strictement croissante sur $[-1; 0]$
- Et on a : $f(-1) = -3$ et $f(0) = 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$

D'où d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in] -1, 0[$

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé



Exercice 06

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$$

1. Etudier la parité de la fonction f et déduire D_E le domaine d'étude de la fonction f
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
3. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E
4. a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
b. Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
5. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f
6. Considérons la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|}$
a. Etudier la parité de la fonction g
b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Solution :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3(-x)^4 + 1}{3(-x)^3} \\ &= \frac{3x^4 + 1}{-3x^3} = -f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est **impaire**

D'où on peut réduire l'étude f seulement sur

$$D_E = \mathbb{R}^* \cap [0; +\infty[=]0; +\infty[$$

Donc $D_E =]0; +\infty[$

Remarque : La courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^4 + 1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^3 = 0^+$$

Donc la droite d'équations $x = 0$ c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à (C_f)

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1 - 3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) - x = \frac{1}{3x^3} > 0$

Donc (C_f) est située aux dessus de la droite (D) sur $]0; +\infty[$

4)a) Calculer la dérivée de la fonction f

La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclut dans $\mathbb{R}^*$, Car c'est une fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12x^3 \times 3x^3 - (3x^4 + 1) \times 9x^2}{(3x^3)^2} \\ &= \frac{9x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{9x^6} \\ &= \frac{x^4 - 1}{x^4} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a $x^2 + 1 > 0$ et $x^4 > 0$, donc Le signe de f' c'est le signe de $x^2 - 1$

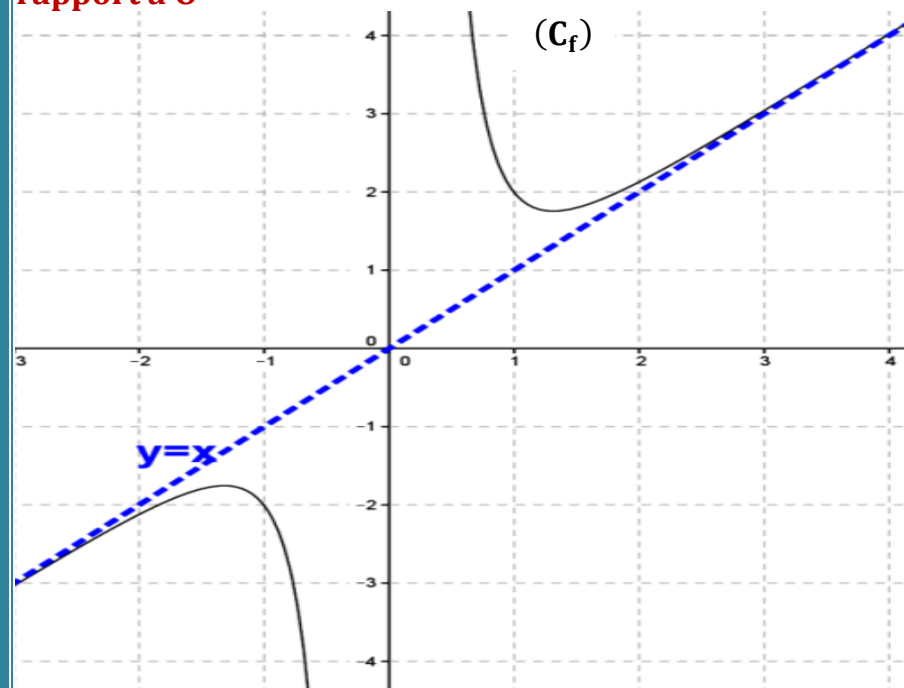
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

D'où tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$

1. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f

La fonction f est impaire donc courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



5)a Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$g(-x) = \frac{3(-x)^4 + 1}{3|-x^3|} = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|} = g(x)$$

Donc la fonction g est paire

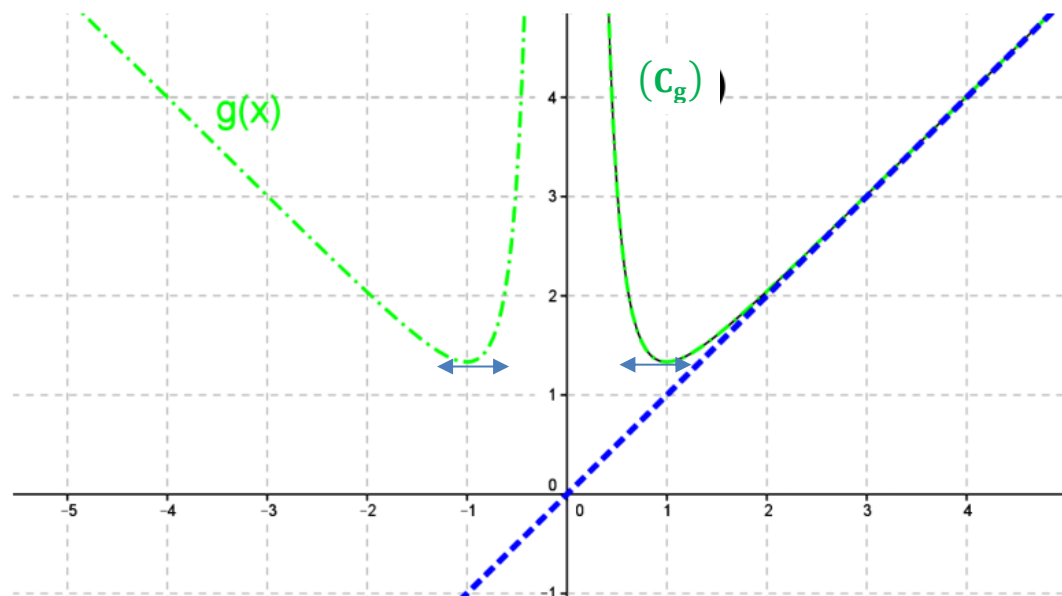


b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) = f(x)$

Donc la courbe (C_g) est confondue à (C_f) $]0; +\infty[$

Et comme la fonction g est paire donc la courbe (C_g) est symétrique par rapport à la l'axe des ordonnées



Exercic 07

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que: $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$,

Puis interpréter le résultat géométriquement

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J à déterminer

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

Solution :

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2\sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2|x| \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{1-x} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 2\sqrt{1-x} = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$3)a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^3+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{3}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente en 1 d'équation :

$$y = f'_d(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{Donc : } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x-1|} \times \sqrt{|x-1|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 1

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 1 dirigée vers le haut

4)a) Soit $x \in]1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ (fonction rationnelle)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

a) Soit $x \in]-\infty; 1[$

f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ (Somme de deux fonctions)

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x})}$$

c) On a f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

Donc $\sqrt{1-x}(1 + \sqrt{1-x}) > 0$ donc le signe de f' sur $] -\infty; 1[$ est le signe de $-x$ qui s'annule en 0

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow +\infty$



5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$f(x) = 0 ; x \in]-\infty; 1[\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-x) - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} (\sqrt{1-x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 0 \text{ ou } 1-x = 4$$

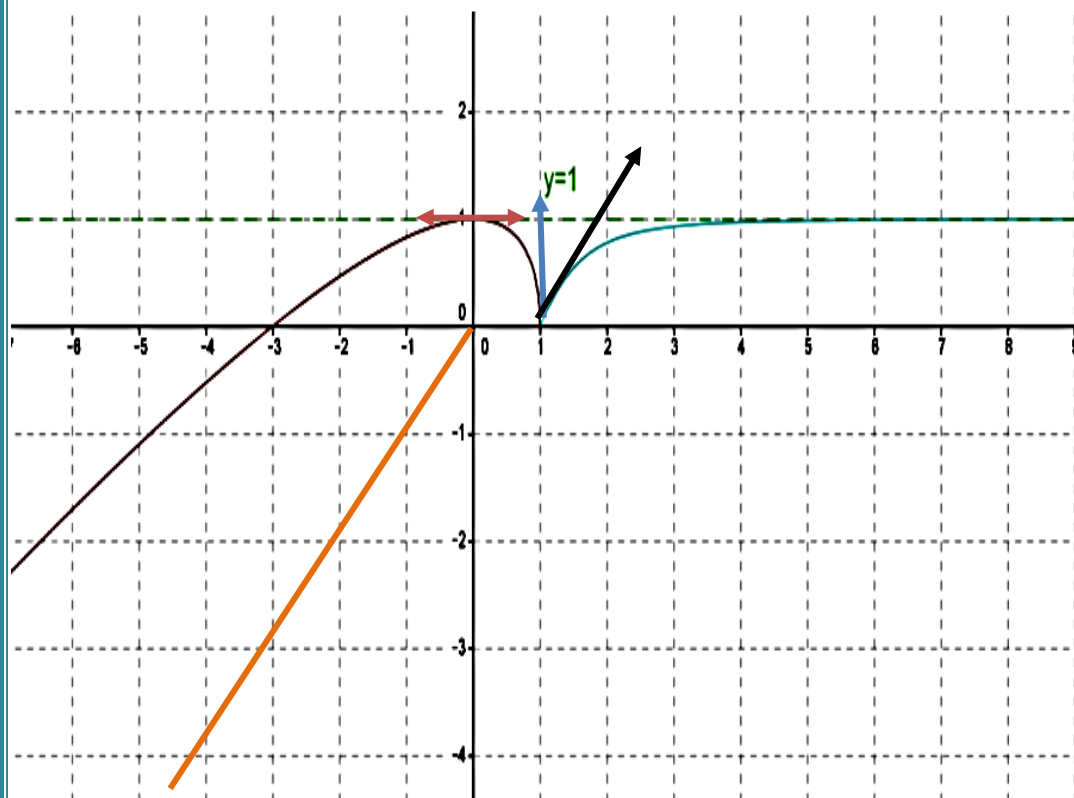
$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty; 1[\text{ ou } x = -3$$

Donc $S = \{-3\}$

Interprétation géométrique :

(Cf) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



8) Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

➤ la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc elle est continue sur $]1, +\infty[$, d'où la fonction g est continue sur $]1, +\infty[$

➤ la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = g(I) = g(]1, +\infty[) =]g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=]0, 1[$$

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

$$g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow g(y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1 - 1 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 1 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Donc } g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{3}$$

c) La fonction g est dérivable en $\sqrt[3]{4}$ et on a :

$$g'(\sqrt[3]{3}) = \frac{6(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{3}^3 + 1)^2} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{16} \neq 0$$

D'où la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$

$$(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{g'(\sqrt[3]{3})} = \frac{16}{6\sqrt[3]{9}}$$



Exercice 08

f est une fonction tel que $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

1) Vérifier que $D_f =]2, +\infty[$

2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

b) Dresser la table de variations de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

6) Calculer $f(3)$ puis tracer $(\Delta) ; (C_f)$ et $(C_{f^{-1}})$

7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

Solution :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \neq 0$ et $x-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Donc: $D_f =]2, +\infty[$

2)a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = -\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0^+$

Interprétation géométrique de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

La droite (D) d'équations $y = 2$ est asymptote verticale à (C_f)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0$

Montrons que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0 \end{aligned}$$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

$$* f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x-2}} < 0$$

Donc la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2} \text{ et } \sqrt{U}' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

Soit $x \in]2, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}^3} \end{aligned}$$

b) On dresse la table de variations de f

On a $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2; 3]$
- La fonction f est strictement croissante sur $]2, 3[$
- Et on a : $f(]2, 3[) =]\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)[=]-\infty; 2[$
Donc $0 \in f(]2, 3[)$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

Interprétation géométrique

La courbe (Cf) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

- la fonction f est dérivable sur $]2, +\infty[$ donc elle est continue sur $]2, +\infty[$,
- la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = f(I) = f(]2, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ =]-\infty; +\infty[$$

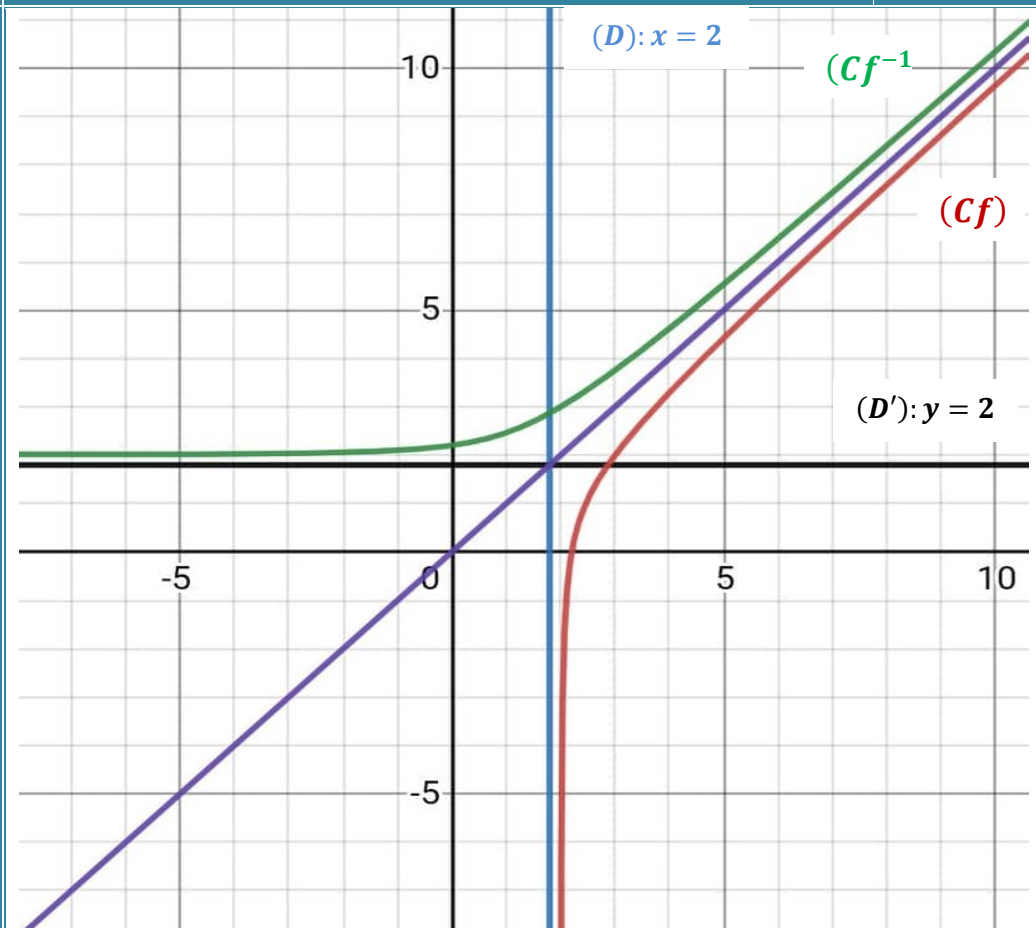
6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (Cf) et (Cf^{-1})

On a $f(3) = 2$

Construction de (Cf^{-1})

Les courbes (Cf) et (Cf^{-1}) sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y = x$

On a La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote verticale à (Cf) donc La droite (D') d'équation $x = 2$ est asymptote horizontale à (Cf^{-1})



7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

On a $f(3) = 2$

La fonction f est dérivable en 3 et on a :

$$f'(3) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3-2}} = \frac{3}{2} \neq 0$$

D'où la fonction f^{-1} est dérivable en 2 et on a :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$



Exercic 09

f une fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

b) Interpréter les résultats géométriquement

2) a) Montrer f est dérivable sur I et $(\forall x \in I): f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$

b) dresser le tableau de variations de f sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) en 0 et de la tangente (T') en $\frac{\pi}{2}$

3) Etudier la convexité de (Cf) puis justifier que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (Cf)

4) Montrer que $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ est centre symétrie de (Cf)

5) Tracer (T) et (Cf) dans un repère orthonormé

Solution :

$$1) a) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} 1 + \sin x = 0$, c'est un F.I de type $\frac{0}{0}$

On pose : $t = \sin x$ donc $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+ \Leftrightarrow t \rightarrow -1^+$

$$t = \sin x \Leftrightarrow t^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow t^2 = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \Leftrightarrow |\cos x| = \sqrt{1 - t^2} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{1 - t^2}, \text{ car } x > -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \\ = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{(1 - t)(1 + t)}}{\sqrt{1 + t}^2} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1 - t}}{\sqrt{1 + t}} = +\infty$$

De même on pose $t = \sin x$ donc $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^- \Leftrightarrow t \rightarrow -1^+$

$$t = \sin x \Leftrightarrow |\cos x| = \sqrt{1 - t^2} \Leftrightarrow \cos x = -\sqrt{1 - t^2}, \text{ car } x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t} \\ = \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{\sqrt{(1 - t)(1 + t)}}{\sqrt{1 + t}^2} = \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{\sqrt{1 - t}}{\sqrt{1 + t}} = -\infty$$

b) Interpréter les résultats géométriquement

On a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ est

une asymptote verticale à (Cf)

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = \frac{3\pi}{2}$ est

une asymptote verticale à (Cf)

2) a) La fonction f est dérivable sur I (car f c'est une quotient de deux fonctions dérivable sur I et $(\forall x \in I): 1 + \sin x \neq 0$)

Soit $x \in I$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} \\ = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - (1 - \sin^2 x)}{(1 + \sin x)^2} = \\ = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - (1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \\ = \frac{(1 + \sin x)[- \sin x - 1 + \sin x]}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x}$$



b) Soit $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$; on a : $f'(x) = -\frac{1}{1+\sin x} < 0$, car $-1 < \sin x$

Donc f est strictement décroissante sur I

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

c) L'équation de la tangente (T) en 0 et de (T') en $\frac{\pi}{2}$

On a $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$, donc : $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
 $(T): y = -x + 1$

L'équation de la tangente (T') en $\frac{\pi}{2}$

On a $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{1+\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc :

$(T'): y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc $(T'): y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$

3) Soit $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

$$f''(x) = -\frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

On a $(1 + \sin x)^2 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ c'est le signe de $\cos x$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$	+	0	-
La convexité de la courbe (Cf)	convexe ∪	le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est point d'inflexion	concave ∩

La fonction f'' s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{2}$ donc le point

$A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un point d'inflexion de (Cf)

4) Montrer que $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est centre symétrie de (Cf)

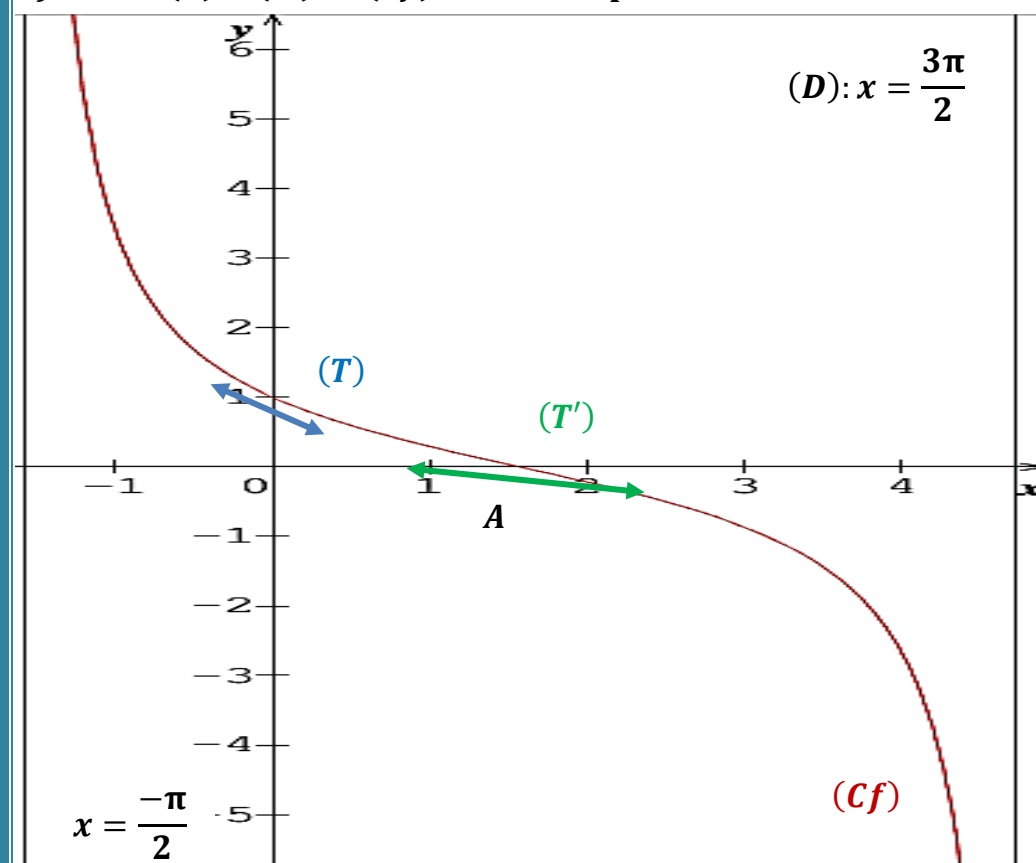
Soit $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

$$\begin{aligned} * x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[&\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} < \pi - x < \frac{3\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow x - \pi \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * f(x - \pi) + f(x) &= \frac{\cos(x - \pi)}{1 + \sin(x - \pi)} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{-\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0 = 0 \times 2 \end{aligned}$$

Donc $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est le centre symétrie de (Cf)

5) Tracer (T) ; (T') et (Cf) dans un repère orthonormé





Exercice 01

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
- 3) Etudier la convexité de (C_f) , en précisant les points d'inflexions
- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Exercice 02

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$

7. Etudier la parité de la fonction f et déduire D_E le domaine d'étude de la fonction f
8. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
9. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E
10. a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
b. Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
11. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f
12. Considérons la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|}$
a. Etudier la parité de la fonction g
b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Exercice 03

Soit f est une fonction telle que $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

- 1) Vérifier que $D_f =]2, +\infty[$
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

- c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

3) a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

- b) Dresser la table de variations de f
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$
- 5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$
- 7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

Exercice 04

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1 - x} & ; x < 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement
- 2) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement
b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter les résultats géométriquement
- 4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$
b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$
- c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
- 5) Résoudre l'équation $f(x) = 0 ; x \in]-\infty; 1[$
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J
b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$; puis calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$



Exercice 01

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
- 3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de (C_f) s'il existe
- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$ et interpréter le résultat géométriquement
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Solution :

1) Etudier les branches infinies de (C_f)

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 2$	$f(1) = 1$	$+\infty$	

3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de la courbe (C_f) s'il existe

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

d'où le tableau de concavité suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
La convexité de la courbe (C_f)	concave $\cap$	le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est point d'inflexion	convexe $\cup$

4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$* x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1 - x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} * f(1 - x) + f(x) &= 2(1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 2 + 6x^2 - 6x - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 3 = 2 \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc, le point $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)



5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$ et interpréter le résultat géométriquement

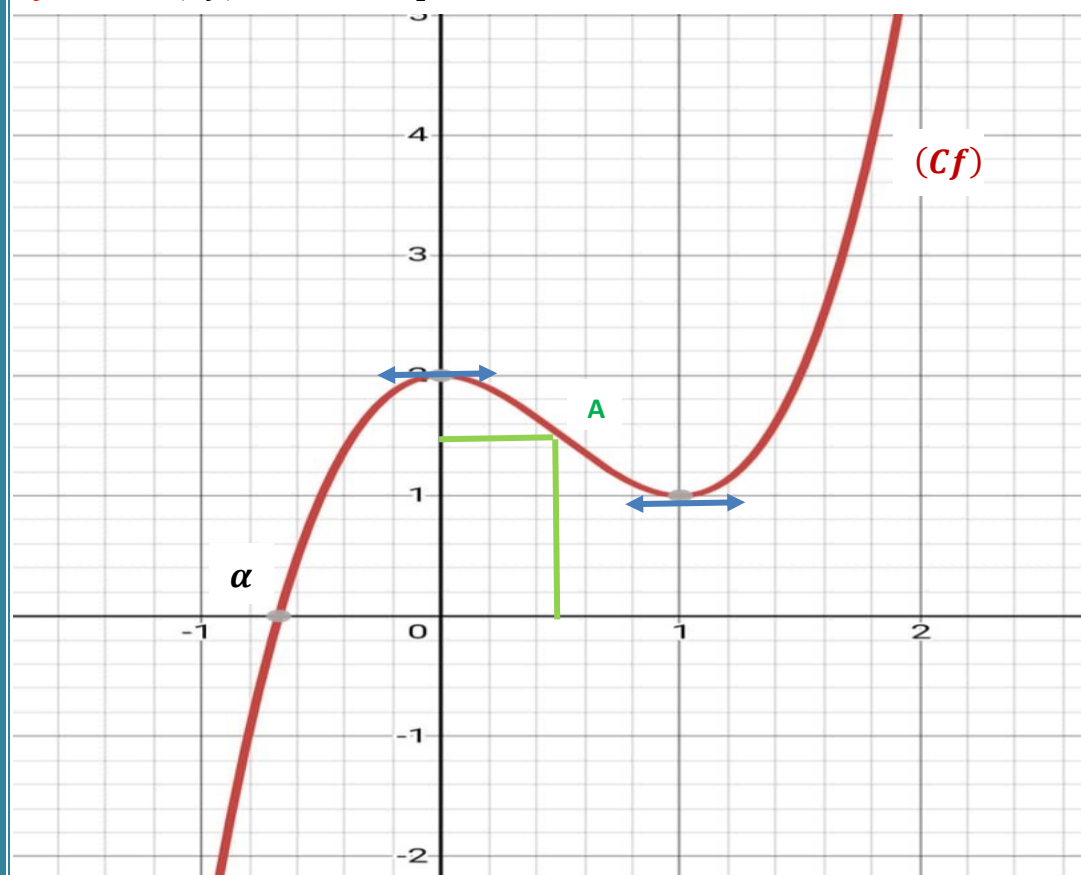
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$
- La fonction f est strictement croissante sur $[-1; 0]$
- Et on a : $f(-1) = -3$ et $f(0) = 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$

D'où d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in]-1, 0[$

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé



Exercice 02

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$$

13. Etudier la parité de la fonction f et déduire D_E le domaine d'étude de la fonction f
14. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
15. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E
16. a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
b. Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
17. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f
18. Considérons la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|}$
a. Etudier la parité de la fonction g
b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Solution :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3(-x)^4 + 1}{3(-x)^3} \\ &= \frac{3x^4 + 1}{-3x^3} = -f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est **impaire**

D'où on peut réduire l'étude f seulement sur

$$D_E = \mathbb{R}^* \cap [0; +\infty[=]0; +\infty[$$

Donc $D_E =]0; +\infty[$

Remarque : La courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^4 + 1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^3 = 0^+$$

Donc la droite d'équations $x = 0$ c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à (C_f)

2. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1 - 3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) - x = \frac{1}{3x^3} > 0$

Donc (C_f) est située aux dessus de la droite (D) sur $]0; +\infty[$

4)a) Calculer la dérivée de la fonction f

La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclut dans $\mathbb{R}^*$, Car c'est une fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12x^3 \times 3x^3 - (3x^4 + 1) \times 9x^2}{(3x^3)^2} \\ &= \frac{9x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{9x^6} \\ &= \frac{x^4 - 1}{x^4} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a $x^2 + 1 > 0$ et $x^4 > 0$, donc Le signe de f' c'est le signe de $x^2 - 1$

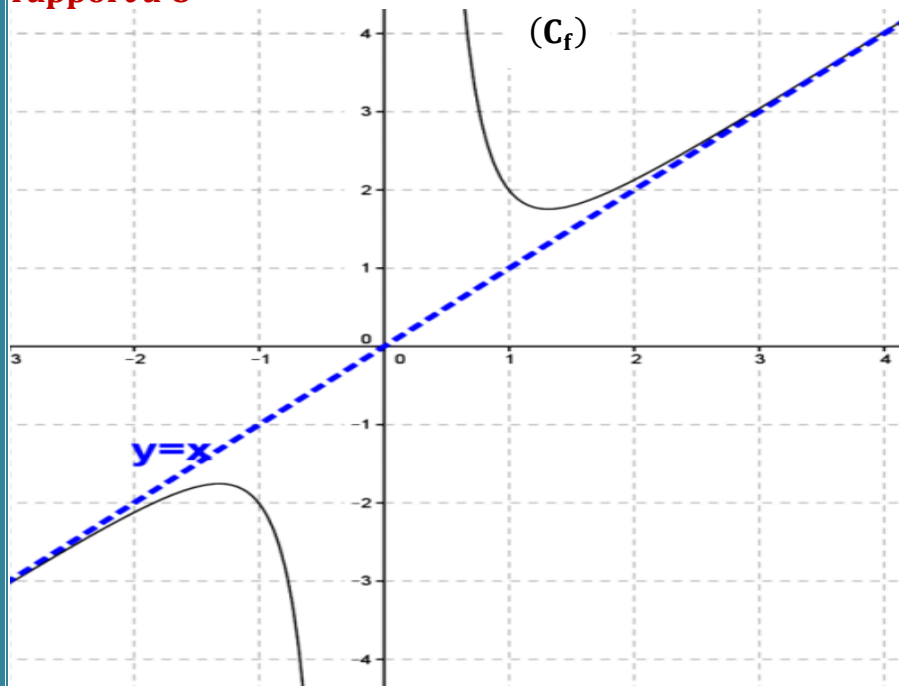
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

D'où tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$

2. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f

La fonction f est impaire donc courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



5)a Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$g(-x) = \frac{3(-x)^4 + 1}{3|-x^3|} = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|} = g(x)$$

Donc la fonction g est paire

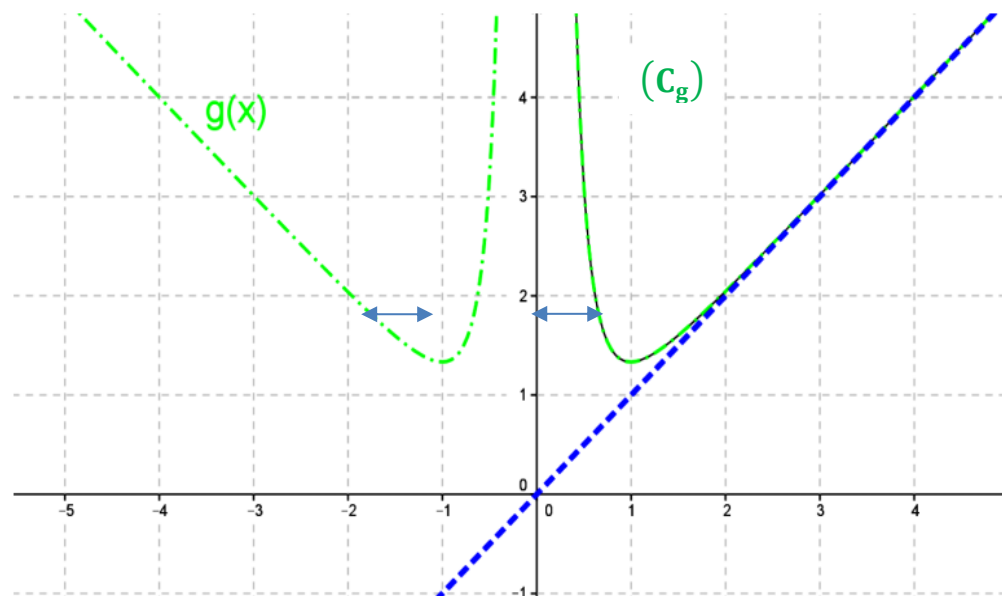


c. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) = f(x)$

Donc la courbe (C_g) est confondue à (C_f) $]0; +\infty[$

Et comme la fonction g est paire donc la courbe (C_g) est symétrique par rapport à la l'axe des ordonnées



Exercic 04

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que: $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$,

Puis interpréter le résultat géométriquement

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J à déterminer

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

Solution :

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2\sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2|x|\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 2\sqrt{1-x} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 2\sqrt{1-x} = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$3)a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{3}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente en 1 d'équation :

$$y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{Donc : } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x-1|} \times \sqrt{|x-1|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 1

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 1 dirigée vers le haut

4)a) Soit $x \in]1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ (fonction rationnelle)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

a) Soit $x \in]-\infty; 1[$

f est dérivable sur $] -\infty; 1[$ (Somme de deux fonctions)

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

c) On a f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

Donc $\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x}) > 0$ donc le signe de f' sur $] -\infty; 1[$ est le signe de $-x$ qui s'annule en 0

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow +\infty$



5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$f(x) = 0 ; x \in]-\infty; 1[\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-x) - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 0 \text{ ou } 1-x = 4$$

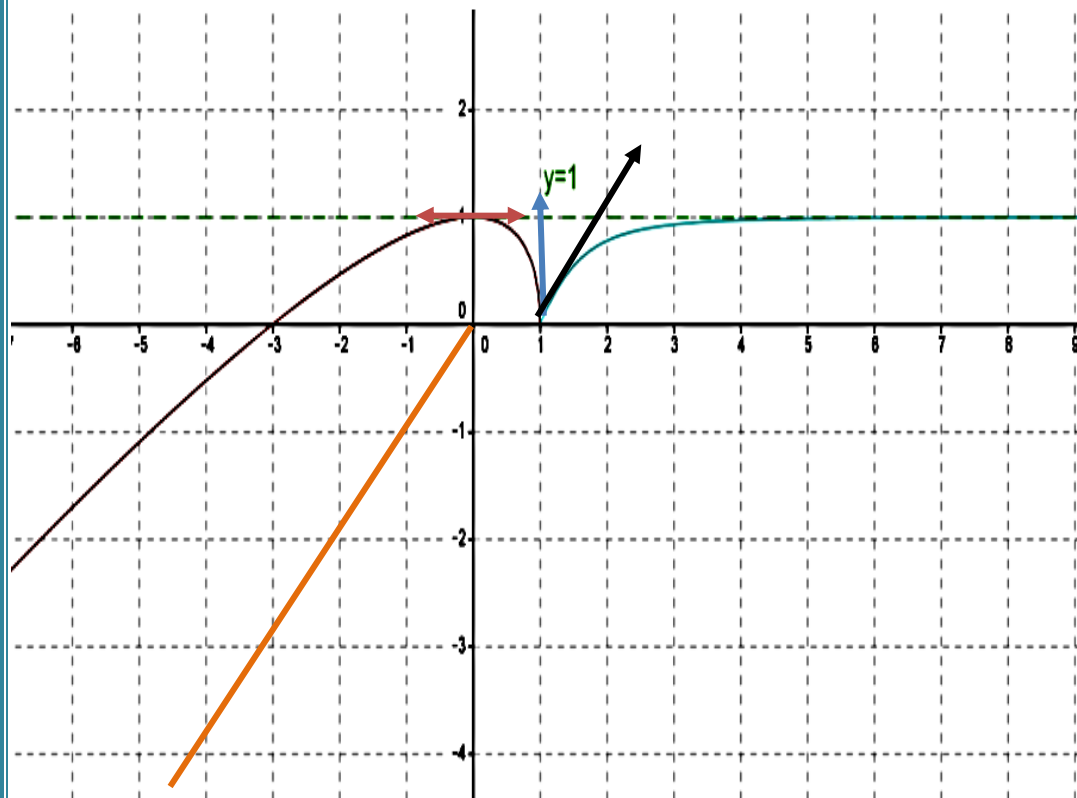
$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty; 1[\text{ ou } x = -3$$

Donc $S = \{-3\}$

Interprétation géométrique :

(Cf) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



8) Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

➤ la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc elle est continue sur $]1, +\infty[$, d'où la fonction g est continue sur $]1, +\infty[$

➤ la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = g(I) = g(]1, +\infty[) =]g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=]0, 1[$$

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

$$g^{-1}(\frac{1}{2}) = y \Leftrightarrow g(y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1 - 1 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 1 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Donc } g^{-1}(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{3}$$

c) La fonction g est dérivable en $\sqrt[3]{4}$ et on a :

$$g'(\sqrt[3]{3}) = \frac{6(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{3}^3 + 1)^2} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{16} \neq 0$$

D'où la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$

$$(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{g'(\sqrt[3]{3})} = \frac{16}{6\sqrt[3]{9}}$$



Exercice 03

f est une fonction tel que $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

1) Vérifier que $D_f =]2, +\infty[$

2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

b) Dresser la table de variations de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

Solution :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \neq 0$ et $x-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Donc: $D_f =]2, +\infty[$

2)a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = -\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0^+$

Interprétation géométrique de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

La droite (D) d'équations $y = 2$ est asymptote verticale à (C_f)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0$

Montrons que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0 \end{aligned}$$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

$$* f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x-2}} < 0$$

Donc la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2} \text{ et } \sqrt{U}' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

Soit $x \in]2, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}^3} \end{aligned}$$

b) On dresse la table de variations de f

On a $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2; 3]$
- La fonction f est strictement croissante sur $]2, 3[$
- Et on a : $f(]2, 3[) = \left] \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \right[=]-\infty; 2[$
Donc $0 \in f(]2, 3[)$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

Interprétation géométrique

La courbe (Cf) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

- la fonction f est dérivable sur $]2, +\infty[$ donc elle est continue sur $]2, +\infty[$,
- la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = f(I) = f(]2, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$$

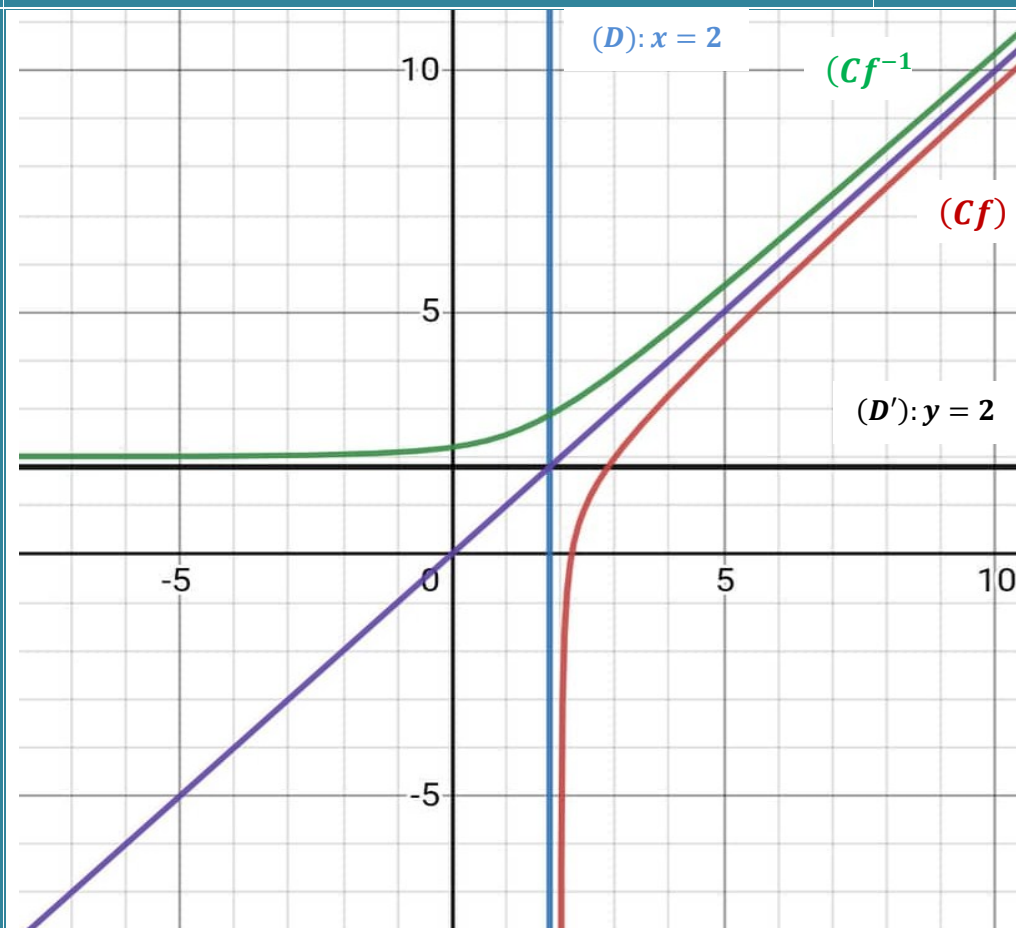
6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (Cf) et (Cf^{-1})

On a $f(3) = 2$

Construction de (Cf^{-1})

Les courbes (Cf) et (Cf^{-1}) sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y = x$

On a La droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote verticale à (Cf) donc La droite (D') d'équation $x = 2$ est asymptote horizontale à (Cf^{-1})



7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

On a $f(3) = 2$

La fonction f est dérivable en 3 et on a :

$$f'(3) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3-2}} = \frac{3}{2} \neq 0$$

D'où la fonction f^{-1} est dérivable en 2 et on a :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$



I) Limite finie ou infinie d'une suite

a) Limite infinie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

a pour limite $+\infty$. En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions :

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; b]$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Equivaut à : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$

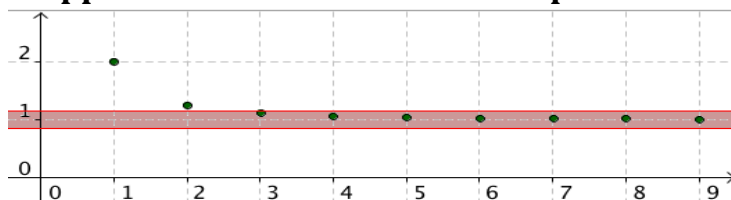
b) Limite finie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

En effet, les termes de la suite sont autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition :

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Une telle suite est dite convergente.

Définition :

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 . Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

c) Limites des suites usuelles

Propriétés :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty ; \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 ; \quad p \in \mathbb{N}^*$$



2) Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

*Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty?$$

Car on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

b) Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	$L L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty$$

D'après la règle on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = +\infty$

c) Limite d'un quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty$$

$$\text{D'après la règle sur la limite d'un quotient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$$

Remarque :

On retrouve, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

Les quatre formes indéterminées sont

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}"$$

Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 ; \text{ b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} ; \text{ d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

Solution :

$$\text{a) } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le plus haut degré** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\bullet \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 \text{ par limite d'une somme Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty \text{ par limite d'un produit.}$$

$$\text{d4 } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty.$$

$$\text{b) } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\text{Levons l'indétermination : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n} \right)$$



$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3(\sqrt{n})^2}{n\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$ donc par limite d'un produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = +\infty, \text{ d'où on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$$

c) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$.

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}. \quad \text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}.$$

d) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination par la méthode de **conjuguée**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

• Or par limite d'une somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty \quad \text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0.$$

Exercice 02

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \frac{1}{k(k+1)}$

1) Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*); U_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

2) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k$$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Déterminer la limite de S_n

Solution :

$$1) U_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2) a) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1$$

Exercice 03

Pour tout n entier et $n \geq 2$, on pose:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

1) Calculer π_n en fonction de n

2) Déterminer la limite de π_n

$$\text{Autre écriture de } \pi_n \text{ est : } \pi_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

**Solution :**

1) Il faut remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\pi_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \times \dots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

3) Limites et comparaison**a) Théorèmes de comparaison****Théorème 1 :**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Exemple**Déterminer une limite par comparaison**

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

$$(-1)^n \geq -1 \text{ donc } n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty.$$

Théorème 2 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

b) Théorème d'encadrement**Théorème des gendarmes :**

(u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L.$$

Exemple

Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

$$\text{On a : } -1 \leq \sin n \leq 1, \text{ donc : } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

**4) Suites majorées, minorées, bornées****Définitions :**

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1 .
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0 .

5) Suite croissante-décroissante**Propriété 01 :**

$$U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est croissante}$$

$$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est décroissante}$$

$$U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est constante}$$

Propriété 02 :

$$(U_n) \text{ est croissante alors } (\forall n \in \mathbb{N}); U_n \geq U_0$$

$$(U_n) \text{ est décroissante alors } \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq U_0$$

Exercice 04

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \text{ et } u_0 = 2.$$

- 1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3 .
- 2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Solution :

1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3 .

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 2 < 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

$$\text{On a } u_n < 3 \text{ donc } \frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3} \times 3$$

$$\text{et donc } \frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3; \quad \text{d'où } u_{n+1} < 3$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + 2 = -\frac{2}{3}u_n + 2 \\ &= -\frac{2}{3}\left(u_n - 2 \times \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}(u_n - 3) \end{aligned}$$

$$u_n < 3 \Rightarrow u_n - 3 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}(u_n - 3) > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

6) Convergence des suites monotones

- Si une suite croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante et minorée alors elle est convergente

Exercice 05

la suite (u_n) définie tel que ; $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3$

2) Montrer que (u_n) est croissante

3) Dédire que (u_n) est convergente

Solution :

1) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = 1 \leq 3$, donc la PV pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $1 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Considérons la fonction $f: x \rightarrow \sqrt{2x + 3}$ sur l'intervalle $[1; 3]$

$$\text{On a } f \text{ est dérivable sur } [1; 3] \text{ et } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1; 3]$

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq 3 &\Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3 \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 3 \quad ; \text{ car } 1 < \sqrt{5} \end{aligned}$$



D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \\ &= \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \end{aligned}$$

On a : $1 \leq u_n \leq 3$ donc :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq 3 &\Rightarrow u_n - 1 \geq 0 \text{ et } u_n - 3 \leq 0 \text{ et } \sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0 \\ &\Rightarrow -\frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante

3) (u_n) est croissante et majorée par 3 donc convergente.

Exercice 06

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$:

1) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$

2) Vérifier que $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

3) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite n tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2}$$

a) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

c) Dédire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente

Solution :

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$:

$$k - 1 \leq k \Rightarrow k(k-1) \leq k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} ; \text{ ou bien la différence}$$

$$2) \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

3) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite n tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

a) Montrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots - \frac{1}{n^2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 ; \text{ donc } (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}$$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

Soit : $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ et on a $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, donc :

$$\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{(2-1) \times 2} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{(3-1) \times 3} = \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} \leq \frac{1}{(4-1) \times 4} = \frac{1}{4-1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{(n-1)^2} \leq \frac{1}{(n-2) \times (n-1)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

On somme les inégalités terme à terme on trouve que :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc: } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \text{ donc } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n \leq 2$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2 et comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle est convergente

**7) Comportement à l'infini d'une suite géométrique****a) Rappel**

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Exemple

La suite (u_n) définie par

$u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5 .

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple

Pour la suite précédente, on a, pour tout $n : u_n = 5 \times (-3)^n$.

Exercice 07

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \text{ et } U_0 = 1 ; U_1 = 2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser ses caractéristiques

2) Calculer V_n en fonction de n

Solution :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n - U_{n+1} \\ &= \left(\frac{5}{3} - 1\right)U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}(U_{n+1} - U_n) = \frac{2}{3}V_n \end{aligned}$$

Donc la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme V_0 avec : $V_0 = U_1 - U_0 = 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a ; $V_n = V_0 \times (q)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) Limite d'une suites géométrique**Activité**

1) Soit a un réel strictement positif

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na. \quad (\text{Inégalité de Bernoulli})$$

2) Montrer que : si q un réel tel que $q > 1$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad (\text{Poser } q = a + 1)$$

3) Montrer que si $-1 < q < 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Propriété :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration

➤ On suppose que $q > 1$,

alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na \quad (\text{d'après inégalité de Bernoulli})$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$.

➤ Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

➤ Si $q = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

➤ Si $-1 < q < 1$, et $q \neq 0$,

$$\text{Donc } |q| < 1 \text{ donc } \frac{1}{|q|} > 1$$

Donc on peut poser $\frac{1}{|q|} = 1 + a$

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \frac{1}{|q|^n} = (1 + a)^n \geq 1 + na,$$

$$\text{Donc } 0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + na}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

**Exemple**

La suite de terme général -5×4^n
a pour limite $-\infty$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = +\infty$.

c) Somme des termes d'une suite géométrique**Propriété :**

n est un entier naturel non nul

et une suite géométrique de raison q et q un réel différent de 1 et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$, alors on a :

$$\text{➤ } S_n = U_p + \dots + U_n = U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$$\text{➤ } S_n = U_0 + \dots + U_n = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{➤ } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 08

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{3} ; b) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - 3^n ; c) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solution :

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison -2 strictement inférieure à -1 .

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

$$b) \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$; Levons

l'indétermination : $2^n - 3^n = 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, car $\left(\frac{2}{3} \right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1$$

$$\text{Donc par limite d'un produit : } \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{Soit : } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - 3^n = -\infty.$$

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0, \text{ (car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = 1.$$

$$\text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = 2.$$

$$\text{D'où, } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Exercice 09

$$(U_n)_{n \geq 5} \text{ une suite tel que } (\forall n \geq 5) : U_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n$$

Montrer la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Solution :

Soit n un entier tel que $n \geq 5$

$$\text{On a : } \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \text{ et on a } n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$\text{D'ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

**8) Suite (V_n) tel que $V_n = f(U_n)$** **Activité :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{5x+2}{x+3}$

et (U_n) une suite tel que $U_n = \frac{1}{n}$

1) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = f(U_n)$; écrire V_n en fonction de U_n

2) En déduire V_n en fonction de n

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$; conclure

3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et (V_n) une suite tel que $V_n = f(U_n)$

Déterminer la limite de la suite (V_n) et énoncer le théorème

Propriété :

On considère La suite (V_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = f(U_n)$

Si la fonction f est continue en l et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = f(l)$

9) La suite (U_n) liée à une fonction f ,**Propriété :**

f une fonction définie sur un intervalle I

et (U_n) une suite définie par

$(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in I$

et (U_n) la suite tel que : $U_{n+1} = f(U_n)$; si

➤ **f est continue sur l'intervalle I**

➤ **$f(I) \subset I$**

➤ **La suite (U_n) est convergente**

Alors la limite de la suite (U_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

Exercice 10

(u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3$

2) Montrer que (u_n) est croissante

3) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Solution : les question 1) et 2) sont déjà montrer dans Ex 05

Considérons la fonction définie sur $[1; 3]$ par $f: x \rightarrow \sqrt{2x + 3}$

• f est continue sur l'intervalle $[1; 3]$ car elle est dérivable ...

• $f([1; 3]) = [f(1); f(3)] = [\sqrt{5}; 3] \subset [1; 3]$

• $u_0 = 1 \in [1; 3]$

• La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = x \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est 3

Exercice 11

f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a-Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) \leq x$.

b-Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) On considère la suite (u_n) définie par:

$u_0 = \frac{1}{2}$ Et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$.

b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c-En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Solution :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x \\ &= \frac{x - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2\sqrt{1+x^2}^2}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - x^2(1+x^2)}{(x+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{x^2 - x^2 - x^4}{(x+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{-x^4}{(x+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \leq 0
 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - x \leq 0$; D'ou : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) \leq x$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(1 \times \sqrt{1+x^2}) - (x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{\sqrt{1+x^2}^2} \\
 &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
 &= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0
 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3)a) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

➤ Pour $n=0$ on a $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$

La propriété est donc vraie pour $n=0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et $0 \leq u_n \leq 1$, donc ;

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad ; \text{ car } \frac{1}{2} < 1$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$

b) Soit n un entier naturel,

On a : $(\forall x \in [0; 1]) : f(x) \leq x$, d'après 1)a)

et $u_n \in [0; 1]$ d'après 3)a)

Donc on pose $x = u_n$, on trouve $f(u_n) \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$; d'où la suite (u_n) est décroissante

c) la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$; car elle est dérivable sur $[0; 1]$
- $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; \frac{1}{2}] \subset [0; 1]$
- $u_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1]$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^4}{(x+x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad ; \text{ car } f(x) - x \text{ déjà calculé}$$

$$\Leftrightarrow -x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc la limite de la suite (u_n) est 0

Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
 d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$

Exercice 02

Soit la suite (u_n) tel que $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$
 2) Dédire la limite de (u_n)

Exercice 03

Soit la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

- 1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$
 4) Pour tout n dans N on pose : $v_n = u_n - 3$
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
 b) Exprimer v_n en fonction de n
 c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)
 5) Pour tout n dans IN on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$
 Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)
 6) Pour tout n dans IN on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$
 Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

Exercice 04

Soit (U_n) une suite tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{3U_n}{21+U_n}$ et $U_0 = 1$

- 1) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 0$
 2) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} \leq \frac{1}{7} U_n$
 3) En déduire la monotonie de (U_n)
 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ et calculer la limite de (U_n)
 5) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \sqrt{9 - 2U_n}$, calculer la limite de (V_n)

Exercice 05

(u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) , u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$ et $u_0 = 1$

- 1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > -2$
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) Pour tout n dans IN on pose : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$
 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
 b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim u_n$

Exercice 06

(u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$

- 1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n < 4$.
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$
 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
 b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 4) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
 b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 c) Dédire une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 07

f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) \leq x$.
 b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
 2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.
 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 c) Dédire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 08

(u_n) la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

- 4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$
 5) Montrer que (u_n) est croissante
 6) Dédire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite



Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$

Solution :

a) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".• Levons l'indétermination en **factorisant par le plus haut degré** :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$ par limite d'une somme Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$ par limite d'un produit.

d4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

b) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3(\sqrt{n})^2}{n\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$ donc par limite d'un produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty ,$$

d'où on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$

c) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$. Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, Car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$.

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, Car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{5 + 6 \times 0}{1 - 0} = 5$.



f) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$; Levons

l'indétermination : $2^n - 3^n = 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, Car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

Donc par limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

Exercice 02

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 0$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

2) Dédurre la limite de (u_n)

Solution :

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 0 \geq 0$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel ,

Supposons que $u_n \geq n$ et montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$.

On a $u_n \geq n$ donc $2u_n \geq 2n$

et donc $2u_n + 3 \geq 2n + 3$.

d'où $u_{n+1} \geq 2n + 3$

et on a $2n + 3 - (n + 1) = n + 2 \geq 0$

donc $2n + 3 \geq (n + 1)$

Donc $u_{n+1} \geq n + 1$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 03

Soit la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$

2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente

3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$

4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$

Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)

6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$

Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

Solution :

1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 2 < 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

Soit n un entier naturel,

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

On a $u_n < 3$ donc $\frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3} \times 3$

et donc $\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$. ; d'où $u_{n+1} < 3$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) u_n + 2 = -\frac{2}{3}u_n + 2 \\ &= -\frac{2}{3} \left(u_n - 2 \times \frac{3}{2} \right) = -\frac{2}{3}(u_n - 3) \end{aligned}$$



$$u_n < 3 \Rightarrow u_n - 3 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}(u_n - 3) > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

On a la suite (u_n) est majorée par 3 et croissante donc elle est convergente

3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$

On a la suite (u_n) est croissante donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq u_0 = 2$

4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

b) Exprimer v_n en fonction de n

On a la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times (q)^n$$

$$\text{Donc } v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

$$\text{On a } v_n = u_n - 3$$

$$\text{Donc } u_n = 3 + v_n$$

$$\text{Donc } u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$
Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)

On a la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$

$$\text{Donc } S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\text{Donc } S_n = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Donc } S_n = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$
Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

On a $u_n = 3 + v_n$ donc :

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ &= 3 + v_0 + 3 + v_1 + \dots + 3 + v_{n-1} + 3 + v_n \\ &= 3 + 3 + \dots + 3 + 3 + v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n \\ &= 3(n+1) + S_n \\ &= 3(n+1) - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+1) - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+1) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{3}{2}$$



Exercice 04

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \text{ et } U_0 = 1$$

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

2) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$

3) En déduire la monotonie de (u_n)

4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq (\frac{1}{7})^n$

puis calculer la limite de (u_n)

5) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{9 - 2u_n}$,

Calculer la limite de (v_n)

Solution :

1) Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > 0$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

$$* \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$$

Et on a : $u_n > 0$

donc $3u_n > 0$ et $21 + u_n > 0$

$$\text{Donc } \frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$$

Donc $u_{n+1} > 0$.

➤ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

2) Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{7} u_n &= \frac{3u_n}{21 + u_n} - \frac{1}{7} u_n \\ &= \frac{7 \times 3u_n - (21 + u_n)u_n}{21 + u_n} \\ &= \frac{21u_n - 21u_n - u_n^2}{21 + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2}{21 + u_n} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{1}{7} u_n \leq 0$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$$

2^{ème} méthode : (l'encadrement)

On a : $u_n > 0$ donc $21 + u_n \geq 21$

$$\text{Donc : } \frac{1}{21 + u_n} \leq \frac{1}{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{21 + u_n} \leq \frac{3}{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{21 + u_n} \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{Donc : } \frac{3u_n}{21 + u_n} \leq \frac{1}{7} u_n ; \text{ car } u_n > 0$$

$$\text{D'ou : } u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$$



3) Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$ et $u_n > 0$

Donc : $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n$ il suffit de montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

1ère méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

On a $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ donc $\frac{1}{7}u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

Et on a d'après la question précédente $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

Donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'où : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

2ème méthode :

On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

Pour $n=0$ on a : $u_1 \leq \frac{1}{7}u_0$

Pour $n=1$ on a : $u_2 \leq \frac{1}{7}u_1$

...

Pour $n-2$ on a : $u_{n-1} \leq \frac{1}{7}u_{n-2}$

Pour $n-1$ on a : $u_n \leq \frac{1}{7}u_{n-1}$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on

trouve : $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \frac{1}{7}u_0 \times \frac{1}{7}u_1 \times \dots \times \frac{1}{7}u_{n-1} \times \frac{1}{7}u_n$

C-à-dire : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Déduite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Et on a : $-1 < \frac{1}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

5) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{9 - 2u_n}$, calculer la limite de (v_n)

On a : $v_n = \sqrt{9 - 2u_n} = f(u_n)$ tel que $f: x \mapsto \sqrt{9 - 2x}$

On a la fonction f est continue en 0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0) = \sqrt{9} = 3$



Exercice 05

(u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$ et $u_0 = 1$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > -2$

2) Montrer que (u_n) est convergente

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

b) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

Solution :

1) Démontrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > -2$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > -2$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n > -2$ et montrons que $u_{n+1} > -2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2 \\ &= 3 - \frac{9}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 5) - 9}{u_n + 5} \\ &= \frac{3u_n + 6}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} \end{aligned}$$

On a $u_n > -2$ donc $u_n + 5 > 3$ donc $u_n + 5 > 0$

Et on a $u_n > -2$ donc $u_n + 2 > 0$ donc $3(u_n + 2) > 0$

Donc $\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} > 0$ donc $u_{n+1} + 2 > 0$ donc $u_{n+1} > -2$

➤ D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > -2$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5} \\ &= \frac{-4 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 5} \\ &= \frac{-(u_n^2 + 4u_n + 4)}{u_n + 5} = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante

la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 donc elle est convergente

3)a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5}} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} - \frac{3}{3(u_n + 2)} \\ &= \frac{u_n + 5 - 3}{3(u_n + 2)} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

b) Soit n un entier naturel,

la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{3}$

Donc $v_n = v_0 + r(n - 0)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n \\ &= \frac{1}{3}(1 + n) \end{aligned}$$



$$v_n = \frac{1}{u_n + 2} \Rightarrow u_n + 2 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)} - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1+n} - 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+n} - 2 = -2 ; \text{ car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+n} = 0$$

Exercice 06

(u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$

1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n < 4$.

2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a-Montrer que la suite (v_n) est géométrique

b- Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) a-Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b-En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c-Déduite une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution :

➤ 1) Pour $n=0$ on a $2 < u_0 = 3 < 4$ donc la PV pour $n = 0$

➤ Supposons que $2 < u_n < 4$ et montrons que $2 < u_{n+1} < 4$.

$$\begin{aligned} * u_{n+1} - 2 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 \\ &= \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{6u_n - 12}{u_n + 2} = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

On a $u_n > 2$

donc $u_n + 2 > 4$

Donc $u_n - 2 > 0$

Et $u_n > 2$

donc $u_n - 2 > 0$

Donc $6(u_n - 2) > 0$

Donc : $\frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$

Donc $u_{n+1} > 2$.

d'où $2 < u_{n+1} < 4$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} : 2 < u_n < 4$

$$\begin{aligned} * u_{n+1} - 4 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 4 \\ &= \frac{8(u_n - 1) - 4(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n - 16}{u_n + 2} = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Et on a $u_n < 4$

Donc $u_n - 4 < 0$

donc $4(u_n - 2) < 0$

Et $u_n + 2 > 0$;

donc $\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$

Donc $u_{n+1} - 4 < 0$

Donc $u_{n+1} < 4$



2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n \\
 &= \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\
 &= \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\
 &= \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 8)}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{u_n + 2} \\
 2 < u_{n+1} < 4 &\Rightarrow (u_n - 4) < 0 \text{ et } (u_n - 2) > 0 \text{ et } (u_n + 2) > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0
 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante

la suite (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle est convergente

3)a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}}{\frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}} \\
 &= \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} \\
 &= \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3} v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$

c) v_n en fonction de n

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = -1$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } v_n &= v_0 \times (q)^{n-0} \\
 &= - \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

* u_n en fonction de n

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Rightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 4 \\
 &\Rightarrow u_n v_n - 2v_n - u_n = -4 \\
 &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 4 \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{2v_n - 4}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}
 \end{aligned}$$

* la limite de la suite (u_n)

$$\text{On a: } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{D'ou: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{0 - 4}{0 - 1} = 4 ;$$

4)a) Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned}
 4 - u_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - u_n) &= \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n) \\
 &= 4(4 - u_n) \left(\frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= 4(4 - u_n) \left(\frac{5 - u_n - 2}{u_n + 2} \right) \\
 &= \frac{4(4 - u_n)(3 - u_n)}{u_n + 2}
 \end{aligned}$$

On a la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$

Donc $u_n \geq 3$ donc $3 - u_n \leq 0$

Et on a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Et on a $u_n + 2 > 0$

$$\text{Donc } \frac{4(4 - u_n)(3 - u_n)}{u_n + 2} \leq 0 ;$$

$$\text{Donc } 4 - u_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq 0$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

**2ème méthode : (l'encadrement)**

On a d'après la question 1) : $4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$

En a la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$ c-à-dire $u_n \geq 3$

Donc $u_n + 2 \geq 5$

Donc : $\frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5}$

Et on a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Donc $4(4 - u_n) > 0$

D'où : $\frac{1}{u_n + 2} \times 4(4 - u_n) \leq \frac{1}{5} \times 4(4 - u_n)$

DONC : $\frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

D'où $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b-En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

1ère méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $4 - u_0 = 4 - 3 = 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ montrons que $4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

On a $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $\frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Et on a d'après la question précédente $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

Donc $4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

2ème méthode :

On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}): 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

Pour $n=0$ on a : $4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)$

Pour $n=1$ on a : $4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1)$

...

...

....

Pour $n-2$ on a : $4 - u_{n-1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-2})$

Pour $n-1$ on a : $4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on trouve :

$(4 - u_1)(4 - u_2) \dots (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \frac{4}{5}(4 - u_1) \dots \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$

C-à-dire : $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0)$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c-Déduite une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Et on a : $-1 < \frac{4}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$



Exercice 07

f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a-Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) \leq x$.

b-Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) On considère la suite (u_n) définie par:

$u_0 = 1/2$ Et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.

b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c-En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Solution :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x \\ &= \frac{x - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2\sqrt{1+x^2}}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2(1+x^2)}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2 - x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - x \leq 0$; D'ou : $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) \leq x$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \times \sqrt{1+x^2}) - (x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{\sqrt{1+x^2}^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3)a) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

➤ Pour $n=0$ on a $0 \leq u_0 = 1/2 \leq 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et $0 \leq u_n \leq 1$, donc ;

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1/2$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad ; \text{ car } 1/2 < 1$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$

b) Soit n un entier naturel,

On a: $(\forall x \in [0; 1]): f(x) \leq x$, d'après 1)a)

et $u_n \in [0; 1]$ d'après 3)a)

Donc on pose $x = u_n$, on trouve $f(u_n) \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$; d'où la suite (u_n) est décroissante



c) la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$; car elle est dérivable sur $[0; 1]$
- $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; 1/2] \subset [0; 1]$
- $u_0 = 1/2 \in [0; 1]$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad ; \text{ car } f(x) - x \text{ déjà calculé}$$

$$\Leftrightarrow -x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc la limite de la suite (u_n) est 0

Exercice 08

(u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$

3) Montrer que (u_n) est croissante

4) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Solution :

1) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = 1 \leq 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $1 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Considérons la fonction $f: x \rightarrow \sqrt{2x+3}$ sur l'intervalle $[1; 3]$

On a f est dérivable sur $[1; 3]$ et $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1; 3]$,

$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$, car f est croissante

$$\Rightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 3 \quad ; \text{ car } 1 < \sqrt{5}$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow u_n - 1 \geq 0 \text{ et } u_n - 3 \leq 0 \text{ et } \sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

3) la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc convergente.

Considérons la fonction définie sur $[1; 3]$ par $f: x \rightarrow \sqrt{2x+3}$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- f est continue sur l'intervalle $[1; 3]$, car dérivable sur $[1; 3]$

$$f([1; 3]) = [f(1); f(3)] = [\sqrt{5}; 3] \subset [1; 3]$$

$$u_0 = 1 \in [1; 3]$$

- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow 2x+3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est 3

**I) Primitive d'une fonction****Exemple :**

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que F est dérivable et $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I , une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ est une primitive de } f(x) = x$$

Car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

Propriété :

f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I .

Démonstration :

F est une primitive de f . On pose $G(x) = F(x) + C$.

$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x). \text{ Donc } G \text{ est une primitive de } f.$$

Exemple :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ est une primitive de } f(x) = x \text{ sur } \mathbb{R}$$

Donc, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, sont des primitives de f .

Propriété :

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque :

Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.

Exercice 01

- 1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2$
- 2) Déterminer la fonction primitive G qui vérifie $G(1) = 2$

Solution

1) Toute fonction de la forme $F_C(x) = x^3 - 2x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, Sont des primitives de f .

$$\text{Car } \forall x \in \mathbb{R}: F'_C(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$$

$$\begin{aligned} 2) G(1) = 2 \text{ et } G \text{ est une primitive de } f &\Rightarrow 1^3 - 2 \times 1 + C = 2 \\ &\Rightarrow C = 3 \\ &\Rightarrow G(x) = x^3 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Propriété :

La différence de deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle est égale à d'une constante.

Démonstration :

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .

$$\text{Alors : } F'(x) = f(x) \text{ et } G'(x) = f(x).$$

$$\text{Donc : } F'(x) = G'(x), \text{ soit } F'(x) - G'(x) = 0, \text{ soit encore } (F - G)'(x) = 0.$$

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme C cette constante.

$$\text{Ainsi : } F(x) - G(x) = C \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

**II) Primitives des fonctions usuelles**

Fonction	Primitives	Sur I
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^r$ $r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan(x) + C$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$

2) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations :

$$-(F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$-(kF)' = kF' = kf$$

III) Opérations et fonctions composées

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et U et V sont leurs primitives sur l'intervalle I et k et C des constantes

Fonction	Primitives	Condition,
$f = u'u$	$F = \frac{u^2}{2}$	Sur I
$f = u'u^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	Sur I
$f(x) = u'u^r$ $r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$	$F = \frac{1}{r+1} u^{r+1} + C$	$u \neq 0$ sur I
$f = u'v + uv'$	$F = u.v + C$	sur I
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$f = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$F = \frac{u}{v} + C$	$v \neq 0$ sur I
$f(x) = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$	$v > 0$ sur I



Exercice 02

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0 ; +\infty[$

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$; 4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$; sur $I = \mathbb{R}^+$; 6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$; sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x)$, sur $I = \mathbb{R}$; 8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2 ; +\infty[$

9) $f(x) = x(x+2)^6$; sur $I = \mathbb{R}$

Solution

1) $f(x) = x^3 - 2x$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$

Donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C = x^3 + \frac{3}{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$

de type $u'u$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u$ est de la forme $\frac{1}{2}u^2$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ de type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

avec $u(x) = x^4 + x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$

$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C$. avec $C \in \mathbb{R}$,

5) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ donc $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$

de type $u'u^2$ avec $u(x) = \sin(x) \rightarrow u'(x) = \cos x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x)$

$= \cos(x)(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2 ; +\infty[$

$f(x) = \frac{x}{(x+2)^4} = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^4} = \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^4}$

$f(x) = (x+2)^{-3} - 2(x+2)^{-4}$

Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

$F(x) = \frac{1}{-2}(x+2)^{-2} - 2 \times \frac{1}{-2}(x+2)^{-3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

$F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

9) $f(x) = x(x+2)^6 = [(x+2) - 2](x+2)^6$
 $= (x+2)^7 - 2(x+2)^6$

$F(x) = \frac{1}{8}(x+2)^8 - \frac{2}{7}(x+2)^7 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

Exercice 01

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2$

2) Déterminer la fonction primitive G qui vérifie $G(1) = 2$

Exercice 02

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$;

4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$; sur $I = \mathbb{R}^+$;

6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$; sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x)$, sur $I = \mathbb{R}$;

8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2; +\infty[$

9) $f(x) = x(x+2)^6$; sur $I = \mathbb{R}$;

Exercice 03

f la fonction numérique définie sur $I =]1; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x-1)^3}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que:

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$$

2) En déduire la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2

Exercice 04

Dans chacun des cas suivants, Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

a) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (3x^2+1)\sqrt{x^3+x+3}$ et $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^4}$ et $I =]-1; 3[$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ et $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x+1}$ et $I =]0; +\infty[$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt[3]{x-1}$ et $I =]1; +\infty[$

g) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{7\pi}{6}\right) + \cos(5x) - 1$ et $I = \mathbb{R}$

h) $f(x) = (2x+1)\sqrt[5]{x^2+x+1}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$$

a- Justifier que la fonction f admet une fonction primitive définie sur l'intervalle I

b- Vérifier que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

c- En déduire les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

d- Déterminer la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2.



Exercice 01

Déterminer une primitive G de la fonction $f: x \rightarrow 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(1) = 2$

Solution

3) Toute fonction de la forme $F_C(x) = x^3 - 2x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

Sont des primitives de f . Car $\forall x \in \mathbb{R}: F'_C(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$

$$G(1) = 2 \text{ et } G \text{ est une primitive de } f \Rightarrow 1^3 - 2 \times 1 + C = 2$$

$$\Rightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow G(x) = x^3 - 2x + 3$$

Exercice 02

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$; 4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$; sur $I = \mathbb{R}^+$; 6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$; sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x)$, sur $I = \mathbb{R}$; 8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2; +\infty[$

9) $f(x) = x(x+2)^6$; sur $I = \mathbb{R}$

Solution

1) $f(x) = x^3 - 2x$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$

Donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C = x^3 + \frac{3}{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$

de type $u'u$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u$ est de la forme $\frac{1}{2}u^2$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ de type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

avec $u(x) = x^4 + x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$

$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C$. avec $C \in \mathbb{R}$,

5) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ donc $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$

de type $u'u^2$ avec $u(x) = \sin(x) \rightarrow u'(x) = \cos x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x)$
 $= \cos(x)(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4} = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^4} = \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^4}$
 $= (x+2)^{-3} - 2(x+2)^{-4}$

Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

$F(x) = \frac{1}{-2}(x+2)^{-2} - 2 \times \frac{1}{-2}(x+2)^{-3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

$F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

9) $f(x) = x(x+2)^6 = [(x+2) - 2](x+2)^6$
 $= (x+2)^7 - 2(x+2)^6$

$F(x) = \frac{1}{8}(x+2)^8 - \frac{2}{7}(x+2)^7 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

I) Fonction logarithme népérien :

Activité

I)1) Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une fonction primitive qui s'annule en 1 sur $]0, +\infty[$

2) Vérifier que $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée, puis déduire la monotonie de $\ln$ sur $]0, +\infty[$

1) Déterminer le signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$

II) On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x) = \ln(ax) - (\ln a + \ln x)$; tel que sur $a \in]0, +\infty[$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis déduire que pour tout x de $]0, +\infty[: F'(x) = 0$

b) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[: F(x) = 0$

2) a) Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

b) Déduire que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ et $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

c) Montrer par récurrence que $\ln x^n = n \ln x$, avec n entier naturel

d) Montrer que $(\forall m \in \mathbb{Z}^-) ; \ln(x^m) = m \ln(x)$

e) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln(x)$

f) Montrer que $(\forall r \in \mathbb{Q}) ; \ln(x^r) = r \ln(x)$

Solution

I)1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **continue** sur $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$ donc admet une primitive qui s'annule en 1

La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction :

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

2) La fonction $\ln$ est dérivable car c'est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$:

Donc pour tout x de $]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

D'où la fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$

3) Déterminer le signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$

On a $\ln$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 0$$

Sur l'intervalle $]0, 1]$

On a $\ln$ est str croissante sur $]0, 1]$ donc

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 0$$

Conclusion : (le tableau de signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$)

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	--	0	+

II) On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x) = \ln(ax) - (\ln a + \ln x)$; tel que sur $a \in]0, +\infty[$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis déduire que pour tout x de $]0, +\infty[: F'(x) = 0$

La fonction $u : x \mapsto ax$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Et $u([0, +\infty[) =]a, +\infty[$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]a, +\infty[\subset]0, +\infty[$

Donc la fonction $x \mapsto \ln(ax)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Et on a la fonction $x \mapsto \ln a + \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Donc la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$

Donc pour tout x de $]0, +\infty[: F'(x) = (ax)' \ln'(ax) - \frac{1}{x}$

Donc $F'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$; rappel $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

Donc pour tout x de $]0, +\infty[: F'(x) = 0$



b) On a pour tout x de $]0, +\infty[: F'(x) = 0$ donc F est une fonction constante

Donc pour tout x de $]0, +\infty[: F(x) = F(1) = 0$

2) a) On a Donc pour tout x de $]0, +\infty[: F(x) = 0$

Donc $\ln(ax) - (\ln a + \ln x) = 0$, on pose $a = y$, on trouve

$$(\forall x; y \in]0, +\infty[); \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

b) Dédurre que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ et $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

b) $\ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln \left(\frac{1}{x} \times x \right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln \left(x \times \frac{1}{y} \right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

$$2 \ln \sqrt{x} = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln x \text{ donc } \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

c) Pour $n=0$ on a : $\ln 1 = 0$, donc la proposition est vraie pour 0

Soit n entier naturel

Supposons que $\ln x^n = n \ln x$,

et montrons que $\ln x^{n+1} = (n+1) \ln x$,

$$\ln x^{n+1} = \ln(x^n \times x) = \ln x^n + \ln x = n \ln x + \ln x = (n+1) \ln x$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \ln x^n = n \ln x$

d) Soit $m \in \mathbb{Z}^-$; on pose $n = -m$ donc $n \in \mathbb{N}$

Donc $\ln x^n = n \ln x$; donc $\ln x^{-m} = -m \ln x$

$$\text{Donc } \ln \frac{1}{x^m} = -m \ln x \Rightarrow -\ln x^m = -m \ln x$$

D'où $(\forall m \in \mathbb{Z}^-); \ln(x^m) = m \ln(x)$

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x = (x^n)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{1}{n} \ln(x) = \frac{1}{n} \ln \left((x^n)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{n}{n} \ln \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left(x^{\frac{1}{n}} \right)$$

f) $r \in \mathbb{Q}$; On pose $r = \frac{m}{n}$ te que $m \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(x^r) = \ln \left(x^{\frac{m}{n}} \right) = \ln \left(\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m \right) = m \ln \left(x^{\frac{1}{n}} \right)$$

$$= m \times \frac{1}{n} \ln(x) = \frac{m}{n} \ln(x) = r \ln(x)$$

1) Définition du fonction logarithme népérien

La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par $\ln$

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction :

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

La fonction $\ln$ est défini et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$

2) Propriétés algébrique le la fonction $\ln$

Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Conséquences

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\text{a) } \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\text{b) } \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\text{c) } \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\text{d) } \ln x^r = r \ln x, \text{ avec } r \text{ un nombre rationnel}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \ln(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \\ &= \ln[(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})] \\ &= \ln(\sqrt{6}^2 - \sqrt{5}^2) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 \\ &= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2 = \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2} = \ln \frac{40}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \ln \frac{5}{3} + \ln \frac{3}{7} + \ln \frac{7}{5} \\ &= \ln \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{5} \right) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

**Remarque**

Soient a et b deux réels strictement négatifs donc $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$

$$\ln(x \times y) = \ln|x| + \ln|y|$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln|x| - \ln|y|$$

$$\ln x^{2n} = 2n \ln|x|, \text{ avec } n \text{ un entier naturel}$$

3) Équations et inéquations**Propriétés :**

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$a) \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$b) \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

$$c) x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Tableau de signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	--	0	+

Exercice 01

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+3) ; f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Solution :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2-x > 0 \text{ et } x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ et } x > -3$$

$$\text{Donc: } D_E =]-\infty; 2[\cap]-3; +\infty[=]-3; 2[$$

$$x \in D_g \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\Delta = 1 > 0 \text{ donc } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0 - 0	+

$$\text{Donc: } D_g =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

Exercice 02

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) \ln(x-1) = 0 ; b) \ln(x^2 + x + 1) = 0,$$

$$c) (x+2) \ln(x-3) = 0 ; d) \ln(x+3) > 0$$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

Solution :

1) a) On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Donc: } D_E =]1; +\infty[$$

$$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

On note par S l'ensemble des solution de l'équation

$$\text{Donc: } S = \{2\}$$

b) On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$$

$$\text{Donc: } D_E = \mathbb{R} ; \text{ car } (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0 ; \Delta = -3 < 0)$$

$$\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Donc: } S = \{0; -1\}$$

c) On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Donc: } D_E =]3; +\infty[$$

$$(x+2) \ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } \ln(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x-3 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \notin D_E \text{ ou } x = 4$$

$$\text{Donc: } S = \{4\}$$



d) On note par D_I l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_I \Leftrightarrow x + 3 > 0$$

Donc: $D_I =]-3; +\infty[$

$$\ln(x + 3) > 0 \Leftrightarrow \ln(x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x + 3) > \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x + 3 > 1 \Leftrightarrow x \in]-2; +\infty[$$

Donc: $S =]-2; +\infty[\cap]-3; +\infty[=]-2; +\infty[.$

2) a) Ensemble de définition :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0 \quad \text{donc } x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3; 9[.$

Donc: $D_I =]3; 9[.$

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 3)(9 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 3)(9 - x) = \ln 1 \Leftrightarrow (x - 3)(9 - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3; 9[.$

Donc: $S = \{6 - 2\sqrt{2}; 6 + 2\sqrt{2}\}$

b) Ensemble de définition :

$$3 - x > 0 \text{ et } x + 1 > 0$$

Donc $x < 3$ et $x > -1$

L'inéquation est définie sur $] -1; 3[.$

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(3 - x) \leq \ln(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3 - x \leq x + 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc $] -1; 3[\cap [1; +\infty[$

Donc $S = [1; 3[.$

4) Limites de la fonction ln

Activité

1) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

(Tu peux poser $X = \frac{1}{x}$)

2) a) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[): 0 < \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

(Tu peux poser $X = x^n$)

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

➤ Limites aux bornes

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

➤ Coissances comparées

Propriétés

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

➤ Limite et nombre dérivé en 1

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

➤ Rappel (F.I): $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$



Exercice 03 : Calculer les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln \sqrt[3]{x}}$
 f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$; j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x})$; h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$

Solution :

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$.

b) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a, comme limite d'un

quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

d) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 \ln x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 \ln x = 1 + 0 = 1$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{3} x \ln x} = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$; $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$

f) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2(1 + \frac{1}{x^2}))}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2) + \ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} - 1 \right] = -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} = 0$

j) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty \cdot 0$ ".

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$; or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$$\begin{aligned} h) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (\ln(\sqrt[3]{x}))^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (3 \ln \sqrt[3]{x})^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3 \end{aligned}$$

On pose $X = \sqrt[3]{x}$ donc $x = X^3$; or $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (3X \ln X)^3 = 0 \quad ; \quad (\text{car } \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0)$$



5) Etude de la fonction logarithme népérien

➤ **Domaine de définition** est $D_{\ln} =]0, +\infty[$

➤ **Le sens des variations de la fonction $\ln$**

On a pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On dresse le tableau de variations de la fct logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

➤ **Tangentes particulières**

Rappel : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point

d'abscisse 1 est (T): $y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$

Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est

$y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1$; donc (T): $y = x - 1$

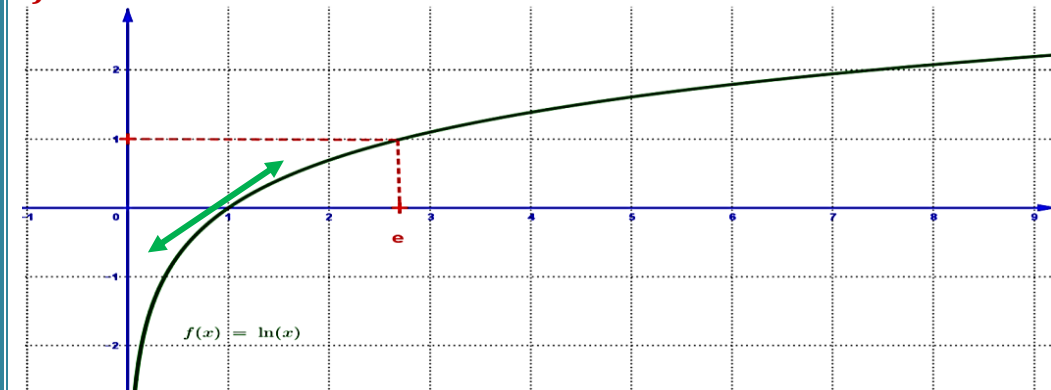
➤ **Les branches infinies de la courbe (Cf)**

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est un **asymptote verticale** à (Cf)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc (Cf) admet une **branche parabolique** de direction l'axe des abscisses (Ox) au voisinage de $+\infty$

6) La courbe de la fonction $\ln$



➤ Le nombre exponentielle e

La fonction $\ln$ est strictement croissante et continue sur $]0, +\infty[$

Donc l'équation $\ln(x)=1$ admet un unique solution dans $]0, +\infty[$

la solution est noté par e , donc on a : $\ln(e)=1$

Le nombre e est un nombre irrationnel $e \cong 2,71$

Propriété : Soient $x \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$$

Solution :

Simplifier et calculer :

$$\begin{aligned} A &= \ln(e^7) - 10\ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = 7\ln(e) - 10\ln(e) - \ln(e^{-3}) \\ &= 7 \times 1 - 10 \times 1 + 3 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 24\ln(\sqrt{e}) - 6\ln(e\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e^{-3}}\right) \\ &= 24\ln(e^{\frac{1}{2}}) - 6\ln(e) - 6\ln(e^{\frac{1}{2}}) - \ln(e^3) \\ &= 12 - 6 - 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Exercice 04

I) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$; 1) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

II) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

(E₁): $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$; (I₁): $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

Solution :

1) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$

Donc: $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

2) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 2 - \ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 2$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \leq e^2$

Donc $D_f =]-\infty; e^2] \cap]0; +\infty[$

Donc $D_f =]0; e^2]$



$$(E_1): \ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_E =]0; +\infty[$$

$$\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + \ln(x) - 2 = 0$$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$(E_5) \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0 \quad \text{Avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$X = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-2}$$

$$\text{Donc: } S = \{e; e^{-2}\}$$

$$(I_1): \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

$$x \in D_I \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_I =]0; +\infty[$$

➤ Résolvons l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \quad ; \text{avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{3 + \sqrt{1}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

➤ Tableau de signe de $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

x	0	e	e ²	+
$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$		+	0	-

➤ Donc les solution de l'inéquation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

$$\text{est } S =]e; e^2[$$

Exercice 05

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par } f(x) = 3 - x + 2 \ln x$$

2) Étudier la convexité de la fonction f .

Solution :

1) Sur $]0; +\infty[$ f est dérivable et, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	2	+
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$1 + 2 \ln 2$	-

$$\text{➤ } f(2) = 3 - 2 + 2 \ln 2 = 1 + 2 \ln 2$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x + 2 \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{x} - 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - x + 2 \ln x = -\infty$$

2) Sur $]0; +\infty[$, on a f' est dérivable de plus :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1 \times x - (2 - x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-x - 2 + x}{x^2} \\ &= \frac{-2}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$.



Exercice 06

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Solution :

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on a : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$g(1)=1$	

On en déduit que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0 ; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$ donc $g(x) > 0$ donc $x > \ln x$.

La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

6) Cas de la fonction composée $\ln u$ avec la fonction $u \neq 0$

Si u une fonction dérivable sur I alors $\ln(u)$ est dérivable sur I , et :

$$(\forall x \in I): (\ln(|u(x)|))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration : Cas 01 : $u > 0$

➤ la fonction $u: x \mapsto u(x)$ est dérivable sur I

et on a $(\forall x \in I); u(x) > 0$; donc $f(I) \subset]0, +\infty[$

➤ $v: x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $v'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

➤ Donc la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I

Et on a : $(\ln u(x))' = (v(u(x)))' = v'(u(x)) \times u'(x)$, selon la dérivée d'une fonction composée

$$\text{Donc } (\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

Dérivée la fonction g définie sur $]0 ; 2[$ par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

On pose : $u(x) = 2x - x^2 \rightarrow u'(x) = 2 - 2x$

$$(\forall x \in]0 ; 2[): g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $] -2 ; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1)a) Montrer que $D_f =] -2 ; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les deux résultats géométriquement

2)a) Montrer que f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer la courbe représentative de f .

Solution :

$$1)a) \quad x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} > 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$-\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{x+2}{1-x}$	-	0	+	-

$$D_f =] -2 ; 1[$$

b) Par composition de limites, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations : $x = -2$ et $x = 1$.

2)a) la fonction $u: x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$ est dérivable sur $] -2 ; 1[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $] -\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty [$
Donc la fonction f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Soit : $] -2 ; 1[$

$$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{x+2}{1-x}} = \frac{3}{(1-x)(x+2)}$$

u est strictement positive sur $] -2 ; 1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$. donc $f'(x) > 0$.

Et donc la fonction f est strictement croissante sur $] -2 ; 1[$.

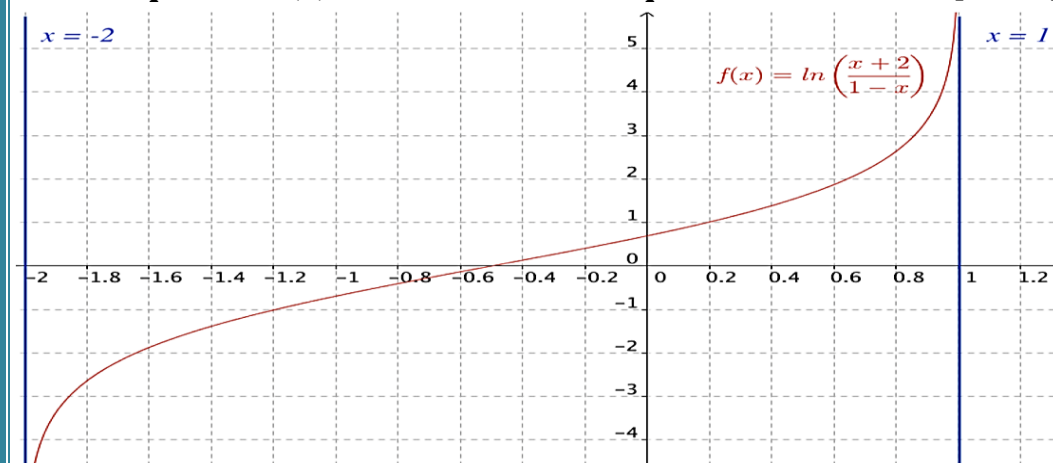
x	-2	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

➤ 3) La fonction f est continue sur $] -2 ; 1[$ en particulier $[-1, 0]$

➤ La fonction f est strictement croissante sur $[-1, 0]$

➤ Et on a $f(-1) = -\ln 2$ et $f(0) = \ln 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1, 0]$



Exercice 08

1) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[: 0 < \ln(1+x) < x$

2) Soit la suite $(U_n)_{n>1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : 0 < U_n < \frac{2}{n-1}$

b) Calculer la limite de $(U_n)_{n>1}$

Solution :

1) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[: 0 < \ln(1+x) < x$

Considérons f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I

Donc $x \in [0; +\infty[\Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x$$

Donc : $\forall x \in [0; +\infty[: 0 < \ln(1+x) < x$

2) Soit la suite $(U_n)_{n>1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : 0 < U_n < \frac{2}{n-1}$

$$\text{On a } n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} \Rightarrow n \geq 2 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{n-1} > 0$$

$$\text{Et on a : } \forall x \in [0; +\infty[: 0 < \ln(1+x) < x$$

$$\text{Donc on pose } x = \frac{2}{n-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}}$$

$$\text{On trouve } \forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : 0 < \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : 0 < U_n < \frac{2}{n-1}$$

b) Calculer la limite de $(U_n)_{n>1}$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}_{-\{0;1\}} : 0 < U_n < \frac{2}{n-1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1} = 0$$

Donc d'après théorème de gendarme on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

**Résultat :**

Les primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions : $x \rightarrow$

$$\ln(|u(x)|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

Exemple :

D'après l'exemple précédant $f: x \rightarrow \ln(2x - x^2)$ et $f': x \rightarrow \frac{2-2x}{2x-x^2}$

Donc les primitives de $x \rightarrow \frac{2-2x}{2x-x^2}$ sur $]0; 2[$ sont les fonctions :

$$x \rightarrow \ln(|2x - x^2|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

Exercice 09

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6} ; I = \mathbb{R} ;$ b) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} ; I =]0; 1[$

c) $f(x) = \frac{x^3 + x + 4}{x+1} ; I = \mathbb{R}^+ ;$ d) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2} ; I =]1; +\infty[$

Solution :

a) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6} = \frac{1}{6} \times \frac{6x^5}{1+x^6}$ de type $\frac{u'}{u}$

avec $u(x) = 1+x^6 \rightarrow u'(x) = 6x^5$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(|u|)$

Donc : $F(x) = \frac{1}{6} \ln(1+x^6) + C ;$ avec $C \in \mathbb{R},$

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ de type $\frac{u'}{u}$

avec $u(x) = \ln(x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(|u|)$

Donc : $F(x) = \ln(|\ln(x)|) + C .$ avec $C \in \mathbb{R},$

On a : $x \in]0; 1[$ donc $\ln x < 0$ donc $|\ln(x)| = -\ln x$

Donc : $F(x) = \ln(-\ln x) + C .$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + x + 4}{x+1} ; I = \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{r} x^3 + x + 4 \\ x^3 + x^2 \\ \hline 0 + x^2 - x + 4 \\ x^2 + x \\ \hline 0 - 2x + 4 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 + 6 \end{array}$$

Donc :

$$x^3 + x + 4 = (x+1)(x^2 + x - 2) + 6$$

$$\frac{x^3 + x + 4}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2 + x - 2)}{x+1} + \frac{6}{x+1}$$

Donc : $f(x) = \frac{x^3 + x + 4}{x+1} = x^2 + x - 2 + \frac{6}{x+1}$

Donc : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 6 \ln(x+1) + C ;$ avec $C \in \mathbb{R},$

d) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$

Donc il existe deux réels a et b tel que : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

Cherchons a et b :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Et on a : $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

Donc : $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 3b=9 \\ 2a-b=1 \end{cases} ; 2L_1 - L_2$

Donc : $\begin{cases} b=3 \\ 2a-3=1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases} ;$

Donc : $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

Donc : $F(x) = 2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+2) + C ;$ avec $C \in \mathbb{R},$

II) Fonction logarithme de base a

1) Définition du fonction logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et $a \neq 1$

La fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, est la fonction :

$$\log_a :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Résultat ;

- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$; $\log_a(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$
- $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$; $\log_a(1) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$
- $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$
- La fonction $\log_a$ est défini et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$

2) Propriétés algébrique le la fonction $\log_a$

Relation fonctionnelle

Théorème :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Conséquences

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- a) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x) - \log_a(y)$
- c) $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a(x)$
- d) $\log_a(x^r) = r \ln(x)$, avec r un nombre rationnel

2) Fonction logarithme décimale

Dans le cas de a=10

La fonction logarithme de base 10 ,est appelée fonction logarithme décimale notée $\log$, donc :

$$\log :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Résultat ;

- $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$; $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$
- $\log(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$; $\log(10^r) = \frac{r \ln(10)}{\ln(10)} = r$

Exercice 10

1) Montrer que : $\forall a; b \in]1 ; +\infty[; \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

2) Résoudre dans IR les équations suivantes :

(E): $\log_3(2x)(\log_5(x) - 1) = 0$; (F): $\log_2(x) = \log_x(2)$

Solution :

1) Soit $a; b \in]1 ; +\infty[$

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{1}{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} = \frac{1}{\log_b(a)}$$

2) On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

Donc: $D_E =]0 ; +\infty[$

$$\log_3(x)(\log_5(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x) = 0 \text{ ou } \log_5(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) = \log_3(1) \text{ ou } \log_5(x) = \log_5(5)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

$$\text{Donc: } S = \{1; 5\}$$



Exercice 01

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x + 3)$; 2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

3) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$; 4) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$; 5) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E₁): $\ln(x - 1) = 0$; (E₂): $3 - \ln x = 0$

(E₃): $\ln(x^2 + x + 1) = 0$; (E₄): $(x + 2) \ln(x - 3) = 0$

(E₅): $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$; (E₆): $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

(I₁): $\ln(x) - 1 \geq 0$; (I₂): $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$

(I₃): $\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0$; (I₄): $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

Exercice 04

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S₁): $\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases}$; (S₂): $\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

Exercice 05

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\sqrt[3]{x})}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$; k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$

Exercice 06

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \ln x$

1) Étudier les branches infinies de (Cf)

2) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : $y = -x$

3) Déterminer les variations de la fonction f

4) Étudier la convexité de la fonction f .

5) Tracer (D) et (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 08

A) Soit g une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

3) Montrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[; g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $A(1 ; 1)$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$; (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 09

Soit la fonction f définie sur $] -2 ; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1)a) Montrer que $D_f =] -2 ; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les deux résultats géométriquement

2)a) Montrer que f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer la courbe représentative de f .



Exercice 10

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$. (On donne $g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4$)

3) Déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$ et dresser le tableau de variations de f

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Exercice 11

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite de 0

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

4)a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

5) Etudier la convexité de la courbe (C_f)

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

3) Déduire que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Exercice 01

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

3) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$; 4) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$; 5) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

Solution :

1) $f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+3)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2-x > 0 \text{ et } x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ et } x > -3$$

Donc: $D_f =]-\infty; 2[\cap]-3; +\infty[=]-3; 2[$

2) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

On résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6$

$$\Delta = 1 > 0 \text{ donc } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

On dresse le tableau de signe de $x^2 - 5x + 6$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0 - 0	+

Donc: $D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$$

Donc: $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

4) $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \ln x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } (x \neq 0 \text{ ou } \ln x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

Donc: $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

5) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 2 - \ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \leq e^2$$

Donc $D_f =]-\infty; e^2[\cap]0; +\infty[=]0; e^2[$

Exercice 02

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E₁): $\ln(x-1) = 0$; (E₂): $3 - \ln x = 0$

(E₃): $\ln(x^2 + x + 1) = 0$; (E₄): $(x+2) \ln(x-3) = 0$

(E₅): $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$; (E₆): $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

Solution :

(E₁): $\ln(x-1) = 0$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc: $D_E =]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

On note par S l'ensemble des solutions de l'équation

Donc: $S = \{2\}$

(E₂): $3 - \ln x = 0$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$$

Donc: $D_E =]0; +\infty[$

$$3 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

Donc $S = \{e^3\}$



$$(E_3): \ln(x^2 + x + 1) = 0$$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$$

$$\text{Donc: } D_E = \mathbb{R} ;$$

$$\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0 ; \Delta = -3 < 0$$

$$\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{Donc: } S = \{0; -1\}$$

$$(E_4): (x + 2) \ln(x - 3) = 0$$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Donc: } D_E =]3; +\infty [$$

$$(x + 2) \ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } \ln(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \notin D_E \text{ ou } x = 4$$

$$\text{Donc: } S = \{4\}$$

$$(E_5): \ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_E =]0; +\infty [$$

$$\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + \ln(x) - 2 = 0$$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$(E_5) \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0 \text{ Avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$X = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-2}$$

$$\text{Donc: } S = \{e; e^{-2}\}$$

$$(E_6): \ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$$

Ensemble de définition :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0 \quad \text{donc } x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3; 9[$.

$$\text{Donc: } D_I =]3; 9[.$$

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(9 - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3; 9[$.

$$\text{Donc: } S = \{6 - 2\sqrt{2}; 6 + 2\sqrt{2}\}$$

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(I_1): \ln(x) - 1 \geq 0 \quad ; \quad (I_2): \ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$(I_3): \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0 \quad ; \quad (I_4): \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

Solution :

$$(I_1): \ln(x) - 1 \geq 0$$

On note par D_I l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_I \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_I =]0; +\infty [$$

$$\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x \geq e$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty [$$

$$\text{Donc: } S = [e; +\infty [\cap]0; +\infty [= [e; +\infty [.$$



$$(I_2): \ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

L'inéquation est définie si : $3-x > 0$ et $x+1 > 0$

Donc $x < 3$ et $x > -1$

L'inéquation est définie sur $]-1; 3[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(3-x) \leq \ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3-x \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc $]-1; 3[\cap [1; +\infty[$

Donc $S = [1; 3[$.

$$(I_3): \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0$$

L'inéquation est définie si $1 - \frac{2}{x} > 0$; Donc $\frac{x-2}{x} > 0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{x-2}{x}$	+	-	0	+

Donc : $D_I =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} > 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble solution est donc $]-\infty; 0[\cap (]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[)$

Donc $S =]-\infty; 0[$.

$$(I_4): \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

$$x \in D_I \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Donc: } D_I =]0; +\infty[$$

➤ Résoudrons l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \quad ; \text{ avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{3 + \sqrt{1}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

➤ Tableau de signe de $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

x	0	e	e ²	$+\infty$
$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$		+	0 - 0	+

➤ Donc les solution de l'inéquation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

est $S =]e; e^2[$

Exercice 04

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_2): \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

Solution :

$$(S_1): \begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \quad ; (S_1) \text{ est défini si } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1ère méthode :

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ 2\frac{4-7\ln y}{3} + 5\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ \frac{8-14\ln y + 15\ln y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ \ln y + 8 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7\ln y}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4-7}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = e \end{cases}$$

Donc : $S = \{(e^{-1}; e)\}$

2ème méthode :

On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 7Y = 4 \\ 2X + 5Y = 3 \end{cases}$$

Par la méthode de déterminant on a :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

$$D_X = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$$

$$\text{Donc } X = \frac{D_X}{D} = -1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{D_Y}{D} = 1$$

$$\text{Donc } \ln(x) = -1 \quad \text{et} \quad \ln(y) = 1$$

$$\text{Donc } x = e^{-1} \quad \text{et} \quad y = e$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-1}; e)\}$$

$$(S_2): \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}; (S_2) \text{ est défini si } x > 0 \text{ et } y > 0$$

1ère méthode :

On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$$

Rappel :

Pour déterminer deux réels x et y tels que

$x + y = S$ et $x \times y = P$ avec S et P donnés

On résout l'équation $t^2 - St + P = 0$

Donc on résout l'équation $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{3 + \sqrt{49}}{2}$$

$$X = -2 \quad \text{et} \quad Y = 5$$

$$\ln x = -2 \quad \text{et} \quad \ln y = 5$$

$$x = e^{-2} \quad \text{et} \quad y = e^5$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$

2ème méthode :

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln y - \ln^2 y + 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 y - 3\ln y - 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln y + 2)(\ln y - 5) = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = -2 \text{ ou } \ln y = 5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \text{ ou } y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ x = e^5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$



Exercice 05

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\sqrt[3]{x})}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$
j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x})$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$; k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$

Solution :

Rappel (F.I): $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$.

b) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a, comme limite d'un

quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

d) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 \ln x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 \ln x = 1 + 0 = 1$

$$\begin{aligned} e) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln \sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x^{\frac{1}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{3} x \ln x} = -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$; $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$

f) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} - 1 \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = 0$$



j) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $+\infty \cdot 0$ ".

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;
or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2$$

$$= 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (\ln(\sqrt[3]{x})^3)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (3 \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

On pose $X = \sqrt[3]{x}$ donc $x = X^3$;
or $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (3 X \ln X)^3 = 0$$

; (car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$)

Exercice 06

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \ln x$

- 1) Etudier les branches infinies de (Cf)
- 2) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : $(\Delta): y = -x$
- 3) Déterminer les variations de la fonction f
- 4) Étudier la convexité de la fonction f .
- 5) Tracer (D) et (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :

- 1) Etudier les branches infinies de (Cf)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + \ln x$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln(x) + x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant la droite (Δ) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

2) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : (Δ): $y = -x$

$$\begin{aligned}f(x) - (-x) &= 1 - x + \ln(x) + x \\ &= 1 + \ln(x)\end{aligned}$$

Cherchons le signe de $1 + \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

$$1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$f(x) + x$		-	0	+
<i>Posion</i> relative	(Cf) est en dessous de (Δ)	$A(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e})$ Point d'intersection	(Cf) est en dessus de (Δ)	

3) Sur $]0 ; +\infty[$ f est dérivable et, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$		

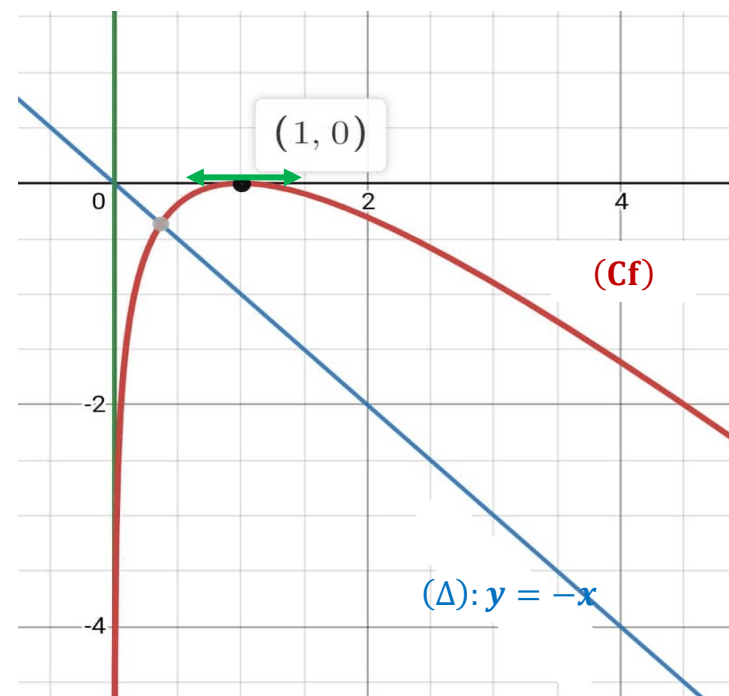
$$\triangleright f(2) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

4) Sur $]0 ; +\infty[$, on a f' est dérivable de plus :

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{-1 \times x - (1 - x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-x - 1 + x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0\end{aligned}$$

On en déduit que (Cf) la courbe de f est concave sur $]0 ; +\infty[$.

5) Tracer (D) et (Cf) dans un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$)





Exercice 08

A) Soitg une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

B) f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \frac{1+\ln(x)}{x}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ;1)

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{2}, 1[$; (On prend $f(\frac{1}{2}) = -0,2$)

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution :

B) Soitg une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g
g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$

donc $g(x) > 0$

B) f une fonction définit sur $]0; +\infty[$; par $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) + 1 + \ln(x)}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptotes verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme des fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

Rappel : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1 + 1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de f

On a : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$

$-\infty \rightarrow$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ; 1)

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 1 \times (x - 1) + 1$$

$$(T): y = x$$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

➤ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$

➤ La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = f(]0, +\infty[)$

$$J = f(]0, +\infty[)$$

$$=]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$=]-\infty, +\infty[$$

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{2}, 1[$; (On prend $f(\frac{1}{2}) = -0,2$)

➤ La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en particulier $[\frac{1}{2}, 1]$

➤ La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on particulier sur $[\frac{1}{2}, 1]$

➤ Et on a $f(1) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = -0,2$ donc $f(1) \times f(\frac{1}{2}) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[\frac{1}{2}, 1]$

6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

(Cf) et (Cf^{-1}) sont symétrique par rapport à la droite (T): $y = x$

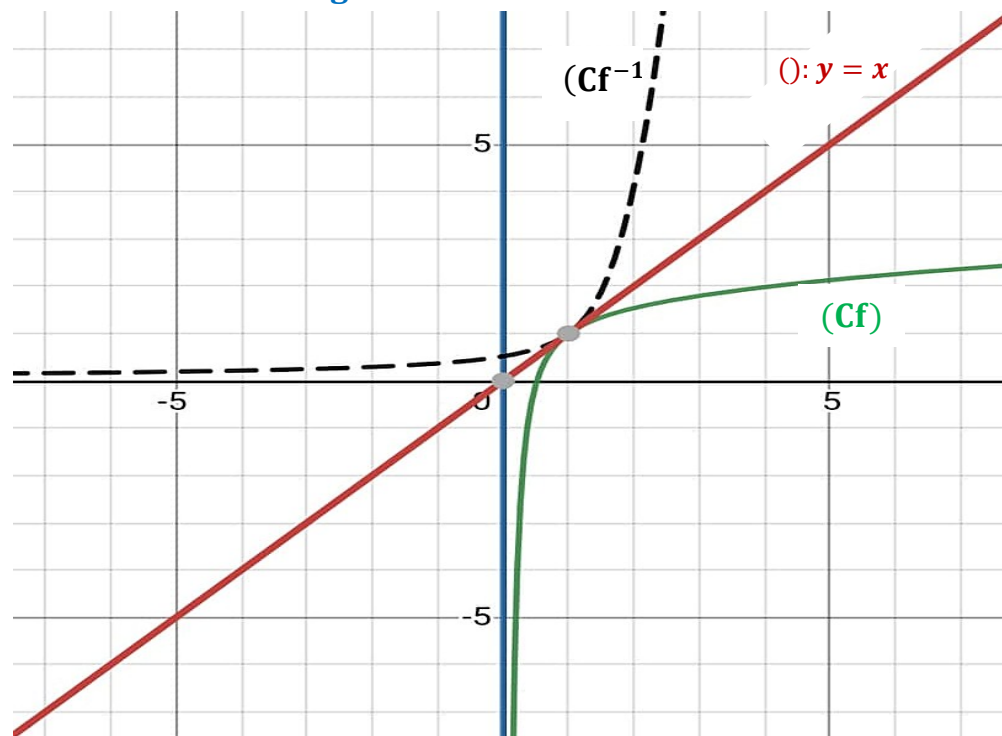
La droite d'équation $x = 0$ est asymptotes verticale à (Cf) La

droite d'équation $y = 0$ est asymptotes horizontale à (Cf^{-1})



la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$; donc

la courbe (Cf⁻¹) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 09

Soit la fonction f définie sur $] -2 ; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1)a) Montrer que $D_f =] -2 ; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les deux résultats géométriquement

2)a) Montrer que f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer la courbe représentative de f .

Solution :

1)a) $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} > 0$; On dresse le tableau de signe de $\frac{x+2}{1-x}$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$		-	0	+
$1-x$		+	0	-
$\frac{x+2}{1-x}$		-	0	+

$$D_f =] -2 ; 1[$$

b) Par composition de limites, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations : $x = -2$ et $x = 1$.

2)a) la fonction $u: x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$ est dérivable sur $] -2 ; 1[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $] -\infty ; 1[\cup] 1 ; +\infty [$
Donc la fonction f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Soit : $] -2 ; 1[$

$$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{x+2}{1-x}} = \frac{3}{(1-x)(x+2)}$$

u est strictement positive sur $] -2 ; 1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$. donc $f'(x) > 0$.

Et donc la fonction f est strictement croissante sur $] -2 ; 1[$.

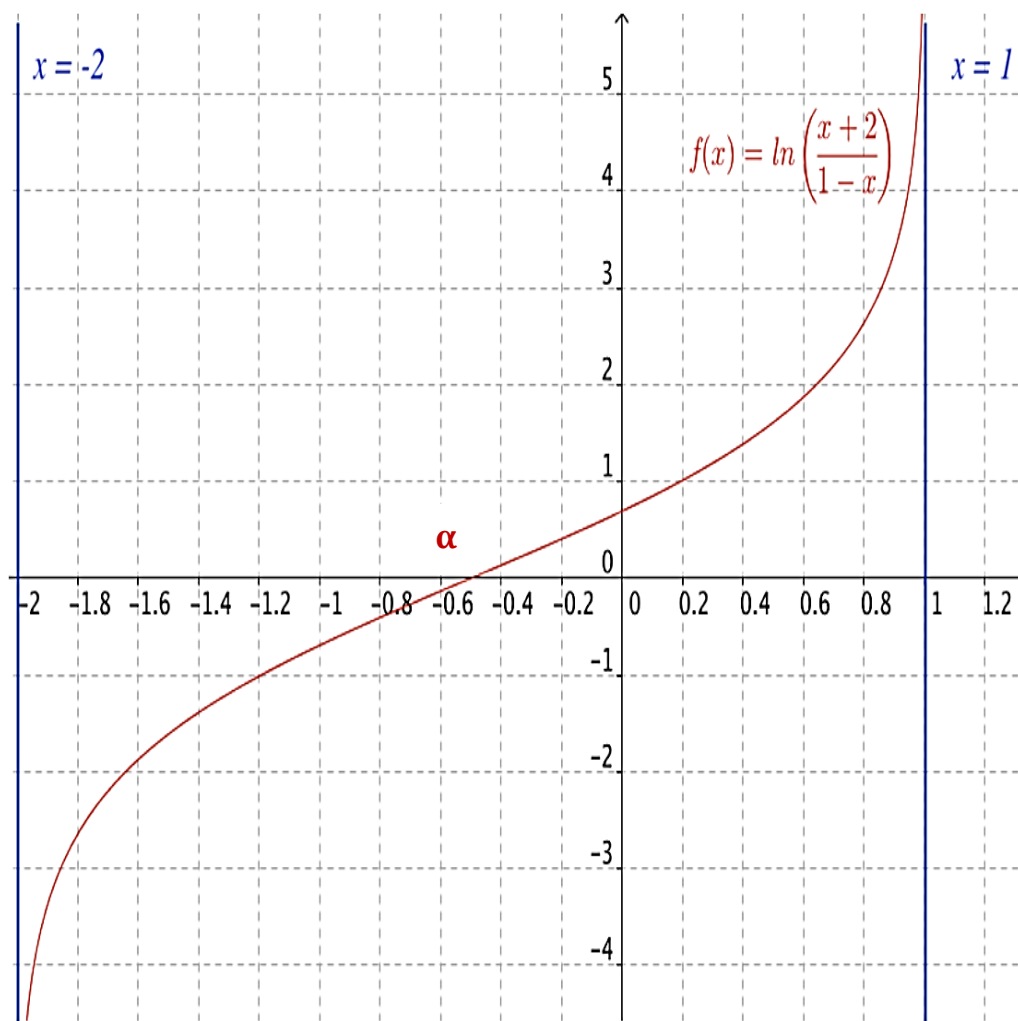
x	-2	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

- La fonction f est continue sur $] -2 ; 1[$ en particulier $[-1, 0]$
 - La fonction f est strictement croissante sur $] -2 ; 1[$ on particulier sur $[-1, 0]$
 - Et on a $f(-1) = -\ln 2$ et $f(0) = \ln 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$
- Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer sa courbe représentative de f .



Exercice 10

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$. (On donne $g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4$)

3) Dédurre le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Dédurre que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$ et dresser le tableau de variations de f

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x \ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J à déterminer

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.



B) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x + \ln x = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x + \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a ;

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$. (On donne $g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4$)

On a g est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$

Et on a g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{De plus } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[$$

$$\text{Donc } 0 \in g(]0; +\infty[)$$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

Vérifions que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$

On a g est continue sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

Et g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

$$\text{ET: } g\left(\frac{1}{5}\right) = -0,4 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} = \ln(e) - \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$$

3) Dédurre le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

On distingue deux cas ; $x \in]0; \alpha]$ et $x \in [\alpha; +\infty[$

Soit : $x \in]0; \alpha]$

$x \in]0; \alpha] \Rightarrow x \leq \alpha$ et g est str croissante sur $]0; \alpha]$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [\alpha; +\infty[$

$x \in [\alpha; +\infty[\Rightarrow \alpha \leq x$ et g est str croissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\Rightarrow g(\alpha) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

On dresse le tableau de signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$-\infty$
$g(x)$		0	+

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \ln x}{1+x} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue à droite de 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis

interpréter graphiquement le résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\frac{1}{x} + 1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 0
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{1+x} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

la courbe (Cf) admet une demis tangente verticale au point

A(0 ; 0) dirigée vers le bas

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

On la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(4 \ln x + 4x \times \frac{1}{x}\right)(x+1) - (4x \ln x \times 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x \ln x + 4 \ln x + 4x + 4 - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \ln x + 4x + 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Dédire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

On a : pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$ et $(x+1)^2 > 0$

Donc le signe de f' est le signe de g sur $]0; +\infty[$

Et on a d'après la partie A) le signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$-\infty$
g(x)	-	0	+

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$



d) Montrons que $f(\alpha) = -4\alpha$

On a : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha}$

Et d'après la partie A) le α est solution de l'équation $g(x) = 0$

Donc $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha + \ln(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha = -\ln(\alpha)$

Donc : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\alpha \ln \alpha}{-\ln(\alpha)} = -4\alpha$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	-4α	$+\infty$

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu' u^{n-1}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

On a : $f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x + 1)^2}$

Donc : $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x + 1)^2 - 4(\ln x + x + 1) \times 2 \times 1 \times (x + 1)^1}{(x + 1)^4}$

Donc : $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x + 1)^2 - 8(\ln x + x + 1)(x + 1)}{(x + 1)^4}$

Donc : $f''(x) = \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x + 1) - 8(\ln x + x + 1)}{(x + 1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{\frac{4(1+x)^2}{x} - 4\left(\frac{2x \ln x + 2x^2 + 2x}{x}\right)}{(x + 1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4[x^2 + 2x + 1 - (2x \ln x + 2x^2 + 2x)]}{x(x + 1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4[x^2 + 2x + 1 - 2x \ln x - 2x^2 - 2x]}{x(x + 1)^3}$

Donc : $f''(x) = \frac{4(1 - x^2 - 2x \ln x)}{x(x + 1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

Il est clair que le signe de f'' dépend du signe de $1 - x^2 - 2x \ln x$

1ère méthode

On a : $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Et on a : $-2x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

on dresse le tableau de signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x^2$	+	0	-
$-2x \ln x$	+	0	-

Soit $x \in]0; 1]$

Donc $1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$

Donc $f''(x) \geq 0$

Soit $x \in [1; +\infty[$

Donc $1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$

Donc $f''(x) \leq 0$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1

Donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

2ème méthode

$x \in]0; 1] \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0$

$x \in]0; 1] \Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \leq 0 \Rightarrow -2x \ln x \geq 0$

Donc $\forall x \in]0; 1] : 1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \geq 0 \Rightarrow -2x \ln x \leq 0$

Donc $\forall x \in [1; +\infty[: 1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1



c) Donner l'équation de la tangente (T)

à (C_f) au point d'abscisse 1

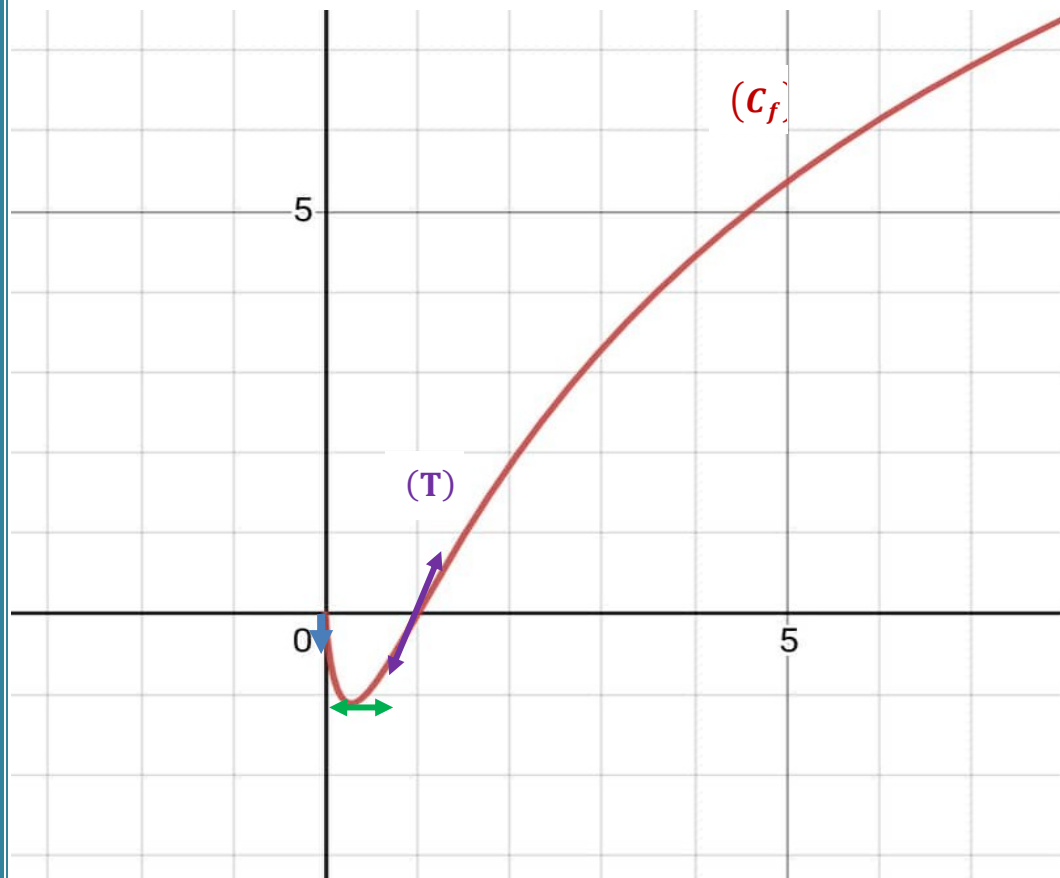
$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 2 \times (x - 1) + 0,$$

Donc (T): $y = 2x - 2$

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

On a $\alpha \approx 0.25$ donc $f(\alpha) = -4\alpha \approx -1$



C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

Donc $\forall x \in [\alpha; +\infty[: h(x) = f(x)$

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J à déterminer

➤ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$

On particulier sur $[\alpha; +\infty[$ donc h est continue sur $[\alpha; +\infty[$.

➤ La fonction f est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc la fonction h est str croissante sur $]\alpha, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = h([\alpha; +\infty[)$

$$J = h([\alpha; +\infty[) = [h(\alpha); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$$

$$=]-4\alpha, +\infty[$$

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

On a : $h(1) = 0$ donc $h^{-1}(0) = 1$

La fonction h est dérivable en 1 et on a : $h'(1) = 2 \neq 0$

Donc la fonction h^{-1} est dérivable en 0 et on a :

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$



Exercice 09

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue en 0 à droite

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

4)a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

5) Etudier la convexité de la courbe (Cf)

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Solution :

A) 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

A) 2) Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$3) \text{ On a } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

0	$+\infty$	x
	$-$	$g'(x)$
0	$+\infty$	$g(x)$



4) On a $g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[$
 $=]0; +\infty[$

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) \in]0, +\infty[$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

B) 1) Montrons que f est continue en 0 à droite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0 \times \ln(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$; or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Interprétation géométrique :

La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
 $= +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

4)a) Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

➤ La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

➤ Donc La fonction $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

➤ La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$; (Polynome)

➤ Donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappels :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad [\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = g(x)$



c) On a : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

0	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
0	1	$f(x)$

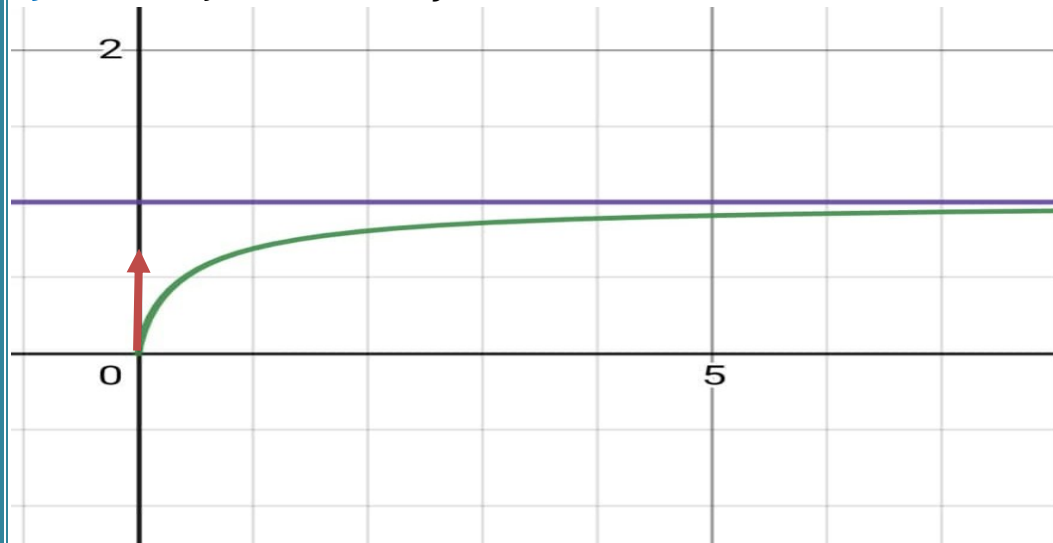
5) On a $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = g(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = g'(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la courbe (Cf) est concave sur $]0, +\infty[$

6) Tracer (Cf) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$



C) 1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

➤ Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e-1}\right) \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$$

$$\text{Car ; } f\left(\frac{1}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{e-1}}\right) = \frac{1}{e-1} \ln(1 + e - 1) = \frac{1}{e-1}$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

$$2) u_{n+1} - u_n = u_n \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = u_n(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1)$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq e-1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} + 1 \geq e \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) - 1 \geq 0 \Rightarrow u_n(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}$$

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

- (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{e-1}$ donc convergente.
- f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$ car elle est dérivable sur I
- $f\left(\left[0; \frac{1}{e-1}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{e-1}\right)\right] = \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \subset \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$
- $u_0 = \frac{1}{e} \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{e-1}$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est $\frac{1}{e-1}$

1) Etude algébrique des nombres complexes :**1) Introduction:**

Résoudre dans $\mathbb{Q}$ chaque équation $(E_1): x^2 - 2 = 0$

L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, ses solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnelles.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation $(E_2): x^2 + 2 = 0$

L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$,

2) L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$:**Définition et théorème (Admis)**

Il existe un ensemble, appelé l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une multiplication (et donc d'une soustraction et d'une division) qui possèdent les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble des nombres réels ;
- Il existe dans $\mathbb{C}$, un nombre i tel que $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels.

Exemples :

- Les nombres -5 , $3/7$, $3+5i$; Sont des nombres complexes.
- $(\forall y \in \mathbb{R}) ; iy \in \mathbb{C}$;
- $\frac{3+4i}{3-2i} \in \mathbb{C}$
- Tout nombre réel est un nombre complexe.

Exercice 1

On considère l'équation $(E) : x^2 + x + 1 = 0$ ($x \in \mathbb{C}$)

1) Montrer que $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ ($\forall x \in \mathbb{C}$)

2) Résoudre l'équation (E) en utilisant le nombre i

Solution

$$1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$$

$$2) (E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3i^2}{4} \text{ car } i^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x + \frac{1}{2} = -i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Remarques :

Soient a et b deux nombres réels :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iba$$

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

3) Ecriture Algébrique d'un nombre complexe :**Définition :**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $z = a + ib$ a et b étant réels

- L'écriture $a + ib$, a et b étant réels, s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z tel que $z = a + ib$
- Le nombre réel a s'appelle partie réelle du nombre complexe z et on écrit $a = \text{Re}(z)$.
- Le nombre réel b s'appelle partie imaginaire du nombre complexe z et on écrit $b = \text{Im}(z)$.
- Quand a est nul, le nombre complexe z s'écrit $z = ib$ et on dit que z est un imaginaire pur
- L'ensemble des imaginaires purs noté : $i\mathbb{R}$ et on a : $i\mathbb{R} = \{ib / b \in \mathbb{R}\}$.

Exemples :

$$z = 3 - 4i \Leftrightarrow \text{Im}(z) = -4 \text{ et } \text{Re}(z) = 3$$

$$z = 5i \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 5 \text{ et } \text{Re} = 0 ; \quad z = 3 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \text{ et } \text{Re}(z) = 3$$

**4) Opérations sur les nombres complexes :**

Les opérations sur les nombres complexes prolongent naturellement celles que l'on effectue sur les nombres réels.

Propriété 1

$$\forall (Z; Z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad Z = Z' \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = \text{Im}(Z') \text{ et } \text{Re}(Z) = \text{Re}(Z')$$

$$Z = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \text{ et } \text{Re}(Z) = 0$$

Propriété 2

Soit Z un nombre complexe

➤ **Caractérisation d'un nombre réel :** $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

➤ **Caractérisation d'un imaginaire pur :** $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$.

Propriété 3

z et z' deux nombres complexes avec : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

On définit la somme des deux nombres complexes z et z' par :

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$$

On définit le produit des deux nombres complexes z et z' par :

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

$$\text{Si } z \neq 0 \text{ on a } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Exercice 2

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4); \quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i); \quad z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_4 = (2i)^{13}; \quad z_5 = \frac{1}{4 - 2i}; \quad z_6 = \frac{1 + i}{2 - i}$$

Solution

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - 5i - (3i - 4) = 3 - 5i - 3i + 4 \\ &= 7 - 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (3 - 2i)(-1 + 5i) = -3 + 15i + 2i - 10i^2 \\ &= -3 + 15i + 2i + 10 \\ &= 7 + 17i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= (2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 \\ &= -5 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (2i)^{13} = 2^{13}i^{13} = 8192 \times (i^2)^6 \times i \\ &= 8192i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{16 - 4i^2} = \frac{4 + 2i}{16 + 4} = \frac{4 + 2i}{20} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - i^2} \\ &= \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1 + 3i}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

Exercice 3

1) On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer j^2

2) Montrer que : $j^2 + j + 1 = 0$

3) Dédurre que $j^3 = 1$

4) Mettre le nombre j^{2023} sous forme algébrique

Solution

$$\begin{aligned} 1) \quad j^2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} \\ j^2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$2) \quad j^2 + j + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 3) \quad j^2 + j + 1 &= 0 \Leftrightarrow j(j^2 + j + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow j^3 + j^2 + j = 0 \Leftrightarrow j^3 = -j^2 - j \\ &\Leftrightarrow j^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &\Leftrightarrow j^3 = 1 \end{aligned}$$

$$4) \quad j^{2023} = j^{2022+1} = (j^3)^{337} \times j = (1)^{337} \times j = j$$

**II) Représentation géométrique d'un nombre complexe :**

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Affixe d'un point-Affixe d'un vecteur :

Z dans $\mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $M(x; y)$ un point dans la plan (P)

On considère f une application dans $\mathbb{C}$ vers (P) définie par :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow (P)$$

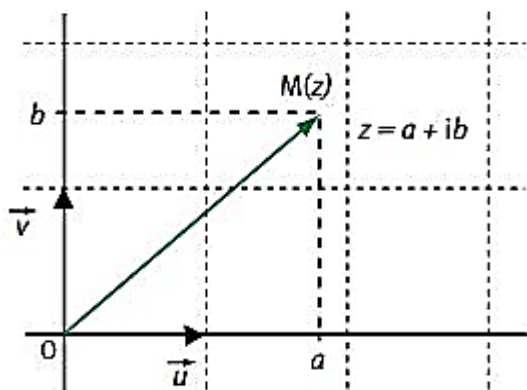
$$Z = x + iy \rightarrow f(Z) = M(x; y)$$

On a f est bijective de $\mathbb{C}$ vers (P)

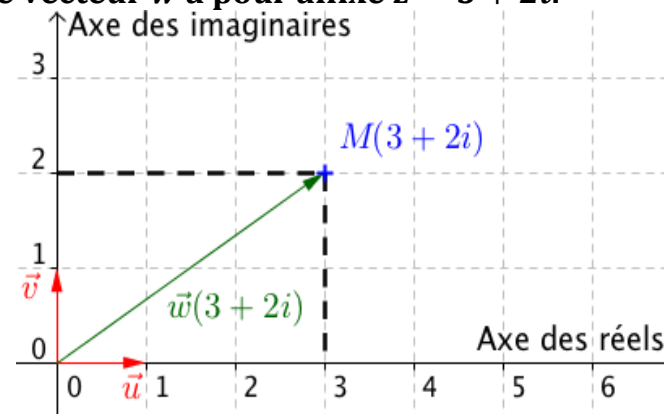
$$(\forall M(x; y) \in (P)) (\exists ! Z \in \mathbb{C}) : f(Z) = M(x; y)$$

Définition :

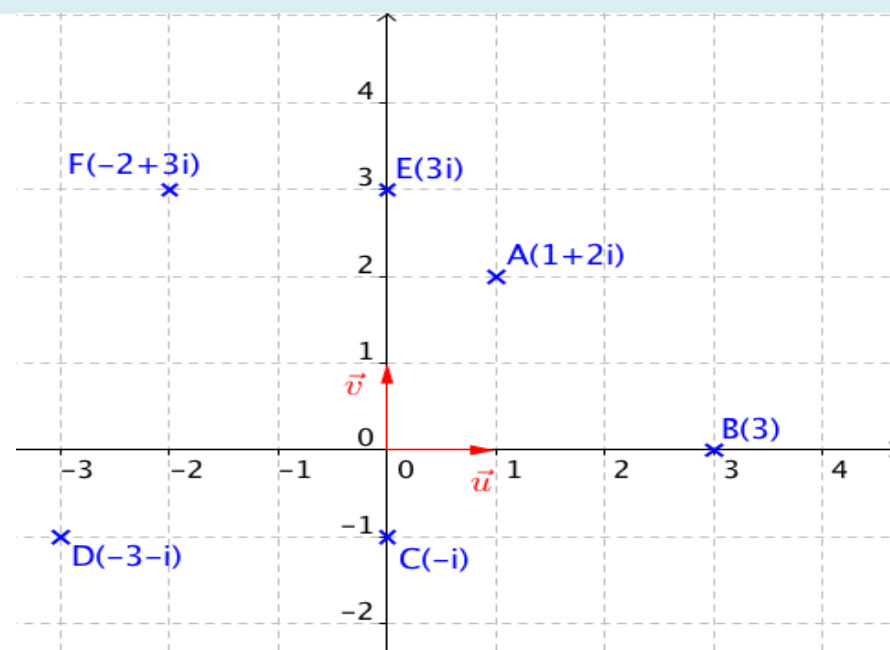
- Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on associe le point M de coordonnées (a, b) ; dans ce repère. On dit que M est le point image de z et que $\vec{OM}$ est la vectrice image de z .
- z est appelé l'affixe du point M , et aussi l'affixe du vecteur $\vec{OM}$; On écrit $\text{aff}(\vec{OM}) = z$ ou $z_m = z$ et $z_{\vec{OM}} = z$
- Le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe
- L'axe des abscisses est appelé axe des réels, et l'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires purs

**Exemple :**

Le point $M(3; 2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$. De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$.

**Exercice 4**

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ placer les points ; A, B, C, D ; E et F d'affixes respectives : $A(1 + 2i)$; $B(3)$; $C(-i)$; $D(-3 - i)$. $E(3i)$ et $F(-2 - 3i)$

Solution



2) Propriétés

Proposition 01 :

$M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.

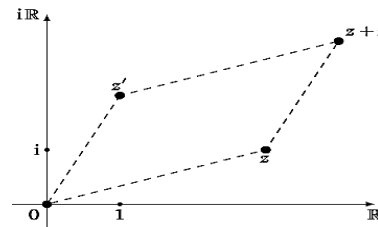
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.

b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.

c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz .

d) Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$



Démonstrations :

a) On pose : $M(x_M; y_M)$ et $N(x_N; y_N)$.

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x_N - x_M; y_N - y_M)$ donc son affixe est égal à :

$$(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M.$$

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Proposition 02 :

Soient A, B, C trois points distincts deux à deux d'affixes respectives z_A, z_B, z_C Alors :

A, B, C sont alignées si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Démonstration :

Supposons que A et B et C sont alignés :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } z_B - z_A = k(z_C - z_A) \end{aligned}$$

Exercice 5

On considère les points $A(2i)$; $B(1+i)$ et $C(3-i)$

Montrer que A, B et C sont des points alignés

Solution

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+i-2i}{3-i-2i} = \frac{1-i}{3-3i} = \frac{1-i}{3(1-i)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

Proposition 03 :

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$ Alors :

$(AB) \parallel (DC)$ si et seulement si $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Proposition 04 :

Soient $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés de plan (P) tel que $\alpha + \beta \neq 0$. On pose $\text{aff}(A) = Z_A$ et $\text{aff}(B) = Z_B$

Soit $G(z_G)$ est le barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$. On a : $z_G = \frac{\beta z_B + \alpha z_A}{\alpha + \beta}$

Exercice 6

On considère les points $A(-2 + 3i)$, $B(2 + 4i)$, $C(5 + 3i)$, $D(1 + 2i)$ et $E(-7)$.

1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.

2) Les points D, C et E sont-ils alignés ?

Solution

1) - On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

$$\text{Affixe de } \overrightarrow{AB} : z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 4i - (-2 + 3i) = 4 + i$$

$$\text{Affixe de } \overrightarrow{DC} : z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5 + 3i - (1 + 2i) = 4 + i$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Le centre du parallélogramme est le milieu I du segment $[AC]$.

$$\text{Son affixe est : } z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2+3i+5+3i}{2} = \frac{3+6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$

2) Affixe de $\overrightarrow{DC} : z_{\overrightarrow{DC}} = 4 + i$

$$\text{Affixe de } \overrightarrow{DE} : z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7 - (1 + 2i) = -8 - 2i.$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{DE}} = -2 z_{\overrightarrow{DC}} \text{ et donc } \overrightarrow{DE} = -2 \overrightarrow{DC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points D, C et E sont alignés.

Remarque : On peut montrer par exemple que $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} \in \mathbb{R}$

**3) Conjugué d'un nombre complexe :****a) Définition :**

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique : $a + ib$ tel que : a et b étant réels

On appelle conjugué du nombre complexe z ,

le nombre complexe $a - ib$.

On le note $\bar{z}$ et on lit « z barre »

$$z = a + ib \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - ib$$

Exemples :

$$\triangleright z = 5 + 6i \Rightarrow \bar{z} = 5 - 6i$$

$$\triangleright z = -1 - i \Rightarrow \bar{z} = -1 + i$$

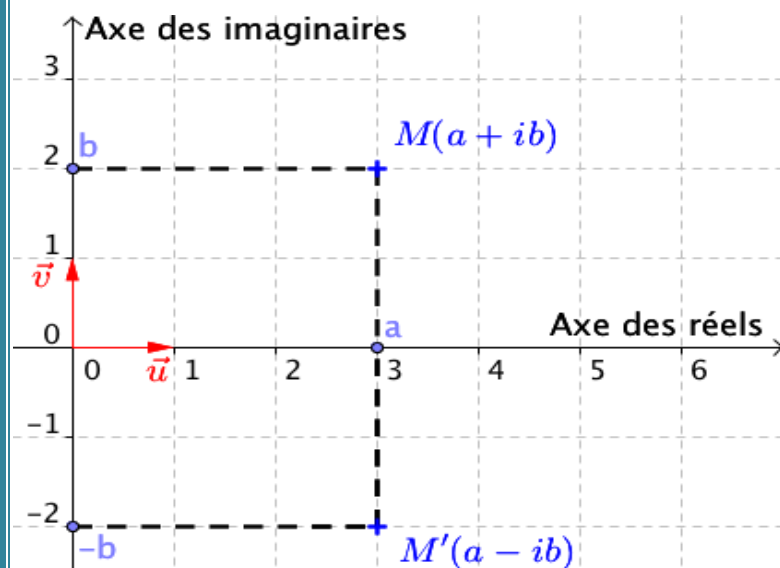
$$\triangleright z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$$

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{R} : \bar{z} = z$$

$$\triangleright \forall z \in i\mathbb{R} : \bar{z} = -z$$

Interprétation géométrique

Soit $M(x; y)$ l'image de nombre complexe $Z = x + iy$ dans le plan complexe (P). on pose $aff(M') = \bar{Z}$ on a : $M'(x; -y)$



Les images M et M' de z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Exercice 7

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E_1): \bar{z} = 2z + 4i - 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_2): 3iz - \bar{z} = 8i$

Solution

$$1) \bar{z} = 2z + 4i - 1 \Leftrightarrow \bar{\bar{z}} = \overline{2z + 4i - 1} \Leftrightarrow z = 2\bar{z} - 4i + 1 \\ \Leftrightarrow z = 1 + 4i$$

$$\text{Donc } S = \{1 + 4i\}$$

2) z un élément de $\mathbb{C}$, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$3iz - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i \\ \Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0 \\ \Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0 \\ \Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -3y \text{ et } (-8y - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1 \\ \Leftrightarrow z = 3 - i$$

$$\text{Donc } S = \{3 - i\}$$

b) Propriété de Conjugué

Propriété 1 ; Soit z un complexe tel que $z = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Soit Z dans $\mathbb{C}$ on a : $z\bar{z} = (Re(Z))^2 + (Im(Z))^2 = x^2 + y^2$

Exercice 8

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{1+i}{1+7i}, \quad z_2 = \frac{2+i}{2-4i}; \quad z_3 = \frac{1}{(1+i)^2}$$

Solution

$$z_1 = \frac{1+i}{1+7i} = \frac{(1+i)(1-7i)}{1^2+7^2} = \frac{1-7i+i+7}{1+49} = \frac{8-6i}{50} = \frac{8}{50} - \frac{6}{50}i$$

$$z_2 = \frac{2+i}{2-4i} = \frac{(2+i)(2+4i)}{4+16} = \frac{4+8i+2i-4}{20} = \frac{8i+2i}{20} = \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

**Propriété 2:****Pour tout nombre complexe z , on a :**

- 1) $\bar{\bar{z}} = z$
- 2) $\bar{z} + z = 2\text{Re}(z)$
- 3) $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
- 4) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- 5) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Propriété 3:**Soit z et z' deux nombre complexe non nuls et n un entier naturel.**

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$$

$$1. \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}; \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad ; \quad (z \neq 0); \quad \overline{kz'} = k\bar{z}$$

Exemples :

- $\overline{(1-i)(1+i)^2} = (1+i)(-2i) = 2-2i$
- $\overline{\left(\frac{5-2i}{1+i}\right)} = \frac{5+2i}{1-i}$
- $\overline{(2+4i)^5} = (2-4i)^5$

Exercice 9**1) Déterminer l'ensemble des nombres complexe z pour lesquels**

$$3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 \in i\mathbb{R}$$

2) Déduire l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels

$$3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 \in i\mathbb{R}$$

Solution**1) On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$**

$$\begin{aligned} 3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 &= 3(x + iy) - 5i(x - iy) + 4i - 1 \\ &= 3x + 3yi - 5xi - 5y + 4i - 1 \\ &= 3x - 5y - 1 + (3y - 5x + 4)i \end{aligned}$$

$$3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x - 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5y+1}{3}$$

L'ensemble des nombres complexes z qui vérifie

$$3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 \in i\mathbb{R} \text{ est l'ensemble } D = \left\{ \frac{5y+1}{3} + iy \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Donc l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels

$$3z - 5i\bar{z} + 4i - 1 \in i\mathbb{R} \text{ est la droite d'équation } 3x - 5y - 1 = 0$$

Exercice 10**1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$** **2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$** **Solution****On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z \neq -1$**

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} &= \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y+1) + ix(y-1) + (y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y+1)(y-1) + (y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - ix(y^2 - 1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x(y^2 - 1)}{x^2+(y+1)^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc :} \quad \frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z \neq -1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ c'est le cercle (C) de centre 0 et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x(y^2 - 1) = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x(y-1)(y+1) = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x(y-1)(y+1) = 0 \text{ et } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ et } z \neq -1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$, est la réunion des droites **$(D_1); (D_1); (D_3)$ d'équations $(D_1): x = 0$; $(D_3): y = 1$; $(D_3): y = -1$ privé du point A d'affixe -1**

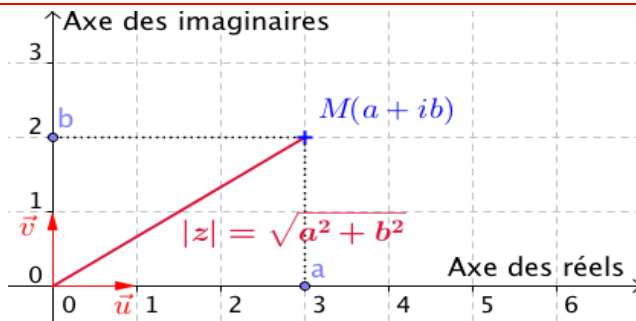
**III) Module et argument d'un nombre complexe****1) Module d'un nombre complexe****Définition :**

Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle module de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z .
Alors le module de z est égal à la distance OM

$$OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Propriétés 01 :**

Soit z un nombre complexe.

a) $|z|^2 = z\bar{z}$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|-z| = |z|$

Démonstrations

a) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Exercice 11

Calculer : a) $|3 - 2i|$; b) $|\overline{-3i}|$; c) $|\sqrt{2} + i|$; d) $\left| \frac{-3i}{(\sqrt{2} + i)^2} \right|$

Solution

a) $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$;

b) $|\overline{-3i}| = |-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

c) $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

d) $\left| \frac{-3i}{(\sqrt{2} + i)^2} \right| = \frac{|-3i|}{|(\sqrt{2} + i)^2|} = \frac{|-3i|}{|\sqrt{2} + i|^2} = \frac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$

Propriétés 02:

z et z' deux nombres complexes non nuls
et n entier naturel non nul.

Produit	$ zz' = z z' $
Puissance	$ z^n = z ^n$
Inverse	$\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$
Quotient	$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$
Inégalités triangulaire	$ z + z' \leq z + z' $

Démonstrations

Module d'une puissance $|z^n| = |z|^n$:

On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.
- Soit $n > 1$

Supposons que $|z^n| = |z|^n$ et démontrons que $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$.

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z^n z| \\ &= |z^n| |z|, \text{ d'après la propriété du produit.} \\ &= |z|^n |z|, \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :**

D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $|z^n| = |z|^n$.

Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{C}) \quad z\bar{z} = |z|^2$; $(\forall x \in \mathbb{C}) ; |z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$

Propriété 03:

Considérons les deux points : $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors : $AB = |z_B - z_A|$



Exercice 12

Soient $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$ des points d'affixes :

$$a = 2 - i ; b = 1 - 2i ; c = -3i \text{ et } d = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

1) Calculer les distances BC et OD

2) Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = 2$ et déduire que les points A ; B et C sont alignés puis déduire que $AC = 2AB$

Solution

$$1) BC = |c - b| = |-3i - 1 + 2i| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$OD = |d - o| = \left| \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right| = \sqrt{\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$2) \frac{c-a}{b-a} = \frac{-3i - 2 + i}{1 - 2i - 2 + i} = \frac{-2 - 2i}{-1 - i} = \frac{2(-1 - i)}{-1 - i} = 2$$

$$\frac{c-a}{b-a} = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |2|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 2$$

$$\Leftrightarrow AC = 2AB$$

Propriété 04:

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points dans le plan complexe et r un nombre réel positif strictement.

L'ensemble des points $M(z)$ tel que ($z \in \mathbb{C}$)

1- $|z - z_A| = r \Rightarrow$ Cercle de centre A et de rayon r

2- $|z - z_A| \leq r \Rightarrow$ Disque fermée de centre A et de rayon r

3- $|z - z_A| < r \Rightarrow$ Disque ouvert de centre A et de rayon r

4- $|z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow$ Droite la médiatrice de segment $[AB]$

Exercice 13

M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter

1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.

2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.

3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.

4) L'ensemble des points M tels que $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$.

Solution

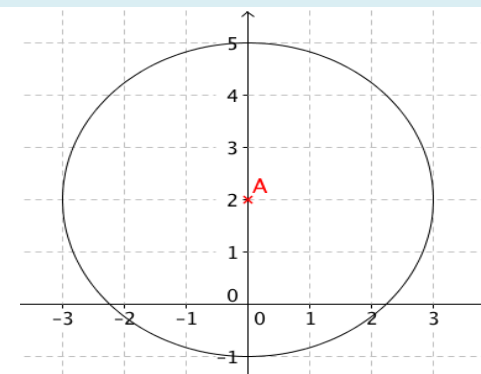
1) Soit A le point d'affixe $2i$

alors $|z - 2i| = 3$

s'écrit $AM = 3$.

En effet : $|z - 2i| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.

2ème méthode : (méthode algébrique)

Soit encore : $|z - 2i|^2 = 9$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit :

$$|x + iy - 2i|^2 = 9$$

$$|x + i(y - 2)|^2 = 9$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 9$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.

$$2) |iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i| \times |z + 3i| = |z - (-3i)|$$

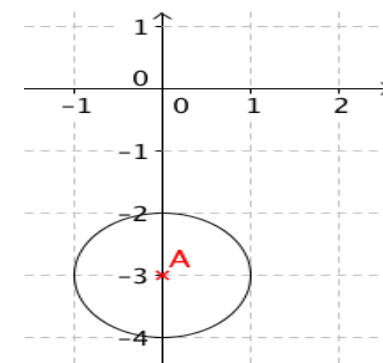
$$\text{Donc } |iz - 3| = 1 \Leftrightarrow |z - (-3i)| = 1$$

Soit A le point d'affixe $-3i$

alors $|iz - 3| = 1$ s'écrit $AM = 1$.

En effet : $|z - (-3i)| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1





$$3) |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{\bar{z} - 3 + i}| = |\bar{z} - 3 - i| \\ = |z - 3 - i| = |z - (3 + i)|$$

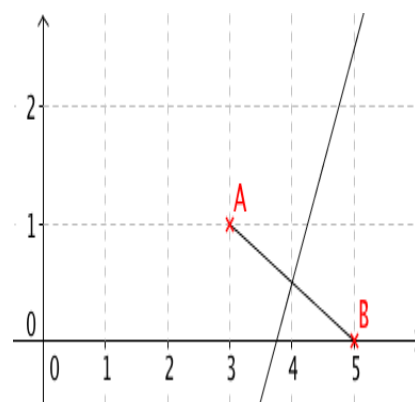
$$\text{Donc } |\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$$

$$\text{Equivalut à } |z - (3 + i)| = |z - 5|$$

Soit A le point d'affixe $3 + i$ et B le point d'affixe 5 alors $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$

s'écrit $AM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.



2ème méthode : (méthode algébrique)

$$|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| = |z - 5|$$

$$\text{Soit encore } |z - (3 + i)|^2 = |z - 5|^2$$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit :

$$|x + iy - (3 + i)|^2 = |x + iy - 5|^2$$

$$|x - 3 + i(y - 1)|^2 = |x - 5 + iy|^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 5)^2 + y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

$$6x - 8y + 15 = 0$$

L'ensemble des points M est la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

$$4) \frac{|z-i|}{|z|} = 2.$$

Soit $|z - i| = 2|z|$, en notant que $z \neq 0$.

$$\text{Donc } |z - i|^2 = 4|z|^2$$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit

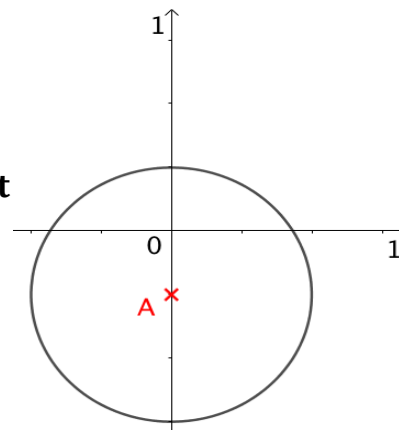
$$|x + iy - i|^2 = 4|x + iy|^2$$

$$|x + i(y - 1)|^2 = 4|x + iy|^2$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 2y = 1$$



$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$

Exercice 14

Soit u un nombre complexe tel que : $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}) : |1 + uz| = |1 + \bar{u}z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Solution

$$|1 + uz| = |1 + \bar{u}z| \Rightarrow |1 + uz|^2 = |1 + \bar{u}z|^2$$

$$\Rightarrow (1 + uz)\overline{(1 + uz)} = (1 + \bar{u}z)\overline{(1 + \bar{u}z)}$$

$$\Rightarrow (1 + uz)(1 + \bar{u}\bar{z}) = (1 + \bar{u}z)(1 + u\bar{z})$$

$$\Rightarrow 1 + \bar{u}\bar{z} + uz + u\bar{u}z\bar{z} = 1 + u\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{u}z\bar{z}$$

$$\Rightarrow \bar{u}\bar{z} + uz = u\bar{z} + \bar{u}z$$

$$\Rightarrow (u - \bar{u})z + (u - \bar{u})\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow (u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$$

Et on a $u \notin \mathbb{R}$ donc $u \neq \bar{u}$, d'où, $u - \bar{u} \neq 0$

$$\text{Donc } z - \bar{z} = 0$$

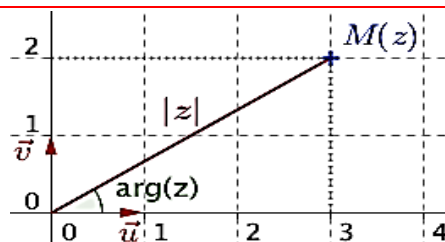
$$\text{Donc } z = \bar{z}$$

$$\text{Donc } z \in \mathbb{R}$$

**III) Forme Trigonométrique d'un nombre complexe non nul :****1) Argument d'un nombre complexe non nul :****Définition :**

Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle argument de z , noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

**Remarques :**

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z) [2\pi]$

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Cas particuliers :

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

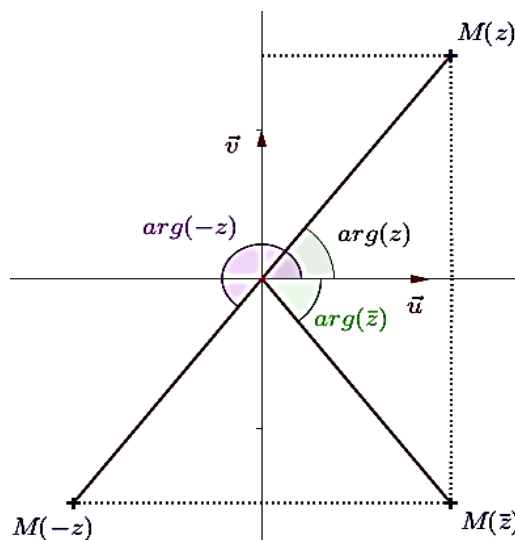
Exemples :

- $\arg(3i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $\arg(1 + \sqrt{3}) \equiv 0[2\pi]$
- $\arg(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \equiv \pi[2\pi]$
- $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

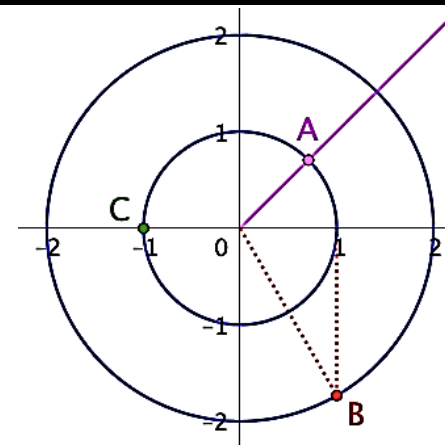
Propriété2 :

z un nombre complexe non nul.:

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \equiv 0[2\pi]$

**Exercice 15**

1) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C. définit sur le cercle ci-contre



2) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

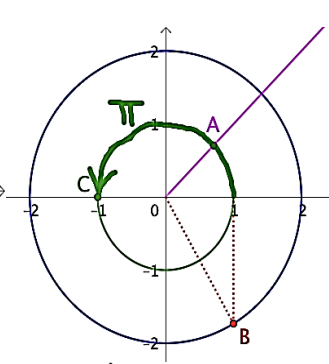
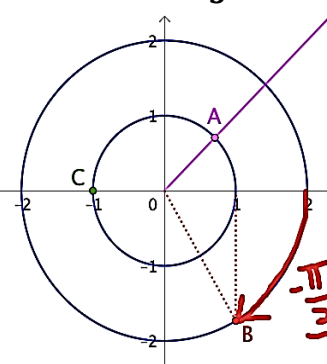
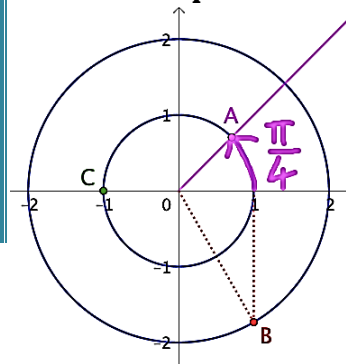
$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Solution

$$1) \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

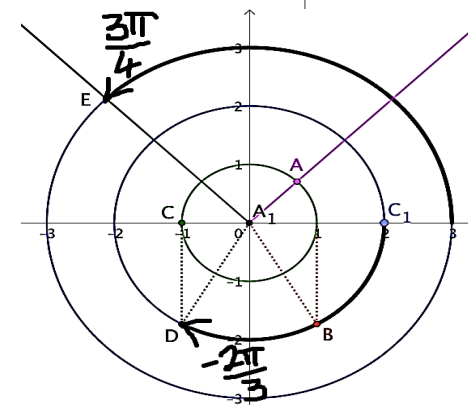
$$\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\arg(z_C) = \pi [2\pi]$$



2) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.

Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.





2) Opérations sur l'argument

z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul

Produit	$\arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
Puissance	$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$
Inverse	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
Quotient	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Démonstration :

Voir la partie ; opérations sur la forme trigonométrique

Remarque $z_1, z_2, z_3, \dots$ et z_n des nombres complexes non nuls

$$\arg\left(\prod_{k=1}^{k=n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \arg(z_k)$$

Exercice 16

Soit z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes non nuls tels que

$$\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] ; \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

1) Déterminer l'argument de $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2^4}$

2) Déterminer l'argument de z_3 dans les deux cas suivants :

a) $\frac{z_3}{z_2} = z_1^2$ et b) $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1$

Solution

1)a) $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2^4}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2^4) [2\pi]$

$$\equiv \arg(z_1) - 4\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{2} - 4 \times \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

2)a) $\frac{z_3}{z_2} = z_1^2 \Rightarrow \arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1^2) [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_3) - \arg(z_2) \equiv 2\arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) \equiv 2\arg(z_1) + -\arg(z_2) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) \equiv 2 \times \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow \arg(z_3) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

b) $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1 \Rightarrow \arg(z_3 \times \overline{z_2}) \equiv \arg(4z_1) [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_3) - \arg(z_2) \equiv \arg(4) + \arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = -\arg(z_2) + \arg(4) + \arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = -\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

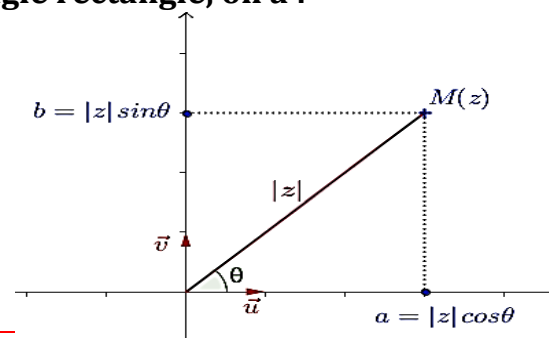
$$z = a + ib = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$$

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$z = a + ib = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$



Propriété :

$z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$

On a alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

Définition :

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

avec $\theta = \arg(z)$

Notation simplifiée : $z = [|z|, \theta]$

Exercice 17

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme

trigonométrique : a) $z_1 = \sqrt{3} + i$; b) $z_2 = -5i$; c) $z_3 = 1 - i$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $z_4 = 2023(\cos \pi + i \sin \pi)$; b) $z_5 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$

**Solution**

- On commence par calculer le module de $z_1 = \sqrt{3} + i$:

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

- En factorisant z_1 par $|z_1|$, on trouve $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
- On cherche un argument θ de z_1 tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$
 $\theta = \frac{\pi}{6}$, convient, en effet : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- Donc : $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = [2, \frac{\pi}{6}]$.

b) $z_2 = -4i$ on a ; $|z_2| = |-4i| = 4$

Géométriquement on peut affirmer que : $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Donc : $z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = [4, -\frac{\pi}{2}]$.

c) $z_3 = -1 + i$; on a ; $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$z_3 = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

On cherche un argument θ de z_3 tel que $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ convient

Et donc : $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = [\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}]$.

2) a) $z_4 = 2023(\cos \pi + i \sin \pi) = 2023(-1 + i \times 0) = -2023$.

b) $z_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls

$$z = z' \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \text{ et } |z| = |z'|$$

4) Opérations sur la forme trigonométrique**Propriété**

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tel que :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta] \text{ et } z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') = [r', \theta']$$

On a les relations suivantes :

1) $zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) = [rr', \theta + \theta']$

2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$

3) $\frac{z}{z'} = \frac{|z|(\cos \theta + i \sin \theta)}{|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{|z|}{|z'|}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')) = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $z^n = (|z|(\cos \theta + i \sin \theta))^n = [r^n, n\theta]$

Démonstration

1) $zz' = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$
 $= |z||z'|((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'))$
 $= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$

Ou bien $zz' = [rr', \theta + \theta']$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$ et l'argument de zz' est $\theta + \theta'$

1) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \arg\left(\frac{1}{z^2} \times \bar{z}\right) = \arg\left(\frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}\right)$
 $= \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(\bar{z}) = 0 - \arg(z) = -\arg(z) = -\theta$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Donc $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$

2) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(\frac{1}{z'} \times z\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad \frac{z}{z'} = \left[\frac{|z|}{|z'|}, \theta - \theta'\right]$

Donc le module de $\frac{z}{z'}$ est $\frac{|z|}{|z'|}$ et un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\theta - \theta'$

4) Par récurrence sur n , on montre que $z^n = [r^n, n\theta]$



Exercice 18

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls tels que :

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[3; \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Déterminer la forme trigonométrique de $z = z_1 z_2$ et $z' = \frac{z_1}{z_2}$

Solution

Commençons par déterminer la forme trigonométrique de

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} ; \quad \text{on a ; } |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

On cherche un argument θ de z_2 tel que $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient

$$\text{Et donc } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = \left[2, \frac{-\pi}{3} \right].$$

$$\bullet \quad z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{3} \right) \right) = \left[6; -\frac{\pi}{12} \right]$$

$$\bullet \quad z' = \frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{|z_1|}{|z_2|}; \left(\frac{\pi}{4} - 3 \frac{-\pi}{3} \right) \right] = \left[\frac{3}{2}; \frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[\frac{3}{8}; \frac{5\pi}{4} \right]$$

Exercice 19

On pose : $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 + i$

1) Ecrire sous forme trigonométrique a et b et en déduire la forme trigonométrique de $\frac{a}{b}$

2) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous la forme algébrique puis en déduire les valeurs

exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

3) Montrer que $a^{2022} \in \mathbb{R}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^{48} + \left(\frac{b}{a}\right)^{48} = 2$

Solution

1) On déjà vu que : $a = 1 + i\sqrt{3} = \left[2; \frac{\pi}{3} \right]$ et $b = 1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

$$\frac{a}{b} = \frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{12} \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$2) \quad \frac{a}{b} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{(1 + \sqrt{3})}{2} i$$

$$\text{On a : } \frac{a}{b} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\text{D'où : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$3) \quad a^{2022} = \left[2; \frac{\pi}{3} \right]^{2022} = \left[2^{2022}; 2022 \times \frac{\pi}{3} \right] = \left[2^{2022}; 674\pi \right]$$

$$= \left[2^{2022}; 0 \right] = 2^{2022} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{2022} \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{48} + \left(\frac{b}{a}\right)^{48} = \left(\frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]}\right)^{48} + \left(\frac{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}\right)^{48} = \left(\left[1; \frac{\pi}{3} \right]\right)^{48} + \left(\left[1; \frac{\pi}{4} \right]\right)^{48}$$

$$= \left[1^{48}; 48 \times \frac{\pi}{3} \right] + \left[1^{48}; 48 \times \frac{\pi}{4} \right] = \left[1; 16\pi \right] + \left[1; 12\pi \right]$$

$$= \left[1; 0 \right] + \left[1; 0 \right] = 1 + 1 = 2$$

**VI) Applications des nombres complexes à la géométrie**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Interprétation géométrique d'argument**Propriété 01**

Soient $A(z_A)$ et $B'(z_B)$, deux points dans le plan complexe

tel que $A \neq B$ on a : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

Démonstration :

Soient $A(z_A)$ et $B'(z_B)$, deux points dans le plan complexe

Donc $\exists! M \in (P) : \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$

et on a $z_M = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z_M)[2\pi]$

Donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

Propriété 02

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ On a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Démonstration

On a : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg(z_C - z_D)[2\pi]$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{DC}) \equiv -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_D)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \end{aligned}$$

Propriété 03 :

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $C \neq D$; et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

$$1) (AB) // (CD) \text{ ssi } \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$2) (AB) \perp (CD) \text{ ssi } \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$3) \text{ Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires ssi } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = 0[\pi]$$

$$4) \text{ Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux ssi } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

5) Les points A,B,C et D sont cocycliques (appartenant au même cercle) si et seulement si :

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R}$$

Démonstration de 5:

A,B,C et D sont cocycliques donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) \equiv \pi[2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) + \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \equiv \pi[2\pi] \text{ donc } \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \equiv \pi[2\pi]$$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R}$$

Exercice 20

Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que

$$a = 2 ; b = -1 + i \text{ et } c = 3 + 3i$$

Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = -i$ puis en déduire la nature du triangle ABC

Solution

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3+3i-2}{-1+i-2} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3)^2+1^2}$$

$$= \frac{-3-i-9i+3+3i}{10} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\frac{c-a}{b-a} = -i \Rightarrow \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |-i| \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(-i)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow AC = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

Exercice 21

Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que

$$a = \sqrt{3} - i ; b = -a \text{ et } c = \sqrt{3} + 3i$$

1) Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) Ecrire le nombre $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sous forme trigonométrique

3) En déduire la nature du triangle ABC

Solution

$$1) \frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i} = \frac{4i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{2i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3}-2}{4} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

On cherche un argument θ de z_3 tel que $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient

Et donc : $z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = [1, \frac{-\pi}{3}]$

3) La nature du triangle ABC

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \left| \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow AC = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est équilatérale

Exercice 22

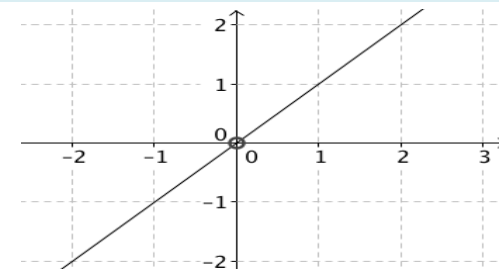
Déterminer et représenter :

1) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$.

2) L'ensemble des points M tels que $\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Solution

1) L'ensemble des points M est la 1^{ère} bissectrice de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées privée de l'origine car 0 n'a pas d'argument



2) $\arg(z-2+i) = \arg(z-(2-i))$.

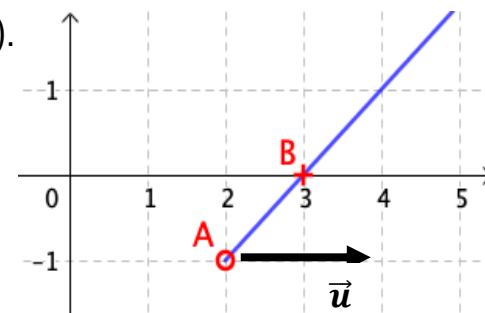
Soit A le point d'affixe $2-i$ alors $\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

s'écrit $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

En effet,

$$\arg(z-(2-i)) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM}).$$

L'ensemble des points M est la demi-droite d'origine A privée de A et passant par le point le point $B(3)$.



Exercice 23

Montrer que les points O ; $E(1+i)$; $F(1-i)$ et $H(2)$ sont cocycliques

Solution

$$\frac{z_E - z_O}{z_F - z_O} \times \frac{z_F - z_H}{z_E - z_H} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1-i-2}{1+i-2} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{-1-i}{-1+i}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} \times \frac{-(1+i)}{-(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+2i-1}{1-2i-1} = -1$$

$$\left(\frac{z_E - z_O}{z_F - z_O} \times \frac{z_F - z_H}{z_E - z_H} \right) = -1 \in \mathbb{R}$$

D'où les points O ; $E(1+i)$; $F(1-i)$ et $H(2)$ sont cocycliques



Exercice 01

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = (2 - 3i)^2 ; \quad z_2 = (3 - i)(-1 + i) ; \quad z_3 = \frac{1}{4 - 2i} ; \quad z_4 = \frac{1 + i}{2 - i}$$

Exercice 02

- 1) On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer j^2
- 2) Montrer que : $j^2 + j + 1 = 0$ puis en déduire que $j^3 = 1$
- 4) Mettre le nombre j^{2023} sous forme algébrique

Exercice 03

Soient les points $A(-2 + 3i)$, $B(2 + 4i)$, $C(5 + 3i)$, $D(1 + 2i)$; $E(-7)$

- 1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- 2) Calculer l'abscisse de son centre O .
- 3) Montrer que les points D , C et E sont alignés

Exercice 04

Soient $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$ des points d'affixes :

$$a = 2 - i ; b = 1 - 2i ; c = -3i \text{ et } d = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

- 1) Calculer les distances AB ; OA ; OB et OD
- 2) En déduire la nature de triangle OAB
- 3) Montrer A ; B et C sont alignés puis en déduire que $AC = 2AB$
- 4) Montrer que O ; $E(1 + i)$; $F(1 - i)$ et $H(2)$ sont cocycliques

Exercice 05

- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E_1): \bar{z} = 2z + 4i - 1$
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_2): 3iz - \bar{z} = 8i$

Exercice 06

M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter

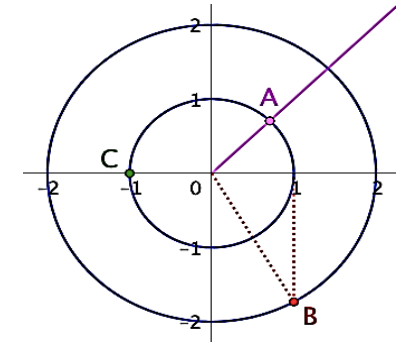
- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.

Exercice 07

- 1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$
- 2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$

Exercice 08

- 1) Déterminer un argument de chaque affixe des points A , B et C .
défini sur le cercle ci-contre



- 2) Placer les points D et E
d'affixes respectives z_D et z_E
telles que :

$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Exercice 09

z_1, z_2 des complexes tels que $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

- 1) Déterminer un argument de $z = z_1 z_2$; $z' = \frac{z_1}{z_2}$; $z'' = (z_2)^4$
- 2) Déterminer un argument de z_3 dans les deux cas suivants :

$$a) \quad \frac{z_3}{z_2} = z_1^2 \quad \text{et} \quad b) \quad z_3 \times \bar{z}_2 = 4z_1$$

Exercice 10

Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$z_1 = \sqrt{3} + i ; \quad z_2 = -4i ; \quad z_3 = 2 - 2i ; \quad z_4 = i$$

$$z_5 = -2 ; \quad z_6 = -3 - 3i ; \quad z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 11

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls tels que :

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[3; \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Déterminer la forme trigonométrique de z_2 ; $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{(z_2)^3}$

Exercice 12

On pose : $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 + i$

- 1) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous forme trigonométrique
- 2) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous la forme algébrique puis déduire $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$
- 3) Montrer que $a^{2022} \in \mathbb{R}$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^{48} + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^{48} = 2$



Exercice 13

On pose $b = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ et $a = (1 + i)b$

- 1) Montrer que $a = -2\sqrt{3} + 2i$ puis calculer $|a|$
- 2) Ecrire a puis b sous la forme trigonométrique
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$

Exercice 14

On pose $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

- 1) Ecrire a^2 sous la forme algébrique
- 2) Ecrire a^2 sous forme trigonométrique
- 3) Déduire a sous forme trigonométrique
- 4) Calculer $\sin \frac{7\pi}{8}$; $\cos \frac{7\pi}{8}$

Exercice 15

On pose $a = 2 + \sqrt{3} + i$

- 1) Montrer que $a = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)\bar{a}$ puis calculer $|a|$
- 2) Ecrire a sous la forme trigonométrique
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$
- 4) Montrer que $a^6 = i(2\sqrt{2 + \sqrt{3}})^6$

Exercice 16

Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que

$$a = 2 ; b = -1 + i \text{ et } c = 3 + 3i$$

Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = -i$ puis en déduire la nature du triangle ABC

Exercice 17

Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que

$$a = \sqrt{3} - i ; b = -a \text{ et } c = \sqrt{3} + 3i$$

- 1) Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 2) Ecrire le nombre $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sous forme trigonométrique
- 3) En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 18

On considère dans le plan complexe les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ tel que $a = \sqrt{3} + i$; $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ et $c = -1 + i\sqrt{3}$

- 1) Déterminer la forme trigonométrique de $1 + i$ et de a
- 2) Montrer que $b = (1 + i)a$ puis déterminer la forme trigonométrique de b
- 3) Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$
- 4) Vérifier que $c = ia$ puis en déduire la nature du triangle OAC
- 5) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un carré

Exercice 19

On considère dans le plan complexe les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ tel que $a = 1 + 2i$; $b = 3 + 3i$ et $c = 4 + 5i$

- 1) Déterminer l'abscisse de D tel que $ABCD$ un parallélogramme
- 2) Vérifier que $c - a = 3i(b - d)$ puis en déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires
- 3) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est losange
- 4) Déterminer l'abscisse de E le symétrique de B par rapport à A
- 5) En déduire le centre et le rayon de (C) le cercle circonscrit au triangle EBD

Exercice 20

On considère le point M d'abscisse le nombre complexe z

et M' le point d'abscisse $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

- 1) Déterminer le nombre complexe z pour que les points M et M' soient confondus
- 2) On suppose que M diffère des points A et B d'abscisses respectifs 1 et -1 ; Montrer que $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$
- 3) Soit la droite (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$
Montrer que si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)
- 4) Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$; Montrer que si M appartient à (C) alors les points A ; B et M' sont alignés

Exercice 01

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = (2 - 3i)^2 ; z_2 = (3 - i)(-1 + i) ; z_3 = \frac{1}{4 - 2i} ; z_4 = \frac{1 + i}{2 - i}$$

Solution

$$z_1 = (2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i) = -3 + 15i + 2i - 10i^2$$

$$= -3 + 15i + 2i + 10$$

$$= 7 + 17i$$

$$= -5 - 12i$$

$$z_3 = \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{16 - 4i^2} = \frac{4 + 2i}{16 + 4} = \frac{4 + 2i}{20}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_4 = \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - i^2}$$

$$= \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1 + 3i}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Exercice 02

1) On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer j^2

2) Montrer que : $j^2 + j + 1 = 0$ puis en déduire que $j^3 = 1$

4) Mettre le nombre j^{2023} sous forme algébrique

Solution

$$1) j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc } j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2) j^2 + j + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$$

$$j^2 + j + 1 = 0 \Leftrightarrow j(j^2 + j + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow j^3 + j^2 + j = 0 \Leftrightarrow j^3 = -j^2 - j$$

$$\Leftrightarrow j^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow j^3 = 1$$

$$3) j^{2023} = j^{2022+1} = (j^3)^{337} \times j = (1)^{337} \times j = j$$

Exercice 03

Soient les points $A(-2 + 3i)$, $B(2 + 4i)$, $C(5 + 3i)$, $D(1 + 2i)$;
 $E(-7)$

1) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Calculer l'axe de son centre O .

3) Montrer que les points D , C et E sont alignés

Solution

1) - On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

$$\text{Affixe de } \overrightarrow{AB} : z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 4i - (-2 + 3i) = 4 + i$$

$$\text{Affixe de } \overrightarrow{DC} : z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5 + 3i - (1 + 2i) = 4 + i$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Le centre du parallélogramme est le milieu I du segment $[AC]$.

Son affixe est :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2 + 3i + 5 + 3i}{2} = \frac{3 + 6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$

2) L'axe de $\overrightarrow{DC}$ est $z_{\overrightarrow{DC}} = 4 + i$

$$\text{L'axe de } \overrightarrow{DE} \text{ est } z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7 - (1 + 2i) = -8 - 2i.$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{DE}} = -2 z_{\overrightarrow{DC}} \text{ et donc } \overrightarrow{DE} = -2 \overrightarrow{DC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points D , C et E sont alignés.

Remarque : On peut montrer par exemple que $\frac{z_D - z_C}{z_E - C} \in \mathbb{R}$

Exercice 04

Soient $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$ des points d'affixes :

$$a = 2 - i ; b = 1 - 2i ; c = -3i \text{ et } d = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

5) Calculer les distances AB ; OA ; OB et OD

6) En déduire la nature de triangle OAB

7) Montrer A ; B et C sont alignés puis en déduire que $AC = 2AB$

8) Montrer que O ; $E(1 + i)$; $F(1 - i)$ et $H(2)$ sont cocycliques

Solution

$$3) AB = |b - a| = |1 - 2i - 2 + i| = |-1 - i|$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$OA = |a - o| = |2 - i| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$OB = |b - o| = |1 - 2i| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$OD = |d - o| = \left| \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right| = \sqrt{\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

4) En déduire la nature de triangle OAB

$$\text{On a } OA = OB = \sqrt{5}$$

d'où le triangle OAB est isocèle en O

$$3) \frac{c - a}{b - a} = \frac{-3i - 2 + i}{1 - 2i - 2 + i} = \frac{-2 - 2i}{-1 - i} = \frac{2(-1 - i)}{-1 - i} = 2 \in \mathbb{R}$$

Donc les points A ; B et C sont alignés

$$\frac{c - a}{b - a} = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |2|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|c - a|}{|b - a|} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 2$$

$$\Leftrightarrow AC = 2AB$$

4) Montrons que les points O ; $E(1 + i)$; $F(1 - i)$ et $H(2)$ sont cocycliques

$$\begin{aligned} \frac{e - o}{f - o} \times \frac{f - h}{e - h} &= \frac{1 + i - 0}{1 - i - 0} \times \frac{1 - i - 2}{1 + i - 2} \\ &= \frac{1 + i}{1 - i} \times \frac{-1 - i}{-1 + i} \\ &= \frac{-(1 + i)^2}{-(1 - i)^2} \\ &= \frac{1 + 2i - 1}{1 - 2i - 1} \\ &= \frac{2i}{-2i} \\ &= -1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc les points O ; $E(1 + i)$; $F(1 - i)$ et $H(2)$ sont cocycliques

Exercice 05

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E_1): \bar{z} = 2z + 4i - 1$

6) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_2): 3iz - \bar{z} = 8i$

Solution

$$3) \bar{z} = 3\bar{z} + 4i - 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \overline{2z + 4i - 1} \Leftrightarrow z = 2z - 4i - 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + 4i$$

$$\text{Donc } S = \{1 + 4i\}$$

4) z un élément de $\mathbb{C}$, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$3iz - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i$$

$$\Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } (-8y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow z = 3 - i$$

$$\text{Donc } S = \{3 - i\}$$



Exercice 06

M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.

Solution

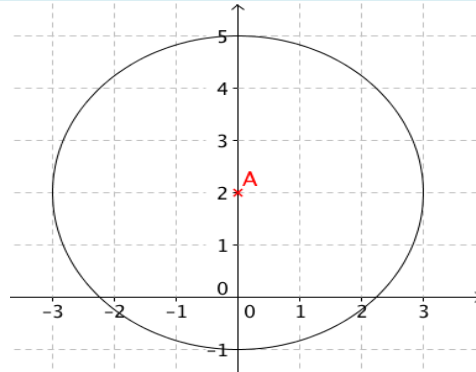
1) Soit A le point d'affixe $2i$

alors $|z - 2i| = 3$

s'écrit $AM = 3$.

En effet : $|z - 2i| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.

2ème méthode : (méthode algébrique)

Soit encore : $|z - 2i|^2 = 9$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit :

$$|x + iy - 2i|^2 = 9$$

$$|x + i(y - 2)|^2 = 9$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 9$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.

$$\begin{aligned} 2) |iz - 3| &= |i(z + 3i)| = |i| \times |z + 3i| \\ &= |z - (-3i)| \end{aligned}$$

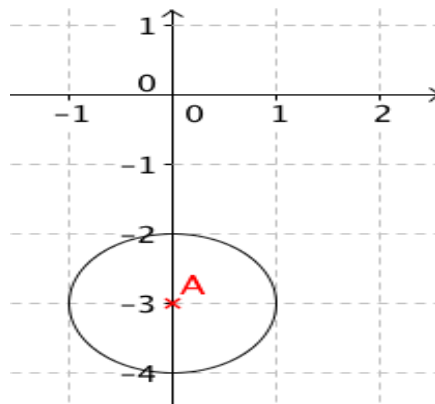
$$\text{Donc } |iz - 3| = 1 \Leftrightarrow |z - (-3i)| = 1$$

Soit A le point d'affixe $-3i$

alors $|iz - 3| = 1$ s'écrit $AM = 1$.

En effet : $|z - (-3i)| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1



$$3) |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{z - 3 + i}|$$

$$= |\bar{z} - 3 - i|$$

$$= |z - 3 - i|$$

$$= |z - (3 + i)|$$

$$\text{Donc } |\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$$

$$\text{Equivaut à } |z - (3 + i)| = |z - 5|$$

Soit A le point d'affixe $3 + i$ et B

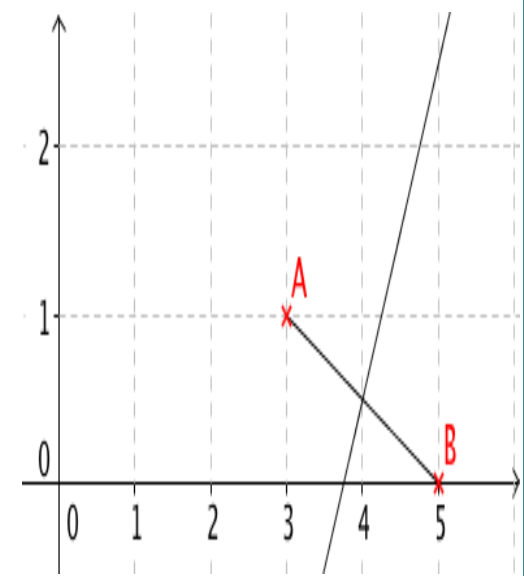
le point d'affixe 5

$$\text{alors } |\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$$

s'écrit $AM = BM$.

Donc l'ensemble des points M est la droite (D)

le médiatrice du segment $[AB]$.

2ème méthode : (méthode algébrique)

$$|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5| \Leftrightarrow |z - (3 + i)| = |z - 5|$$

$$\text{Soit encore } |z - (3 + i)|^2 = |z - 5|^2$$

On pose $z = x + iy$, alors l'équation s'écrit :

$$|x + iy - (3 + i)|^2 = |x + iy - 5|^2$$

$$|x - 3 + i(y - 1)|^2 = |x - 5 + iy|^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 5)^2 + y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

$$6x - 8y + 15 = 0$$

Exercice 07

- 3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$
- 4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$

Solution

On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} &= \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \\ &= \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y+1)+ix(y-1)+(y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y+1)(y-1)+(y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1-ix(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2}i \end{aligned}$$

1) Donc : $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ et } z \neq -1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z \neq -1$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ c'est le cercle (C) de centre 0 et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

2) $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(y^2-1) = 0 \text{ et } z \neq -1$

$$\Leftrightarrow x(y-1)(y+1) = 0 \text{ et } z \neq -1$$

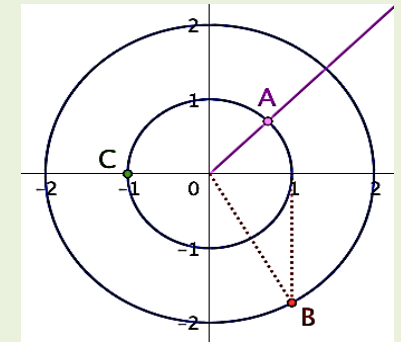
$$\Leftrightarrow x(y-1)(y+1) = 0 \text{ et } z \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ et } z \neq -1$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$, est la réunion des droites $(D_1); (D_1); (D_3)$ d'équations $(D_1): x = 0; (D_3): y = 1; (D_3): y = -1$ privé du point A d'affixe -1

Exercice 08

- 1) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C. définit sur le cercle ci-contre



- 2) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

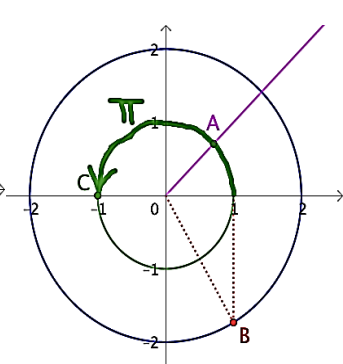
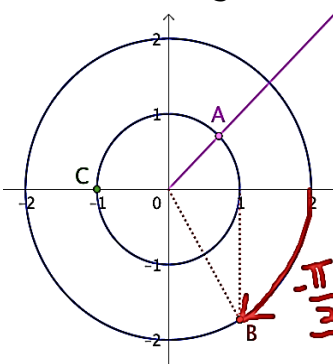
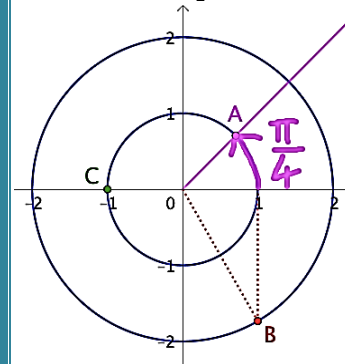
$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Solution

1) $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

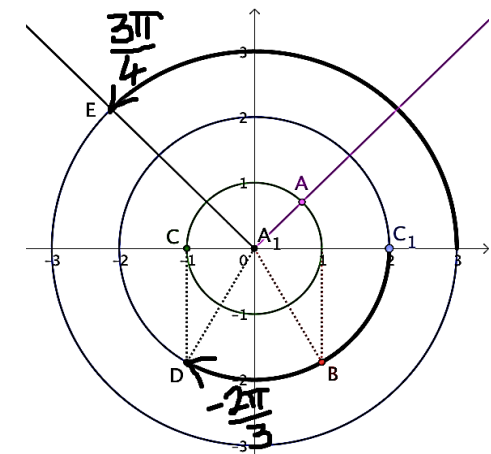
$\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\arg(z_C) = \pi [2\pi]$



- 2) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.

Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.



Exercice 09

z_1, z_2 des complexes tels que $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

3) Déterminer un argument de $z = z_1 z_2$; $z' = \frac{z_1}{z_2}$; $z'' = (z_2)^4$

4) Déterminer un argument de z_3 dans les deux cas suivants :

a) $\frac{z_3}{z_2} = z_1^2$ et b) $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1$

Solution

1) $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$\arg((z_2)^4) \equiv 4\arg(z_2) [2\pi]$

$$\equiv 4 \times \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \pi [2\pi]$$

2)a) $\frac{z_3}{z_2} = z_1^2 \Rightarrow \arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1^2) [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_3) - \arg(z_2) \equiv 2\arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) \equiv 2\arg(z_1) + -\arg(z_2) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) \equiv 2 \times \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow \arg(z_3) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

b) $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1 \Rightarrow \arg(z_3 \times \overline{z_2}) \equiv \arg(4z_1) [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_3) - \arg(z_2) \equiv \arg(4) + \arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = -\arg(z_2) + \arg(4) + \arg(z_1) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = -\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z_3) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Exercice 10

Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -4i$; $z_3 = 2 - 2i$; $z_4 = i$

$z_5 = -2$; $z_6 = -3 - 3i$; $z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$

• On commence par calculer le module de $z_1 = \sqrt{3} + i$:

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

• En factorisant z_1 par $|z_1|$, on trouve $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

• On cherche un argument θ de z_1 tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \text{ convient, en effet : } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

• Donc : $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$.

$z_2 = -4i$ on a ; $|z_2| = |-4i| = 4$

Géométriquement on peut affirmer que : $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Donc : $z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[4, -\frac{\pi}{2}\right]$.



$$z_3 = 2 - 2i$$

- On commence par calculer le module de $z_3 = 2 - 2i$:

$$|z_3| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- En factorisant z_3 par $|z_3|$, on trouve

$$z_3 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

- On cherche un argument θ de z_3 tel que

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$, convient,

en effet : $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

- Donc

$$\begin{aligned} z_3 &= 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

$$z_4 = i \quad \text{on a ; } |z_4| = |i| = 1$$

Géométriquement on peut affirmer que : $\arg(z_4) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

$$\text{Donc : } z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[1, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$z_5 = -2 \quad \text{on a ; } |z_5| = |-2| = 2$$

Géométriquement on peut affirmer que : $\arg(z_5) = \pi [2\pi]$.

$$\text{Donc : } z_5 = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = \left[2, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$z_6 = -3 - 3i$$

$$\text{On a ; } |z_6| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$z_6 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

On cherche un argument θ de z_6 tel que

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \text{convient}$$

Et donc :

$$z_6 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left[3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On a ; } |z_7| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

On cherche un argument θ de z_7 tel que

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc : } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{convient}$$

Et donc :

$$z_7 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$$

Exercice 11

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls tels que :

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[3; \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Déterminer la forme trigonométrique de z_2 ; $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{(z_2)^3}$

Solution

Commençons par déterminer la forme trigonométrique de

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} ; \quad \text{on a ; } |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

On cherche un argument θ de z_2 tel que $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient

$$\text{Et donc } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = \left[2; \frac{-\pi}{3} \right].$$

$$z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{3} \right) \right) = \left[6; -\frac{\pi}{12} \right]$$

$$\begin{aligned} z' = \frac{z_1}{(z_2)^3} &= \frac{\left[3; \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2; \frac{-\pi}{3} \right]^3} = \frac{\left[3; \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2^3; \frac{-3\pi}{3} \right]} = \frac{\left[3; \frac{\pi}{4} \right]}{\left[8; -\pi \right]} \\ &= \left[\frac{3}{8}; \frac{\pi}{4} - (-\pi) \right] = \left[\frac{3}{8}; \frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[\frac{3}{8}; \frac{5\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

Exercice 12

On pose : $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 + i$

1) Ecrire sous forme trigonométrique a et b et en déduire la forme trigonométrique de $\frac{a}{b}$

2) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous la forme algébrique puis en déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

3) Montrer que $a^{2022} \in \mathbb{R}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^{48} + \left(\frac{b}{a}\right)^{48} = 2$

Solution

2) On déjà vu que : $a = 1 + i\sqrt{3} = \left[2; \frac{\pi}{3} \right]$ et $b = 1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

$$\frac{a}{b} = \frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{12} \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$2) \quad \frac{a}{b} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{(1 + \sqrt{3})}{2} i$$

$$\text{On a : } \frac{a}{b} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\text{D'où : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad a^{2022} &= \left[2; \frac{\pi}{3} \right]^{2022} = \left[2^{2022}; 2022 \times \frac{\pi}{3} \right] = \left[2^{2022}; 674\pi \right] \\ &= \left[2^{2022}; 0 \right] = 2^{2022} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{2022} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{48} + \left(\frac{b}{a}\right)^{48} &= \left(\frac{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]}\right)^{48} + \left(\frac{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]}\right)^{48} = \left(\left[1; \frac{\pi}{3} \right]\right)^{48} + \left(\left[1; \frac{\pi}{4} \right]\right)^{48} \\ &= \left[1^{48}; 48 \times \frac{\pi}{3} \right] + \left[1^{48}; 48 \times \frac{\pi}{4} \right] = \left[1; 16\pi \right] + \left[1; 12\pi \right] \\ &= \left[1; 0 \right] + \left[1; 0 \right] = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$



Exercice 13

On pose $b = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ et $a = (1 + i)b$

1) Montrer que $a = -2\sqrt{3} + 2i$. puis calculer $|a|$

2) Ecrire a puis b sous la forme trigonométrique

3) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$

Solution

On pose $b = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ et $a = (1 + i)b$

3) Montrer que $a = -2\sqrt{3} + 2i$. puis calculer $|a|$

$$\begin{aligned} a &= (1 + i)b = (1 + i)(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \\ &= (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3}) \\ &= 1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i - i\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a| &= |-2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

4) Ecrire a puis b sous la forme trigonométrique

$$\begin{aligned} a &= -2\sqrt{3} + 2i \\ &= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \end{aligned}$$

On cherche un argument θ de a tel que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc : } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{convient}$$

$$\text{Et donc : } a = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left[4, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\text{On a : } a = (1 + i)b \quad \text{donc : } b = \frac{a}{1 + i}$$

$$\text{De plus on a : } 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc } b = \frac{4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{Donc : } b = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

3) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$

$$\text{On a : } b = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

$$\text{Donc : } b = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\text{Et on a : } b = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$$

$$\text{Donc : } 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = (1 - \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 14

On pose $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1) Ecrire a^2 sous la forme algébrique

2) Ecrire a^2 sous forme trigonométrique

3) Déduire a sous forme trigonométrique

4) Calculer $\sin \frac{7\pi}{8}$; $\cos \frac{7\pi}{8}$

Solution

$$\begin{aligned} 1) \quad a^2 &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2}) \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} - 2 + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$2) |a^2| = |2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

$$a^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4}i\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$3) \text{ On a : } \arg(a^2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ et on a : } |a^2| = 4$$

$$\text{Donc : } 2 \arg(a) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ et } |a|^2 = 4$$

$$\text{Donc : } \arg(a) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi] \text{ et } |a| = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$4) \text{ Calculons } \sin\frac{7\pi}{8} ; \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$\text{On a : } a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\text{Donc : } a = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Et on a : } b = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Donc : } \cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Et : } \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 15

On pose $a = 2 + \sqrt{3} + i$

4) Montrer que $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{a}$ puis calculer $|a|$

5) Ecrire a sous la forme trigonométrique

6) En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

7) Montrer que $a^6 = i(2\sqrt{2+\sqrt{3}})^6$

Solution

On pose $a = 2 + \sqrt{3} + i$

1) Montrer que $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{a}$ puis calculer $|a|$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{3} - i)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + \sqrt{3} - i)$$

$$= \sqrt{3} + i + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3} + i$$

$$= a$$

$$|a| = |2 + \sqrt{3} + i| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4(2 + \sqrt{3})}$$

$$= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

2) Ecrire a sous la forme trigonométrique

On a : $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{a}$

Donc : $\arg(a) \equiv \arg\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{a}\right] [2\pi]$

Donc : $\arg(a) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \arg \bar{a} [2\pi]$

Donc : $\arg(a) \equiv \arg\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) - \arg a [2\pi]$

Donc : $\arg(a) + \arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc : $2 \arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc : $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

D'où : $a = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

3) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

On a : $a = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

Donc ; $a = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos \frac{\pi}{12} + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sin \frac{\pi}{12}$

Et on a ; $a = 2 + \sqrt{3} + i$

Donc : $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ et $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sin \frac{\pi}{12} = 1$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

4) Montrer que $a^6 = i\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6$

$$a^6 = \left[2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)\right]^6$$

$$a^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 \left(\cos \left(6 \times \frac{\pi}{12}\right) + i \sin \left(6 \times \frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$a^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 (0 + i)$$

$$a^6 = i\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6$$

Exercice 16

Soient les points A(a) ; B(b) et C(c) tel que

$$a = 2 ; b = -1 + i \text{ et } c = 3 + 3i$$

Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = -i$ puis en déduire la nature du triangle ABC

Solution

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{3+3i-2}{-1+i-2} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3)^2+1^2} \\ &= \frac{-3-i-9i+3+3i}{10} = \frac{-10i}{10} = -i \end{aligned}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = -i \Rightarrow \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |-i| \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(-i) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \text{ et } \overrightarrow{(AB, AC)} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow AC = AB \text{ et } \overrightarrow{(AB, AC)} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

Exercice 17

Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que

$$a = \sqrt{3} - i ; b = -a \text{ et } c = \sqrt{3} + 3i$$

1) Vérifier que $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) Ecrire le nombre $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sous forme trigonométrique

Solution

$$1) \frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3}+3i - \sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i - \sqrt{3}+i} = \frac{4i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{2i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3}-2}{4} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

On cherche un argument θ de z_3 tel que $\cos \theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient

$$\text{Et donc : } z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = \left[1, \frac{-\pi}{3} \right]$$

3) La nature du triangle ABC

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \left| \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Rightarrow AC = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est équilatérale

Exercice 18

On considère dans le plan complexe les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ tel que $a = \sqrt{3} + i$; $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ et $c = -1 + i\sqrt{3}$

1) Déterminer la forme trigonométrique de $1 + i$ et de a

2) Montrer que $b = (1 + i)a$ puis déterminer la forme trigonométrique de b

3) Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$

4) Vérifier que $c = ia$ puis en déduire la nature du triangle OAC

5) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un carré

Solution

1) Déterminer la forme trigonométrique de $1 + i$ et de a

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$a = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left[2; \frac{\pi}{6} \right]$$

2) Montrer que $b = (1 + i)a$ puis déterminer la forme trigonométrique de b

$$(1 + i)a = (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i = b$$

$$b = (1 + i)a = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] \left[2; \frac{\pi}{6} \right] = \left[2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right] = \left[2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{12} \right]$$

$$b = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

3) Déduire la valeur de $\cos \frac{5\pi}{12}$

$$\text{On a : } b = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\text{et } b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$$

$$\text{Donc : } 2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$



4) Vérifier que $c = ia$ puis en déduire la nature du triangle OAC

$$ia = i(\sqrt{3} + i) = -1 + i\sqrt{3} = c$$

Donc ; $c = ia$

$$c = ia \Rightarrow \frac{c}{a} = i \Rightarrow \left| \frac{c-0}{a-0} \right| = |-i| \text{ et } \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \arg(i) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{|c-0|}{|a-0|} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow OC = OA \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle OAC est isocèle et rectangle en O

5) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un carré

* Montrons que le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme

Donc montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i - \sqrt{3} - i$$

$$= \sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i$$

$$= -1 + i\sqrt{3}$$

$$= z_{\overrightarrow{OC}}$$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

Donc $OABC$ est un parallélogramme

Et on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $OABC$ est un rectangle

De plus on a : $OC = OA$ donc le quadrilatère $OABC$ est un carré

Exercice 19

On considère dans le plan complexe les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ tel que $a = 1 + 2i$; $b = 3 + 3i$ et $c = 4 + 5i$

1) Déterminer d l'affixe de D tel que $ABCD$ un parallélogramme

2) Vérifier que $c - a = 3i(b - d)$ puis en déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

3) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est losange

4) Déterminer e l'affixe de E le symétrique de B par rapport à A

5) En déduire le centre et le rayon de (C) le cercle circonscrit au triangle EBD

Solution

1) Déterminer d l'affixe de D tel que $ABCD$ un parallélogramme

$ABCD$ un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\Rightarrow d - a = c - b$$

$$\Rightarrow d = c - b + a$$

$$\Rightarrow d = 4 + 5i - 3 - 3i + 1 + 2i$$

$$\Rightarrow d = 2 + 4i$$

2) Vérifier que $c - a = 3i(b - d)$

$$\text{On a : } c - a = 4 + 5i - 1 - 2i = 3 + 3i$$

$$\text{Et on a : } 3i(b - d) = 3i(3 + 3i - 2 - 4i) = 3i(1 - i) = 3 + 3i$$

$$\text{Donc : } c - a = 3i(b - d)$$

$$\text{On a : } c - a = 3i(b - d)$$

$$\text{Donc : } \frac{c - a}{b - d} = 3i$$

$$\text{Donc : } \arg\left(\frac{c - a}{b - d}\right) \equiv \arg(3i) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

3) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est losange

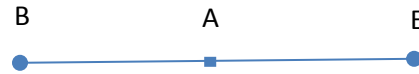
On a le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Et on a les diagonales de $ABCD$ les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

Donc le quadrilatère $ABCD$ est losange



4) Déterminer e l'affixe de E le symétrique de B par rapport à A



E le symétrique de $B \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow e - a = a - b$$

$$\Rightarrow e = 2a - b$$

$$\Rightarrow e = 2(1 + 2i) - 3 - 3i$$

$$\Rightarrow e = -1 + i$$

5) En déduire le centre et le rayon de (C) le cercle circonscrit au triangle EBD

On a : E le symétrique de B donc $AE = AB$

Et on a $ABCD$ un losange donc $AB = AD$

D'où $AE = AB = AD$

Donc les points B ; E et D appartiennent au même cercle (C) de centre A et de rayon $R = AB = |b - a| = |3 + 3i - 1 - 2i| = |2 + i| = \sqrt{5}$

Exercice 20

On considère le point M d'affixe le nombre complexe z

et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

1) Déterminer le nombre complexe z pour que les points M et M' soient confondus

2) On suppose que M différent des points A et B d'affixes respectifs

1 et -1 ; Montrer que $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3) Soit la droite (Δ) le médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)

4) Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$; Montrer que si M appartient à (C) alors les points A ; B et M' sont alignés

Solution

$$1) M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

$$2) \frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1}{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - 1} = \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} = \frac{z^2 + 1 + 2z}{z^2 + 1 - 2z} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

3) M appartient à $(\Delta) \Rightarrow AM = BM$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 ; \text{ car } M \neq A$$

$$\Rightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z'+1}{z'-1} = 1 ; \text{ car } \frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BM'}{AM'} = 1 \Rightarrow BM' = AM'$$

$\Rightarrow M'$ appartient à (Δ)

4) M appartient au cercle $(C) \Rightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \equiv \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) \equiv \pi [2\pi] ; \text{ car } \frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{BM'}) \equiv \pi [2\pi]$$

$\Rightarrow$ les points A ; B et M' sont alignés