Kounouz Education

4ème

Quatrième année de l'enseignement secondaire

BAC

Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

- Résumés de Cours
- Exercices

+ Corrigés Détaillés
de tous les exercices

Section

Mathématiques

كنوز للنشر والتوزيع
KOUNOUZ EDITIONS

MATHÉMATIQUES

4éme Année

Section mathématiques

- ***Résumés***
- ***Exercices***
- ***Corrigé des exercices***

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur Principal
des écoles préparatoires et des lycées

Sami Ben Rhim
Professeur d'enseignement
Secondaire

Mohamed Ben Brahim
Professeur principal

Abdelbasset Laataoui
Professeur Principal

© Kounouz Editions

Adresse : 123, Avenue Habib Thameur

Nabeul – 8000 Tunisie

Tél : (+216) 72 223 822

Fax : (+216) 72 223 922

E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn

Site Web : www.Kounouz-Edition.com

©Copyright

Avant-propos

✦ Ce manuel est conçu dont :

- la simplicité d'utilisation favorise le travail en autonomie de l'élève.
- l'accessibilité tient compte des attentes diverses des élèves.
- la variété des situations et des exercices permet de développer les notions.

✦ Chaque chapitre se décompose de la façon suivante :

- un résumé du cours écrit dans un langage simple, suivi d'un exemple et / ou d'une méthode pour mettre en pratique la notion.
- Des exercices dans quatre rubriques :

  ✍ ***QCM*** : permet de vérifier l'acquisition des savoirs et la maîtrise des savoir- faire.

  ✍ ***Appliquer*** : l'élève dispose ainsi en vis à- vis d'outils favorisant l'acquisition des savoirs et des savoir- faire.

  ✍ ***S'entraîner et se perfectionner*** : offrent des exercices dans lesquels sont mis en œuvre les diverses notions du chapitre dans une démarche plus approfondie ou en les associant à d'autres notions abordés précédemment. Leur nombre et leur variété permettent de répondre aux différents besoins des élèves.

Les auteurs

ANALYSE

Continuité et limites

I) Résumé du cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I.

On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I et k un réel.

- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions f + g, fg, et kf sont continues en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.
- Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Si de plus f est positive sur I et si f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

A) Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*Forme indéterminée*

B) Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	*0*
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *Suivant les signes*	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *Suivant les signes*	*Forme indéterminée*

C) Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 Par valeurs supérieures	0 Par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

D) Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

E) Règles opératoires

- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation $y = L$ est ***asymptote horizontale*** à la courbe Cf en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est ***asymptote verticale*** à la courbe Cf .
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la courbe Cf en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors C_f admet une ***branche parabolique de direction (Oy)***. (type x^2).

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une ***branche parabolique de direction (Ox)***. (type $\sqrt{x}$).
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation y = a x + b est **asymptote oblique** à C en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors C_f admet une **branche parabolique de direction la droite**
- **d'équation y = ax** en $\pm\infty$.

Théorème :

☛ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence :

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur I} \\ g \text{ est continue sur J} \\ f(I) \subset J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème :

☛ Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c$.

Théorème :

☛ Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I.

Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim\limits_a h = \lim\limits_a g = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim\limits_a g = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

☛ Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

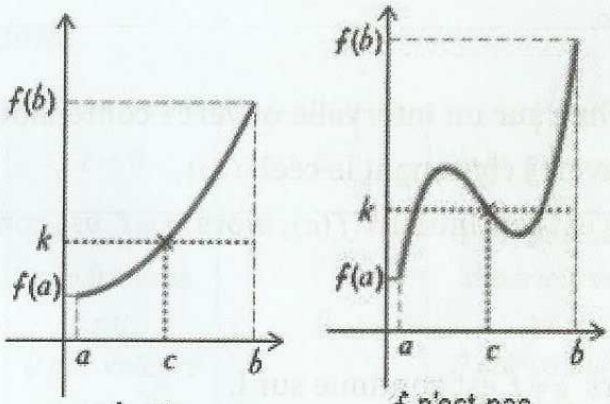
Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

On peut aussi l'exprimer sous la forme : L'équation $f(x)=k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

En particulier, si $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.

Si de plus f est <u>strictement monotone</u> sur I, alors <u>c est unique</u>.



Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$

Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

F) Cas des fonctions monotones :

Théorème :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).
  - Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
  - Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Théorème :

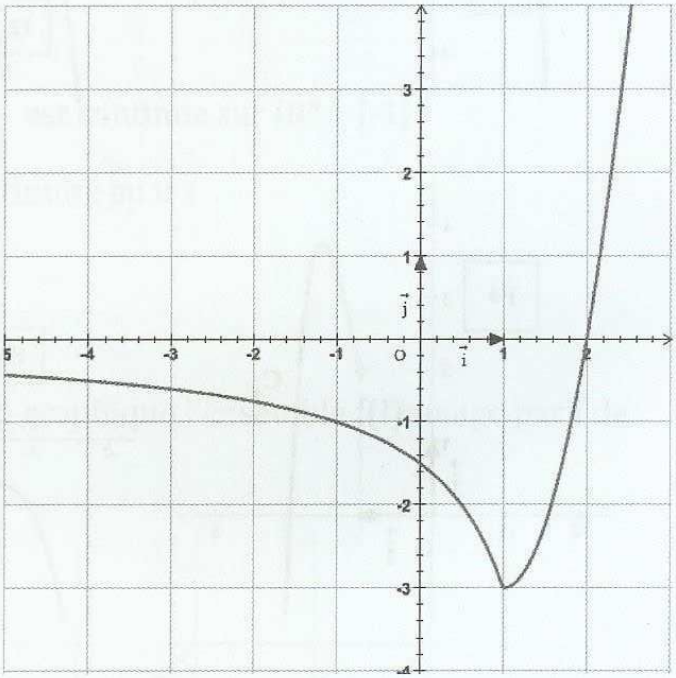
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples :

Intervalle I	*f est strictement croissante sur I*	*f est strictement décroissante sur I*
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,f(a)\right]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$

II) Exercices

1/ Q-C-M



La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR.

On note que (ζ_f) admet au voisinage de - ∞ une asymptote horizontale d'équation y = 0, et au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Pour chaque question indiquer la ou les réponses exactes :

1) Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \le h(x)$. On a alors :

a) $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$

b) $\lim\limits_{-\infty} h = 0$

c) $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

2) Soit $g = \dfrac{1}{f}$. On a alors :

a) g est définie sur IR* ; b) g est définie sur IR\{2} ; c) $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$; d) $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

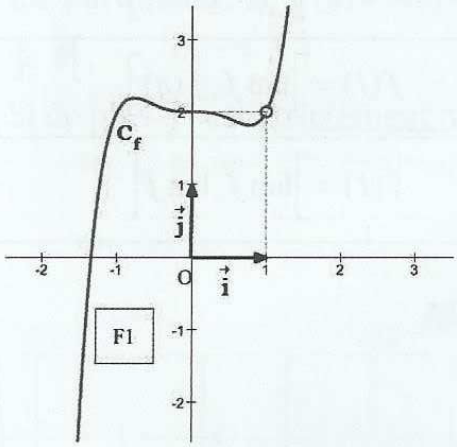
d) (ζ_g) admet une asymptote verticale.

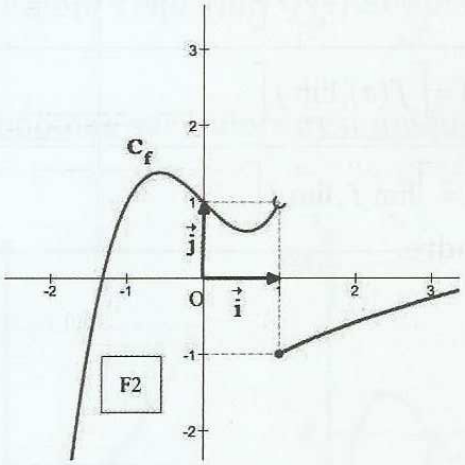
3) Soit k la fonction définie sur IR* par : $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors :

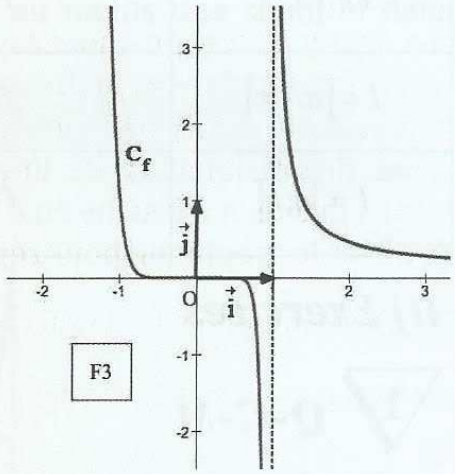
a) $\lim\limits_{+\infty} f\circ k = -3$; b) $\lim\limits_{+\infty} k\circ f = 1$; c) $\lim\limits_{-\infty} f\circ k = -3$; d) $\lim\limits_{0^+} f\circ k = +\infty$; e) $\lim\limits_{0^-} f\circ k = -\infty$

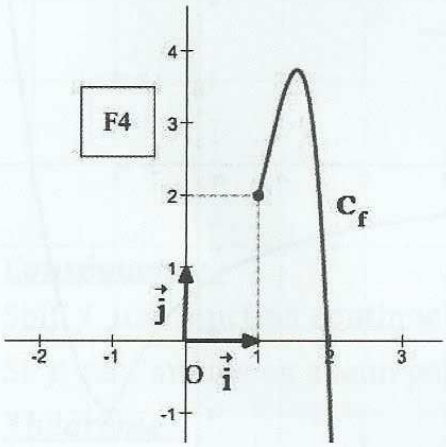
2/ Q-C-M

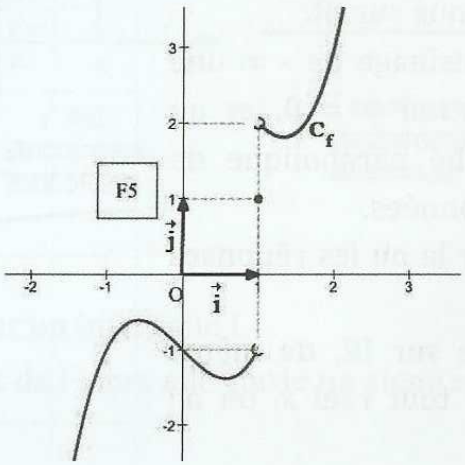
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. C_f est la représentation graphique d'une fonction f :

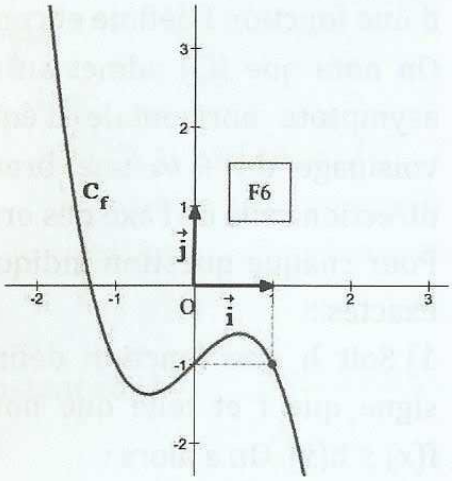


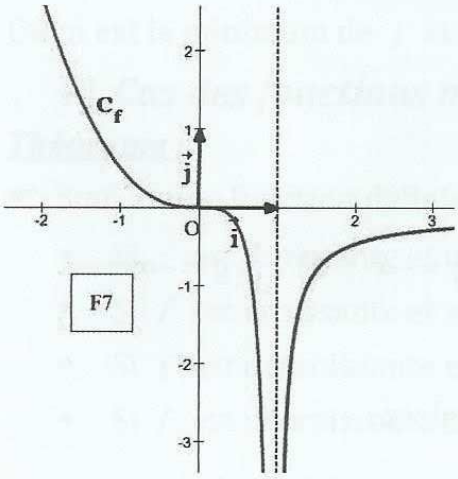


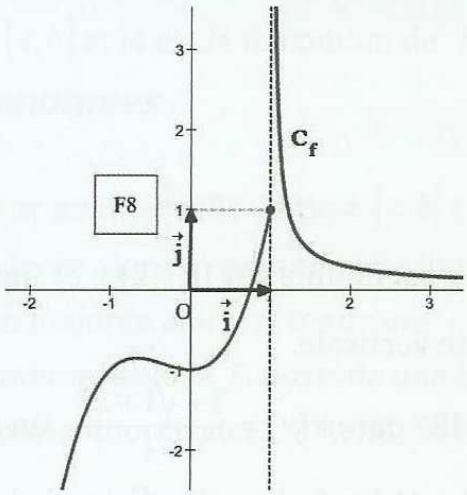


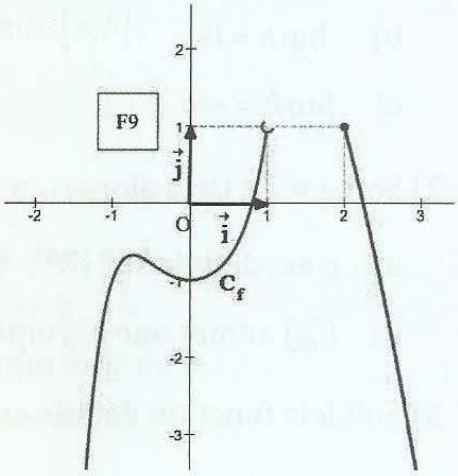




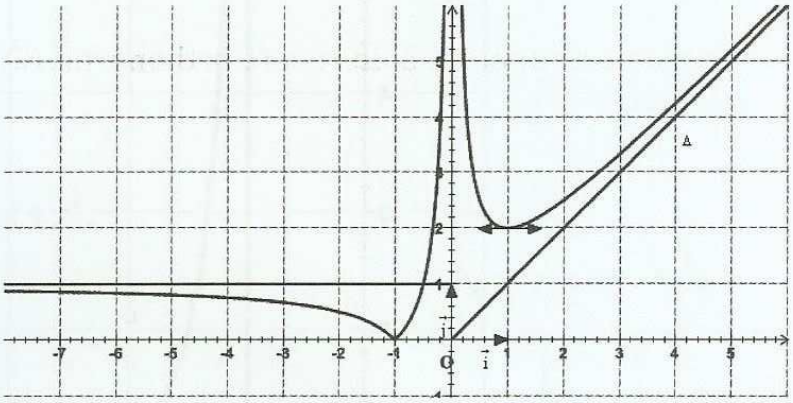








2/ APPLIQUER



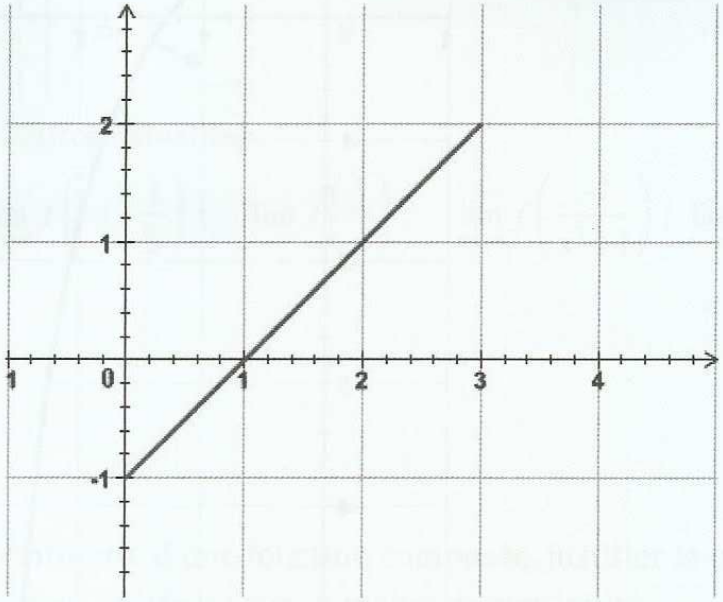
Dans le graphique ci-contre, on a représenté la courbe (Cf) d'une fonction f définie sur IR*.
La droite Δ : y = x est une asymptote à (Cf) au voisinage de + ∞, la droite y = 1 est une asymptote à (Cf) au voisinage de - ∞ et l'axe des ordonnées est une asymptote à (Cf) à droite et à gauche en 0.
Utiliser le graphique pour répondre.

1. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)\sin\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.
2. Déterminer f(]- ∞, - 1]), f([-1, 0[) et f(]0, 1]).
3. Montrer que la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$ est continue sur IR* \ {-1}.
4. La fonction g admet elle un prolongement par continuité en 0 ?

3/ APPLIQUER

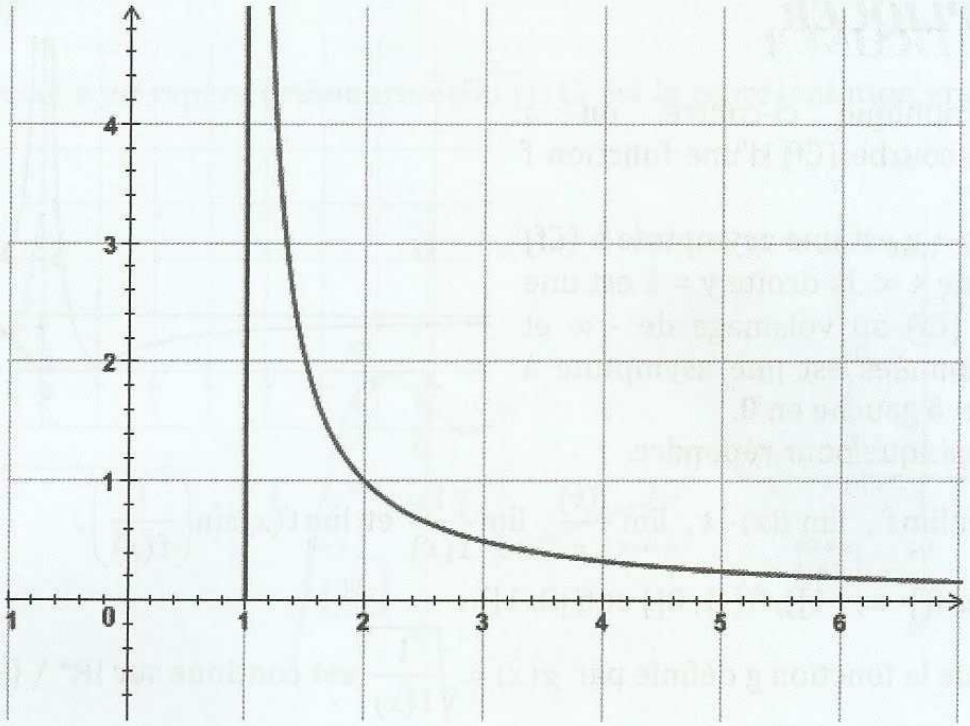
Dans chacun des cas suivants, déterminer par lecture graphique l'ensemble f(I) image par f de l'intervalle I.

1)



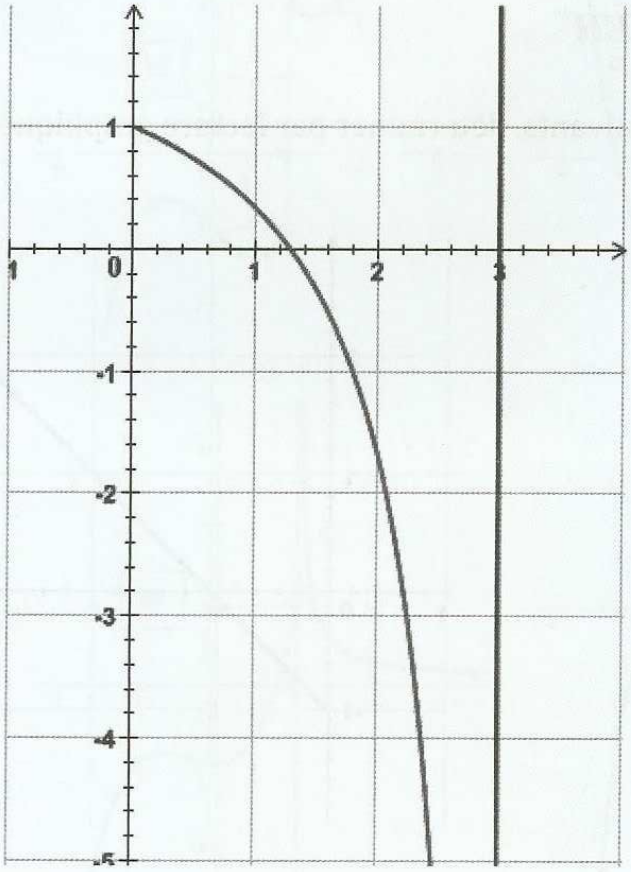
I = [0, 3].

2)



I =]1, + ∞[.

3)



I =]0, 3[.

5 S'ENTRAINER

1) Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)+1$, $\forall x \in \text{IR}^*$.

a) Montrer que : $\forall x \in IR^*$, $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$.

b) Chercher $\lim\limits_{0} f$.

c) Chercher $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

2) Soit $g : x \mapsto \frac{x+\sin x}{2-\sin x}$, $\forall x \in \text{IR}$.

a) Montrer que : $\begin{cases} \forall x > 1,\ \frac{x-1}{3} \le g(x) \le x+1 \\ \forall x < -1,\ x-1 \le g(x) \le \frac{x+1}{3} \end{cases}$

b) Chercher $\lim\limits_{+\infty} g$ et $\lim\limits_{-\infty} g$

6 S'ENTRAINER

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.

7 S'ENTRAINER

En appliquant le théorème sur la continuité d'une fonction composée, justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes tout en précisant son domaine de continuité.

1) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

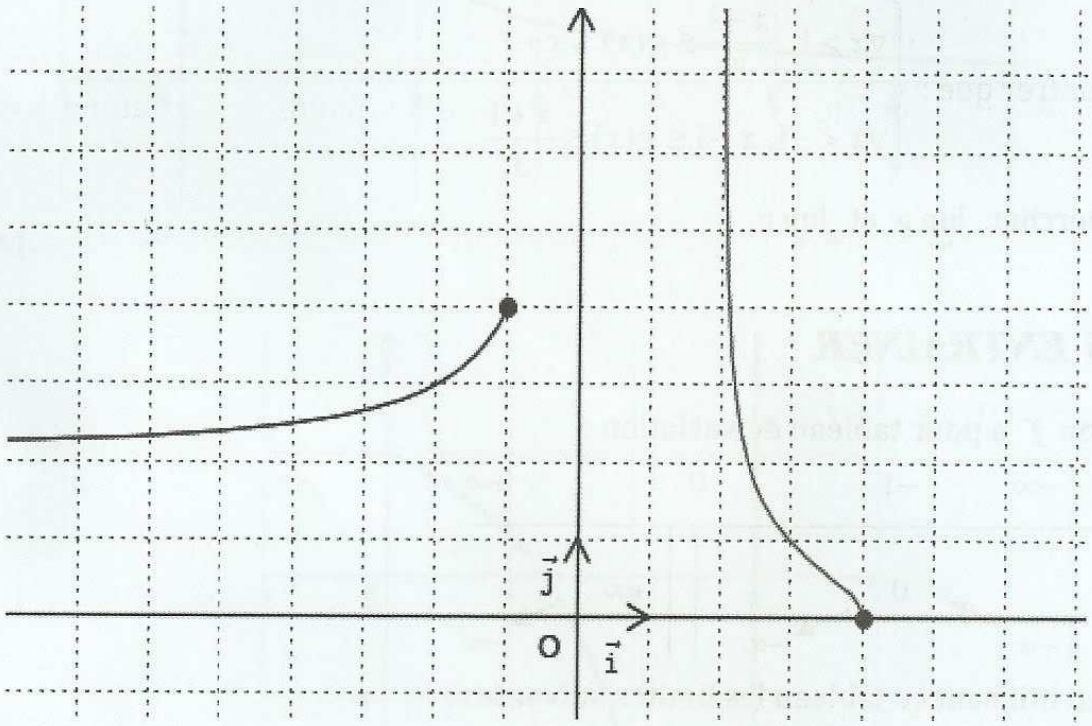
2) $f(x)=\cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

4) $f(x)=\cot g\left(\pi\left(2x-\frac{3}{4}\right)\right)$

8/ S'ENTRAINER

Dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, ci – dessous, est tracée les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g.



La fonction f est définie sur] - ∞, - 1] et
la fonction g est définie sur]2, 4].

1) Donner graphiquement :
f (-1), f (-2), g (4), g (3), $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{2^+} g$.

2) En déduire g o f([-2, -1]) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.

3) Etudier le sens de variation de g o f sur]-∞, -1].

4) Prouver que l'équation
g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

9 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq x^3$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

2) a) Justifier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation : $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \dfrac{1+x^2}{x^3}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.

3) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \pi$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

10 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -2 + \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2x^3 - 3x^2 - 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 2x - \sqrt{x^2 - x - 1} & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty, 0[$, on a : $-2 + \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq -2 - \dfrac{1}{x}$.

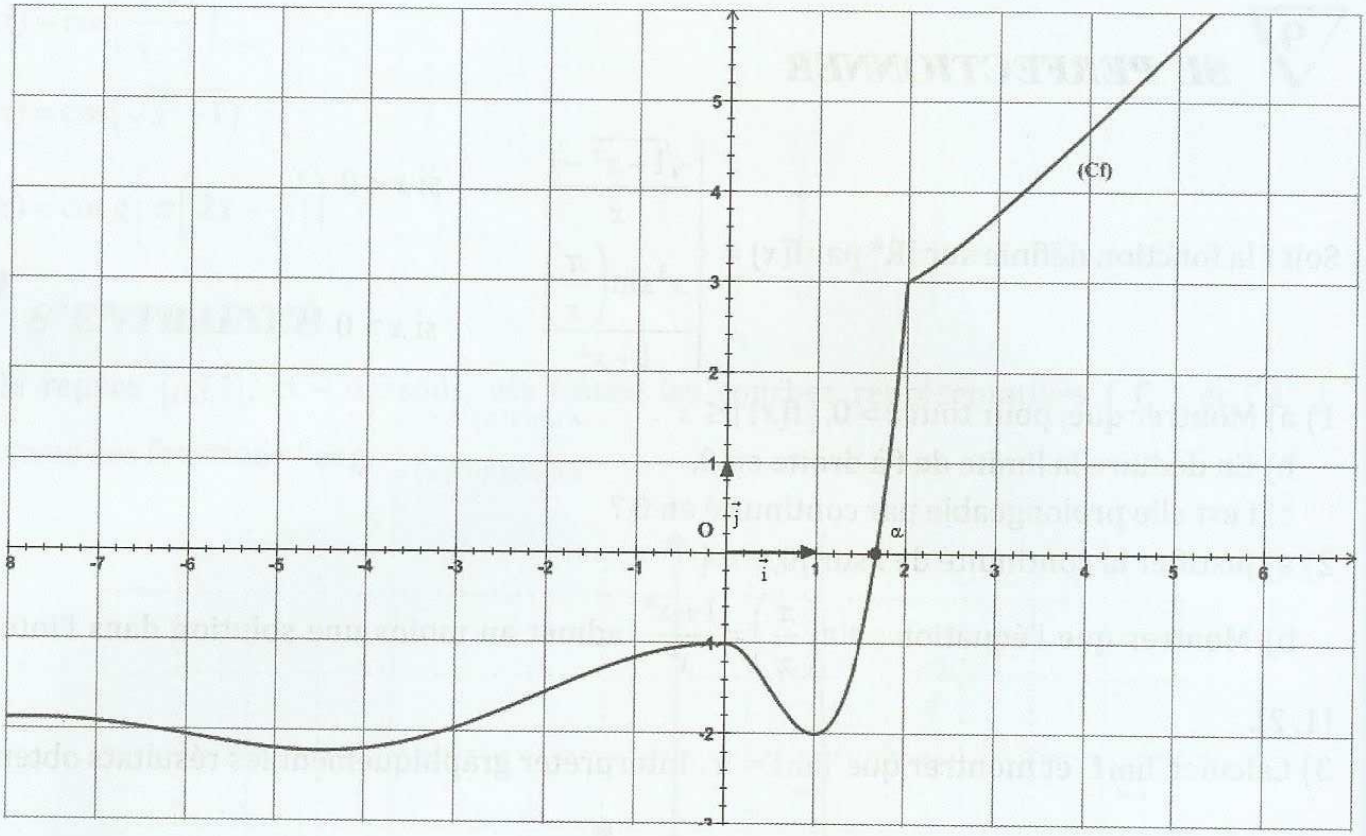
b) En déduire la limite en $-\infty$ de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$.

3) Montrer que f est continue en chacun des réels 0 et 2.

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0, 2]$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.



c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in [0,2]$. Vérifier que $1.6 < \alpha < 1.7$.

5) On donne ci - dessous (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Répondre aux questions suivantes, en utilisant le graphique :

a) Donner le signe de f suivant les valeurs de x.

b) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right);\ \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x}{2x-3}\right);\ \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x^2+1}\right);\ \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) Déterminer les images de chacun des intervalles suivants : $[0,2]$ et $]2,+\infty[$.

1/ Q-C-M

Réponses	Commentaires
1. Soit h une fonction définie sur IR, de même signe que f et telle que pour tout réel x, on a : $f(x) \le h(x)$. On a alors : $\lim\limits_{-\infty} h = 0$ $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$	$\forall x \in]-\infty, 2]$, on a : $f(x) \le h(x) \le 0$ $\lim\limits_{-\infty} f = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{-\infty} h = 0}$ $\forall x \in [2, +\infty[$, on a : $0 \le f(x) \le h(x)$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} h = +\infty}$
2. Soit $g = \frac{1}{f}$. On a alors : g est définie sur IR\{2} $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ (ζ_g) admet une asymptote verticale	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc $g = \frac{1}{f}$ est définie sur IR \{2} $\lim\limits_{-\infty} f = 0^- \Rightarrow$ $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{2^-} g = \lim\limits_{2^-} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{2^+} g = \lim\limits_{2^+} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$ → La droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à (ζ_g)
3. Soit k la fonction définie sur IR* par : $k(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a alors : $\lim\limits_{+\infty} f \circ k = -3$ $\lim\limits_{+\infty} k \circ f = 1$ $\lim\limits_{0^+} f \circ k = +\infty$	$\lim\limits_{+\infty} k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x} = 1$ $\lim\limits_{1} f = f(1) = -3 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} f \circ k = -3}$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} k = 1$ $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} k \circ f = 1}$ $\lim\limits_{0^+} k = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{0^+} f \circ k = +\infty}$

■ **F_1 :** •f n'est pas définie en 1

$\Rightarrow$ { f n'est pas continue en 1 ; f n'est pas continue à gauche en 1 ; f n'est pas continue à droite en 1 }

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

■ **F_2 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = ☐1

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à gauche en 1.

$\Rightarrow$ f n'est pas continue en 1.

■ **F_3 :** •f n'est pas définie en 1

$\Rightarrow$ { f n'est pas continue en 1 ; f n'est pas continue à gauche en 1 ; f n'est pas continue à droite en 1 }

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

■ **F_4 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 2

•f n'est pas continue en 1

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

■ **F_5 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 1

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à droite en 1.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq f(1) \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à gauche en 1.

$\Rightarrow$ f n'est pas continue en 1.

■ **F_6 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = ☐1

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à droite en 1.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à gauche en 1.

$\Rightarrow$ f est pas continue en 1.

■ **F_7 :** •f n'est pas définie en 1

$\Rightarrow$ { f n'est pas continue en 1 ; f n'est pas continue à gauche en 1 ; f n'est pas continue à droite en 1 }

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

■ **F_8 :** •f est bien définie en 1 et f(1) = 1

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1) \Leftrightarrow$ f est continue à gauche en 1.

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ f n'est pas continue à droite en 1.

$\Rightarrow$ f n'est pas continue en 1.

■ **F_9 :** •f n'est pas définie en 1

$\Rightarrow$ { f n'est pas continue en 1 ; f n'est pas continue à gauche en 1 ; f n'est pas continue à droite en 1 }

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

2 APPLIQUER

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2-3x}}_{+\infty} + \underbrace{2x}_{-\infty}$ c'est une forme indéterminée

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}+2x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{|x|}_{-x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}+2x=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{-\infty}\left(\underbrace{-\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}}}_{-1}+2\right)=-\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2-3x}}_{+\infty} + \underbrace{x}_{-\infty}$: F ind

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{3x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(2-\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)}{\cancel{x}\left(3+\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}\right)}=\frac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\sin\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)}_{0}$: F ind

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{\text{On pose } X=\frac{1}{x}}{=}\lim_{X\to0^+}\frac{\sin X}{X}=1$$

3 APPLIQUER

1. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{1}{-\infty}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{f(x)}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to0} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\nearrow 0}\right)}{\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\searrow 0}}=1$$

2. $f(]-\infty,-1])=[0,1[$, $f([-1,0[)=[0,+\infty[$ et $f(]0,1])=[2,+\infty[$.

3. $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$ existe, si et seulement si $x\in IR^*$ et $f(x)\neq0 \Leftrightarrow x\in IR^*\setminus\{-1\}$

$\dfrac{1}{f}$ est continue et positive sur $IR^*\setminus\{-1\} \Rightarrow$ g est continue sur $IR^*\setminus\{-1\}$.

4. $\lim\limits_{0} g=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{+\infty}}=0 \Rightarrow$ g admet un prolongement par continuité en 0.

4 APPLIQUER

1. $f([0,3])=[-1,2]$
2. $f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[$
3. $f(]0,3[)=]-\infty,1[$

5 S'ENTRAINER

a) $\forall x\in IR,\ -1\le\sin x\le1$

$\Rightarrow \forall x\in IR,\ x-1\le x+\sin x\le x+1$

$\forall x\in IR,\ 1\le2-\sin x\le3 \Rightarrow \forall x\in IR,\ \dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le1$

$\forall\ x>1,\ 0<x-1\le x+\sin x\le x+1$ et

$\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le1 \Rightarrow \forall\ x>1,\ \dfrac{x-1}{3}\le f(x)\le x+1$

$\forall\ x<-1,\ x-1\le x+\sin x\le x+1<0$ et

$\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le1 \Rightarrow \forall\ x<-1,\ x-1\le f(x)\le\dfrac{x+1}{3}$

b) $\forall\ x>1,\ \dfrac{x-1}{3}\le f(x)\le x+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3}=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\forall\ x < -1,\ x-1 \le f(x) \le \dfrac{x+1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$ alors

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

6 S'ENTRAINER

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right) = -\infty$; $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{1}{x} = (-1)^+ \\ \lim\limits_{(-1)^+} f = f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -1+\dfrac{1}{x} = (-1)^- \\ \lim\limits_{(-1)^-} f = f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2+1} = 0^- \\ \lim\limits_{0^-} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right) = -\infty$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x^2}{2+x^2} = -1 \\ \lim\limits_{-1} f = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right) = 0$;

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right) = -\infty$

7 S'ENTRAINER

1. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

f est définie sur $\mathrm{IR} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \dfrac{\pi}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right) \text{ est continue sur } \mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \\ \tan \text{ est continue sur } \mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \\ u\left(\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right) \subset \mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \end{cases}$

$\Rightarrow f = \tan \circ u$ est continue sur $\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; f est définie sur $\mathrm{IR}\setminus\{1\}$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \dfrac{x+1}{x-1}\right) \text{ est continue sur } \mathrm{IR}\setminus\{1\} \\ \cos \text{ est continue sur IR} \\ u\left(\mathrm{IR}\setminus\{1\}\right) \subset \mathrm{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow f = \cos \circ u$ est continue sur $\mathrm{IR}\setminus\{1\}$

3. $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)$; f est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \sqrt{x^2-1}\right) \text{ est continue sur }]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\\ \cos \text{ est continue sur IR} \\ u\left(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\right) \subset \mathrm{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow f = \cos \circ u$ est continue sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

4. $f(x) = \cot g\left(\pi\left(2x-\dfrac{3}{4}\right)\right)$; f est définie sur

$\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{8}+\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} \pi\left(2x-\dfrac{3}{4}\right)\right) \text{ est continue sur } \mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{8}+\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \\ cot\, g \text{ est continue sur } \mathrm{IR}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \\ u\left(\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{8}+\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right) \subset \mathrm{IR}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \end{cases}$

$\Rightarrow f = \mathrm{cotg} \circ u$ est continue sur $\mathrm{IR}\setminus\left\{\dfrac{3}{8}+\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

8 S'ENTRAINER

1. f(-1) = 4 ; f(-2) = 3 ; g(4) = 0 ; g(3) = 1 et $\lim\limits_{2^+} g = +\infty$

2. g o f([-2, -1]) = g(f([-2,1])) = g([3,4]) = [0,1] et

$\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2^+ \\ \lim\limits_{2^+} g = +\infty \end{cases}$

3. f est strictement croissante sur]-∞, -1] et g est strictement décroissante sur]2,4]
⇒ g o f est strictement décroissante sur]-∞, -1]

4. $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]-\infty,-1] \\ g \text{ est continue sur }]2,4] \\ f\left(]-\infty,-1]\right) =]2,4] \end{cases}$

$\Rightarrow g\circ f$ est continue sur $]-\infty,-1]$
en particulier sur [-2, -1]

$g \circ f(-1) = 0 < \frac{1}{2} < g \circ f(-2) = 1$

g o f est strictement décroissante sur [-2, -1]

$\Rightarrow$ l'équation g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. a) $\forall x > 0, |f(x)| = \dfrac{x^3}{1+x^2}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|}_{\leq 1} \leq \dfrac{x^3}{1+x^2} \leq x^3$

b) $\forall x > 0, |f(x)| \leq x^3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

c) $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$$

$\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 0 \Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 0 et on a :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0

2. a) $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2}$,

3. on pose $u(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

v est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition IR en particulier sur]0, + ∞[

$\left(x \mapsto \dfrac{\pi}{x}\right)$ est continue sur IR*, en particulier sur]0, + ∞[

$\Rightarrow \left(x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$ est continue sur]0, + ∞[

f = u + v est continue sur]0, + ∞[

b) $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \dfrac{1+x^2}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$

f est continue sur]0, + ∞[, en particulier sur [1, 2]

$f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{8}{5}$; $0 < 1 < \dfrac{8}{5}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 1 admet au moins une solution dans [1, 2]

c) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{x}$

d) $= \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - 1 = -2$

$\Rightarrow$ la droite d'équation y = - 2 est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de - ∞

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}_{\to \pi} = \pi$$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = \pi$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de + ∞

10 SE PERFECTIONNER

$$f(x) = \begin{cases} -2 + \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2x^3 - 3x^2 - 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 2x - \sqrt{x^2 - x - 1} & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

1. Calcul de la limite en - ∞ de f: les règles de calculs de limites sont inapplicables ici puisque la fonction sinus n'a pas de limite en - ∞ donc a recourt aux encadrements.

a) $\forall x \in$ IR, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \forall x < 0$,

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{x} \Rightarrow -2 + \frac{1}{x} \leq -2 + \frac{\sin x}{x} \leq -2 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \forall x < 0, \; -2 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq -2 - \frac{1}{x}$$

b) $\forall x < 0, \; -2 + \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq -2 - \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2 \quad \lim_{x\to-\infty} -2 - \frac{1}{x} = -2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{-\infty} f = -2$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - x - 1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(2 - \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)}_{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x - 1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

NB : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ La droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. Continuité de f en 0 et en 2 :

- $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x\to0^-} -2 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} = -1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 0.

$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to0^+} 2x^3 - 3x^2 - 1 = -1 = f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

Ainsi f est continue en 0.

- $\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{x\to2^-} 2x^3 - 3x^2 - 1 = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 2.

$\lim\limits_{2^+} f = \lim\limits_{x\to2^+} \underbrace{2x}_{4} - \sqrt{\underbrace{x^2 - x - 1}_{1}} = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à droite en 2.

Ainsi f est continue en 2.

4. a) $\forall x \in [0, 2]$,

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

b)

x	0		1		2
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	−1	↘	−2	↗	3

c) Equation $f(x) = 0$ dans $[0, 2]$:

- $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [-2, -1]$ (image d'un intervalle par une fonction continue strictement décroissante)

$0 \notin [-2, -1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $[0, 1]$

- f est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$ donc f réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[-2, 3]$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$

- $f(1.6) = -0.488 < 0$ et $f(1.7) = 0.156 > 0$

$\Rightarrow 1.6 < \alpha < 1.7$

5. Lecture graphique :

a)

x	$-\infty$		α		$-\infty$
$f(x)$		−	0	+	

b) Limite d'une fonction composée :

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x-3} = 1 \\ \lim\limits_{1} f = f(1) = -2\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x}{2x-3}\right) = -2$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0^+ \\ \lim\limits_{0^+} f = f(0) = -1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -1$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} f = -2\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = -2$

c) Image d'un intervalle par une fonction continue :

- $f([0, 2]) = [\min f, \max f] = [-2, 3]$
- $f(]2, +\infty[) =]3, +\infty[$

Suites réelles

I) Résumé du cours

1) Suites arithmétiques

a) Définition :

On dit qu'une suite U est une suite arithmétique de raison r où r est un nombre réel si pour tout entier n, on a: $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$, $(r \in \mathbb{R})$

b) Terme général :

Pour tous entiers naturels quelconques n et k, si la suite (u) est arithmétique de raison r alors on a: $u_n = u_k + (n - k).r$. En particulier, on a: $\mathbf{u_n = u_0 + n.r}$

Réciproquement : Si a et b sont deux nombres réels et si la suite U est définie par: $u_n = an + b$, alors cette suite est arithmétique de raison r = a et de premier terme $u_0 = b$

c) Somme des termes d'une suite arithmétique

Pour une suite (u) arithmétique de raison r, soit $Sn = u_n + u_{n-1} + ... + u_1 + u_0$.

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Relation que l'on peut mémoriser sous la forme :

$$S_n = \frac{\text{nombre de termes de la somme} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

d) Limite d'une suite arithmétique :

Pour une suite U arithmétique de raison r, on a, pour tout n entier narturel, $u_n = u_0 + n.r$. Donc, on en déduit que :

- la suite (u) diverge vers +oo si r est >0
- la suite (u) diverge vers –oo si r est < 0
- la suite (u) est constante si r = 0

2) Suites géométriques

a) Définition :

On dit que la suite U est une suite géométrique de raison q, où q est un nombre réel, si pour tout entier naturel n, on a: $\mathbf{u_{n+1} = q.\, u_n}$

b) Terme général :

Si (u) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout n et tout k entiers naturels, on a:

$$\boxed{u_n = q^{(n-k)}.u_k}$$

En particulier, on a: $\mathbf{u_n = q^n.u_0}$.

Réciproquement : Pour a et b réels, la suite (u) définie par: Pour tout n entier naturel, $u_n = a.b^n$ est la suite géométrique de raison q = b et de premier terme $u_0 = a$.

c) Somme de termes d'une suite géométrique

Si q est un nombre réel et si n est un entier naturel alors:

• $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si q est différent de 1

• $1 + q + q^2 + ... + q^n = (n + 1)$ si q = 1.

Si la suite (u) est géométrique de raison q différente de 1, alors la somme des (n+1) termes de cette suite : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$: est $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Relation que l'on peut mémoriser sous la forme:

$$\mathbf{S = \frac{1\ er\ terme \times (\ 1 - raison^{\ nbre\ de\ termes})}{1 - raison}}$$

d) Limite d'une suite géométrique

Si q est un nombre réel, alors on a:

Théorème

- Si $-1 < q < +1$ alors $\lim(q^n) = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim(q^n) = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim(q^n) = 1$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Convergence et limite d'une suite

1) Sens de variation d'une suite

(u_n) étant une suite numérique, on pose les définitions suivantes:

a) Définition d'une suite croissante

On dit que la suite est croissante si pour tout n entier naturel, on a : $\mathbf{u_n \leq u_{n+1}}$

On a donc, $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$ ....

b) Définition d'une suite décroissante :

On dit que la suite est décroissante si pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{u_{n+1} \leq u_n}$

On a donc $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} \leq ..... \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$

c) Définition d'une suite constante

On dit que la suite est constante si pour tout n entier naturel, on a : $\mathbf{u_n = u_{n+1}}$

On a donc, $u_0 = u_1 = u_2 = u_3$ ....

d) Définition d'une suite monotone

On dit que la suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

e) *Méthodes à suivre :*

Pour déterminer la monotonie d'une suite (u_n), On peut calculer :

- $U_{n+1}-U_n$, si le résultat est positif ou nul, la suite est croissante, par contre si le résultat est négatif ou nul, la suite est décroissante, enfin si le résultat est indépendant de n, alors la suite est arithmétique
- $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, si $u_n > 0$, et dans ce cas si le résultat est supérieur ou égal à 1, la suite est croissante, par contre si le résultat est inférieur ou égal à 1, la suite est décroissante, enfin, si le résultat est indépendant de n, la suite est géométrique.

2) Majorant, Minorant

a) Définition d'une suite majorée

On dit que la suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n entier naturel, on a: $\mathbf{u_n \leq M}$. On dit que M est un majorant de la suite.

b) Définition d'une suite minorée

On dit que la suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n entier naturel, on a : $\mathbf{m \leq u_n}$ On dit que m est un minorant de la suite.

c) Définition d'une suite bornée

Si la suite (u_n) admet un majorant et un minorant, on dit qu'elle est bornée.

Il existe donc M et m réels tel que pour tout n entier naturel, on a: $\mathbf{m \leq u_n \leq M}$. On remarque que la suite est bornée si et seulement si il existe un réel A tel que pour tout n entier naturel, on a: $|u_n| \leq A$

Remarque

- Une suite croissante est minorée.(Car pour tout n, on a: $u_0 \leq u_n$).
- Une suite décroissante est majorée.(Car pour tout n, on a :$u_0 \geq u_n$)

3) Convergence et limite d'une suite

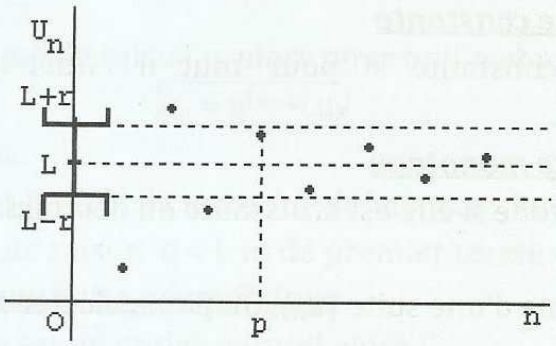
U est une suite numérique et L un nombre réel.

a) Définition de la convergence

On dit que la suite U converge vers L ou admet L pour limite si: Pour tout r> 0, il existe un entier N tel que si n > N alors $|u_n - L| < r$

Ceci signifie que la valeur L sera approchée d'aussi près que l'on veut par la suite U à partir du moment où n est choisi assez grand. On écrit alors:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ On dit que la suite est convergente.



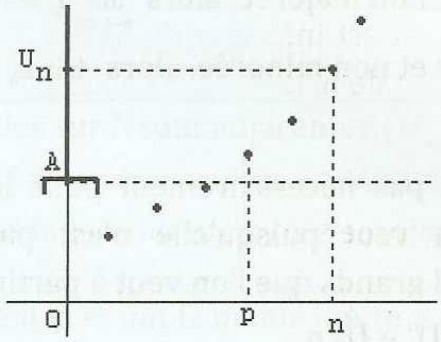
Remarque *: si* une suite a une limite, sa limite est **unique.**

Suites divergentes :

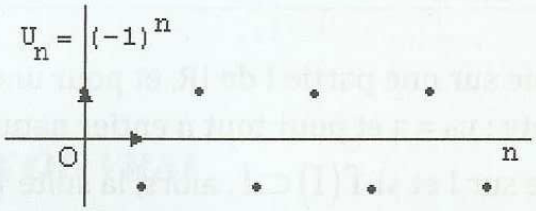
La suite U est dite divergente lorsqu'elle admet une limite infinie ou bien lorsqu'elle n'admet pas de limite.

Exemples:

1) $u_n = n^2 + 1$, est une suite divergente car $\lim(U_n) = +\infty$



2) La suite U définie par : $U_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'a pas de limite



b) Propriétés concernant les limites

Propriété 1

Si la suite U est croissante et admet un majorant M alors cette suite est convergente et sa limite L est inférieure ou égale à M.

Attention : on a $L \leq M$ et non nécessairement L = M.

Par exemple, la suite définie par " $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ " est croissante et majorée par 2, mais sa limite est L = 1.

Propriété 2

Si la suite U est décroissante et admet un minorant m alors cette suite est convergente et sa limite L est supérieure ou égale à m.

Propriété 3

Toute suite monotone et bornée est convergente.

De plus, si on a: $m \leq u_n \leq M$, pour tout n entier naturel, alors sa limite L vérifie $m \leq L \leq M$.

Propriété 4 : Théorème dit "des gendarmes"

Soient trois suites numériques (u) , (v) et (w) telles qu'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel $n > N$: $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si les suites (v) et (w) convergent vers L alors la suite (u) converge aussi vers L.

Exemple : Soit $u_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

On sait que la fonction sinus est comprise entre -1 et 1. Donc, pour tout n entier naturel, on a:

$$-\frac{1}{n+1} \le \frac{\sin(n)}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

comme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ On obtient que la suite (Un) converge vers 0

Propriété 5 :

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite +∞. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang. On peut citer comme exemple la suite $u_n = \left[(-1)^n + 1\right] \times n$.

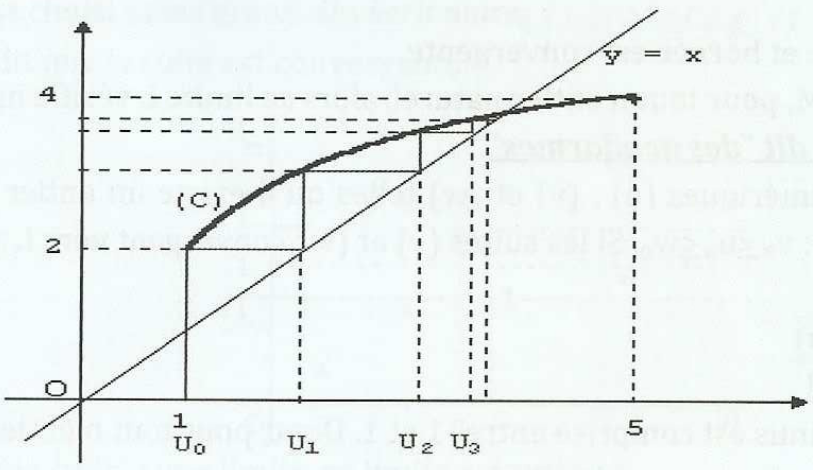
4) Suites définies par : un+1= f(un)

Généralités

Pour une fonction f définie sur une partie I de IR, et pour une valeur a de I, on peut définir la suite récurrente (u) suivante : u_0 = a et pour tout n entier naturel, si u_n appartient à I , alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante sur I et si $f(I) \subset I$, alors, la suite (U_n) est monotone. Si de plus l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans I, alors cette solution est la limite de la suite (U_n)

Exemple:

On a tracé la courbe de f et la droite d'équation $y = x$. Ces deux courbes se coupent en un point d'abscisse inférieure à 4. Si on prend u_0 sur (Ox), le point d'abscisse u_0 de C_f a comme ordonnée $u_1 = f(u_0)$. On projette alors ce point sur la droite d'équation $y = x$ puis sur (Ox). On a donc maintenant u_1 sur (Ox). On réitère le processus et on visualise ainsi u_2, u_3, u_4 . On peut avoir l'intuition que la suite converge vers le réel solution de l'équation $f(x) = x$. Attention, on voit l'importance du premier terme. Si u_0 est supérieur à 4, il est clair que la suite tend vers l'infini.



Suites adjacentes

1) Définition :

On dit que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0$.

2) Propriétés

Si les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes, (U_n) étant la suite croissante et (V_n) la suite décroissante, alors :

1- $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\le V_n$;

2- (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont la même limite L ;

3- $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\le L\le V_n$.

II) Exercices

1/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :

x	1		5
$f(x)$		↗	4
	2		

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

A - Pour tout n de IN, on a : $1\le u_n\le 5$

B- Pour tout n de IN, on a : $u_n\le u_{n+1}$.

C- Pour $u_0=5$, la suite (u_n) est croissante.

D- Si, Pour tout n de IN, $\left|u_n-\frac{5}{2}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors $lim\ (u_n)=0$.

2/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par Vrai ou Faux

- dans le cas où la proposition vous paraît fausse : donner un contre-exemple.
- dans le cas où la proposition vous paraît exacte : donner une démonstration.

(A) : Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n>u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n^2}{u_n}=+\infty$.

(B) : Toute suite bornée est convergente.

(C) : Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.

(D) : Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

3/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

4/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1, v_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

a. la suite w définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

c. La suite v est décroissante.

d. Les deux suites u et v convergent et ont la même limite.

5/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes.

Si vous répondez Faux, on demande une justification.

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est croissante. Alors elle tend vers $+\infty$.
3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.
4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.
5. Une suite croissante a toujours une limite.
6. Une suite géométrique a toujours une limite.

6/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Partie A : *question de cours*

On suppose connus les résultats suivants:

(1) deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque: l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à IN on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente : toute suite décroissante et minorée est convergente. Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (U_n) définie sur IN, dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (V_n) sur IN, par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Si (U_n) est convergente alors (V_n) est convergente.
2. Si (U_n) est minorée par 2 alors (V_n) est minorée par -1.
3. Si (U_n) est décroissante alors (V_n) est croissante.
4. Si (U_n) est divergente alors (V_n) converge vers zéro.

7/ APPLIQUER

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}$, pour tout n $\in \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que pour tout n de IN, $0 \leq u_n < 4$.

   b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) Retrouver le résultat de 1. c).

8/ APPLIQUER

A) Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour A_0B_0= 12 cm.
Quelle conjecture peut-on faire sur les points $A_n$et $B_n$quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0 ; \vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points $A_n$et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

B) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0= 0 ; v_0= 12 ; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

C) À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points $A_n$et B_n quand n tend vers $+\infty$.

9 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

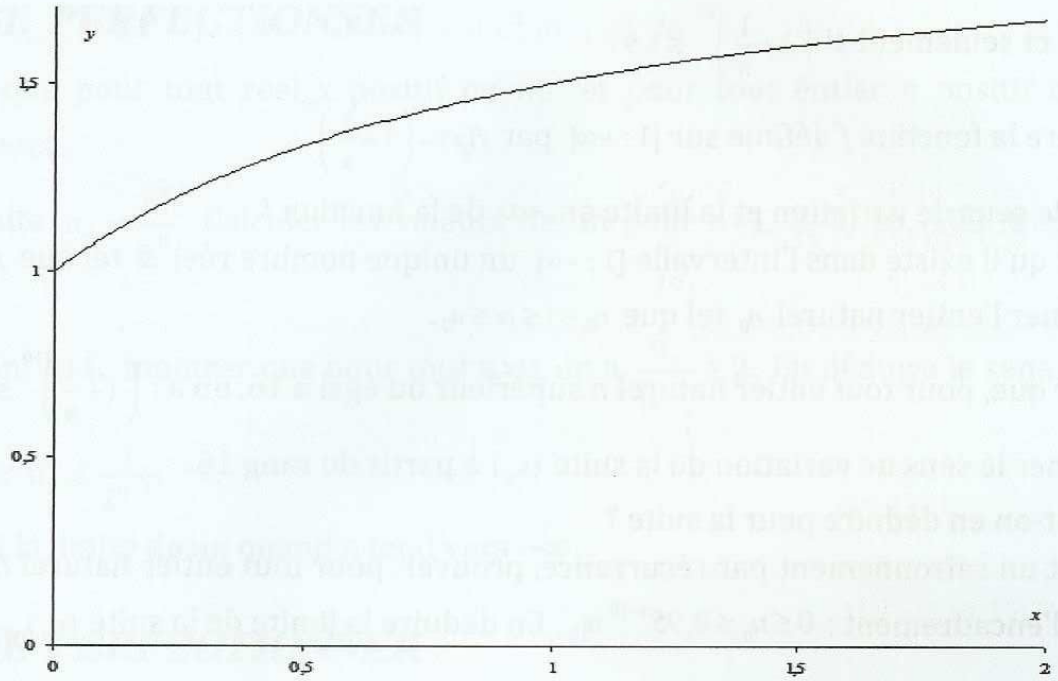
1. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2]. Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   u_0= 1 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$,
   v_0= 2 et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a. Le graphique donné ci dessous représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?
   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\geq 0$ et $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.



10 S'ENTRAINER

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$.

3. On pose $k=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$. En déduire que la suite U converge vers $\sqrt{2}$.

4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0<\dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}<1$.

En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. Application : calculer les premiers termes de la suite U et établir les encadrements suivants de $\sqrt{2}$: $1<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$.

11 S'ENTRAINER

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$u_{n+1}\le 0{,}95u_n$ si et seulement si $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1{,}9$.

2. On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1\le\alpha\le n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1{,}9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\le u_n\le 0{,}95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12 S'ENTRAINER

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$u_0=2$ et pour tout $n\in IN$, $v_n=\frac{2}{u_n}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

1) Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2. Donner les résultats sous form de fraction irréductibles.

2) A l'aide de la calculatrice, donner un tableau de valeurs décimales approchées de u_n et v_n, pour n variant de 1 à 4.

3) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

4) Montrer que pour tout $n\in IN$; $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$ (1)

5) Montrer que pour tout $n\in IN$ $u_n\ge v_n$.

6) Montrer que (U_n) est décroissante et (V_n) croissante.

7) Montrer que pour tout $n\in IN$ $u_n-v_n\le 1$ et en déduire que $(u_n-v_n)^2\le u_n-v_n$. (2)

8) Montrer que pour tout n∈ IN ; $u_{n+1}-v_{n+1}\le\frac{1}{4}(u_n-v_n)$ (on pourra utiliser les relations (1) et (2)) En déduire que pour tout n ∈ IN $u_n-v_n\le\frac{1}{4^n}$.

9) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et donner leur limite commune I Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle forcément pour limite un nombre rationnel?

13 SE PERFECTIONNER

1. Montrer que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n\ge1+nx$.

2. Soit la suite $u_n=\frac{n!}{n^n}$. Calculer les valeurs de un pour n=1, 2, 3, 10, 100 .Que remarquez vous ?

3. En utilisant le 1., montrer que pour tout n>0, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge2$. En déduire le sens de variation de u_n et que $u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$

4. Quelle est la limite de un quand n tend vers $+\infty$.

14 SE PERFECTIONNER

On considère les suites u et u définies par :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\end{cases}\text{ pour tout n}\in\text{IN}\quad\text{et}\quad\begin{cases}v_0=\sqrt{2}\\ v_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}\end{cases}\text{ pour tout n}\in\text{IN}$$

1) On définit la suite $(w_n)_{n\in IN}$ par : $w_n=v_n-u_n$.

Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

2) Montrer que pour tout n∈ IN , $u_n>v_n$.

3) Montrer que la suite v est décroissante et que la suite u est croissante.

4) En déduire que u et v sont convergente et ont même limite.

15 SE PERFECTIONNER

I) La suite (u_n) est définie par :

$u_0=1$ pour tout n ∈ IN , $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{1+u_n^2}$.

1) Prouver par récurrence que, pour tout n dans IN, $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Prouver par récurrence que, pour tout n dans IN, $u_{n+1} \leq u_n$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On note L la limite.

4) Prouver que $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

II) La suite (v_n) vérifie les deux propriété suivantes :

(P_1) : Pour tout n dans IN. $0 \leq v_n \leq 1$.

(P_2) : Pour tout n dans IN, $v_n \leq v_{n+1}$.

Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

16 SE PERFECTIONNER

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + ... + X - 1$.

1) Démontrer que P_n possède une seule racine dans IR^+, que l'on note u_n.

2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

3) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.

4) Démontrer que (u_n) converge vers ½.

17 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n ∈ IN, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4 \text{ cm})$

b) Placer sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n).

c) Que peut on conjecturer concernant la monotonie et la convergence de (u_n) ?

2. a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3. a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$.

b) En déduire que pour tout n de IN, on a : $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; puis retrouver la limite de (u_n)

4. Pour tout n de IN*, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{S_n}{n}$.

a) Montrer que pour tout n de IN*, on a : $n - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \leq S_n < n$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

18 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

19 SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.
2. Justifier par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. a. Démontrer que quel que soit n de IN, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

   b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

   c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \geq 0$.
4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
5. a. Démontrer que quel que soit n de IN*, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

   b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

   c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

   d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
7. Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.
8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.

Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1er siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.

20/ SUR LE CHEMIN DU BAC

On considère deux réels a et b tels que $0 < a < b$, et les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$; $v_0 = b$, $u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$;

(***rappel***: u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n)

Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n. u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

c) Montrer que, pour tous réels x et y telsque $0 < x < y$. on a $\frac{x-y}{2(x+y)} < \frac{1}{2}$ .En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n>0 on a $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

f) En déduire la limite de $v_n - u_n$.

g) Montrer que les suites (u_n)et (v_n), sont adjacentes.

h) Montrer que pour toute entier naturel n. le produit $u_n.v_n$ est constant En déduire la limite des suites suites (u_n)et (v_n).

i) Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ par deux rationnels au cent millième près.

1 Q-C-M ; VRAI OU FAUX

A- Notons P_n la proposition : « $1 \le u_n \le 5$ ».

1) $u_0 = 1$ et $1 \le 1 \le 5$ donc P_0 est vraie.

2) supposons P_n vraie pour un entier $p \ge 0$: alors $1 \le u_p \le 5$.

Comme f est croissante sur $[1;5]$, on a : $f(1) \le f(u_p) \le f(5)$ soit $2 \le u_{p+1} \le 4$ et donc $1 \le u_{p+1} \le 5$. Alors P_{p+1} est vraie.

3) conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 5$.

B- Notons P_n la proposition : « $u_{n+1} \ge u_n$ ».

1) $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ donc $u_1 \ge u_0$ et P_0 est vraie.

2) supposons P_n vraie pour un entier $p \ge 0$: alors $u_{p+1} \ge u_p$.

Comme f est croissante sur $[1;5]$, on a : $f(u_{p+1}) \ge f(u_p)$ soit $u_{p+2} \ge u_{p+1}$ et donc P_{p+1} est vraie.

3) conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

C- Si $u_0 = 5$ alors $u_1 = f(u_0) = f(5) = 4$, soit $u_1 \le u_0$. Donc la suite (u_n) n'est pas croissante. On montre, comme ci-dessus, que (u_n) est décroissante.

D- $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Donc si, pour tout n de I, $\left|u_n - \frac{5}{2}\right| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \frac{5}{2}$.

2 Q-C-M ; VRAI OU FAUX

(A) **Vrai** : $v_n > u_n \Rightarrow v_n^2 > v_n u_n \Rightarrow \frac{v_n^2}{u_n} > v_n > u_n$.

Donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.

(B) **Faux** : Exemple classique : $u_n = (-1)^n$ qui est bornée par −1 et 1 et qui ne converge pas.

(C) **Faux** : Exemple : $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

(D) **Vrai** : Reprendre la propriété 5

3 Q-C-M ; VRAI OU FAUX

(u_n) non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par −1 :

Vrai :

$$2 \le u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \le -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \le v_n.$$

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

Faux ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n.

4 Q-C-M ; FAUX OU FAUX

$u_0 = 1, v_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} v_n}{1 + \sqrt{2}}$.

a. **Vrai** : le calcul n'est pas très marrant...

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} v_n}{1 + \sqrt{2}} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{2u_n + 2\sqrt{2} v_n - (1 + \sqrt{2}) u_n - (1 + \sqrt{2}) v_n}{2(1 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2}) u_n + (\sqrt{2} - 1) v_n}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2(1 + \sqrt{2})} (v_n - u_n)$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{2(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} w_n = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(2 - 1)} w_n = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) w_n.$$

b. **Vrai** : On a $w_n = w_0 q^n = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^n$; la raison est positive ($\sqrt{2} \approx 1{,}414$) de même que le premier terme, donc $w_n > 0 \Rightarrow u_n \le v_n$.

c. **Vrai** : Au pif, on peut penser que les deux suites sont adjacentes puisque w_n tend évidemment vers 0 ; il faut donc que la suite *v* soit décroissante.

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}-v_n$$

$$=\frac{u_n+\sqrt{2}v_n-v_n-\sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}\ .$$

$$=\frac{u_n-v_n}{1+\sqrt{2}}=-\frac{w_n}{1+\sqrt{2}}<0$$

d. **Vrai** : les deux suites *u* et *v* convergent vers une même limite

5 Q-C-M; VRAI OU FAUX

1. Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. FAUX

La suite (U_n) définie par $u_n=(-2)^n$ n'est pas majorée et n'as pas de limite (cours de première).

2. Si uie suite est croissante. Alors elle tend vers $+\infty$. FAUX

La suite définie par $u_n=-\frac{1}{n}$ est croissante et converge vers 0.

3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée. VRAI (résultat de la définition)

4. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante. FAUX

La suite définie par $u_n=n+2(-1)^n$ tend vers $+\infty$ (puisque $u_n\geq n-2$) et n'est pas croissante (elle décroît d'rang pair à un rang impair) . $u_0=2$; $u_1=-1$, $u_2=4$, $u_3=1$; $u_4=6$,...

5. Une suite croissante a toujours une limite. VRAI C'esy une limite finie si la suite est majorée et **c'est $+\infty$ si la suite n'est pas majoré.**

6. Une suite géométrique a toujours une limite. FAUX

La suite d éfinie par $u_n=(-2)^n$ est géométrique et n'a pas de limite (cours de première).

6 Q-C-M; VRAI OU FAUX

Partie A: question de cours

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.

Daprès le résultat (2). on a pour tout entier naturel n: $u_0\leq u_1\leq .....\leq u_n\leq v_n\leq .....\leq v_1\leq v_0$

En conséquence et d'après le résultat (3):

- La suite u est croissante et majorée par v_o donc converge vers le réel ℓ.
- La suite v est décroissante et minorée par u_B, donc converge vers le réel ℓ'.

Pour tour entier naturel n. on a: $u_n=(u_n-v_n)+v_n$

D'après le résultat (1) , $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$; un passage à la limite dan l'inégalité précédente donne alors : $\ell=\ell'$.

On a démontré que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Partie B

Pour arriver à faire cet exercice. il faut déjà une idée de la réponse ! ! !

1. FAUX.

En effet, considérons la suite u pour tout n par : $u_n=\frac{1}{n+1}$

Alors aucun terme de u_n n'est nul, et u converse vers 0.

Mais $v_n=-\frac{2}{u_n}=-2(n+1)$, donc v diverge vers $-\infty$.

2. VRAI

Si (u_n) est minorée par 2. alors pour tout entier n. on a : $2\leq u_n$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $[2;+\infty[$, il vient : $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{u_n}$

En multipliant par -2 : $-1\leq v_n$.

Ainsi (v_n) est minorée par -1.

3. FAUX.

Soit u la suite définie par : $u_n=\frac{1}{n+1}$

Cette suite est décroissante (avec aucun terme nul) et la suite v définie par $v_n=-\frac{2}{u_n}=-2(n+1)$ est décroissante non constante, donc on ne peut pas dire qu'elle soit croissante.

4. FAUX.

Rappelons qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Donc soit elle tend vers $\pm\infty$. soit elle n'a pas de limite.

Pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver une suite (u_n) qui diverge mais sans tendre vers l'infini.

Par exemple : $u_n=-2(-1)^n$ donc $v_n=(-1)^n$.

Comme la suite de tenue général $(-1)^n$ diverge alors u et v divergent.

Preuve de la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$:

Raisonnons par l'absurde et supposons que cette suite converge vers un réel ℓ.

Alors tout intervalle ouvert centré en 1 contient tous les tennes $(-1)^n$ à partir d'un certain rang.

Ainsi il existe un rang N à partir duquel on aura:

$(-1)^n \in \left]\ell-\frac{1}{2};\ell+\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow \ell-\frac{1}{2}<(-1)^n<\ell+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -(-1)^n-\frac{1}{2}<-\ell<\frac{1}{2}-(-1)^n$

$\Leftrightarrow -\left(-(-1)^n-\frac{1}{2}\right)>\ell>-\left(\frac{1}{2}-(-1)^n\right)$

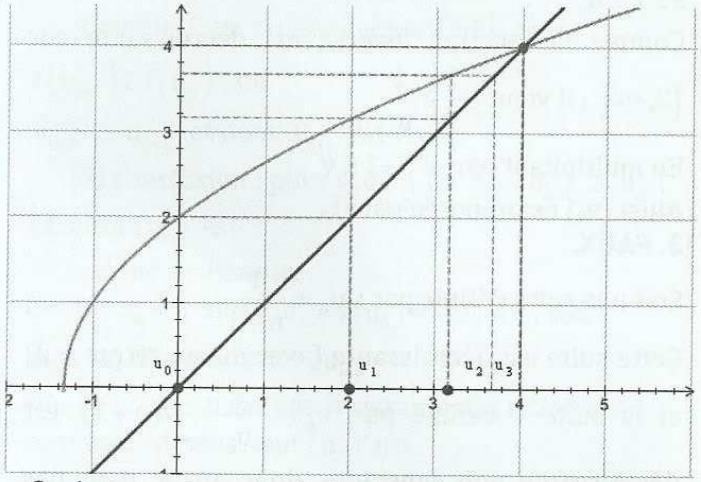
$\Leftrightarrow (-1)^n-\frac{1}{2}<\ell<(-1)^n+\frac{1}{2}$

Mais si n pair. $(-1)^n=1$, donc l'encadrement donne $\frac{1}{2}<\ell<\frac{3}{2}$.

7 APPLIQUER

$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{4+3u_n}\ , \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture : La suite (u_n) est croissante, majorée par 4 et elle converge vers 4.

Réponses :

1. a) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $0\le u_n<4$.

- Pour n = 0, $0\le u_0=0<4$
- Pour $n\ge 0$, supposons que $0\le u_n<4$ et montrons que $0\le u_{n+1}<4$

En effet : $0\le u_n<4\Rightarrow 0\le 3u_n<12\Rightarrow 4\le 4+3u_n<16$

$\Rightarrow \sqrt{4}\le\sqrt{4+3u_n}<\sqrt{16}$

$\Rightarrow 0\le 2\le u_{n+1}<4$

Ainsi $\forall\, n\in$ IN, $0\le u_n<4$.

b) $u_{n+1}^2-u_n^2=4+3u_n-u_n^2=\underbrace{(1+u_n)}_{>0 \text{ car } u_n\ge 0}\underbrace{(4-u_n)}_{>0 \text{ car } u_n<4}>0$

$\Rightarrow u_{n+1}^2>u_n^2\Rightarrow u_{n+1}>u_n\ (u_n>0)$

$\Rightarrow (u_n)$ est strictement croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 4 donc (u_n) est convergente. Soit ℓ la limite de (u_n)

$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell\in[0,4] \\ u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{4+3u_n} \\ \text{avec } f(x)=\sqrt{4+3x}\ x\in\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[\\ f \text{ est continue sur } \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[\text{ donc en } \ell \end{cases}$

$\Rightarrow f(\ell)=\ell$

$\Rightarrow \sqrt{4+3\ell}=\ell$, avec $\ell\in[0,4]$

$\Leftrightarrow \ell^2-3\ell-4=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\ell=-1}_{\text{à rejeter}}$ ou $\ell=4\Rightarrow \ell=4$

2. *Autre procédé de convergence :*

a) $4-u_{n+1}=4-\sqrt{4+3u_n}$

$=\frac{12-3u_n}{4+\sqrt{4+3u_n}}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}$

Or $u_n\ge 0\Rightarrow\sqrt{4+3u_n}\ge 2$

$\Rightarrow 4+\sqrt{4+3u_n}\ge 6\Rightarrow\frac{1}{4+\sqrt{4+3u_n}}\le\frac{1}{6}$

$\Rightarrow 4-u_{n+1}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}\le\frac{3}{6}(4-u_n)=\frac{1}{2}(4-u_n)$

b)

$4-u_{k+1}\le\frac{1}{2}(4-u_k)$, pour tout k de IN

$\left.\begin{array}{l} \text{Pour k = 0, } 0<4-u_1\le\frac{1}{2}(4-u_0) \\ \text{Pour k = 1, } 0<4-u_2\le\frac{1}{2}(4-u_1) \\ \text{Pour k = 2, } 0<4-u_3\le\frac{1}{2}(4-u_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Pour k = n - 1, } 0<4-u_n\le\frac{1}{2}(4-u_{n-1}) \end{array}\right\}$

On fait le produit terme à terme et on simplifie on aura

$0<4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

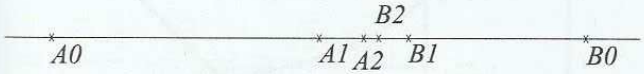
$0<4-u_n\le 4\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\searrow 0}$

$\Rightarrow (u_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$

8 APPLIQUER

A) A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.



Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_n, B_n]$ et $v_{n+1} = \dfrac{1.u_n + 2.v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ car B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

B) 1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$= \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$= \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{v_n - u_n}{6}$

donc w_n est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{1}{2} w_n > 0$ donc (u_n) est croissante ;

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\dfrac{1}{3} w_n < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Comme $w_n > 0$, on a $u_n < v_n$ donc u_n est croissante majorée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2\dfrac{u_n + v_n}{2} + 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

$= u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$

$= \ldots = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$

C) Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l, en remplaçant dans t_n on a :

$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \to 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \dfrac{36}{5}$.

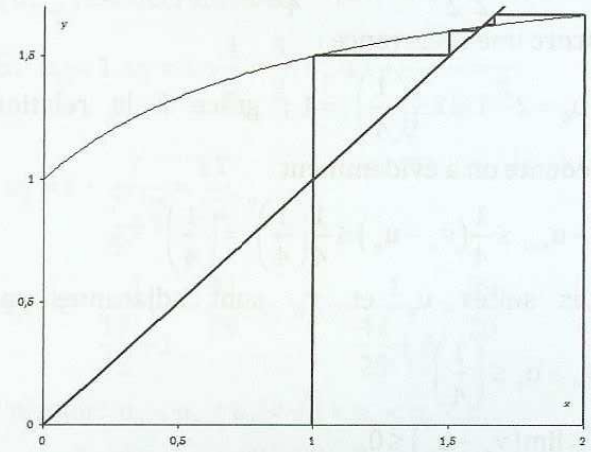
9 APPLIQUER

Soit f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante ;

$f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$

et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$ donc si $x \in [1 ; 2]$, $f(x) \in [1 ; 2]$.



2. a. Visiblement la suite u_n est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite $(y = x)$, soit environ 1,6 ; de même v_n semble décroissante et converger vers le même point.

b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle $[1 ; 2]$; par ailleurs si $1 \le v_n \le 2$ alors comme f est croissante,

$f(1) \le f(v_n) \le f(2) \Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le 2$;

la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \dfrac{5}{3} \le v_0$; par ailleurs si $v_{n+1} \le v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \le f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \le v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \dfrac{5}{3} \le v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de f. Pour u_n c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}$$

$$=\frac{2u_nv_n+2v_n+u_n+1-2u_nv_n-v_n-2u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$

$$=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$v_{n+1}-u_{n+1}$ est du signe de v_n-u_n ;

comme $v_0-u_0=2-1>0$, par récurrence on a $v_n-u_n\geq 0$; on a $v_n>1\Rightarrow v_n+1>2\Rightarrow\frac{1}{v_n+1}<\frac{1}{2}$ et pareil pour u_n donc

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{2}(v_n-u_n)=\frac{1}{4}(v_n-u_n).$$

d. Encore une récurrence :

$v_0-u_0=2-1=1\leq\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$; grâce à la relation précédente on a évidemment

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(v_n-u_n)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

e. Les suites u_n et v_n sont adjacentes car

$$0\leq v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0\leq\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)\leq 0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$$

elles convergent bien vers une même limite α telle que $\alpha=f(\alpha)=\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha=2a+1$

$$\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha-1=0$$

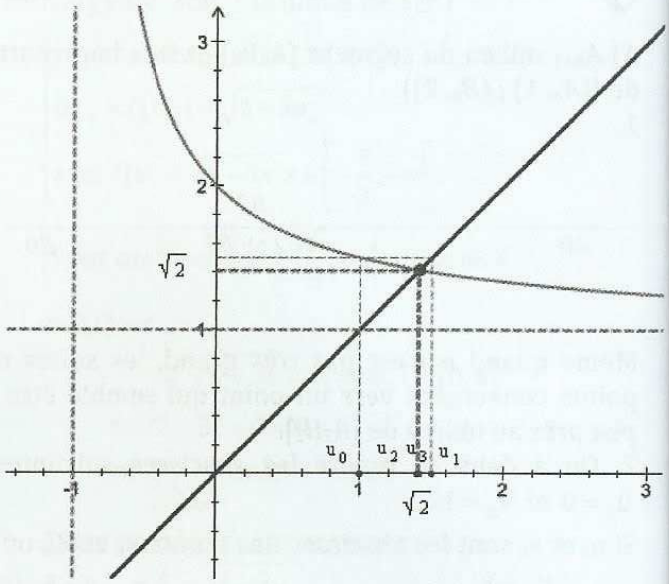
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618\\ \alpha_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}618\end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10 S'ENTRAINER

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=1+\frac{1}{1+u_n}\end{cases}$$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture :

- La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

Réponses :

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, on a : $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$.

- Pour n = 0, $u_0=1\geq 1$ et $u_0=1\neq\sqrt{2}$.
- Pour $n\geq 0$, supposons que $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1}\geq 1$ et $u_{n+1}\neq\sqrt{2}$.

En effet : $u_n\geq 1\Rightarrow 1+u_n>0\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}>0$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{1+u_n}\geq 1\Rightarrow u_{n+1}\geq 1$$

$$u_n\neq\sqrt{2}\Rightarrow 1+u_n\neq 1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}\neq\frac{1}{1+\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{1}{1+u_n}\neq\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{1+u_n}\neq\sqrt{2}\Rightarrow u_{n+1}\neq\sqrt{2}$$

Ainsi $\forall\, n\in$ IN, $u_n\geq 1$ et $u_n\neq\sqrt{2}$.

2. $\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$?

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{2}\right)(1+u_n)=\left(1+\frac{1}{1+u_n}-\sqrt{2}\right)(1+u_n)=\left(1-\sqrt{2}\right)(1+u_n)+$$

$$=\left(1-\sqrt{2}\right)(1+u_n)-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(u_n-\sqrt{2}\right)$$

3. $k=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

• $\left|\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\right|=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}$

Or $1+u_n\geq 2\Rightarrow \dfrac{1}{1+u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}\leq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}\leq k$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

•

$\left|u_{p+1}-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_p-\sqrt{2}\right|$, $\forall\ p\in IN$

Pour p = 0, $\left|u_1-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_0-\sqrt{2}\right|$

Pour p = 1, $\left|u_2-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_1-\sqrt{2}\right|$

⋮

⋮

Pour p = n - 1, $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq k^n\underbrace{\left|u_0-\sqrt{2}\right|}_{\sqrt{2}-1}\leq k^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$ car $k\in\ ]-1,1[\Rightarrow (u_n)$ converge vers $\sqrt{2}$

4. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_{n+1}}\\ \dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\end{array}\right\}$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$0<\dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\dfrac{\underbrace{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}_{>0}}{\underbrace{(1+u_{n+1})(1+u_n)}_{>0}}$

$\leq \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}<1$

car $1+u_n\geq 2$ et $1+u_{n+1}\geq 2$

• Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_{2n}<\sqrt{2}$

Pour n = 0, $u_0=1<\sqrt{2}$

Pour $n\geq 0$, supposons que $u_{2n}<\sqrt{2}$ et montrons que $u_{2n+2}<\sqrt{2}$

En effet :

$\dfrac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}>0$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}<0\Rightarrow u_{2n+2}<\sqrt{2}$

Ainsi $\forall\ n\in IN$, $u_{2n}<\sqrt{2}$

• Montrons que la suite (u_{2n}) est croissante :

$\dfrac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}<1$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}>u_{2n}-\sqrt{2}$

$\Rightarrow u_{2n+2}>u_{2n}$

On montre de même que $u_{2n+1}>\sqrt{2}$ et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. $u_0=1, u_1=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}, u_2=1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}=\dfrac{7}{5}$,

$u_3=1+\dfrac{1}{\frac{7}{5}+1}=\dfrac{17}{12}$,

$u_4=1+\dfrac{1}{\frac{17}{12}+1}=\dfrac{41}{29}, u_5=1+\dfrac{1}{\frac{41}{29}+1}=\dfrac{99}{70}$

Puisque : $u_0<u_2<u_4<\sqrt{2}<u_5<u_3<u_1$

$\Rightarrow 1<\dfrac{7}{5}<\dfrac{41}{29}<\sqrt{2}<\dfrac{99}{70}<\dfrac{17}{12}<\dfrac{3}{2}$

11 S'ENTRAINER

$u_n=\dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$u_{n+1}\leq 0{,}95u_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\leq 0{,}95\dfrac{n^{10}}{2^n}\Leftrightarrow\dfrac{(n+1)^{10}}{n^{10}}\leq 0{,}95\dfrac{2^n.2}{2^n}$.

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9$

2. a. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$;

$f'(x)=10\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9=10\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9<0$

donc f est décroissante ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}=1^{10}=1$.

b. $f(1)=2^{10}$ et f décroissante donc f est bijective de $[1;+\infty[$ vers $]1;2^{10}]$; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel α tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. On a $f(15)\approx 1,9067$ et $f(16)\approx 1,8335$ d'où $16-1=15\leq\alpha\leq 16$.

d. Lorsque $x\geq\alpha$, comme f est décroissante, on a : $f(x)\leq f(\alpha)=1,9$, donc pour tous les n tels que $n\geq 16\geq\alpha$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}=f(n)\leq f(16)\leq f(\alpha)=1,9$.

3. a. D'après ce que nous venons de dire, la suite (u_n) est telle que $u_{n+1}\leq 0,95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0\leq u_n\leq 0,95^{n-16}u_{16}$: on vérifie facilement au rang 16 car $0\leq u_{16}\leq u_{16}$; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1}\leq 0,95u_n\leq 0,95.0,95^{n-16}u_{16}=0,95^{(n+1)-16}u_{16}$, CQFD.

Comme $0,95<1$, $0,95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que u_n grâce à nos amis les gendarmes.

12 S'ENTRAINER

1) $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{2}{u_0}=\frac{2}{2}=1$

$u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$;

$v_1=\frac{2}{u_1}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

$v_2=\frac{2}{u_2}=\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}$.

2)

n	U_n	v_n
1	1.500000000	1.333333333
2	1.416666667	1.411764706
3	1.414215686	1.414211438
4	1.414213562	1.414213562

3) Démontrons, par récurence que, pour tout entier naturel n, on a $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$.

Initialisation (ou amorce) la propriété $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$ est vraie pour n=0 puisque $u_0=2$ et $v_0=1$ on a bien $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$.

Hérédité : soit n un entier naturel quelquenque mais fixé.

Si $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$, alors $\frac{1}{2}\leq\frac{u_n}{2}\leq\frac{2}{2}$ et $2\leq u_n+v_n\leq 4$

$2\geq u_{n+1}\geq 1$ et $1\leq\frac{u_n+v_n}{2}\geq 2$

$1\leq u_{n+1}\leq 2$ et $1\leq v_{n+1}\leq 2$

Conclusion: La propriété $1\leq u_n\leq 2$ et $1\leq v_n\leq 2$ est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de n = 0. D'après te principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

4) Pour tout $n\in$ IN $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2}{u_{n+1}}$

$=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{4}{u_n+v_n}$

$=\frac{(u_n+v_n)^2-8}{2(n_n+v_n)}$

Puisque $v_n=\frac{2}{u_n}.2=u_n.v_n$

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{{u_n}^2+2u_nv_n+{v_n}^2-8}{2(u_n+v_n)}$

$=\frac{{u_n}^2+2u_nv_n+{v_n}^2-4\times 2}{2(u_n+v_n)}$

$=\frac{{u_n}^2+2u_nv_n+{v_n}^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{{u_n}^2+2u_nv_n+{v_n}^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$

5) Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geq v_n$.

Initialisaition (ou amorce) : La propriété $u_n\geq v_n$ est vraie pour n=0 puisque $u_0=2$ et $v_0=1$ on a bien: $u_0\geq v_0$

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque mais fixé

Si $u_n\geq v_n$ alors $\frac{(u_n+v_n)^2}{2(n_n+v_n)}\geq 0$

$u_{n+1}-v_{n+1}\geq 0$ $u_{n+1}\geq v_{n+1}$

Conclusion : La propriété $u_n\geq v_n$ est vraie pour n=0 et héréditaire à partir de n=0 ; D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

6) Pour tout n ∈ IN $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}$ d'après la question précédente,

$u_{n+1}-u_n\le 0$, $u_{n+1}\le u_n$ la suite (U_n) est décroissante.

Pour tout n ∈ IN $v_{n+1}-v_n=\frac{2}{u_{n+1}}-\frac{2}{u_{n\,n}}=\frac{2(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}.u_n}$

comme $u_{n+1}-u_n\le 0$, $u_n+u_{n+1}\ge 0$,

$v_{n+1}-v_n\ge 0$, $v_{n+1}\ge v_n$, la suite (V_n) est croissante.

7) La suite (U_n) et décroissante donc pour tout entier naturel n. $u_n\le u_0$, c'est-à-dire $u_n\le 2$.

La suite (V_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, $v_n\ge v_0$ $v_n\ge 1$ d'où $-v_n\le -1$; En additionnant membre à membre: $u_n-v_n\le 1$.

On sait déjà que $u_n-v_n\ge 0$. Il ne reste plus qu'a multiplier les deux membres de l'inegalité précédente par u_n-v_n : $(u_n-v_n)^2\le u_n-v_n$

8) Daprès la relation (1). $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$ or

$u_n\ge 1$ et $v_n\ge 1$ d'où $u_n+v_n\ge 2$

$2(u_n+v_n)\ge 4$ et $\frac{1}{2(u_n+v_n)}\le\frac{1}{4}$.

On multiplie les deux membres par $(u_n-v_n)^2$ qui est positif : $\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}\le\frac{1}{4}(u_n-v_n)^2$ et en utilisant la relation (2) : $\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}\le\frac{1}{4}(u_n-v_n)^2\le\frac{1}{4}(u_n-v_n)$

c'est-à-dire $u_{n+1}-v_{n+1}\ge\frac{1}{4}(u_n-v_n)$

Démontrons parrécurrence, que pour tout n ∈ IN $u_n-v_n\le\frac{1}{4^n}$

Initialisation : La propriété $u_n-v_n\le\frac{1}{4^n}$ est vraie pour n=0 puisque $u_0-v_0=1$ et $\frac{1}{4^0}=1$. On a bien. : $u_0-v_0\le\frac{1}{4^0}$.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque mais fixé.

Si $u_n-v_n\le\frac{1}{4^n}$, alors $\frac{1}{4}(u_n-v_n)\le\frac{1}{4^{n+1}}$ et comme $u_{n+1}-v_{n+1}\le\frac{1}{4^n}(u_n-v_n)$ a fortiori $u_{n+1}-v_{n+1}\le\frac{1}{4^{n+1}}$

Conclusion : La propriété $u_n-v_n\le\frac{1}{4^n}$ est vraie pour n =0 et héréditaire à partir de n =0 ; D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

9) On sait que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante .

La propriété précédente $0\le u_n-v_n\le\frac{1}{4}$ et le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

les suites (U_n) et(V_n) sont donc adjacentes.Elles convergent donc vers le même réel ℓ.

Comme $u_nv_n=2$, la limite donne $\ell\times\ell=2$ d'où $\ell=\sqrt{2}$.

Les suites (U_n) et(V_n) ont tous leurs termes rationnels car les quotients et sommes de nombres rationnels sont des rationnels. Leur limite commune $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

13 SE PERFECTIONNER

1. Par récurrence : pour n = 0,

$(1+x)^0\ge 1+0x\Leftrightarrow 1\ge 1$; ok.

On suppose que $(1+x)^n\ge 1+nx$ et on multiplie tout par $1+x$:

$(1+x)^{n+1}\ge(1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2$

$=1+(n+1)x+nx^2\ge 1+(n+1)x$.

La suite semble décroître et tendre vers 0.

3. $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n!}{(n+1)\times n!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

On applique l'inégalité du 1. avec $x=\frac{1}{n}$:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 1+n\frac{1}{n}=2$. CQFD.

Tous les termes de la suite sont positifs évidemment donc $\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge 2\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{1}{2}<1$, la suite est bien décroissante.

Par récurrence on a $u_1=1\le\frac{1}{2^{1-1}}=\frac{1}{1}=1$; puis $u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$.

4. Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et que u $u_n\ge 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

14 SE PERFECTIONNER

On a : $u_0 = 1$, $v_0 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}}$ pour tout n.

1) Pour tout n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

Pour tout n, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$= \dfrac{2u_n + 2\sqrt{2}v_n - (1+\sqrt{2})u_n + (1+\sqrt{2})v_n}{2(1+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{(1-\sqrt{2})u_n + (\sqrt{2}-1)v_n}{2(1+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}-1)(v_n - u_n)}{2(1+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} w_n$.

$w_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} w_n$.

On en deduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$

et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = \sqrt{2} - 1$.

2) Montrons par récurence que, pour tout n : $v_n - u_n \geq 0$ (H_n).

$v_0 - u_0 = \sqrt{2} - 1 > 0$ donc l'hypothèse (H_n) est vraie pour n=0.

Supposons qie H_n soit vraie pour un entier n donc que $v_n - u_n \geq 0$.

Alors : $v_{n+1} - u_{n+1} = w_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} w_n$

$= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}(v_n - u_n) > 0$ car l'hypothèse de récurrence, $v_n - u_n \geq 0$ et $q = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$.

Par conséquent pour tout n, $u_n < v_n$.

3) Montrons que la suite v est décroissante :

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} - v_n$

$= \dfrac{u_n + \sqrt{2}v_n - v_n - \sqrt{2}v_n}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{u_n - v_n}{1+\sqrt{2}} < 0$

En effet : $= u_n - v_n < 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, la suite v est décroissante.

Montrons de même que la suite u est croissante :

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} > 0$ d'après la question précédente. On en déduit que la suite u est décroissante.

4) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

$w_n = w_0 q^n = w_0 \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}\right)$

Or, $-1 < \dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}\right)^n = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

U est croissante, v est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$: u et v sont adjacentes, donc convergentes et elles ont même limite.

15 SE PERFECTIONNER

I) 1) Notons P(n) la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$. » et démontrons par récurrence que la propréité P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $u_0 = 1$, on a bien $0 \leq u_0 \leq 1$. Ce qui achève la phase Initialisation.

Supposons mainrtenant que pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé. La propriété P(k) soit vraie c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} \leq 1$

On écrit successivement :

$0 \leq u_k \leq 1$, puis par croissance de la fonction carré sur $[0,+\infty[$, $0 \leq u_k^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + u_k^2 \leq 2$ puis par croissance de la fonction racine sur $[0,+\infty[$, $\sqrt{1} \leq \sqrt{1+u_k^2} \leq \sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{2}\sqrt{1} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{1+u_k^2} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} \leq u_k^2 \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ .Puisque $0 \leq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}\sqrt{2} \leq 2$, on conclut donc que $0 \leq u_{k+1} \leq 1$, ce qui achève la phase d'héridité et la démonstration par récurrence.

La propriété P(n) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Notons P(n) la propriété « $u_{n+1} \leq u_n$ » et démontrons par récurrence que la propriété P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcul $u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+u_0^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pour s'assuer que $u_1 \leq u_0$. Ce qui achève la phase Initialisation.

Supposons maintenant que pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé. La propriété P(k) soit vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_k$

On écrit successivement :

$u_{k+1} \le u_k$, puis par croissance de la fonction carré sur $[0,+\infty[$, $u_{k+1}^2 \le u_k^2$ donc $1+u_{k+1}^2 \le 1+u_k^2$ puis par croissance de la fonction racine sur $[0,+\infty[$, $\sqrt{1+u_{k+1}^2} \le \sqrt{1+u_k^2}$ donc $\frac{1}{2}\sqrt{1+u_{k+1}^2} \le \frac{1}{2}\sqrt{1+u_k^2}$ c'est-à-dire $u_{k+1} \le u_k$.

Puisque $0 \le \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2} \le 2$, on conclut donc que $0 \le u_{k+1} \le 1$ n ce qui achève la phase d'héridité et la démonstration par récurrence.

La propriété P(n) est donc vraie pour tout n ∈ IN.

3) Puisque la suite (u_n) est décroissante (question 2) et minorée par 0 (question1) , elle est convergente.

Notons L sa limite.

4) Puisque pour tout n ∈ IN, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$, puisque f est continue sur IR, comme composée des fonctions carrée, affine $t \mapsto 1+t$, racine et linéaire $u \mapsto \frac{1}{2}u$, et puisque la suite (u_n) est convergente, sa limite L doit vérifier $L = f(L)$. Puisque pour tout n ∈ IN on a $u_n \ge 0$, on doit avoir $L \ge 0$.

Pour $L \ge 0$, on a les équivalence suivantes :

$$L = f(L) \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\sqrt{1+L^2}$$

$$\Leftrightarrow 4L^2 = 1+L^2 \Leftrightarrow L^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow L = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

II) Puisque la suite (v_n) est croissante (propriété (P_1)) est majorée par 1 (propriété (P_2)), elle est donc convergente.

Puisque pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} = f(v_n)$, où la fonction f est celle de la question I)4), la limite A de (v_n) est également positive et vérifie également

$$A = f(A) \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La suite (u_n) est décroissante, la suite (v_n) est croissante, Puisque les limites des suites (u_n) et (v_n) sont fines, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n$$

$$= A - L = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) vérifient donc les trois hypothèses nous permettant d'affirmer qu'elles sont adjacentes.

16 SE PERFECTIONNER

1) P_n, qui est évidement continue, est également strictement croissante sur IR_+ comme somme de fonction strictement croissante sur IR_+. De plus , $P_n(0)<0$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$, P_n réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$ et comme 0 est élément de $[P(0),+\infty[$, il existe un unique $u_n \in [0,+\infty[$ tel que $P(u_n) = 0$.

2) On a

$$P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + u_n^{n+1} \ge 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$$

Puisque P_n est croissante, on en déduit que $u_n \ge u_{n+1}$.

3) Remarquons que, $x \in]0,1[$, on a :

$$P_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{2x - 1 - x^{n+1}}{1-x}$$

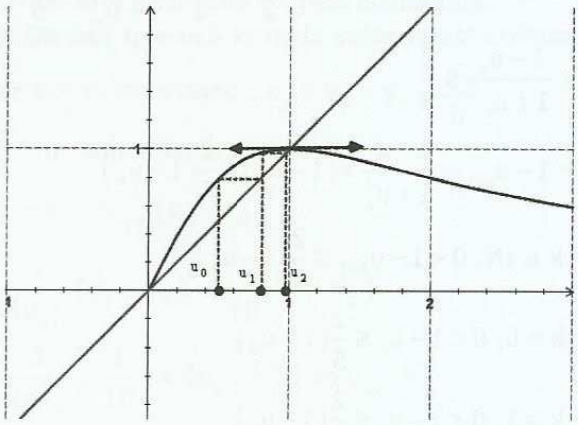
En particulier, on a $P_n(\frac{1}{2}) \le 0$, et donc, puisque P_n est croissante, on déduit $u_n \ge 1/2$ pour tout n.

4) Soit $\rho \in]1/2,1[$, alors pour tout n assez grand, d'après l'écriture précédente de P_n, $P_n(\rho) \ge 0$ puisque le numérateur converge vers $2\rho - 1 > 0$. Ainsi, toujours par croissnce de (P_n) , il existe un n_0 ∈ IN tel que pour tout $n \ge n_0$, on a : $\frac{1}{2} \le u_n \le \rho$

Ceci prouve exactement que (u_n) converge vers1/2.

17 SE PERFECTIONNER

1. a) et b)



c) (u_n) est croissante et elle converge vers 1.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout n de IN, on a : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

- Pour n = 0, $\frac{1}{2} \le u_0 = \frac{1}{2} < 1$
- Pour $n \ge 0$, supposons que $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ et

montrons que $\frac{1}{2} \le u_{n+1} < 1$

En effet : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ et f est strictement croissante sur $[0, 1] \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(u_n) < f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{4}{5} \le u_{n+1} < 1$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \le u_n < 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n^3}{1+u_n^2} = \frac{u_n(1-u_n^2)}{1+u_n^2} > 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante

De plus on a (u_n) est majorée par 1 donc elle est convergente

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\frac{1}{2} \le \ell \le 1$

$u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur IR donc en ℓ

$\Rightarrow f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$, or $\frac{1}{2} \le \ell \le 1$

$\Rightarrow \ell = 1$

3. a) Montrons que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$0 < 1 - u_{n+1} \le \frac{2}{5}(1-u_n)$

$1 - u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{1+u_n^2} = \frac{(1-u_n)^2}{1+u_n^2} = \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \times (1-u_n)$

Or $\frac{1}{2} \le u_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - u_n \le \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+u_n^2} \le \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \le \frac{2}{5}$

$\Rightarrow 0 < 1 - u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n^2} \times (1-u_n) \le \frac{2}{5}(1-u_n)$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 < 1 - u_{k+1} \le \frac{2}{5}(1-u_k)$

Pour k = 0, $0 < 1 - u_1 \le \frac{2}{5}(1-u_0)$

Pour k = 1, $0 < 1 - u_2 \le \frac{2}{5}(1-u_1)$

⋮

Pour k = n -1, $0 < 1 - u_n \le \frac{2}{5}(1-u_{n-1})$

On fait le produit membre à membre et on simplifie, on obtient : $0 < 1 - u_n \le \left(\frac{2}{5}\right)^n (1-u_0)$

$\Rightarrow 0 < 1 - u_n \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. a) $0 < 1 - u_k \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k \le u_k < 1$

5. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) \le \sum_{k=1}^{n} u_k < \sum_{k=1}^{n} 1$

$\Rightarrow n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) \le \sum_{k=1}^{n} u_k < n$

$\Rightarrow n - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\right) \le \sum_{k=1}^{n} u_k < n$

$\Rightarrow n - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \le S_n < n$.

b) $1 - \underbrace{\frac{1}{3n}}_{\searrow 0}\left(1 - \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\searrow 0}\right) \le \frac{S_n}{n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

18 SE PERFECTIONNER

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1. $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}$,

$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}$, $v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}$.

2. a.

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$

$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4}w$

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc $w_n = 1.\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}$; sa limite est évidemment 0.

3. On a vu que $\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=w_{n+1}>0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n=v_n-u_n>0$ donc $u_n>v_n$; enfin $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}v_n-v_n$

$=\frac{1}{2}(u_{n+1}-v_n)=\frac{1}{2}(\frac{u_n+v_n}{2}-v_n)=\frac{1}{4}(u_n-v_n)<0$

donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ or c'est justement la limite de w_n. Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant...).

4. a. $t_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$.

On a donc $t_n=\frac{1}{3}(u_0+v_0)=\frac{7}{3}$.

b. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite l donc à l'infini, en remplaçant dans t_n : $\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(l+2l)\Rightarrow l=\frac{7}{3}$

19 SE PERFECTIONNER

1. $v_0=\frac{7}{u_0}=\frac{7}{3}$; $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{3+\frac{7}{3}}{2}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$;

$v_1=\frac{7}{u_1}=\frac{7}{\frac{8}{3}}=\frac{21}{8}$;

$u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2}=\frac{64+63}{48}=\frac{127}{48}$;

$v_2=\frac{7}{u_2}=\frac{7}{\frac{127}{48}}=\frac{336}{127}$;

$u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2}=\frac{32257}{12192}\approx 2{,}64575$;

$v_3=\frac{7}{u_3}=\frac{7}{\frac{32257}{12192}}=\frac{85344}{32257}\approx 2{,}64575$.

Il semble que les suites tendent vers 2,64575... et que la convergence soit très rapide.

2. P_n : $u_n>0$ et $v_n>0$.

P_0 : $u_0=3>0$ et $v_0=7/3>0$: P_0 est vérifiée.

Supposons P_n vraie : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}>0$ puisque u_n et v_n sont positifs, et bien sûr il en résulte que $v_{n+1}=\frac{7}{u_{n+1}}>0$ On a bien, quel que soit n de $\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

3. a. $(u_n+v_n)^2-28=(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow (u_n+v_n)^2-(u_n-v_n)^2=28$

$\Leftrightarrow 2(2u_nv_n)=28\Leftrightarrow u_nv_n=7\Leftrightarrow v_n=\frac{7}{u_n}$

3. b. $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2=\frac{1}{4u_{n+1}}\left((u_n+v_n)^2-28\right)$

$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(\frac{(u_n+v_n)^2}{4}-7\right)$

$=\frac{1}{u_{n+1}}\left({u_{n+1}}^2-7\right)=u_{n+1}-\frac{7}{u_{n+1}}=u_{n+1}-v_{n+1}$.

3. c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1}-v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit n, c'est-à-dire en remplaçant n+1 par n, on a u_n-v_n positif pour $n\geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour n = 0 : $u_0-v_0=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}>0$. On a bien $u_n-v_n>0$ ou encore $u_n>v_n$.

4.

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}<0$

car $v_n-u_n<0$;

$v_{n+1}-v_n=\frac{7}{u_{n+1}}-\frac{7}{u_n}=\frac{7(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}u_n}>0$ car $u_{n+1}-u_n<0$ et $u_n>0$ quel que soit n. La suite (u_n) est bien décroissante et la suite (v_n) est croissante.

5. a. On sait que $u_n>v_n$ or la suite v_n est croissante, donc $v_n>v_1$, on a donc : $u_n>v_n>v_1=\frac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4u_{n+1}}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow 4u_{n+1}\geq 10\Leftrightarrow u_{n+1}\geq\frac{5}{2}$

Or on sait que $u_n>\frac{21}{8}>\frac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété P_n:

$u_n-v_n\leq\frac{1}{10^{2^n-1}}$.

Vérifions P_0 : $u_0 - v_0 = \frac{2}{3} < \frac{1}{10^{2^0-1}} = 1$, ok.

Démontrons P_{n+1} :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2 \le \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{\left(10^{2^n-1}\right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{(2^n-1)\times 2}}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^{2^n \times 2} \times 10^{-2}} = \frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}$$

5. d. On a $0 \le u_n - v_n \le \frac{1}{10^{2^n-1}}$ et on sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^{2^n-1}} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ (gendarmes).

6. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite λ. Celle-ci vérifie la relation $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{7}{\lim_{n\to+\infty} u_n} \Leftrightarrow l = \frac{7}{l} \Leftrightarrow l^2 = 7$; or $l>0$

donc $l = \sqrt{7}$.

7. $u_3 - v_3 \le \frac{1}{10^{2^3-1}} = \frac{1}{10^{8-1}} = 10^{-7}$: la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup...
On se trouve en présence d'une convergence dite quadratique.

8. Pour trouver $\sqrt{a}$, il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{a}{u_n}$ puisque si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles ont même limite l telle que $l = \frac{a}{l} \Leftrightarrow l^2 = a$. Les démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.

20 SUR LE CHEMIN DU BAC

a) Soit (P_n) la propriété : u_n et v_n , sont strictement positifs ; (P_0) vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $u_0>0$ et $v_n>0$, donc $u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$: donc pour tout entier n on a u_n et v_n sont trictement positifs.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

b)

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(v_n - n_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

et donc $v_{n+1} < u_{n+1}$; et d'où , $\forall n$, $u_n < v_n$.

c) On a $2x>0$; d'où $0 < y - x < y + x$ d'où $\frac{x-y}{x+y} < 1$

d'où $\frac{x-y}{2(x+y)} < \frac{1}{2}$.

Ainsi $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)(v_n - u_n)}{2(u_n + v_n)} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

Soit (P_n)la propriété : $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$; (P_1) vraie : supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie :

$$v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

donc (P_n) vraie pour tout entier n $n \ge 1$. f) Comme $0<1/2<1$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

g) La suite (u_n) est croissante :

$u_{n+1} - u_n = \frac{(v_n - u_n)u_n}{u_n + v_n} > 0$ et la suite (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = \frac{u - v_n}{2} W > 0$; et comme $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, donc ces deux suites sont adjacentes.

h) $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = u_0 v_0 = ab$,

donc le produit est constant, Comme les suites sont adjacentes. Elles convegent vers la même limite ℓ et on a $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell^2 = ab$ et donc $\ell = \sqrt{ab}$.

i) On pose a = 2 et t' = 3 les suites (u_n)et(v_n) convergent vers $\sqrt{6}$; on calcule donc les premiers termes de la suite et dès que la différence $(v_n - u_n)$ est inférieur à 10^{-5} on a $u_1 = \frac{12}{5}$ et $v_1 = \frac{5}{2}$; $u_2 = \frac{120}{49}$ et $v_2 = \frac{49}{20}$; $u_3 = \frac{11760}{9602}$ et $v_3 = \frac{4801}{1960}$

$v_3 - u_3 < 10^{-5}$ donc $\frac{11760}{4801} < \sqrt{6} < \frac{4801}{1960}$.

Dérivabilité

I) Résumé du cours

A) Dérivée d'une fonction composée

- Si u est une fonction dérivable en x_0 et f une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors la fonction $f \circ u$ est dérivable en x_0 et : $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur $u(I)$, alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$, pour tout réel x de I.

B) Théorème des accroissements finis

- ***Théorème 1 :*** (théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b] et vérifiant : f(a) = f(b)
Si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un élément x_o de]a, b[tel que $f'(x_o) = 0$

- ***Théorème 2 :*** (théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b]
Si f est dérivable sur]a, b[alors il existe au moins un élément x_o de]a, b[tel que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- ***Théorème 3 :***

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b], dérivable sur]a, b[
On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour $x \in]a, b[$, on a alors $m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

- ***Théorème 4 :***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in I$, on a alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous réels a et b de I

C) Point d'inflexion :

Soit f une fonction définie sur un domaine D et (Cf) sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

On dit qu'un point I(a, f(a)) est un point d'inflexion de (Cf) si et seulement si : (Cf) traverse sa tangente au point I
Dans le cas d'une fonction deux fois dérivable en a, I(a, f(a)) est un point d'inflexion de (Cf) si et seulement si : f '' (x) s'annule en a et change de signe

Exemple :

Soit f(x) = $x^3 - 6x^2 + 9$

I(2, - 7) ∈ (Cf) et (T) : y = - 12 x + 17 est la tangente à (Cf) en I

f(x) – (- 12x + 17) = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$

(Cf) est au dessous de (T) sur]- ∞, 2] et (Cf) est au dessus de (T) sur [2, + ∞[

⇒ I(2, - 7) est un point d'inflexion de (Cf)

D) Dérivée et sens de variation

✷ ***Du sens de variation au signe de la dérivée***

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I. (continue sur I , et dérivable sur l'intérieur de I suffit ...)

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I , f '(x) ≥ 0
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I , f '(x) ≤ 0
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I , f '(x) = 0

✷ ***Du signe de la dérivée au sens de variation***

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I. (continue sur I, et dérivable sur l'intérieur de I suffit)

- Si pour tout x de I, f '(x) ≥ 0, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, f '(x) ≤ 0, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, f '(x) = 0, alors f est constante sur I.

Si la dérivée f ' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

II) Exercices

1/ *Q-C-M*

Soit f une fonction définie et dérivable sur]- 5, + ∞[dont le tableau de variation est le suivant :

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

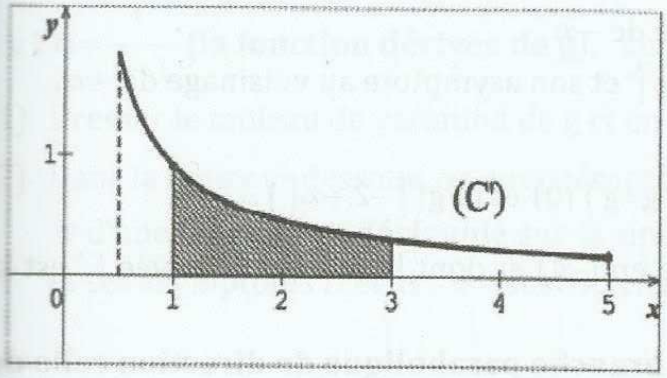
On désigne par (C) la courbe représentative de f

1) Sur l'intervalle]-5, + ∞[, l'équation $f(x) = -2$ admet :
   a) Une seule solution
   b) Exactement deux solutions
   c) Quatre solutions

2) Sachant que $f'(2) = 0$ l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 2 est :
   a) $y = 4$
   b) $y = 4(x - 2)$
   c) $x = 4$

3) sur l'intervalle [-1, 0], la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est :
   a) strictement croissante
   b) strictement décroissante
   c) n'est pas monotone

2 VRAI– FAUX (*session principale 2012*)

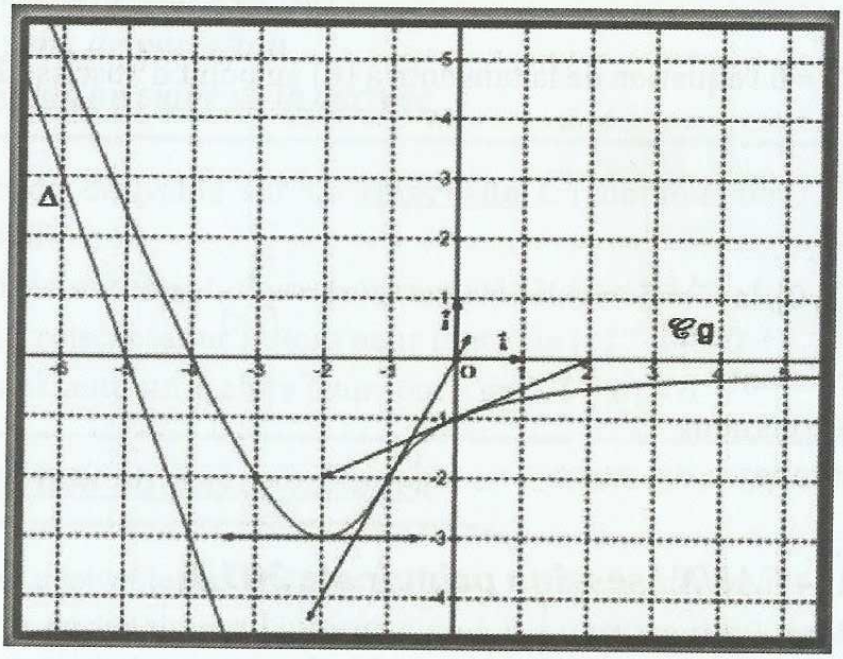


Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$
Telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1, 0) et B(3, 1). Dans la figure ci contre on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur – 1
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1 (Question à traiter plus tard dans le chapitre « calcul intégral »)
3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$
4) Pour tous a et b de [1, 3], on a $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$

3 APPLIQUER

Dans le graphique ci-dessous **cg** est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g dérivable sur IR.



cg Possède une asymptote oblique Δ au voisinage de $-\infty$.

L'axe des abscisses est au dessus de **cg** sur $[-4\ ;+\infty[$ et son asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) Déterminer par une lecture graphique :

$$\lim_{x\to+\infty} g,\ \lim_{x\to-\infty}\big(g(x)+3x\big),\ g\circ g(0),\ (g\circ g)'(0) \text{ et } g\circ g\big([-2,+\infty[\big).$$

2) Soit f la fonction dérivable sur IR qui s'annule en (−4) et dont la fonction dérivée f ' est la fonction g.

La courbe **cf** représentative de f possède **une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses** au voisinage de $+\infty$ et **une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées** au voisinage de $-\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de f sur IR et donner $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Justifier que **cf** possède un unique point d'inflexion I qu'on précisera l'abscisse.

4 APPLIQUER

La fonction f est définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$.

Vérifier que la fonction f est la composée d'une part des fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto\dfrac{1}{x+3}$ et d'autre part des fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto x^2+3$.

Calculer la fonction dérivée de f en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées en utilisant les deux décompositions.

5/ APPLIQUER

Les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ sont dérivables sur un intervalle I. préciser I et calculer leur dérivée sur cet intervalle.

1) $f:x\mapsto -2x+1$ et $g:x\mapsto x^2-6x+4$

2) $f:x\mapsto 3x^2+6$ et $g:x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

3) $f:x\mapsto \sqrt{x}$ et $g:x\mapsto x^2-1$

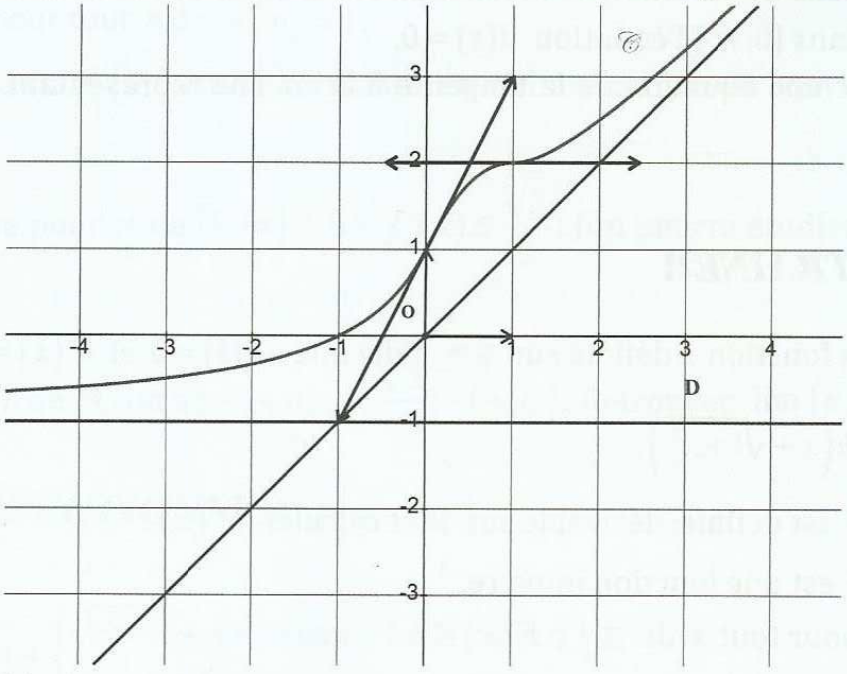
4) $f:x\mapsto x^3$ et $g:x\mapsto \dfrac{1}{x}$

6/ APPLIQUER

Soit g une fonction **dérivable** sur $]-1,+\infty[$ qui **s'annule en 1** telle que pour tout $x>-1$, $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **(la fonction dérivée de g)**, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

1) Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$

2) Dans la figure ci-dessous, on a représenté, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f **dérivable** sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et ses asymptotes D et Δ. $\mathscr{C}$ est strictement au dessus de ses asymptotes.



Déterminer $g\circ f(0)$, $(g\circ f)'(0)$, $\lim\limits_{-\infty} g\circ f$, $g\circ f(\mathbb{R}_-)$

7 S'ENTRAINER

Soit f la fonction définie sur]0, π] par $f(x) = \dfrac{-1 + x\sin x}{x}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur]0, π] et calculer f ′ (x)

b) Dresser le tableau de variation de f ′. En déduire l'existence d'un unique réel x_0 de]0, π] tel que $f'(x_0) = 0$

c) Donner alors le signe de f ′ (x) sur]0, π]

2) a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire la position du réel x_0 par rapport à $\frac{\pi}{2}$ ainsi que le signe de $f(x_0)$

b) Montrer alors que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions p et q sur]0, π]

8 S'ENTRAINER

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par : $f(x) = \cos\sqrt{x}$

1) a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner f ′ (0)

2) a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer f ′ (x).

b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) a) Résoudre dans $[0, \pi^2]$ l'équation : f(x) = 0.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$.

9 S'ENTRAINER

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1) = 0$ et $h'(x) = \dfrac{1}{x}$

On pose $F(x) = h\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1) Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2) Montrer que F est une fonction impaire.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$; $F(x) \leq x$.

10 S'ENTRAINER

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de IN, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^2\right)$.

1. Soit la fonction définie sur [1,2] par $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

   a) Montrer que f est dérivable sur [1,2] et que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

   b) En déduire que pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

   b) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

   c) En déduire que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.

11 S'ENTRAINER

On définit dans $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

3) a) Démontrer que pour x de $[1, +\infty[$: $0 < f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. (on pourra étudier les variations de f' sur $[1, +\infty[$).

   b) Déduire pour n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 + u_{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + u_n)$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

12 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - x + \pi & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité de f en 1.

2) a) Montrer que : $\forall x > 1$, on a : $f(x) \geq \sqrt{x^2 - 1} + \pi x$.

b) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]1; +\infty[$.

b) Prouver que : $\forall x > 1$, on a : $f'(x) > 0$.

4) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) L'équation $f(x) = 0$ possède - t- elle des solutions dans IR.

7) Soit la fonction $h : [0, \pi] \to IR$; $x \mapsto h(x) = f(3 + \sin x)$.

a) Justifier la dérivabilité de h sur $[0, \pi]$ et calculer h'(x).

b) Dresser le tableau de variation de h.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x} & \text{si } x \in]0, 2] \\ x - \dfrac{4}{x} & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1) a) Montrer que f est continue en 2.

b) Etudier la dérivabilité en 2.

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, 2[$, $f'(x) = \dfrac{-4}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

d) Tracer (ζ) (On précisera les demi tangentes au point d'abscisse 2)

14 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur]- 1, 1[par f(x) = 1 - $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (on prendra 2 cm comme unité graphique).

1) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Montrer que pour tout réel x de] – 1, 1 [, f ' (x) = $\dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; puis dresser le tableau de variation de f.

3) a) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Tracer (C_f) et Δ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans] – 1, 1 [une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout réel x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $|f'(x)| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

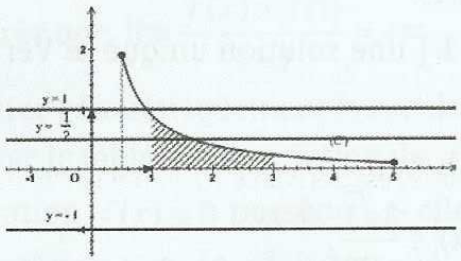
c) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $|f(x) - \alpha| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}|x-\alpha|$.

1 Q-C-M

1. b)
2. a)
3. a)

2 VRAI OU FAUX

Vrai – Faux :



1) $\forall x \in \left[\frac{1}{2},5\right]$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \neq -1$

$\Rightarrow$ (C) n'admet aucune tangente de coefficient directeur – 1 **(Faux)**

2) $A = \int_1^3 f'(x)dx = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1$

(Vrai)

3) La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe

(C ') en un point donc il existe un réel $c \in \left[\frac{1}{2},5\right]$ tel

que $f'(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (C) admet une tangente de

coefficient directeur $\frac{1}{2}$ **(Vrai)**

Autrement : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [1,3] \\ f \text{ est dérivable sur }]1,3[\end{cases} \Rightarrow$ il existe au

moins un réel $c \in]1, 3[$ tel que

$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (C) admet une tangente

de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

4) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,3] \\ \forall x \in [1,3],\ |f'(x)| \leq 1 \end{cases}$ Théorème des accroissements finies $\Rightarrow$

pour tous réels a et b de [1, 3], on a :

$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ **(Vrai)**

3 APPLIQUER

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{0}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) + 3x) = \boxed{-15}$,

$g \circ g(0) = g(-1) = \boxed{-2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{0}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{+\infty}$

$(g \circ g)'(0) = g'(0) \times g'(g(0)) = g'(0) \times g'(-1) = \frac{1}{2} \times 2 = \boxed{1}$

et $g \circ g([-2,+\infty[) = g([-3,0[) = \boxed{[-3,-1[}$

2) a)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		+	0	–	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

3)

b)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$		+	0	–	

4 APPLIQUER

$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $x \in [1, +\infty[$

cf possède un unique point d'inflexion I d'abscisse **–2.**

Considérons les fonctions : $x \overset{h}{\mapsto} x^2$; $x \overset{g}{\mapsto} x^2 + 3$; $x \overset{v}{\mapsto} \frac{1}{x+3}$;

$x \overset{h}{\mapsto} \frac{1}{x}$ et $x \overset{g}{\mapsto} x^2 + 3$

$\Rightarrow f(x) = v \circ u(x) = h \circ g(x)$

$f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \times \left(-\frac{1}{(x^2+3)^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = g'(x) \times h'(g(x))$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \times \left(-\frac{1}{(x^2+3)^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

5 APPLIQUER

1. $f : x \mapsto -2x + 1$ et $g : x \mapsto x^2 - 6x + 4$

$f \circ g$ est dérivable sur IR et on a :

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = (2x - 6) \times (-2) = -4x + 12$

$g \circ f$ est dérivable sur IR et on a :

$(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

$\Rightarrow (g\circ f)'(x)=-2\left[2(-2x+1)-6\right]=8x+8$

2. $f:x\mapsto 3x^2+6$ et $g:x\mapsto\dfrac{x+1}{x+2}$

$f\circ g$ est dérivable sur IR \ {-2} et on a :

$(f\circ g)'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}\times 6\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\dfrac{6(x+1)}{(x+2)^3}$

$g\circ f$ est dérivable sur IR et on a :

$(g\circ f)'(x)=\dfrac{6x}{(3x^2+8)^2}$

3. $f:x\mapsto\sqrt{x}$ et $g:x\mapsto x^2-1$

$f\circ g$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et on a :

$(f\circ g)'(x)=2x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$g\circ f$ est dérivable sur IR^*_+ et on a :

$(g\circ f)'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}=1$

4. $f:x\mapsto x^3$ et $g:x\mapsto\dfrac{1}{x}$

$f\circ g$ est dérivable sur IR* et on a :

$(f\circ g)'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\times 3\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{-3}{x^4}$

$g\circ f$ est dérivable sur IR* et on a :

$(g\circ f)'(x)=3x^2\times\left(\dfrac{-1}{x^6}\right)=\dfrac{-3}{x^4}$

6 APPLIQUER

1)

x	$-\infty$	−1	+∞
g '(x)		+	
g(x)	$+\infty$		+∞

Si $-1<x<1$ alors $g(x)<g(1)\Rightarrow g(x)<0$

Si $x>1$ alors $g(x)>g(1)\Rightarrow g(x)>0$

Si $x=1$ alors $g(x)=0$

2) $g\circ f(0)=g(1)=0$;

$(g\circ f)'(0)=f'(0)\times g'(f(0))=2\times g'(1)=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\begin{cases}\lim\limits_{-\infty} f=(-1)^+\\ \lim\limits_{(-1)^+} g=-\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{-\infty} g\circ f=-\infty$

$g\circ f(\mathbb{R}_-)=g(]-1,1])=\left]\lim\limits_{(-1)^+} g,g(1)\right]=]-\infty,0]$

7 APPLIQUER

1) a) $\forall x\in]0,\pi]$, on a $f(x)=\dfrac{-1+x\sin x}{x}=$

$\dfrac{-1}{x}+\sin x$

$\left(x\mapsto\dfrac{-1}{x}\right)$ est dérivable sur IR* en particulier sur $]0,\pi]$

$(x\mapsto\sin x)$ est dérivable sur IR en particulier sur $]0,\pi]$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,\pi]$ comme étant la somme de deux fonctions dérivables

Et on a $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\cos x$

b) $f''(x)=\dfrac{-2}{x^3}-\sin x\le 0$

x	0	π
f''(x)	-	
f'(x)	$+\infty$	$\frac{1}{\pi^2}-1$

$f'(]0,\pi])=[\dfrac{1}{\pi^2}-1,+\infty[$

$0\in[\dfrac{1}{\pi^2}-1,+\infty[\Rightarrow$ il existe $x_0\in]0,\pi]$ tel que $f'(x_0)=0$, or f' est strictement décroissante sur $]0,\pi]\Rightarrow x_0$ est unique

c)

x	0	x_0	π
f'(x)	+	0	-

2) a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}+1$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}>0\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<x_0$

$0<\dfrac{\pi}{2}<x_0$ et $f'(x)\ge 0\ \forall x\in]0,x_0]\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]0,x_0]$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x_0) \Rightarrow -\frac{2}{\pi} + 1 < f(x_0) \Rightarrow f(x_0) > 0$

b)

x	0		x_0		π
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	$\frac{1}{\pi}$

$f([0, x_0]) =]-\infty, f(x_0)]$ et $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 \in]-\infty, f(x_0)] \Rightarrow$ il existe $p \in]0, x_0]$ tel que $f(p) = 0$ or f est strictement croissante sur $]0, x_0] \Rightarrow$ p est unique

$f([x_0, \pi]) = [-\frac{1}{\pi}, f(x_0)]$ et $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 \in [-\frac{1}{\pi}, f(x_0)] \Rightarrow$ il existe $q \in [x_0, \pi]$ tel que $f(q) = 0$ or f est strictement décroissante sur $[x_0, \pi] \Rightarrow$ q est unique

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes p et q dans $]0, \pi]$

8 S'ENTRAINER

$f(x) = \cos\sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \pi^2]$.

1. a) Pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) = \cos\sqrt{x} = \cos\left(2\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow f(x) - 1 = 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

Cos2a = cos²a – sin²a = 2cos²a – 1 = 1 – 2sin²a

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. a) f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée.

Soit $U(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \pi^2]$.

U est dérivable sur $]0, \pi^2]$; $U(]0, \pi^2]) =]0, \pi]$

Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $]0, \pi]$

$\Rightarrow f = \cos \circ U$ est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et on a :

$f'(x) = U'(x) \times [-\sin(U(x))] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, \pi^2]$

Ainsi $\forall x \in [0, \pi^2]$,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in]0, \pi^2] \\ -\frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

b) Si $x \in]0, \pi^2]$ alors $0 < \sqrt{x} \leq \pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \geq 0$ $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ $\forall x \in]0, \pi^2]$.

x	0		π^2
f'(x)	$-\frac{1}{2}$	−	0
f(x)	1	↘	−1

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{x} \in [0, \pi] \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$

b) Soit (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$

$(T) : y = f'(\frac{\pi^2}{4})(x - \frac{\pi^2}{4}) + f(\frac{\pi^2}{4})$

$= -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$

Remarque : La courbe de f est donnée ci – dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.

9 S'ENTRAINER

h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1) = 0$ et $h'(x) = \frac{1}{x}$

(C'est une fonction qu'on va l'étudier plus tard appelée fonction logarithme népérien)

On pose $F(x) = h\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1. Domaine de définition de F :

$\forall x \in$ IR, $1 + x^2 > x^2 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$

Puisque h est définie sur $\mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow F(x) = h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est définie sur IR.

Domaine de dérivabilité de F :

$\left(\overset{U}{x \mapsto 1+x^2}\right)$ est dérivable et strictement positive sur IR $\Rightarrow \sqrt{U}$ est dérivable sur IR

$\Rightarrow \left(x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable sur IR

$$\left.\begin{array}{l}\left(\overset{V}{x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}}\right) \text{ est dérivable sur IR} \\ h \text{ est dérivable sur } IR_+^* \\ V(IR) \subset IR_+^*\end{array}\right\} \Rightarrow$$

F = h o V est dérivable sur IR.

Calcul de dérivée de F :

$F'(x) = V'(x) \times h'(V(x))$

$$= \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$\forall x \in$ IR.

2. Parité de F :

Soit $H(x) = F(x) + F(-x)$, $\forall x \in$ IR.

H est dérivable sur IR (n'oublier pas de traiter $F(-x)$ comme composée de deux fonctions dérivables sur IR)

$H'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0$ car F' est paire.

$\Rightarrow$ H est une constante

Or $H(0) = 2F(0) = 2h(1) = 0$

$\Rightarrow H(x) = F(x) + F(-x) = 0$, $\forall x \in$ IR

$\Rightarrow F(-x) = -F(x)$, $\forall x \in$ IR.

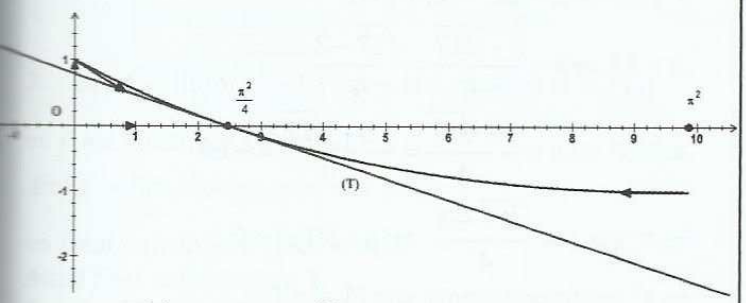
$\Rightarrow$ F est une fonction impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\left.\begin{array}{l}F \text{ est dérivable sur } [0,x] \\ \forall t \in [0,x],\ F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1\end{array}\right\} \Rightarrow |F(x) - F(0)| \le |x|$$

(D'après le théorème des accroissements finis)

$\Rightarrow |F(x)| \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.



$\Rightarrow -x \le F(x) \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Autrement :

On aurait pu démontrer l'inégalité précédente par une étude de fonction.

On pose $G(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}_+$

G est dérivable sur IR et on a : $G'(x) = F'(x) - 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$$

$\Rightarrow$ G est strictement décroissante sur IR

$\Rightarrow$ Si $x \ge 0$ alors $G(x) \le G(0) \Rightarrow G(x) \le 0 \Rightarrow F(x) \le x$.

10 S'ENTRAINER

1. a) f est une fonction polynôme dérivable sur IR en particulier sur [1, 2] et on a :

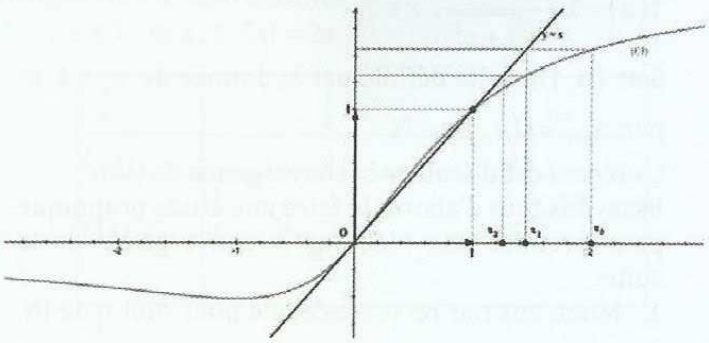
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x \Rightarrow |f'(x)| = f'(x) \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in [1,2]$$

b) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ |f'(x)| \le \dfrac{1}{2} \ \forall x \in [1,2] \\ \sqrt{2} \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [1,2]$, on a :

$$\left|f(x) - f\left(\sqrt{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$$

2. a) Pour $n = 0$, $1 \le u_0 = 1 \le 2$

pour $n \ge 0$, supposons que $1 \le u_n \le 2$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le 2$



En effet : $1 \le u_n \le 2$ et f est strictement croissante sur [1,2] $\Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

$$\Rightarrow 1 < \frac{5}{4} \le u_{n+1} \le \frac{3}{2} < 2$$

Ainsi pour tout n de IN, $1 \le u_n \le 2$.

b) Pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$

et $1 \le u_n \le 2 \Rightarrow \left|f(u_n) - f\left(\sqrt{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

c) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour n = 0, $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Pour $n \ge 0$, supposons que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

En effet : $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$ et $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Ainsi $\forall\, n \in IN, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Rightarrow (u_n)$ converge et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \sqrt{2}$

11 S'ENTRAINER

$f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.

L'objectif est d'étudier la convergence de suite.

Essayons tout d'abord de faire une étude graphique pour prendre une idée sur la convergence de la suite.

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 1$

- Pour n = 0, $u_0 > 1$ (donnée)
- Pour $n \ge 0$, supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$

En effet : $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}}$

$\Rightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{\overbrace{u_n - 1}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1+u_n^2}}_{>0}} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 1$

Ainsi : $\forall\, n \in IN$, $u_n > 1$.

2. $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n$

$= \underbrace{(u_n - 1)}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1\right)}_{<0} < 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n$, on a $\ell \ge 1$.

$u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue sur IR en particulier en $\ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$

$\Rightarrow 1 + \frac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \Rightarrow \frac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell - 1$

$\Rightarrow (\ell - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \ell = 1$ ou $\sqrt{1+\ell^2} = 1$

(c a d $\ell = 0$) Or $\ell \ge 1 \Rightarrow \ell = 1$.

3. Autre procédé de convergence :

a) $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (x-1)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$= \frac{1+x^2-x^2+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$

$\forall\, x \ge 1$

$f'(x) = \frac{1+x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+$

$= \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1+x^2) - 3x(1+x)\right]}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x^2-3x+1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 17 \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{-4} = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$

≈ 0.28 ou $x = \frac{3+\sqrt{17}}{-4} = -\frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx -1.7$

$\Rightarrow \forall\, x \ge 1 > \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, on a : $f''(x) < 0$

$\Rightarrow f'$ est décroissante sur $[1, +\infty[$

$\Rightarrow \forall\, x \ge 1$, on a $f'(x) \le f'(1) \Rightarrow f'(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b)

•

f est dérivable sur $[1,+\infty[$

$|f'(x)| = f'(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_n \in [1,+\infty[$

$\Rightarrow |f(u_n) - f(1)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - 1|$

(D'après le théorème des accroissements finis)

$|u_{n+1} - 1| = u_{n+1} - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1)$

$0 < u_{k+1} - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}(u_k - 1)$

Pour k = 0, $0 < u_1 - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}(u_0 - 1)$

Pour k = 1, $0 < u_2 - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 - 1)$

⋮

•

⋮

Pour k = n - 1, $0 < u_n - 1 \le \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{n-1} - 1)$

On fait le produit terme à terme

et on simplifie on obtient : $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (u_0 - 1)$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (u_0 - 1) = 0$ car $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1,1[\Rightarrow$

(u_n) converge et elle tend vers 1.

12 S'ENTRAINER

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2-1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - x + \pi & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

1. $\lim_{1^-} f = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1} + \pi x + \cos \pi x + 1 = \pi = f(1)$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 1

$\lim_{1^-} f = \lim_{x\to 1^-} x^2 - x + \pi = \pi = f(1)$

$\Rightarrow f$ est continue à gauche en 1

Ainsi f est continue en 1.

2. a) $\forall$ x $\in$ IR, on a : $\cos \pi x \ge -1 \Rightarrow \cos \pi x + 1 \ge 0$

$\Rightarrow \forall x > 1$, on a : $f(x) \ge \sqrt{x^2-1} + \pi x$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} + \pi x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. a) $\left(x \mapsto \sqrt{x^2-1}\right)$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ en particulier sur $]1, +\infty[$

$(x \mapsto \pi x + \cos \pi x + 1)$ est dérivable sur IR en particulier sur $]1, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme étant la somme de deux fonctions dérivables

b) $\forall x > 1$, on a :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}_{>0} + \underbrace{\pi - \pi \sin(\pi x)}_{\ge 0} > 0.$$

4. $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{\pi x - \pi}{x-1} + \frac{\cos(\pi x)+1}{x-1}$

Or $\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} \frac{\pi x - \pi}{x-1} = \pi$ et $\lim_{x\to1^+} \frac{\cos(\pi x)+1}{x-1} = -\pi \sin \pi = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 1

La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en 1.

5. $\forall x \le 1$, on a : $f'(x) = 2x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\pi - \frac{1}{4}$	↗		$+\infty$

6. $\pi - \frac{1}{4}$ est un minimum absolu de f sur IR

$\Rightarrow f(x) \ge \pi - \frac{1}{4}, \forall x \in$ IR

Or $\pi - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in$ IR

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas des solutions dans IR.

7. $h(x) = f(3 + \sin x)$, $\forall x \in [0, \pi]$

a) $\begin{cases} \left(x \overset{u}{\mapsto} 3+\sin x\right) \text{ est dérivable sur } [0,\pi] \\ f \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ u([0,\pi]) = [3,4] \subset [1,+\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow$ h = f o u est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a :

$h'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \cos x \times \underbrace{f'(u(x))}_{>0}$

b) Le signe de h ′ (x) est celui de cos x sur [0, π]

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$f(3)$ ↗	$f(4)$	↘ $f(3)$

13 SE PERFECTIONNER

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0,2] \\ x - \dfrac{4}{x} & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \left(\dfrac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x - \dfrac{4}{x}}_{\searrow 0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de + ∞.

2) a) $\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = 0$

$\lim\limits_{2^+} f = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x - \dfrac{4}{x} = 0$

$\lim\limits_{2^-} f = \lim\limits_{2^+} f = f(2) \Rightarrow f$ est continue en 2.

b)

☛ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4-x^2}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)(2+x)}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} -\dfrac{2+x}{x\sqrt{4-x^2}}$

$= \left(-\dfrac{4}{0^+}\right) = -\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en 2.

☛ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-\dfrac{4}{x}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x} = 2$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$.

Ainsi f n'est pas dérivable en 2.

3) a) $\forall\ x \in]0,2[,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right) - \sqrt{4-x^2}}{x^2} = \dfrac{-x^2-4+x^2}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

$= -\dfrac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

b) $\forall\ x \in]2,+\infty[,\ f(x) = x - \dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

c) Tableau de variation de f:

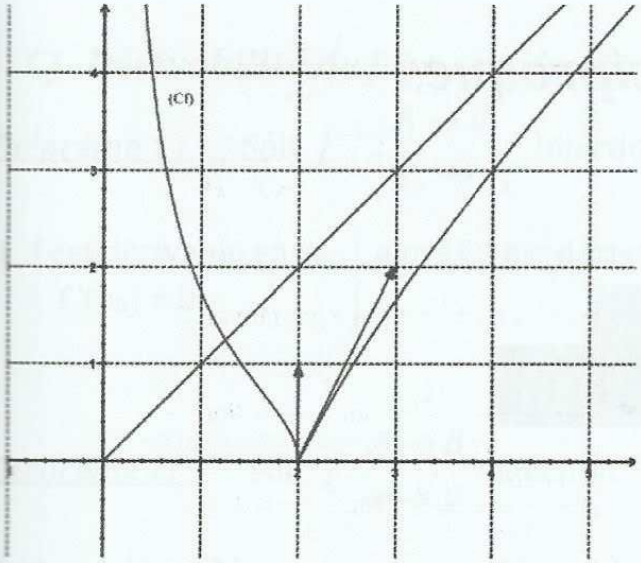
x	0	2	+∞
$f'(x)$	‖ −	+	
$f(x)$	‖ +∞ ↘	0 ↗	+∞

d) Traçage :

Les demi-tangentes au point d'abscisse 2 :

☛ (ζ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche en 2 ayant pour équation : $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq f(2) = 0 \end{cases}$

☛ (ζ) admet une demi-tangente à droite en 2 ayant pour équation : $\begin{cases} y = 2(x-2) \\ x \geq 2 \end{cases}$



14 SE PERFECTIONNER

Soit f la fonction définie sur]−1,1[par $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

⇒ Les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont deux asymptotes verticales à (C_f).

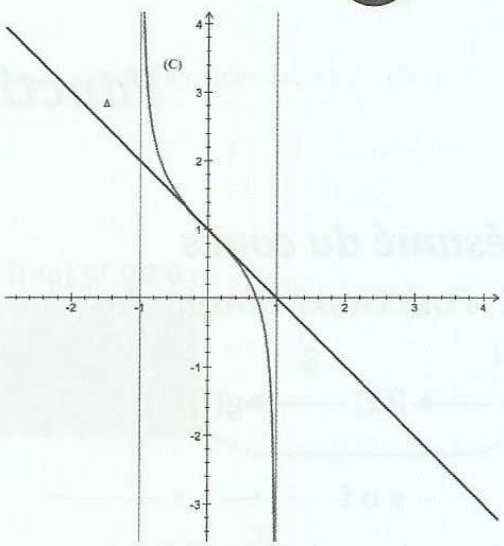
2) $f'(x) = -\dfrac{1\times\sqrt{1-x^2} - x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$= -\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	‖ $-\infty$

3) a) $\Delta : y = f'(0)x + f(0) = -x + 1$

b)



4) a) On pose $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in]-1, 1[$
φ est dérivable sur]-1, 1[et on a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$, pour tout $x \in]-1, 1[$
φ est continue et strictement décroissante sur]-1, 1[donc φ réalise une bijection de]-1, 1[sur $\varphi(]-1, 1[) =]-\infty, +\infty[$
$0 \in]-\infty, +\infty[$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α dans]-1, 1[.
$\varphi(0) = f(0) = 1 > 0$

$\varphi(1/2) = f(1/2) - ½ = ½ - \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < ½.$

b) Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Or $0 \le x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le 1 - x^2 \le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \le (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow |f'(x)| = \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}, \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

c)

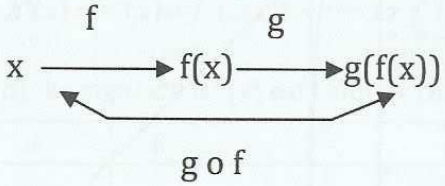
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ |f'(x)| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}, \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Théorème des accroissements finies}} |f(x) - f(\alpha)| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$$

$$\Rightarrow \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \le \frac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$$

Fonctions réciproques

I) Résumé du cours

A) Fonctions composées :



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Thé : si f est dérivable sur I
+
g est dérivable sur f(I)
} alors g o f est dérivable sur I $\forall x \in I$

$(g \circ f)'(x) = \left(g(f(x))\right)' = f'(x)\, g'(f(x))$

B) Fonction bijective :

Définition :

$f : \begin{matrix} A \to B \\ x \to y \end{matrix}$ est bijective **si et seulement si** $\forall y \in B$ il existe un seul réel $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Remarque:

Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} existe: $f^{-1} : \begin{matrix} B \to A \\ y \to x \end{matrix}$

On a alors :

- $\forall x \in A$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B$ on a $f(f^{-1}(y)) = y$
- $(x \in A \text{ et } f(x) = y) \Leftrightarrow (y \in B \text{ et } x = f^{-1}(y))$ $x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} y$

Théorème :

Soit f une fonction ***strictement monotone*** sur I on a alors :

- f est bijective de I sur $f(I)$.
- f et f^{-1} ont le même sens de variation.
- Cf et Cf^{-1} sont symétrique par rapport à $\Delta : y = x$.
- Si de plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f(I)$.

$$M(x, y) \xrightarrow{S_\Delta} M'(y, x)$$

C) Dérivabilité de f^{-1}

Théorème 1 : Soit $f^{-1} : \begin{matrix} A \to B \\ y_0 \to x_0 \end{matrix}$ bijection

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ } alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Théorème 2: Soit $f : \begin{matrix} A \to B \\ x \to y \end{matrix}$ bijection

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ } alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a : $\forall y \in f(I)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

où $x = f^{-1}(y)$

D) Fonction racine $n^{ième}$:

Théorème et définition :

n étant un entier naturel $(n \geq 2)$; $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ; x \to x^n$ f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction réciproque de f est appelé la fonction racine $n^{ième}$: $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ; x \to \sqrt[n]{x}$.

Propriétés des radiaux :

1) La fonction racine $n^{ième}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise une bijection $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt[n]{x^n} = x$.

3) Soit p un entier naturel non nul et n un entier, $n \geq 2$; on a : $\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$.

4) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, n et p entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 2$, on a : $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$.

5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, n et p entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 1$, on a : $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$.

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$.

7) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

Equation $x^n = a$: (Soit n entier naturel tel que $n \geq 2$ et a un réel non nul)

$x^n = a$	n pair	n impair
a > 0	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
a < 0	$S = \phi$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Remarque : si a est nul, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S = \{0\}$.

E) Exposants Rationnels :

Soient x réel strictement positif, r un rationnel et $\frac{p}{q}$ un représentant de r ; $(p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}^*)$. On appelle puissance à exposant r du réel x, le réel noté x^r définie par : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

Propriétés : Pour (x, y) $\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $(r, r') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, on a :

$x^r . x^{r'} = x^{r+r'}$	$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r.r'}$	$(xy)^r = x^r . y^r$	$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Dérivée de la fonction racine $n^{ième}$:

Pour tout entier $n \geq 2$; la fonction $x \to \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, définie sur $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa fonction dérivée est : $x \to \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

II) Exercices

1/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Soit f une fonction continue dérivable sur $]-\infty, 3]$ On donne $f(0) = 4$, $f(2) = 0$ et $f'(0) = 2$

x	$-\infty$		3
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	↗	5

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) f réalise une bijection de $]-\infty, 3]$ sur $]-\infty, 5]$

2) f^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty, 5]$

3) f^{-1} est continue sur $]-\infty, 5]$

4) f^{-1} est dérivable en 4 et $\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{2}$

5) f^{-1} est dérivable à gauche en 5

6) f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,5[$

7) a) L'équation $f(x)=\frac{5}{n}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ admet une unique solution α_n sur $]-\infty,3]$

b) (α_n) est décroissante

c) (α_n) est convergente

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

2/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Soit f un fonction bijective de I sur I et tel que la fonction réciproque de f est f.

On a la droite D : y = x est un axe de symétrie de Cf.

2) Soit f une fonction bijective de $[-5,5]$ sur $[-5,5]$

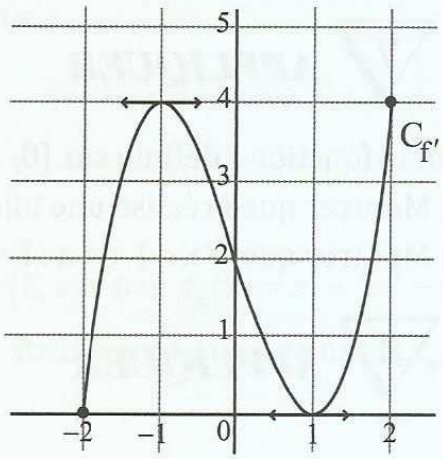
Si f est impaire alors f^{-1} est impaire.

3) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Si f n'est pas dérivable à droite en 2 alors f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $f(2)$.

3/ Q-C-M ; FAUX OU VRAI

Le graphique ci-contre représente la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée f' de f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur $f([-2,2])$.

2) f admet un minimum local en 1.

3) La courbe de f admet deux points d'inflexions.

4/ APPLIQUER

On considère les fonction f et g définie sur IR par :

f(x) = x^4-6x^2+20x et g(x) = x^3 – 3x+5

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\alpha\in$]- 3 , - 2[.

3) Déterminer le signe de g(x).

4) Donner un encadrement de α à 0.1 prés

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Montrer que $f(\alpha) = -3\alpha^2 + 15\alpha$

5 APPLIQUER

On définit les deux fonctions : g :]0, π [$\rightarrow$ IR h :]0, π [$\rightarrow$ IR

$x \rightarrow$ cotan x – 2x $x \rightarrow x\cos^2 x$

1) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans]0, π [une unique solution α et que le réel $\alpha \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$. Donner le signe de g (x) sur]0, π [.

2)

b) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a : h' (x) = sinx cosx g (x)

c) Dresser le tableau de variation de h.

6 APPLIQUER

f :]-1, 1[$\rightarrow$ IR $x \rightarrow \tan(\frac{\pi}{2}x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de]-1, 1[sur un intervalle J.

2) Etudier la parité de f^{-1}.

3) Soit C la courbe de f et C ' la courbe de g avec $g(x) = f^{-1}(-x)$, $x \in$ IR.

Montrer que C' = r (C) avec r est une rotation que l'on précisera.

7 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur [0, π] par f (x) = cos x.

a) Montrer que f réalise une bijection de [0, π] sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que $\forall x \in$ J on a : $f^{-1}(-x) = \pi - f^{-1}(x)$.

8 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2+1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer Cf dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on précisera.

9 APPLIQUER

Soit la fonction définie par f(x) = $1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Etudier f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3) Déterminer une valeur approchée de α à 0,1 près.

10 APPLIQUER

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$, l'équation f(x) = n possède une unique solution notée x_n sur IR.
2) Montrer que la suite (x_n) est croissante.
3) Montrer que $\forall n \geq 1, n \leq x_n \leq n+1$ et En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

11 S'ENTRAINER

Soit la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x)=x^n+1-nx$ $,n \in IN^*$

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x)=0$ possède dans $[0,1]$ une unique solution x_n.
2) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$, En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4) En déduire la monotonie de la suite (x_n).

12 S'ENTRAINER

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n+9n^2-4$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution strictement positive notée x_n.
2) Montrer que $\forall n \in N^*$, on a : $0 < x_n < \frac{2}{3}$.
3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x_n)-f_{n+1}(x_{n+1})$ et en déduire la monotonie de (x_n).
4) Montrer que la suite (x_n) est convergente, On note ℓ sa limite.
5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n^n$ et en déduire ℓ.

13 S'ENTRAINER

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + 2(n+1)x + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution α_n est que sur $\alpha_n \in]-1,0[$

2) Prouver que la suite (α_n) est croissante et quelle est convergente.

3) Vérifier que $\alpha_n = \dfrac{-2}{\alpha_n^2 + 2(n+1)}$ en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha_n$.

14 S'ENTRAINER

Soit f : [1, +∞ [→ IR , x → $\sqrt{x-1}$ + 2 x.

1) Etablir la dérivabilité de f à droite en en 1.

2) Montrer que f réalise une bijection de [1, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 5 et à droite en en 2 et (Indication calculer f(2)).

4) Expliciter $f^{-1}(x)$.

15 S'ENTRAINER

Soit f : $[0, \frac{\pi}{2}[\to IR$, $x \to -\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I = $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que $\forall x \in]-\infty,1[$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}(2-x)}$$

16 S'ENTRAINER

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x \in J, g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3) Montrer que g est impaire.

4) Montrer que pour tout x ∈ [0,+∞ [on a $0 \le x - g(x) \le \dfrac{x^3}{3}$

5) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - x}{x^2}$

17 SE PERFECTIONNER

$f : [0, \frac{\pi}{2}[\to IR \quad , x \to \sqrt{\tan x}$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ puis étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) Tracer C_g dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.

6) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

7) Soit la suite U définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g(n+k)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ on a : $g(n) \leq g(n+k) \leq g(2n)$.

b) En déduire que $\forall_n \in IN^*$ on a : $g(n) \leq U_n \leq g(2n)$ puis déduire que U converge et calculer sa limite.

18 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par $f(x) = tg(\pi x)$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

3) Soit la fonction g définie par :

4) $\begin{cases} g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

5)

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) En utilisant les inégalités des accroissements finis montrer que pour tout réel x positif :

$$\frac{x}{\pi(1+x^2)} \leq f^{-1}(x) \leq \frac{x}{\pi}$$

c) En déduire la dérivabilité de g à droite en 0

6) Soit la fonction h définie sur]0,+∞[par h(x) = $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Calculer h'(x) en déduire que pour tout x >0 , $h(x) = -f^{-1}(x) + \frac{1}{2}$

b) Montrer que Ch se déduit de Cf par une isométrie que l'on précisera.

7) Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1,2,...,n\}$: $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

b) En déduire que : $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \le U_n \le \frac{n+1}{2\pi n}$; pour tout $n \in IN^*$

c) Etudier la convergence de la suite U.

19 SE PERFECTIONNER

Le plan est mini d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$

1)a) Etudier les variations de f sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

b) Montrer que f est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seul solution $x_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et vérifier que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

d) Etudier la position relative de Cf est *la* droite $\Delta : y = x$

e)Tracer Cf et Cf^{-1} dans la même repère R

f) f^{-1} est elle dérivable à droite en 1 ?

g) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

2) a)Montrer que l'équation $f(x) = n\,(n \in N^*)$ admet une solution unique α_n sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n$

20 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ par : $h(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$

1) a) Montrer que h est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $[1,+\infty[$

b) Montrer h^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $\forall x\geq 1$, $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2x^2-2x+1}$

2) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases}\varphi(x)=h^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x\prec 0\\ \varphi(0)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$

a) Montrer que φ est continue en 0.

b) Montrer φ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\prec 0$

c) Montrer que $\forall\, x\in]-\infty,0[$ il existe un réel $c\in]x,0[$ tel que $\frac{\varphi(x)+\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{-1}{(c-1)^2+1}$

En déduire φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$

3) Soit la fonction g_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ par $g_n(x)=h(x)+\frac{n}{x}$ pour tout entier naturel n non nul

a) Montrer que l'équation : $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n et que $\tan\alpha_n=-\frac{\alpha_n}{n}-1$

b) Etudier le signe de $g_{n+1}(\alpha_n)-g_{n+1}(\alpha_{n+1})$ En déduire que la suite (α_n) est décroissante

c) Montrer que la suite α_n converge vers un réel qu'on précisera.

21 SUR LE CHEMIN DU BAC

I) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Etudier f et construire sa courbe (C).

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe (C') de g dans le même repère R$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Montrer que : $\forall x \in [0,2[; g(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$.

II) Soit la fonction h définie sur $[0,\pi[$ par $h(x) = g(1-\cos x)$.

1) Montrer que pour tout x de $[0,\pi[$, on a : $h(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

2) Montrer que h réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

4) Soit la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} \varphi(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ \varphi(0) = \pi \end{cases}$

a) Montrer que φ est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de φ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$

d) Montrer que φ est dérivable à droite en 0.

5) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$

a) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $p \in IN$ on a $\frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1) - h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$

b) En déduire que pour tout $n \in$ IN on a $\frac{1}{2}h^{-1}(n) + \frac{1}{n^2+1} \le U_n \le \frac{1}{2}h^{-1}(n) + 1$

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente est donner un encadrement de sa limite.

6) a)Montrer que pour tout x>0 on a $\varphi(x) = \pi - h^{-1}(x)$

b) En déduire que $C\varphi$ est l'image de Ch^{-1} par une isométrie que l'on caractérisera puis tracer $C\varphi$ dans le même repère R.

22 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction g définie sur $]-3,1[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ et Cg sa courbe représentative dans un repère orthonormé R $(O,\vec{i},\vec{j})$

A)

1) Dresser le tableau de variation de g et tracer Cg dans le repère R

2) Monter que g réalise une bijection de $[-1,1[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3) On désigne par h la fonction réciproque de la restriction de g à $[-1,1[$

Tracer Ch et montrer que pour tout x $\in$ J on a $h(x)=-1+\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$

4) On considère la fonction ψ définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\psi(x)=h\left(\dfrac{1}{2\cos x}\right)$

a) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\psi(x)=2\sin x-1$

b) Montrer que l'équation $\psi(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

c) Etudier la dérivabilité de ψ^{-1} et déterminer sa fonction dérivée.

B) Soit f la fonction définie dérivable sur $]-3,1[$ et tel que f '(x) = g(x) et f(0) =0

1) Soit φ la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x)=f(2\sin x-1)$

a) Etudier la dérivabilité de φ et calculer $\varphi'(x)$

b) Calculer $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. En déduire que $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x)=x-\dfrac{\pi}{6}$

2) Soit U la suite définie par : $U_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\quad \forall n\geq 2$

a) Montrer que $\forall n\geq 2$, $\dfrac{1}{n(n+1)}g\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\leq U_n\leq g\left(\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n(n+1)}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2U_n$

3) On donne la suite $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}U_k\quad (n\geq 2)$. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\alpha-\dfrac{\pi}{6}$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}x+3-\sqrt{x^2+1} & si\ \ x<0\\ 1+\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est ζ

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de f et tracer ζ

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J qu'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

3) a) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a $|f'(x)| \leq 1$

b) Montrer que l'équation : $f(x) = 3x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

4) Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ 3U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour } n \in \text{IN} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n \in]0,1[$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

5) Soit S la suite définie sur IN^* par : $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kU_k$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $S_n - \alpha\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(U_k - \alpha)$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $3^n \geq 2n$, en déduire que $\left|S_n - \alpha\frac{n+1}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n}$, montrer alors que la suite S converge vers $\frac{\alpha}{2}$

1 Q-C-M; FAUX OU VRAI

1) Vrai, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,3]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty,3]$ sur $f(]-\infty,3]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(3)\right] =]-\infty,5]$

2) Faux, On a f est strictement croissante sur $]-\infty,3]$ alors f^{-1} est strictement sur $]-\infty,5]$ car f et f^{-1} ont le même sens de variation

3) Vrai

On f est continue sur $]-\infty,3]$ alors f^{-1} est continue sur $f(]-\infty,3]) =]-\infty,5]$

4) vrai On a : $f(0) = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\text{On a : } f \text{ est dérivable en } 0\\ f'(0) = 2 \neq 0\end{array}\right)$$

alors f^{-1} est dérivable en 4 et $\left(f^{-1}\right)'(4) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

5) Faux, On a f est dérivable à gauche en 3 et $f'_g(3) = 0$ alors Cf admet au point $A(3,5)$ une demi tangente à gauche horizontale alors Cf^{-1} admet au point $A'(5,3)$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas alors f^{-1},n'est pas dérivable à gauche en 5 et $\lim_{x\to5^-} \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(5)}{x-5} = -\infty$

6) Vrai, La fonction f est dérivable sur $]-\infty,3[$ $\forall x \in]-\infty,3[, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(]-\infty,3[) =]-\infty,5[$

7) a) On a f réalise une bijection de $]-\infty,3]$ sur $]-\infty,5]$ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{5}{n} \in]-\infty,5]$ alors l'équation $f(x) = \dfrac{5}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]-\infty,3]$

b) On a : $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$

On a $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow f(\alpha_n + 1) < f(\alpha_n)$

Or f est croissante sur $]-\infty,3]$ $\alpha_n \in]-\infty,3]$ et $\alpha_{n+1} \in]-\infty,3]$

alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ alors (α_n) est décroissante

c) Vrai

On a :

x	$-\infty$		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On a :

$f(\alpha_n) = \dfrac{5}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(\alpha_n) \geq 0$ alors $\alpha_n \in [2,+\infty[$

Alors (α_n) est minorée par 2 or (α_n) est décroissante alors (α_n) converge vers un réel α

d) Faux

on a : $f(\alpha_n) = \dfrac{5}{n} \Rightarrow \alpha_n = f^{-1}\left(\dfrac{5}{n}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{On a : } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0\\ \lim\limits_{x\to0^+} f^{-1}(x) = 2\end{array}\right)$$

alors $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{5}{n}\right) = 2$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 2$

2 Q-C-M; FAUX OU VRAI

1) Vrai

En effet: Soit M un point du plan et $M' = S_\Delta(M)$ où $\Delta : y = x$

Montrons que $M \in Cf \Leftrightarrow M' \in Cf$

On a $M \in Cf \Leftrightarrow S_\Delta(M) \in S_\Delta(Cf)$

$\Leftrightarrow M' \in Cf^{-1} \Leftrightarrow M' \in Cf$ alors la droite D : y = x est un axe de symétrie de Cf.

2) Vrai

On a : f^{-1} est définie sur $[-5,5]$ alors si $x \in Df^{-1}$, on a $-x \in Df^{-1}$

Montrons que $\forall y \in [-5,5], f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

On a : $f\left(f^{-1}(-y)\right) = -y$

$f\left(-f^{-1}(y)\right) = -f\left(f^{-1}(y)\right) = -y$

alors $f\left(f^{-1}(-y)\right) = f\left(-f^{-1}(y)\right)$

alors $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

3) Faux

Contre exemple : $f : [2,+\infty[\to [0,+\infty[$

$x \longrightarrow \sqrt{x-2}$

f n'est pas dérivable à droite en 2 car $\lim_{x\to2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = +\infty$

Sa fonction réciproque $f^{-1}:[0,+\infty[\to[2,+\infty[$ est dérivable à droite en $f(2)=0$

$x \longrightarrow x^2+2$

3 Q-C-M; FAUX OU VRAI

1) a) Vrai

On a $\forall x\in[-2,2], f'(x)\geq 0$

On a f est continue et strictement croissante sur $[-2,2]$ alors f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur $f([-2,2])$

2) Faux f est strictement croissante sur $[-2,2]$ alors f n'admet pas un minimum local en 1

3)

	−2		−1		1		2
$f'(x)$		↗	4	↘	0	↗	4
$f''(x)$	+		0	−	0	+	

On a $f''(x)$ s'annule et change de signe en -1 et 1 alors f'' admet deux points d'inflexion

4 APPLIQUER

1) g est dérivable sur IR , pour tout x $\in\mathbb{R}$ on a $g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
g'(x)			+		0	−	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	0	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

2)

*sur $[-1,+\infty[$ on a 3 est un minimum absolue de g(x) d'où l'équation g(x) = 0 n'admet pas des solutions sur $[-1,+\infty[$

* On a g est continue et strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et $g(]-\infty,-1])=]-\infty,7]$

Comme $0\in]-\infty,7]$ alors l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α sur $]-\infty,7]$

Conclusion : l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α sur IR.

g est continue sur $[-3,-2]$

$g(-3)\,g(2)=(-13)\times 3=-39$ $\alpha\in]-3,-2[$

→Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

3) *La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]-\infty,\alpha[$, alors elle garde un signe constant sur $]-\infty,\alpha[$

or $-3\in]-\infty,\alpha[$ et $g(-3)<0$ alors pour tout $x\in]-\infty,\alpha[$ on a $g(x)<0$

*La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]\alpha,+\infty[$, alors elle garde un signe constant sur $]\alpha,+\infty[$

Or $-2\in]\alpha,+\infty[$ et $g(-2)>0$ alors pour tout $x\in]\alpha,+\infty[$; on a $g(x)>0$

Conclusion

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

4)

x	−3	−2,9	−2,8	−2,7	−2,6	−2,5	−2,4	−2,3	−2,2	−2,1	−2
$g(x)$	−13					−3,12	−1,6	−0,2	0,9		3
signe $g(x)$	−					−	−	−	+		+

On a $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [-2{,}3\ ;\ -2{,}2] \\ g(-2{,}3)\,g(-2{,}2)<0 \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans IR or α est l'unique solution dans IR alors $-2{,}3<\alpha<-2{,}2$

5) a) On a pour tout réel x,

$f'(x)=4x^3-12+20=4(x^3-3x+5)=4g(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

b) On a $f(\alpha)=-3\alpha^2+15\alpha$?

On a : $f(\alpha)=\alpha^4-6\alpha^2+20\alpha$

Or $g(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha+5=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha^3=3\alpha-5}$

D'où : $f(\alpha)=\alpha\ \alpha^3-6\alpha^2+20\alpha$

$=\alpha(3\alpha-5)-6\alpha^2+20\alpha$

$=3\alpha^2-5\alpha-6\alpha^2+20\alpha$

$=-3\alpha^2+15\alpha$

5 APPLIQUER

On a : $g:]0,\pi[\to\mathbb{R}$ $\quad x\to \cot g x-2x$

$h:]0,\pi[\to\mathbb{R}$ $\quad x\to x\cos^2 x$

1)

a) $\forall x \in]0,\pi[\ g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} - 2 < 0$

x	0	α	π
$g'(x)$	$-$		
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cot g x - 2x = +\infty$

b) g est continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ alors elle réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $g(]0,\pi[) =]-\infty,+\infty[$.

Comme 0 appartient $]-\infty,+\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0,\pi[$.

$$\left.\begin{array}{l} g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cot g\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} > 0 \\ g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cot g\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = 1 - \dfrac{\pi}{2} < 0 \end{array}\right\}$$

g est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right).g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire : $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$

*La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]0,\alpha[$, alors elle garde un signe constant sur $]0,\alpha[$

On a : $\dfrac{\pi}{6} \in]0,\alpha[$ et $g(\dfrac{\pi}{6}) > 0$ alors pour tout $x \in]0,\alpha[$; on a $g(x) > 0$

* La fonction g est continue et ne s'annule pas sur $]\alpha,\pi[$, alors elle garde un signe constant sur $]\alpha,\pi[$ Or on a : $\dfrac{\pi}{4} \in]\alpha,\pi[$ et $g(\dfrac{\pi}{4}) < 0$ alors pour tout $x \in]\alpha,\pi[$; on a $g(x) < 0$

x	0	α	π
$g(x)$	$+$	0 $-$	

2)

a) $\forall x \in]0,\pi[\ ;\ h'(x) = \cos^2 x + 2x\cos x(-\sin x)$

$= \sin x\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - 2x\right)$

$= \sin x\cos x(\cot g x - 2x)$

$= \underbrace{\sin x}_{\geq 0}.\cos x.g(x)$

b)

x	0	α	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$+$		$+\ 0$	$-$
$g(x)$	$+\ 0$	$-$		$-$
$h'(x)$	$0\ +\ 0$		$-\ 0$	$+\ 0$
$h(x)$	0 ↗	$h(\alpha)$	↘ 0	↗ π

6 APPLIQUER

$f :]-1,1[\to \mathbb{R}\ x \to \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

1) $\forall x \in]-1,1[\ ,\ f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right) > 0$

f est continue et strictement croissante $]-1,1[$ alors f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $f(]-1,1[) = \left]\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

2) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$x \to y$

Montrons que : $\forall y \in \mathbb{R}$ on a ; $-y \in \mathbb{R}$ et $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$

si

$$\boxed{f^{-1}(-y) = \alpha} \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(-y)\right) = f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow -y = f(\alpha) \Leftrightarrow y = -f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = f(-\alpha)\ car\ f\ est\ impaire$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\alpha$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -f^{-1}(y)}$$

d'où $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ d'où f^{-1} est impaire.

3) $g(x) = f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ car f^{-1} est impaire

$Cf \xrightarrow{S_\Delta} Cf^{-1} \xrightarrow{S_{(O,\vec{i})}} C\left(-f^{-1}\right)$ avec $\Delta : y = x$

$\Rightarrow S_{(O,\vec{i})} o S_\Delta(C) = C'$

Or $(O,\vec{i}) \cap \Delta = \{O\}$ alors $S_{(O,\vec{i})} o S_\Delta = r_{(O,2(\overrightarrow{U_\Delta},\vec{i}))} = r_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$

7 APPLIQUER

a) $f(x)=\cos x$

$\forall x\in[0,\pi]; f'(x)=-\sin x\le 0$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↘	-1

f est continue strictement décroissante sur $[0,\pi]$ alors f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi])=[-1,1]=J$

b) $\forall x\in J \Rightarrow f^{-1}(-x)=\pi-f^{-1}(x)$?

Il suffit de montrer que : $-x=f\left(\pi-f^{-1}(x)\right)$

On a : $f\left(\pi-f^{-1}(x)\right)=\cos\left(\pi-f^{-1}(x)\right)$

$=-\cos\left(f^{-1}(x)\right)$

$=-f\left(f^{-1}(x)\right)$

$=-x$

D'où : $\pi-f^{-1}(x)=f^{-1}(-x)$

8 APPLIQUER

f est définie sur IR par $f(x)=x-2+\sqrt{x^2+1}$

1) f est dérivable sur IR,

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>0}}\quad (x\in\mathbb{R})$$

* si $x\ge 0$ on a : $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ ($x\ge 0$)

* si $x<0$ on a :

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{>0}+\overbrace{x}^{<0}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\underbrace{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}_{>0}}>0$$

2ème méthode pour déterminer le signe de f'(x):

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)>0$,

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

On a $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=-x$

Conditions d'existence il faux que $\begin{cases}x^2+1\ge 0\\ -x\ge 0\end{cases}$ donc $x\in]-\infty,0]$

Pour $x\in]-\infty,0]$

$\sqrt{x^2+1}=-x \Leftrightarrow x^2+1=x^2$ Impossible

$f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur IR alors $f'(x)$ garde un signe constant sur IR or $f'(0)=1>0$ alors $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-2+\sqrt{x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}-2=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ alors la droite d'équation y = -2 est asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2+\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

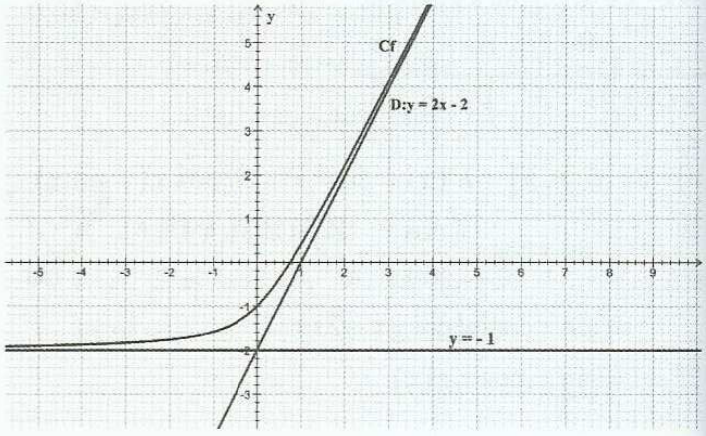
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1+1=2=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}f(x)-2x$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x-2$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-2=-2=b$$

$D: y=2x-2$ est asymptote oblique à Cf au voisinage de $+\infty$; $D: y=2x-2$



3) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-2,+\infty[$, d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-2,+\infty[$

$f : \mathbb{R} \to]-2,+\infty[$

$y \to x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y - 2 + \sqrt{y^2+1} = x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} = x - y + 2 \quad (2)$$

(On a : $x - y + 2 > 0$ car si non la relation (2) est impossible est par la suite f n'est pas bijective)

$$\Leftrightarrow y^2 + 1 = (x - y + 2)^2$$

$$y^2 + 1 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x$$

$$2xy + 4y = x^2 + 3 + 4x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2x+4)}_{\neq 0} y = x^2 + 4x + 3$$

car $x \in]-2,+\infty[\Rightarrow y = \dfrac{x^2+4x+3}{2x+4} = f^{-1}(x)$

9 APPLIQUER

1) On a : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$Df = \mathbb{R}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 + \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - \left(\sqrt{x^2+1}\right)' x}{x^2+1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

on a :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	2

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

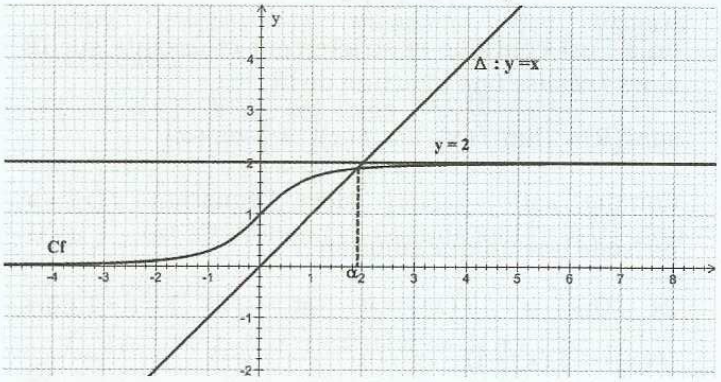
$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation y= 0 est une asymptote horizontal à Cf au voisinage $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation y= 2 est une asymptote horizontal à Cf au voisinage $+\infty$



2) $f(x) = x$ admet une unique solution ?

On a $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

où $g(x) = f(x) - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in IR$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}}_{\geq 1}\right)}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$

g est continue et strictement décroissante sur IR alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 2-(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0-(-\infty) = +\infty$

comme $0 \in]-\infty,+\infty[$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

interprétation graphique : Cf coupe la droite $\Delta : y = x$ est un unique point M d'abscisse α .

2) D'après le graphique, on remarque $\alpha \in [1,2]$

$g(1,8) \simeq 0,07$ et $g(1,9) \simeq -0,01$

On a g est continue sur $[1,8\ ;\ 1,9]$ et $g(1,8)\times g(1,9) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires on $1,8 < \alpha < 1,9$

10 APPLIQUER

1) f est définie dérivable sur IR,

$$\forall x \in IR, f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0$$

on a f est continue et strictement croissante sur IR alors f réalise une bijection de IR

sur f(R)= $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

Comme $n \in\ ]-\infty,+\infty[$ alors l'équation $f(x)=n$ possède une unique solution x_n.

2) On a $f(x_n)=n$ et $f(x_{n+1})=n+1$ alors $f(x_n) < f(x_n+1)$

Or f est croissante sur IR alors $x_n < x_{n+1}$ alors (x_n) est croissante.

3) Pour montrer que $\forall n \geq 1,\ n \leq x_n \leq n+1$, il suffit de montrer que $\forall n \geq 1, f(n) \leq f(x_n) \leq f(n+1)$.

*On a : $f(n) - f(x_n) = \frac{n^3}{n^2+1} - n$

$$= \frac{n^3 - n\left(n^2+1\right)}{n^2+1} = -\frac{n}{n^2+1} \leq 0 \Rightarrow f(n) \leq f(x_n)$$

*on a : $f(n+1) - f(x_n) = \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2+1} - n$

$$= \frac{(n+1)^3 - n\left[(n+1)^2+1\right]}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+1} \geq 0$$

alors $\forall n \geq 1,\ f(n+1) \geq f(x_n)$

Conclusion : $\forall n \geq 1,\ f(n) \leq f(x_n) \leq f(n+1)$ et f est croissante sur IR alors $n \leq x_n \leq n+1$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

On a $\forall n \geq 1,\ 1 \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

11 S'ENTRAINER

1) Soit $n \geq 2$, $\forall n \in [0,1]$

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(n^{n-1} - 1) \leq 0$$

On a f_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ alors f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f_n[0,1] = [f_n(1), f_n(0)] = [2-n,1]$.

On a $n \geq 2 \Rightarrow 2-n \leq 0$ alors $0 \in [2-n,1]$ alors l'équation $f_n(x)=0$ admet sur $[0,1]$ une unique solution x_n .

2) On a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^n \geq 0$

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^A + 1 - n\frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \leq 0$$

On a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow f_n\left(\frac{2}{n}\right) \leq f_n(x_n) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right)$

On a f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ alors $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3)

$\forall n \in IN^*, x \in [0,1]$

$$f_{1+1}(x) - f_n(x) = \left[x^{n+1} + 1 - (n+1)x\right] - \left[x^n + 1 - nx\right]$$

$$= x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x \leq 0$$

On a : $x_n \in [0,1] \Rightarrow f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \leq 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) - 0 \leq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) \leq 0$

4) On a $f_{n+1}(x_n) \leq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$

Or f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $x_n \geq x_{n+1}$ alors (x_n) est décroissante.

12 S'ENTRAINER

1) f_n est dérivable sur $[0,\infty[$, $\forall x \geq 0$,

$f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geq 0$

On a f_n est continue et strictement croissante sur $[0,\infty[$ alors f_n réalise une bijection de

$[0,\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [-4,+\infty[$

comme $0 \in [-4,+\infty[$ *alors* l'equation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution $x_n \in [0,+\infty[$.

On a : $0^n + 9\times 0^2 - 4 = -4 \neq 0$ alors 0 n'est pas solution alors $x_n \in]0,+\infty[$.

2) On a $f_n(0) = -4$

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 - 4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

On a f_n est continue sur $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ et $f_n(0)\times f_n\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a $0 < x_n < \frac{2}{3}$

3) On a

$f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_n) - 0 = x_n^{n+1} + 9x_n^2 - 4$

or on a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9x_n^2 - 4 = -x_n^n$

D'où $f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = x_n^{n+1} - x_n^n = \underbrace{x_n^n}_{>0}\underbrace{(x_n - 1)}_{<0} < 0$

car $0 < x_n < \frac{2}{3}$

On a $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$ est f_{n+1} s est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ $\Rightarrow x_n < x_{n+1}$ alors (x_n) est une suite croissante

4) On a (x_n) est croissante majorée par $\frac{2}{3}$ alors (x_n) converge vers une limite ℓ.

5) On a $\forall n \in N^*, 0 < x_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < (x_n)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$

On a $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n + 9x_n^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow 0 + 9\ell^2 - 4 = 0$ $\left(\text{car d'aprés 4) } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell\right)$

$\Rightarrow \ell^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}$ ou $\ell = -\frac{2}{3}$

Or $0 < x_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq \ell \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}$

13 S'ENTRAINER

1) * La fonction f_n est dérivable sur IR

$\forall x \in IR, f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+1) > 0$

On a f_n est continue et strictement croissante sur IR alors f_n réalise une bijection de IR sur f(IR) =IR

Comme $0 \in IR$ alors l'équation f_n (x) =0 admet une unique solution α_n sur IR

- $f(-1) = -1 - 2(n+1) + 2 = 1 - 2(n+1) < 0$

$f(0) = 1 > 0$ On a f est continue sur $[-1,0]$;

→alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire

$f(-1)f(0) < 0$ α_n est dans $]-1,0[$

$\forall x \in]-1,0[, f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+1) > 0$

D'où f_n est strictement croissante sur $[-1,0]$ d'où α_n est unique.

2) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) = 0 - (\alpha_n^3 + 2(n+2)\alpha_n + 2)$

$= -(\alpha_n^3 + 2(n+1)\alpha_n + 2) - 2\alpha_n$

$= -f_n(\alpha_n) - 2\alpha_n$

$= 0 - 2\alpha_n > 0$

D'ou $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n)$

Or f_{n+1} est croissante alors $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ d'où (α_n) est croissante.

* On a (α_n) est croissante et majorée par 0 alors (α_n) converge vers une limite ℓ.

3) On a : $f_n(\alpha_n) = 0$

Alors $\alpha_n^3 + 2(n+1)\alpha_n + 2 = 0$

Alors $\alpha_n\left(\alpha_n^2+2(n+1)\right)=-2\Rightarrow \alpha_n=\dfrac{-2}{\alpha_n^2+2(n+1)}$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{\alpha_n^2+2(n+1)}=\dfrac{-2}{\ell^2+(+\infty)}=0$

14 S'ENTRAINER

On a : $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$; $Df=[1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}+2x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}+2=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}+2$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+2=\dfrac{1}{0^+}+2=+\infty$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 1.

2) La fonction $x\to x-1$ est dérivable et strictement supérieur à 0 sur $]1,+\infty[$ d'où la fonction $f\ x\longrightarrow\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. D'où f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$\forall x>1$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+2>0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

3) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $f\left([1,+\infty[\right)=[2,+\infty[=J$

4) Rappel :

$f:I\to J$ *bijection*

$x_0\to y_0$

> Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

* $f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection

$2\to5$

On a f est dérivable en 2 et $f'(2)=3\neq0$ alors f^{-1} est dérivable en 5.

$(f^{-1})'(5)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$

*On a $f'_d(1)=0$ alors Cf admet à droite au point A(1,2) une demi- verticale de direction et de sens de $\vec{j}$ alors Cf^{-1} admet au point $A'(2,1)$ à droite une demi-tangente horizontale

Alors f^{-1} est dérivable à droite 2 et $\left(f^{-1}\right)'_d(2)=0$

Ou bien : $f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection

$1\to2$

$x\to y$

$\lim\limits_{y\to2^+}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(2)}{y-2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{f(x)-f(1)}$

(car $x\to1^+$ équivaut $y\to2^+$).

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

D'où f^{-1} est dérivable à droite en 2.

5)

$f:[1,+\infty[\to[2,+\infty[$ bijection $\boxed{f(y)=x\Leftrightarrow y=f^{-1}(x)}$

$y\to x$

On a : $f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{y-1}+2y=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{y-1}=x-2y$

(necessairement $x-2y\geq0$ car si non f n'est pas bijective

$\Leftrightarrow y-1=(x-2y)^2$

$\Leftrightarrow y-1=x^2-4xy+4y^2\Leftrightarrow4y^2-y(1+4x)+1+x^2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1+4x)^2-4\times4\times(1+x^2)$

$=16x^2+1+8x-16x^2-16$

$=8x-15>0$ car $x\geq2$

$y'=\dfrac{1+4x-\sqrt{8x-15}}{8}$ et $y''=\dfrac{1+4x+\sqrt{8x-15}}{8}$

Or $f(2)=5$ d'où si x = 5 on a y =2.

Vérification dans y'' on a :

$\dfrac{1+2\times5+\sqrt{8\times5-15}}{8}=\dfrac{26}{8}\neq2$ d'où $y\neq y''$

D'où $y=\dfrac{1+4x-\sqrt{8x-15}}{8}=f^{-1}(x)$

15 S'ENTRAINER

$f(x)=-\dfrac{1}{\cos^2x}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

1) $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=0-\left(\frac{-\left(\cos^2 x\right)'}{\cos^4 x}\right)$$

$$=-\left(\frac{-2(-\sin x)\cos x}{\cos^4 x}\right)=-\frac{\overbrace{2\sin x}^{\geq 0}\overbrace{\cos x}^{>0}}{\cos^4 x>0}\leq 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 2-\frac{1}{\underbrace{\cos^2 x}_{0^+}}=-\infty$$

f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-\infty,-1]$$

2)

Rappel :

$f: I\to J$ bijection
$t\to x$

si f est dérivable sur I et $f'(t)\neq 0,\forall t\in I\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $f(I)=J$

$$\forall x\in J;\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(t)}$$

On a f est dérivable sur $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ f'(t)=-\frac{2\sin t\cos t}{\cos^4 t}\neq 0$$

alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-\infty,1[$

On a : $\forall x\in]-\infty,1[\ ;\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(t)}=\frac{-\cos^4 t}{2\sin t\cos t}$

Or $f(t)=x\Leftrightarrow 2-\frac{1}{\cos^2 t}=x$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2 t}=2-x\Leftrightarrow\boxed{\cos^2 t=\frac{1}{2-x}}$$

On a : $\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$$\Leftrightarrow\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{(2-x)}=\frac{1-x}{2-x}>0$$

$$\Rightarrow\sin t=\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\ \text{ car } t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{d'où } \left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\sqrt{\frac{1}{2-x}}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}(2-x)}<0$$

16 S'ENTRAINER

$f(x)=\tan(x)$

1) $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ f'(x)=1+\tan^2 x>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} f(x),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

D'où f admet une fonction réciproque g définie un intervalle J=IR

2)

$f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$
$t\to x$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$;

$\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ;f'(t)=1+\tan^2 t\neq 0$ alors g est une dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R},(g)'(x)=\frac{1}{f'(t)}=\frac{1}{1+\tan^2 t}$$

or $f(t)=x\Leftrightarrow\tan t=x$ d'où $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

3) On a g est définie sue IR. Montrons que pour tout réel x on a $g(-x)=-g(x)$

On pose : $h(x)=g(-x)+g(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ h'(x)=(-1)\times g'(-x)+g'(x)$

$$=-1\frac{1}{1+(-x)^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

D'où h est une fonction constante sur IR

Or on a : $h(0)=g(-0)+g(0)=2g(0)=2\times 0=0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=0$

D'où $\forall x\in\mathbb{R}\ g(-x)=-g(x)$

D'où g est paire.

4) $\forall x\in[0,+\infty[, 0\le x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$?

* On pose : $\varphi(x)=x-g(x)$

$\forall x\in[0,+\infty[, \varphi'(x)=1-g'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\ge 0$

$x\ge 0$, φ est croissante sur $[0,+\infty[$ alors

$\varphi(x)\ge\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)\ge 0\Rightarrow x-g(x)\ge 0$

*On pose : $T(x)=\frac{x^3}{3}-x+g(x)$

$\forall x\in[0,+\infty[$;

$T'(x)=x^2-1+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^4-1+1}{1+x^2}=\frac{x^4}{1+x^2}\ge 0$

$x\ge 0\Rightarrow$ T est croissante sur $[0,+\infty[$

$\Rightarrow T(x)\ge T(0)\Rightarrow\frac{x^3}{3}-x+g(x)\ge 0\Rightarrow x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

Conclusion : $\forall x\in[0,+\infty[, 0\le x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}$?

* $\forall x\in]0,+\infty[$, on a : $0<x-g(x)\le\frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow\frac{-x^3}{3}\le g(x)-x\le 0\Rightarrow-\frac{x}{3}\le\frac{g(x)-x}{x^2}\le 0$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{3}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$

* $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}$?

On pose $t=-x$ si $x\to 0^-\Leftrightarrow t\to 0^+$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{g(-t)-(-t)}{(-t)^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-g(t)+t}{t^2}$ car g est impaire

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{g(t)-t}{t^2}\right)=-0=0$

Conclusion :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-x}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}=0$

18 SE PERFECTIONNER

f : $[0,\frac{\pi}{2}[\to$ IR , x $\to\sqrt{\tan x}$

8) * La fonction x$\to$ tanx est dérivable et strictement positif sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ alors f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

* On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan x}}{x}$

$=\lim\limits_{n\to 0^+}\frac{\sqrt{tanx}}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{n\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\tan x}{x}}=\frac{1}{0^+}\times 1=+\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite de 0

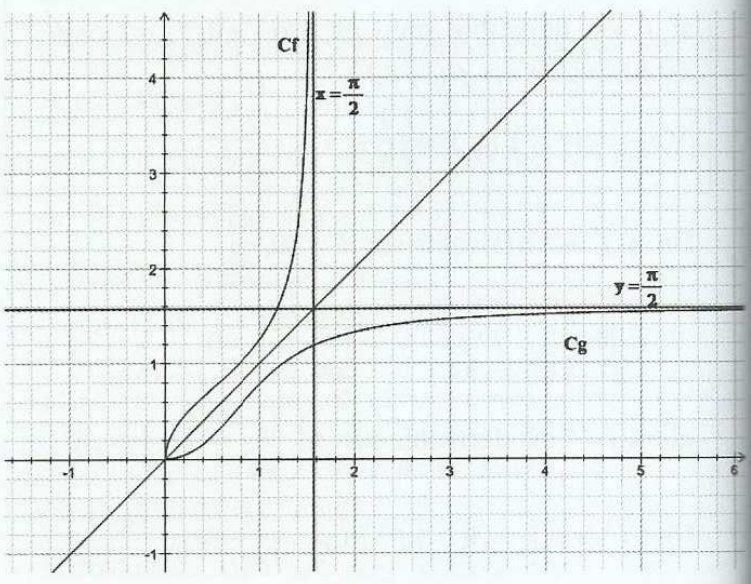
9) Pour tout x$\in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a

$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{2\sqrt{\tan x}}=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}>0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	+	‖
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$ ‖

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sqrt{\tan x}=+\infty$

alors la droite d'équation x = $\frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à Cf



10) f est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ alors f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur f $([0,\frac{\pi}{2}[)=[0,+\infty[=$ J d'où f admet une fonction réciproque g définie sur J.

4) $Cg=S_{\Delta}(Cf)$ où $\Delta: y=x$

5) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow [0, +\infty[$ bijection

$t \longrightarrow x$

f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

→ alors g est dérivable sur $f(]0, \frac{\pi}{2}[) =]0, +\infty[$

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\; f'(t) \neq 0$

$\forall x \in]0, +\infty[\; , \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{2\sqrt{\tan t}}{1+\tan^2 t}}$

Or $f(t) = x \Leftrightarrow \sqrt{\tan t} = x \Leftrightarrow \tan t = x^2$

d'où $\forall x \in]0, +\infty[\; \boxed{g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}}$.

Etudions la dérivabilité de g en 0 :

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ alors Cf admet au poin O une demi-tangente verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point $O = S_{\Delta}(O)$ une demi-tangente horizontale à droite

D'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.

6) Montrons que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$?

On pose $k(x) = g(x) + g(\frac{1}{x}) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

- On a g est dérivable sur $]0, +\infty[$
- On a la fonction $h : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positif sur $I =]0, +\infty[$ d'où

D'où g est dérivable sur $h(I) =]0, +\infty[$

D'où la fonction $x \longrightarrow g(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

D'où la fonction k est dérivable sur $]0, +\infty[$

On a $\forall x \in]0, +\infty[\; , \; k'(x) = g'(x) + (\frac{1}{x})' \, g'(\frac{1}{x})$

$= \frac{2x}{1+x^4} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{2 \times \frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^4} = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{x^2} \times \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^4+1}{x^4}}$

$= \frac{2x}{1+x^4} - \frac{2x}{1+x^4} = 0$

D'ou k est une fonction constante sur $]0, +\infty[$

Or $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\tan(\frac{\pi}{4})} = 1$ alors $g(1) = \frac{\pi}{4}$

D'où $k(1) = g(1) + g(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Conclusion pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $k(x) = \frac{\pi}{2}$

d'où $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

7) $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{g(n+k)}$ pour tout $n \in IN^*$

a) On a pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $n \leq n+k \leq 2n$ d'où de plus g est croissante sur $[0, +\infty[$ alors $g(n) \leq g(n+k) \leq g(2n)$.

b) $\forall n \in IN^*$, $g(n) \leq U_n \leq g(2n)$?

On a pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $g(n) \leq g(n+k) \leq g(2n)$.

alors $\sum_{k=0}^{n} g(n) \leq \sum_{k=0}^{n} g(n+k) \leq \sum_{k=0}^{n} g(2n)$

alors $(n+1)g(n) \leq \sum_{k=0}^{n} g(n+k) \leq (n+1)g(2n)$

alors $g(n) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g(n+k) \leq g(2n)$

alors $\boxed{g(n) \leq U_n \leq g(2n).}$

On a g est continue et strictement croissante et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

D'où $\lim_{x \to +\infty} g(n) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} g(2n) = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : $\lim_{x \to +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$ et la suite U converge vers $\frac{\pi}{2}$

2ème méthode pour calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

On a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2} - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - g(0) = \frac{\pi}{2}$

19 SE PERFECTIONNER

Soit la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

par $f(x) = tg(\pi x)$

1) f est dérivable sur I pour tout $x \in I$,

$f'(x) = \pi\left(1+\tan^2(\pi x)\right) > 0$

f est continue et strictement croissante sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I) =]-\infty, +\infty[$ alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J =IR.

2) $f : I \longrightarrow IR$, $y \longrightarrow x$ est un bijection

On a $\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur I} \\ \forall y \in I, f'(y) = \pi\left(1+\tan^2(y)\right) \neq 0 \end{array}\right\}$

alors f^{-1} est dérivable sur J=f(I)=IR

Pour tout x ∈ J on a :

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\pi\left(1+\tan^2(\pi y)\right)}$

Or $f(y) = x \Leftrightarrow \tan(\pi y) = x$

D'où tout x ∈ J, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$

3) g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x-0}$

$= \left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{\pi}$ (car f est dérivable à droite en 0)

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ d'où g est continue à droite en 0.

b) Soit $x \in]0, +\infty[$

on a f est continue sur $[0, x]$

on f est dérivable sur $]0, x[$

Soit $t \in]0, x[$ on a

$1 \le 1+t^2 \le 1+x^2$

$\Rightarrow \pi \le \pi\left(1+t^2\right) \le \pi\left(1+x^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \le \dfrac{1}{\pi\left(1+t^2\right)} \le \dfrac{1}{\pi}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \le \left(f^{-1}\right)'(t) \le \dfrac{1}{\pi}$

Alors d'après le théorème des accroissements finis on a

$\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}(x-0) \le f^{-1}(x) - f^{-1}(0) \le \dfrac{1}{\pi}(x-0)$

d'où $\dfrac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} \le f^{-1}(x) \le \dfrac{x}{\pi}$

*Pour x = 0 on a $\dfrac{0}{\pi\left(1+0^2\right)} \le f^{-1}(0) \le \dfrac{0}{\pi}$

Conclusion : Pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$\dfrac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} \le f^{-1}(x) \le \dfrac{x}{\pi}$

a) Pour tout $x > 0$,

b) $\dfrac{x}{\pi(1+x^2)} \le f^{-1}(x) \le \dfrac{x}{\pi} \Rightarrow \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \le \dfrac{f^{-1}(x)}{x} \le \dfrac{1}{\pi}$.

$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \le g(x) \le \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow \dfrac{-x^2}{\pi(1+x^2)} \le g(x) - \dfrac{1}{\pi} \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{-x^2}{\pi(1+x^2)} \le g(x) - g(0) \le 0$

$\Rightarrow \dfrac{-x}{\pi(1+x^2)} \le \dfrac{g(x)-g(0)}{x} \le 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{\pi(1+x^2)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ alors g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

4) h définie sur]0,+∞[par $h(x) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) Calculer h'(x) en déduire h(x) en fonction de $f^{-1}(x)$

$x \xrightarrow{u} \dfrac{1}{x} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ on a $h = f^{-1} o U$

La fonction U est dérivable sur $]0, +\infty[$ la fonction f^{-1} est dérivable sur IR en particulier sur $U(]0, +\infty[)$ alors $h = f^{-1} o U$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\forall x > 0, h'(x) = \left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{-1}{x^2} \dfrac{1}{\pi\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-1}{\pi\left(1+x^2\right)} = -\left(f^{-1}\right)'(x)$

D'où $h(x) = -f^{-1}(x) + k$ (k appartient IR)

On $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \dfrac{1}{4}$

On a : $h(1) = -f^{-1}(1) + k$ alors $\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4} + k$ alors

$k = \dfrac{1}{2}$ D'où $h(x) = -f^{-1}(x) + \dfrac{1}{2}$

b)Montrer que Ch se déduit de Cf par une isométrie que l'on précisera.

On a pour tout x>0 , $h(x)=-f^{-1}(x)+\frac{1}{2}$

$$Cf \xrightarrow{S_\Delta} Cf^{-1} \xrightarrow{S_{(o,\vec{i})}} C\left(-f^{-1}\right) \xrightarrow{t_{\frac{1}{2}\vec{j}}} Ch$$

où $\Delta : y = x$ On a : $Ch = \left(t_{\frac{1}{2}\vec{j}} o S_{(o,\vec{i})} o S_\Delta\right)(Cf)$

5) Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Soit $n \in IN^*$, $k \in \{1,2,...,n\}$ d'après 5)a)

pour $x = \frac{k}{n^2}$ on obtient

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\pi\left(1+\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{\frac{k}{n^2}}{\pi}$$

alors $\frac{kn^2}{\pi\left(n^4+k^2\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

alors $\underbrace{\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{\left(n^4+k^2\right)}}_{\le 1} \frac{k}{\pi\left(n^2+1\right)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

alors $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

b) Soit $n \in IN^*$, $k \in \{1,2,...,n\}$

on a $\frac{k}{\pi(n^2+1)} \le f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{\pi n^2}$

Alors $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\pi(n^2+1)}\right) \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\pi n^2}\right)$

Alors $\frac{1}{\pi(n^2+1)}\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{1}{\pi n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

Alors $\frac{1}{\pi(n^2+1)}\frac{n(n+1)}{2} \le \sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{1}{\pi n^2}\frac{n(n+1)}{2}$

Alors $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \le U_n \le \frac{n+1}{2\pi n}$;

c) pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} \le U_n \le \frac{n+1}{2\pi n}$

on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2\pi(1+n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{2\pi(\frac{1}{n^2}+1)} = \frac{1}{2\pi}$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2\pi n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2\pi}$ alors la suite (U_n) converge vers $\frac{1}{2\pi}$.

19 SE PERFECTIONNER

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

1)a) La fonction $x \longrightarrow \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors la fonction $x \longrightarrow \sqrt{\sin x}$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de plus fonction $x \leftrightarrow \sqrt{\sin x}$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -\frac{\left(\sqrt{\sin x}\right)'}{\left(\sqrt{\sin x}\right)^2}$

$= -\frac{\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}} \le 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	−	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	1

b) On a f est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty[$

c) On pose g(x)=f(x)-x

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{\le 0} - 1 < 0$

On a g est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors g relise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dur

$g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim_{x\to 0^+} g(x)\right[=\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

Comme $0\in\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ l'équation g(x)= 0 admet une unique solution $x_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

On a :

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}>0$

et $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{\pi}{3}<0$

On a g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$

et $g\left(\frac{\pi}{4}\right)\times g\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire on a :

$x_0\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right[$

d) La position relative Cf par rapport à $\Delta: y=x$ est donnée par le signe de g(x)= f(x) –x

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	‖	+	0	−	

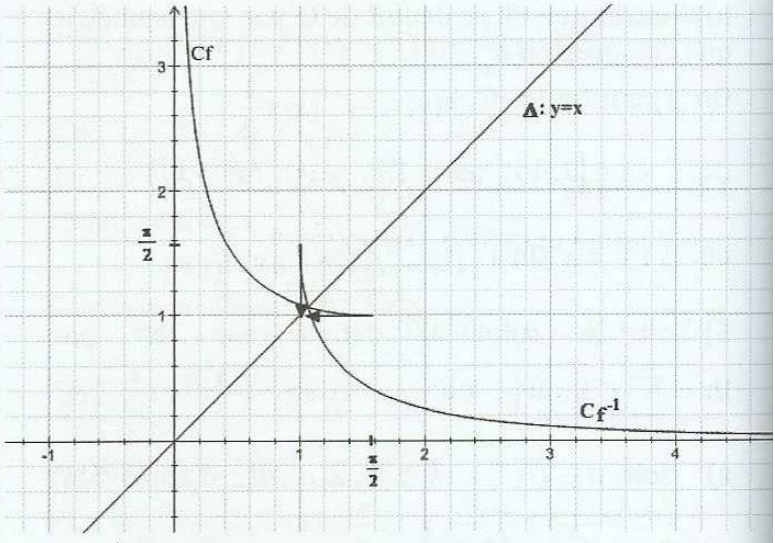
Alors

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	‖	+	0	−	

Sur $]0,x_0]$ on a Cf est au dessus de Δ

Sur $\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a Cf est au dessous de Δ

e) $Cf^{-1}=S_{\Delta}(Cf)$ où $\Delta: y=x$



f) f^{-1} est elle dérivable à droite en 1 ?

On a Cf^{-1} admet au point $M_0'\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas alors Cf^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1.

g)

$f:\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[1,+\infty[$

$y\longrightarrow x$

On a f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Pour tout $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[, f'(y)\neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$

et que

Et on a pour tout

$x\in]1,+\infty[,\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{2\sin(y)\sqrt{\sin y}}{\cos y}$

Or $f(y)=x\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\sin y}}=x\Rightarrow\sin y=\frac{1}{x^2}$

On a $\cos^2 y+\sin^2 y=1$

$\Rightarrow\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-\frac{1}{x^4}=\frac{x^4-1}{x^4}$

Or $\cos y>0\Rightarrow\cos y=\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}$

Pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{2\sin(y)\sqrt{\sin y}}{\cos y}=-\frac{2\frac{1}{x^2}\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}}=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

2) a) On a f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1,+\infty[$

On a $n\in[1,+\infty[$ alors l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique α_n sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

b) On a $f(\alpha_n)=n\Rightarrow \boxed{\alpha_n=f^{-1}(n)}$

Or f^{-1} réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et f^{-1} est continue est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

alors $f^{-1}([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x), f^{-1}(1)\right]$

alors $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x), f^{-1}(1)\right]=\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(n)=0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n=0$

20 SE PERFECTIONNER

La fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ par : $h(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$

1) a) La fonction $x\to 1+\tan x$ est dérivable et ne s'annule pas sur I= $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$

alors la fonction h est dérivable sur I.

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right], h'(x)=-\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}<0$

On a h est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors h réalise une bijection de

$\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $h\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\right)=\left[h(0),\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+} h(x)\right[=[1,+\infty[$

Car $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+} h(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+}\frac{1}{1+\tan x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

b) h : $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\longrightarrow[1,+\infty[$

$y\longrightarrow x$

h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$

$\forall y\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right], h'(y)\neq 0$

alors h^{-1} est dérivable sur $h\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right]\right)=[1,+\infty[$

$\forall x\geq 1,\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{h'(y)}=-\frac{(1+\tan y)^2}{1+\tan^2 y}$

or $h(y)=x\Rightarrow\frac{1}{1+\tan y}=x\Leftrightarrow 1+\tan y=\frac{1}{x}$

D'où $\forall x\geq 1,(h^{-1})'(x)=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{-1}{x^2+(1-x)^2}=\frac{-1}{2x^2-2x+1}$

2) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases}\varphi(x)=h^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x<0\\ \varphi(0)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$

a) $\varphi(0)=-\frac{\pi}{4}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)=-\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-} h^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{\pi}{4}$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=\varphi(0)$ alors φ est continue à gauche en 0

<u>En effet :</u>

On a h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $[1,+\infty[$ alors h^{-1} réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors $h^{-1}([1,+\infty[)=\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$

D'autre part, h est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ alors h^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

$\Rightarrow h^{-1}([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x), h^{-1}(1)\right]$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)=-\frac{\pi}{4}$

$x\xrightarrow{U}\frac{x-1}{x}\xrightarrow{h^{-1}}h^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

a) $\varphi=h^{-1}oU$

* On a U est dérivable sur $I=]-\infty,0[$

* On a : $\forall x<0, U(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}>1$

alors $U(x)>1$ alors $U\left(]-\infty,0[\right)=]1,+\infty[$

D'où h^{-1} est dérivable sur $U\left(]-\infty,0[\right)$

D'où φ est dérivable sur $]-\infty,0[$

$$\forall x<0, \varphi'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{-1}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1-\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$=\frac{-1}{2(x-1)^2-2(x^2-x)+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2-2x+2}=\frac{-1}{(x-1)^2+1}$$

c) Soit $x\in]-\infty,0[$

on a : φ est continue sur $[x,0]$

φ est dérivable sur $]0,x[$

Alors d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c\in]x,0[$ tel que $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(C)$

D'où il existe un réel $c\in]0,x[$ tel que

$$\frac{\varphi(x)+\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{-1}{(c-1)^2+1}$$

On a : $x<c<0$ si $x\to 0^-$ alors $c\to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{c\to 0^-}\frac{-1}{(c-1)^2+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

D'où φ est dérivable à gauche en 0 et $\varphi'_g(0)=-\frac{1}{2}$

3) g_n définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ par $g_n(x)=h(x)+\frac{n}{x}$ pour tout entier naturel n non nul

a) On a g_n est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ on a $g_n'(x)=h'(x)-\frac{n}{x^2}<0$

On a g_n est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ alors g_n réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ sur

$$g_n\left(\left]-\frac{\pi}{4},0\right[\right)=\left]\lim_{x\to 0^-}g_n,\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\right[=]-\infty,+\infty[$$

On a $0\in]-\infty,+\infty[$ alors l'équation : $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

On a $g_n(\alpha_n)=0\Leftrightarrow h(\alpha_n)+\frac{n}{\alpha_n}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+\tan(\alpha_n)}=-\frac{n}{\alpha_n}\Leftrightarrow 1+\tan(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow\tan\alpha_n=-\frac{\alpha_n}{n}-1$$

b) Pour tout entier naturel n non nul

$$g_{n+1}(\alpha_n)-g_{n+1}(\alpha_{n+1})=g_{n+1}(\alpha_n)-0=h(\alpha_n)+\frac{n+1}{\alpha_n}$$

$$=\left(h(\alpha_n)+\frac{n}{\alpha_n}\right)+\frac{1}{\alpha_n}=g_n(\alpha_n)+\frac{1}{\alpha_n}=0+\frac{1}{\alpha_n}<0$$

On a : $g_{n+1}(\alpha_n)<g_{n+1}(\alpha_{n+1})$

g_{n+1} est décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ $\alpha_n>\alpha_{n+1}$

$\alpha_n\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$ et $\alpha_{n+1}\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

→Alors la suite (α_n) est décroissante

a) On a la suite α_n est décroissante et minorée par $-\frac{\pi}{4}$ alors (α_n) est convergente vers une limite ℓ.

On a $-\frac{\pi}{4}<\alpha_n<0\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le\ell\le 0$

On a $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\ell$

et la fonction tan est continue en ℓ

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\tan(\alpha_n)=\tan(\ell)$

D'autre part $\lim_{n\to+\infty}\tan(\alpha_n)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{\alpha_n}{n}-1=0-1=-1$

D'où $\tan(\ell)=-1$ or $\ell\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\Rightarrow\ell=-\frac{\pi}{4}$

Conclusion : (α_n) converge vers $-\frac{\pi}{4}$.

21 SUR LE CHEMIN DU BAC

I.

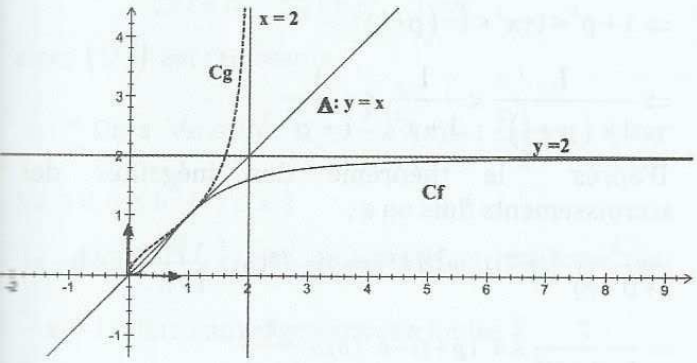
a) f est une fonction rationnelle donc elle est continue dérivable sur $[0,+\infty[$. $\forall x\in[0,+\infty[$, on a

$$f'(x)=\frac{4\times(1+x^2)-2x(2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	0 ↗	2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

alors la droite D : y = 2 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.



1)

a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,2[$. D'où f admet une fonction réciproque g définie sur $J = [0,2[$

b) (C') est le symétrie de (C) par rapport à D : y = x.

2) a)

$f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,2[$ bijection

$y \longrightarrow x$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$f(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x \Leftrightarrow 2y^2 = x(1+y^2)$

$\Leftrightarrow 2y^2 - xy^2 = x \Leftrightarrow y^2(2-x) = x$

$\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{x}{2-x} \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

ou $y = -\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, or $y \in [0,+\infty[$

donc $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} = f^{-1}(x) = g(x)$.

II.1)

$h(x) = g(1-\cos x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2-1+\cos x}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$

$= \sqrt{tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \left|tg\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$ car $x \in [0,\pi[$.

2) $\forall x \in [0,\pi[$, on a : $h'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) > 0$

h est continue et strictement croissante sur $[0,\pi[$ donc h réalise un bijection de $[0,\pi[$ sur $h([0,\pi[) = [0,+\infty[$.

3) $h : [0,\pi[\longrightarrow [0,+\infty[$ une bijection

$t \longrightarrow x$

h est dérivable sur $[0,\pi[$ et $\forall t \in [0,\pi[$,

$h'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) \neq 0$

donc h^{-1} est dérivable sur $h([0,\pi[) = [0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[$, on a :

$\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{h'(t)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tg^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}$

or $h(t) = x \Leftrightarrow tg\left(\dfrac{t}{2}\right) = x$ d'où $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

4) Soit la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par

$\varphi(x) = h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in]0,+\infty[$

$\varphi(0) = \pi$

a) On a h^{-1} réalise une bijection de $[0,+\infty[\to [0,\pi[$ alors $h^{-1}[0,+\infty[= [0,\pi[$

D'autre part on a h^{-1} est continue croissante sur

$[0,+\infty[$ alors $h^{-1}([0,+\infty)) = \left[h^{-1}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)\right[$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = \pi$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \pi$

D'où φ est continue à droite en o

b/ * La fonction $x \xrightarrow{U} \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

* La fonction $x \to h^{-1}(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en particulier sur U $(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$

d'ou la fonction $h^{-1}oU$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,

$d'ou\ \varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

On a

$$\forall x>0, \varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

c) Soit x $\in]0,+\infty[$

on a φ est continue sur [0,x]

φ est dérivable sur sur]0,x[

Alors d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(c)$ c'est-à-dire $\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$

d) On a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+c^2}$$

(Rq c n'est pas constante elle dépend de x)

$= \lim_{c\to 0^+}\frac{-2}{1+c^2} = -2$ (car on a 0<c<x donc si $x \to 0^+$ on a $c \to 0^+$)

D'où φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = -2$.

2ème méthode :

On a $\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\pi}{x}$

Or il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$\frac{\varphi(x)-\pi}{x} = \frac{-2}{1+c^2}$

On a $0<c<x \Rightarrow 0<c^2<x^2 \Rightarrow 1<1+c^2<1+x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \Rightarrow -2 < \frac{-2}{1+c^2} < \frac{-21}{1+x^2}$$

D'où $-2 < \frac{\varphi(x)-\pi}{x} < \frac{-2}{1+x^2}$

Comme $\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{1+x^2} = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = -2$

D'où φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = -2$.

5) (U_n) définie sur IN par $U_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$

a) Soit p $\in$ IN on a

* h^{-1} est continue sur $[p,p+1]$

* h^{-1} est dérivable sur $]p,p+1[$

* $p<x<p+1 \Rightarrow p^2<x^2<(p+1)^2$

$$\Rightarrow 1+p^2<1+x^2<1+(p+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(p+1)^2} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+p^2}$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$\frac{2}{1+(1+p)^2}[(p+1)-p] \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}[(p+1)-p]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$$

Conclusion pour tout $p \in IN$ on a $\frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$

b) Soit $p \in IN, n \in IN^*$

$$* \frac{2}{1+(1+p)^2} \le h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{1+(1+p)^2} \le \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1)-\sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(1+p)^2} \le \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1)-\sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow 2(U_n-1) \le h^{-1}(n)-h^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow U_n \le \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1 \text{ car } h^{-1}(0)=0$$

$$* h^{-1}(p+1)-h^{-1}(p) \le \frac{2}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p+1)-\sum_{k=0}^{n-1}h^{-1}(p) \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(n)-h^{-1}(0) \le 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(n)-h^{-1}(0) \le 2\left(U_n-\frac{1}{1+n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{1+n^2} \le U_n$$

Pour n = 0

$$\underbrace{\frac{1}{2}h^{-1}(0)+\frac{1}{0^2+1}}_{1}\le \underbrace{U_0}_{1}\le \underbrace{\frac{1}{2}h^{-1}(0)+1}_{1}$$

l'inégalité est vraie

Conclusion d'où pour tout $n\in IN$ on a

$$\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1}\le U_n\le \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1$$

c) * On a $\forall n\in IN$

$$U_{n+1}-U_n=\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1}{1+p^2}-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+p^2}=\frac{1}{1+n^2}>0$$

alors (U_n) est croissante.

* On a $\forall n\in IN$, $U_n\le \frac{1}{2}h^{-1}(n)+1\le \frac{1}{2}\pi+1$ (car $\forall x\ge 0, 0\le h^{-1}(x)\le \pi$)

Alors (U_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}\pi+1$ alors converge vers une limite ℓ

On pour tout $n\in IN$ $\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1}\le U_n\le \frac{1}{2}\pi+1$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}h^{-1}(n)+\frac{1}{n^2+1}\right)=\frac{1}{2}\pi+0=\frac{1}{2}\pi$$

Alors $\frac{\pi}{2}\le \ell\le \frac{\pi}{2}+1$

22 SUR LE CHEMIN DU BAC

On a : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$; $x\in]-3,1[$

A.1) g est dérivable sur $]-3,1[$.

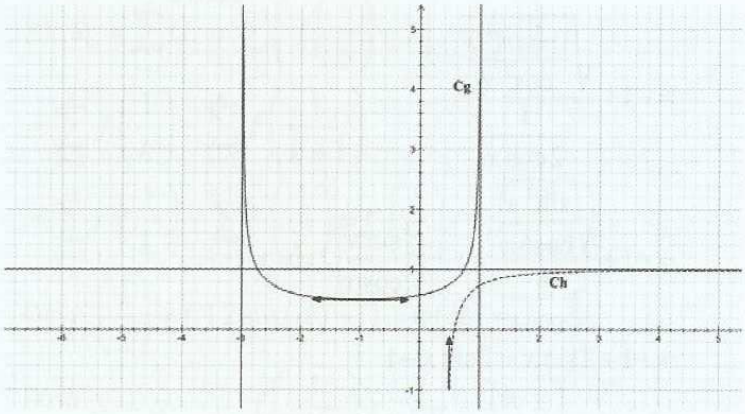
$$\forall x\in]-3,1[,\ g'(x)=-\frac{\left(\sqrt{-x^2-2x+3}\right)'}{\sqrt{-x^2-2x+3}^2}$$

$$=-\frac{\frac{-2x-2}{2\sqrt{-x^2-2x+3}}}{\left(-x^2-2x+3\right)}$$

$$=\frac{2x+2}{2\underbrace{\left(-x^2-2x+3\right)}_{>0}\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

Le signe de g'(x) est celui de 2x + 2

x	-3		-1		1
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$



2)

g est continue et strictement croissante sur $[-1,1[$

alors g réalise une bijection de $[-1,1[$ sur

$$g([-1,1[)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[=J$$

3) $C_g=S_\Delta(\Gamma)$ avec $\Delta: y=x$ et Γ la partie de C_g relative à $[-1,1[$.

$$h:[-1,1[\to\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$$

$$y\to x$$

$$g(y)=x\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{-y^2-2y+3}}=x$$

$$\Leftrightarrow -y^2-2y+3=\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y\neq 1=4-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow (y+1)^2=\frac{4x^2-1}{x^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow y+1=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\ \text{ ou }\ y+1=-\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$$

$$\Leftrightarrow y=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\ \text{ ou }\ y=-1-\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}<0$$

Impossible car y d'écrit l'intervalle $[-1,1[$.

D'où $y=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\Rightarrow h(x)=-1+\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$

4) on a: $\psi(x)=h\left(\frac{1}{2\cos x}\right)$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $h\left(\frac{1}{2\cos x}\right)=-1+\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}}{\frac{1}{2\cos x}}$

$=-1+\frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}}{\frac{1}{2\cos x}}$

$=-1+\frac{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}{\frac{1}{2\cos x}}=-1+\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|2\cos x$

$=-1+2\sin x=2\sin x-1$

b) $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\Psi(x)=2\sin x-1$

la fonction Ψ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$;

$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\Psi'(x)=2\cos x>0$

Ψ est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\Psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[\Psi(0),\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[=[-1,1[$

Comme $\frac{1}{2}\in[-1,1[$ alors l'équation $\Psi(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

c) On a: Ψ est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\Psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[-1,1[$

$\Psi:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to[-1,1[$

$t\to x$

On a: Ψ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors Ψ^{-1} est dérivable sur $\psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[-1,1[$

$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\Psi'(t)=2\cos t\neq 0$

$\forall x\in[-1,1[;\left(\Psi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\Psi'(t)}=\frac{1}{2\cos t}$

Or on a: $\Psi(t)=x\Leftrightarrow 2\sin t-1=x\Leftrightarrow\sin t=\frac{x+1}{2}$

Or $\cos^2 t+\sin^2 t=1\Rightarrow\cos^2(t)$

$=1-\frac{(1+x)^2}{4}=\frac{4-(1+2x+x^2)}{4}=\frac{-x^2-2x+3}{4}$

Or $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\cos t>0\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{2}$

Conclusion: $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}=g(x)\cdot$

B. $\begin{cases}f'(x)=g(x),x\in]-3,1[\\ f(0)=0\end{cases}$

1) $\varphi(x)=f(2\sin x-1),x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) $x\xrightarrow{\Psi}2\sin x-1\xrightarrow{f}f(2\sin x-1)$

$\varphi=fo\Psi$

* La fonction Ψ est dérivable sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

* La fonction f est dérivable sur $]-3,1[=\Psi(I)$

D'où $\varphi=fo\Psi$ est dérivable sur I.

$\forall x\in I,\varphi'(x)=\Psi'(x)f'(\Psi(x))=2\cos x\ g(\Psi(x))$

$=2\cos x\ g(2\sin x-1)$

$=\frac{2\cos x}{\sqrt{-4\sin^2 x+4\sin x-1-4\sin x+2+3}}$

$=\frac{2\cos x}{\sqrt{4-4\sin^2 x}}=\frac{2\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{2\cos x}{2\left|\underbrace{\cos x}_{>0}\right|}=1$

b) on a $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(2\sin\frac{\pi}{6}-1\right)=f(0)=0$

On a: $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $\varphi'(x)=1\Rightarrow\varphi(x)=x+k$

or $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ alors $\frac{\pi}{6}+k=0$ alors $k=-\frac{\pi}{6}$

d'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x)=x-\frac{\pi}{6}$

2) $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right); n \geq 2$

a) $\forall n \geq 2, \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq g\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n(n+1)}$?

Soit $n \geq 2$

On a: * f est continue sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

* f est dérivable sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$

* $\forall x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$; on a $f'(x) = g(x)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ g \text{ est croissante sur } [-1,1[\\ \frac{1}{n+1} \in [-1,1[\\ \frac{1}{n} \in [-1,1[\end{array}\right\}$

alors $g\left(\frac{1}{n+1}\right) < g(x) < g\left(\frac{1}{n}\right)$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis.

On a :

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n(n+1)}$$

b) on a: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

* on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

* on a:

$$\forall n \in N^* \setminus \{1\} : \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq n^2 U_n \leq \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 U_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $S_n = \sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n} \left(f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$

$$= \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=3}^{n+1} f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2\sin(\alpha) - 1\right) = \varphi(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{6}$

D'où $S_n = \alpha - \frac{\pi}{6} - f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

On a: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha - \frac{\pi}{6} - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \alpha - \frac{\pi}{6} - 0 = \alpha - \frac{\pi}{6}$

23 SUR LE CHEMIN DU BAC

Soit la fonction f définie sur IR par:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 - \sqrt{x^2+1} & si \quad x < 0 \\ 1 + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est ζ

1/ * $f(0) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + 1 = 2 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + 3 - \sqrt{x^2+1} = 3 - 1 = 2 = f(0)$$

Alors f est continue en 0

* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x + 3 - \sqrt{x^2+1} - 2}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x + 1 - \sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^2 - (x^2+1)}{x\left(x+1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+1}} = 1 = f_g'(0)$$

*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

=1

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

On a f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$

Alors f est dérivable en 0 et f '(0) = 1.

b) f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ alors $\forall x < 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$, $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+x)'\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}'(1+x)}{\left(1+x^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right) - (1+x)x}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1-x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	2

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+3-\sqrt{x^2+1} = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

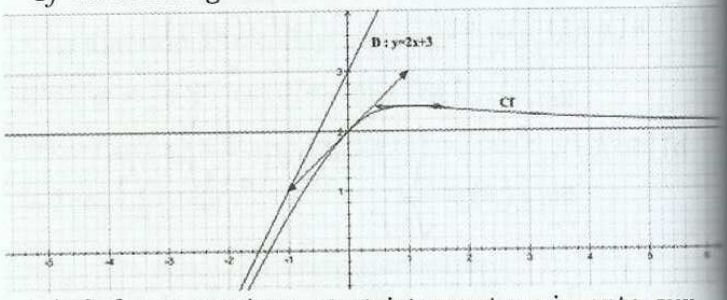
Alors la droite d'équation $y = 2$ est une horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3-\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} x+3-\sqrt{x^2+1} - 2x$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3 - \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 3 = b$$

D'où $D : y = 2x+3$ est une asymptote oblique à Cf au voisinage de $-\infty$



2/ a) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 2] = J$

b) $f :]-\infty, 0] \to]-\infty, 2]$

$y \to x$

On a $\forall y \in]-\infty, 0[$ $f(y) = y+3-\sqrt{y^2+1}$ et f(0) = 2 alors $\forall y \in]-\infty, 0]$ $f(y) = y+3-\sqrt{y^2+1}$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in]-\infty,0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3-\sqrt{y^2+1}=x \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3-x=\sqrt{y^2+1} \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((y+3)-x)^2=\sqrt{y^2+1}^2 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

(Nécessairement y+3-x ≥ 0 car si non $\underbrace{y+3-x}_{<0}=\underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{>0}$ est impossible et donc f n'est pas bijective)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2-2x(y+3)+x^2=y^2+1 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y+9-2xy-6x+x^2=y^2+1 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(6-2x)=-x^2+6x-8 \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x} \\ x\in]-\infty,2] \end{cases} \quad D$$

où $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}=\dfrac{x^2-6x+8}{2x-6}, x\in]-\infty,2]$

Remarque :

* On a $\forall y\in]-\infty,0[\quad f(y)=y+3-\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}$ et $x\in]-\infty,2[$

* On a : $f(0)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=0$

Conclusion : $\begin{cases} f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{2x-6} & \text{si } x\in]-\infty,2[\\ f^{-1}(2)=0 \end{cases}$

C'est-à-dire pour tout $x\in]-\infty,2]$ on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+6x-8}{6-2x}$

3) a) on a si $0\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq -x\leq 0 \Rightarrow 0\leq 1-x\leq 1$
$\Rightarrow |1-x|\leq 1$

D'où pour tout x de $[0,1]$ on a

$$|f'(x)|=\frac{|1-x|}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\leq \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\leq 1$$

b) On pose $g(x)=f(x)-3x$

g est définie dérivable sur $]0,1[$, $\forall x\in]0,1[$,

$g'(x)=\underbrace{f'(x)}_{\leq 1}-3<0$ g est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ alors g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)=]g(1),g(0)[=]\sqrt{2}-2,2[$ comme $0\in]\sqrt{2}-2,2[$

Alors l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur $]0,1[$

4) Soit U la suite réelle définie sur IN par

$$\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{2} \\ 3U_{n+1}=f(U_n) \quad \text{pour } n\in IN \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a $U_n\in]0,1[$

* on a : $U_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow U_0\in]0,1[$

* Soit $p\in \mathbb{N}$, supposons que $0<U_p<1$ et montrons que $0<U_{p+1}<1$?

On a : $0<U_p<1$ et f est croissante sur $[0,1]$ alors $f(0)<f(U_p)<f(1)$

Alors $2<f(U_p)<1+\sqrt{2}$

Alors $2<3U_{p+1}<1+\sqrt{2}$

Alors $\dfrac{2}{3}<U_{p+1}<\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

Alors $0<U_{p+1}<1$

D'après le principe de raisonnement par récurrence la propriété est vraie $\forall n\in \mathbb{N}$

b) ■ on a f est dérivable sur $I=[0,1]$

$\forall x\in [0,1], |f'(x)\leq 1|$ alors d'après le corollaire de Théorème des inégalités

$U_n\in [0,1]$ accroissements finis, on a : $\alpha\in [0,1]$

$|f(U_1)-f(\alpha)|\leq 1|U_n-\alpha| \Rightarrow |3U_{n+1}-3\alpha|\leq 1|U_n-\alpha|$

$\Rightarrow |U_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{3}|U_n-\alpha|$

■ Montrons par récurrence P

"$\forall n\in \mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$"

* on a : $|U_0-\alpha|\leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$?

On a $|U_0-\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|\le 1$

car $0<\alpha<1\Rightarrow -1<-\alpha<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\alpha<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\left|\frac{1}{2}-\alpha\right|<\frac{1}{2}\le 1$

Alors P est vraie pour $n=0$

* Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Montrons que $|U_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

On a : $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{3}|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$\forall n\in\mathbb{N},|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

■ On a $\forall n\in\mathbb{N},|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

car $-1<\frac{1}{3}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$

5/ S la suite définie sur IN^* par : $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kU_k$

c) $\forall k\in IN^*$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kU_k-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\alpha$$

$$=S_n-\frac{1}{n^2}\alpha\sum_{k=1}^{n}k=S_n-\frac{1}{n^2}\alpha\frac{n(n+1)}{2}=S_n-\alpha\frac{(n+1)}{2n}$$

$$S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)$$

d) * $\forall n\in IN^*,3^n\ge 2n$? Soit $n\in IN^*$ d'après la formule de binôme on a

$$3^n=(1+2)^n=C_n^0 1^n 2^0+C_n^1 1^{n-1}2^1+\ldots+C_n^n 2^n=1+2n\underbrace{+\ldots+2^n}_{>0}$$

alors $\forall n\in IN^*,3^n\ge 2n$

* $\forall n\in IN^*$,

$$\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|=\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k(U_k-\alpha)\right|\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|$$

Or $\forall k\in IN^*$

$$|U_k-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ et } \frac{1}{3^k}\le\frac{1}{2k}\Rightarrow|U_k-\alpha|\le\frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow k|U_k-\alpha|\le\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\le n\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k|U_k-\alpha|\le\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|\le\frac{1}{2n}$$

*On a $\forall n\in IN^*$,

$$\left|S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\right|\le\frac{1}{2n}\Rightarrow-\frac{1}{2n}\le S_n-\alpha\frac{n+1}{2n}\le\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow\alpha\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n}\le S_n-\le\alpha\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}=\frac{\alpha}{2}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}=\frac{\alpha}{2}$

alors que la suite S converge vers $\frac{\alpha}{2}$