

مقدمة الكتاب

عاش التعليم العربي الإسلامي في السنغال فترة من الزمن تشّتت وتفرّق شمل العاملين فيه، فكان لكل جمعية ومؤسسة برنامجها، وكتبها، وشهاداتها التعليمية الخاصة بها.

سبب هذا التشتت والتفرّق ضعف القوة وإفهاك جسم هذا التعليم التراثي العتيق، بل تضرر منه معظم الدارسين خاصة عند ما يريدون الانتقال من مؤسسة إلى أخرى.

شاء القدر أن يفتح بتاريخ 29 مايو 2012م صفحة جديدة لهذا التعليم، فأنازل القلوب وأزال كل الحساسيات الانتمائية، فاتحد الجميع حول المصلحة العامة.

هذه الإرادة الإلهية هي التي ذلت كل الصعوبات على المستوى الرسمي وغير الرسمي، حتى وقع سعادة رئيس الجمهورية السيد مكي صال المرسوم رقم 913-2013 الصادر بتاريخ 1 يوليو 2013م المؤسس والمنظم للشهادة الثانوية العربية الرسمية (بكالوريا العربية)

تواكبا مع الركب، تواترت التضحيات من الجميع وبدون استثناء لصالح المصلحة العامة، فتم إيجاد كتاب " الرياضيات " للسنة الثالثة الثانوية بناء على البرنامج الرسمي للتعليم العربي الإسلامي الثانوي.

لجنة السهر على التعليم العربي الإسلامي صاحبة هذه المبادرة، تقدم الشكر الجزيل والعرفان الخاص إلى المشايخ الكرام لمساندتهم الدائمة للجنة، وإلى فخامة رئيس الجمهورية الذي يعتبر أول من وقع مرسومها من هذا النوع في غرب أفريقيا، وإلى وزير التعليم العالي الأستاذ ماري تاو تيان، ومدير مصلحة بكالوريا السيد بابو جاحام ومساعديه.

وكذلك إلى المؤسسات التعليمية وإلى المدرسين فيها للمساهمات الكبيرة التي قدموها للوصول إلى هذا الإنجاز الكبير.

لجنة السهر

مفردات المقرر

- الحدوديات - حل الحدوديات عن طريق الدلتا -
- جمع وطرح الكسور الجبرية
- حل المعادلات من الدرجة الثانية والمتباينات وخواصها بمتغيرين
- المتباينات الخطية بمتغير واحد وبمتغيرين
- الحلول الجبرية والرسومات البيانية للمعادلات والمتباينات
- اللوغاريتم
- الدالة الخطية - التعريف - الخواص - التمثيل البياني
- المتواليات الحسابية والهندسية : دراسة تكميلية للمتواليات
- التفاضل والتكامل - التكاملات الوظيفية
- حساب المساحات
- تكملة الدروس في الإحصاء
- في النهاية التلميذ يكون قادرا علي استعمال الالة الحاسبة

المتابعة الحقيقية

هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}^+$ أو مجموعة جزئية منها: ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}$. أي إذا كانت: D متابعة من الأعداد الحقيقية فإن، $D: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $D: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$.

التعبير عن المتابعة:

حيث أن المتابعة هي دالة مجالها $\mathbb{N}^+$ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل $\mathbb{R}$ فإن بيان المتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة $(n, D(n))$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، $D(n) \in \mathbb{R}$. وعلى ذلك يمكن كتابة بيان الدالة كالآتي:

$$D = \{ (1, D(1)), (2, D(2)), (3, D(3)), \dots, (n, D(n)) \}$$

وحيث أن المساقط الأولى للأزواج المرتبة المحددة لبيان المتابعة هي عناصر $\mathbb{N}^+$ وعلى ذلك يمكن التعبير عن المتابعة كما يلي: $D: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ، $D(1), D(2), D(3), \dots, D(n)$ والقيم $D(1), D(2), D(3), \dots$ تسمى حدود المتابعة حيث $D(1)$ هو الحد الأول للمتابعة ويرمز بالرمز D_1 أو $D(1)$ بالحد الثاني، D_2 ، $D(2)$ هو الحد النوني للمتابعة ويرمز بالرمز D_n أو $D(n)$ وهكذا.

و يمكن التعبير عن المتابعة بصورة أخرى: $(D_n) = (D(1), D(2), D(3), \dots, D(n))$

أو { 1 ٢، 2 ٢، ٣ ٢ ن ٢ }

ملاحظة هامة جدا

1) لاحظ الفرق بين (ح_ن)، ح_ن حيث (ح_ن) يرمز للمتتابعة بينما ح_ن. يرمز للحد العام أو

الحد النوني للمتتابعة (٢_ن)، ٢_ن.

2) إذا كان مجال المتتابعة (ح_د) (٢_د) مجموعة جزئية من $\mathbb{N}^+$ فإننا نسميها متتابعة منتهية.

المتابعة الحسابية

القاعدة: تسمى المتابعة (ح_د) متابعة حسابية إذا كان:

$$ح_{د+1} - ح_{د} = مقدارا ثابتا . ح_{د+1} - ح_{د} = مقدار ثابت لكل د ∈ ص .$$

سنستعمل هنا "ح" رمزا للحد، بدلا من "م" ولكن كلاهما على السواء للاستعمال.

ويسمى المقدار الثالث أساس المتابعة ويرمز له عادة بالرمز (د) أي أن د = أساس

$$المتابعة الحسابية، ح_{د+1} - ح_{د} لكل ن ∈ ص .$$

بمعنى أن أساس المتابعة الحسابية = أي حدّ فيها - الحد السابق له مباشرة.

ملحوظة :

إذا كانت د < 5 تكون المتابعة تزايدية، وإذا كانت د > 5 تكون المتابعة تناقصية.

مثال 1: بين أي المتتابعات الآتية تكون حسابية وأي منها غير حسابية، وأوجد أساس

كل متابعة حسابية:

(1) (5، 19، 13....)

(2) (3، 6، 12.....)

(3) (-17، -15، -13،)

(4) ($\sqrt[3]{9}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[3]{5}$)

(5) ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ،)

الحل :

$$(1) \quad 4 = 9 - 13 = 5 - 9 \quad \diamond \quad \text{المتابعة حسابية وأساسها} = 4.$$

$$(2) \quad 3 - 6 \neq 6 - 12 \quad \diamond \quad \text{المتابعة ليست حسابية.}$$

$$(3) \quad 2 = 15 + 13 - = 2 = 17 + 15 - = (17 -) - 15 - \quad \diamond \quad \text{متابعة حسابية .}$$

$$\text{وأساسها} = 2.$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{2-} = \sqrt[3]{7-} - \sqrt[3]{5-} = \sqrt[3]{9-} - \sqrt[3]{7-} \quad \diamond \quad \text{المتابعة حسابية وأساسها}$$

$$\sqrt[3]{2-} =$$

$$(5) \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \quad \diamond \quad \text{لأن} \quad \frac{3-4}{6} \neq \frac{8-9}{12} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12}.$$

المتابعة ليست حسابية.

مثال 2: بين أي المتابعات الآتية حسابية.

$$(1) \quad : (ح_3) = (1 + 3) \quad (2) \quad : (ح_2) = (2 - 1) \quad (3) \quad : (ح_3) = (3).$$

$$(4) \quad : (ح_4) = (5 - 4) \quad (5) \quad : (ح_5) = (2 + \frac{3}{5}).$$

الحل:

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_n)$ تكون حسابية نوجد: $ح_{n+1} - ح_n$ ، فإذا كان الناتج مقدارا ثابتا كانت $(ح_n)$ متتابعة حسابية، بينما إذا كان الناتج ليس مقدرا ثابتا فإن $(ح_n)$ ليست متتابعة حسابية.

$$1) \quad ح_{n+1} - ح_n = (3(1+n) - 2) - (3(1+n-1) - 2)$$

$$= 3 + 3 - 2 - 3 = 3 \text{ مقدار ثابت.}$$

$$\clubsuit ح_n = (3 - 2) \text{ حسابية.}$$

$$2) \quad ح_{n+1} - ح_n = (2(1+n)^2 - 1) - (2(1+n-1)^2 - 1)$$

$$= 2 + 4 + 2 - 1 - 2 - 1 + 2 = 2 + 4 = 6 \text{ ليست حسابية لاعتمادها على } (ن).$$

$$\clubsuit ح_n = (2 - 1) \text{ ليست متتابعة حسابية.}$$

$$3) \quad ح_{n+1} - ح_n = (3^{1+n} - 3) - (3^n - 3) = 3^{1+n} - 3^n = 3 \times 3^n \text{ ليست بمقدار ثابت لأنه}$$

يعتمد على $(ن)$.

$$\clubsuit (ح_n) = 3^n \text{ ليست حسابية.}$$

$$4) \quad ح_{n+1} - ح_n = (5(1+n) - 4) - (5(1+n-1) - 4)$$

$$= 5 - 4 + 5 - 4 = 2 \text{ مقدار ثابت}$$

$$\clubsuit ح_{n+1} - ح_n = \left(\frac{3}{1+n} + 2\right) - \left(\frac{3}{n} + 2\right)$$

$$\frac{3-}{(1+n)^n} = \frac{(1+n)^{3-n} 3}{(1+n)^n} = \frac{3}{n} - \frac{3}{1+n} = \frac{3}{n} - 2 + \frac{3}{1+n} + 2 =$$

وهذا ليس بمقدار ثابت لاعتماده على (ن).

$$\nabla (ح_n) = \left(\frac{3}{n} + 2\right) \text{ ليست متتابعة حسابية.}$$

نظرية:

ح_n تكون متتابعة حسابية إذا وفقط إذا كان ح_n مقداراً من الدرجة الأولى في ن
ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

فمثلاً المتتابعة (ح_n) = (2- + 7) متتابعة حسابية لأن حدها العام ح_n عبارة عن
مقدار من الدرجة الأولى في (ن) وأساسها = 2-

الحد العام في المتتابعة الحسابية

إذا كانت (ح_n) متتابعة حسابية حدها الأول هو ١ ، وأساسها = د ، فإن حدها العام

يكون على الصورة: $ح_n = p + (n-1)d$ حيث ن رتبة الحد.

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية

إذا عوضنا عن n في القانون $ح = د + (ن-1) \times د$ بالقيم: 1، 2، 3، ...، على

التوالي فإننا نلاحظ أن المتتابعة الحسابية تأخذ الصورة:

$د، د+د، د+2د، د+3د، \dots$ وتسمى هذه الصورة بالصورة العامة للمتتابعة

الحسابية حيث:

$$ح_1 = د، ح_2 = د + د، ح_3 = د + 2د، ح_4 = د + 3د \dots الخ$$

ونلاحظ في هذه الصورة أن معامل $د$ يقل دائما بواحد عن رتبة الحد وعليه يكون:

$$ح_{25} = د + 24د، ح_{75} = د + 74د، وهكذا.$$

ملاحظة:

إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها $= ن$ ، فإنه يرمز للحد الأخير بالرمز

$$ل \text{ حيث: } ل = د + (ن - 1) \times د \text{ حيث } ن \text{ عدد الحدود.}$$

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الحسابية في هذه الحالة على الصورة: $(د، د + د، د + 2د، \dots)$

$$د + 2د، \dots، ل \dots)$$

مثال: أوجد $ح_7$ ، $ح_{12}$ من المتتابعة الحسابية (5، 7، 9، 11، 13، ...).

الحل: $د = 5 - 7 = -2، د + 5 = 7$

$$ح_7 = د + 6 \times د = -2 + 6 \times 5 = 28، ح_{12} = د + 11 \times د = -2 + 11 \times 5 = 53.$$

$$17 = 7\text{ح}$$

$$27 = 12\text{ح} \quad \diamond \quad 27 = 2 \times 11 + 5 = 11 + 2 = 12\text{ح}$$

ملاحظات هامة جدا

(1) لإيجاد رتبة الحد الذي يساوي قيمة معلومة س نضع

$$\text{ح} = \text{س}$$

مثلا: لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته = 200 نضع

$$\text{ح} = 200$$

(2) لإيجاد رتبة الأول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة س، نضع

$$\text{ح} > \text{س}$$

فمثلا: أوجد أول حد قيمته أقل من 50، نضع

$$\text{ح} > 50$$

(3) لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة س نضع

$$\text{ح} < \text{س}$$

فمثلا: لإيجاد رتبة أول حد قيمته أكبر من 70 نضع

$$\text{ح} < 70$$

(4) لإيجاد رتبة أول حد موجب في المتتابعة الحسابية نضع

$$\text{ح} < 5$$

مثلا: $2 + د (1 - \text{ن}) < 5$.

(5) لإيجاد رتبة أول حد سالب في المتتالية الحسابية نضع

$$\text{ح} > 5$$

مثال 4: في المتتابعة الحسابية (95، 92، 89،) أوجد: (1) قيمة ح،

(2) رتبة الحد قيمته 68. (3) رتبة حد سالب.

الحل: $95 = 2$ $3 = د$

$$.80=15-95 = (3-) \times 5+95 \Leftarrow 5+ \text{ح} = 6$$

$$\boxed{80 = 6\text{ح}} \quad \clubsuit$$

$$(2) \text{ يوضع ح} = 68 \quad \clubsuit \text{ د} + (1-) = 68.$$

$$\clubsuit 68 = (3-) \times (1-) + 95$$

$$\clubsuit 10 = 30 \quad \clubsuit 30 = 3- \quad \clubsuit 68 = 3 + 3- - 95$$

$$\boxed{68 = 10\text{ح}} \quad \text{وعليه فإن}$$

$$(3) \text{ يوضع ح} > 5 \quad \clubsuit \text{ د} + (1-) > 5$$

$$\clubsuit 5 > (3-) \times (1-) + 95$$

$$5 > 98 + 3- = 5 > 3 + (3-) + 95 =$$

$$\clubsuit 3- > 98 \quad \clubsuit 98 < 3 \quad \cdot \frac{98}{3}$$

$$\clubsuit \text{ أول حد سالب هو } 32 \frac{2}{3} \text{ أي الحد: ح} 33.$$

مثال 5: في المتتابعة الحسابية $(-42, 39, -36, \dots, 21)$

(1) أوجد عدد حدود المتتابعة. (2) رتبة وقيمة أول حد موجب، (3) قيمة ح 9 من

النهاية.

الحل:

$$\text{ح} = -42, \text{ د} = 3, \text{ ل} = 21.$$

$$98 < 4 + 13 \div (1 - n) \quad 98 < \text{ح} \quad (1)$$

$$9 - 98 < 4 \div n \quad 98 < 4 - n + 13$$

$$98 < \frac{98}{4} \quad n < \frac{1}{4} \cdot 22 \quad \div \text{ح} 23 \text{ هو أول حد تزيد قيمته عن } 98$$

$$151 = 4 + 13 \div (1 - n) \quad 151 = \text{ح} \quad (2) \text{ بفرض أن ح}$$

$$151 = 4 - n + 13 \div (1 - n) \quad 151 = 4 - n + 13$$

$$35 \frac{1}{2} = n \div \frac{142}{4} = \frac{n}{4} \Leftrightarrow 13 - 151 = n$$

$$35 \frac{1}{2} \div \text{ص}^+ \quad \div \text{لا يوجد}$$

مثال 7: إذا كانت المتتابعة (17، س،، ص، 71) متتابعة حسابية وكان

$$3\text{س} = \text{ص} + 4 \text{ فأوجد قيمة كل من: س، ص.}$$

الحل: س - 17 = 71 - ص. الأساس مقدار ثابت،

$$\text{س} + \text{ص} = 88.$$

$$\div 3\text{س} = \text{ص} + 4 \text{ (معطي)} \quad \div 3\text{س} - \text{ص} = 4$$

$$23 = \text{س} \times \frac{92}{4} = \text{س} \times 23$$

بالتعويض: ص = 65.

مثال 8 إذا كان ح₁₊₂ من المتتابة الحسابية (1، 5، 3، 6،) يساوي ح₅₋₁

من المتتابة الحسابية (23، 5، 21، 20،). فأوجد قيمة ن.

الحل:

بالنسبة للمتتابة الأولى $p = 1$ ، $d = 5$ ، 2.

$$ح_{1+2} = p + d(2-1) = 1 + 5 = 6$$

$$ح_{1+2} = 1 + 5 = 6 = \frac{5}{2} \times 2 + 1 = 6$$

بالنسبة للمتتابة الثانية: $p = 23$ ، $d = -5$ ، 1.

$$ح_{5-1} = p + d(5-1) = 23 - 20 = 3$$

$$ح_{1+5} = 23 + d(5+1) = 23 - 30 = -7$$

$$26 + 7,5 =$$

$$26 - 7,5 = 19$$

$$1 - 26 = -25 = 7,5 + 5$$

$$2 = \text{قيمة ن} \quad , 2 = \frac{250}{125} = 2 \Leftarrow 25 = 12,5 \times 2$$

مجموع المتواليات العددية

لإيجاد مجموع عدد معين من حدود متوالية عددية مثلاً مجموع
 $7+9+11+13+15+17$ هو نفس المجموع، لو عكسنا الترتيب وجمع كل حدين
 $7+17+9+15+11+13$.

ونلاحظ أن كل منها يساوي: $26+26+26+26+26+26+26$... سنجد أن
مجموعها في كل حالة كما هو واضح 26.

أي الحد الأول + الحد الأخير ويكون مجموع المتوالية نصف مجموع كل حدين
مضروباً في عدد الحدود.

$$\text{حـ} = \frac{n}{2} [a + l] \text{ حيث: } a \text{ حد الأول، } l \text{ حد الأخير.}$$

ومن هنا يمكن إيجاد مجموع المتوالية العددية بمعلومية الحد الأول وعدد الحدود والحد
الأخير.

$$\text{أو حـ} = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

وهنا يمكن إيجاد مجموع المتوالية العددية بدلالة الحد الأول والأساس وعدد الحدود
حالة تسمى الأعداد: 1، 2، 3، 4، 5، بالأعداد الطبيعية بحيث 1 حدها الأول
وأساسها = 1 وحدها النوني. n

• مجموع n من العدد الطبيعي $\frac{n(n+1)}{2}$. مثلاً مجموع الألف حد الأولى من الأعداد

$$500500 = \frac{1 \times 1000}{2} = \text{الطبيعية}$$

ملاحظات هامة:

إذا كان عدد حدود متوالية عدد فردية فيكون لها حد أوسط تكون رتبة $\frac{1+n}{2}$

وقيمته $\frac{l+p}{2}$ وإذا كان عدد الحدود زوجياً فيوجد حدان أوسطان تكون

رتبتهما: $\frac{n}{2}$ ، $1 + \frac{n}{2}$ ومجموعهما $1 + l$.

• من القانون: $\frac{(l+p)n}{2} = 2$ نستنتج ما يأتي:

(1) إذا كان عدد الحدود فردياً فإن: $ح = n \times \text{الخط الأوسط}$.

(2) إذا (ن) زوجياً فإن $ح = n \times \frac{\text{مجموع الحدين الوسيطين}}{2}$.

مثال: متوالية عددية حدها الأول 7 والآخر 33 وعدد حدودها 10 أوجد مجموعها.

$$ح = \frac{n}{2} [l + p] = \frac{10}{2} [33 + 7] = 5(40) = 200.$$

مثال: أوجد مجموع ثلاثين حداً من المتوالية: 5، 8، 11،

الحل: الأساس $3 = 5 - 8$.

$$\text{ح} = \frac{ن}{2} [2 + (1-ن) د] = \frac{30}{2} = [2 + (1-29) 3] ،$$

$$15 [10 + 87] = 15 \times 97 = 1455 .$$

مثال: أوجد الحد الأخير من المتوالية: 9، 12، 15، ... 24 حداً، ثم أوجد مجموع هذه المتوالية.

$$ل = 24 \text{ ح} ، 24 \text{ ح} = 2 + 23 د . د = 12 - 15 = -3 .$$

$$24 \text{ ح} = 15 + 23 (-3) \Leftarrow 24 \text{ ح} = 15 - 69 .$$

$$24 \text{ ح} = -54 ، \frac{ن}{2} [ل + 2] = \text{ح}$$

$$\frac{24}{2} [15 - 39] = \text{ح} = -468 .$$

مجموع حدود المتوالية: العددية بمعلومية عدد حدودها وحدها الأول وحدها الأخير.

$$\text{ح} = \frac{ن}{2} [ل + 2] ، ويمكن كتابة هذه العلاقة بصورة أخرى هكذا،$$

$$= ن \times \text{الوسط العددية بين الحدين الأول والأخير} .$$

$$\text{ح} = ل + (1-ن) د .$$

$$\text{ح} = \frac{ن}{2} [2 + د (1-ن)] = \frac{ن}{2} [2 + د + د (1-ن)]$$

وهذا القانون لإيجاد مجموع المتواليات العددية إذا علم حدها الأول وفرقها الثابت (أساس) وعدد حدودها.

حالة خاصة الأعداد الطبيعية: 1، 2، 3، 4، 5، تكون متوالية عددية حدها الأول = 1 وأساسها 1 وحدها النوني ن.

$$\therefore \text{مجموع } n \text{ من الأعداد الطبيعية} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{مجموع الألف حد الأولى من الأعداد الطبيعية} = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500500$$

ملاحظة: إذا كان عدد حدود المتوالية عدد فردية فيكون لها حد أوسط واحد رتبته

$$\frac{n+1}{2} \text{ وقيمته } \frac{l+p}{2}$$

وإذا كان عدد الحدود زوجيا فيوجد أن أوسطان تكون رتبتهما $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{2} + 1$ ومجموعهما $l+p$.

المتواليات الهندسية

إذا كان لدينا مجموعة الأعداد وكان كل حد مقسوما على سابقه يعطي مقدارا ثابتا، فإن هذه الأعداد تكون ما يسمى بمتواليات هندسية والمقدار الثابت هو أساسها.

مثال: { 3، 6، 12، 24... } تكون م، هـ أساسها.

$$2 = \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} =$$

$$\text{كذلك: } \{ 6، 12، 24، 48... \} \text{ م، هـ} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \frac{24}{48}$$

كذلك: 2، -6، 18، -54، أساسها = -3. ويرمز بالحد الأول " P " والأساس

" ر " والصورة العامة للمتواليات الهندسية التي حدها الأول (P) وأساسها (R) هي:

$$P، P^2، P^3، P^4، \dots \text{ وترى هنا أن الأساس يرفع بقوة تنقص عن رتبة}$$

الحد بمقدار واحد، وعلى ذلك فإن:

$$9 = P^8، 11 = P^{10}، ح = P^n \text{ وهكذا.}$$

و الحد العام: $\boxed{ح = P^{n-1}}$ قانون متواليات الهندسية.

(1) مثال: أوجد الحد الخامس في المتوالية الهندسية 3، 9، 27.....

$$\text{الحل: } R = \frac{9}{3} = 3. \quad P = 3. \quad \text{ح} = P^4 = 81.$$

$$\text{ح} = 5 = 3 = P^{(R)} = 3 \times 3 = 9 = P^4 = 81 = 3^5 = 243$$

الحل: $10^9 = 10^9$ ، $5 = 5$ ، $1280 = 1280$ ؟ بالتعويض $1280 = 5^9$ ؟

$$\frac{1280}{5} =$$

.256 = 9

$$\textcircled{1} \leftarrow \textcircled{p} = \frac{3}{4} \Leftarrow \frac{3}{4} = 2\tau$$

$$\textcircled{2} \leftarrow {}^5_2p \quad 24 = 24 = {}_6z$$

بقسمة كل من ② على ① $\frac{5_{\text{ر}}}{2} = \frac{24}{3} = 8_{\text{ر}} = 16_{\text{ر}} \cdot 4_{\text{ر}} = 4_{\text{ر}}(2)_{\text{ر}}$

$$\frac{3_{\pm}}{4} = \frac{3}{2} = (2_{\pm}) \times 1.5 \text{ بالتعويض}$$

$$\frac{765}{4} = 255 \times \frac{3}{4} = \frac{(1-82)^{\frac{3}{4}}}{(1-)-2} = 8 \rightarrow$$

$$\frac{225}{4} = \frac{256-1}{3} \times \frac{3-}{4} = \frac{[(^8 2-) - 1] - \frac{3}{4}}{(2-) - 1} = \frac{3-}{4} \text{ أو:}$$

ايجاد مجموع المتوالية الهندسية بدلالة الحد الأخير والأساس .

إذا رمزنا للحد النوني في المتواليات الهندسية بالرمز l فإن $l = r^{n-1}$ بضرب

طرفي المعادلة. في: $r = R = r \times r^{1-n}$ $r = R = r$.

وبالتعويض في القانونين:

$$\frac{(r^n - 1)p}{r - 1} \text{ أو } \frac{(1 - r^n)p}{1 - r} = \text{ح}$$

مثال: أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتواليات الهندسية: 625، 125، 25،،

$$\text{الحل: } p = 625, r = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}, r < 1.$$

$$\text{ح} = \frac{(r^n - 1)p}{r - 1} = \frac{(\frac{1}{5}^6 - 1)625}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{(\frac{1}{15625} - 1)625}{\frac{1}{5} - 1}$$

$$= -625 \times \frac{15624}{15625} = \frac{5}{4} \times \frac{3906}{5} = \frac{1}{5} \times 781$$

مثال: كم حدا من الحدود المتوالية الهندسية: 15، -5، $1\frac{2}{3}$ يمكن أخذها ابتداء من

$$\text{الحد الأول ليكون مجموعها } 11\frac{62}{243}.$$

الحل:

$$p = 15, r = \frac{5-}{15} = -\frac{1}{3} < 1.$$

$$\text{ح} = \frac{(r^n - 1)p}{r - 1} = \frac{(-\frac{1}{3}^n - 1)15}{(-\frac{1}{3} - 1)} = \frac{(-\frac{1}{3}^n - 1)15}{(-\frac{4}{3})}$$

$$= \frac{1162}{243} \quad \text{ح} = \frac{(-\frac{1}{3}^n - 1)15}{(-\frac{4}{3})} = \frac{1162}{243}$$

$$= 15 \times \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{3}^n - 1 \right]$$

$$7 \cdot \left(\frac{1-}{3}\right) = \frac{1}{2187} - = \frac{2188}{2187} - \mathbf{1} = \circ \left(\frac{1}{3}\right) \clubsuit$$

. 7 = ن ♠

❖ إن عدد الحدود الممكنة أخذها هي 7 حدود.

مثال: أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى من المتواليات الهندسية التي حدها الثاني

$1\frac{1}{2}$ ، وحدها السادس 24.

الحل: نفرض أن المتوالية هي: $p, p, p, p^2, p^3, \dots$

$$.24 = 6\tau, 1\frac{1}{2} = 2\tau \quad \diamond$$

$$.24 = 6\zeta, \quad 1\frac{1}{2} = 2\zeta \diamond$$

$$\textcircled{1} \leftarrow \rho = \frac{3}{2} \leftarrow \frac{3}{2} = {}_2\tau \quad 1\frac{1}{2} = {}_2\tau^*$$

$$\textcircled{2} \leftarrow {}^5J_p = 24 = 24 = {}_6\tau$$

$$.16 = \frac{48}{3} = \frac{\frac{24}{3}}{2} = \frac{5}{2} \leftarrow \text{بقسمة 2 على 1}$$

$$\frac{3}{4} \pm = \frac{3}{2} = 2 \pm) \times ٩ \text{ : حصل على : } 2 \pm = \boxed{16} \Leftarrow 16 = 4^2$$

$$\frac{765}{4} = 255 \times \frac{3}{4} = \frac{(1 - 8 \cdot 2)^{\frac{3}{4}}}{1 - 2} = 8 \rightarrow$$

$$\frac{225}{4} = \frac{(256-1)}{3} \times \frac{3-}{4} = \frac{[{}^8(2-)-1]\frac{3-}{4}}{(2-)-1} = 8 \text{ — أو —}$$

إيجاد مجموع المتوالية الهندسية بدلالة الحد الأخير والأساس، إذا رمزنا للحد النوني في

المتوالية الهندسية، p ، r ، $p r^2$ بالرمز l فإن: $l = p r^{n-1}$. بضرب

الطرفين في r نحصل على: $rl = p r^{1-n} \times r$.

$rl = p r^n$ بالتعويض.

$$\text{—} = \frac{(1-r^n)p}{1-r} \text{، أو } \frac{p(r^n-1)}{r-1}.$$

$$\text{—} = \frac{rl-p}{r-1} = \frac{p-rl}{1-r}.$$

مثال: متوالات هندسية حدها الأول 480 وحدها الأخير 30 وأساسها $\frac{1}{2}$ ما

مجموعها؟ وكم عدد حدودها؟

الحل: $p = 480$ ، $l = 30$ ، $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{—} = \frac{rl-p}{r-1} = \frac{(480 \times \frac{1}{3}) - 480}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{15-480}{\frac{1}{2}}$$

$$n-1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{30}{480} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5.$$

$$\therefore n-1 = 4 \Rightarrow n = 5 \quad \therefore \text{عدد الحدود} = 5.$$

مثال: م. هـ — فيها $p = \frac{1}{3}$ ، $r = 3$ وحدها الأخير = 243. أوجد عدد حدودها؟

الحل:

$$3^{1-n} \cdot \frac{1}{3} = 243 = 3^{1-n} \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow 3^{1-n} = 243 \cdot 8$$

$$243 = \frac{1}{3} \times 3^n \times \frac{1}{3} = 3^{1-n} \times \frac{1}{3}$$

تمارين

أوجد الحد الثالث في كل من المتواليات الهندسية حدها الأول = 1 وأساسها = 2، [4].

$$\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = \quad \quad \quad 1 =$$

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 8 =$$

$$[12] = 2 \dots\dots\dots 3 =$$

الأوساط العددية

تعريف إذا كانت الكميات p, b, c متواليات حسابية سمي الحد الأوسط «ب»
 بالوسط الحسابي أو الوسط العددين للكميتين p, c . وإذا كانت الكميات p, b, c متواليات عددية فإن الحدود: b, c ، تسمى الأوساط العددية بين،
 p, c .

إيجاد الوسط العددين بين كميتين.

بفرض أن الكميتين هما: p, c . وبفرض أن الوسط العددين بينهما هو: s

$$p, s, c \text{ تكون متتالية عددية. } \therefore s - p = c - s = \frac{p+c}{2} = s.$$

إدخال عدة أوساط عددية بين مقدرين معلومين.

مثال 1: أدخل أربعة أوساط بين 2، 22.

الحل: عدد الأوساط 4. $\therefore$ عدد الحدود = 4 + 2 = 6.

$$\therefore c_1 = 2, c_6 = 22.$$

$$\therefore 22 = d_5 + 2, 20 = d_5, \therefore d = \frac{20}{5} = 4.$$

$$\therefore \text{الأوساط} = 6, 10, 14, 18.$$

مثال: عددان الفرق بينهما 2 ووسطهما العددي 6 فما هو العددان؟

الحل: نفرض أن العددين هما p, b حيث $p < b$

$$2 = ب - ٢ ، 6 = \frac{ب + ٢}{2}$$

$$2 = ب - ٢ ، 12 = ب + ٢ \text{ بالجمع.}$$

$$7 = ٢ \Leftrightarrow 7 = \frac{14}{2} = ٢ \Leftarrow 14 = ٢2$$

$$ب = 5 = 7 - 12 \Leftrightarrow 5 = ب \text{ العددان هما } \{5, 7\}.$$

مثال: إذا ادخلت عدة أوساط عددية بين -5، 19. وكانت النسبة بين مجموع

الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين كنسبة $\frac{1}{29}$ ، فما هي هذه الأوساط.

الحل: نفرض أن الأوساط كالتالي:

$$-5 + د ، -5 + 2د ، -5 + 3د ، -19 - 2د.$$

$$\frac{1}{29} = \frac{-5 + 10د - 3د}{-19 - 2د + 3د + 5د} = \frac{2د}{29} = \frac{(-5 + 2د) + (-19 + 3د)}{(-19 + 3د) + (-5 + 5د)}$$

$$290 + 87د = -38 + 3د.$$

$$84د = 252 \Leftarrow د = \frac{252}{84} = 3.$$

∴ الأوساط هي: -2، 1، 4، 7، 10، 13، 16.

القاعدة:

$$2 - \frac{n}{2} \times (n + 1) = \text{ح} = n \times (n + 1) = \text{ح} 2$$

إيجاد مجموع حدود المتسلسلة المرتبطة بالمتواليات الحسابية.

5، 19، 12، حتى 51، ما الحد الأول للمتوالية، ما الحد العام للمتوالية، ما أساس المتوالية.

الحل:

$$\text{الحد العام} = 5 + (n-1) \times 7.$$

$$n = 5 + 7 - n = 7 - n = 2.$$

$$\text{الحد العام} = 7 - n = 2 \text{ وما الحد } 51 \text{ لها}$$

$$355 = 2 - 357 = 2 - (51 \times 7).$$

$$9180 = \frac{51 \times 360}{2} = \frac{51}{2} \times (355 + 5) = \text{ح}$$

الرمز المختصر للمجموعة المتسلسلة . يسمى سَجْمًا للدلالة على المجموعة، فمثلا

$$\sum_{n=1}^9 (5 - 3n) \quad \text{الرمز}$$

معناه أعداد الصورة (3-5) من 1 إلى 9 = 9.

وفي الأمثلة السابقة يمكن أن نعبر عن المجموع كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{51} (2 - 7n)$$

الحل: $(2-(7)7)+(2-(6)7)+(2-(5)7)+(2-(4)7)+(2-(3)7) + (2-(2))7+ (2-(1)7)$

$$47+40+33+26+19+12+5$$

$$2-(14)7 \quad 2-(13)7 + (2-(12)7) + (2-(11)7) + (2-(10)7) + (2-(9)7) + (2-(8)7)$$

$$96+89+82+75+68+61+54$$

وهكذا حتى 51 أي $7(51) - 2 = 355$

وبجمع هذه القيم العديدة نحصل على

$$9180 = \sum_{n=1}^{51} (2 - 7n)$$

$$\underline{\text{مثال: أوجد}} \sum_{n=6}^5 (7 - 2n)$$

كم عدد حدود المطلوب إيجاد مجموعتها أنه 5 كم الحد الأول من هذه المتسلسلة

أنه $3 - 7^{-1} = 4$ ، الحد الثاني منها $3 - 7^{-2} = 2$ وهكذا

$$\sum_{n=8}^5 (7 - 3n) \quad \text{٥ هـ} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$(7 - 3^5) + (7 - 3^4) + (7 - 3^3) + (7 - 3^2) + (7 - 3^1)$$

$$-4 + 2 + 20 + 74 + 236 = 328.$$

مثال: أكتب الحدين الثالث والثامن للمتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{10} (1 - 4^k)$$

الحل:

$$\text{الحـد الثـالث} = (1 - 3 \times 4) = 1 - 12 = -11.$$

$$\text{الحـد الثـامن} = (1 - 8 \times 4) = 1 - 32 = -31.$$

أكتب الحدود السبعة الأولى للمتباينة المرتبطة بالمتسلسلة

$$\sum_{r=1}^{\infty} (5 - 2^r)$$

ما الحد الأول للمتتالية؟

الحل: أنه

$$-4 = (5 - 2^1) = (5 - 2)$$

$$-3 = (5 - 2^2) = (5 - 4) \quad \text{الحـد الثـاني:}$$

$$-1 = (5 - 2^3) = (5 - 8) = -3$$

$$3 = (5 - 2^4) = (5 - 16) = -11$$

$$59 = 5 - 64 = (5 - 2^7) = -127, \quad 27 = 5 - 22 = (5 - 2^5) = -27, \quad 11 = 5 - 16 = (5 - 2^4) = -11$$

استخدم رمز المجموعة التعبير عن المتسلسلة: $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ ،

نستطيع أن نكتب رمز المجموعة، فلابد أن نعرف الحد العام ونلاحظ:

$$ح_9 = (1 - ن) + 9$$

$$ح_9 = (1 - ن)^2 + 3 = ح_9 = 3 + 2 - 2 = ح_9 = 1 + 2$$
 نستطيع كتابته

$$\sum_{ن=1}^6 (1 + 2ن)$$

تدريبات

أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متسلسلة الآتية دون استخدام رمز المجموعة

$$\sum_{ك=1}^7 \left(\frac{3}{5}\right)^{1-ك} \quad (ج) \quad \sum_{ر=1}^{\infty} (ن - 2) \quad (ب) \quad \sum_{ر=1}^{\infty} (1 - ر) \quad (أ)$$

$$\sum_{هـ=1}^{10} (2 - 1 + 1) \quad (د)$$

أكتب المتسلسلة الآتية تذكر حدودها دون استخدام رمز المجموعة.

$$\sum_{ك=1}^4 2ك$$

الحل:

$$16, 9, 4, 1 = 2^2(4), 2^2(3), 2^2(2), 2^2(1)$$

تدريب:

$$2 + \sum_{n=1}^4 (3-n)$$

جـ

$$(10 + 5r) \sum_{r=1}^5$$

بـ

$$\sum_{h=1}^6 \frac{2}{(1+h)^2}$$

أـ

$$\sum_{n=1}^7 (1-n)^3$$

دـ

$$\frac{6}{8}, \frac{4}{6}, \frac{2}{4}$$

$$35, 14, 11, \dots$$

$$83, 25, 11, 1, -1, \dots$$

$$27, 8, 1, 0, \dots$$

ملاحظة هامة:

وحسب التعريف السابق يكون:

$$22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4$$

$$+ 1 \text{ متسلسلة من سبعة حدود كما أن } 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1+n}$$

$$\text{متسلسلة غير منتهية حدها العام هو } \left(\frac{1}{1+n} + n \right)$$

مثال: المتسلسلة $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2(19)} + \dots$ هي متسلسلة لا نهائية حدها العاشر

$$10^{-9} = \frac{1}{2(10)}$$

وسنستخدم تمثيلا مختصرا للمتسلسلات وذلك على الصورة

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9^k \quad \text{للمتسلسلة اللانهائية .}$$

أما المتسلسلة النهائية (المنتهية) عدد حدودها (ن) فتكتب على الصورة

$$\sum_{k=1}^n 9^k$$

مثال: أكتب جميع حدود المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^6 2^k$$

الحل:

للحصول على حدود المتسلسلة علينا أن نعوض القيم المتتالية $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

للمتغير k في الحد العام $(2)^k$.

64

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

تعريف: مجموع المتسلسلة المنتهية هو مقدار الذي نحصل عليه عند جمع حدودها جميعا.

سنرمز لمجموع المتسلسلة بالرمز $\sum_{k=1}^n$. حيث تدل n على الحدود المراد جمعها

فحسب. التعريف تكون $\sum_{k=1}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1$. وسنستعمل الرمز

$$\sum_{k=1}^n 2^k$$

$$\sum_{k=1}^n (1-1)^k$$

مثال: ما مجموع المتسلسلة

أ) إذا كانت n فردية.

ب) إذا كانت n زوجية.

الحل:

$$(1-1)^k \text{ وعلى الحد الثاني بتعويض } k = 2$$

$$1-1 + 1-1 + \dots + (1-1)^n. \text{ فإذا كان } (n) \text{ فردية كان المجموع } 1-1.$$

وإذا كانت (n) زوجية كان المجموع صفرا.

أكتب المتسلسلتين التاليتين دون استخدام الرمز $\sum$

$$\sum_{ك=1}^6 \frac{(1+ك)}{2} \quad (ب) \quad \sum_{ك=1}^6 (3-ك)^3 \quad (أ)$$

مثال: في متتالية حسابية ح₄=18، ح₇=16

أوجد ح₁، ح₁₀.

الحل:

$$ح_4 = 3 + 3د = 18$$

$$ح_7 = 6 + 3د = 16$$

$$وعلى هذا فإن : د = -\frac{2}{3} ، 20 = 3د$$

$$ح_1 = 3 = 20 - 17 \quad ح_{10} = 20 + 9 \left(-\frac{2}{3}\right) = 10 \quad ح_{14} = 20 + 3 \times (-2) = 14$$

مثال: أدخل 9 أعداد بين 3 و 43 بحيث تشكل جميع هذه الأعداد متتالية حسابية.

الحل:

$$ح_1 = 3 ، ح_{11} = 43 \quad \ast \quad ح_{11} = 3 + 10د$$

$$\ast 43 = 3 + 10د \quad \ast \quad 40 = 10د \quad \ast \quad 4 = د \quad \ast \quad 43 - 3 = 40$$

$$\boxed{4 = د} \quad \ast \quad ح_1 = 3 ، د = 4 \quad \ast \quad ح_2 = 3 + 4 = 7 ، ح_3 = 3 + 7 = 10$$

إيجاد مجموع متسلسلة حسابية عدد حدودها ن

إذا كان $ح_ن = ح_ن + 1 + 2 + \dots + ح_ن - 1 + ح_ن$

وكان أساس المتسلسلة هو $د$ فإن $ح_ن = ح_ن + 1 + (د + 1) + \dots + (ح_ن - د) + ح_ن$

وكذلك $ح_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + \dots + (د + 1) + ح_ن$

ومنه: $2ح_ن = (ح_ن + 1) + (ح_ن + 1) + \dots + (ح_ن + 1) + ح_ن$

وعلى هذا فإن: $2ح_ن = \sum_{ك=1}^ن [ح_ن + 1]$

نظرية مجموع $ن$ من الحدود الأولى للمتسلسلة الحسابية هو: $ح_ن \frac{ن}{2} (ح_ن + 1)$

$$= \frac{ن}{2} [2 + (ن - 1)د]$$

مثال: أوجد مجموعة المتسلسلة $\sum_{ك=1}^{15} (14 - ك)$

الحل:

عدد حدود المتسلسلة يساوي 15 حداً. وبالتعويض $ك=1$ ، $ك=15$ نجد أن:

$$مجموع المتسلسلة ح_ن = \frac{1}{2} (1 + 13 - 90)$$

مثال: رتب مقاعد مسرح في 25 صفا بحيث يحتوي الصف الأول على 20 مقعداً

والثاني 21 والثالث على 22 وهكذا. فما هو عدد المقاعد في المسرح.

الحل:

الأول 20 وأساسها 1 وعدد حدودها 25.

$$\text{ح} = 25 \Rightarrow \frac{25}{2} (20 + 25\text{ح})$$

$$\text{ح} = 25 \Rightarrow 24 + 1 = 25\text{ح} \Leftrightarrow 24 + 20 = 25\text{ح} \Rightarrow 1 >$$

$$\text{ح} = 25 \Rightarrow 44 = 25\text{ح} \Leftrightarrow \frac{25}{2} (44 + 20) = 25\text{ح}$$

$$\text{ح} = 25 \Rightarrow (64 \times 25) \div 2 = 800$$

يوجد في المسرح 800 مقعدا.

$$\sum_{k=1}^{16} (2k - 17) \quad \text{أوجد مجموع المتسلسلتين التاليتين: (أ) } k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{60} (2k - 6) = \text{ب}$$

الحل:

$$\text{أ) } 17 + (-13) + (-11) + \dots + 25$$

$$\text{ب) } -4 + (-2) + (5) + 2 + \dots + 114$$

أكتب حدود المتسلسلة:

$$\sum_{k=1}^5 \left(1 + \frac{1}{3}k\right)$$

$$(1+(4)\frac{1}{3})+(1+(3)\frac{1}{3})+(1+(2)\frac{1}{3})+(1+(1)\frac{1}{3})=(1+\frac{1}{3}) \dots\dots 5 \text{ ---ح}$$

$$.2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} + 2 + 1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = .(1 + (5)\frac{1}{3}) +$$

أكتب حدود المتسلسلة:

$$5 \overset{6}{\underset{2}{\text{ن}}} = \overset{6}{\underset{2}{\text{ك}}} \text{ أو } 2 \overset{6}{\underset{5}{\text{ك}}} = \overset{6}{\underset{5}{\text{مح}}}$$

الحل:

الحد العام $(2)^k$. بالقيم 5، 1، 2، 6.

المتسلسلة هي: $(2)^5, (2)^1, (2)^2, (2)^3, (2)^4, (2)^5, (2)^6$ أي

$$2^{\text{ك}} \quad 5 = \text{ك}^6 \text{ — مح}$$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 =$ أوجد

$$\sum_{k=1}^n$$

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - (1 + \frac{1}{k}) \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \quad \diamond$$

مبادئ الاحتمال

بيان مفهوم الاحتمال لغة وربعها بالأحداث. (المناس، الطقس، النجاح، الفشل.. إلخ)
تقسيم الاحتمالات إلى عملي ونظري.

الاحتمال العملي

تمهيد: لعبة الدوارة.

تجربته: أي لون تختاره لتفوز. في لعبة الدوارة ؟

1- في حالة الفرض الأول، أي لون تختاره لك نفس فرض النجاح، لأن المساحات متساوية.

2- في حالة الفرض الثاني يجب اختيار اللون الأخضر لأن مساحة قطاعها أوسع ويكون فرض وقوف المؤشر عنده أكثر.

مثال تمهيدي:

إذا استخدمنا الفرضين واخترنا مجموعتين كل مجموعة تتكون من 5 تلاميذ. وتم إجراء التجربة بحيث يقوم كل تلميذ في المجموعة الأولى بإدارة مؤشر الفرض 20 مرة وملاحظة اللون الذي يشير إليه السهم عند توقف الفرض، ثم تقوم المجموعة الثانية بنفس التجربة.

ونسجل النتائج في جدولين كالتالي:

المجموعة	أخضر	أصفر	أخضر	التلميذ
20	8	6	6	الأول
20	6	7	7	الثاني
20	9	6	5	الثالث
20	7	7	6	الرابع
20	5	7	8	الخامس
100	35	33	32	المجموعة

اعلم أن:

عدد مرات اجراء التجربة = عدد التلاميذ $\times$ عدد مرات إدارة المؤشرة = $20 \times 5 = 100$

100 . وعليه فإن: نسبه توقف المؤشر عن اللون:

الأحمر = $\frac{3}{100} = 0,03$ ، الأصفر = $\frac{33}{100} = 0,33$ ، الأخضر = $\frac{35}{100} = 0,35$.

تسمى هذه النسبة بـ احتمال توقف المؤشر عند اللون كذا أو كذا

وعموما فإن:

الاحتمال العملي للحصول على نواتج معينة = $\frac{\text{عدد النواتج الممكنة التي حصلنا عليها}}{\text{عدد كل النواتج الممكنة}}$

المجموع الثانية:

التلاميذ	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	المجموعة
أحمر	4	3	2	5	3	17
أصفر	6	7	6	7	8	34
أخضر	10	10	12	8	9	49
المجموعة	20	20	20	20	20	100

وإذا لاحظت الجدول تجد أن احتمال وقوف المؤشر عند اللون الأحمر = $\frac{17}{100}$
 $= 0,17$.

احتمال وقوف المؤشر عند اللون الأصفر = $\frac{34}{100} = 0,34$

احتمال وقوف المؤشر عند اللون الأخضر = $\frac{49}{100} = 0,49$

• الاحتمال هو العدد الذي تتحه نسبة تكرار الظاهر إلى الثبوت عنده مهما زاد عدد التجارب، ولذلك فكلما زاد عدد التجارب كلما حصلنا على قيمة أدق الاحتمال.

مثال: نأخذ نتائج المجموعة الثانية وندير المؤشر 500 مرة فأحتسب العدد المتوقع لوقوف المؤشر عنده.

1- اللون الأحمر. 2) اللون الأصفر. 3) اللون الأخضر.

الحل:

العدد المتوقع لوقوف المؤشر عند اللون:

$$\begin{aligned} 1) \text{ الأحمر} &= \text{احتمال وقوف المؤشر عند اللون} \times \text{عدد مرات الإدارة} = 0,17 \times 500 \\ &= 80 \text{ مرة.} \end{aligned}$$

$$2) \text{ اللون الأصفر} = 0,34 \times 500 = 170 \text{ مرة.}$$

$$3) \text{ اللون الأخضر} = 0,49 \times 500 = 245 \text{ مرة.}$$

ويمكن التعبير عن الاحتمال بنسبه مئويه، فنكتب: احتمال توقف المؤشر عن اللون

$$\text{الأحمر مثلاً: } \frac{17}{100} = 17\%$$

مثال 2 : في أحد الأيام تسجيل غياب التلاميذ في أربعة فصول فكانت كالتالي:

	فصل 1	فصل 2	فصل 3	فصل 4	المجموعة
بنين	3	2	4	5	14
بنات	5	4	4	3	16
المجموعة	8	6	8	8	30

1- فإذا تغيب تلميذ في اليوم التالي فما احتمال أن يكون المتغيب ولدا؟

2- إذا كان عدد التلاميذ يساوي 450 تلميذا فما العدد المتوقع للبنين الغائبين

بالمدرسة؟

الحل:

عدد غياب البنين في التجربة = 14 .

عدد التلاميذ الغائبين (كل النواتج) = 30 .

∴ احتمال أن يكون المتغيب ولداً = $\frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

∴ عدد البنين الغائبين المتوقع في المدرسة = $450 \times \frac{7}{15} = 270$ ولداً .

الاحتمال النظري

في الدرس السابق وجدنا أن الاحتمال وقوف المؤشر عند اللون: الأحمر = 0,34
الأصفر 0,33 ، الأخضر 0,35 وعند دراسة التجربة نظريا نجد أن الألوان الثلاثة
لها فرص متساوية لوقوف المؤشر عندها وتكون مجموعة النواتج الممكنة للتجربة هي
{ أحمر أصفر أخضر } أن النواتج الممكنة = 3.

• نسبة عدد الفرص عند أحد الألوان = 1 : 3 أو $\frac{1}{3}$ هذا الكسر هو الاحتمال
النظري لوقوف المؤشر عند أحد الألوان في التجربة.

على العموم: الاحتمال النظري للحصول على نواتج معينة =

$$\frac{\text{العرض الممكنة للحصول على هذه النواتج}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} .$$

ملاحظة: لاحظ الاختلاف بين الاحتمال العملي والنظري إذا أخذنا اللون الأحمر

$$= 0,33 ، وفي الاحتمال النظري له $\frac{1}{3} = 0,33$ تقريبا.$$

ونعلل ذلك بأن الاحتمال العملي سوف يقترب من الاحتمال النظري ($\frac{1}{3}$) بزيادة
عدد مرات إجراء التجربة (إدارة المؤشر).

التجربة العشوائية:

هي تجربة نستطيع تحديد جميع نواتجها قبل إجرائها.

مثال: إذا ألقينا حجر نرد (زهر طاولة) يمكن معرفة جميع نواتج التجربة وهي: 1، 2، 3، 4، 5، 6. وعند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة، فإن جميع نواتج التجربة هي: صورة ، كتابة.

" الحدث "

هو مجموعة جزئية من مجموعة نواتج التجربة، مثلاً: إذا ألقينا حجر نرد مرة واحدة نجد ما يلي:

1- $\{3\}$ هو حدث ظهور العدد 3 على الوجه العلوي للحجر

• الفرص = 1. عدد كل النواتج = 6.

• احتمال ظهور العدد 3 = احتمال الحدث $\{3\} = \frac{\text{عدد فرص الظهور 3}}{\text{عدد كل النواتج}} = \frac{1}{6}$.

2) $\{1, 3, 5\}$ هو حدث ظهور عدد فردي على الوجه العلوي للحجر.

• عدد الفرص = 3. عدد كل النواتج = 6.

• احتمال الحدث $\{1, 3, 5\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

• $\emptyset$ 3 هو حدث ظهور ناتج لا يمكن وقوعه مثل ظهور العدد 7 على الوجه

العلوي الحجري. • عدد الفرص = $\emptyset$

• عدد الفرص = 5 • عدد كل نواتج = 6.

• احتمال الحدث $\{7\} = \frac{0}{7} = 0$ وتسمى الحدث المستحيل .

4) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هو حدث ظهور عدد أقل من 7.

• عدد الفرص = 6 ، • عدد كل النواتج = 6.

• احتمال الحدث $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \frac{6}{6} = 1$ ونسميها بالحدث المؤكد.

نلخص:

1- الحدث المستحيل هو حدث ليس له أي فرصة للوقوع بمعنى احتمال الحدث المستحيل = صفر.

2- الحدث المؤكد: هو حدث له كل فرص الوقوع، ويعني: احتمال الحدث المؤكد $= 1$.

3- قيمة احتمال أي حدث لا تقل عن 0 ولا تزيد على 1. يعني ذلك إن: $0 \leq$ احتمال أي حدث ≤ 1 . أي الاحتمال لأي حدث محصورة بين العدد 0 والعدد 1 صحيح.

مثال:

صندوق يحتوي، على 6 كرات متماثلة منها 3 كرات حمراء وكرتان سوداوان، كرة واحدة بيضاء. فإذا سحبنا كرة من الصندوق عشوائيا لمعرفة لونها فإن الكرات الست لها فرص متساوية في السحب.

- ومن بين هذه الفرص الست توجد 3 فرص لسحب كرة حمراء، أي أن احتمال

$$\text{سحب كرة حمراء} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- فرص سحب كرة سوداء من بين الست فرص فرصتان أي أن احتمال سحب كرة

$$\text{سوداء} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- والكرة البيضاء فرصة واحدة من بين الفرص الستة لذلك احتمال سحبها = $\frac{1}{6}$.

$$\text{أي أن احتمال حدوث مجموعة نواتج} = \frac{\text{عدد فرص هذه النواتج}}{\text{عدد فرص جميع الممكنة النواتج}}.$$

ملاحظات:

أولا: لو أننا أجرينا التجربة السابقة عددا كبيرا من المرات وليكن 100 مرة بأن

نسحب كرة ونسجل لون الكرة المسحوبة ثم نعيدها للصندوق قبل تكرار السحب

ثم أوجدنا النسب الآتية :

عدد مرات الحصول على كرة بيضاء	عدد مرات الحصول على كرة حمراء	عدد مرات الحصول على كرة بيضاء
عدد مرات اجراء التجربة	عدد مرات اجراء التجربة	عدد مرات اجراء التجربة

. فإننا نجد أن هذه النسبة ، النسب الثلاث قريبة من الأعداد $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$. على

الترتيب وأن عدد مرات إجراء التجربة كلما اقتربت النسب السابقة من هذه الأعداد أكثر فأكثر.

ثانياً: من المثال السابق نجد أن:

$$1 \cdot \frac{6}{4} = \frac{1+2+3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \text{مجموعة احتمال جميع النواتج الممكنة}$$

وهذه النتيجة صحيحة بالنسبة لاحتمال جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية.

أي أن: مجموع احتمالات جميع النواتج الممكنة للتجربة عشوائية يساوي واحد.

أمثلة تطبيقية:

1) كيس يحتوي على 5 كرات حمراء، و 4 كرات صفراء، و 3 كرات بيضاء فإذا

كانت الكرات جميعها متماثلة وسحبت من الكيس كرة واحدة عشوائية فأوجد ما

يلي:

1) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

2) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء.

3) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل:

$$(1) \text{ احتمال كونها حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{الكرا ت عدد في الكيس}} = \frac{5}{12}$$

$$(2) \text{ احتمال كونها صفراء} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \text{ احتمال كونها بيضاء} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

مثال: سحبت بطاقة واحدة عشوائيا من بين 10 بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام

من 1 إلى 10 لمعرفة الرقم المدون عليها أوجد:

(1) احتمال كل ناتج من نواتج التجربة.

(2) احتمال أن الرقم المدون على البطاقة المسحوبة أكبر من 8.

(3) احتمال أن الرقم المدونة على البطاقة المسحوبة عددا فرديا.

(4) احتمال أن الرقم المدون على البطاقة المسحوبة عددا أوليا.

(5) احتمال أن الرقم المدون على البطاقة المسحوبة أقل من أو يساوي 10 .

(6) احتمال أن الرقم المدون على البطاقة المسحوبة عدد يقبل القسمة على 11 .

الحل:

(1) مجموعة النواتج الكلية الممكنة لهذه التجربة هي الحصول على مجموعة

الأعداد { 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10 } وعدد عناصرها 10 عناصر.

وهذه النواتج العشرة متساوية في الفرص للظهور ولكل منها فرصة واحدة من بين 10 فرص.

$$\text{احتمال كل ناتج من نواتج التجربة} = \frac{1}{10}$$

(2) مجموعة النواتج التي كلُّ منها أكبر من 5 هي {10، 9}، وعدد عناصرها

$$\text{عنصران.} \quad \diamond \text{ احتمال أن الرقم 10 البطاقة أكبر من 8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

(3) مجموعة النواتج الفردية هي {1، 3، 5، 7، 9} وعدد عناصرها خمسة (5)

$$\diamond \text{ احتمال أن الرقم على البطاقة عدد فردي} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

(4) مجموعة النواتج التي هي إعداد أولية هي {2، 3، 5، 7}، وعدد عناصرها

$$\text{أربعة (4)} \quad \diamond \text{ احتمال أن الرقم على البطاقة عدد أولي} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(5) مجموعة النواتج التي أقلّ من أو يساوي 10، هي: {1،

2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10}، وعدد عناصرها 10 عناصر.

$$\diamond \text{ احتمال أن الرقم على البطاقة المسحوبة أقلّ من أو يساوي 10} = \frac{10}{10} = 1$$

(6) فرصة الحصول على عدد يقبل القسمة على 11 معدومية الحدث.

$$\diamond \text{ احتمال أن الرقم على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على 11} = \frac{0}{10} = 0$$

ملاحظة: إن احتمال وقوع ناتج أي تجربة تنحصر قيمته بين 1،5. بمعنى أن قيمة الاحتمال الناتج $\in [0,1]$ ، حيث الصفر هو الاحتمال المستحيل.

كما في المثال السابق، والعدد 1 هو الاحتمال المؤكد الوقوع مثل حدث الحصول على بطاقة تحمل رقما أقل من أو يساوي 10. إن مجموعة احتمالات كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية.

مثال:

صندوق تحتوي على 48 برتقالة منها 4 برتقالات تالفة فإذا سحب من الصندوق برتقالة عشوائيا فما احتمال أن تكون هذه البرتقالة تالفة، وما احتمال أن تكون غير تالفة؟

الحل:

مجموعة النواتج التجربة الكلية تحوي 48 عنصرا

✧ عدد البرتقال غير التالف في الصندوق = $48 - 4 = 44$.

$$\text{✧ احتمال أن تكون البرتقال المسحوبة تالفة} = \frac{\text{عدد البرتقال التالفة}}{\text{عدد البرتقال في الصندوق}} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{احتمال أن تكون البرتقال المسحوبة غير تالفة} = \frac{\text{عدد البرتقال غير التالفة}}{\text{عدد البرتقال في الصندوق}} = \frac{44}{48} = \frac{11}{12}.$$

ملاحظة: في هذا المثال حيث أن البرتقال المسحوبة إما أن تكون تالفة أو غير تالفة.

لذلك فإن احتمال أن تكون البرتقال المسحوبة غير تالفة = 1 ناقص احتمال أن

تكون تالفة = $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ وهو نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا.

مثال: في إحدى مزارع الفاكهة وجد أن احتمال إصابة ثمرة المانجو بذبابة الفاكهة هي

2,4% فإذا كانت المزرعة بها 200 شجرة مانجو ومتوسط عدد الثمرات في الشجرة

الواحدة 15 ثمرة فأوجد العدد المتوقع لثمرات المانجو المصابة.

الحل:

$$\text{احتمال الإصابة} = \frac{\text{عدد الثمرات المصابة}}{\text{عدد الثمار كلها}}$$

$$\bullet \text{ عدد الثمرات المصابة} = \text{عدد الثمار كلها} \times \text{احتمال الإصابة}$$

$$= (15 \times 200) \times \frac{2,4}{100} = 72 \text{ ثمرة.}$$

مثال: قرص دائري مقسم إلى 8 قطاعا دائري متساوية ومرقمة، وبمركز الدائري

مؤشر يمكن تدويره وتركه ليتوقف في إحدى هذه القطاعات. وإذا أدير المؤشر وترك

ليتوقف في أحد القطاعات فأوجد:

(1) احتمال أن يكون متوقفا (المؤشر) عند عدد يقبل القسمة على 3.

(2) احتمال أن يتوقف المؤشر عند عدد زوجي.

الحل:

مجموعة النواتج في التجربة الكلية: $\{5, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 21\}$ وعدد عناصرها 8.

(1) مجموعة النواتج التي تعطى عدد يقبل القسمة على 3 هي $\{9, 12, 18, 21\}$ ، وعدد عناصرها 5 ،

• احتمال أن يتوقف المؤشر عند عدد يقبل القسمة على 3 $\frac{5}{8}$.

(2) مجموعة النواتج التي تعطى عددا زوجيا هي: $\{8, 12, 18\}$ وعدد عناصرها 3.

(3) احتمال أن يتوقف المؤشر عند عدد زوجي $= \frac{3}{8}$.

ملاحظة: الفرص والمؤشر في مركزه الوارد في المثال (الدوران) أو لعبة الدوران.

مثال: في أحد ألعاب التصويب بالأسهم، يقف الرامي على بعد معين من لوحة مرسوم عليها ثلاثة مربعات متخذة المركز، وأطوال أضلاعها 5، 10، 15، سنتمترات، ويقف الرامي بالسهم نحو اللوحة، ويعيد القذف إذا وقع السهم خارج المربع الكبير.

أحسب احتمال أن يصيب السهم في المنطقة المثالية في الشكل.

الحل

حيث أن الإصابة تحتسب إذا وقع السهم في أي مكان من سطح المربع الكبير.

$$\frac{\text{مساحة المنطقة المظللة}}{\text{مساحة سطح المربع الكبير}} = \text{احتمال الاصابة في المنطقة المظللة}$$

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \text{مساحة سطح المربع المتوسط ثاني} (-) \text{مساحة سطح المربع}$$

$$\text{الصغير: } = (10)^2 - (5)^2 = 75 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة سطح المربع الكبير} = (15)^2 = 225 \text{ سم}^2$$

$$\frac{1}{3} = \frac{75}{225} = \text{احتمال الاصابة في المنطقة المظللة}$$

اللوغاريتمات

نعلم أن $125 = 5^3$. وهذه المتساوية يمكن وضعها في صورة أخرى مكافئة لها

فنقول: لو $3 = 5^{125}$ وتقرأ لوغاريتم 125 للأساس 5 يساوي 3 بذلك نجد أن

$$\text{لو } 3 = 5^{125} \text{ تكافئ } 3(5) = 125.$$

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقي موجب $1 \neq$ يوجد لها صورة

أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعموماً فإن:

$$\text{ص} = \text{م لو س} \Leftrightarrow \text{س} = \text{م}^{\text{ص}} \text{ حيث } \text{م} \in \text{ح}^+ - \{1\}$$

$$\text{، س} \in \text{ح}^+ \text{، ص} \in \text{ح}.$$

$$\underline{\text{فمثلاً:}} \quad 81 = 3^4 \Leftrightarrow 4 = \text{لو}_3 81, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2 = \text{لو}_2 \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow -2 = \text{لو}_3 \frac{1}{9}$$

$$(5) \quad 16 = 2^4 \Leftrightarrow 4 = \text{لو}_2 16, \quad 2 = 2^{1-2} \Leftrightarrow -2 = \text{لو}_2 2, \quad \frac{1}{8} = 2^{-3} \Leftrightarrow -3 = \text{لو}_2 \frac{1}{8}.$$

ملاحظات هامة:

(1) لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب فكل من $\text{لو}_2 3$ ، $\text{لو}_5 8$ ، $\text{لو}_6 0$

لا معنى له

(2) الأساس ٢ يجب أن يكون عدد موجب يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب

على ذلك أن كل من $8_2^{\text{لو}}$ ، $5_0^{\text{لو}}$ ، $4_1^{\text{لو}}$ لا معنى لها.

مثال: عبر عما يأتي بصورة أسية مكافئة.

$$(1) \quad 128_2^{\text{لو}} = 7 \cdot 2 \quad 8_2^{\text{لو}} = \sqrt[2]{2} \quad \frac{7}{2} = 3 \quad \frac{1}{27} = 3^- \quad 4_3 = \text{ح} = \text{س}$$

الحل:

$$128_2^{\text{لو}} = 7 \Leftrightarrow 7 = 128_2^{\text{لو}}$$

$$\frac{7}{2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[2]{2} = 8_2^{\text{لو}} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = \sqrt[2]{8_3^{\text{لو}}}$$

$$3^- = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^- = \frac{1}{27} \quad 4_3 = \text{ح} = \text{س}$$

$$\text{ح} = \text{س} \Leftrightarrow \text{ح} = \text{س} \quad \text{س} = \text{ح}$$

أكتب الصورة اللوغاريتمية

المكافئة للصورة الآسية الآتية:

$$(1) \quad 243 = \sqrt[10]{2} \quad 10 = 0,01 = 2^- \quad 9 = \sqrt[3]{5} \quad 4 = \text{ح} = \text{س}$$

الحل:

$$243 = \sqrt[10]{2} \Leftrightarrow 10 = \sqrt[10]{243}$$

$$(2) 10^{-2} \Leftrightarrow \sqrt[10]{0,01} = -2.$$

$$(3) \sqrt[3]{9} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9} = \frac{5}{2}(3)$$

$$(4) \frac{p}{m} = \frac{h}{s} \Leftrightarrow p = \frac{h}{s}$$

مثال: أوجد قيمة كل من:

$$(1) \sqrt[2]{64} \quad (2) \sqrt[6]{1} \quad (3) \sqrt[4]{4} \quad (4) \sqrt[2]{\frac{1}{27}}$$

الحل:

$$(1) \text{ نفرض أن } \sqrt[2]{64} = s \Rightarrow 64 = s^2 \Rightarrow s = \pm 8$$

$$(2) \text{ نفرض أن } \sqrt[6]{1} = s \Rightarrow 1 = s^6 \Rightarrow s = \pm 1$$

$$(3) \text{ نفرض أن } \sqrt[4]{4} = s \Rightarrow 4 = s^4 \Rightarrow s = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2}$$

$$(4) \sqrt[2]{\frac{1}{27}} = s \Rightarrow \frac{1}{27} = s^2 \Rightarrow s = \pm \sqrt[2]{\frac{1}{27}}$$

$$(4) \text{ نفرض أن } \sqrt[2]{\frac{1}{27}} = s \Rightarrow \frac{1}{27} = s^2 \Rightarrow s = \pm \sqrt[2]{\frac{1}{27}}$$

$$\pm s = -6 \Rightarrow \pm \sqrt[2]{\frac{1}{27}} = -6$$

مثال: أوجد قيمة s إذا كان: (1) $\sqrt[4]{s} = 4$ (2) $\sqrt[9]{81} = 2$

$$= s \quad (3) \quad \sqrt[1/2]{s} = 3$$

$$(4) \quad 6 = \sqrt[8]{s}$$

الحل

$$(1) \quad \sqrt[4]{s} = 4 \quad \Leftrightarrow s = 4^4 = \frac{1}{16}$$

$$(2) \quad \sqrt[9]{81} = 2 \quad \Leftrightarrow s = 9 \quad \sqrt[3]{81} = 9 \quad \Leftrightarrow s = 9^4 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow s = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow s = \frac{9}{2}$$

$$(3) \quad \sqrt[1/2]{s} = 3 \quad \Leftrightarrow s = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow s = 8$$

$$(4) \quad 6 = \sqrt[8]{s} \quad \Leftrightarrow s = 8^6 \quad \Leftrightarrow s = 2^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow s = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow s = 2$$

مثال أوجد s مجموعة حل المعادلة الآتية

$$(1) \quad \sqrt[7]{s} = 2 \quad (2) \quad \sqrt[2]{s} = \left(\frac{3}{4} + s \right) \quad 2 =$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \text{ لـ } \frac{1}{3} \text{ لـ } (21 + 7س - 2س^2) = 2 \quad (4) \quad \frac{1}{2} \text{ لـ } (3 - 2س^2) = 4$$

الحل:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \text{ لـ } 7س = 2 \Leftrightarrow 7س = 2س^2$$

$$7س - 2س^2 = 0 \quad 7س(س - 7) = 0$$

$$س = 0 \text{ مرفوض } 7س = 7$$

مجموع الحل {7}

$$(2) \quad \frac{1}{2} \text{ لـ } (11 \frac{3}{4} + 2س^2) = 2 \quad \Leftrightarrow 2س^2 + \frac{3}{4}س = 2 \quad (2) \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2(2)} = 2$$

$$2س^2 + \frac{3}{4}س = 1 \Leftrightarrow 4س^2 + 3س = 4$$

$$4س^2 + 3س - 1 = 0$$

بالتحليل أو طريق مميز

$$(س + 1)(4س - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow س = 1 \text{ ، } س = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \text{مجموعة الحل } \{ \frac{1}{4}, 1 - \}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \text{ لـ } \frac{1}{3} \text{ لـ } (21 + 7س - 2س^2) = 1$$

$$2 = 12 = (21 + 7س - 2س^2) \frac{1}{3}$$

$$9 = 2(3) = 21 + 7س - 2س^2$$

$$= 9 - 21 + س^2$$

$$س^2 - 7س + 12 = 0 \quad (س - 3)(س - 4)$$

$$\boxed{س = 3} \quad \boxed{س = 4}$$

$$(4) \left(\frac{س}{2} - 3 \right) \left(\frac{س}{2} - 4 \right) = 0$$

$$0 = \left(\frac{س}{2} - 4 \right) \left(\frac{س}{2} - 3 \right)$$

$$\text{أما } \frac{س}{2} - 4 = 0 \quad \text{فيكون } \frac{س}{2} = 4$$

$$س = 8 \quad س = 2$$

$$\text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{1}{2}, 16 \right\} \quad \boxed{س = \frac{1}{2}} , \quad \boxed{س = 16}$$

مسائل:

$$(1) \left\{ 25 \right\} = 2 - \frac{س}{0.2}$$

$$(2) \left\{ 1 - \right\} = \frac{س}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \left\{ 5 - \right\} = 3 + \frac{س}{0.01} = 10$$

$$(4) \left\{ 2 \frac{63}{64} - \right\} = \frac{2-س}{3} = 16 \quad \frac{س}{3+س}$$

(قوانين اللوغاريتمات)

القانون الأول:

إذا كان $s_1, s_2 \in \mathcal{H}^+$ ، $\mathcal{H}^+ \ni \mathcal{H}^+ - \{1\}$

فإن $\frac{1}{2} + 1 = 2$

فمثلا : $5 \times 2 = 10$

$$7 \text{ } \underbrace{\quad}_4 + 5 \text{ } \underbrace{\quad}_4 = 7 \times 5 \text{ } \underbrace{\quad}_4 = 35 \text{ } \underbrace{\quad}_4$$

والعكس صحيح $22 \text{ لـ}_5 = (11 \times 2) \text{ لـ}_5 = 11 \text{ لـ}_5 + 2 \text{ لـ}_5$

نتيجة إذا كانت $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{2^+ - \{1\}}$

فإن $\frac{1}{5} (s_1 \times s_2 \times s_3 \times s_4 \times \dots \times s_d)$

$$\overset{\text{لو}}{\underset{\text{م}}{\text{س}}}_3 + \dots + \overset{\text{لو}}{\underset{4}{\text{س}}}_4 + \overset{\text{لو}}{\underset{\text{م}}{\text{س}}}_3 + \overset{\text{لو}}{\underset{\text{م}}{\text{س}}}_2 + \overset{\text{لو}}{\underset{\text{م}}{\text{س}}}_1$$

$$7 \overset{\text{ل}}{\underset{2}{\text{—}}} + 5 \overset{\text{ل}}{\underset{2}{\text{—}}} + 3 \overset{\text{ل}}{\underset{2}{\text{—}}} = (7 \times 5 \times 3) \overset{\text{ل}}{\underset{2}{\text{—}}} : \underline{\text{مثلا:}}$$

والعكس صحيح $\overset{\text{لـ}}{\underset{\text{م}}{=0,06}} + \overset{\text{لـ}}{\underset{\text{م}}{\frac{4}{9}}} + \overset{\text{لـ}}{\underset{\text{م}}{75}}$

$$2_{\text{p}}^{\text{لو}} = \left(\frac{6}{100} \times \frac{4}{9} \times 75 \right)_{\text{p}}^{\text{لو}}$$

تنبيه:

$$\text{تذكر جيدا أن } \frac{ل}{ص} + \frac{ل}{س} \neq \frac{ل}{(ص+س)}$$

$$\text{كما أن } \frac{ل}{ص} \times \frac{ل}{س} \neq \frac{ل}{(ص \times س)}$$

القانون الثاني:

$$\text{إذا كان } س_1، س_2 \exists ح^+، \exists ح^- \{1\} \text{ فإن } \frac{ل}{س_1} - \frac{ل}{س_2} = \frac{ل}{س_2 - س_1}$$

$$\text{فمثلا: } \frac{ل}{5} - \frac{ل}{2} = \frac{ل}{3}$$

$$\frac{ل}{7} - \frac{ل}{4} - \frac{ل}{5} = 1 \frac{1}{4} \text{ والعكس صحيح}$$

$$\frac{ل}{5} - 11 \frac{ل}{5} = 2 \frac{ل}{5}، \frac{ل}{2} - \frac{ل}{8} = \frac{ل}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{ل}{2}$$

$$\text{تنبيه } \frac{ل}{ص} + \frac{ل}{س} - \frac{ل}{ص} - \frac{ل}{ع} = \frac{ل}{ص \times ع}$$

تذكر جيدا أن

$$\frac{ل}{ص} - \frac{ل}{س} \neq \frac{ل}{(ص-س)}$$

$$\text{كما أن } \frac{ل}{ص} \div \frac{ل}{س} \neq \frac{ل}{\left(\frac{ل}{ص}\right)}$$

القانون الثالث

س $\exists$ ح⁺، $\exists$ ح⁺ $\exists$ ح⁺ {1}، م $\exists$ فإن $\text{لو}_m^s = \text{لو}_m^{s^2}$

فمثلا: $\text{لو}_2^{(5)^3} = 3 = \text{لو}_2^{5^3}$ ، $\text{لو}_2^{(5)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{5} = \text{لو}_2^{5^{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{3} = \text{لو}_5^{\frac{1}{3}}$

وبالعكس $7 = \text{لو}_5^2 = \text{لو}_5^{(2)^7} = 128 = \text{لو}_5^{128}$

$4 = \sqrt[3]{\text{لو}_7^4} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{\text{لو}_7^4})} = \text{لو}_7^9$

القانون الرابع:

إذا كان $\exists$ ح⁺ {1} فإن $[1 = \text{لو}_m^1]$

فمثلا $1 = \text{لو}_7^1$ ، $1 = \text{لو}_5^1$ ، $1 = \sqrt[3]{\text{لو}_3^1}$

القانون الخامس:

إذا كان $\exists$ ح⁺ {1} فإن $\text{صفر}_m = \text{لو}_m^{\text{صفر}}$

فمثلا $1 = \text{لو}_3^{\text{صفر}} = \text{صفر}_3$ ، $1 = \text{لو}_2^{\text{صفر}} = \text{صفر}_2$ ، $0 = \text{لو}_5^{\text{صفر}}$

اللوغاريتمات المعتادة

إذا كان أساس اللوغاريتم $= 10$ فإن اللوغاريتمات في هذه الحالة تسمى باللوغاريتمات المعتادة وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند الكتابة فمثلا لو₃ تعني 3_{10} وعلى ذلك يكون لو₁₀=1، لو₁₀² = 100 = 2₁₀ = 10₁₀، 2....،

مثال: بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد ما يلي:

$$(1) \quad 36_{5} + 18_{5} - 2_{5}^3 - 100_{5}^2 (2 \quad 10_{3} - 6_{3} + 15_{3})$$

$$(3) \quad 2 + \frac{3}{5} \quad 2 + \frac{15}{2} - \frac{5}{36} + \frac{5}{243} \quad (4) \quad \frac{32_{3} - 243_{2}}{8_{3} - 27_{2}}$$

الحل:

$$(1) \quad \text{المقدار} \quad 2 = 1 \times 2 = 3_{3}^2 = 3_{3}^2 = 9_{3} = \frac{6 \times 15}{10} = 9_{3}$$

$$(2) \quad \text{المقدار} \quad 100_{5} - 2_{5}^3 - 36_{5} + 18_{5} = \frac{36 \times 100}{18 \times 8} = 25_{5}$$

$$25_{5}$$

$$\boxed{2} = 1 \times 2 \div 5_{5}^2 = 2_{5}^2 = 4_{5}$$

$$(3) \quad \frac{5}{243} + \frac{5}{36} - 2 \left(\frac{15}{2} \right) + \frac{3}{5}$$

$$\frac{36 \times 5 \times 15 \times 15 \times 3}{5 \times 243 \times 2 \times 2 \times 5} \text{ لو} = \frac{\frac{5}{243} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{5}{36}} \text{ لو} =$$

$$\boxed{\frac{1 \text{ لو}}{5}} \quad \clubsuit$$

$$\boxed{\frac{5}{3}} = \frac{(2 \frac{\text{لو}}{2} - (3 \frac{\text{لو}}{2}) 5}{(2 \frac{\text{لو}}{2} - 3 \frac{\text{لو}}{2}) 3} \quad \clubsuit \quad \frac{2 \frac{\text{لو}}{2} 5 - 3 \frac{\text{لو}}{2} 5}{3 \frac{\text{لو}}{2} 3 - 3 \frac{\text{لو}}{2} 3} = \frac{5 2 \frac{\text{لو}}{2} - 5 3 \frac{\text{لو}}{2}}{3 2 \frac{\text{لو}}{2} - 3 - 3 \frac{\text{لو}}{2}} \quad (4) \text{ المقدار}$$

♣ ح، صو

بدون استخدام حاسبة الجيب

أثبت:

$$(1) \quad 8 \frac{\text{لو}}{4} - 20 \frac{\text{لو}}{4} + \frac{2}{5} \frac{\text{لو}}{4} = \text{صفر}$$

$$(2) \quad 3 = 7 \frac{\text{لو}}{2} - \frac{25}{7} \frac{\text{لو}}{2} 2 + 5 \frac{\text{لو}}{2} 4 - 14 \frac{\text{لو}}{2} 3$$

$$(3) \quad 25 \frac{\text{لو}}{5} = 0.2 \text{ لو} + 49 \text{ لو} - 14 \text{ لو} + 5 \text{ لو}$$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$(1) \quad 2 \text{ لو} - \text{لو} (2 + \text{س}) = 0$$

$$(2) \quad 3 = (2 - \text{س}) \frac{\text{لو}}{2} + \text{س} \frac{\text{لو}}{2}$$

$$(3) \quad \text{لو} \text{ لو} + \text{لو} (2 + \text{س}) = \text{لو} (6 + \text{س})$$

$$(4) \quad \text{لو} \sqrt[3]{2 - \text{س}} + \text{لو} \sqrt[3]{1 - \text{س}} = 1 - 30 \text{ لو}$$

$$(5) \text{ لو } = \frac{\text{لو}^2(7) - 45}{0.07 \text{ لو}}$$

الحل:

$$(1) \quad 2 \text{ لو } - \text{لو}(2 + \text{س}) = 0$$

$$\text{س} \cdot 2 \text{ لو } = \text{لو}(2 + \text{س})$$

$$\text{س}^2 = 2 + \text{س}$$

$$\text{س}^2 - \text{س} - 2 = 0$$

$$\text{س} (2 - \text{س}) (1 + \text{س})$$

$$\text{س} = 2, \text{س} = -1 \text{ مرفوض } \boxed{\text{صح (2)}}$$

$$(2) \quad \text{س} \cdot \frac{\text{لو}}{2} + \text{لو} \cdot \frac{\text{س}}{2} = 3$$

الحل

$$3 = \text{س} \cdot \frac{\text{لو}}{2} (2 - \text{س})$$

$$\text{س} [2 - \text{س}] = 3(2) = 6$$

$$\text{س}^2 - 2\text{س} - 6 = 0$$

$$\text{س} (4 - \text{س}) (2 + \text{س}) = 0$$

$$\text{س} = 4, \text{س} = -2 \text{ مرفوض } \boxed{\text{صح (4)}}$$

$$(3) \text{ لو س + لو (س + 2) = لو (س + 6)}$$

$$\text{س (س + 2) = (س + 6)}$$

$$\text{س}^2 + 2\text{س} - \text{س} - 6 = 0$$

$$\text{س}^2 + 2\text{س} - \text{س} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\text{س} + 3)(\text{س} - 2) = 0 \quad \boxed{\text{س} = -3 \text{ مرفوض}}$$

$$\boxed{\text{س} = 2}$$

$$(4) \text{ لو } \sqrt[3]{2\text{س} - 1} + \text{لو } \sqrt[3]{\text{س} - 2} = 30 - 1$$

$$\text{لو } \sqrt[3]{(2\text{س} - 1)(\text{س} - 2)} = 30 - 10$$

$$\text{لماذا لأن لو } 1 = 10$$

$$\text{لو } \sqrt[3]{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2} = 3$$

$$\text{س} \sqrt[3]{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 5} = 3 \text{ يرفع طرفي للقوة 3}$$

$$2\text{س}^2 - 5\text{س} + 5 = 27 \Leftrightarrow 2\text{س}^2 - 5\text{س} - 22 = 0$$

$$0 = (2\text{س} + 5)(\text{س} - 5)$$

$$\text{أما س} = \frac{5-}{2} \text{ مرفوض 1، س} = 5$$

صح {5}

$$(5) \text{ لو س} = \frac{2(7\text{لو}) - 27\text{لو}}{\frac{7}{100}} = \text{لو س} = \frac{2(7\text{لو}) - 49\text{لو}}{0.07}$$

$$\clubsuit \text{ لو س} = \frac{2(7\text{لو}) - 7\text{لو}}{100 - 7\text{لو}}$$

$$\text{لو س} = \frac{[7\text{لو} - 2]7\text{لو}}{100 - 7\text{لو}}$$

$$\text{بالضرب 3 (1-)} \quad \text{لو س} = \frac{[7\text{لو} - 2]7\text{لو}}{2 - 7\text{لو}} = \frac{[7\text{لو} - 2]7\text{لو}}{[.2\text{لو} - 7\text{لو}]}$$

$$\text{لو س} = \frac{[2 - 7\text{لو}]7\text{لو}}{2 - 7\text{لو}} - \text{لو س} = 7\text{لو} \Leftarrow \text{لو (7)} = 1 - \text{لو س}$$

$$\clubsuit \text{ س} = 1 - (7) = \text{س} = \frac{1}{7}$$

مثال 4: أوجد في ح مجموعة حل من المعادلة:

$$(1) \quad 49\text{لو} = (2 - \text{س})\text{لو} - (2 + 3\text{س} - 2\text{س}^2)\text{لو} \quad (1)$$

$$(2) \quad 10 = \text{لو س} \quad (3) \quad 25\text{لو} = \text{لو س} \quad (4) \quad 2 = \text{لو س} \times \text{لو س} \quad (2)$$

الحل:

$$(1) \quad 49\text{لو} = (2 - \text{س})\text{لو} - (2 + 3\text{س} - 2\text{س}^2)\text{لو} \quad (1)$$

$$= \frac{(1 - \text{س})(2 - \text{س})}{2 - \text{س}} \text{لو} = \text{لو (7)} = \frac{(2 + 3\text{س} - 2\text{س}^2)\text{لو}}{(2 - \text{س})} \quad (2)$$

$$2\text{لو} = 7\text{لو} \Leftarrow \text{لو (3)} = 1 - \text{س} \Leftarrow 2 = (1 - \text{س})\text{لو}$$

$$\text{س} = 1 - 9 = \text{س} \Leftarrow 10 = 1 + 9$$

$$س = 10$$

$$\{ 10 \} = \text{مج}$$

$$(2) \text{ س لوس } = 10 \text{ بأخذ لو غاريتهم طرفين}$$

$$\text{لوس لوس} = \text{لو } 10$$

$$\text{لو س} \times \text{لو س} = 1 \Leftrightarrow (\text{لوس})^2 = 1$$

$$(\text{لو س})^2 = 1 \quad \text{لوس} = 1 +$$

$$\text{وعندما س} = 1 \quad \text{س} = 10 \quad 10 = 1$$

$$\text{وعندما س} = 1 - \quad \text{س} = 10 \quad 10 = 1 -$$

$$\{ 0.1 > 10 \} = \text{مج}$$

$$(3) \text{ بفرض أن } \text{لوس} = \frac{\text{لوس}}{2} = 25 \text{ ص} = \frac{\text{لوس}}{4}$$

$$\text{س} = \frac{\text{لوس}}{2} \quad \text{ص} = \text{لوس} \quad \text{ومنها س} = (2) \text{ ص} = \text{س} \quad ①$$

$$25 = \frac{\text{لوس}}{4} \quad \text{ص} = 4 \quad \text{س} = 25$$

$$② \text{ (2) } = \text{ص}^2 (5) = 2^2 \text{ ومنها } 5 = \text{ص}^2$$

$$\text{ومن } ① \quad ② \text{ نستنتج أن س} = 5$$

$$2 = \overset{\text{لو}}{\underset{9}{\text{س}}} = \times \overset{\text{لو}}{\underset{3}{\text{س}}} \quad (4)$$

بفرض أن $\frac{1}{9} \text{س} = \text{ص}$ $\therefore \text{س} = 9\text{ص}$ $(1)^{\text{ص}^2} (3) = \text{ص} (9) = \text{س}$

$$2 = \text{ص} \times \text{ص}^2 (3) \text{ـ} \quad 2 = \text{س} \text{ـ} \times \text{س} \text{ـ}$$

$$2 = {}^2_ص 2 \diamond \quad 2 = {}_ص \times ({}^{\text{لـ}}_3 3 {}_ص 2)$$

ص = 1+ بالتجويف في (1) س = 9 ، 1 س = $\frac{1}{9}$ مج { 9 ، $\frac{1}{9}$ }

مثال 5: أوجد مج ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$^3\sqrt{\text{لو} \times 343} = \sqrt[8]{\text{لو} \times 49} \quad (1)$$

$$\mathbf{3} = \frac{s}{10} \text{ (لو)} \quad \mathbf{(3)} \text{ (لو س + 1)} \quad \mathbf{(2)} \text{ (لو س)}^2 = \mathbf{(2)} \text{ (لو س)}^2$$

الحل:

$$3\sqrt[3]{\text{لو} \times 343} = \sqrt[8]{\text{لو} \times 49}$$

$$2^{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{3} = 3^{\text{لوس}} \Rightarrow \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\sqrt{(2)}} \times 27^{\frac{1}{3}}}{37^{\frac{1}{3}}} = \frac{8^{\frac{1}{3}} \times 49^{\frac{1}{3}}}{343^{\frac{1}{3}}} = 3^{\text{لوس}}$$

$$\sqrt{2}^3 = \text{س} \div 2 = \text{س}^3 \div 2 = \text{لوس}^3 = \text{لوس}$$

$$\{\sqrt[3]{2}\} = \text{مج}$$

$$2\text{ث} \quad \text{لوس}^2 = (\text{لوس})^2$$

$$\clubsuit 2 \text{ لوس } = [\text{لوس}]^2$$

$$\clubsuit (\text{لوس})^2 - 2 \text{ لوس } = 0$$

$$\text{لوس } = [2 - \text{لوس}]$$

$$\text{أما لوس } = 0 \Leftarrow \text{لوس } = 10^\circ = 1$$

$$\text{أو لوس } = 2 - 0 \Leftarrow \text{لوس } = 2$$

$$\clubsuit \text{ لوس } = 10^2 = 100$$

$$\text{مح } \{ 1, 100 \}$$

$$(3) (\text{لوس} + 1) (\text{لو} \frac{\text{س}}{10}) = 3$$

$$3 = (\text{لوس} + 1) (\text{لوس} - 10 \text{ لو})$$

$$3 = (\text{لوس} + 1) (\text{لوس} - 1)$$

$$3 = 1 - (\text{لوس})^2$$

$$(\text{لوس})^2 = 4 \Leftarrow \text{لوس} = \pm 2$$

$$\text{أما لوس } = 2 \Leftarrow \text{لوس } = 10^2 = 100$$

$$\text{أو لوس } = -2 \Leftarrow \text{لوس } = 10^{-2} = 0.01$$

$$\text{مح } \{ 0.01, 100 \}$$

مثال 6

$$(1) \text{ س ص } = 16 \text{ فائت}$$

$$3 \frac{\text{س}}{2} + 4 \frac{\text{لو}}{2} - \frac{\text{س}}{2} \text{ ص} = 8$$

$$(2) \text{ س}^2 + \text{ص}^2 = 6 \text{ س ص فائت أن}$$

$$2 \text{ لو (س + ص)} = \text{لو س} + \text{لو ص} + 3 \text{ لو}^2$$

الحل:

الطرف الأيمن

$$\frac{\text{س}^3}{2} + \frac{\text{لو}^4}{2} - \frac{\text{س}}{2} \text{ ص}^2$$

$$= \frac{\text{س}^3 \times 4}{2 \text{ ص}^2} = \frac{\text{لو}^4}{2} = \frac{\text{س}^2 \text{ ص}^2}{2} = \frac{\text{س}}{2} (\text{س ص})^2$$

$$2 \frac{\text{س}}{2} \text{ ص} = 2 \frac{\text{لو}}{2} = 16 = 4 \times 2 = 8 = \text{طرف أيسر}$$

$$(2) \text{ س}^2 + \text{ص}^2 = 6 \text{ س ص} \Rightarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{س ص} = 6 \text{ س ص} + 2 \text{ س ص}$$

$$\Rightarrow \text{س}^2 + 2 \text{ س ص} + \text{ص}^2 = 8 \text{ س ص}$$

$$\Rightarrow (\text{س} + \text{ص})^2 = 8 \text{ س ص} \text{ ونأخذ لو غاريتم للطرفين}$$

$$\Rightarrow \text{لو (س + ص)}^2 = 8 \text{ س ص}$$

$$2 \text{ لو (س + ص)} = \text{لو}^2 + \text{لو س} + \text{لو ص}$$

$$= \text{لو } (2)^3 + \text{لو س} + \text{لو ص} = \text{لو س} + \text{لو ص} + 3 \text{ لو } 2$$

مسائل :

$$(1) \quad \text{لو } \frac{\text{س}}{2} = \text{لو } \frac{(6 + \text{س})}{4} \quad \text{ج } \{3\}$$

$$(2) \quad \text{لو } \frac{\text{س}}{10} \times \text{لو } \frac{10}{\text{س}} = 1 - \text{ج } \{1, 100\}$$

$$(3) \quad \text{لو س} - \frac{1}{\text{لوس}} = \frac{15}{4} \quad \{10^4, \frac{1}{\sqrt{10}}\}$$

$$\{ \sqrt{2} \} = 2 \frac{\text{لو}}{9} = \text{لو } \frac{\text{س}}{3}$$

الدالة

إذا كان s ، s مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من $s \leftarrow s$ تسمى دالة، إذا ارتبط كل عنصر من s بعنصر واحد فقط من s ويرمز للدالة بإحدى الرموز (d ، f ، g ، h ،) والدالة: d من $\{s\} \leftarrow \{s\}$ تكتب رياضياً: $d: s \leftarrow s$ وتقرأ دالة من s إلى s .

جميع عناصر s يسمى المجال، وجميع عناصر s تسمى المجال المقابل، وصور s في s تسمى المدين.

ملاحظة: لا يمكن أن يكون لعنصر واحد في s صورتين في s .

ينقسم الدالة إلى دالة كسرية، ودالة ثابتة، ودالة كثيرة الحدود.

مثال: الدالة الكسرية مثل: $d(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s + 2}$ حيث: $s \neq -2$.

الدالة الثابتة، مثل: $d(s) = s: s \in H$.

دالة كثيرة الحدود: $d(s) = s^2 + 3s + 5$.

تطبيقات:

(1) إذا كان $d(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{(s+3)}$ أوجد أصفار الدالة، وكذلك $d(\frac{1}{2})$ ، $d(5)$ ، $d(0)$.

الحل:

$$\frac{(3+s)(2+s)}{3+s} \quad \text{نصف أصفار الدالة} = 3-.$$

$$\text{نصف الاختصار } 3 + \text{د} = \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{7}{2} \cdot \text{د} = (5) = 3 + 5 = 8,$$

$$\text{د} = (0) = 3.$$

$$(2) \quad \text{د} = (س) = 3 + 3 + 1, \text{ أوجد: د} = (1-), \text{ د} = (\sqrt{2})$$

$$\text{د} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{الحل: د} = (1-) = (1-) + 3 + 1 = 1 + 3 - 1 = 1-.$$

$$\text{د} = (\sqrt{2}) = (\sqrt{2}) + 3 + 2 = 1 + (\sqrt{2}) + 3 = 1 + \sqrt{2} + 3 = 4 + \sqrt{2}$$

$$3 - \sqrt{2}$$

$$= 3 - \sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})$$

$$\text{د} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{4} \frac{2\sqrt{3}+3}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3+3}}{2} = \frac{2\sqrt{6+6}}{4} =$$

تمارين:

(1) إذا كان: د(س) = $\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$ ، أوجد: مرافق المقام وكذلك أوجد د(س)²

(2) د(س) = $\frac{10 + 7س + س^2}{5 + س}$. م(س) = $س^2 + 4س + 3$.

أوجد: $\frac{م(س)}{د(س)}$ ، وكذلك د(5) ، م(2).

قبل الشروع في دراسة موضوع الإشتقاق نتذكر بعض قواعد الإشتقاق التي مرت في السنوات السابقة.

القواعد:

$$(1) \text{ إذا كانت د (س) } p, \text{ ثابت فإنه : د(س) = صفر}$$

ملاحظة: د(س) تعني مشتق د(س).

$$\text{أمثلة: } \therefore \text{ د(س) } 4, \therefore \text{ د(س) } 0, \therefore \text{ د(س) } 12 \sqrt{4} \therefore \text{ د(س) } 0 =$$

$$\therefore \text{ د(س) } 16 \sqrt{16} \therefore \text{ د(س) } 0 \therefore \text{ د(س) } \frac{1}{2} \therefore \text{ د(س) } 0 =$$

$$(2) \text{ إذا كانت د(س) = س}^n, \text{ ن } \exists \text{ ح.}$$

$$\text{فإنه: د(س) = ن س}^{n-1}, \text{ بحيث إن معامل س} = 1$$

$$\text{أمثلة: } \therefore \text{ د(س) = س}^3 \therefore \text{ د(س) = 3 س}^2.$$

$$\therefore \text{ د(س) = س}^{\frac{5}{2}} \therefore \text{ د(س) = } \frac{5}{2} \text{ س}^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} \text{ س}^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{ د(س) = س}^5 \therefore \text{ د(س) = 5 س}^{5-1} = 5 س^4.$$

$$(3) \text{ إذا كانت د(س) = جـ س}^n, \text{ جـ ثابت، ن } \exists \text{ ح.}$$

فإن د(س) = ن × جـ س^{1-ن}

أمثلة: ∴ د(س) = 2 س⁴ ∴ د' (س) = 4 × 2 س¹⁻⁴ = 8 س³

$$\checkmark \text{ ص} = 4 = \sqrt{\text{س}} \quad 4 \text{ س}^{\frac{1}{2}} \therefore \text{ص} = 4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ س}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$\checkmark \text{ ع} = 6 = \sqrt{\text{س}} \quad 6 \text{ س}^{\frac{1}{2}} \therefore \text{ع} = 3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3} \text{ س}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$\checkmark \text{ ك} = 2 \text{ س}^2 = \sqrt[3]{2 \text{ س}^2} \quad 2 \text{ س}^{\frac{2}{3}} \therefore \text{ك} = \frac{8}{3} \text{ س}^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}$$

4) إذا كانت د(س) = ر(س) ± و(س) ± ع(س) ± ك(س)

∴ د'(س) = ر'(س) ± و'(س) ± ع'(س) ± ك'(س).

أمثلة √ د(س) = 5 س² + 2 س + 7 ∴ د'(س) = 10 س + 2. (تحقق)

$$\text{ص} = \frac{1}{2} \text{ س}^6 - 4 \text{ س}^{\frac{7}{2}} \therefore \text{ص} = 3 \text{ س}^5 - 14 \text{ س}^{\frac{5}{2}}$$

ملاحظة : عند عملية الاشتقاق وأصبحت أسَّ الرمز المشتق صفراً فإن هذا الرمز

لا يأتي في الناتج، فقط عامله الناتج من الاشتقاق يكتب. كما في 5 س² + 2 س + 7 .

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين

إذا كانت د، دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س، وكانت

$$ص = د(س) \times ر(س) \text{ فإن: } \frac{دص}{دس} = د(س) \times ر'(س) + ر(س) \times د'(س)$$

أي أن: المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للإشتقاق يساوي مشتقة الدالة الأولى مضروبا في الدالة الثانية زائد مشتقة الدالة الثانية ضرب الدالة الأولى.

أمثلة: أوجد المشتقة الأولى لكل من الآتي:

$$1) ص = (س^2 + 3) (2س^3 - 5)$$

$$\text{الحل: } \frac{دص}{دس} = 2س (2س^3 - 5) + (س^2 + 3) 6س^2$$

$$= 4س^4 - 10س + 6س^4 + 18س^2$$

$$= 10س^4 + 18س^2 - 10س$$

$$2) ص = (س + \frac{1}{س}) (س^3 - 2)$$

$$\text{الحل: إذا كانت } ص = (س + س^{-1}) (س^3 - 2)$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = (س^3 - 2) (1 - س^{-2}) + (س + س^{-1}) 3س^2$$

$$= 2^{-3} + 2^{-6} - 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} \text{ س.}$$

$$= 3 \text{ س} + 2^{-3} - 2^{-2} + 2^{-6} - 2^{-3} \text{ (تحقق من ذلك)}$$

$$(3) \text{ د (س)} = 2 \text{ (س} + 3 \text{)} (5 - 2 \text{ س)} (1 + 4 - 3 \text{ س)}$$

$$\text{أ) أوجد: 1 د (س) ب) أوجد: 1 د } \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \text{ د } (0) \quad (2) \text{ د } (1-)$$

$$\text{الحل: أ) د (س)} = 6 \text{ س}^2 (5 - 2 \text{ س)} (1 + 4 - 3 \text{ س}) + 2 \text{ س} (2 \text{ س} + 3) (3 + 3 \text{ س})$$

$$= (1 + 4 - 3 \text{ س}) + (3 \text{ س} + 4 - 2 \text{ س}) (3 + 3 \text{ س}) (5 - 2 \text{ س}).$$

$$(2) \text{ د } (0) = 0 \times (5 - 1) + 0 \times 3 \times 1 + (4 - 3) \times 3 \times (5 - 1) = 60$$

(تحقق من ذلك).

$$\text{الحل: ب) تمرين : د } \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{د } (1-)$$

إيجاد ميل المماس للمنحني.

من الضروري تذكر بعض القواعد الهامة حول ميل الخط المستقيم في السنتين

السابقتين، وسنورد منها ما يلي:

(1) إذا كان ميل المماس للمنحني ص عن النقطة (س1 ، ص1) الواقعة عليه = م

$$\text{فإن : } \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \text{س} = 1\text{س} = \text{ظا هـ}.$$

حيث هـ هي قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(2) إذا كان المماس يوازن محور السينات $\therefore$ الميل = صفر.

(3) إذا كان المماس يوازن محور الصادات $\therefore$ الميل غير معروف.

$$(4) \text{ إذا كان ميل المستقيم: } \frac{پ-}{س+ب\text{ص}+ح-} = 0 \text{ هو } \frac{\text{معامل}(س)}{\text{معامل}(ص)} = \frac{پ-}{ب}$$

$$\text{فإن: } \checkmark \text{ ميل أي مستقيم يوازيه هو } \frac{پ-}{ب}$$

$$\checkmark \text{ ميل أي مستقيم عمودي عليه هو } -\frac{ب}{پ}$$

$$(5) \text{ ميل المستقيم المار بالنقطتين (س1 ، ص1) ، (س2 ، ص2) } = \frac{ص2-ص1}{س2-س1}$$

$$(6) \text{ معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وأي نقطة واقعة عليه (س1 ، ص1)}$$

$$\text{هي } \frac{ص-ص1}{س-س1} = \text{ميل المستقيم، وعليه فإن معادلة المماس للمنحني}$$

$$\text{ص=د(س) عند النقطة (س1 ، ص1) الواقعة عليه هي:}$$

$$\frac{ص-ص1}{س-س1} = \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \cdot 1\text{س} = \text{س}$$

$$(7) \text{ لإيجاد نقط تقاطع المنحني ص = د(س) مع محور السينات نضع ص = 0}$$

ونوجد قيم س المناظرة لها.

$$8) \quad \text{لإيجاد نقط تقاطع المنحني ص} = \text{د (س) مع محور الصادات، نضع س} = 0$$

ونوجد قيم ص المناظرة لها.

مثال 4: أوجد ميل المماس للمنحني، ص = (س² - 3س + 2) (2س + 1) عند

النقطة (0, 1) الواقعة عليه.

$$\text{الحل: } \frac{دص}{دس} = (2س - 3) (2س + 1) + 2 (س^2 - 3س + 2).$$

$$\text{إذا كان } \frac{دص}{دس} = 1 = (3-2) (1+2) + 2 (2+3-1) = 3-$$

∴ ميل المماس عند النقطة (0, 1) = 3-.

مثال 5: أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحني د(س) = (س³ - 1)

(س+2) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (-1, 2-) الواقعة على المنحني

$$\text{الحل: } ∴ د(س) = 3س^2 (س+2) + (س^3 - 1)$$

$$∴ د(-1) = 3 \times 1 \times (2+1) + (-1-1) = 1$$

∴ ميل المماس للمنحني عند النقطة (-1, 2-) = 1

∴ ظا هـ = 1 ∴ هـ 45° ، (راجع جداول قياس الزاوية)

وعليه فإن قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحني عند النقطة (-1, 2-)

$$= 45^\circ.$$

مثال 6: أوجد معادلة المماس للمنحني: $v = (2-s) (4-s^3)$ عند النقطة $(2, 0)$ الواقعة على المنحني.

$$\text{الحل: } \frac{dv}{ds} = (4-3s) + 2s(3-s^2) = 4 - 2s^3$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = 2 \text{ عند } s=2 \Rightarrow 4 = (2-2) \cdot 4 \times 3 + (4-8) = -4$$

$$\text{وعليه فإن معادلة المماس هي: } \frac{0-v}{2-s} = \frac{4}{-4} \Leftrightarrow 4 = s - v - 8 \Rightarrow 0 = 8 - v - 4s$$

مثال 7: أوجد النقطة الواقعة على المنحني: $v = (2+s) (5-s^2)$ والتي عندها يكون المماس موازيا للمستقيم: $3v + 6s - 5 = 0$

$$\text{الحل: م} = \frac{dv}{ds} = 2(5-s^2) + (2+s) \cdot 2s = 10 - 2s^2 + 4s + 2s^2 = 10 + 4s$$

$$= 2s^2 - 10 = 2s^2 + 4s - 10 \Rightarrow 2s^2 + 4s - 10 = 0$$

$$\therefore 3s^2 + 6s - 5 = 0 \Rightarrow (3s+5)(s-1) = 0 \Rightarrow s = -\frac{5}{3} \text{ أو } s = 1$$

$$\therefore s = -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{4-v}{3} = \frac{145}{27} \Rightarrow v = -\frac{145}{3} + 4 = -\frac{137}{3}$$

$$\text{أو } s = 1 \Rightarrow \frac{4-v}{3} = 14 \Rightarrow v = 4 - 42 = -38$$

المماس للمنحني يكون موازيا للمستقيم: $3v + 6s - 5 = 0$ عند النقطتين:

$$\left(-\frac{5}{3}, -\frac{137}{3} \right), (1, -38)$$

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين

إذا كانت ، د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س .

$$\text{وكانت ص} = \frac{د(س)}{ر(س)} \text{، حيث } ر(س) \neq 0$$

$$\text{فإن : } \frac{د(س) \times ر'(س) - ر(س) \times د'(س)}{ر^2(س)} = \frac{د'ص}{ر'ص}$$

أي أن المشتقة الأولى لخارج قسمتين دالتين قابلتين للإشتقاق يساوي مشتقة البسط ضرب المقام ناقص مشتقة المقام ضرب البسط مقسوما على مربع المقام.

أمثلة: 1) أوجد المشتقة الأولى لكل من الآتي:

$$(1) \quad \frac{4-3س}{5+2س} = \text{ص}$$

$$\text{الحل: ص} = \frac{23}{25+24} = \frac{(4-3س)2 - (5+2س)3}{2(5+2س)}$$

$$(2) \quad \frac{1+2س3}{4-2س} = \text{ص}$$

$$\text{الحل: ص} = \frac{6س(4-2س) - (1+2س3)2}{2(4-2س)} = \frac{26س - 2}{2(4-2س)}$$

$$\text{مثال 2: د(س) = } \frac{2-س-2س}{2-س+2س} \text{، ثم أوجد د'(2)، د'(-2)}$$

$$\frac{4+2s}{2(2-s+2s)} = \frac{(2-s-2s)(1+s2)-(2-s+2s)(1-s2)}{2(2-s+2s)} = \text{الحل: د(س)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{4+2(2)2}{2(2-2+4)} = \text{د(2)}$$

د(2-) لا يمكن لأن $2- \notin$ مجال الدالة .

مثال 3: أوجد ميل المماس لمنحني الدالة $v = \frac{s+1}{s-1}$ عند النقطة $(-1, 0)$

$$\frac{2}{2(s-1)} = \frac{(s+1)(1-)-(-1)(1)}{2(s-1)} = \frac{d v}{d s} \text{ الحل:}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2(1-)-1} = \text{م. ميل المماس عند النقطة } (-1, 0)$$

مثال 5: أوجد معادلة المماس للمنحني $v = \frac{3-s^2}{2+s^3}$ عند $v = 5$

$$\text{الحل: عندما } v = 5, \text{ فإن } \frac{3-s^2}{2+s^3} = 5, \therefore \boxed{s = -1}$$

$$\frac{13}{2(2+s^3)} = \frac{(3-s^2)3-(2+s^3)2}{2(2+s^3)} = \frac{d v}{d s} \text{ إذا كان:}$$

$$\frac{13}{2(2+(1-)\times 3)} \text{ م. ميل المماس للمنحني عند النقطة } (-1, 5) \text{ هو}$$

$$\text{م. معادلة المماس يكون: } 13 = \frac{5-v}{1+s} \Leftrightarrow \text{ص } 13 - \text{ص } 18 = 0$$

مثال 6: أوجد النقط الواقعة على المنحني، ص $\frac{2-s}{2+s}$ والتي تصنع المماس عندها

زاوية قياس $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل: إذا كان المماس يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\therefore \text{ميل المماس} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 = \tan 45^\circ$$

$$\frac{4}{2(2+s)} = \frac{(2-s)(1) - (2+s)(1)}{2(2+s)} = \frac{d_v}{d_s} \quad \text{إذا كان}$$

$$\therefore \text{ميل المماس عن أي نقطة على المنحني} = \frac{4}{2(2+s)}$$

$$\therefore 1 = \frac{4}{2(2+s)} \therefore 4 = 2(2+s) \therefore s + 2 = 2 \therefore s = 0$$

$$\therefore s = 0 = 2 - 2 = 0 ، ومنها ص = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

$$\text{أو : } s = -2 = 2 - 4 = -4 ، ومنها ص = \frac{2-(-4)}{2+(-4)} = 3$$

$\therefore$ المماس للمنحني يضع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ عند النقطتين $(0, 1)$ ، $(-4, 3)$.

مثال 7: ص $\frac{p}{s+b}$ يمر بالنقطة $(1, 2)$ $\therefore$ و المماس للمنحني عند هذه النقطة

يوازي المستقيم $s + ص = 3$ ، فأوجد قيمة كل من: p ، b .

$$\text{الحل: إذا كان المنحني ص} = \frac{p}{s+b} \text{ يمر بالنقطة } (1, 2) \therefore \frac{p}{b+1} = 2$$

$$\therefore p = 2(b+1) \quad (1)$$

$$\frac{p-}{2(b+1-)} = 1- = \frac{ص}{دس} \therefore \frac{p-}{2(b+س)} = \frac{(p)1-(ب+س)(0)}{2(b+س)} = \frac{ص}{دس} \text{ إذا كان:}$$

$$\frac{p-}{2(b+1-)} = (2, 1-) \text{ ميل المماس للمنحني عند النقطة } (2, 1-)$$

$$\therefore \text{ إذا كان المماس يوازي المستقيم } ص + 3 = 0 \therefore \text{ ميل المماس } 1- =$$

$$\therefore 1- = \frac{p-}{2(b+1-)} \therefore 1 = \frac{p-}{2(b+1-)} \text{ يشترط } 1 \neq 1 \text{ (2)}$$

$$\text{إذا عوضنا قيمتي (p) من (1)، (2)}$$

$$3 = ب \therefore 2 = ب + 1- \therefore 1 = \frac{2}{(ب+1-)} \therefore 1 = \frac{(ب+1-)2}{2(ب+1-)} \therefore$$

$$\text{ونعوض قيمة (ب) في المعادلة (1) نجد أن:}$$

$$4 = (3 + 1-) 2 = p \therefore 4 = p, \boxed{3 = ب} \text{ وهو المطلوب}$$

مشتقة دالة الدالة

∴ ص دالة في $\mathcal{E}$ ولتكن ص = د ($\mathcal{E}$) . وكانت $\mathcal{E}$ دالة في س ولتكن

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(r(s)) , \text{ فإن ص تسمى دالة الدالة في س وتكتب الصورة: ص} = \mathcal{E}[\mathcal{E}(r(s))].$$

خطوات إيجاد مشتقة دالة الدالة:

∴ ص = د ($\mathcal{E}$) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(r(s)) \text{ دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س}$$

فإن: ص = د ($\mathcal{E}(r(s))$) تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

$$\text{ويكون } \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{E}} \times \frac{d\mathcal{E}}{dr(s)}.$$

أمثلة: أوجد $\frac{d\mathcal{E}}{ds}$ في كل من الآتي :

$$(1) \quad \mathcal{E} = 1 + \mathcal{E}^8, \quad \mathcal{E} = 2 - s^3$$

$$\text{الحل: } \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{E}} \times \frac{d\mathcal{E}}{ds} = 8\mathcal{E}^7 = 2 \times 16 = 32 \quad \mathcal{E} = 2 - s^3$$

$$(2) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{1-\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} = s^2 + 3s + 3. \text{ ثم أوجد } \left[\frac{d\mathcal{E}}{ds} \right]_{s=1}$$

$$\text{الحل: } \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{E}} = \frac{1}{2(1-\mathcal{E})} = \frac{1-\mathcal{E}}{2(1-\mathcal{E})} = \frac{1-\mathcal{E}}{2} = \frac{d\mathcal{E}}{ds} = 2s + 3.$$

$$\frac{(3+2s)-}{2(1-(3+2s))} = (3+2s) \times \frac{1-}{2(1-)} = \frac{د}{د} \times \frac{د}{د} = \frac{د}{د} \therefore$$

$$\frac{5-}{36} = \frac{(3+1 \times 2)-}{2(2+3+1)} = 1 = \frac{د}{د} \text{ إذا } \frac{(3+2s)-}{2(2+3+2s)} =$$

$$\text{نتيجة 1 إذا كانت: } ص = \left[(د(س)) \right]^{\frac{د}{د}} \text{ فإن } \left[(د(س)) \right]^{1-} \times د(س) =$$

أي أن مشتقة (قوس)^ن يساوي ن مضروباً في القوس أس (ن-1) ضرب مشتقة الدالة داخل القوس.

أي: مشتقة (قوس)^ن = ن(قوس)^{ن-1} × مشتقة الدالة داخل القوس.

أمثلة أوجد المشتقة الأولى لكل من الآتي:

$$(1) \quad ص = (2 + 3s)^4$$

$$\text{الحل: } \frac{د}{د} = 4(2 + 3s)^3 \times 3 = 12(2 + 3s)^3$$

$$(2) \quad ص = \left(\frac{s^3}{1+2s} \right)^5$$

$$\text{الحل: } \frac{د}{د} = 5 \left(\frac{s^3}{1+2s} \right)^4 \times \frac{3s^2 \times (1+2s) - (s^3) \times 2}{(1+2s)^2}$$

$$= \frac{15}{2(1+2s)} \times \left(\frac{s^3}{1+2s} \right)^4 = \frac{3}{2(1+2s)} \times \left(\frac{s^3}{1+2s} \right)^4 =$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{(4-s^2)(3-s)} = \text{ص}$$

الحل: إذا كان $\text{ص} = (4-s^2)(3-s)^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{2}{3} (4-s^2)(3-s)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{2}{3} (4-s^2)(3-s)^{\frac{2}{3}} = \frac{(3-s^2)2}{(4-s^3)(3-s)^{\frac{1}{3}}}$$

مثال 3: $\text{ص} = (2+s)^3(3-2s)^4$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3(2+s)^2(3-2s)^3 + 4(2+s)^3(3-2s)^2$

$$3(1+s)^2 \times 3 \times 3$$

$$= 6(2+s)^2(3-2s)^4 + 12(3-2s)^3(2+s)^3$$

$$= 6(2+s)^2(3-2s)^3(1+2s+2+3s-2s^2)$$

$$= 6(2+s)^2(3-2s)^3(4s^2+5s+5) \quad (\text{جمع المتشابهات})$$

$$= 6(2+s)^2(3-2s)^3(7s) = 42s(2+s)^2(3-2s)^3$$

$$\text{مثال 5: ص} = \frac{3(1+2s)}{2(3-2s)}$$

$$\text{الحل: } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{3(1+2s) \times 2 \times (3-2s)^2 - 2(3-2s) \times 2 \times 2(1+2s)^2}{2(2(3-2s))}$$

$$\frac{(3-2s)^3(1+2s)^4-2(3-2s)^2(1+2s)^6}{4(3-2s)} =$$

$$\frac{((1+2s)^2 - (3-2s)^3)(3-2s)^2(1+2s)^2}{4(3-2s)} =$$

$$\frac{(2-9s-2s^4)^2(1+2s)^2}{2(3-2s)} = \frac{2-2s^2-9s-2s^6)^2(1+2s)^2}{2(3-2s)} =$$

إذا كانت: $\sqrt{D(s)} = \frac{D(s)}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2D(s)}}$ فإن $\frac{D(s)}{2}$

أي أن مشتقة الجذر التربيعي لدالة يساوي $\frac{1}{2\sqrt{D(s)}}$ ضرب مشتقة الدالة

تحت الجذر التربيعي.

مثال 1: $\sqrt{3+2s} = \frac{D(s)}{2}$

الحل: $\frac{1}{\sqrt{3+2s}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2(3+2s)}} = \frac{D(s)}{2}$

مثال 2: $\sqrt{1+8s+12s^2+5s^3} = \frac{D(s)}{2}$

الحل: $\frac{8+24s+15s^2}{1+8s+12s^2+5s^3} \sqrt{2} = \frac{D(s)}{2}$

مثال 4: $\sqrt{2-3s} = \frac{D(s)}{2}$ ، فأوجد: $\frac{D(s)}{2}$ عند $s=1$

$$\frac{ع^2}{2(1+ع^2)} = \frac{ع^3 2 - ع^2 + 3 ع^2}{2(1+ع^2)} = \frac{(ع^2)ع^2 - (1+ع^2)ع^2}{2(1+ع^2)} = \frac{دص}{دس} \text{ الحل:}$$

$$\frac{3}{2-س3} \sqrt{2} \times \frac{ع^2}{2(1+ع^2)} = \frac{دع}{دس} \times \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \therefore \frac{3}{2-س3} \sqrt{2} = \frac{دع}{دس}$$

وبالتعويض عن ع نجد أن

$$1=س \left[\frac{دص}{دس} \right] \therefore \frac{3}{2(1-س3)} = \frac{3}{2-س3} \sqrt{2} \times \frac{. 2-س3 \sqrt{2}}{2(1+2-س3)} = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2(1-1 \times 3)} =$$

بطريقة أخرى نجعل ص دالة في س وذلك بالتعويض عن ع في (ص)

ثم إيجاد $\frac{دص}{دس}$

$$\frac{2-س3}{1-س3} = \frac{2-س3}{1+2-س3} = \frac{2(\sqrt{2-س3})}{1+2(\sqrt{2-س3})} = ص \therefore \sqrt{2-س3} = ع$$

$$\frac{3}{2(1-س3)} = \frac{6+س9-3-س9}{2(1-س3)} = \frac{(2-س3)3-(1-س3)3}{2(1-س3)} = \frac{دص}{دس} \therefore$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2(1-1 \times 3)} = 1=س \left[\frac{دص}{دس} \right] \therefore$$

نتيجة 2: إذا كانت ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

$$\text{فإن : } \frac{د}{دس} (ص) = ن ص^{1-ن} \times \frac{دص}{دس}.$$

$$\text{أمثلة: (1)} \quad \frac{د}{دس} (ص) = 3 ص^2 \times \frac{دص}{دس}$$

$$(2) \quad \frac{د}{دص} (ص) = 3 ص^2$$

$$(3) \quad \frac{د}{دن} (ص) = 3 ص^2 \times \frac{دص}{دن}$$

$$(4) \quad \frac{د}{دع} (ص) = 8 ص^7 \times \frac{دص}{دع}$$

$$(5) \quad \frac{د}{دس} (ص) = 1 \times \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس}$$

$$(6) \quad \text{أوجد } \frac{دص}{دس} \text{ في كل من الآتي:}$$

$$(1) \quad ص^3 = س^4 - 2 س^2 + 1$$

$$\text{الحل: } 3 ص^2 \times \frac{دص}{دس} = 4 س^4 - 3 س^4$$

$$\frac{4 س^4 - 2 س^4}{\sqrt[3]{(1 + 2 س^2 - 4 س)}} = \frac{4 س^4 - 3 س^4}{2 ص^3} = \frac{دص}{دس} \therefore$$

$$\text{حل آخر: } ص = (س^4 - 2 س^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{3} (س^4 - 2 س^2 + 1)^{\frac{1}{3}} (4 س^4 - 3 س^4)$$

$$\frac{s^4 - 2s^4}{\sqrt[3]{(1 + s^2 - 2s^4)^2}} =$$

(2) ص⁴ = ص⁵ - س

الحل: 4ص³ × $\frac{ص}{دس} = 5س^4 - 1$

$$\frac{1 - 4س^5}{\sqrt[4]{(س - 5س^2)^2}} = \frac{1 - 4س^5}{3ص^4} = \frac{ص}{دس} \therefore$$

(3) إذا كانت : ص = ع² + 3ع + 5، ع = $\frac{1}{2}س^2 + 2$

فأثبت أن: $\frac{ص}{دس} - 7\frac{ع}{دس} - س^2 = 0$.

الحل: $\therefore \frac{ص}{دع} = 2ع + 3$ ، $\frac{ع}{دس} = \frac{1}{2}س^2 \times 2 = س$.

$\therefore \frac{ص}{دس} = \frac{ص}{دع} \times \frac{ع}{دس} = (2ع + 3) \times س$. تعوض عن قيمة (ع)

$\therefore \frac{ص}{دس} = (2 + \frac{1}{2}س^2 + 2) \times (3 + 4س^2 + 3س) = س \times (3 + 4س^2 + 3س) = س^3 + 7س + 3س^3$

$\therefore \frac{ص}{دس} - 7\frac{ع}{دس} - س^2 = س^3 + 7س - 7س - س^2 = 0$ وهو المطلوب.

تمارين

أ) أوجد المشتقة الأولى لكل من الآتي:

$$(1) \text{ ص } \frac{4}{2^s} = \text{د} (س) \quad (2) \text{ ص } \frac{s}{1+2^s} = \text{د} (س) \quad (3) \text{ ص } \frac{5}{3+2^s}$$

$$(4) \text{ ص } \frac{2-s^2}{1+2^s} = \text{د} (س) \quad (5) \text{ ص } \frac{7+s^6-2^s}{2-s} = \text{د} (س) \quad (6) \text{ ص } \frac{1+s+s^2}{1+s-2^s}$$

$$(7) \text{ ثم أوجد: د} (3) \text{ عند : د} (س) = 1 - \frac{1}{1-s}$$

$$(8) \text{ د} (س) = \frac{s}{2+s} - \frac{1-s}{2-s} \text{ ، ثم أوجد د} (0)$$

ب) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية:

$$(1) \text{ ص } \frac{s}{2+s} = \text{د} (س) \text{ ، عند النقطة } (1, 1)$$

$$(2) \text{ ص } \frac{2-1}{2-s} = \text{د} (س) \text{ ، عند النقطة } (1, 1)$$

$$(3) \text{ ص } \frac{1+s+s^2}{1+s} = \text{د} (س) \text{ ، عند النقطة } (2, 3)$$

ج) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس لكل من المنحنيات التالية مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة.

$$(1) \text{ ص} = \frac{1-s^2}{1+s^2} \text{ عند النقطة } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \text{ ص} = \frac{1-s}{1+s-2s^2} \text{ عند النقطة } (0, 1)$$

(د) أوجد $\frac{د}{ص}$ في كل من الآتي:

$$(1) \text{ ص} = ع^2, ع = س^4 - 6, (2) \text{ ص} = ع^7, ع = س^3 + 2س^2 - 4 \text{ عند } س = 1$$

$$(2) \text{ ص} = ع\sqrt{ع} + \frac{1}{\sqrt{ع}}, ع = س^2 + 25, \text{ عند } س = 0$$

$$(3) \text{ ص} = \frac{ع-1}{ع+1}, ع = \frac{س+1}{س-1}$$

$$\therefore \text{ إذا كانت } \text{ص} = \frac{5-s}{5+s}, س = 2+ع, 3, \text{ أوجد } \frac{د}{ع} \text{ عند } ع = 1$$

$$\therefore \text{ إذا كانت: } ع = \frac{1}{2} \text{ ص}^2 + \text{ص} - 2, \text{ ص} = س^2 + س + 1$$

$$\text{أوجد } \frac{د}{ص} \text{ عند } س = \frac{1-}{2}$$

∴ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحني: $5\text{ص} = س\sqrt{3س^2+4}$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $س = 2$.

∴ أوجد النقطة الواقعة على المنحني: $ص = (س^2 - 4)^2$ التي يكون عندها $ص = 0$.

∴ أوجد معادلة المماس للمنحني : $\sqrt{25 - 2س} = ص$ عند النقطة $پ(3, 4)$

الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور السينات عند النقطة ب أوجد مساحة

المثلث (پ ب ج) ، حيث أن (جـ) هي نقطة الأصل.

∴ إذا كانت $ص = 2س - 1$ ، $س = ع^3 - 2$ ، أوجد : $\frac{دص}{دع}$

ثم أثبت أن : $\frac{دص}{دع} 4 = \frac{دس}{دع} 6 = ع^5$

∴ إذا كانت $س^3 - ص^3 = 8$ ، أثبت أن : $\frac{دص}{دس} = \frac{دس}{دص} 2$

∴ إذا كانت : $ص = (پ - 3س)^2$ و كان ميل المماس يساوي 4 عند $س = 2$ أوجد

قيمة پ .

∴ إذا كانت : $ص = (پ + ب) 2$ ، وعندما $س = 2$ ، فإن : $ص = 1$

$\frac{دص}{دس} = 4$ ، أوجد قيمة كل من (پ ، ب)

المشتقة الأولى للدوال المثلثية

إذا كانت: ص = حا س، فإن $\frac{د ص}{د س} = \text{حتا س}$

إذا كانت: ص = حتا س، فإن $\frac{د ص}{د س} = \text{حا س}$

إذا كانت: ص = طا س، فإن $\frac{د ص}{د س} = \text{قا س}^2$

أمثلة : (٢)

$$(1) \quad \text{ص} = \text{حا} 3 \text{ س} \quad (2) \quad \text{ص} = 2 \text{ حتا} (4 - \text{س})$$

$$\underline{\text{الحل:}} \quad \frac{د ص}{د س} = 3 \text{ حتا} 3 \text{ س} \quad \left\{ \underline{\text{الحل:}} \quad \frac{د ص}{د س} = 2 - \text{س} \times 1 - \text{حا} (4 - \text{س}) \times 2 \text{ حتا} (4 - \text{س}) \right.$$

$$(3) \quad \text{ص} = \text{طا} (5 - \text{س} - 2) \quad (4) \quad \text{ص} = \text{حا} (3 \text{ س}^2 + 1)$$

$$\underline{\text{الحل:}} \quad \frac{د ص}{د س} = 5 \text{ قا} (5 - \text{س} - 2)^2 \quad \left\{ \underline{\text{الحل:}} \quad \frac{د ص}{د س} = 6 \text{ س حتا} (3 \text{ س}^2 + 1) \right.$$

أمثلة: (ب)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال المثلثية التالية:

$$(1) \quad \text{ص} = \text{حا} 2 \text{ س حتا} 3 \text{ س}$$

$$\text{الحل: } \frac{د ص}{د س} = 2 \text{ حتا } 2 س \times \text{حتا } 3 س + \text{حا } 2 س \times (-3 \text{ حا } 3 س)$$

$$= 2 \text{ حتا } 2 س \text{ حتا } 3 س - 3 \text{ حا } 2 س \text{ حا } 3 س$$

$$(2) \quad \frac{\text{حا } (1+2 س)}{\text{حتا } (1-3 س)} = \text{ص}$$

$$\text{الحل: } \frac{د ص}{د س} = \frac{2 \text{ حتا } (1+2 س) \text{ حتا } (1-3 س) - (-3 \text{ حا } 2 س) \text{ حا } (1-3 س)}{\text{حتا } (1-3 س)^2}$$

$$= \frac{2 \text{ حتا } (1+2 س) \text{ حتا } (1-3 س) + 3 \text{ حا } (1-3 س) \text{ حا } 2 س}{\text{حتا } (1-3 س)^2}$$

$$(3) \quad \text{ص} = \sqrt{\text{حا } س}$$

$$\text{الحل: } \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\sqrt{2 س}} \times \sqrt{\text{حتا } س} = \frac{\sqrt{\text{حتا } س}}{\sqrt{2 س}}$$

$$(4) \quad \text{ص} = \text{حتا } (1-2 س)^2$$

$$\text{الحل: } \text{ص} = (\text{حتا } (1-2 س))^2$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = 2 \text{ حتا } (1-2 س) \times 2 \times (-3 \text{ حا } 2 س) = 4 \text{ حتا } (1-2 س) \text{ حا } (1-2 س)$$

$$(5) \quad \text{إذا كانت : ص} = \frac{\text{حتا } س}{-1 \text{ حا } س}, \text{ فأثبت أن } \frac{1}{-1 \text{ حا } س} = \frac{د ص}{د س}$$

$$\frac{-\text{حاس} \times (\text{حاس} - 1) - (\text{حاس} - 1) \times (\text{حاس} - 1)}{2(\text{حاس} - 1)} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \quad \text{الحل:}$$

$$\frac{1}{-\text{حاس} - 1} = \frac{-\text{حاس} - 1}{2(\text{حاس} - 1)} = \frac{1 + \text{حاس}}{2(\text{حاس} - 1)} = \frac{-\text{حاس} + \text{حاس}^2 + \text{حاس} + 1}{2(\text{حاس} - 1)} =$$

$$(5) \text{ إذا كانت : ص} = \sqrt{3-7\text{ع}} \quad \text{ع} = \frac{\text{طا}}{2}\text{س}$$

$$\text{فأثبت أن } 0 = 3 + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times 4 \quad \text{عند س} = \frac{\text{ط}}{2}$$

$$\text{الحل: } \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3-}{\sqrt{2}\sqrt{3-7\text{ع}}}, \quad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3-}{\sqrt{2}\sqrt{3-7\text{ع}}} \times \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س} = \frac{3-}{\sqrt{4}\sqrt{3-7\text{ع}}} \text{قا}^2 \text{س} \quad \text{بالتعويض عن ع}$$

$$\frac{2 \times 3-}{1 \times \sqrt{3-7\text{ع}}} = \frac{\frac{\text{ط}}{4} \text{قا}^2 3-}{\frac{\text{ط}}{4} \sqrt{3-7\text{طا}}} = \frac{\text{ط}}{\text{س}} = \left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right] \therefore \frac{\frac{\text{ط}}{2} \text{قا}^2 3-}{\frac{\text{س}}{2} \sqrt{3-7\text{طا}}} = \frac{3-}{4}$$

$$\therefore 0 = 3 + \frac{3-}{4} \times 4 = 3 + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times 4 \quad \text{وهو المطلوب}$$

6) أوجد ميل المماس للمنحني ، ص=طا (طا- $\frac{2}{3}$ س) عند النقطة (طا، $\sqrt[3]{3}$)

$$\text{الحل: } \frac{دص}{دس} = \frac{2}{3} \text{ قا } \left(\frac{2}{3} - \text{طا} \right) \text{س}$$

$$\therefore \text{ ميل المماس للمنحني عن النقطة (طا، } \sqrt[3]{3} \text{)} = \left(\frac{2}{3} - \text{طا} \right) \frac{2}{3} \text{ قا } \left(\frac{2}{3} - \text{طا} \right)$$

$$= - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \text{طا} \right)^2 = - \frac{2}{3} \times 2^2 = - \frac{8}{3}$$

7) أوجد النقط الواقعة على المنحني: ص = حا²س - حتا س: س $\in [0, \text{ط}]$

والتي عندها يكون المماس للمنحني مائلا بزاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$\text{الحل: } \frac{دص}{دس} = 2 \text{ حتا } 2\text{س} + \text{حا س}$$

إذا كان المطلوب هو إيجاد النقط التي يكون المماس للمنحني عندها مائلا بزاوية

$$\text{قياسها } \frac{3\pi}{4} \text{ على الاتجاه الموجب لمحور السينات أن ميله } = \frac{3\pi}{4} \text{ طا} = 1 -$$

$$\therefore \text{ يوضع } 2 \text{ حتا } 2\text{س} + \text{حا س} = 1 - \therefore (2 - 1) \text{ حا}^2 \text{س} - \text{حا س} - 3 = 0$$

$$\therefore 2 - 4 \text{ حا}^2 \text{س} + \text{حا س} + 1 = 0 \therefore 4 \text{ حا}^2 \text{س} - \text{حا س} - 3 = 0$$

$$\therefore (4 \text{ حا س} + 3) (\text{حا س} - 1) = 0$$

$$\therefore \text{حاس} = \frac{3^-}{4} \therefore \text{س} \ni [0, \text{ط}]$$

$$\therefore \text{حاس} \ni [0, 1] \therefore \text{حاس} = \frac{3^-}{4}, \text{ ناتجة مرفوضة}$$

$$\text{أو حاس} = 1 \therefore \text{س} = \frac{\text{ط}}{2}$$

وبالتعويض في معادلة المنحني عن قيمة س

$\therefore$ النقطة هي : $(\frac{\text{ط}}{2}, 0)$ وهي المطلوبة .

تمارين:

(٨) أوجد المشتقة الأولى لكل من الآتي:

$$(1) \text{ص} = \text{س حاس} + \sqrt{\text{س}}$$

$$(2) \text{ص} = 2 \text{ حاس} - \frac{1}{2} \text{س} \text{ حتا } \frac{1}{2} \text{س}$$

(ب) أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في كل من الآتي:

$$(1) \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{حاس}} \text{ عند س} = \frac{3\text{ط}}{2}$$

$$(2) \text{ص} = \text{س}^2 \text{ حاس عند س} = \frac{\text{ط}}{2}$$

(ج) إذا كانت $\text{ص} = (\text{حاس} + \text{حتا س})^2$. اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 \text{ حتا } 2\text{س}$

د) أوجد $\frac{د}{دس}$ في كل من الآتي:

1) $ص = ع - حاع$ ، $ع = 5س + ط$ عن $س = 0$

2) $ص = (3ع + 1)^5$ ، $ع = \frac{1}{3}$ حتا $س^2$ عند $س = \frac{ط}{4}$

3) $ص = \sqrt[4]{2-ع}$ ، $ع = ط$ $2س$ عن $س = \frac{ط}{8}$

هـ) أوجد المشتقة الأولى للدالة $د$ حيث $د(س) = (1+س)^4 (1-س)^4$ ، عند $س = 2$

و) أوجد قيمة $\frac{د}{دس}$ ($\frac{س}{3}$ حتا $3س$)، عند $س = \frac{ط}{3}$

I - مقدمة

يهدف الإحصاء إلى الحصول على معلومات متعلقة بمجموعة ما، تسمى هذه المجموعة الساكنة الإحصائية كما تسمى عناصرها أفرادا (يكون عدد أفراد المجموعة دائما كبيرا نسبيا حتى يمكننا أن نتكلم عن ساكنة إحصائية ما) في بعض الحالات ولأسباب عملية تقوم الدراسة على جزء من الساكنة يسمى العينة، المعيار الذي تقوم عليه الدراسة يسمى الميزة وهناك ميزة كمية (عمر - وزن - قياس) وميزة كيفية (لون دفاتر - مهنة الأب ...). ومن بين الميزات الكمية توجد ميزة متقطعة عدد قيمها منته وميزة متصلة عدد قيمها غير منته (أو عدد كبير).

II - وضعيات

وضعية 1:

النتائج التالية هي حصيلة أول اختبار في الرياضيات للسنة الخامسة علوم:

8 ; 10 ; 7 ; 8 ; 11 ; 7 ; 5 ; 7 ; 10 ; 8 ; 9 ; 5 ; 13 ; 10 ; 8 ; 11 ; 15

; 1 ; 6 ; 7 ; 5 ; 9 ; 13 ; ; 9 ; 9 ; 6 ; 4 ; 7 ; 11 ; 7 ; 4 ; 6 ; 10

10 ; 10 ; 4 ; 4 ; 8

1) اعط الجدول الإحصائي ثم ارسم المخطط العضوي.

2) ارسم مضع الحصائص(التكرار) ومضع الحصائص المتراكمة(تكرارا المتجمع)
الصاعد والنازل (متزايدة أو متناقضة).

3) ارسم مضع الترددات والترددات المتراكمة.

4) حدد المنوال والوسط لهذه المتسلسلة الإحصائية.

وضعية 2:

نعطي قائمة 50 تلميذا مقاسة ب سم :

139	171	134	155	144	153	175	139	149	154
137	140	142	168	152	149	148	155	168	144
134	144	137	156	153	149	169	140	147	150
152	140	161	153	177	146	152	158	145	152
151	145	157	158	160	170	165	158	158	161

1) اعط الجدول الإحصائي وذلك بعد تجميع النتائج في فصول سعتها 4 سم.

2) ارسم مدرج الحصائص ومضع الحصائص.

3) اعط الصنف المنوالي.

4) احسب الوسط والوسط لهذه المتسلسلة الإحصائية.

وضعية 3:

الجدول التالي يوزع تلاميذ معهد مصعب بن عمير في غات حسب مكان الميلاد (البلدية)

البلدية	كبير	خوميل	طوبى	تياس	لينغير	دارا	مباكي	دكار	تواوون	بير	لوغا	بوت	امبور
عدد التلاميذ	15	45	120	95	34	39	38	51	28	90	78	34	33

1) حدد الجدول الإحصائي.

2) ارسم مخطط الأشرطة.

3) ارسم المخطط النصف الدائري.

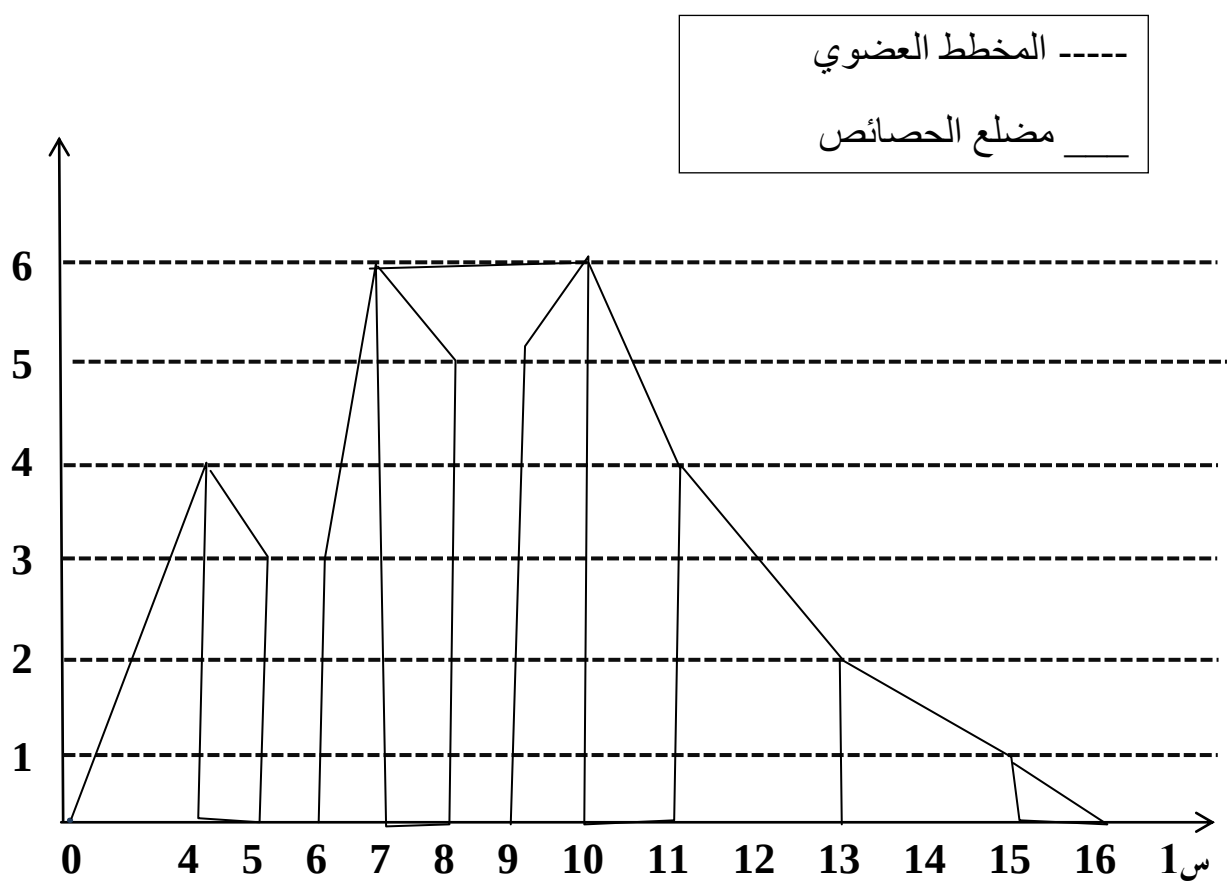
الحلول:

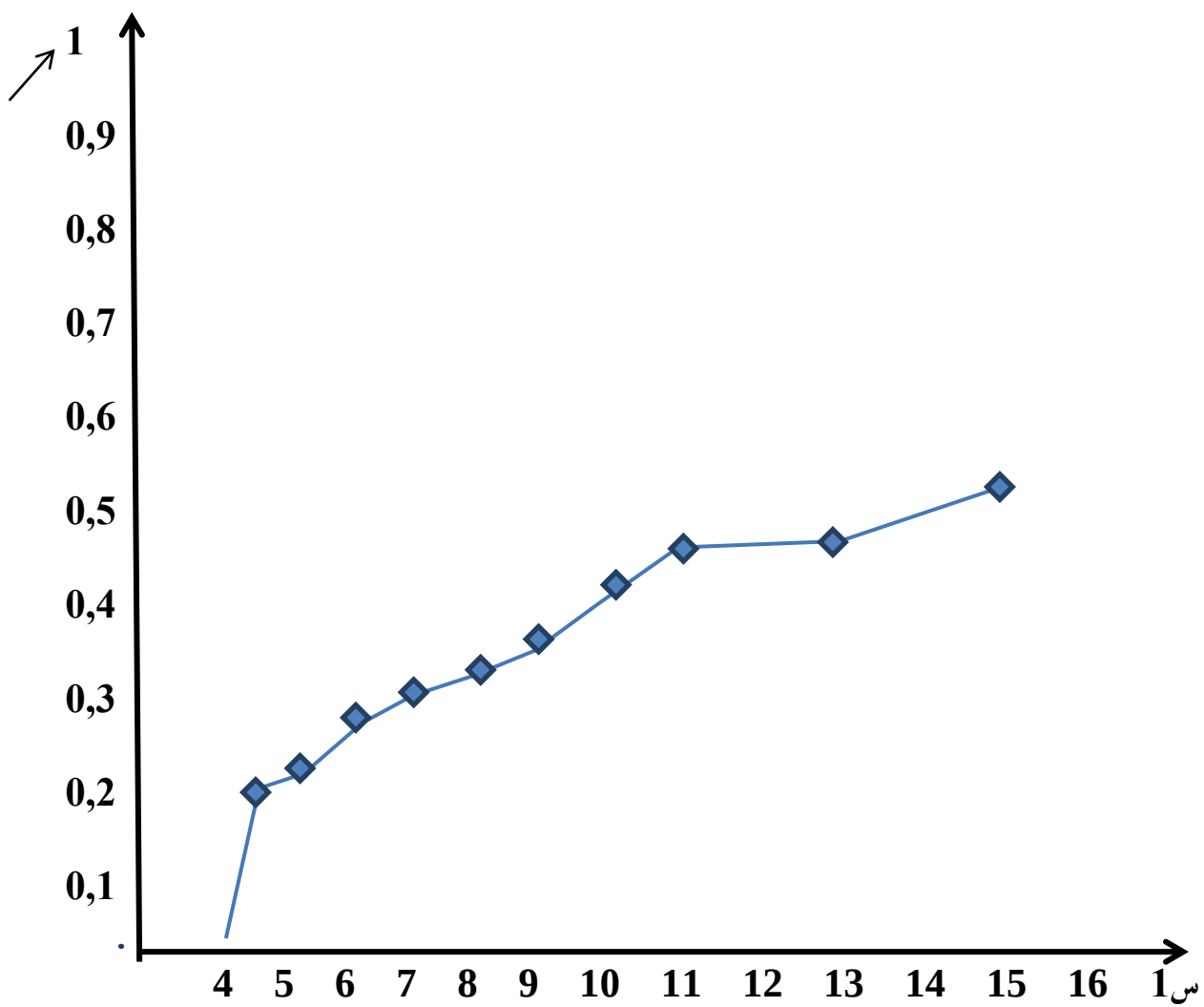
الوضعية 1:

1) الجدول الإحصائي:

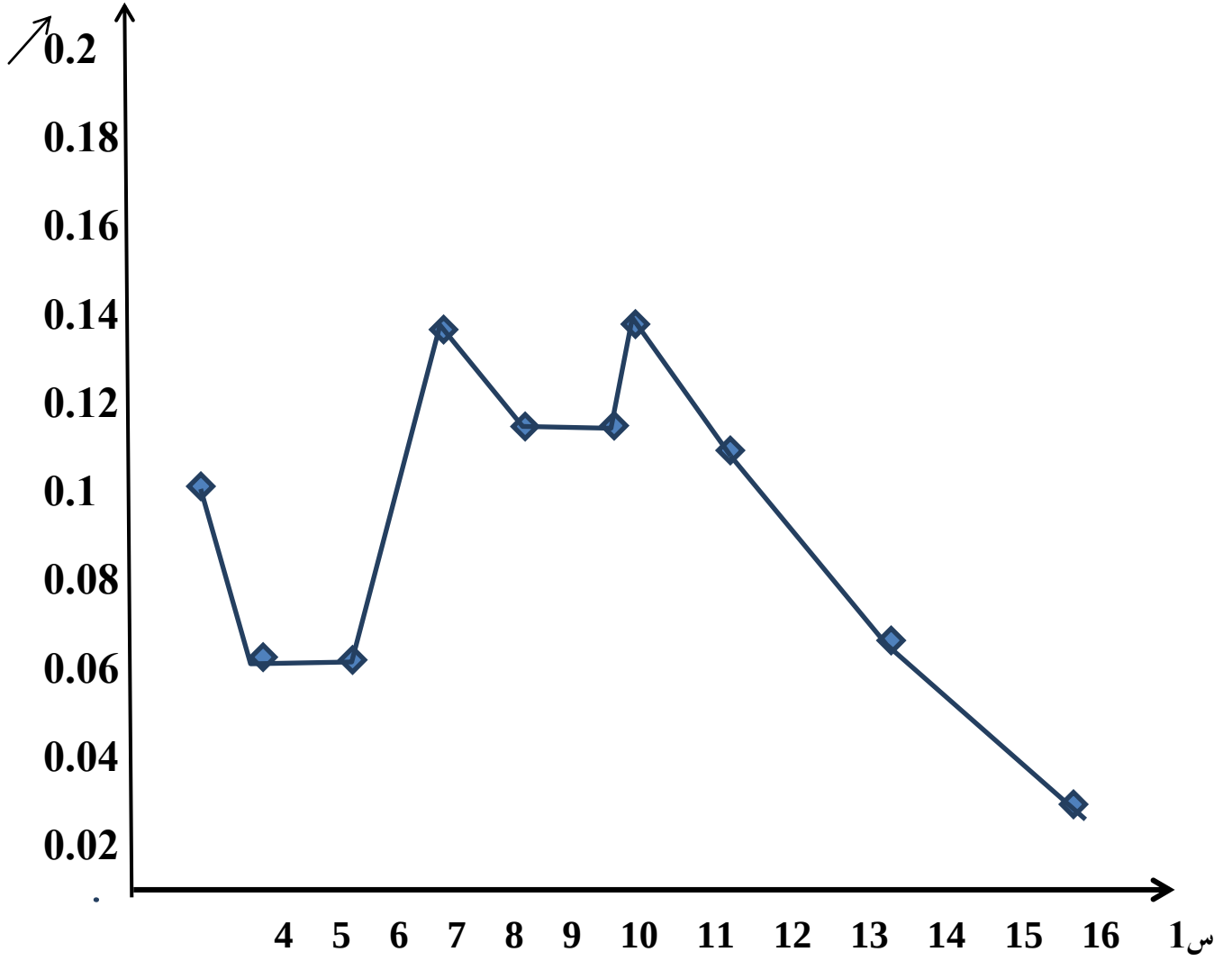
قيمة الميزة س1	الفرز	الحصيص ك1	التردد	الحصيص المتراكم	الترددات التراكمية
4	☐	4	$\frac{4}{39} = 0.10$	4	$\frac{4}{39} = 0.10$
5	☐	3	$\frac{1}{13} = 0.07$	7	$\frac{7}{39} = 0.17$
6	☐	3	$\frac{1}{13} = 0.07$	10	$\frac{10}{39} = 0.25$
7	☒ ا	6	$\frac{2}{13} = 0.14$	16	$\frac{16}{39} = 0.41$
8	☒	5	$\frac{5}{39} = 0.12$	21	$\frac{7}{13} = 0.53$

$\frac{2}{3}=0.66$	26	$\frac{5}{39}=0.12$	5	☐	9
$\frac{23}{39}=0.82$	32	$\frac{2}{13}=0.14$	6	☐	10
$\frac{12}{13}=0.92$	36	$\frac{4}{39}=0.10$	4	☐	11
$\frac{38}{39}=0.97$	38	$\frac{2}{39}=0.05$	2	└	13
1	39	$\frac{1}{39}=0.02$	1		15





مطلع الحصائص المتراكمة المتزايدة



المنوال هو القيمة التي تقابل أكبر تردد، وإذا كانت القيم أكبر من واحد ومتساوية

في التكرار (الحصيص) نكتب هذه القيم: $7=1م$ و $10=2م$

إذن يوجد منوالان لهذه المتسلسلة

*نذكر بأنه يمكن إيجاد وسيط المجموعة المتسلسلة الإحصائية عن طريق الرمز

$$(سجما) \text{ بحيث أن: } س = \sum_{ك=1}^ن \frac{1}{ع} \quad (ك س)$$

علما أن: $ع =$ عدد العناصر (القيم)

$ن =$ الحد الأقصى (من 1 - إلى) القيمة الأخيرة.

$ك =$ الحصيص (التكرار)

$س =$ الميزة (العنصر، القيمة)

الوسط الحسابي وهو القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة، لكان

مجموع هذه القيم الجديدة متساويا لمجموع القيم الأصلية وبالتالي فإنه يساوي مجموع

القيم على عددها ويرمز له بالرمز $س$

$$س = \sum_{ك=1}^ن \frac{1}{سك} \quad 1 = ٢$$

حيث (ن) هو عدد الناصر

$$س = \frac{1}{39} [4 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 5 + 10 \times 6 + 11 \times 4 + 13 \times 2 + 15 \times 1]$$

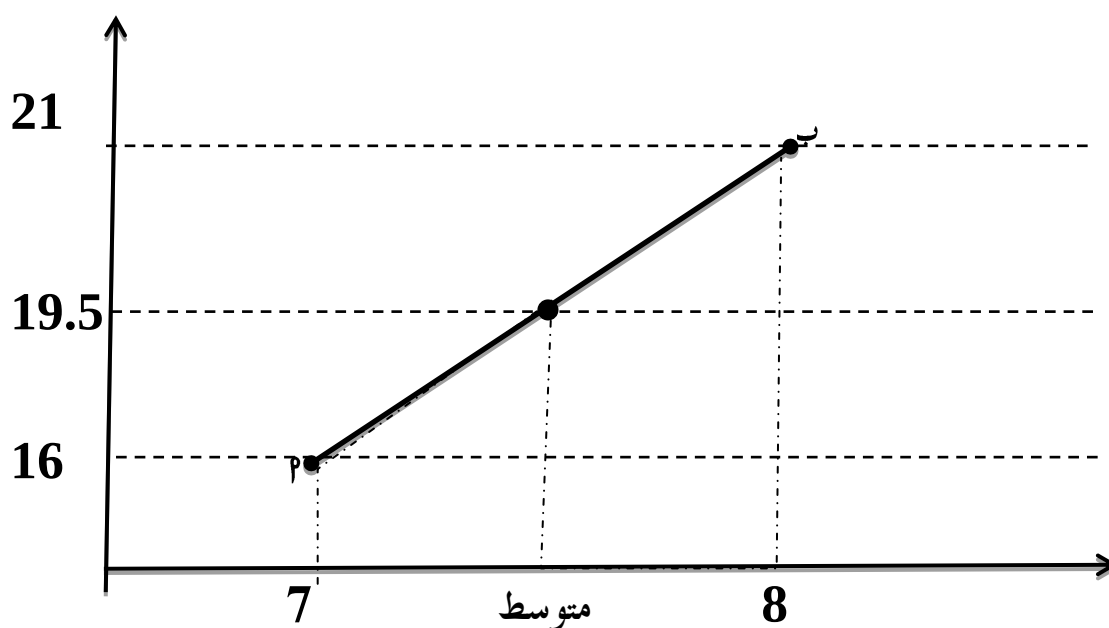
$$8,23 =$$

* المتوسط هو القيمة المقابلة لنصف الحصيص الكلي :

$$\text{أي } \frac{\text{مجموع الحصيص الكلي}}{2} \text{ وفي هذا المثال } \frac{39}{2} = \frac{ع}{2} = 19,5 \text{ وتلاحظ أن هذه القيمة}$$

$$\Rightarrow [16, 21]$$

$$\therefore \text{المتوسط } \Rightarrow [7, 8]$$



$$\frac{7-8}{16-21} = \frac{\text{الموسط} - 7}{16 - 19,5} \text{ أي } \frac{1\text{س} - 2\text{س}}{1\text{ص} - 2\text{ص}} = \frac{\text{الموسط} - 1\text{س}}{1\text{ص} - 19,5} \text{ : عندنا :}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{7 - \text{الموسط}}{3,5}$$

$$7,7 = \frac{38,5}{5} = \frac{,5}{5} + 7 = \text{الموسط}$$

الوضعية 2:

تجميع النتائج في فصول سعتها 4 سم:

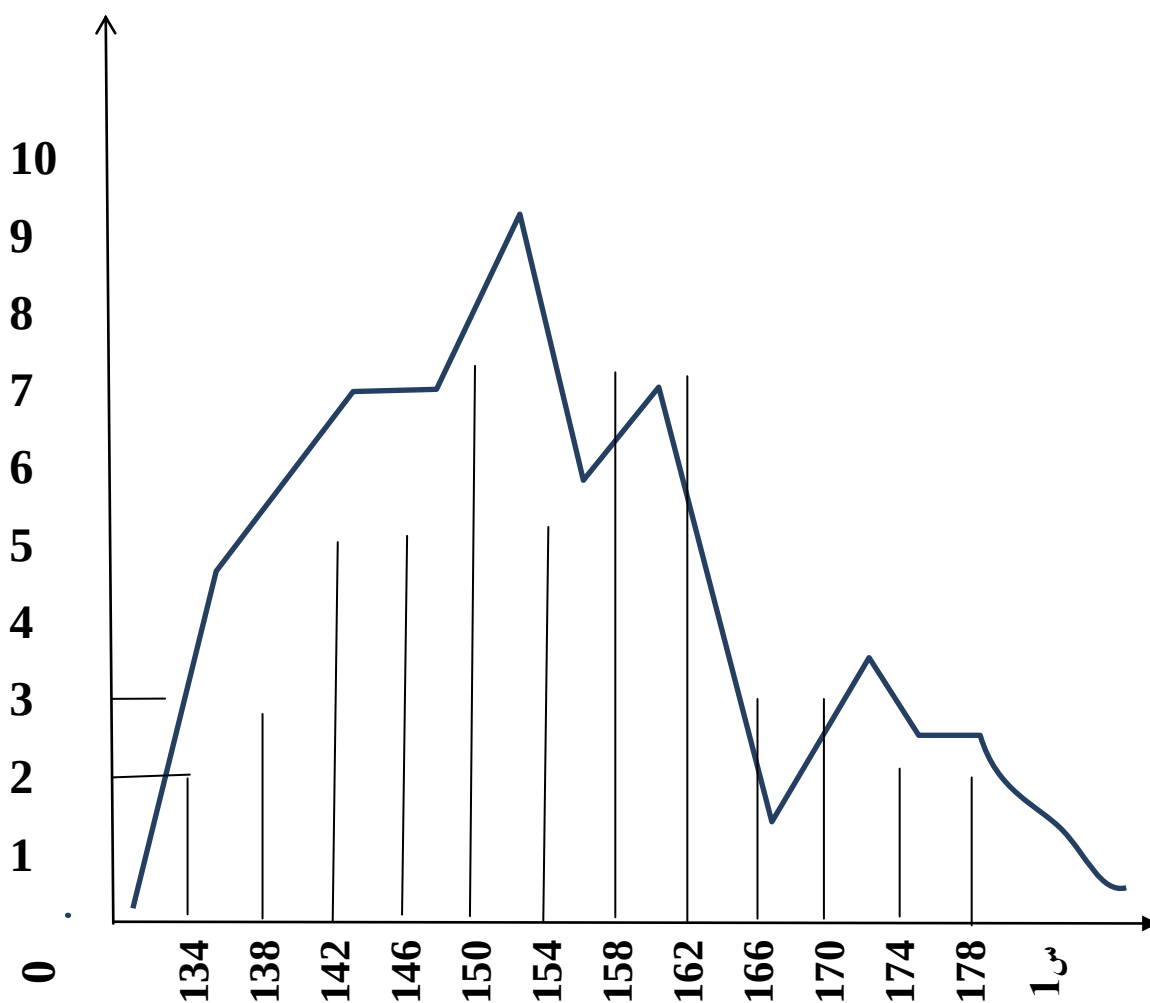
التردد	الحصيص	التردد	الحصيصك	الفرز	قيمة الميزة س
المتراكم	المتراكم				
2/25	4	2 /25	4-	☐	[134 - 138[
9/50	9	1/10	5	☒	[138 -142[
3/10	15	3/25	6	☒	[142 - 146[
21/50	21	3/25	6	☒	[146 - 150[
3/5	30	9/50	9	☒ [	[150-154[
7/10	35	1/10	5	☒	[154-158[
21/25	42	7/50	7	☒ L	[158-162[

43/50	43	1/50	1	I	[162-166[
23/25	46	3/50	3	□	[166-170[
24/25	48	1/25	2	└	[170-174[
1	50	1/25	2	└	[174-178[

ملاحظة :

إذا كانت الميزة تأخذ قيما كثيرة يجب تجميع النتائج في أصناف وذلك لتسهيل العمل.

مضلع الحصائص ومدرج الحصائص :



3) الصّنف المتوالي هو : [150,154] حيث يقابل أكبر حصيص 9.

4) الوسط : مجموعة القيم على عددها

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{s_k}} = \text{الوسط}$$

$$+160 \times 7 + 156 \times 5 + 152 \times 9 + 148 \times 6 + 144 \times 6 + 140 \times 5 + 136 \times 4]$$

$$152,56 = \frac{7628}{50} = \text{الوسط} \quad \text{وعليه فإن: } 176 \times 2 + 172 \times 2 + 168 \times 3 + 164$$

حساب الوسط

نذكر بأن الوسيط هو القيمة المقابل لنصف الحصيص الكلي .

$$25 = \frac{50}{2} = \frac{e}{2} \quad 25 \in [21, 30]$$

وعليه فإن : الوسط $\in [148, 152]$

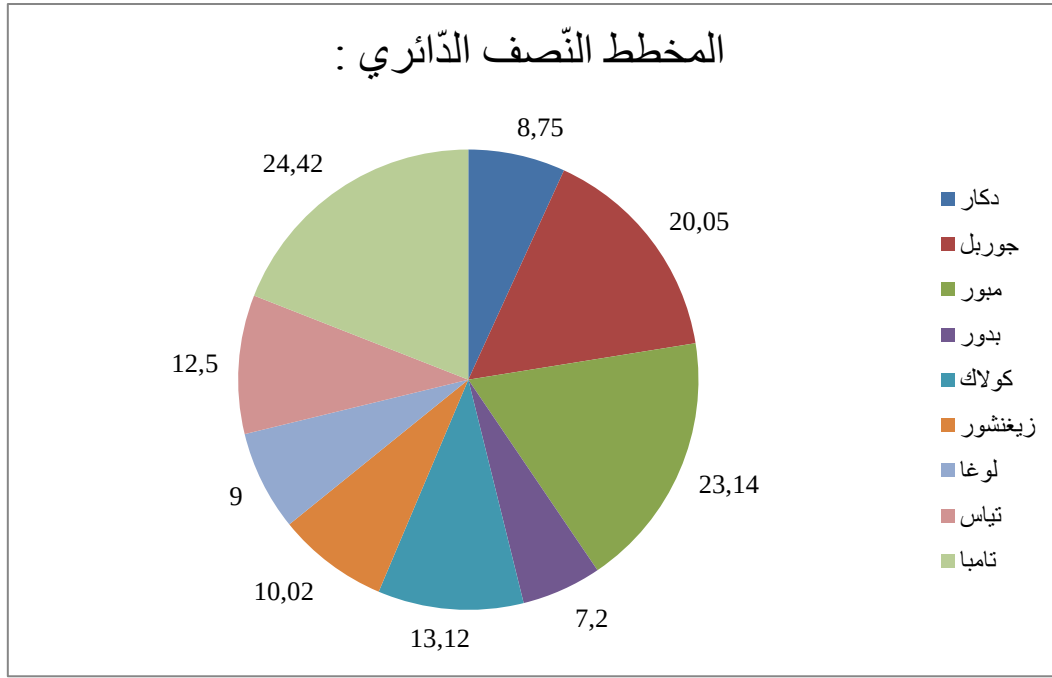
تحديد الجدول الإحصائي :

الميزة س	الخصيصك	الخصيص المتراكم	التردد :	التردد المتراكم
تياس	95	95	$\frac{95}{700} \approx 0,135$	$\frac{95}{700} \approx 0,135$
زيغنشور	34	129	$\frac{34}{700} \approx 0,048$	$\frac{129}{700} \approx 0,184$

$\frac{167}{700} \approx 0,238$	$\frac{38}{700} \approx 0,054$	167	38	بدور
$\frac{206}{700} \approx 0,294$	$\frac{39}{700} \approx 0,055$	206	39	جوربل
$\frac{257}{700} \approx 0,367$	$\frac{51}{700} \approx 0,072$	257	51	دكار
$\frac{285}{700} \approx 0,407$	$\frac{28}{700} \approx 0,040$	285	28	كولاك
$\frac{375}{700} \approx 0,535$	$\frac{90}{700} \approx 0,128$	375	90	تامبا
$\frac{453}{700} \approx 0,647$	$\frac{78}{700} \approx 0,111$	453	78	لوعا
$\frac{487}{700} \approx 0,695$	$\frac{34}{700} \approx 0,048$	487	34	بوت
$\frac{520}{700} \approx 0,742$	$\frac{33}{700} \approx 0,047$	520	33	امبور
$\frac{565}{700} \approx 0,807$	$\frac{45}{700} \approx 0,064$	565	45	خومبل
$\frac{580}{700} \approx 0,828$	$\frac{15}{700} \approx 0,021$	580	15	كيمير
$\frac{700}{700}=1$	$\frac{120}{700} \approx 0,171$	700	120	سيجو

مخطط الأشرطة :

سيجو : 120
تياس : 95
تامبا : 90
لوغا : 78
دكار : 51
خومبل : 45
جوربل : 39
بدور : 38
بوت : 34
زيغنشور : 34
امبور : 33
كولاك : 28
كبير : 15



الزاوية المخصصة : نحصل عليه بالطريقة التالية

$$(1) \quad 180^\circ \times \frac{\text{الحصيص}}{\text{مجموع الحصيص المتراكم}}$$

$$(2) \quad \text{أو يساوي : التردد} \times 180^\circ$$

النسبة المئوية : نحصل عليها:

$$100 \times \frac{\text{الحصيص}}{\text{الحصيص المتراكم}}$$

III - مصطلحات عامة

السّاكنة الإحصائية - الحصيص - التردد :

1. السّاكنة الإحصائية :

السّاكنة الإحصائية هي مجموعة العناصر التي تقام عليها الدّراسة ونحصل من خلالها على معلومات حول خاصية معينة ويسمى كل عنصر من هذه المجموعة فرداً. أمثلة:

أ) سكان مدينة تلاميذ مدينة.

ب) الإنتاج السنوي لمصنع المنتجات الزراعية.

ج) نسب التمدريس في التعليم الثانوي العربي الإسلامي.

2 - الميزة:

من أجل ساكنة ما يمكن دراسة عدة متغيرات (خواص) على أفراد نفس الساكنة.

أمثلة:

أ) بالنسبة للإنتاج السنوي لمصنع المنتجات الزراعية يمكن دراسة ميزة كمية (

قدرة المنتجات أو ثمنها) كما يمكن دراسة ميزة كمية (حجم المنتجات أو نوعيتها)

ب) إذا أخذنا الجمع الإحصائي: تلاميذ الخوامس الأدبية يمكننا دراسة عدة ميزات:

درجات التلاميذ في الفصل الأول (كمية). - قائمة التلاميذ (ميزة كمية) - ألوان

دفاتر التلاميذ (ميزة كمية).

3 - الحصيص — المتسلسلة الإحصائية — التردد:

أ) الحصيص و المتسلسلة الإحصائية:

على ساكنة إحصائية نقوم بدراسة ميزة كمية.

لتكن $s_1, s_2, \dots, s_n$ القيم المختلفة لهذه الميزة ($s_1, s_2, \dots$) نسمى
الخصيص عدد تكرار القيمة s_1 مجموعة الأزواج (s, k) تكون ما يسمى
بمتسلسلة إحصائية وتمثل بالجدول التالي:

القيمة	s_1	s_2	...	s_n
الخصيص	k_1	k	...	k_n

نسمى الخصيص الكلي s مجموعة كل الخصائص k :

$$s = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

نسمى الخصيص المتراكم المتزايد $s_{\nearrow}$ العدد:

$$s_{\nearrow} = \sum_{v=1}^k k_v = k_1 + k_2 + \dots + k_k.$$

نسمى الخصيص المتراكم المتناقص $s_{\searrow}$ المجموع:

$$s_{\searrow} = \sum_{v=1}^k k_v = k_1 + k_2 + \dots + k_k.$$

ب) التردد: التردد المتراكم:

نسمة التردد النسبة : $\frac{ك}{ع}$

نسمة التردد المتراكم المتزايد النسبة : $\frac{\text{الحصص الكلي س} \uparrow}{ع}$

(س، تر↗) تسمى متسلسلة الترددات المتراكمة المتزايدة.

(س، تر↘) تسمى متسلسلة الترددات المتراكمة المتناقصة.

تر↘ وهو التردد المتراكم المتناقص : $\frac{\text{س} \searrow}{ع} = \text{تر} \searrow$

ج) الصنف :

من خلال الوضعية 2 لاحظنا معا ضرورة تجميع القيم في أصناف سعتها أربع

سنتمرات من أجل الحصول على ساكنة إحصائية أسهل دراسة.

الفصل يكون على شكل مجال : $[p, b]$ سعة الصنف هي $p - b$

التمثيل البياني لمتسلسلة إحصائية

1. الميزة الكمية :

أ) المخطط العصوي

نحصل على المخطط العصوي برسم أعمدة في معلم (و،س،ص) تنطلق من القيم س ويتناسب طولها مع الحصيص ك.

مثال :

الوضعية رقم 1 (السؤال 1).

ب) مضلع الحصائص

نحصل على مضلع الحصائص بربط النقاط (س،ك) بخطوط مستقيمة.

مثال :

الوضعية رقم 1 (السؤال 2).

ج) مضلع الحصائص المتراكمة

نحصل على مضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة بربط (س،س) بخطوط مستقيمة.

نحصل على مضلع الحصائص المتراكمة المتناقصة بربط النقاط (س،س) بخطوط

مستقيمة.

مثال :

الوضعية 1 : (السؤال 2).

(د) مضلع الترددات

نحصل عليه بربط النقاط (س، تر) بخطوط مستقيمة.

مثال :

الوضعية 1 (السؤال 3).

(هـ) مضلع الترددات المتزايدة والمتناقصة

نحصل على مضلع الترددات المتراكمة المتزايدة بربط النقاط (س، تر↗) بخطوط مستقيمة.

نحصل على مضلع الترددات المتراكمة المتناقصة بربط النقاط (س، تر↘) بخطوط مستقيمة.

(و) مدرج الحصاص

نقوم برسمه لتمثيل سلسلة إحصائية متصلة وهو عبارة عن مستطيلات قاعدتها تساوي سعة الصنف وطولها يناسب الحصيص.

ملاحظة :

في حالة المتسلسلة المتصلة فإنه يتم رسم مضلع الحصاص والترددات بنفس الطريقة

السابقة باعتبار القيم س منتصف الصنف : [٢، ب] ، $s = \frac{p+b}{2}$

2. الميزة الكيفية

أ) مخطط الأشرطة

نحصل عليه برسم مستطيلات متناسبة مع الحصص ك

مثال :

الوضعية 3 (السؤال 2).

ب) المخطط النصف الدائري

نحصل عليه بتقسيم نصف دائرة إلى قطع زاوية متناسبة مع الحصص ك

مثال :

الوضعية 3 (السؤال 3).

ج) معايير الوضع

1. المنوال :

أ) تعريف :

القيمة التي تملك أكبر حصص لهذه الميزة.

ب) مثال :

الوضعية 1 السؤال 4.

ملاحظات :

1- في حالة متسلسلة متصلة نتكلم عن الصنف المنوالي وهو الصنف المقابل لأكبر حصيص.

(2) يمكن الحصول على عدة منوالات للمتسلسلة الإحصائية الواحدة.

2. الوسط :

أ) تعريف : الوسط هو العدد الذي ينتج من حاصل مجموع القيم على عددها وإذا رمزناه بالحرف (و)

$$\bar{w} = \frac{\sum_{v=1}^n x_v}{n} = \frac{\sum_{v=1}^n x_v}{\sum_{v=1}^n 1} = \frac{1}{n} = \bar{w}$$

ب) مثال :

وضعية 1 (السؤال 4).

ج) خواص الوسط

*ليكن S الحصيد الكلي :

*يقي الوسط ثابتا إذا قمنا بتغيير ترتيب القيم S .

و كما يقي ثابتا إذا ضربنا الحصائص ك بنفس العدد (لا صفري).

* إذا جزأنا الساكنة إلى متسلسلتين احصائيتين بحيث :

و¹ هو وسط الساكنة التي حصيصها الكلي هو S_1 .

و² هو وسط الساكنة التي حصيصها الكلي هو S_2 .

ولتكن و³ وسط المتسلسلة الحسائية الأصلية

$$و^3 = \frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_2}$$

ونستعين بهذه الخاصية من أجل تبسيط حساب الوسط وذلك عندما تكون القيم

كبيرة جدا.

3.الموسط

نسمى موسط متسلسلة إحصائية قيم ميزتها مرتبة كل عدد حقيقي H بحيث أن

حصيص القيم التي أقل تماما من H وحصيص القيم التي أكبر تماما من H لا يتجاوز

أيا منهما نصف الحصيص الكلي س⁻، وبتعريف آخر: هي القيمة التي يتوسط المتسلسلة الإحصائية بعد ترتيبها تنازليا أو تصاعديا.

طرق عملية لحساب المتوسط

(أ) في حالة الميزة المتقطعة :

$$* \text{ع فردي : ح هي القيمة المقابلة لـ } \frac{1+\text{ع}}{2} = \frac{\text{عدد العناصر} + 1}{2}$$

$$\therefore 3 = \frac{1+}{2} \therefore \boxed{6} = \text{الموسط}$$

مثال 1:

12، 9، $\boxed{6}$ ، 4، 4

مثال 2:

8، 7، $\boxed{7}$ ، 7، 7، الموسط = 7 .

$$* \text{ع زوجي : ح توجد بين القيمة التي تقابل } \frac{\text{ع}}{2} \text{ والقيم التي تقابل } 1 + \frac{\text{ع}}{2} .$$

مثال :

15، 12، 9، 6، 5، 4 .

قإن كل قيمة من المجال [6،9] هي موسط وفي الغالب نقول إن:

$$\text{الموسط} = \frac{9+6}{2} = 7,5 .$$

(ب) في حالة القيم مجمعة في أصناف (ميزة متصلة) :

نستعمل في هذه الحالة الخصائص المتراكمة (مثلا الخصائص المتزايدة).

مثال :

لدينا مجموعة من التلاميذ تتراوح أعمارهم ما بين ثمان سنوات وستة عشر سنة كما يوضح الجدول التالي توزيعهم حسب أربعة فصول سعة الواحد سنتين:

$b_i] \cdot [a_i$	8. 10][	10. 12][	12. 14][	14. 16][
	16	20	14	6
	9	11	13	51

ك : الحصيـص.

كز : مركز الفصل.

$$\text{كز} = \frac{p + b + ج}{2}$$

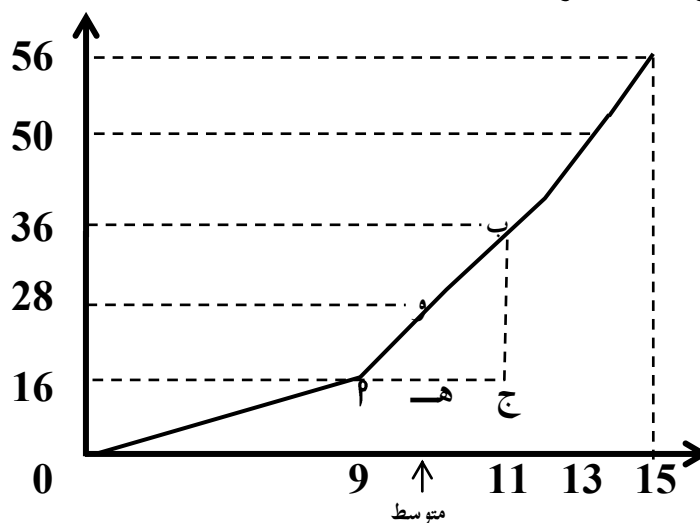
الحصيـص الكلي سـ يساوي 56 $\frac{ع}{2} = 28$.

$$س = 56 \Leftrightarrow \frac{ع}{2} = 28$$

الموسط يحقق :

28 تلميذا تزيد أعمارهم على ح سنة و 28 تلميذا تقل أعمارهم عن ح سنة.

مضلع الخصائص المتراكمة المتزايدة :



إذا افترضنا أن مضلع الحصاص المتراكمة يتشكل من قطع مستقيمة فإنه يمكن تطبيق مبرهنة طاليس.

$$10,2 = \frac{24}{20} + 9 = \text{موسط} \therefore \frac{16-28}{16-36} = \frac{9-\text{موسط}}{9-11} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{هـ ۲}}{\text{ب ۲}}$$

إذن المتوسط يساوي 10 سنوات وشهرين و 12 يوما.

تطبيق :

في المتسلسلة الإحصائية السابقة نقوم بتجميع قيمها في أصناف سعتها أربعة سنوات.
اتباع الخطوات السابقة لحساب المتوسط. ماذا تلاحظ ؟

(د) معاییر التشت :

ويعني الاختلاف والتباين بين مفردات المجتمع الإحصائي الواحد

1. وضعية:

نعتبر متسلسلة النقاط التالية لساكنة تتألف من 17 نتيجة لمجموعة الطلاب.

المتسلسلة م :

. 14 13 13 12 12 12 11 11 11 11 11 10 10 10 9 9 8

المتسلسلة ب :

. 20 17 17 15 14 14 12 11 11 11 10 8 8 7 5 5 2

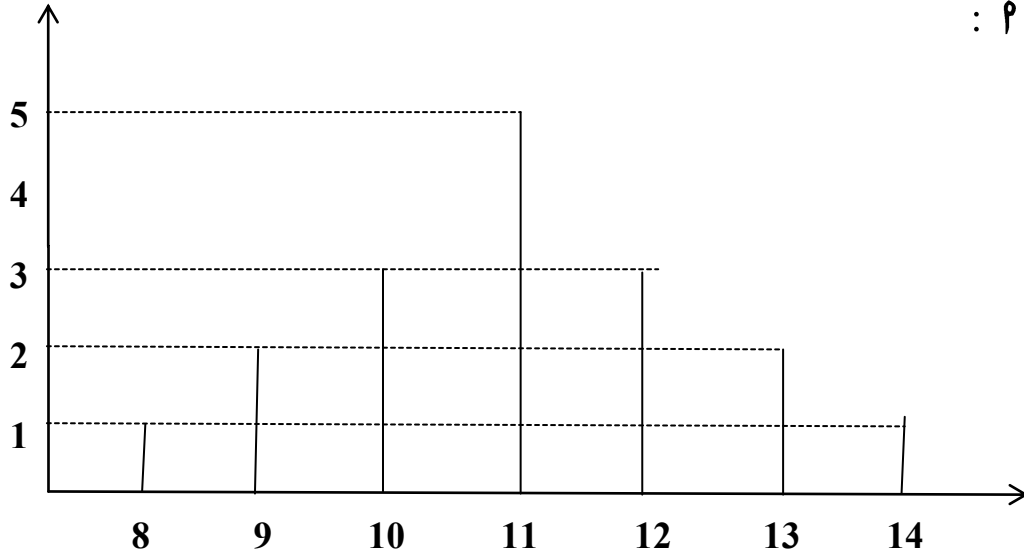
1) مثل بيانها تين المتسلسلتين ٢ و ب.

2) حدد الإنفراج المتوسط والمغايرة والإنفراج الطرازي.

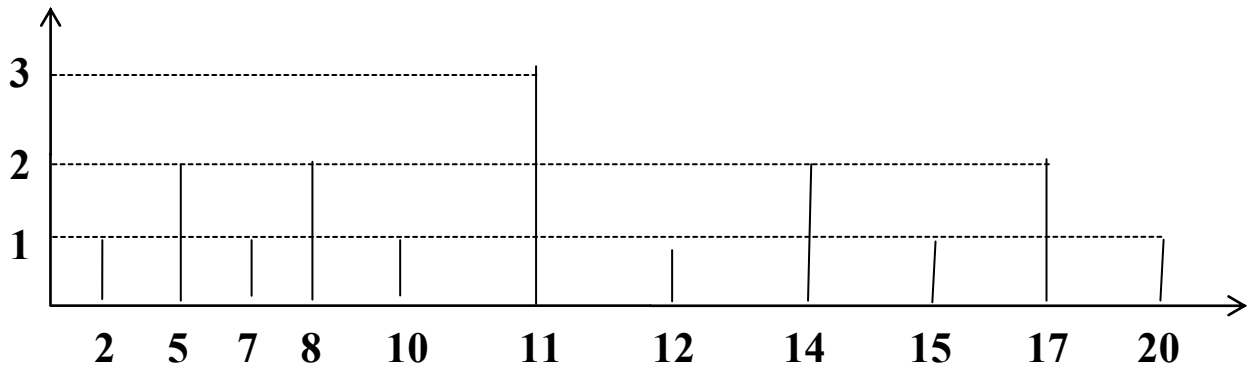
3) قارن تشتت المتسلسلتين.

الحل:

تمثيل ٢ :



تمثيل ب :



المتسلسلة ٢ :

لنكمل الجدول :

ف (الفئة)	8	9	10	11	12	13	14
ك (التكرار)	1	2	3	5	3	2	1

ولنحسب الوسط :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \times x_k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{17} (8 \times 1 + 2 \times 9 + 3 \times 10 + 5 \times 11 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 1 \times 14)$$

$$\bar{x} = \frac{187}{17} = 11$$

بمقارنة قيم هذه المتسلسلة بالوسط $\bar{x}$ نحصل على متسلسلة جديدة تعبر عن مدى انفراج هذه القيم مع الوسط $\bar{x}$.

تعبّر هذه المتسلسلة عن تشتت القيم f حول الوسط $\bar{x}$ حسب الجدول التالي:

س - $\bar{x}$ = التشتت	3=8-11	2=9-11	1=10-11	0=11-11
1^2	2=1+1	4=2+2	3+3=6	5
(س - $\bar{x}$) ²	0 ²	1 ²	2 ²	3 ²

9	4	1	0 (س - $\bar{x}$) ²	⇐
---	---	---	---------------------------------	---

لنحسب معدل هذه المتسلسلة:

$$\text{مع} = \sum_{\substack{ك=1 \\ ه=1}}^{\text{ن}} \frac{1}{ع} \quad | \text{و} - \text{س} | , \text{ حيث أن (ن) هو عدد عناصر الساكنة الإحصائية}$$

$$\text{مع} = \frac{1}{17} = (5 \times 0) + (1 \times 6) + (2 \times 4) + (3 \times 2)$$

$$0,06 \approx \frac{20}{17} = (20) \frac{1}{17} = (6+8+6+0) \frac{1}{17}$$

يمثل هذه القيمة ما يسمى بالانفراج المتوسط وهو س الخ

يسمى هذا المقدار الانفراج المتوسط وهو من أهم معايير التشتت بالنسبة لكل

متسلسلة، كل ما كان هذا المقدار صغيرا كلما كان التشتت خفيفا.

هكذا نسمى المغايرة المقدار [التالي:

$$I = \sum_{\substack{ك=1 \\ ه=1}}^{\text{ن}} \frac{1}{ع} (س - و)^2$$

$$\text{بالتطبيق: } \frac{1}{ع} [6 \times 1 + 4 \times 4 + 2 \times 9]$$

$$2,35 = 40 \times \frac{1}{17} =$$

$$\sum_{\substack{ن \\ و \\ س \\ هـ}} \frac{1}{ع} = \text{مع} \therefore$$

$$1 = \text{هـ}$$

المتسلسلة ب:

و	2	5	7	8	10	11	12	14	15	17	20
ك	1	2	1	2	1	3	1	2	1	2	1

$$5+1 \times 7+2 \times 8+1 \times 10+3 \times 11+1 \times 12+2 \times 14+1 \times 15+2 \times 17+1 \times 20)$$

$$\frac{1}{17} \cdot \text{س} = (1 \times 2 + 2 \times$$

$$\frac{1}{17} \cdot \text{س} = (2 + 10 + 7 + 16 + 10 + 33 + 12 + 28 + 15 + 34 + 20)$$

$$\text{س} \leq \frac{18}{17} \Rightarrow \text{س} = 11$$

بنفس الطريقة السابقة نحصل على الجدول التالي:

$ و - س = \text{تشتت}$	0	1	3	4	6	7
س^2	0	1	9	16	36	81
ك	3	2	4	2	4	2

نحسب وسط هذه المتسلسلة (2) :

$$\frac{1}{17} = 1 \text{ و } [0 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 4 + 9 \times 2]$$

$$3,76 = 1 \text{ و } \Leftrightarrow \frac{64}{17} = 1 \text{ و}$$

المغايرة غ:

$$\frac{1}{\text{ع}} = \text{غ} \text{ ك (و-س) }^2$$

$$\frac{1}{17} = \text{غ} [3 \times 0 + 2 \times 1 + 4 \times 9 + 2 \times 16 + 4 \times 36 + 2 \times 81]$$

$$\frac{376}{17} = \text{غ} \Leftrightarrow \frac{1}{17} = \text{غ}$$

الإنفراج الطراز هو الجذر التربيعي للمغايرة غ :

إذن :

$$\text{في الحالة ٢ : } \sqrt{2,35} = 1,53 = \text{الإنفراج الطرازي}$$

$$\text{في الحالة ب : } \sqrt{22,11} = 4,7 = \text{الإنفراج الطرازي}$$

(3) المتسلسلة ب أكثر تشتتا من المتسلسلة ٢ لأنها تملك انفراجا طرازيا أكبر وهذا

متوقع لأنه كلما تباعدت القيم عن الوسط كبرت المقادير (و-س)² وبالتالي ترتفع

المغايرة والإنفراج الطرازي.

2. الإنفراج المتوسط المطلق :

أ) تعريف :

الإنفراج المتوسط المطلق هو وسط المتسلسلة ونرمز بـ: ط

$$\begin{aligned} & \text{ن} \\ & \text{ط} = \frac{1}{\text{ع}} \quad (\text{ك} - \text{و} - \text{س}) \quad 1 \leq \text{و} \leq \text{ع} \\ & \text{هـ} = 1 \end{aligned}$$

(حيث و هو عدد عناصر الساكنة).

ب) مثال :

في المتسلسلة ب المعرفة في الوضعية السابقة حصلنا على الإنفراج المتوسط المطلق

وهو : ط = 0,06

3. المغايرة :

أ) تعريف :

المغايرة هي وسط المتسلسلة (ك، |و-س|²) ونرمز له ب : غ

$$\begin{aligned} & \text{ن} \\ & \text{غ} = \frac{1}{\text{ع}} \quad \left(\begin{array}{c} \text{ك} \\ \text{هـ} = 1 \end{array} \right) \quad (\text{و} - \text{س}) \end{aligned}$$

(ب) مثال :

في نفس الوضعية (الجزء ٢). وجدنا أن $غ = 2,35$

(د) ملاحظات هامة :

*ملاحظة 1 : المغايرة غ عدد موجب دائما ($غ \geq 0$)

ملاحظة 2: لدينا :

$$غ = \frac{1}{ع} \left(\sum_{ه=1}^ن ك (و - س)^2 \right)$$

$$غ = \frac{1}{ع} \left(\sum_{ه=1}^ن ك (و^2 - 2 و س + س^2) \right)$$

$$غ = \frac{1}{ع} \left(\sum_{ه=1}^ن ك و^2 \right) - \frac{2}{ع} (و ك) + \frac{ع}{ع} س^2$$

$$غ = \frac{1}{ع} \left(\sum_{ه=1}^ن ك و^2 \right) - 2 س^2 + 2 س^2 - \left(\sum_{ه=1}^ن ك و^2 \right) \frac{1}{ع}$$

$$غ = \left(\sum_{h=1}^n \frac{1}{k_v^2} \right) - س^2$$

إذن المغايرة تساوي وسط المتسلسلة (و ، ل) ناقص مربع الوسط.

* الملاحظة 3 :

إذا درسنا مثلاً ميزة القامة بالسنتيمتر لأفراد ساكنة إحصائية ما فإن المغايرة يعبر عنها بالسنتيمتر المربع وهذا لا يفيد من الناحية العملية وعليه فإننا نلجأ إلى حساب الجذر

$$\sqrt{غ} = \text{التربيعي للمغايرة : الإنفراج}$$

3. الإنفراج الطرازي :

أ) تعريف :

الإنفراج الطرازي هو الجذر التربيعي للمغايرة غ.

ب) مثال :

في الوضعية السابقة (الجزء ٢) : الإنفراج الطرازي = 1,53

استخدام الآلة الحاسبة لحساب الإنفراج الطرازي

وبرنامج حساب الوسط والإنفراج الطرازي على آلة الحاسبة TI-62.

نذكر أن :

$$\text{الإنفراج الطرازي} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{h=1}^n \left(\frac{v_h}{h} \right)^2 \right)}$$

$$\sum_{h=1}^n \frac{v_h}{h} = \text{س}^2$$

*الذاكرات المستخدمة :

- الذاكرة 0 لمجموع القيم.

- الذاكرة 1 لمجموع مربعات $\sum x_i^2$.

- الذاكرة 2 للحصيص الكلي N.

* البرمج الجزئية :

- برنامج جزئي أول لإدخال القيم x_i ومربعاتها x_i^2 والحصيص الكلي.

- برنامج جزئي ثاني لحساب الوسط.

- برنامج جزئي ثالث لحساب الانحراف المعياري.

←	2 nd CM	تفريغ الذاكرات.
←	LRN	الدخول في النمط البرمجي.
←	2 nd CM	محو البرامج السابقة.
←	LBL0	افتتاح برنامج جزئي جديد.
←	R/S	إدخال القيم X_i .
←	ST0 + 0	إضافة X_i إلى محتوى الذاكرة 0.
←	x^2	تربيع X_i .
←	STO + 1	إضافة x_i^2 إلى محتوى الذاكرة 1
←	1	استعراض محتوى الذاكرة 1.
←	ST0 + 2	إضافته إلى محتوى الذاكرة 2.
←	RCL	استخراج محتوى الذاكرة 2.
←	Go To 0	عودة إلى بداية البرنامج الجزئي الأول.
←	LBL ₂	افتتاح برنامج جزئي ثاني.
←	RCL 0	استخراج محتوى الذاكرة 0.

←	قسمة على .	÷
←	استخراج محتوى الذاكرة 2 .	RCL ₂
←	استعراض النتيجة .	=
←	اختتام البرنامج الجزئي الثاني .	R/S
←	افتتاح برنامج جزئي ثالث.	LBL ₂
←	استعراض محتوى الذاكرة 1.	RCL2
←	قسمة على .	÷
←	استعراض محتوى الذاكرة 2.	RCL2
←	طرح ما يلي.	—
←	فتح قوس .	(
←	استعراض محتوى الذاكرة 0.	RCLo
←	قسمة على .	÷
←	استعراض محتوى الذاكرة 2.	RCL2
←	إغلا القوس .	)
←	تربيع ما بين قوسين.	2 nd X ²
←	استعراض الناتج.	=

$\sqrt{x}$ ← استخراج جذره.
 = ← استعراض الناتج النهائي.
 R/S ← اختتام البرنامج الجزئي الثالث.
 RST ← الرجوع إلى بداية البرنامج.
 LRN ← الخروج من النمط البرمجي.

للتنفيذ :

RST ← وضع في بداية البرنامج.
 R/S ← بإدخال القيم.

نطبق هذا البرنامج على المتسلسلة A في الوضعية 1 السابقة لحساب الوسط،
والإنفراج الطرازي.

10 R/S 10 R/S 10 R/S 9 R/S 9 R/S 8
 R/S 12 R/S 12 R/S 11 R/S 11 R/S 11 R/S 11
 R/S 14 R/S 13 R/S 13 R/S 12

نقرأ على الشاشة الحصيص الكلي : 17

لحساب الوسط $\bar{x}$:

Go To 1 ← العودة إلى البرنامج الجزئي الثاني.

R/S ← طلب قيمة الوسط : 11 = .

لحساب الانفراج الطرازي σ نضغط على R/S (أو وضع R/S Go T2) نجد : σ .

IV- تمارين

تمرين 1 :

أنجز تلاميذ الثالث (1) والثالثة (2) اختبار في الرياضيات.

ولكي يقارن الأستاذ بين مستوى القسمين صنف التلاميذ حسب النقط التي حصلوا

عليها. فكانت نتائج الثالثة (1) وفق ما هو مبين في الجدول التالي :

النقط	3	5	7	8	10	12	15	18
عدد التلاميذ	2	6	8	14	4	3	2	1

وكانت نتائج الثالثة (2) وفق ما هو مبين في الجدول التالي :

النقط	3	5	7	8	10	12	15	18
عدد التلاميذ	3	8	6	10	8	1	1	2

(1) كم عدد التلاميذ في كل قسم ؟

(2) ما وسط النقط في كل قسم ؟

(3) أحسب ترددات الميزة في كل جدول.

- 4) أنشئ مضع الحصائص في كل جدول وذلك بالنسبة لنفس الأستاذ.
- 5) أنشئ مضع الترددات في كل جدول وذلك بالنسبة لنفس الأستاذ.
- 6) ما هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين حصلوا على نقطة تفوق 10 في كل من القسمين؟ أي القسمين يملك مستوى أحسن؟
- تمرين 2 :

يقوم معمل بتلفيف التفاح قصد بيعه وقبل ذلك يصنف التفاح حسب قطره مستعملا المقاييس التالية:

80 مم 75 مم 70 مم 65 مم 60 مم 50 مم

وكانت أقطار التفاح بالمليمتر كما يلي:

69 61 64 58 50 57 68 78 62 79 76 56 52

68 66 62 57 72 72 61 63 73 63 56 74 71

83 77 63 49 82 77 51 66 78 67 61 59 79

72 77 66 64 72 57 87 67 50 61 58

1) كم هي الأقطار التي يقل قياسها عن 55 مم؟

كم هي الأقطار التي يفوق قياسها 80 مم؟

2) رتب هذه المقاييس تصاعديا.

أتمم الجدول التالي :

القطر	50 ≤ ... ≤ 55	55 ≤ ... ≤ 60	60 ≤ ... ≤ 65	65 ≤ ... ≤ 70	70 ≤ ... ≤ 75	75 ≤ ... ≤ 80	80 ≤ ... ≤ 85
الخصيص							
الترددات							

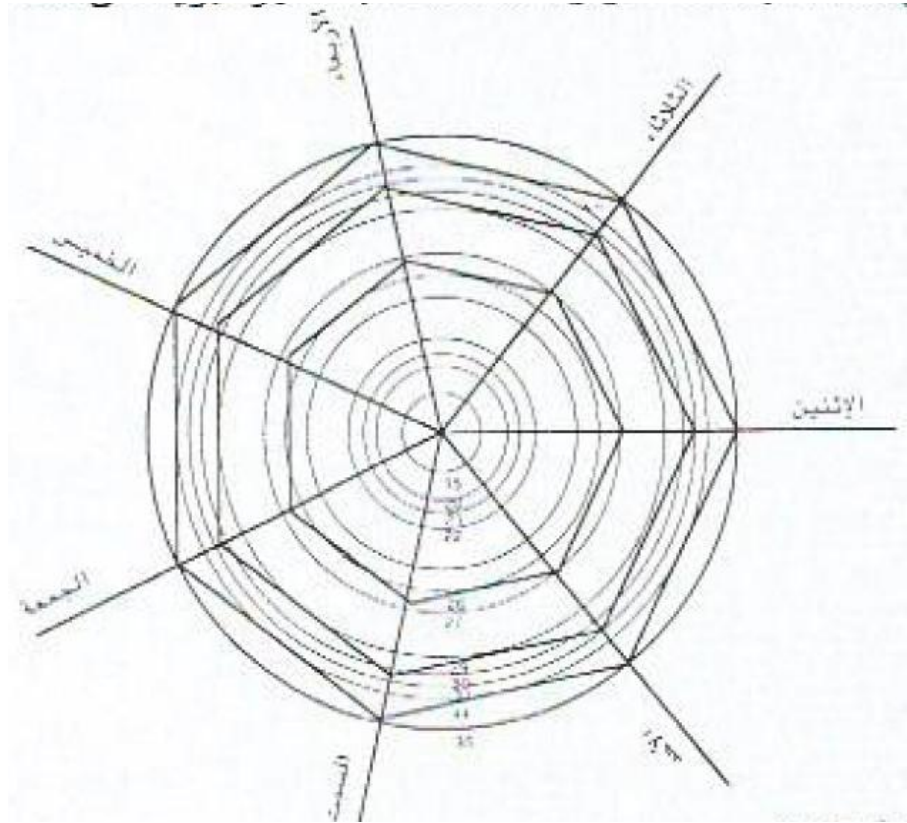
أ) أنشئ مدرج الخصائص ومدرج الترددات.

ب) احسب وسط الأقطار.

ج) أنشئ مضلع الخصائص ومضلع الترددات.

تمرين 3:

هذا مبيان قطبي يمثل درجات الحرارة المسجلة طيلة شهر أبريل من سنة 1986.



أجب على الأسئلة التالية:

أ) ما هي الأيام التي سجلت فيها نفس درجة الحرارة؟

ب) كم مرة سجلت الدرجة 25؟

2) رتب درجات الحرارة المسجلة ثم أتمم الجدول التالي:

الدرجة	عدد الأيام

تمرين 4:

مسابقة تتضمن ثلاثة مواد: اللغة العربية (عاملها 3) الفرنسية (عاملها 2) والرياضيات (عاملها 2).

حصلت مجموعة من خمسة مترشحين على النتائج التالية:

رقم المرشح	1	2	3	4	5
الدرجة في العربية	12	8	9	10	10
الدرجة في الرياضيات	15	9	12	9	7
الدرجة في الفرنسية	11	6	10	14	6

احسب بطريقتين مختلفتين المعدل العام لهذه المجموعة.

تمرين 5:

بعد إجراء دراسة على 72 شخصا تم الكشف عن الأسنان السليمة لدى كل شخص

حسب الجدول التالي:

24	27	27	30	22	24	24	22	32	27	24	17	29	27	24
	21	27	22	29	24	29	27	22	29	24	27	22	27	29
24	27	22	27	24	22	22	24	27	30	21	22	22	24	29
	22	29	24	27	29	30	24	22	27	30	22	24	27	27
	27	22	30	24	27	29	27	24	29	29	17	27	24	27

1. اعط الجدول الإحصائي (الحصيص - التردد - التردد المتراكم).

2. ارسم المخطط العنوي.

3. حدد بالنسبة المئوية التي لديها على الأقل 27 من سليمة.

تمرين 6

جدول تبين التزامات السنغال في الإحصاءات الجمركية (مصادر الإدارة العامة للجمارك)

الفئة	الرسوم الجمركية	الحصيص	الرسوم والضرائب الأخرى الحصيص
الحبوب	30	2	150
الدهون	30	4	150
السكر	30	3	150
منتجات حيوانية	30	5	150
النسيج	30	6	150
الفواكه والخضروات	30	8	150

1) أعط الجدول الإحصائي (الحصيص - التردد - التردد المتراكم).

2) أرسم المخطط العنوي والمخطط القطبي.

3) أوجد المتوسط والوسط لكل متسلسلة إحصائية

4) أوجد التشتت بين المتسلسلتين الرسوم الجمركية والضرائب الأخرى.

5) أوجد الإنفراج المتوسط

تمرين 7:

بفرض أن الجدول كشف لعدد الأيام المغبرة في مبور خلال السنوات العشرة الماضية:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
الأيام المغبرة	33	45	53	85	79	82	77	67	60	60

وتتوزع هذه الأيام على الأشهر حسب الجدول التالي :

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
عدد الأيام	02	03	08	05	10	12	14	09	09	10	09	08

1. ارسم المخطط العصوي والمخطط القطبي.

2. ما هي الأشهر المناسبة لزيارة مبور بالنسبة للسائح.

تمرين 8 :

نعطي المتسلسلة الإحصائية :

الفصل	الحصيص لـ	الحصيص المتراكم
[0, 20[	12	12
[20, 40[	21	33
[40, 60[	39	72
[60, 80[	12	84
[80, 100[	9	93
[100, 120[	7	100

1) مثل على التوالي.

أ) مدرج الحصائص.

ب) مضلع الحصائص.

ج) مضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة.

2) حدد الصّنف المنوالي والوسط.

3) احسب الوسط.

تمرين 8 :

الجدول التالي يمثل عدد نبضات القلب لثمانين شخصا في الدّقيقة.

87	66	71	76	91	79	71	68	72	81	76	86	73	78	72
72	74	79	67	67	77	81	79	83	68	73	71	69	94	83
76	93	69	82	74	71	67	84	72	84	66	87	76	77	94
72	73	78	92	71	84	73	73	81	79	83	72	73	88	89
88	82	74	86	79	74	88	77	78	71	74	86	74	82	72
73 87 69 91 68														

1) احسب وسط هذه المتسلسلة وكذلك مغايرتها.

2) احسب وسط ومغايرة المتسلسلة الناتجة عن تجميع المتسلسلة السّابقة إلى

أصناف سعتها (5) وحدات (نبضات).

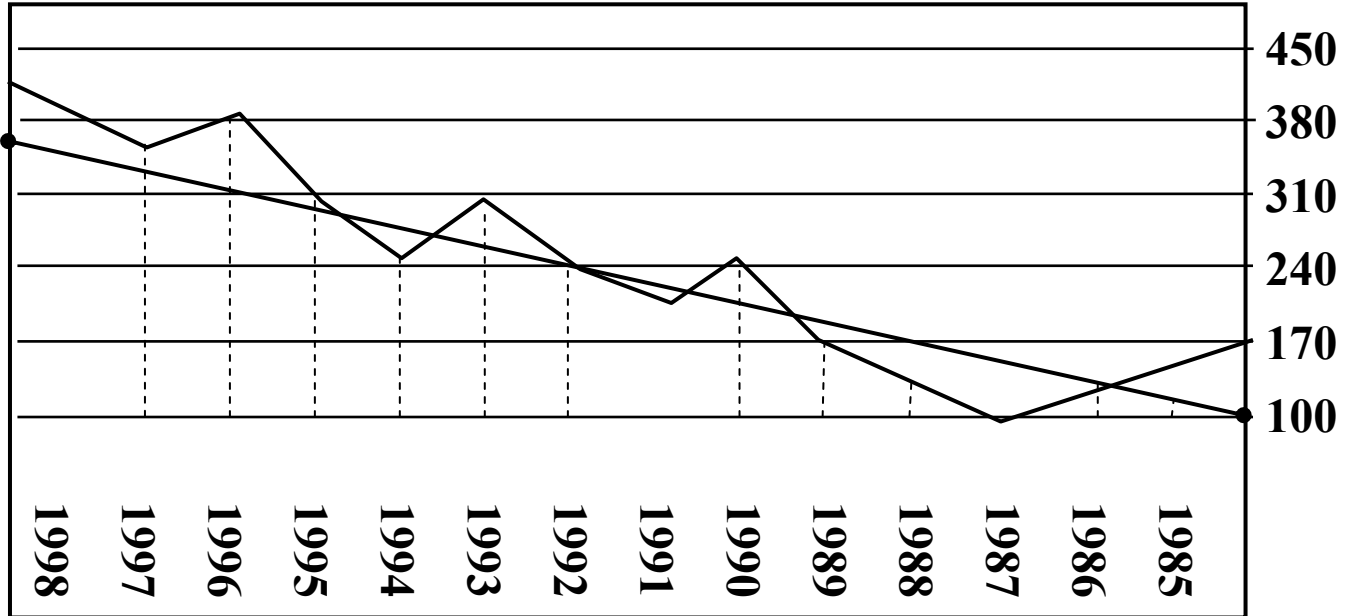
1) نفس السّؤال السّابق ولكن بعد تجميع المتسلسلة في أصناف سعتها (5)

وحدات.

2) قارن النتائج المحصل عليها في الحالتين.

تمرين 9 :

جدول الكمية الزراعية المستوردة إلى السنغال في هذه الأعوام

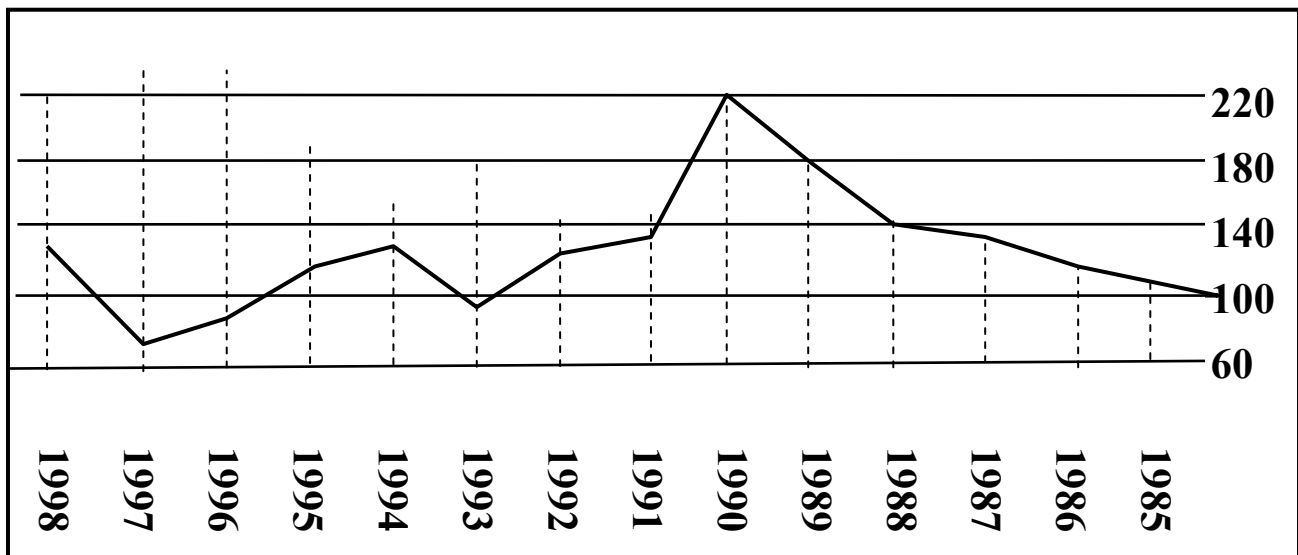


1) أوجد الوسط لهذه الكميات.

2) ما هو متوسط هذه المستوردات (السنة)

3) حدد السنوات التي انخفضت فيها المستوردات بالنسبة للسنة التي سبقتها.

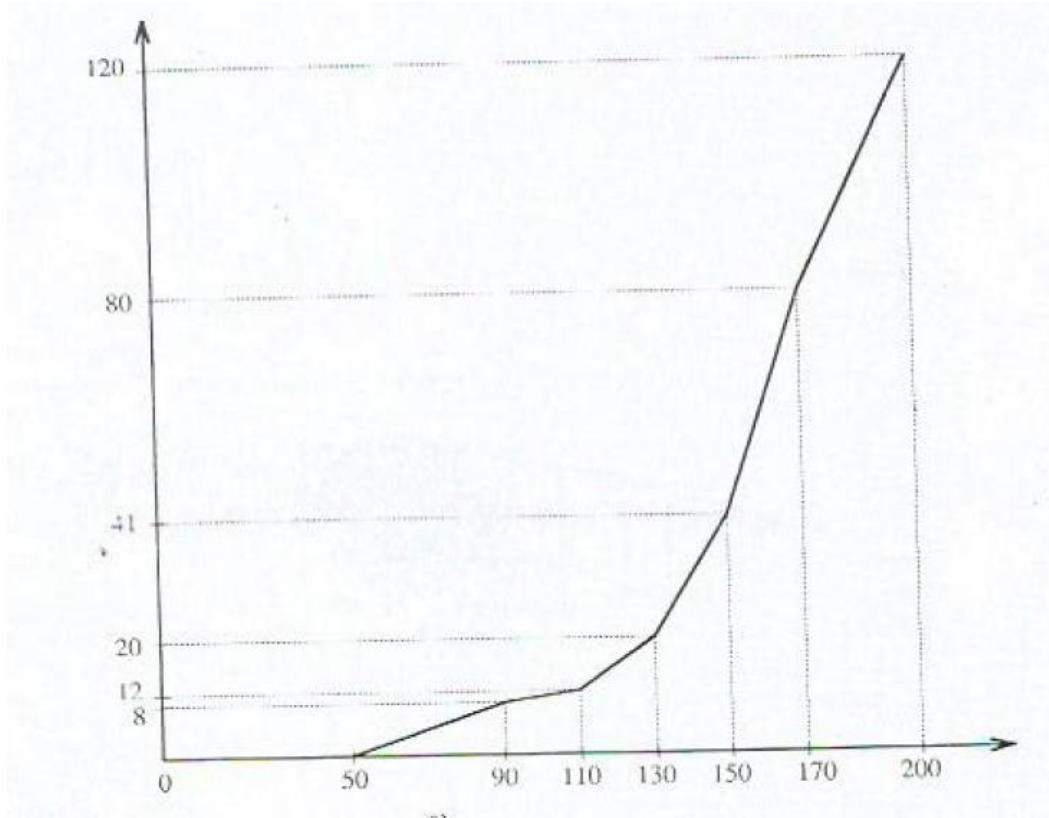
لجدول المنتوجات الزراعية المصدرة من السنغال في الأعوام نفسه



- 1) أوجد المنوال.
- 2) أوجد الوسط لهذه الكميات.
- 3) حدد السنوات الأقل تصديرا إلى الأعلى تصديرا.
- 4) أوجد الجدول التكراري (الخصائص) والخصائص المتراكمة والتردد.
- 5) أرسم مضع الخصائص، ومضع الخصائص المتراكمة ومضع الترددات.

تمرين 10

في نهاية العمل اليومي لاحظ الخازن في المخزن أن 120 أكياس الفستق التي أحيلى إليه يمثلها مضع الخصائص المتراكمة التالي :



حدد المتوسط لهذه المتسلسلة.

الفهرست

الصفحة	الموضوعات
1	مقدمة الكتاب
2	مفردات المقرر
4	المتابعات (المتواليات)
6	المتابعة الحسابية
10	الصورة العامة للمتتابعة الحسابية
16	مجموع المتواليات العددية
20	المتواليات الهندسية
26	الأوساط العددية
48	مبادئ الاحتمال
55	اللوغاريتمات
61	قوانين اللوغاريتمات
64	اللوغاريتمات المعتادة
74	الدالة
77	التفاضل
79	المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين
84	المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين
87	مشتقة دالة الدالة
98	المشتقة الأولى للدوال المثلثية
104	الإحصاء
121	التمثيل البياني لمتسلسلة إحصائية
137	استخدام الآلة الحاسبة لحساب الإنفراج الطرازي