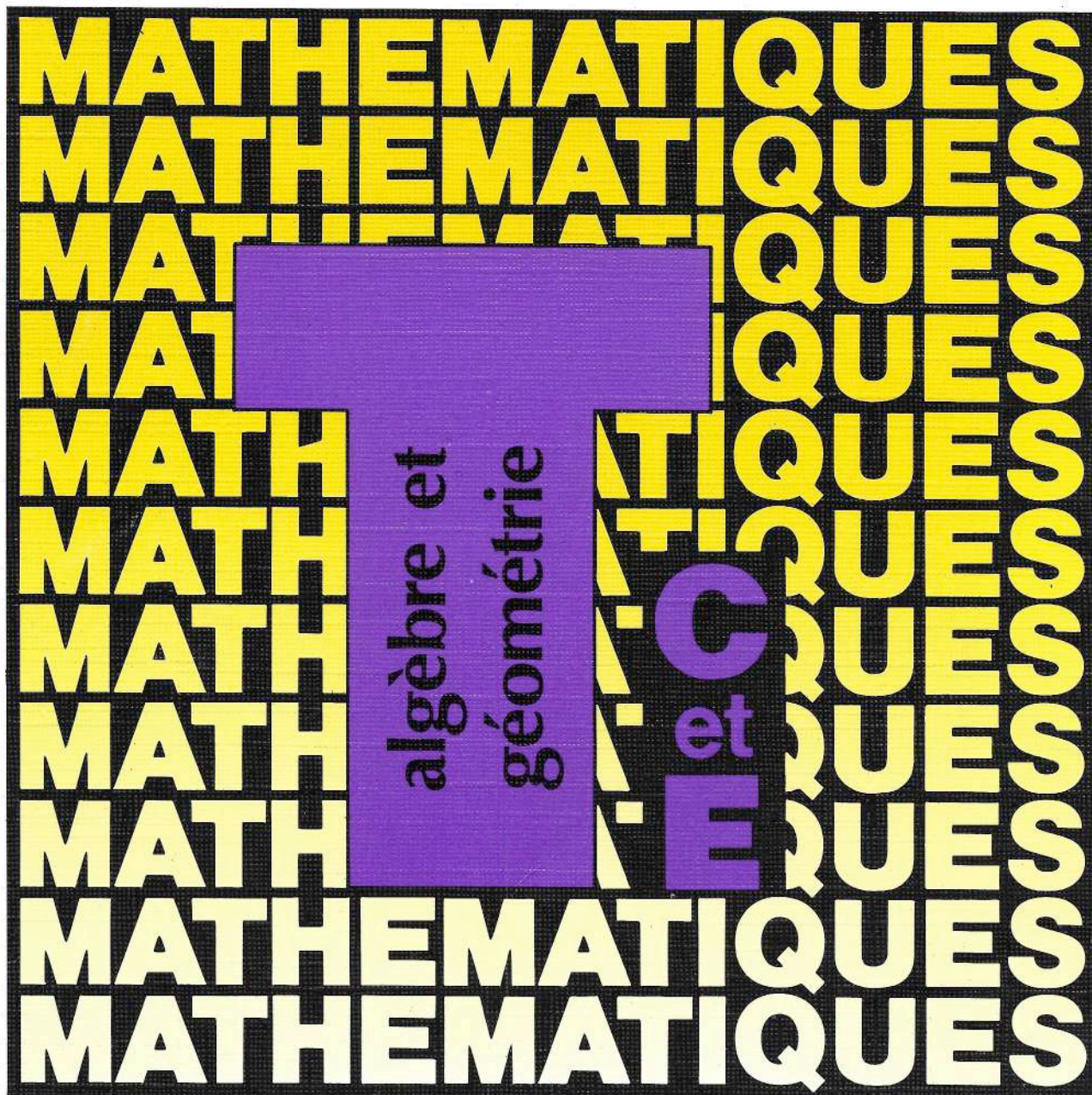


MATHÉMATIQUES



NOUVELLE ÉDITION

H  HACHETTE
Classiques

MATHÉMATIQUES

TERMINALES C et E

Algèbre et géométrie

Nouvelle édition conforme au Programme 86
(B.O. du 11 septembre 1986)

**C. GAUTIER
Ph. ROYER
C. THIERCÉ**

HACHETTE

Couverture : Alain GRAMMAT
Maquette et mise en pages : Louis DE CAYEUX, Claire BARBICHON
Schémas : Alain GRAMMAT

© HACHETTE 1987
79 Boulevard Saint-Germain
75288 Paris Cedex 06

ISBN 2.01.012538.X

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. » (Alinéa 1^{er} de l'Article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivant du Code Pénal.

AVANT-PROPOS

Cette nouvelle édition, entièrement refondue, est conforme au programme de mathématiques des classes terminales C et E paru dans le B.O. du 11 septembre 1986.

C'est ainsi qu'un certain nombre de modifications ont été apportées, concernant les contenus, le vocabulaire utilisé ou la façon d'aborder et de développer telle ou telle notion.

L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les séries statistiques à deux variables, la géométrie descriptive, l'étude systématique des applications affines ont disparu. En revanche, les notions d'événement et de probabilité d'un événement font maintenant l'objet d'un chapitre entier, comme le produit vectoriel retiré du programme de Première et intégré à celui de Terminale.

Conformément au programme, nous n'avons pas introduit la notion d'angle de droites. Les conditions d'alignement ou de cocyclicité de points, de parallélisme ou d'orthogonalité de droites sont exprimées sous forme d'égalité de mesures d'angles de vecteurs modulo π . Les inconvénients d'écriture qui en résultent sont largement compensés par la simplification apportée à l'exposé.

Les élèves des classes terminales doivent savoir utiliser une calculatrice scientifique programmable. Afin de faciliter cet apprentissage, nous avons donné, tant en analyse qu'en algèbre ou géométrie, de nombreux exemples résolus de programmation. Pour cela nous avons choisi quatre calculatrices dans la gamme des principaux constructeurs présents sur le marché : HP-11C (Hewlett-Packard), FX-180P (Casio), TI-62 Galaxy (Texas-Instruments), EL-5050 (Sharp).

Pour décrire la suite des instructions constituant un programme, nous avons adopté les règles suivantes :

- Chaque instruction nécessitant l'action sur une seule touche est représentée dans un cadre plein :

$\boxed{x}$, $\boxed{\sin}$, $\boxed{\sqrt{x}}$, ...

- Chaque instruction nécessitant l'action sur deux touches est représentée dans un cadre tireté :

$\boxed{x^2}$, $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\frac{1}{x}}$, ...

- Chaque chiffre, nombre ou lettre, entré est représenté sans cadre, quelle que soit sa signification (numéro de mémoire, label de programme, constante réelle, ...) :

- 12 $\boxed{x}$ 3 $\boxed{=}$, - 12 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{x}$, $\boxed{\text{LBL}}$ A, ...

Les éléments de géométrie analytique dans le plan de l'espace, abordés dans le cours de Première, sont précisés et développés avec un double souci :

- habituer l'élève à choisir un repère et un mode de représentation (équation(s) cartésienne(s) ou système d'équations paramétriques) bien adaptés aux données et aux calculs à effectuer;
- ne pas privilégier les méthodes de démonstration par le calcul par rapport à d'autres méthodes plus « géométriques » et tout aussi efficaces, comme le calcul barycentrique ou l'utilisation des angles de vecteurs, des nombres complexes, des transformations ponctuelles, ...

Prolongement naturel du manuel de Géométrie de Première scientifique publié dans la même collection, cet ouvrage est conçu avec le même souci de provoquer la participation active de l'élève.

C'est ainsi que nous avons continué d'insérer, dans le texte même du cours, de nombreuses activités qui doivent être l'occasion, pour le lecteur, d'un travail personnel : révision, prise de contact avec de nouvelles notions et assimilation.

Comme dans le livre de Première, et toujours pour favoriser le travail individuel, en classe et/ou à la maison, une rubrique de travaux pratiques a été introduite dans chaque chapitre.

Enfin, pour offrir aux élèves un bon outil de préparation aux épreuves du baccalauréat, nous avons rassemblé à la fin de chaque paragraphe et de chaque chapitre, de nombreux exercices et problèmes, extraits pour la plupart des sujets des toutes dernières années.

C'est avec beaucoup d'intérêt que nous accueillerons les critiques et suggestions que voudront bien nous faire parvenir nos collègues et tous les utilisateurs de cet ouvrage. Par avance, nous les en remercions.

Les Auteurs

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 : DÉNOMBREMENT	1
I — Ensembles finis	1
II — Arrangements et permutations	5
III — Sous-ensembles d'un ensemble fini	10
TRAVAUX PRATIQUES	17
EXERCICES ET PROBLÈMES	24
Chapitre 2 : CALCUL DES PROBABILITÉS	27
I — Notion d'événement	27
II — Notion de probabilité	30
III — Propriétés des probabilités	36
TRAVAUX PRATIQUES	39
EXERCICES ET PROBLÈMES	46
Chapitre 3 : NOMBRES COMPLEXES	48
I — Aperçu historique	48
II — Définition du corps des nombres complexes	49
III — Module d'un nombre complexe	57
IV — Arguments d'un nombre complexe non nul	61
V — Applications des nombres complexes à la trigonométrie	71
VI — Racines n -ièmes	75
VII — Équation du second degré	82
TRAVAUX PRATIQUES	86
EXERCICES ET PROBLÈMES	88
Chapitre 4 : SYSTÈMES LINÉAIRES	93
I — Généralités et définitions	93
II — Interprétation vectorielle d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues	94
III — Transformations élémentaires d'un système	98
IV — Méthode du pivot de Gauss	102
TRAVAUX PRATIQUES	107
EXERCICES ET PROBLÈMES	111
Chapitre 5 : PROJECTIONS — CARACTÉRISATIONS DES DROITES ET PLANS	113
I — Points et vecteurs	113
II — Projections	115
III — La droite dans le plan	121
IV — Droite et plan dans l'espace	127
TRAVAUX PRATIQUES	137
EXERCICES ET PROBLÈMES	145

Chapitre 6 :	CALCUL BARYCENTRIQUE	148
I –	Introduction	148
II –	Barycentre	149
III –	Barycentres de deux points distincts	155
IV –	Barycentres de trois points non alignés	160
	TRAVAUX PRATIQUES	163
	EXERCICES ET PROBLÈMES	172
Chapitre 7 :	ANGLES ORIENTÉS DANS LE PLAN	176
I –	Angles orientés de demi-droites et de vecteurs	176
II –	Bases orthonormales directes	182
III –	Propriétés angulaires du cercle	186
	TRAVAUX PRATIQUES	192
	EXERCICES ET PROBLÈMES	196
Chapitre 8 :	PRODUIT VECTORIEL	199
I –	Orientation de l'espace	199
II –	Produit vectoriel	202
III –	Propriétés de linéarité du produit vectoriel	205
IV –	Coordonnées du produit vectoriel	207
	TRAVAUX PRATIQUES	212
	EXERCICES ET PROBLÈMES	216
Chapitre 9 :	NOTIONS SUR LES COURBES PARAMÉTRÉES DU PLAN	217
I –	Généralités	217
II –	Exemples de représentations paramétriques	219
III –	Étude d'une courbe paramétrée	223
	TRAVAUX PRATIQUES	229
	EXERCICES ET PROBLÈMES	234
Chapitre 10 :	CONIQUES	239
I –	Coniques définies par foyer et directrice	240
II –	Équation réduite et forme des coniques	243
III –	Représentation paramétrique d'une conique	254
	TRAVAUX PRATIQUES	260
	EXERCICES ET PROBLÈMES	265
Chapitre 11 :	ISOMÉTRIES DU PLAN	269
I –	Activités préliminaires	269
II –	Transformation vectorielle associée à une isométrie	274
III –	Déplacements	281
	TRAVAUX PRATIQUES	288
	EXERCICES ET PROBLÈMES	295

Chapitre 12 : **SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN**

I – Activités préliminaires	299
II – Similitudes directes	299
III – Angle d'une similitude directe	300
IV – Décomposition d'une similitude directe	303
V – Écriture complexe d'une similitude directe	307
TRAVAUX PRATIQUES	309
EXERCICES ET PROBLÈMES	312
	316

Chapitre 13 : **TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DE L'ESPACE**

I – Homothéties-translations	320
II – Isométries dans l'espace	320
III – Rotations dans l'espace	326
TRAVAUX PRATIQUES	332
EXERCICES ET PROBLÈMES	338
	343

CHAPITRE

1

DÉNOMBREMENT

Dans ce chapitre, nous supposons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les propriétés des opérations dans $\mathbb{N}$: addition et multiplication, ainsi que les propriétés de la relation d'ordre $\leq$. Pour tout entier naturel *non nul* n , nous noterons $\mathbb{N}_n$ l'ensemble formé des entiers $1, 2, \dots, n$:

$$\mathbb{N}_n = \{i \in \mathbb{N} / 1 \leq i \leq n\}.$$

I – ENSEMBLES FINIS

Pour compter les élèves d'une classe, on fait successivement correspondre à chacun des entiers $1, 2, 3, \dots$, un et un seul élève, chaque élève n'étant compté qu'une seule fois. Le dernier entier utilisé est le nombre cherché. Cet exemple illustre le sens courant de la notion d'ensemble fini : ensemble dont on peut compter les éléments.

Plus précisément :

DÉFINITION 1

On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E .

Un ensemble non fini est dit infini, c'est le cas de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$.

CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Soit E un ensemble fini.

1° Si E n'est pas vide, il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E . On démontre, et nous l'admettrons, que cet entier n est unique. On l'appelle le **cardinal** de E et on le note $\text{Card } E$.

$\text{Card } E$ n'est autre que le nombre d'éléments de E .

2° Si E est vide, son cardinal est, par définition, l'entier 0 : $\text{Card } \emptyset = 0$.

Dénombrer un ensemble fini E , c'est calculer son cardinal.

A noter que tout ensemble E , fini, non vide, de cardinal n , peut s'écrire sous la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. En effet, comme il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E , les éléments de E sont $f(1), f(2), \dots, f(n)$. Si, pour tout i de $\mathbb{N}_n$, on note $x_i = f(i)$, on obtient :

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

A noter également que l'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal égal à 0 .

PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES FINIS

1. S'il existe une bijection g d'un ensemble E sur un ensemble F , l'application réciproque de g , notée g^{-1} , est une bijection de F sur E . On dit alors que E et F sont **équipotents**.

Considérons un ensemble E , fini, non vide, de cardinal n , et un ensemble F équipotent à E . Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E et une bijection g de E sur F (figure 1).

L'application composée $g \circ f$ est alors une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur F . Il en résulte que F est fini et que $\text{Card } F = n$.

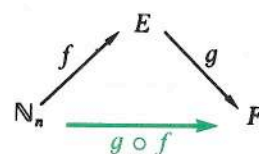


Figure 1

PROPRIÉTÉ 1

Tout ensemble F équipotent à un ensemble fini E est fini et de même cardinal que E .

2. On démontre, et nous admettrons, les résultats suivants, intuitivement évidents :

PROPRIÉTÉ 2

Toute partie d'un ensemble fini est finie.

PROPRIÉTÉ 3

La réunion de deux ensembles finis E et F disjoints, c'est-à-dire d'intersection vide, est un ensemble fini dont le cardinal est la somme des cardinaux de E et F .

3. Précisons la propriété 2. Soit E un ensemble fini et F une partie de E . Rappelons qu'on appelle **complémentaire** de F dans E l'ensemble, noté $\complement_E F$ ou $\overline{F}$, formé des éléments de E qui ne sont pas éléments de F (figure 2).

On a : $E = F \cup \overline{F}$ et $F \cap \overline{F} = \emptyset$,

d'où (propriété 3) : $\text{Card } E = \text{Card } F + \text{Card } \overline{F}$.

Il en résulte : $\text{Card } F \leq \text{Card } E$.

De plus, si $\text{Card } F = \text{Card } E$, alors $\text{Card } \overline{F} = 0$, donc $\overline{F} = \emptyset$, c'est-à-dire $F = E$.
Par suite :

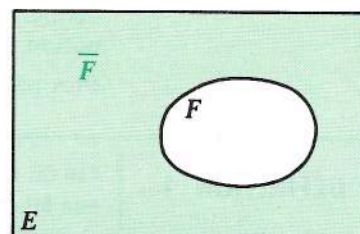


Figure 2

PROPRIÉTÉ 4

Pour toute partie F d'un ensemble fini E , on a $\text{Card } F \leq \text{Card } E$. De plus, si $\text{Card } F = \text{Card } E$, alors $F = E$.

4. Soit E et F deux ensembles finis.

On appelle **différence E moins F** , et on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de F (figure 3). (Lorsque $F \subset E$, $E \setminus F$ n'est autre que le complémentaire de F dans E .)

On a :

$$E = (E \setminus F) \cup (E \cap F) \text{ et } (E \setminus F) \cap (E \cap F) = \emptyset,$$

d'où (propriété 3) :

$$\text{Card } E = \text{Card } (E \setminus F) + \text{Card } (E \cap F),$$

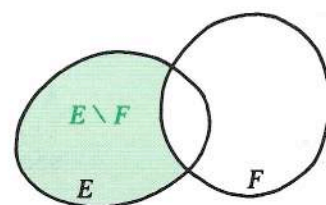


Figure 3

soit :

$$\text{Card } (E \setminus F) = \text{Card } E - \text{Card } (E \cap F)$$

Conséquence :

On a : $E \cup F = (E \setminus F) \cup F$ et $(E \setminus F) \cap F = \emptyset$,
d'où (propriété 3) :

$$\text{Card } E \cup F = \text{Card } (E \setminus F) + \text{Card } F = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card } E \cap F,$$

soit :

$$\text{Card } E + \text{Card } F = \text{Card } (E \cup F) + \text{Card } (E \cap F)$$

En particulier, si E et F sont disjoints, on retrouve la propriété 3 :

$$\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F.$$

Considérons maintenant trois ensembles finis E_1, E_2, E_3 , deux à deux disjoints. On a :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 \quad \text{et} \quad (E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3) = \emptyset.$$

Il en résulte que $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ est un ensemble fini et que :

$$\text{Card } (E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \text{Card } (E_1 \cup E_2) + \text{Card } E_3 = \text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 + \text{Card } E_3.$$

Ce résultat se généralise par récurrence :

PROPRIÉTÉ 5

La réunion de n ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_n$, deux à deux disjoints, est finie et :

$$\text{Card } (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 + \dots + \text{Card } E_n.$$

Activité

1. Différence symétrique

Soit E un ensemble fini. Pour toute partie F de E on note $\overline{F}$ le complémentaire de F dans E .

1° Soit A et B deux parties de E .

a) Démontrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) On appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble, noté $A \Delta B$, défini par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

($A \Delta B$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à un et à un seul des deux ensembles A et B .)

Démontrer que : $\text{Card } (A \Delta B) = \text{Card } A + \text{Card } B - 2 \text{ Card } (A \cap B)$.

2° Application : E est un ensemble de 100 pièces fabriquées par une machine à qui l'on fait subir deux contrôles C et C' .

A est l'ensemble des pièces acceptées par C et B l'ensemble des pièces acceptées par C' .

On suppose que 72 pièces sont acceptées par C , que 76 pièces sont acceptées par C' et que 22 pièces sont refusées à la fois par C et par C' .

Calculer :

a) Le nombre de pièces acceptées par au moins un contrôle.

b) Le nombre de pièces acceptées par un et un seul des deux contrôles.

2. Dénombrement de $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble fini de cardinal n . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E ($\emptyset$ et E sont éléments de $\mathcal{P}(E)$).

1° Dénombrer $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants : $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$.

2° Les résultats de la question 1° conduisent à présumer que si $\text{Card } E = n$ alors $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$. Vérifions cette conjecture par récurrence.

- La propriété est vraie pour $n = 0$.
- En supposant qu'elle soit vraie pour tout ensemble de cardinal n , démontrons qu'elle est vraie pour tout ensemble de cardinal $n + 1$.

Soit E' un ensemble de cardinal $n + 1$. Comme $\text{Card } E' \geq 1$, E' possède au moins un élément. Le choix d'un élément a de E' permet d'opérer sur les parties de E' la classification suivante : celles qui contiennent a , celles qui ne contiennent pas a .

a) En utilisant l'hypothèse de récurrence (si $\text{Card } E = n$, alors $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$), dénombrer l'ensemble des parties de E' contenant a et l'ensemble des parties de E' ne contenant pas a .

b) En déduire $\text{Card } \mathcal{P}(E')$ et conclure.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 1

Pour tout ensemble fini E de cardinal n , l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et de cardinal 2^n .

3° Application : Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E de cardinal p . Dénombrer l'ensemble $\mathcal{P}'$ des parties de E contenant A et l'ensemble $\mathcal{P}''$ des parties de E disjointes de A . Formuler la définition de l'ensemble $\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ et calculer son cardinal.

4° Soit E un ensemble fini de cardinal n , $n \geq 2$, et soit a et b deux éléments de E . Dénombrer les parties de E contenant un et un seul des deux éléments a, b et celles contenant au moins un de ces deux éléments.

5° Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A et B des parties de E de cardinaux respectifs p et q .

a) A quelle condition, nécessaire et suffisante, l'équation $A \cup X = B$ a-t-elle au moins une solution X appartenant à $\mathcal{P}(E)$? Cette condition étant satisfaite, dénombrer les solutions de l'équation.

b) Reprendre la question a) pour l'équation $A \cap X = B$.

3. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n , et f une application de E dans F . On rappelle :

- que f est dite **injective** si tout élément y de F possède au plus un antécédent par f ;
- que f est dite **surjective** si tout élément y de F possède au moins un antécédent par f .

1° On suppose, dans cette question, que f est injective.

Calculer $\text{Card } f \langle E \rangle$ et en déduire que f est surjective. ($f \langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E .)

2° On suppose, dans cette question, que f est surjective. On note F sous la forme $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. A tout élément y_i de F on associe l'ensemble E_i de ses antécédents par f :

$$E_i = \{x \in E \mid f(x) = y_i\}.$$

a) Démontrer que $\text{Card } E_i \geq 1$.

b) Démontrer que les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont non vides, deux à deux disjoints, et que leur réunion est l'ensemble E (On dit que $E_1, E_2, \dots, E_n$ forment une **partition** de E .) En déduire que :

$$\text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 + \dots + \text{Card } E_n = n.$$

c) Démontrer que s'il existait un entier i de $\mathbb{N}_n$ tel que $\text{Card } E_i > 1$, on aurait $\text{Card } E > n$. En déduire que f est injective.

On peut conclure cette étude par l'énoncé :

E et F étant deux ensembles finis de même cardinal, une application f de E dans F est injective si, et seulement si, elle est surjective.

● Exercices d'application

1. On considère deux ensembles finis A et B et on note : $\text{Card } A = a$, $\text{Card } B = b$, $\text{Card } (A \setminus B) = c$. Calculer, en fonction de a , b , c , les cardinaux des ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$. (On rappelle que :

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A.)$$

2. Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis A et B est donné par la formule :

$$\text{Card } (A \cup B)$$

$$= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B).$$

Établir une formule donnant le cardinal de la réunion de trois ensembles finis A , B , C .

3. Une ville de n habitants compte 48 % d'hommes et 52 % de femmes. On sait que 5 % des hommes et 3 % des femmes sont atteints d'une maladie M . Calculer :

a) La proportion des habitants de la ville atteints de la maladie M .

b) La proportion de femmes parmi les habitants atteints de la maladie M .

4. Soit E un ensemble fini et soit A et B deux parties de E . On note :

$$\text{Card } E = n, \quad \text{Card } A = a,$$

$$\text{Card } B = b, \quad \text{Card } A \cup B = c.$$

Calculer : $\text{Card } (\overline{A \cap B})$, $\text{Card } (A \cap \overline{B})$,

$\text{Card } (\overline{A \cap B})$, $\text{Card } (\overline{A \cup B})$, $\text{Card } (A \cap \overline{B})$, $\text{Card } (\overline{A \cup B})$, en fonction de a , b , c et n .

5. On considère, dans le plan $\mathcal{P}$, n droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$ deux à deux sécantes et trois à trois non concurrentes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces n droites.

1° Calculer a_1, a_2, a_3 .

2° Les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions. Combien d'entre elles sont-elles traversées, et donc partagées en deux, par la droite $\mathcal{D}_n$? (On déduira cet entier du nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}_n$ avec $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$.)

En déduire que $a_n = a_{n-1} + n$.

3° Démontrer par récurrence que :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En déduire l'expression de a_n en fonction de n .

6. Soit n un entier naturel donné.

1° Dénombrer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels solutions de l'équation :

$$x + y = n.$$

2° Même question pour l'équation :

$$x + 2y = n.$$

(On distinguera les cas n pair et n impair.)

II — ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

CARDINAL D'UN PRODUIT CARTÉSIEN

1° Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y) , où x est élément de E et y élément de F .

Si l'on note $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E \times F$ peut être considéré comme la réunion de l'ensemble C_1 des couples dont le premier coefficient est x_1 , de l'ensemble C_2 des couples dont le premier coefficient est x_2 , ..., de l'ensemble C_n des couples dont le premier coefficient est x_n :

$$E \times F = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n.$$

Or, quel que soit i , $\text{Card } C_i = \text{Card } F = p$, et quels que soient i et j distincts, $C_i \cap C_j = \emptyset$. Il en résulte que $E \times F$ est fini et que (propriété 5) :

$$\text{Card } E \times F = \text{Card } C_1 + \text{Card } C_2 + \dots + \text{Card } C_n = np,$$

soit :

$$\boxed{\text{Card } (E \times F) = (\text{Card } E) \cdot (\text{Card } F)}$$

Cas particulier :

Lorsque $E = F$, le produit cartésien $E \times E$, noté E^2 , est fini et tel que $\text{Card } (E^2) = (\text{Card } E)^2$.

2° Considérons maintenant n ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_n$. Leur produit cartésien est l'ensemble, noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où, quel que soit l'entier i de $\mathbb{N}_n$, le coefficient x_i est élément de E_i .

Lorsque $n = 3$, en observant que les ensembles $(E_1 \times E_2) \times E_3$ et $E_1 \times E_2 \times E_3$ sont équipotents, on a :

$$\begin{aligned}\text{Card}(E_1 \times E_2 \times E_3) &= \text{Card}((E_1 \times E_2) \times E_3) = (\text{Card}(E_1 \times E_2)) \cdot (\text{Card } E_3) \\ &= (\text{Card } E_1) \cdot (\text{Card } E_2) \cdot (\text{Card } E_3).\end{aligned}$$

Cette formule se généralise par récurrence :

THÉORÈME 2

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ de n ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_n$ est fini et :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = (\text{Card } E_1) \cdot (\text{Card } E_2) \cdot \dots \cdot (\text{Card } E_n).$$

Cas particulier :

Lorsque $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, où E est un ensemble fini, le produit cartésien $E \times E \times \dots \times E$, noté E^n , est fini et tel que :

$$\text{Card}(E^n) = (\text{Card } E)^n$$

Les éléments de E^n , c'est-à-dire les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où tous les coefficients x_i appartiennent à E , sont aussi appelés **n -listes d'éléments de l'ensemble E** .

ARRANGEMENTS

1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel non nul.

DÉFINITION 2

On appelle **p -arrangement d'éléments de l'ensemble E** toute p -liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Autrement dit un p -arrangement d'éléments de E est un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dont les coefficients x_i sont des éléments de E deux à deux distincts.

Par exemple les triplets $(2, 1, 3), (3, 1, 2), (4, 2, 3)$ sont des 3-arrangements d'éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_4$; par contre les triplets $(2, 2, 2), (1, 4, 1)$ n'en sont pas.

2. Dénombrement des p -arrangements

Désignons par $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble des p -arrangements d'éléments de E . L'ensemble $\mathcal{A}_p(E)$ est fini puisque c'est une partie de l'ensemble fini E^p ; déterminons son cardinal.

a) Si $p > n$, il est évident que $\mathcal{A}_p(E)$ est vide; dans ce cas $\text{Card } \mathcal{A}_p(E) = 0$.

b) Supposons maintenant $p \leq n$. Pour construire un p -arrangement d'éléments de E , on choisit successivement :

- un élément x_1 de E comme 1^{er} coefficient;
- un élément x_2 de $E \setminus \{x_1\}$ comme 2^e coefficient;
- un élément x_3 de $E \setminus \{x_1, x_2\}$ comme 3^e coefficient;
-
-
- un élément x_p de $E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ comme p -ième coefficient.

Le choix de x_1 peut se faire de n façons, celui de x_2 de $n - 1$ façons, celui de x_3 de $n - 2$ façons, ..., et enfin celui de x_p de $n - (p - 1)$ façons. On peut donc construire ainsi $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)$ p -arrangements d'éléments de E .

Les p -arrangements ainsi construits sont deux à deux distincts puisqu'ils diffèrent par le 1^{er} coefficient, ou par le 2^e, ..., ou par le p -ième. De plus on les obtient tous puisqu'un arrangement quelconque $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ correspond aux choix successifs $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_p = y_p$.

Finalement le cardinal de $\mathcal{A}_p(E)$ est le produit $n(n - 1) \dots (n - p + 1)$ que l'on note habituellement A_n^p .

THÉORÈME 3

E étant un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel non nul, le nombre A_n^p des p -arrangements d'éléments de E est tel que :

$$A_n^p = 0, \quad \text{si } p > n;$$

$$A_n^p = n(n - 1) \dots (n - p + 1), \quad \text{si } p \leq n.$$

REMARQUE : Il est important de bien comprendre pourquoi on obtient A_n^p en effectuant le produit des entiers $n, n - 1, \dots, n - p + 1$, et non pas leur somme. Il suffit pour cela de reprendre les étapes du calcul de A_n^p : n façons de choisir le 1^{er} coefficient; ce choix étant fait, $(n - 1)$ façons de choisir le 2^e et donc $n(n - 1)$ façons de choisir les deux premiers coefficients; et ainsi de suite.

PERMUTATIONS

DÉFINITION 3

On appelle permutation d'un ensemble fini non vide E de cardinal n tout n -arrangement d'éléments de E , c'est-à-dire tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dont les n coefficients sont les n éléments de E .

Par exemple les triplets $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$ sont des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_3$; par contre les triplets $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ n'en sont pas.

Le nombre des permutations de E est égal à A_n^n , c'est-à-dire au produit :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1,$$

que l'on convient de noter $n!$ (lire «factorielle n »).

THÉORÈME 4

Le nombre des permutations d'un ensemble fini E de cardinal n est égal à $n!$

Convention : $0! = 1$

Soit n et p deux entiers tels que $1 \leq p < n$. On peut écrire :

$$A_n^p = \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p)(n - p - 1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n - p) \times (n - p - 1) \times \dots \times 2 \times 1}$$

soit :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n - p)!}. \quad (1)$$

Pour $p = n$, la formule (1) s'écrit : $A_n^n = \frac{n!}{0!}$. Or $A_n^n = n!$. Il est donc naturel de poser $0! = 1$, puisque, avec cette convention, la formule (1) est valable quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$.

Activité

1. Nombre d'applications de A dans E

Soit A et E deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n .

Notons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ et désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de A dans E .

1° Démontrer que l'application Φ de $\mathcal{F}$ dans E^p qui, à toute application f de A dans E , associe la p -liste $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p))$ est bijective. En déduire le nombre des applications de A dans E .

2° a) Démontrer qu'une application f de A dans E est injective si et seulement si la p -liste $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p))$ est un p -arrangement d'éléments de E . (On rappelle que f est injective si tout élément de E possède au plus un antécédent par f .)

b) En déduire le nombre des injections de A dans E .

3° a) Démontrer que si les ensembles A et E n'ont pas le même cardinal ($p \neq n$), il n'existe pas de bijection de A sur E .

b) On suppose maintenant que $p = n$. Démontrer qu'une application f de A dans E est bijective si et seulement si elle est injective.

En déduire le nombre des bijections de A sur E .

On peut conclure cette étude par le théorème :

THÉORÈME 5

Soit A et E deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n .

1. Le nombre des applications de A dans E est n^p .

2. Le nombre des injections de A dans E est A_n^p .

3. Si $p = n$, le nombre de bijections de A sur E est $n!$.

2. 1° Programmer le calcul de $n!$ sur une calculatrice. (Cet exercice ne présente qu'un intérêt pédagogique dans la mesure où les calculatrices de référence possèdent toutes la fonction factorielle.)

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC
4 P₂ Kin 1
1 Kin 2

met en mode programme et vide les mémoires

initialise le contenu x de la mémoire K1 : $x = n (= 4)$

initialise le contenu y de la mémoire K2 : $y = 1$

P₁
Kout 1 Kin × 2
1 Kin - 1
Kout 1 [x > 0]
Kout 2

programme de calcul de $n!$

remplace y par le produit yx dans K2

remplace x par $x - 1$ dans K1

test : si $x > 0$ recommence, si $x \leq 0$ arrête

affiche $y = n!$

MODE .
12 P₂ P₁

exécution : calcul de $12!$

affiche le résultat : 479 001 600

2° Programmez le calcul de A_n^p sur une calculatrice :

a) sans utiliser la fonction factorielle de la machine;

b) en utilisant cette fonction.

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC

P₁

ENT 5 Kin 1

ENT 2 Kin 2

met en mode programme et vide les mémoires

programme de saisie de n et p entre n ($n = 5$) dans la mémoire K1entre p ($p = 2$) dans la mémoire K2P₂programme de calcul de A_n^p Kout 1 $x!$ $\div$ (Kout 1 $-$ Kout 2 $)$ $x!$ $=$ MODE $\cdot$ exécution : calcul de A_{10}^6 P₁ 10 ENT 6 ENT P₂

affiche le résultat : 151 200

3° Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \geq 3$) et soit a un élément donné de E .

a) On classe les p -arrangements d'éléments de E ($1 < p < n$) selon le critère suivant :

- ceux dont un des coefficients est a ;
- ceux dont aucun coefficient n'est a .

En déduire que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$. Vérifier cette formule en utilisant les expressions de A_n^p , A_{n-1}^{p-1} , A_{n-1}^p .

b) En déduire une méthode de calcul des entiers A_n^p en remplissant le tableau ci-contre (jusqu'à la ligne 7).

c) Vérifier les résultats obtenus avec le programme établi à la question 2°.

$p \backslash n$	1	2	3	4	...
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

● Exercices d'application

7. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n . Dénombrer les applications non surjectives de E dans E .

8. On range n dossiers numérotés 1, 2, ..., n dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n en plaçant un dossier par tiroir.

1° Dénombrer les différents rangements possibles.

2° Dénombrer les rangements suivants :

a) le dossier numéroté i est dans le tiroir numéroté i ($1 \leq i \leq n$);

b) les dossiers i et j sont respectivement dans les tiroirs i et j ($1 \leq i < j \leq n$);

c) les dossiers $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont respectivement dans les tiroirs $i_1, i_2, \dots, i_k$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$).

9. Soit n un entier naturel donné. Déterminer les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $A_n^p = A_n^q$.

10. Soit E un ensemble fini de cardinal n . On appelle diagonale du produit cartésien E^2 l'ensemble Δ des couples (x, x) dont les deux coefficients sont égaux.

1° Dénombrer l'ensemble des parties de E^2 .

2° Dénombrer les parties de E^2 contenant Δ .

3° Dénombrer les parties G de E^2 telles que :

si $(x, y) \in G$, alors $(y, x) \in G$.

11. On considère l'entier

$$n = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d,$$

où a, b, c, d , sont des entiers naturels non nuls.

1° Démontrer que tout entier de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $0 \leq \alpha \leq a$, $0 \leq \beta \leq b$, $0 \leq \gamma \leq c$, $0 \leq \delta \leq d$, est un diviseur de n . (On admettra que tous les diviseurs de n sont de cette forme.) En déduire le nombre des diviseurs de n .

2° Quel est le nombre des diviseurs de l'entier 169 047 648?

III — SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI

COMBINAISONS

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel.

DÉFINITION 4

On appelle p -combinaison d'éléments de E toute partie de E de cardinal p .

Désignons par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal p . Cet ensemble est fini puisqu'il est inclus dans l'ensemble, fini, de toutes les parties de E . Dénombrons-le.

1° Si l'entier p est strictement supérieur au cardinal n de E , l'ensemble $\mathcal{P}_p(E)$ est vide et donc de cardinal nul.

2° Supposons maintenant $p \leq n$ et examinons quelques cas particuliers.

- Si $p = 0$, $\mathcal{P}_0(E)$ ne contient que la partie vide de E ; donc : $\text{Card } \mathcal{P}_0(E) = 1$.
- Si $p = 1$, $\mathcal{P}_1(E)$ est l'ensemble des parties de cardinal 1, ou **singletons**, de E ; donc : $\text{Card } \mathcal{P}_1(E) = n$.
- Si $p = n$, la seule partie de E de cardinal n est E , donc : $\text{Card } \mathcal{P}_n(E) = 1$.
- Dans le cas d'un entier p tel que $0 < p \leq n$, considérons une p -combinaison $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, et associons lui les différentes permutations de l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On obtient ainsi des p -arrangements d'éléments de E en nombre égal à $p!$.

Si on répète cette opération pour toutes les p -combinaisons d'éléments de E , le nombre des p -arrangements obtenus est, x désignant le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$, $x \times p!$.

Ces p -arrangements sont deux à deux distincts : s'ils proviennent de la même p -combinaison, ils sont formés avec les mêmes éléments de E mais ordonnés de façon différente, et s'ils proviennent de deux p -combinaisons distinctes de E , ils diffèrent par les éléments qui les constituent.

De plus on les obtient tous; en effet un p -arrangement quelconque $(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$ proviendra de la p -combinaison $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_p\}$.

Il en résulte que le nombre des p -arrangements d'éléments de E est égal à $x \times p!$.

On a donc :

$$x \times p! = \frac{n!}{(n-p)!},$$

d'où :

$$x = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

A noter que cette formule, établie pour un entier p tel que $0 < p \leq n$, s'applique aussi, compte tenu de la convention $0! = 1$, pour $p = 0$. En effet dans ce cas on a, d'une part

$$x = 1, \text{ et d'autre part } \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1.$$

Nous retiendrons :

THÉORÈME 6

Le nombre des parties de cardinal donné, p , d'un ensemble fini E de cardinal n , est nul si $p > n$, et est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$.

COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leq p \leq n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p , et on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$, le nombre des parties de cardinal p d'un ensemble à n éléments. Lorsque l'entier p est tel que $p > n$, on convient de poser $C_n^p = 0$.

Ainsi :

$$\begin{array}{ll} \text{si } p > n, & C_n^p = 0 \\ \text{si } 0 \leq p \leq n, & C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{array}$$

Tout coefficient binomial est un entier naturel; par exemple :

$$C_7^0 = 1, \quad C_7^1 = 7, \quad C_7^2 = 21, \quad C_7^3 = 35, \quad C_7^4 = 35, \dots$$

REMARQUE : L'appellation « coefficient binomial » trouvera sa justification au paragraphe « Formule du binôme » (page 14).

Propriétés des coefficients binomiaux

1. Soit E un ensemble fini de cardinal n . L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est la réunion des ensembles de parties de E contenant respectivement 0, 1, 2, ..., n éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup \dots \cup \mathcal{P}_n(E).$$

De plus, si i et j sont deux entiers naturels distincts, toute partie de E de cardinal i est distincte de toute partie de E de cardinal j . D'où : $\mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \emptyset$.

Il en résulte :

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = \sum_{i=0}^n \text{Card } \mathcal{P}_i(E).$$

Or :

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n \quad \text{et} \quad \text{Card } \mathcal{P}_i(E) = C_n^i.$$

Par suite :

$$2^n = \sum_{i=0}^n C_n^i$$

2. A toute partie A de E de cardinal p associons sa partie complémentaire $\bar{A}$ relativement à E . On définit ainsi une application φ de $\mathcal{P}_p(E)$ dans $\mathcal{P}_{n-p}(E)$. Tout élément B de $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ possède un antécédent unique par φ , à savoir $A = \bar{B}$. Il en résulte que l'application φ est bijective, et donc que les ensembles $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal.

PROPRIÉTÉ 6

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

A noter qu'on peut vérifier aisément cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

3. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n , et soit p un entier tel que $0 < p < n$. Un élément a de E étant choisi, on peut classer les parties de E de cardinal p suivant le critère suivant :

- celles ne contenant pas a ;
- celles contenant a .

Les premières sont les parties de cardinal p de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est C_{n-1}^p .

Les secondes s'obtiennent en ajoutant a aux parties de cardinal $p-1$ de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est C_{n-1}^{p-1} .

On peut donc considérer $\mathcal{P}_p(E)$ comme la réunion de deux sous-ensembles disjoints, l'un de cardinal C_{n-1}^{p-1} , l'autre de cardinal C_{n-1}^p . Par conséquent :

PROPRIÉTÉ 7

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 < p < n$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Là encore, il est facile de vérifier cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

4. Triangle de Pascal

De la formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ découle un *algorithme* de calcul des coefficients binomiaux connu sous le nom de **triangle de Pascal**.

Le triangle de Pascal est un tableau croisé dans lequel la valeur de chaque coefficient binomial C_n^p , inscrite à l'intersection de la n -ième ligne et de la p -ième colonne, est obtenue de la façon suivante :

- Dans la colonne d'indice 0, tous les coefficients sont égaux à 1, puisque $C_n^0 = 1$.
- La ligne d'indice 0 contient le coefficient C_0^0 égal à 1.
- La ligne d'indice 1 contient les coefficients C_1^0 et C_1^1 égaux à 1.
- Dans la ligne d'indice 2, C_2^1 s'obtient à partir de l'égalité $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$; quant au coefficient C_2^2 , il est égal à 1.
- Supposons que le tableau soit rempli jusqu'à la ligne d'indice $n-1$. La ligne d'indice n est ainsi construite : pour tout entier p tel que $0 < p \leq n-1$, on calcule C_n^p en ajoutant C_{n-1}^{p-1} et C_{n-1}^p ; quant à C_n^n , il est égal à 1.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...	$p-1$	p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			

$\vdots$										
$n-1$	C_{n-1}^0	C_{n-1}^1	C_{n-1}^2	C_{n-1}^3	C_{n-1}^4	C_{n-1}^5	C_{n-1}^6	...	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	...		C_n^p

Activité

1° Programmer le calcul de C_n^p en utilisant la fonction factorielle de la machine.

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC	met en mode programme et vide les mémoires
P₁	programme de saisie de n et p
ENT 7 Kin 1	entre n ($n = 7$) dans la mémoire K1
ENT 3 Kin 2	entre p ($p = 3$) dans la mémoire K2
P₂	programme de calcul de C_n^p
Kout 1 x! ÷ Kout 2 x! =	
÷ (Kout 1 - Kout 2) x! =	
MODE •	exécution : calcul de C_{19}^8
P₁ 19 ENT 8 ENT P₂	affiche 75581.99999; résultat : 75 582

- 2° a) Programmer à nouveau le calcul de C_n^p , mais sans utiliser la fonction factorielle.
 b) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 10, et vérifier les résultats à l'aide du programme de la question 2° a).
 3° a) Programmer le calcul de $u_n = \ln(n!)$ sans utiliser la fonction factorielle.

Réponse (CASIO FX-180P)

MODE 0 KAC	met en mode programme et vide les mémoires
4 P₂ Kin 1 0 Kin 2	saisie de n ($n = 4$) dans K1 et mise à zéro du contenu y de K2
P₁	programme de calcul de $u_n = \sum_{k=0}^n \ln k$
Kout 1 ln	appel du contenu x de K1 et calcul de $\ln x$
Kin + 2	ajoute $\ln x$ à y dans K2
1 Kin - 1	retranche 1 à x dans K1
Kout 1 x > 0?	test $\begin{cases} x > 0 \text{ recommence} \\ x \leq 0 \text{ arrête} \end{cases}$
Kout 2	affiche le résultat
MODE •	exécution : calcul de $\ln(6!)$
6 P₂ P₁	affiche le résultat : 6,579 251 212

- b) Quel est le plus grand entier n pour lequel la machine affiche une valeur de $n!$, par utilisation de la fonction factorielle?
 Peut-on calculer C_{100}^{37} à l'aide de cette fonction?
 Utiliser le programme précédent pour afficher une valeur de C_{100}^{37} .
 Quel est le nombre de chiffres de l'entier C_{100}^{37} ?

● Exercices d'application

12. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$ et a et b deux éléments distincts de E . Soit p un entier tel que $2 \leq p \leq n$.

On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante :

- celles ne contenant ni a ni b ;

- celles contenant un, et un seul, des deux éléments a, b ;
- celles contenant a et b .

En déduire la relation :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$

13. 1° Démontrer que l'égalité $C_n^p = C_n^q$, où n, p, q sont des entiers naturels tels que $p \leq n$ et $q \leq n$, implique : $p = q$ ou $p + q = n$.

2° Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation :

$$C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}.$$

14. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$x^2 - xC_n^p + C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p = 0,$$

où n et p sont deux entiers tels que $0 < p < n$.

15. Démontrer les relations :

a) $C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + C_{p-2}^{q-2} + \dots + C_{p-q}^0$,
où $0 \leq q \leq p$;

b) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_{n-1}^p + C_{n-2}^p + \dots + C_{n-p}^p$,
où $0 \leq p \leq n$;

c) $C_{n-1}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-2} + \dots + C_{n-p}^1 + 1 = C_n^p$,
où $0 < p \leq n$.

16. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n-1$, démontrer que $C_n^p \geq C_{n-1}^p$. Dans quels cas y-a-t-il égalité?

17. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et $n-1$ ($n \geq 2$).

1° Soit f une application surjective de E sur F . Montrer qu'il existe un élément a' de F ayant deux antécédents, a et b , par f et que tous les autres éléments de F ont un seul antécédent, différent de a et de b .

2° En déduire une méthode de construction d'une surjection de E sur F . Dénombrer l'ensemble de ces surjections.

18. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p ($n \geq 2$ et $p \geq 2$).

Dénombrer les applications f de E dans F telles que $\text{Card } f\langle E \rangle = 2$. (On rappelle que $f\langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E .)

19. On considère un polygone convexe à n côtés ($n \geq 4$).

1° Combien a-t-il de diagonales?

2° Combien les diagonales ont-elles, au plus de points d'intersection à l'intérieur du polygone? (On constatera que l'on peut associer à chaque point d'intersection de deux diagonales, quatre sommets du polygone.)

20. Résoudre, dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'équation :

$$C_x^{y-1} = C_{x-1}^y.$$

21. On lance une pièce de monnaie n fois de suite et on note le résultat de cette suite de lancers sous la forme d'une n -liste dont les coefficients sont P (pile) ou F (face).

1° Dénombrer les résultats possibles.

2° Dans combien de résultats trouve-t-on exactement k fois ($0 \leq k \leq n$) le coefficient P ?

3° En déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

FORMULE DU BINÔME

Soit à calculer $(a+b)^n$, où a et b sont des réels et n un entier naturel.

Lorsque $n=0$, on convient que $(a+b)^0 = 1$.

Lorsque l'entier n n'est pas nul, $(a+b)^n$ est le produit Π de n facteurs égaux à $a+b$:

$$\Pi = (a+b)(a+b)\dots(a+b).$$

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il ressort que Π est la somme de tous les produits obtenus en choisissant, dans chaque facteur, un des deux réels a, b , puis en multipliant les n réels choisis.

Si b est retenu dans i facteurs ($i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$), a l'est dans les $n-i$ autres et le produit correspondant est $a^{n-i}b^i$, compte tenu de l'associativité et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Pour obtenir un terme $a^{n-i}b^i$, il convient donc, parmi les n facteurs de Π , d'en choisir i dans lesquels on retient b et de retenir a dans les autres. Or, il y a C_n^i façons de choisir i facteurs parmi n . Il y a donc C_n^i termes égaux à $a^{n-i}b^i$.

Finalement, Π est la somme de C_n^0 produits égaux à $a^n b^0$, de C_n^1 produits égaux à $a^{n-1}b$, ..., de C_n^i produits égaux à $a^{n-i}b^i$, ... et de C_n^n produits égaux à $a^0 b^n$.

Autrement dit :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i \quad (1)$$

Cette formule est connue sous le nom de **formule du binôme de Newton**.

Pour l'établir, on a uniquement utilisé les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il en résulte que la formule du binôme s'applique dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Conséquence

Pour $a = b = 1$, la formule du binôme donne :

$$2^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \quad (2)$$

On retrouve ainsi un résultat établi à la page 11 à partir de la propriété :

si $\text{Card } E = n$, alors $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

A noter que la formule (2) permet aussi d'effectuer le dénombrement de $\mathcal{P}(E)$. En effet pour tout ensemble E de cardinal n , l'ensemble des parties de E est la réunion des ensembles de parties de cardinaux $0, 1, 2, \dots, n$:

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup \dots \cup \mathcal{P}_n(E).$$

De plus, quels que soient les entiers naturels distincts i et j ($i \leq n$ et $j \leq n$), les ensembles $\mathcal{P}_i(E)$ et $\mathcal{P}_j(E)$ sont disjoints. Donc :

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = \text{Card } \mathcal{P}_0(E) + \text{Card } \mathcal{P}_1(E) + \dots + \text{Card } \mathcal{P}_n(E) = \sum_{i=0}^n C_n^i.$$

Finalement :

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n.$$

Activité

1. 1° Soit n un entier naturel non nul et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.

Démontrer que $f(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$.

2° a) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. En déduire que :

$$2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^{2i} + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2i+1} + \dots$$

b) Application : Soit E un ensemble non vide de cardinal n . Démontrer que le nombre des parties de E de cardinal pair est égal au nombre des parties de E de cardinal impair. Quel est ce nombre ?

3° Calculer la dérivée $f'(x)$ de deux façons différentes. En déduire que :

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$$

Trouver une expression simple de $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$.

2. Soit E et F deux ensembles finis, disjoints, de même cardinal n .

1° En évaluant de deux façons différentes le nombre des parties de cardinal n de $E \cup F$, démontrer que :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(En choisissant k éléments de E et $n-k$ éléments de F , on obtient une partie à n éléments de $E \cup F$ et cela quel que soit $k = 0, 1, 2, \dots, n$).

2° Retrouver cette formule en utilisant l'égalité $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ et la formule du binôme.

3° En déduire que $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \frac{n}{2} C_{2n}^n$.

● Exercices d'application

22. 1° Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier n supérieur à 2, démontrer que $(1+x)^n > 1+nx$.

2° En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$, où a est un réel tel que $a > 1$.

23. Utiliser l'identité :

$(x+1)^p(x+1)^q = (x+1)^{p+q}$, où p et q sont deux entiers naturels, pour démontrer que :

$$C_{p+q}^p = \sum_{i=0}^p C_p^i C_q^{p-i}.$$

24. 1° Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels, démontrer que $(a+b)^5 - a^5 - b^5$ est un entier naturel divisible par 5.

2° Généraliser ce résultat en montrant, par récurrence, que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers naturels :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^5 - (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$$

est un entier naturel divisible par 5.

3° En déduire que, pour tout entier naturel n , $n^5 - n$ est divisible par 5.

25. En développant $(1+x+x)^n$ de deux façons différentes, démontrer que :

$$2^p C_n^p = C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + C_n^2 C_{n-2}^{p-2} + \dots + C_n^p C_{n-p}^0.$$

TRAVAUX PRATIQUES

STATISTIQUE — RAPPELS

Population — Échantillon

Toute étude statistique porte sur une **population** E d'objets, de personnes, d'animaux, de pays, etc. Chaque élément de E est un **individu** de la population.

Lorsque le nombre d'individus de E est très élevé, ou lorsqu'on ne peut contacter tous les individus, ou encore lorsque le relevé à effectuer est coûteux ou qu'il occasionne la destruction des individus, on ne fait porter l'étude que sur un **échantillon** de la population E .

Un échantillon n'a évidemment d'intérêt que s'il est *représentatif* de la population de façon que des conclusions relatives à cet échantillon puissent être généralisées à la population toute entière.

Caractère

Pour chaque individu d'une population, ou d'un échantillon de population, on relève la valeur d'un ou de plusieurs **caractères**. Par exemple :

- pour les élèves d'une classe, l'âge, la taille et le poids;
- pour les salariés d'une entreprise, le salaire mensuel brut;
- pour les pays de la C.E.E. ou du Comecon, la production annuelle d'acier;
- pour les habitants d'un département, le sexe et le groupe sanguin;
- pour la population active d'un pays, la catégorie socioprofessionnelle.

Certains de ces caractères sont **qualitatifs** : sexe, groupe sanguin, catégorie socioprofessionnelle. Les autres sont **quantitatifs** et s'expriment par des nombres réels : âge, taille, poids, salaire, production d'acier.

Un caractère quantitatif X d'une population E est aussi appelé **variable statistique numérique**. D'un point de vue mathématique, X est une application de E dans $\mathbb{R}$: celle qui à tout individu e de E associe la valeur $X(e)$ du caractère X pour l'individu e .

On dit que les réels $X(e)$ sont les **modalités** du caractère X . L'ensemble des modalités de X est noté $X \langle E \rangle$.

Série statistique simple

Considérons un caractère numérique X relatif à une population, ou à un échantillon de population E .

1° Lorsque le cardinal p de l'ensemble $X \langle E \rangle$ des modalités de X est faible, on classe les modalités par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, et, à chaque modalité x_j , on associe l'**effectif** n_j de x_j , c'est-à-dire le nombre des individus de E pour lesquels le caractère X prend la valeur x_j .

L'ensemble des couples $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ est la **série statistique simple** associée au caractère X .

Une série statistique simple est aussi appelée **statistique simple**. Le qualificatif « simple » souligne qu'elle est définie à partir d'un seul caractère de la population. Une telle série est présentée sous forme d'un tableau :

Modalités	x_1	x_2	...	x_j	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_j	...	n_p

2° Lorsque le cardinal de l'ensemble $X \langle E \rangle$ des modalités de X est élevé, on recouvre cet ensemble par des intervalles, ou classes : $c_1 = [a_0, a_1[$, $c_2 = [a_1, a_2[$, ..., $c_p = [a_{p-1}, a_p[$, ayant en général la même *amplitude*, et, à chaque classe c_j , on associe l'**effectif** de c_j , c'est-à-dire le nombre n_j des individus de E pour lesquels le caractère X prend une valeur appartenant à la classe c_j .

L'ensemble des couples $(c_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ est une **série statistique simple exprimée en classes**.

Les tailles (en cm) de 50 élèves de Seconde sont indiquées dans le relevé statistique ci-dessous :

166	158	175	165	181	177	169	169	157	160
165	165	160	168	163	168	154	164	158	185
164	164	170	169	172	166	173	168	151	164
160	166	175	181	169	157	165	160	163	154
158	164	169	173	160	164	166	170	161	151

1° Classer, dans un tableau, les différentes tailles par valeurs croissantes $x_1 < x_2 < \dots$, et, pour chaque valeur x_j , indiquer :

- le nombre n_j d'élèves dont la taille est x_j ,
- Le nombre N_j d'élèves dont la taille est inférieure ou égale à x_j .

2° Dans un repère orthogonal, on porte en abscisses les tailles x_j (graduer à partir de 150 en prenant 0,5 cm pour 1 cm de taille), et, à chaque valeur x_j , associer :

- Le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(x_j, 0)$ et (x_j, n_j) (prendre en ordonnées 0,5 cm pour 1 élève).
- Le point $A_j(x_j, N_j)$.

L'ensemble des segments du a) est le **diagramme en bâtons**.

La ligne brisée $A_1 A_2 \dots$ est le **polygone des effectifs cumulés**.

3° Calculer la taille moyenne d'un élève en utilisant :

- Le relevé initial.
- Le tableau du 1°.

Interpréter cette taille moyenne comme le barycentre des points $x_1, x_2, x_3, \dots$ affectés de coefficients que l'on précisera.

4° On recouvre l'ensemble des tailles par les intervalles, ou **classes**, $c_1 = [150, 154[$, $c_2 = [154, 158[$, ... de même amplitude 4 cm. Classer, dans un tableau, les différents intervalles $c_1, c_2, c_3, \dots$, et, à chaque intervalle c_k , associer :

- Le nombre m_k d'élèves dont la taille appartient à c_k .
- Le nombre $M_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ que l'on interprétera.

5° Dans un repère orthogonal, porter en abscisses les bornes $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ des intervalles $c_1, c_2, c_3, \dots$ et construire, sur chaque intervalle c_k pris comme base, un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif m_k de c_k .

L'ensemble de ces rectangles est l'**histogramme**.

Joindre les points de coordonnées $(a_0, 0), (a_1, M_1), (a_2, M_2), \dots$

La ligne brisée obtenue est le **polygone des effectifs cumulés**.

6° A partir des seules données du tableau du 4°, évaluer la taille moyenne d'un élève. (On supposera toutes les tailles de c_1 égales à 152, toutes celles de c_2 égales à 156, ...) Expliquer la différence avec la valeur trouvée au 3°.

Fréquence et pourcentage

Soit $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(c_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, une série statistique simple relative à une population d'effectif total n .

On appelle **fréquence** de la modalité x_j , ou de la classe c_j , le réel f_j défini par $f_j = \frac{n_j}{n}$. Toute

fréquence f_j est un réel de l'intervalle $[0, 1]$; de plus, $\sum_{j=1}^p f_j = 1$.

En pratique, on préfère souvent utiliser les **pourcentages** p_j obtenus en multipliant les fréquences f_j par 100 : $p_j = 100f_j$.

La série $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ peut aussi être présentée sous la forme $(x_j, f_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(x_j, p_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$.

Valeur moyenne et écart type

L'étude des séries statistiques simples a été développée dans le cours de Première. Rappelons deux définitions importantes.

Soit X un caractère d'une population d'effectif total n et $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ la série statistique associée à X . On appelle **valeur moyenne** et **écart type** du caractère X , ou de la série associée, les réels respectivement notés $\bar{X}$ et $\sigma(X)$ et définis par :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p n_j x_j \quad (1)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^p n_j (x_j - \bar{X})^2} \quad (2)$$

Le réel $\bar{X}$, barycentre du système $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, représente la valeur moyenne des modalités de X : c'est un **paramètre de position**.

Quant à l'écart type $\sigma(X)$, il exprime le plus ou moins grand éparpillement des modalités de X autour de leur valeur moyenne $\bar{X}$: c'est un **paramètre de dispersion**. Le carré de l'écart type est appelé **variance** de X et noté $V(X)$.

Si on peut calculer $\sigma(X)$ à partir de la formule (2) de définition, on préfère généralement utiliser la formule suivante qui découle de (2) :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^p n_j x_j^2 \right) - \bar{X}^2} \quad (3)$$

Quelle que soit la formule choisie, le calcul de $\sigma(X)$ implique celui de $\bar{X}$.

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart type d'une série statistique exprimée en classes, on se ramène au cas précédent en convenant de concentrer l'effectif de chaque classe c_j en son centre x_j .

Exemple :

A partir d'un relevé des prix, exprimés en francs, de 400 robes en vente dans un grand magasin, on a établi le tableau statistique suivant :

Classes	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[
Effectifs	25	90	145	90	50

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart type de cette série statistique exprimée en classes, on se ramène à la série statistique suivante :

Modalités	350	450	550	650	750
Effectifs	25	90	145	90	50

On en déduit : $\frac{1}{400} \sum_{j=1}^5 n_j x_j = 562,5$; $\frac{1}{400} \sum_{j=1}^5 n_j x_j^2 = 328\,250$; et par suite :

$$\bar{X} = 562,5; \quad V(X) = 11\,843,75; \quad \sigma(X) \approx 108,83.$$

Parmi les calculatrices présentées dans cet ouvrage, la CASIO FX-180 P, la SHARP EL-5050 et la TI-62 effectuent les calculs de $n = \sum_{j=1}^p n_j$, $\bar{X}$ et $\sigma(X)$ sur simple entrée des données x_j, n_j .

On trouvera dans le tableau suivant, pour chacune d'elles, la séquence d'un tel calcul (les données sont celles de l'exemple ci-dessus).

CASIO FX-180 P	SHARP EL-5050	TI-62	Commentaires
MODE 3 KAC	STAT CA	1 Var	mise en mode statistique mise à zéro des mémoires
350 x 25 DATA 450 x 90 DATA 550 x 145 DATA 650 x 90 DATA 750 x 50 DATA	350 x 25 DATA 450 x 90 DATA 550 x 145 DATA 650 x 90 DATA 750 x 50 DATA	350 Frq 25 Σ+ 450 Frq 90 Σ+ 550 Frq 90 Σ+ 550 Frq 55 Σ+ 650 Frq 90 Σ+ 750 Frq 50 Σ+	entrée des données
Kout n Kout $\bar{x}$ Kout σ_n	affiche n $\bar{x}$ σ_x	affiche n Mean σ_n	affiche n = 400 affiche $\bar{X} = 562,50$ affiche $\sigma(X) \approx 108,83$

A noter que si l'effectif n_j est tel que $n_j \geq 100$, la TI-62 n'enregistre que l'effectif $100 - n_j$; c'est pourquoi l'entrée des 145 robes à 550 F s'est faite en deux fois : 550 [Frq] 90 et 550 [Frq] 55.

La HP-11 C effectue aussi ces calculs mais il convient, pour chaque modalité x_j , de répéter n_j fois la séquence x_i [Σ+] :

[Σ], 350 [Σ+] répétée 25 fois, 450 [Σ+] répétée 90 fois, ..., 750 [Σ+] répétée 50 fois.

On obtient alors $\bar{X}$ avec [$\bar{x}$] et $\sigma(X)$ avec [$\bar{x}$] [Σ+] [s].

Lorsque les effectifs n_j sont importants, comme c'est le cas dans l'exemple considéré, il est plus rapide d'effectuer les calculs directement, à l'aide des formules $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p n_j x_j$,

$$\sigma(X) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^p n_j x_j^2 - \bar{X}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut aussi utiliser le programme suivant :

[P/R]	met en mode programme
[PRGM]	efface la mémoire programme
[LBL] A	choix du label du programme
[STO] 8 [R↓] [STO] 7	entre n_j dans le registre R_8 et x_j dans R_7
[RCL] 8 [STO] + 0	ajoute n_j au contenu de R_0
[RCL] 8 [RCL] 7 ×	effectue le produit $n_j x_j$
[STO] + 1	ajoute $n_j x_j$ au contenu de R_1
[RCL] 8 [RCL] 7 x^2 ×	effectue le produit $n_j x_j^2$
[STO] + 2	ajoute $n_j x_j^2$ au contenu de R_2
[RTN]	fin du programme

P/R
 Σ
 350 ENTER 25 A
 450 ENTER 90 A
 550 ENTER 145 A
 650 ENTER 90 A
 750 ENTER 50 A
 RCL 0
 X̄
 X̄ Σ+ S

retour en mode calcul

initialise les registres statistiques $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$

entrée des données

affiche $n = 400$

affiche $\bar{X} = 562,50$

affiche $\sigma(X) \approx 108,83$

Applications

1. Procéder à 200 jets de deux dés et, pour chaque jet, noter le plus grand, X , des points amenés et la valeur absolue, Y , de la différence des points amenés. On définit ainsi deux séries statistiques simples. Pour chacune d'elles :

1° Calculer la valeur moyenne et l'écart type.

2° Déterminer le pourcentage des jets pour lesquels :

a) $X \in [\bar{X} - \sigma(X), \bar{X} + \sigma(X)]$.

b) $Y \in [\bar{Y} - \sigma(Y), \bar{Y} + \sigma(Y)]$.

2. Le service comptable d'une banque donne la statistique suivante portant sur les sommes X déposées à la banque par ses clients :

Somme déposée	1 000	3 000	5 000	10 000	50 000	100 000
Pourcentage de clients	12	18	25	20	15	10

Calculer la valeur moyenne et l'écart type de X .

3. On considère la série statistique suivante, relative à la répartition de la population active d'un pays, par âge, en centaines de milliers de personnes.

[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[	[60, 65[
10	30	40	35	25	24	18	12	6

1° Déterminer la valeur moyenne m et l'écart type σ de cette série.

2° Déterminer le pourcentage de personnes dont l'âge appartient à l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

4. On considère un échantillon de 1 000 assurés pris parmi ceux qui n'ont eu aucun accident pendant l'année 1980. Le tableau ci-après indique la distribution de ces assurés suivant les tranches d'âge :

Tranches d'âge (en années)	[18, 25[	[25, 35[	[35, 45[	[45, 55[	[55, 65[	[65, 75[
Effectifs	29	270	490	195	14	2

1° Calculer la moyenne m et l'écart type σ .

2° Déterminer le pourcentage des assurés dont l'âge appartient à l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$.

5. Les résultats d'un test de durée de vie de 400 tubes fluorescents sont consignés dans le tableau ci-contre.

1° Préciser la série statistique ainsi définie et calculer sa moyenne m et son écart type σ .

2° Estimer le pourcentage des tubes dont la durée de vie :

- a) n'excède pas 600 heures;
- b) est supérieure ou égale à 800 heures;
- c) est comprise entre 500 et 1 000 heures;
- d) est comprise entre 680 et 920 heures.

6. Soit E une population et X un caractère numérique. Démontrer que l'écart type de X est nul si, et seulement si, X est constant.

7. On considère le tableau statistique suivant relatif aux notes obtenues à l'épreuve d'analyse par les candidats au concours d'entrée de 1985 à l'École nationale des mines d'Alès.

Durée de vie (en heures)	Nombre de tubes
[300, 400[	15
[400, 500[	46
[500, 600[	54
[600, 700[	78
[700, 800[	70
[800, 900[	64
[900, 1 000[	45
[1 000, 1 100[	20
[1 100, 1 200[	8

Notes sur 20	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
Nombre de notes	23	51	36	63	54	66	81	79	76	136	133	91	160	124
Notes sur 20	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
Nombre de notes	116	96	117	115	117	87	103	66	72	66	67	54	42	25
Notes sur 20	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20	
Nombre de notes	42	19	19	14	17	9	13	1	8	3	4	1	1	

1° Calculer l'effectif, la valeur moyenne $\bar{X}$ et l'écart type $\sigma(X)$ de cette série statistique.

2° Calculer le pourcentage des candidats dont la note X est telle que :

- a) $X \in [\bar{X} - \sigma(X), \bar{X} + \sigma(X)]$;
- b) $X \in [\bar{X} - 2\sigma(X), \bar{X} + 2\sigma(X)]$.

3° Déterminer la note médiane μ . (μ est telle que : la moitié au moins des candidats ont une note $\leq \mu$, et la moitié au moins des candidats ont une note $\geq \mu$.)

COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITION

Soit E un ensemble non vide de cardinal n . On appelle **p -combinaison avec répétition** (p -c.a.r.) d'éléments de E tout objet mathématique formé de p éléments de E pris dans un ordre quelconque, chaque élément pouvant être répété jusqu'à p fois.

Exemple : $[aaabbc]$, $[aaaabb]$, $[aaaaaa]$ sont des 6-c.a.r. d'éléments de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

Deux c.a.r. sont égales si elles sont formées des mêmes éléments, chaque élément étant répété le même nombre de fois : $[aababc]$ et $[cbabaa]$ sont des 6-c.a.r. égales.

On désigne par I_n^p le nombre des p -c.a.r. d'éléments de E ($\text{Card } E = n$).

1° Calculer $\Gamma_3^1, \Gamma_3^2, \Gamma_3^3, \Gamma_2^3$ et, pour $n \geq 3$, $\Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_n^3$.

2° On suppose écrites toutes les p-c.a.r. d'éléments de E (Card $E = n$). Démontrer qu'un élément donné, a , de E est écrit $\frac{p}{n} \Gamma_n^p$ fois.

3° On considère l'ensemble des p-c.a.r. ($p \geq 2$) contenant a au moins une fois. Si dans chacune de ces p-combinaisons on retire un des termes a , qu'obtient-on?

En déduire : $\frac{p}{n} \Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \frac{p-1}{n} \Gamma_n^{p-1}$, puis :

$$\Gamma_n^p = \frac{n+p-1}{p} \Gamma_n^{p-1}. \quad (1)$$

4° Démontrer que Γ_n^p est égal à un coefficient binomial dont on précisera les indices.

(Écrire l'égalité (1) puis, au-dessous, les égalités obtenues en remplaçant successivement p par $p-1$, $p-2$, ..., $3, 2$; faire le produit des premiers membres, puis des seconds, de ces égalités; simplifier et conclure.)

5° Applications :

a) On répartit p boules dans n tiroirs numérotés $1, 2, \dots, n$ et on note la répartition obtenue sous la forme d'une n-liste $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où x_i est le nombre de boules placées dans le tiroir i ($0 \leq x_i \leq p$). Dénombrer les différentes n-listes d'entiers qu'on peut ainsi obtenir. (A chaque répartition des boules dans les tiroirs, on associera la c.a.r. obtenue en répétant chaque numéro de tiroir non vide autant de fois qu'il y a de boules dans le tiroir.)

b) Dénombrer les n-listes d'entiers naturels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telles que :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p,$$

où p est un entier naturel donné.

p -LISTES CROISSANTES DE $\mathbb{N}_n$

Une p-liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$ est dite

- strictement croissante si $x_1 < x_2 < \dots < x_p$;
- croissante si $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$.

1° Démontrer que le nombre de p-listes strictement croissantes d'éléments de $\mathbb{N}_n$ est C_n^p . (A chaque p-liste strictement croissante $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ on associera la partie $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ de $\mathbb{N}_n$.)

2° Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une p-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_n$. Associons-lui la p-liste $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ telle que, quel que soit l'entier k de $\mathbb{N}_p$, $y_k = x_k + k - 1$.

a) Démontrer que $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}_{n+p-1}$.

b) Démontrer réciproquement que toute p-liste strictement croissante d'éléments $\mathbb{N}_{n+p-1}$ est associée à une, et à une seule, p-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_n$.

c) En déduire le nombre des p-listes croissantes d'éléments de $\mathbb{N}_n$.

d) Retrouver ce résultat en associant à toute p-liste croissante $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$ la p-c.a.r. $[x_1 x_2 \dots x_p]$ d'éléments de $\mathbb{N}_n$. (Voir l'étude précédente des combinaisons avec répétition.)

3° On se propose de dénombrer les 4-listes (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que :

$$x + y + z + t = 10. \quad (1)$$

a) A toute 4-liste (x, y, z, t) répondant à la question associons la 3-liste $(1+x, 1+x+y, 1+x+y+z)$. Démontrer que $(1+x, 1+x+y, 1+x+y+z)$ est une 3-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_{11}$.

b) Démontrer réciproquement que toute 3-liste croissante (a, b, c) d'éléments de $\mathbb{N}_{11}$ est associée à une, et à une seule, 4-liste (x, y, z, t) d'entiers naturels vérifiant l'égalité (1).

c) En déduire le nombre cherché.

4° Utiliser la méthode de la question 3° pour dénombrer les n-listes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, où p est un entier naturel donné. (On se contentera de préciser les différentes étapes du raisonnement, sans faire les démonstrations, et on donnera le nombre cherché.)

EXERCICES ET PROBLÈMES

ENSEMBLES FINIS

26. Soit E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E . Calculer, en fonction de $\text{Card } A = a$, $\text{Card } B = b$ et $\text{Card } (A \cap B) = i$, les cardinaux des ensembles suivants (on commencera par simplifier l'écriture de chaque ensemble) :

- a) $X = A \cap \{(A \cap B) \cap B\}$.
 b) $Y = A \cup [\{B \cap (A \cup B)\} \cap \{A \cup (A \cap B)\}]$.
 c) $Z = A \cap [\{B \cap (A \cap B)\} \cup \{A \cap (A \cup B)\}]$.

27. Soit E l'ensemble des diviseurs de 60 et F l'ensemble des diviseurs de 38. Calculer $\text{Card } (E \cap F)$, $\text{Card } (E \cup F)$ et $\text{Card } (E \Delta F)$.

28. Soit E l'ensemble des multiples de 2, F l'ensemble des multiples de 3 et G l'ensemble des diviseurs de 546. Calculer $\text{Card } [(E \cap G) \cup (F \cap G)]$.

29. Parmi quarante secrétaires, huit connaissent le russe, quinze l'anglais et neuf l'allemand. D'autre part, quatre parlent anglais et allemand, cinq anglais et russe, deux allemand et russe, et deux les trois langues. Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues?

30. Un certain appareil, fabriqué en grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts désignés par A et B . Sur cent appareils, on a en moyenne :

- dix appareils présentant le défaut A (et peut être aussi le défaut B);
- huit appareils présentant le défaut B (et peut-être aussi le défaut A);
- quatre appareils présentant les deux défauts.

Combien d'appareils, en moyenne, sur cent, ne présentent aucun défaut?

DÉNOMBREMENT

31. On considère les cinq lettres a, b, c, d et e . Combien peut-on former de mots, avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines?

32. On trace, dans un plan, n droites de directions différentes et dont trois quelconques ne sont pas concourantes. Combien forme-t-on ainsi de triangles?

33. De combien de manières peut-on former un comité de trois femmes et de quatre hommes dans une société de huit femmes et de sept hommes, si l'on suppose que Mlle X... refuse d'être désignée en même temps que M. Y...?

34. De combien de manières peut-on extraire un ensemble de cinq cartes dans un jeu de trente-deux cartes?

Même question si l'on suppose que cet ensemble de cinq cartes contient trois rois, et trois seulement.

35. Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres dans lesquels un chiffre est répété deux fois (numération décimale)?

36. Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres différents qui contiennent les chiffres 5 et 7 (numération décimale)?

37. De combien de manières distinctes peut-on placer six convives autour d'une table ronde? Même question en supposant qu'on alterne les dames et les messieurs (il y a trois dames et trois messieurs).

38. Un rectangle est constitué par six cases carrées égales, numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme l'indique la figure. On dispose de six plaquettes carrées, égales à chacune des cases et numérotées de 1 à 6.

6	5	4
1	2	3

1° On place les plaquettes sur les cases à raison de une par case. Combien y a-t-il de positions possibles se distinguant :

- a) Uniquement par la place des plaquettes?
 b) A la fois par leur place et leur orientation?

2° Chaque plaquette coïncidant avec la case de même numéro, on colorie en rouge le périmètre du rectangle qu'elles constituent, puis on les disperse. De combien de façons peut-on former le rectangle de telle sorte que le contour rouge soit reconstitué?

39. Étant donné n éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$, combien y a-t-il d'arrangements qui contiennent à la fois les éléments a_1 et a_2 .

40. Étant donné n éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$, combien y a-t-il de permutations où l'objet a_1 occupe la première place? Où les éléments a_1 et a_2 occupent les deux premières places?

41. Dans un jeu de trente-deux cartes, combien peut-on faire de jeux de cinq cartes contenant trois piques?

42. Une classe de trente-cinq élèves comprend quinze filles (toutes externes) et vingt garçons (tous internes). On veut former un comité comprenant un président (interne), une secrétaire (fille) et trois autres membres. Combien y a-t-il de comités possibles?

43. On dispose de lettres accentuées permettant de distinguer $E, \acute{E}$ et $\grave{E}$. Combien y a-t-il de permutations possibles pour l'ensemble des lettres du mot THÉORÈME?

On supprime les accents. Combien reste-t-il de permutations distinctes?

44. Par combien de zéros se termine le nombre 100! écrit dans le système décimal? Même question pour le nombre 10 000!

45. On marque, dans un plan, cinq points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Combien ces points déterminent-ils de pentagones? Généraliser.

46. On garde tous les cœurs et tous les trèfles d'un jeu de trente-deux cartes. Combien y a-t-il de permutations de

ces seize cartes dans lesquelles deux cartes consécutives quelconques sont de couleurs différentes?

47. Dans un bureau de vingt-sept personnes, combien y a-t-il de façons de choisir un président, un vice-président, un secrétaire général et un trésorier?

48. On a un jeu de trente-deux cartes. On en prend huit, ce qui constitue une « main ». Dénombrer les mains qui contiennent :

- exactement un as;
- exactement deux as;
- aucun as;
- au moins un as;
- deux cœurs et trois piques;
- deux cœurs, trois piques et un trèfle;
- deux cœurs et un as;
- deux cœurs et deux dames;
- un carré (quatre cartes de même valeur).

49. On jette trois dés différenciés A , B et C ayant chacun six faces. Les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles.

1° Dénombrer tous ces résultats. Le problème revient à dénombrer les applications d'un ensemble dans un autre ensemble. Préciser ces ensembles.

2° Dénombrer les résultats où les trois faces amenées sont identiques.

3° Dénombrer ceux où les trois faces sont différentes.

4° Dénombrer les résultats ne comportant aucun as (on pourra procéder comme au 1°).

5° Dénombrer les résultats comportant au moins un as.

6° Dénombrer les résultats comportant exactement un as.

7° Dénombrer les résultats comportant exactement deux as.

8° Indiquer le lien entre les questions 4°, 5°, 6° et 7° et une autre question, concernant les as, qui n'a pas été posée.

50. On dispose d'un alphabet à deux symboles a et e . Combien de mots distincts de longueur k peut-on former à l'aide de cet alphabet, une lettre pouvant être répétée jusqu'à k fois? (On prendra $k = 1$, $k = 2$, puis k quelconque.)

51. Une grenouille monte un escalier de treize marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante, ou en sautant par dessus une marche (de la marche n à la marche $n + 2$). Combien de façons distinctes a-t-elle d'arriver au sommet de l'escalier?

52. Un tournoi sportif compte sept équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer une fois, et une seule, toutes les autres équipes. Combien doit-on organiser de matchs?

53. Pour jouer au loto, on désigne 6 numéros, parmi 49. On gagne au 1^{er} rang si les six numéros choisis sortent, au 3^e si cinq numéros sur six sortent, au 4^e si quatre numéros sur six sortent. Combien y a-t-il de grilles gagnantes au 1^{er}, 3^e et au 4^e rang?

54. Une ligne de chemin de fer comporte 25 stations. Chaque station délivre des titres de transports en première et deuxième classe pour chacune des autres stations (on distingue le billet $A \rightarrow B$ du billet $B \rightarrow A$). La ligne est prolongée de trois stations. Combien doit-on imprimer de nouveaux types de billets?

APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES FINIS

55. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n . On se propose de dénombrer l'ensemble des applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.

1° Soit f une application de E dans E . On note $f(E)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de E . Démontrer que l'application f est telle que $f \circ f = f$ si, et seulement si, tout élément de $f(E)$ est invariant par f .

2° Soit A une partie non vide de E , de cardinal p . Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$ et $f(E) = A$.

3° Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.

56. Applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1° Une application de f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est une injection croissante si $1 \leq f(1) < f(2) < \dots < f(p) \leq n$.

Démontrer que le nombre d'injections croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_n^p . (A chaque injection croissante f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, on associera la partie $\{f(1), f(2), \dots, f(p)\}$ de $\mathbb{N}_n$.)

2° Soit f une application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$: $1 \leq f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(p) \leq n$. A f on associe l'application g qui à tout entier k de $\mathbb{N}_p$ associe l'entier $g(k)$ tel que :

$$g(k) = f(k) + k - 1.$$

Démontrer que g est une injection croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$. En déduire que le nombre d'applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_{n+p-1}^p .

57. Dénombrement des surjections de A sur B

Soit A et B deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p . On se propose de dénombrer les applications surjectives de A sur B . On note S_n^p le cardinal cherché.

1° Calculer les entiers S_n^1 , S_n^2 et S_n^p pour $p > n$.

Dans tout ce qui suit, on suppose $p \leq n$.

2° Soit a un élément de A . Les surjections f de A sur B sont de deux sortes :

- celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur B : il existe $b \neq a$ tel que $f(a) = f(b)$;

- celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur l'ensemble B privé d'un de ses éléments : quel que soit $b \neq a$, $f(a) \neq f(b)$.

Déduire de ce constat que : $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.

3° Calculer S_n^p pour $1 \leq n \leq 6$ et $1 \leq p \leq 6$, et noter les résultats dans le tableau ci-dessous.

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

4° Application : combien y a-t-il de façons de distribuer 32 cartes à quatre joueurs, les joueurs n'étant pas censés recevoir nécessairement le même nombre de cartes, chaque joueur en recevant au moins une?

58. Dénombrement des involutions d'un ensemble fini

I — Soit A un ensemble fini non vide de cardinal pair :

$$\text{Card } A = 2p, p \in \mathbb{N}^*.$$

On note Π l'ensemble des partitions de E formées de paires d'éléments de E .

Par exemple, si $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, la partition $\{a, b\}, \{c, e\}, \{d, f\}$ est un élément de Π .

On se propose de déterminer le cardinal de Π , que l'on note u_{2p} .

1° Démontrer que $u_{2p} = (2p-1)u_{2p-2}$.

2° En déduire que $u_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$.

II — Soit f une application involutive d'un ensemble E dans lui-même : $f \circ f = \text{Id}_E$.

Pour tout élément a de E , on note $\bar{a}$ l'ensemble $\{a, f(a)\}$.
(Si $f(a) = a$, $\text{Card } \bar{a} = 1$ et si $f(a) \neq a$, $\text{Card } \bar{a} = 2$.)

1° Soit a et b deux éléments distincts de E . Démontrer que :

a) si $b = f(a)$, $\bar{a} = \bar{b}$;

b) si $b \neq f(a)$, $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

2° En déduire que tous les ensembles $\bar{a}$ distincts forment une partition de E (faite de parties à un ou deux éléments).

3° Montrer, réciproquement, que la donnée d'une partition de E , faite de parties à un ou deux éléments, définit une involution de E .

4° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal pair : $\text{Card } E = 2n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dénombrer les involutions de E sans élément invariant.

b) Dénombrer les involutions de E possédant deux éléments invariants.

c) Dénombrer les involutions de E possédant $2k$ éléments invariants ($1 \leq k \leq n$).

d) Dénombrer toutes les involutions de E .

5° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal impair : $\text{Card } E = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que E possède un nombre impair d'éléments invariants.

b) Dénombrer les involutions de E .

59. Transformations de E sans point fixe

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n . Une transformation de E est une bijection de E sur E . On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations f de E sans point fixe : pour tout x de E , $f(x) \neq x$. On note $u_n = \text{Card } \mathcal{T}$.

1° On choisit un élément a de E . Les éléments f de $\mathcal{T}$ sont de deux sortes :

- ceux pour lesquels l'image b de a et l'antécédent c de a sont égaux;

- ceux pour lesquels b et c sont distincts.

a) Montrer que si f est du premier type, la restriction de f à $A \setminus \{a, b\}$ est une transformation sans point fixe de $A \setminus \{a, b\}$.

b) Montrer que si f est du second type, l'application g qui à c associe b , et à $x \neq c$ associe $f(x)$ est une transformation sans point fixe de $A \setminus \{a\}$.

c) En déduire que : $u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2})$.

2° On pose $\alpha_n = u_n - nu_{n-1}$. Montrer par récurrence que $\alpha_n = (-1)^n$. En déduire que

$$u_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

3° Programmer le calcul de u_n .

I — NOTION D'ÉVÉNEMENT

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Quand, dans un sac contenant six jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, on tire *deux* jetons *au hasard*, simultanément, on peut obtenir différents résultats.

Une telle opération dont le résultat est imprévisible est une **expérience aléatoire**.

C'est à partir de cet exemple que nous introduirons le vocabulaire des *événements*.

Univers des possibles

Il est naturel de représenter le **résultat** d'un tirage par la paire formée des nombres inscrits sur les deux jetons tirés, par exemple $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, ... L'ensemble des résultats possibles, ou **univers des possibles**, est donc l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On le note Ω . Son cardinal est $C_6^2 = 15$.

ÉVÉNEMENT

Le résultat $\{2, 5\}$ réalise l'événement «la somme des points est 7».

Deux autres résultats : $\{1, 6\}$ et $\{3, 4\}$ réalisent également cet événement que l'on peut représenter par la partie de l'univers des possibles formée des éléments $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$.

De même, «le plus petit nombre est 3» est un événement représenté par la partie de Ω :

$$\{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}.$$

Plus généralement, on appelle **événement** toute partie A de l'univers des possibles. Dire qu'un résultat possible ω réalise l'événement A signifie alors que $\omega \in A$.

Un événement peut être défini par une formulation comme «la somme des points est 7», «le plus petit nombre est 3», ou en extension, par la donnée des résultats qui le réalisent.

Ainsi, la formulation « la somme des points est 7 » et la partie $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ définissent le même événement.

Le cardinal d'un événement est inférieur à celui de l'univers des possibles Ω .

Événement impossible

La partie vide de l'univers Ω des possibles est l'**événement impossible**. Ainsi, « la somme des points est 12 » est-elle l'événement impossible : aucun résultat ne le réalise.

Événement certain

La partie Ω est l'**événement certain**. Ainsi, « la somme des points est supérieure à 2 » est l'événement certain : il est réalisé par tous les résultats.

Événement élémentaire

L'événement « le plus grand des nombres est 2 » est réalisé par le seul résultat $\{1, 2\}$: on dit que c'est un **événement élémentaire**.

Les événements élémentaires sont les *singletons* de l'univers des possibles, c'est-à-dire les parties de cardinal 1.

Pour tout élément ω de l'univers des possibles Ω , l'événement élémentaire réalisé par ω est $\{\omega\}$.

Événement contraire d'un événement

Soit A un événement, c'est-à-dire une partie de l'univers des possibles Ω . La partie complémentaire de A relativement à Ω est aussi un événement, appelé **événement contraire** de A et noté $\bar{A}$.

Par exemple, « la somme des points est 7 » a pour événement contraire « la somme des points est différente de 7 ».

L'événement impossible et l'événement certain sont contraires l'un de l'autre.

A noter que, pour tout événement A , on a : $\text{Card } A + \text{Card } \bar{A} = \text{Card } \Omega$.

Événements incompatibles

Un événement A et son contraire $\bar{A}$ sont tels que $A \cap \bar{A} = \emptyset$. On peut aussi exprimer cette propriété en disant qu'un même résultat ne peut réaliser à la fois un événement A et son contraire $\bar{A}$.

Plus généralement, on dit que deux événements A et B sont **incompatibles**, ou **disjoints**, si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun résultat qui les réalise simultanément.

« La somme des points est 5 » et « le plus petit des points est 3 » sont deux événements incompatibles.

Système complet d'événements

Dans l'expérience aléatoire considérée dans ce paragraphe, la somme des points sortis est un entier compris entre 3 et 11. Pour tout entier i tel que $3 \leq i \leq 11$, notons S_i

l'événement : « la somme des points est i ». Il est alors immédiat de constater que les événements S_i sont non impossibles, deux à deux incompatibles, et que leur réunion est l'univers Ω .

On exprime ces propriétés en disant que les événements S_i , $3 \leq i \leq 11$, forment un **système complet d'événements**.

A noter que cette notion de système complet d'événements n'est autre, exprimée en langage des événements, que la notion de **partition** : un système complet d'événements est une partition de l'univers des possibles Ω . (Rappelons que des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'un ensemble E forment une partition de E si elles sont vides, deux à deux disjointes, et si leur réunion est E .)

REMARQUES :

1. Un événement A , non impossible et non certain, et son contraire $\bar{A}$ forment un système complet d'événements.
2. Les événements élémentaires forment un système complet d'événements.

Réunion et intersection de deux événements

Soit A et B deux événements, c'est-à-dire deux parties de l'univers des possibles.

La partie $A \cup B$, réunion de A et B , est appelée événement « A ou B ».

La partie $A \cap B$, intersection de A et B , est appelée événement « A et B ».

Exemple

Si A et B sont respectivement les événements « la somme des points est 7 » et « le plus petit nombre est 3 », alors :

- « A ou B » est l'événement $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$;
- « A et B » est l'événement $\{\{3, 4\}\}$.

● Exercices d'application

1. Dans un sac contenant six boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, on tire une première boule, puis, sans remettre cette première dans le sac, une seconde boule.

1° Définir un univers des possibles Ω tenant compte de l'ordre de sortie des deux nombres obtenus.

2° Quel est le cardinal de Ω ?

3° « La somme des nombres est 3 » est-il un événement élémentaire?

4° Écrire en extension et préciser le cardinal des événements suivants :

A : les deux nombres sortis sont consécutifs;

B : le premier nombre sorti est inférieur au second;

C : la somme des nombres sortis est impaire;

D : le second nombre sorti est 6.

5° Même question pour les événements $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C},$

$\bar{D}, A$ et B, A et C, A et $\bar{C}, B$ et D, B ou D .

2. Reprendre l'exercice précédent en supposant que la première boule tirée soit remise dans le sac avant le second tirage.

3. On place n boules numérotées 1, 2, ..., n dans p tiroirs numérotés 1, 2, ..., p , chaque tiroir pouvant recevoir un nombre k de boules compris entre 0 et n : $0 \leq k \leq n$.

A chaque répartition des boules dans les tiroirs on associe l'application de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ qui à tout entier i de $\mathbb{N}_n$ associe le numéro du tiroir dans lequel est placée la boule numérotée i .

1° Quel est l'univers des possibles Ω ? Dénombrer Ω .

2° On note X le nombre de boules placées dans le tiroir numéro 1, et, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $(X = k)$ l'événement : « le premier tiroir contient k boules ».

a) Montrer que les événements $(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, forment un système complet d'événements.

b) Calculer $\text{Card}(X = k)$.

c) En déduire que :

$$p^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k)^p.$$

II — NOTION DE PROBABILITÉ

CAS PARTICULIER

Dans l'expérience aléatoire considérée au paragraphe I, les 15 tirages possibles se font au hasard et un résultat donné n'est obtenu que par un seul tirage : par exemple le résultat $\{3, 5\}$ est obtenu en tirant les boules numérotées 3 et 5. Il est alors légitime de penser que les résultats possibles ont tous la même *chance* de sortir : une sur quinze.

Cette hypothèse peut recevoir une justification expérimentale : si on effectue des séries de 150 tirages, on constate que la **fréquence de sortie** d'un résultat donné, c'est-à-dire le quotient du nombre de sorties du résultat par le nombre de tirages, est généralement proche de $\frac{1}{15}$. Certes des séries où cette fréquence diffère notablement de $\frac{1}{15}$ peuvent intervenir, mais elles sont rares.

On exprime ce fait en disant que les résultats possibles sont **équiprobables** et on convient d'affecter à chacun d'eux la **probabilité** $\frac{1}{15}$.

Il est alors naturel d'affecter à un événement A de cardinal p , c'est-à-dire réalisé par p résultats, la probabilité $p \times \frac{1}{15}$ égale à $\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

Là encore l'expérience justifie cette démarche : dans des séries d'un grand nombre de tirages (100, 150, 200, 1 000), la fréquence de réalisation de A ne s'éloigne sensiblement de $\frac{p}{15}$ que dans quelques cas rares.

DÉFINITION 1

Dans une expérience aléatoire, lorsque les résultats possibles sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le réel, noté $P(A)$, défini par :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}, \quad \text{où } \Omega \text{ est l'univers des possibles.}$$

Il résulte de cette définition que les événements élémentaires ont tous la même probabilité : $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$ (toujours dans l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats possibles).

Activité

1. Soit Ω un univers des possibles associé à une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont équiprobables.

1° Quelle est la probabilité de l'événement impossible et celle de l'événement certain?

2° Démontrer que la probabilité $P(A)$ d'un événement quelconque A est un réel tel que $0 \leq P(A) \leq 1$.

3° Pour tout événement A d'événement contraire $\bar{A}$, démontrer que :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

On utilise cette formule pour déterminer $P(A)$ lorsque le calcul de $P(\bar{A})$ est plus simple que celui de $P(A)$. Par exemple :

On tire quatre cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as?

L'univers des possibles Ω est l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Donc : $\text{Card } \Omega = C_{32}^4$. De plus les résultats possibles sont équiprobables.

L'événement A dont on demande la probabilité est l'ensemble des parties à 4 éléments contenant au moins un as. Son contraire $\bar{A}$ est l'ensemble des parties à 4 éléments ne contenant pas d'as; $\bar{A}$ est donc l'ensemble des parties à 4 éléments des 28 cartes qui ne sont pas des as.

D'où : $\text{Card } \bar{A} = C_{28}^4$. Il en résulte : $P(\bar{A}) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}$ et, par suite :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4} \approx 0,43.$$

4° Soit A et B deux événements.

On dit que A entraîne B si $A \subset B$, c'est-à-dire si tout résultat qui réalise A réalise B . Démontrer que si A entraîne B , alors $P(A) \leq P(B)$.

5° Soit A et B deux événements. Démontrer que :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Que devient cette formule lorsque A et B sont incompatibles?

6° Soit $A_1, A_2, \dots, A_p$ un système complet d'événements. Démontrer que :

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_p) = 1.$$

2. Un sac contient n boules : 2 blanches et $(n - 2)$ noires ($n > 2$).

On tire les n boules, une par une, au hasard, sans remettre les boules tirées dans le sac. Le résultat d'une telle opération est la n -liste dont le k -ième coefficient est B (resp. N), si la k -ième boule tirée est blanche (resp. noire).

1° Quel est l'univers des possibles Ω ? Dénombrer Ω .

2° On note X le rang de la première boule blanche tirée. Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

3° Pour tout entier k élément de E , on note $(X = k)$ l'événement : « la première boule blanche est obtenue au k -ième tirage ».

a) Montrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ forment un système complet d'événements.

b) Calculer $P(X = k)$.

c) En déduire une expression de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

4° On suppose dans cette question que $n = 2p$, où p est un entier ≥ 2 , et on note $(X \leq p)$ l'événement : « la première boule blanche est obtenue avant le p -ième tirage ».

a) Démontrer que $P(X \leq p) = \sum_{k=1}^p P(X = k)$.

b) Programmer le calcul de $P(X \leq p)$ en fonction de p .

Réponse (HP-11C)

P/R

met en mode programme

PRGM

efface la mémoire programme

LBL **A**

choix du label du programme

STO **0**

place p dans le registre R_0

0 **STO** **1**

initialise le contenu k du registre R_1 : $k = 0$

```

[LBL] 0
1 [STO] [+] 1
[RCL] 0 2 [x] [RCL] 1 [-]
[RCL] 0 2 [x] 1 [-] [RCL] 0 [x]
[÷]
[STO] [+] 2
[RCL] 1 [RCL] 0
[X>Y]
[GTO] 0
[RCL] 2
[RTN]

```

début d'une boucle

ajoute 1 au contenu de R_1 calcule $2p - k$ calcule $p(2p - 1)$ effectue le quotient $\frac{2p - k}{p(2p - 1)} = P(X = k)$ ajoute $P(X = k)$ au contenu du registre R_2 appelle k dans R_1 , puis p dans R_0 compare p à k $\begin{cases} \text{retourne à [LBL] 0} & \text{si } p > k \\ \text{sort de la boucle} & \text{si } p \leq k \end{cases}$

fin de la boucle

affiche le contenu de R_2 : $P(X \leq p)$

fin du programme

```

[P/R]
0 [STO] 2
100 [A]

```

retour en mode calcul

vide le registre R_2 affiche $0,7513 \approx P(X \leq 100)$ Calculer $P(X \leq p)$ pour $p = 10, p = 20, p = 50, p = 100$.

c) Démontrer en utilisant le résultat de la question 3° c que :

$$P(X \leq p) = \frac{3p - 1}{2(2p - 1)}.$$

En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de $P(X \leq p)$.

Exercices d'application

Dans tous ces exercices on demande de calculer la probabilité d'un événement A relatif à une expérience aléatoire. On commencera par définir un univers des possibles dont les éléments (résultats possibles) sont équiprobables et on utilisera la formule : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

4. Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5. On les tire au hasard, un par un, en les plaçant les uns à côté des autres, de gauche à droite de manière à former un nombre n de 5 chiffres. Calculer la probabilité que :

1° n soit pair;2° n soit supérieur à 23 000.

5. On marque n points sur un cercle. On en choisit deux au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient voisins? Même question lorsque les points sont sur une droite.

6. Une urne contient $n - 2$ boules blanches et 2 boules noires. On les tire une à une, au hasard, sans les remettre.

1° Calculer la probabilité d'obtenir la seconde boule noire au k -ième tirage ($k \in \{2, 3, \dots, n\}$).

2° Calculer la probabilité d'obtenir les deux boules noires consécutivement.

7. On range, au hasard, n boules numérotées 1, 2, ..., n dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n , en mettant une boule par tiroir. Quelle est la probabilité que la boule 3 soit dans le tiroir 3? que les boules 3 et 5 soient respectivement dans les tiroirs 3 et 5?

8. Une urne contient n boules. On en tire, au hasard, une partie A non vide. Quelle est la probabilité pour que A ait un cardinal pair?

9. Une urne contient b boules blanches et n boules noires ($b \geq 2$ et $n \geq 2$). On tire 2 boules, au hasard, simultanément. Quelle est la probabilité d'un tirage de deux boules blanches, de deux boules noires, d'une boule noire et d'une boule blanche?

10. Une urne contient n boules numérotées 1, 2, ..., n ($n \geq 3$). On tire 3 boules, au hasard, simultanément.

1° Quelle est la probabilité que le plus petit des numéros tirés soit égal à k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$)?

2° Même question pour le plus grand des numéros tirés.

11. On tire 5 cartes, au hasard, d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :

- 1° l'as de cœur;
- 2° un as et un seul;
- 3° deux as et deux seulement;
- 4° exactement trois as;
- 5° les quatre as;
- 6° au moins un as?

12. Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire 4, au hasard,

simultanément. Quelle est la probabilité d'avoir k boules blanches ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$)?

13. n personnes disposent chacune d'un jeu de 32 cartes. Chaque personne tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les cartes tirées il n'y en ait pas deux identiques?

14. Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes choisies au hasard il y ait au moins deux personnes dont l'anniversaire ait lieu le même jour?

CAS GÉNÉRAL

Probabilités des résultats possibles

Considérons maintenant l'expérience aléatoire consistant à tirer deux jetons au hasard, simultanément, dans un sac en contenant six : deux numérotés 1, deux numérotés 2 et deux numérotés 3.

Le résultat d'un tel tirage est constitué par les nombres marqués sur les deux jetons sortis. Ces nombres ne forment pas un couple car ils ne sont pas ordonnés, ni un ensemble car le même numéro peut être répété deux fois; nous les noterons sous la forme d'une 2-liste croissante d'éléments de $\mathbb{N}_3$, c'est-à-dire d'un couple de $\mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_3$ dont le premier coefficient est inférieur ou égal au second.

L'univers des possibles est alors $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, et $\text{Card } \Omega = 6$.

Si on effectue des séries de 100 tirages dans les conditions décrites ci-dessus et si, à l'issue de chaque série, on calcule la fréquence de sortie de chaque résultat ω , c'est-à-dire le quotient $\frac{\text{nombre de sorties de } \omega}{\text{nombre de tirages}}$, on constate, dans la plupart des cas, des fréquences

voisines de $\frac{7}{100}$ pour les résultats (1, 1), (2, 2) et (3, 3), et des fréquences voisines de $\frac{27}{100}$ pour les résultats (1, 2), (1, 3) et (2, 3). Les résultats possibles ne sont donc pas équiprobables. Pourquoi?

Comme dans le tirage étudié au paragraphe I, il y a six jetons dans le sac qui, même s'ils portent le même numéro, sont des jetons distincts (deux jetons de même numéro peuvent, par exemple, être de couleurs différentes : l'un blanc et l'autre noir). Le nombre de tirages possibles de deux jetons parmi les six est donc $C_6^2 = 15$, et ces tirages sont équiprobables.

Le résultat (1, 1) est obtenu par un seul tirage : celui des deux jetons numérotés 1; sa probabilité est donc $\frac{1}{15}$ et il en est de même pour les résultats (2, 2) et (3, 3). Par contre le

résultat (1, 2) est obtenu par quatre tirages : les deux jetons blancs numérotés 1 et 2, les deux jetons noirs numérotés 1 et 2, les jetons blanc et noir respectivement numérotés 1 et 2, les jetons blanc et noir respectivement numérotés 2 et 1. La probabilité du résultat (1, 2) est donc $\frac{4}{15}$ et il en est de même pour les résultats (1, 3) et (2, 3).

Bien évidemment la somme des probabilités des résultats possibles est égale à 1 :

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = 1,$$

car la somme $1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4$ est égale au nombre, 15, de tous les tirages possibles.

Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement quelconque s'obtient à partir des probabilités des résultats qui le réalisent.

Par exemple, soit A l'événement : «la somme des points est 4»; A est la partie $\{(1, 3), (2, 2)\}$ de l'univers Ω , et comme il est réalisé par les résultats $(1, 3)$ et $(2, 2)$, et uniquement par ces résultats, il est naturel de lui affecter une probabilité égale à la somme des probabilités des résultats $(1, 3)$ et $(2, 2)$, soit : $\frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.

On peut vérifier expérimentalement le bien-fondé de ce calcul en procédant à des séries de 100 tirages, et en constatant que la fréquence de réalisation de A reste, dans la plupart des cas, voisine de $\frac{1}{3}$.

D'une façon générale :

DÉFINITION 2

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des résultats qui le réalisent :

si $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$, alors $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_p)$.

Conclusion

Pour calculer la probabilité d'un événement A relatif à une expérience aléatoire, il convient d'adopter la démarche suivante :

- 1° Définir un univers des possibles Ω .
- 2° Calculer les probabilités des différents résultats possibles. Ces probabilités sont positives et leur somme doit être égale à 1.
- 3° La probabilité de A est alors la somme des probabilités des résultats qui réalisent A .

REMARQUES :

1. Lorsque les résultats possibles sont équiprobables, la formule $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ devient

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

2. Dans le processus conduisant au calcul de la probabilité d'un événement, la première étape : définition de l'univers des possibles, est essentielle. Elle consiste à choisir la nature des éléments mathématiques qui représenteront les résultats de l'expérience : p -listes, p -listes croissantes, p -arrangements, p -combinaisons, ...

3. Il est parfois possible d'associer à une même expérience aléatoire deux univers des possibles. Si, pour l'un des deux, les résultats possibles sont équiprobables, on préférera cet univers à l'autre, ce qui permettra, pour tout événement A , d'appliquer la formule : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

L'activité suivante donne un exemple d'un tel choix.

Activité

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés simultanément sur une table.

- 1° Le résultat d'un tel jet est constitué par les deux nombres de points situés sur la face supérieure des dés. (Ces deux nombres ne forment pas un couple car ils ne sont pas ordonnés, ni un ensemble car le même nombre peut être répété deux fois.) Définir un univers des possibles Ω_1 et calculer son cardinal.

2° Il est toujours possible de différencier les dés par un signe permettant de définir un premier dé et un second. On peut alors considérer comme résultat le couple (i_1, i_2) où i_1 et i_2 sont respectivement les nombres de points marqués par le premier et le second dé.

Quel univers des possibles Ω_2 obtient-on ainsi et quel est son cardinal?

3° Les résultats possibles de l'univers Ω_1 sont-ils équiprobables? Même question pour Ω_2 .

4° Calculer, en utilisant les deux univers, les probabilités des événements suivants : la somme des points est 7, le plus grand des nombres de points est 5, au moins un des dés marque l'as, un et un seul dé marque l'as, les nombres de points des deux dés sont distincts.

Quel univers préférez-vous? Pourquoi?

5° On jette trois dés simultanément. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) trois nombres de points deux à deux distincts;
- b) au moins deux nombres de points égaux;
- c) exactement deux nombres de points égaux;
- d) au moins un as;
- e) exactement un as;
- f) une somme de points égale à 10;
- g) une somme de points supérieure à 12;
- h) 4, 2, 1.

6° On jette quatre dés simultanément. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a) un carré (quatre fois un même nombre de points);
- b) un brelan (trois fois un même nombre de points);
- c) une double paire (deux fois un même nombre de points et deux fois un même autre nombre de points);
- d) une disposition banale (quatre nombres de points deux à deux distincts).

● Exercices d'application

15. Une urne contient six boules : une numérotée 1, deux numérotées 2 et trois numérotées 3. On tire deux boules au hasard, simultanément.

1° Définir un univers des possibles et calculer la probabilité de chaque résultat possible.

2° Quelle est la probabilité de tirer deux numéros distincts? De tirer un et un seul numéro 3, au moins un numéro 3?

3° On note X le plus petit des numéros tirés.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout élément i de E calculer la probabilité des événements $(X = i)$, $(X \leq i)$ et $(X > i)$.

c) Les événements $(X = i)_{i \in E}$ forment-ils un système complet d'événements? Même question pour les événements $(X \leq i)_{i \in E}$.

4° On note Y le plus grand des numéros tirés. Reprendre avec Y les questions du 3°.

16. Une urne contient six boules : trois numérotées 1, deux numérotées 2 et une numérotée 3. On tire une première boule au hasard puis, sans remettre cette première boule dans l'urne, une seconde boule, toujours au hasard.

Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres respectivement inscrits sur la première et la seconde boule.

1° Écrire en extension l'univers des possibles et calculer la probabilité de chaque résultat possible.

2° Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) les deux nombres tirés sont égaux ($a = b$);
- b) le premier nombre tiré est inférieur au second ($a < b$);
- c) le premier nombre tiré est strictement supérieur au second ($a > b$).

Les événements définis en a), b), c) forment-ils un système complet?

3° On note X la valeur absolue de la différence des deux nombres tirés ($X = |a - b|$).

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout élément i de E calculer la probabilité de l'événement $(X = i)$.

c) Les événements $(X = i)_{i \in E}$ forment-ils un système complet?

17. Reprendre l'exercice précédent en supposant que la première boule tirée soit remise dans l'urne avant le tirage de la seconde boule.

III — PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers des possibles de cardinal n associé à une expérience aléatoire.

Les résultats possibles ω_i possèdent des probabilités respectives $P(\omega_i)$, positives, et dont la somme est égale à 1 : $\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$.

Pour tout événement A , on définit la probabilité de A comme la somme des probabilités des résultats qui réalisent A :

$$\text{si } A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_p}\}, \text{ alors } P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_p}).$$

Il en résulte les trois propriétés suivantes, fondamentales en ce sens qu'elles permettent de démontrer toutes les autres :

PROPRIÉTÉS 1, 2, 3

1. Pour tout événement A , $P(A) \geq 0$.
2. La probabilité de l'événement certain est égale à 1 : $P(\Omega) = 1$.
3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Les propriétés 1 et 2 sont évidentes; pour démontrer 3 posons :

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_p}\} \quad \text{et} \quad B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_q}\}.$$

Comme $A \cap B$ est vide, les éléments $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}$ sont deux à deux distincts. Par suite :

$$A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}\},$$

$$\text{d'où :} \quad P(A \cup B) = P(\omega_{i_1}) + \dots + P(\omega_{i_p}) + P(\omega_{j_1}) + \dots + P(\omega_{j_q}),$$

$$\text{soit :} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

CONSÉQUENCES

1. Un événement quelconque A et son contraire $\bar{A}$ sont tels que :

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad \text{et} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Donc (propriété 3) : $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, soit : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

PROPRIÉTÉ 4

Pour tout événement A , $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

On a déjà vu (page 31) l'intérêt de cette formule pour déterminer $P(A)$ lorsque le calcul de $P(\bar{A})$ est plus simple que celui de $P(A)$.

Lorsque $A = \Omega$, $\bar{A} = \emptyset$; la formule s'écrit alors $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$. D'où $P(\emptyset) = 0$: la probabilité de l'événement impossible est nulle.

D'autre part, comme $P(\bar{A})$ est un réel positif, l'égalité $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ prouve que $P(A) \leq 1$.

PROPRIÉTÉ 5

La probabilité d'un événement quelconque est un réel appartenant au segment $[0, 1]$.

2. Soit A et B deux événements quelconques; on a :

$$\begin{cases} A \cup (B \setminus A) = A \cup B & \text{et} & A \cap (B \setminus A) = \emptyset \\ B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) & \text{et} & (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset. \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} P(A) + P(B \setminus A) = P(A \cup B) \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A). \end{cases}$$

d'où, par addition de ces deux égalités puis simplification :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

PROPRIÉTÉ 6

Les probabilités de deux événements quelconques A et B , de leur réunion et de leur intersection sont telles que :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

A noter que la propriété 3 apparaît comme un cas particulier de cette propriété 6 : si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B)$ est nul et la relation ci-dessus devient $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Soit A_1, A_2, A_3 trois événements deux à deux incompatibles. On a :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3).$$

Or :

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,$$

et

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Il en résulte :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Cette formule se généralise par récurrence :

PROPRIÉTÉ 7

Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_p).$$

Cas particulier :

Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_p$ forment un système complet d'événements, ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'univers Ω . D'où :

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_p) = 1.$$

● **Exercices d'application**

18. A, B et C sont trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P . On définit les deux événements :

$$E_1 = A \cap B \cap C \quad \text{et} \quad E_2 = A \cap (B \cup C).$$

1° Comparer E_1 et E_2 .

2° Calculer $P(E_1 \cup E_2)$ en fonction de $P(A)$.

3° Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ sachant que :

$$P(A) = 0,6; \quad P(B) = 0,4; \quad P(C) = 0,3;$$

$$P(A \cap B) = 0,2;$$

$$P(B \cap C) = P(A \cap C) = 0,1;$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,005.$$

19. A, B et C sont trois événements d'un même univers. Soit les deux événements :

$$E_1 = A \cap (B \cup C) \quad \text{et} \quad E_2 = A \cup (B \cap C).$$

Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ sachant que :

$$P(A) = 0,6; \quad P(B) = 0,4; \quad P(C) = 0,3;$$

$$P(A \cap B) = 0,2; \quad P(B \cap C) = 0,1;$$

$$P(A \cap C) = 0,1;$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,05.$$

20. A, B, C sont trois événements d'un même univers. On donne :

$$P(A) = 0,30; \quad P(B) = 0,25; \quad P(C) = 0,25;$$

$$P(A \cap B) = 0,15; \quad P(B \cap C) = 0,15;$$

$$P(A \cap C) = 0,20; \quad P(A \cap B \cap C) = 0,08.$$

1° Écrire les événements suivants :

a) A et B se produisent mais non C (événement E).

b) Deux des trois événements se produisent mais pas trois (événement F).

2° Calculer les probabilités des événements E et F .

21. Soit A, B, C des événements définis sur une même épreuve aléatoire.

1° Connaissant les probabilités :

$$P(A) = p, \quad P(B) = q, \quad P(A \cup B) = r,$$

calculer $P(A \cap B)$, $P(A \Delta B)$, $P(\overline{A \cap B})$, $P(\overline{A \cap B})$.

Application : $p = 0,6$; $q = 0,4$; $r = 0,8$.

2° Soit les deux événements :

$$E_1 = A \cup (B \cap C) \quad \text{et} \quad E_2 = A \cap (B \cup C).$$

Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$ connaissant :

$$P(C) = s; \quad P(B \cap C) = t;$$

$$P(A \cap C) = u; \quad P(A \cap B \cap C) = v.$$

Application : $s = 0,3$; $t = 0,1$; $u = 0,1$; $v = 0,05$.

22. Soit A, B, C des événements définis sur une même épreuve aléatoire.

1° Démontrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

2° Une urne contient 10 boules numérotées 1, 2, ..., 10. On extrait au hasard trois boules, une par une, avec remise. Soit X le produit des nombres inscrits sur les boules extraites. Quelle est la probabilité :

a) pour que X soit pair?

b) pour que X soit impair?

(On pourra considérer les événements A : « la première boule extraite porte un numéro pair », B : « la deuxième boule extraite porte un numéro pair », etc.)

23. On considère un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Le dé est pipé de telle sorte que $P(i)$ désignant la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i , $P(1), P(2), P(3), \dots, P(6)$ soient les six premiers termes d'une suite arithmétique de raison r .

1° On lance le dé une fois et on prend comme univers l'ensemble Ω des six numéros. $A = \{1, 6\}$ désigne l'événement : « la face supérieure porte l'un des numéros 1 ou 6 ». On considère de même les événements $B = \{2, 5\}$ et $C = \{3, 4\}$.

Montrer que les trois événements A, B et C ont la même probabilité. En donner la valeur.

2° On donne la raison $r = \frac{1}{30}$ de la progression arithmétique.

a) Calculer $P(i)$ pour chacune des valeurs de i .

b) Calculer la probabilité de l'événement $D = \{2, 4, 6\}$ (« la face supérieure porte l'un des numéros 2, 4 ou 6 »).

TRAVAUX PRATIQUES

PRÉLÈVEMENTS ALÉATOIRES

1. Une urne contient n boules numérotées 1, 2, ..., n . On extrait deux boules simultanément, au hasard.

1° Définir un univers des possibles Ω et calculer son cardinal. Que peut-on dire des résultats possibles?

2° Calculer la probabilité de sortir deux boules dont les numéros ne sont pas consécutifs.

3° On note X le plus grand des deux numéros sortis.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout élément i de E , on désigne par $(X = i)$ l'événement : « le plus grand numéro sorti est i ». Calculer $P(X = i)$.

c) Montrer que les événements $(X = i)_{i \in E}$ forment un système complet d'événements. En déduire une expression simple de la somme des $n - 1$ premiers entiers, puis de la somme des n premiers entiers.

4° On note Y le plus petit des numéros tirés. Reprendre avec Y les questions du 3°.

5° On note S la somme des numéros sortis.

a) Quel est l'ensemble F des valeurs possibles de S ?

b) Pour tout élément k de F , on désigne par $(S = k)$ l'événement : « la somme des numéros sortis est k ». Démontrer que :

$$\text{Card}(S = k) = \text{Card} \left(\mathbb{N}^* \cap \left[k - n, \frac{k}{2} \right] \right).$$

c) Dans le cas $n = 10$, calculer, pour tout élément k de F , $P(S = k)$. Vérifier que $\sum_{k \in F} P(S = k) = 1$. Expliquer ce résultat.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans une urne contenant n boules rouges, n boules noires et n boules blanches, on fait un prélèvement aléatoire de n boules. Les différents prélèvements possibles sont supposés équiprobables.

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° Calculer la probabilité d'un prélèvement monocolore.

3° Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $3 \frac{C_{2n}^n - 2}{C_{3n}^n}$.

4° Calculer la probabilité P_n d'un prélèvement tricolore.

5° a) Calculer P_3, P_5, P_{10} à 10^{-2} près.

b) Démontrer que $C_{3n}^n \geq 3^n$ et que $\frac{C_{2n}^n}{C_{3n}^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. En déduire la limite de P_n .

3. 1° Une urne contient dix boules bleues, dix boules blanches, dix boules rouges et dix boules noires. On en prend quatre au hasard. Calculer la probabilité d'amener une boule de chaque couleur.

2° L'urne contient maintenant quatre boules blanches et huit boules noires. On en prélève sept au hasard. Calculer la probabilité d'amener trois boules blanches au moins.

4. Dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires, on extrait n boules au hasard, simultanément ($0 < n \leq a + b$). On note X le nombre de boules blanches tirées, E l'ensemble des valeurs possibles de X , et, pour tout entier k de E , $(X = k)$ l'événement : « le nombre de boules blanches tirées est k ». On admet que les prélèvements aléatoires sont équiprobables.

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° On suppose $a = 4, b = 6, n = 3$.

a) Déterminer E .

b) Pour tout élément k de E calculer $P(X = k)$. Calculer $\sum_{k \in E} P(X = k)$. Expliquer ce résultat.

c) Calculer les probabilités de tirer au moins une boule blanche, au moins une boule noire, au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

3° Reprendre les questions 2° a et 2° b dans les cas suivants :

a) $a = 4, b = 6, n = 5$; b) $a = 4, b = 6, n = 8$.

5. Dans une urne contenant N boules numérotées $1, 2, \dots, N$, on tire n boules au hasard, simultanément ($1 \leq n \leq N$). On admet que les prélèvements aléatoires possibles sont équiprobables.

1° Définir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal.

2° Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq N$. Quelle est la probabilité que tous les numéros inscrits sur les boules tirées soient inférieurs ou égaux à k ? Pour quelles valeurs de k cette probabilité n'est-elle pas nulle?

3° On note X le plus grand des numéros tirés.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout entier k de E on note $(X = k)$ l'événement : « le plus grand numéro tiré est k ». Calculer $P(X = k)$.

c) Montrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ forment un système complet d'événements. En déduire que :

$$\sum_{k=n}^N C_{k-1}^{n-1} = C_N^n.$$

6. Tirages sans remise

Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a + b = n$). On tire au hasard les n boules, une par une, sans les remettre dans l'urne. On appelle résultat du tirage la n -liste dont le i -ième coefficient ($i = 1, 2, \dots, n$) est B ou N selon que la i -ième boule tirée est blanche ou noire. On admet que les résultats possibles sont équiprobables.

1° Quel est l'univers des possibles Ω et quel est son cardinal?

2° Soit A_i l'événement : la i -ième boule tirée est blanche.

a) Calculer $P(A_i)$ et $P(\bar{A}_i)$.

b) Soit i et j deux entiers distincts de $\mathbb{N}_n$. Calculer : $P(A_i \cap A_j)$, $P(A_i \cup A_j)$, $P(A_i \Delta A_j)$, $P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j)$, $P(\bar{A}_i \cup \bar{A}_j)$, $P(\bar{A}_i \Delta \bar{A}_j)$, $P(A_i \cap \bar{A}_j)$, $P(\bar{A}_i \cap A_j)$, $P(A_i \Delta \bar{A}_j)$, $P(\bar{A}_i \Delta A_j)$.

3° Soit X le rang de la première boule blanche tirée.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X ?

b) Pour tout élément k de E on note $(X = k)$ l'événement : « la première boule blanche tirée l'est au k -ième tirage ». Calculer $P(X = k)$.

c) Démontrer que les événements $(X = k)_{k \in E}$ forment un système complet d'événements. En déduire une relation entre coefficients binomiaux.

d) Lorsque $a = 2$ (et donc $b = n - 2$) déduire de la relation précédente une expression de la somme $1 + 2 + \dots + n - 1$, puis de la somme $1 + 2 + \dots + n$.

e) Exploiter de même le cas particulier $a = 3$.

7. Problème du scrutin

Une urne électorale contient a bulletins de vote pour un candidat A et b bulletins pour le candidat B . On suppose $a > b$. On a effectué le dépouillement en retirant les bulletins un par un, au hasard, et en notant au fur et à mesure le score de chaque candidat.

1° Montrer que l'on peut représenter chaque dépouillement possible par une $(a + b)$ -liste où figurent a coefficients A et b coefficients B . En déduire le nombre des dépouillements possibles.

2° A chaque dépouillement, on peut associer, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le chemin aléatoire $A_0 A_1 A_2 \dots A_{a+b}$ ainsi défini :

- $A_0 = O$;
- si le premier bulletin tiré est pour A (resp. B), $\overrightarrow{A_0 A_1} = \overrightarrow{OI}$ (resp. $\overrightarrow{OJ}$);
- si le i -ième bulletin tiré est pour A (resp. B), $\overrightarrow{A_{i-1} A_i} = \overrightarrow{OI}$ (resp. $\overrightarrow{OJ}$).

Soit C l'ensemble des chemins aléatoires possibles. Le cardinal de C est égal au nombre de dépouillements possibles. Quelles sont les coordonnées du dernier point, A_{a+b} , d'un chemin de C ?

3° On note Δ la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$. On considère la partition $\{C_1, C_2, C_3\}$ de C ainsi définie :

- C_1 est l'ensemble des chemins passant par I et ayant avec Δ le seul point O commun;

- C_2 est l'ensemble des chemins passant par I et ayant avec A au moins un point commun distinct de O ;
- C_3 est l'ensemble des chemins passant par J .
- a) Démontrer que $\text{Card } C_2 = \text{Card } C_3$.
- b) Calculer $\text{Card } C_3$ et en déduire $\text{Card } C_1$.
- 4° Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le candidat A soit constamment en tête?

ÉPREUVE DE BERNOULLI RÉPÉTÉE n FOIS

On rencontre fréquemment des expériences aléatoires dont l'issue est la réalisation, ou la non-réalisation d'un certain événement A . Une telle expérience aléatoire est une *épreuve de Bernoulli*. L'univers des possibles d'une épreuve de Bernoulli est $\{A, \bar{A}\}$.

Exemples :

- jet d'une pièce de monnaie : pile ou face;
- naissance : fille ou garçon;
- présentation à un concours : succès ou échec;
- test de diagnostic d'une maladie : positif ou négatif.

Désignons respectivement par p et q les probabilités des deux résultats possibles, A et $\bar{A}$, d'une épreuve de Bernoulli : $p = P(A)$, $q = P(\bar{A})$. Comme $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, p et q sont tels que $p + q = 1$.

Les réels p et q peuvent être égaux, et dans ce cas $p = q = \frac{1}{2}$ (jet d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée), mais le plus souvent ils sont distincts. Par exemple, lorsque dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires on extrait une boule au hasard, la probabilité qu'elle soit blanche (événement A) est $p = \frac{a}{a+b}$, et la probabilité qu'elle soit noire (événement $\bar{A}$) est $q = \frac{b}{a+b}$; si a et b sont distincts, il en est de même de p et q .

Considérons l'expérience aléatoire consistant à répéter n fois une même épreuve de Bernoulli, dans les mêmes conditions, de telle sorte qu'à chaque épreuve la probabilité d'obtenir A (resp. $\bar{A}$) soit p (resp. $q = 1 - p$).

Identifions chaque résultat possible à la n -liste dont le i -ième coefficient ($i = 1, 2, \dots, n$) est A (resp. $\bar{A}$), si A (resp. $\bar{A}$) est apparu à la i -ième épreuve.

1° Quel est alors l'univers des possibles Ω , et quel est son cardinal?

2° Pour tout résultat possible ω nous admettons que la probabilité de ω est égale au produit $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, où a_i est égal à p ou q selon que le i -ième coefficient de ω est A ou $\bar{A}$. Par exemple si $n = 7$ et si $\omega = (A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A, A, \bar{A})$, $P(\omega) = p \times q \times q \times q \times p \times p \times q = p^3 \times q^4$.

a) Vérifier que la somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à 1.

(Considérer le produit $\Pi = (p + q)(p + q) \dots (p + q)$ de n termes égaux à $p + q$.)

b) A quelle condition les résultats possibles sont-ils équiprobables?

3° Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement : « A est sorti k fois » (et donc « $\bar{A}$ est sorti $n - k$ fois »).

a) Calculer $P(E_0)$, $P(E_1)$, $P(E_n)$.

b) Démontrer que $\text{Card } E_k = C_n^k$ et en déduire $P(E_k)$.

Nous retiendrons :

Lorsqu'on répète n fois une même épreuve de Bernoulli dont l'issue est A ou $\bar{A}$, de manière qu'à chaque épreuve la probabilité d'obtenir A soit p , la probabilité d'obtenir exactement k fois A ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) est $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

c) Lorsque $n = 10$ et $p = 0,35$, programmer le calcul de $P(E_k)$ en fonction de k . En déduire, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$, une valeur approchée de $P(E_k)$. Calculer $\sum_{k=0}^{10} P(E_k)$.

Réponse (HP-11C)

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL A	choix du label du programme
STO 0	place k dans le registre R_0
10 RCL 0 [C_{y,x}]	calcule C_{10}^k
0.35 RCL 0 [y^x]	calcule $0,35^k$
×	calcule le produit $C_{10}^k \times 0,35^k$
0.65 ENTER 10 RCL 0 — [y^x]	calcule $(0,65)^{10-k}$
×	calcule le produit $C_{10}^k \times 0,35^k \times 0,65^{10-k}$
RTN	fin du programme
P/R	retour en mode calcul
7 A	affiche $0,021\ 20 \approx P(E_k)$ (cas $k = 7$)

d) Reprendre la question c) dans les cas suivants :

$$n = 15, p = \frac{3}{8}; \quad n = 20, p = \frac{1}{10}.$$

Quelle conjecture peut-on avancer? Démontrer cette présomption de deux façons différentes : en utilisant un système complet d'événements, en utilisant la formule du binôme.

e) Programmer le calcul de $\sum_{k=0}^n P(E_k)$ en fonction de n et p .

Réponse (HP-11C)

P/R	met en mode programme
PRGM	efface la mémoire programme
LBL B	choix du label du programme
STO 1	place p dans R_1
[x > y] STO 0	place n dans R_0
-1 STO 2	initialise le contenu k de R_2 : $k = -1$
LBL 0	début d'une boucle
1 STO + 2	remplace k par $k + 1$ (dans R_2)
RCL 0 RCL 2 — STO 3	calcule $n - k$ et le place dans R_3
RCL 0 RCL 2 [C_{y,x}]	calcule C_n^k
RCL 1 RCL 2 [y^x]	calcule p^k
×	effectue le produit $C_n^k \times p^k$
1 RCL 1 — RCL 3 [y^x]	calcule $(1 - p)^{n-k}$
×	effectue le produit $C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = P(E_k)$
STO + 4	ajoute $P(E_k)$ au contenu de R_4
RCL 2	appelle k
RCL 0	appelle n

$X > Y$	compare n à k $\left\{ \begin{array}{l} \text{retourne à [LBL] 0 si } n > k \\ \text{sort de la boucle si } n \leq k \end{array} \right.$
GTO 0	fin de la boucle
RCL 4	affiche le contenu de $R_4 : \sum_{k=0}^n P(E_k)$
RTN	fin du programme
P/R	retour en mode calcul
10 ENTER 0.35 A	affiche $1,000\,000\,000 = \sum_{k=0}^{10} P(E_k)$ (cas $n = 10, p = 0,35$)

f) Programmer le calcul de $\sum_{k=0}^n kP(E_k)$ en fonction de n et p .

Vérifier, dans les cas suivants, que cette somme est voisine de np :

$$n = 10, p = 0,2; \quad n = 15, p = 0,7.$$

Démontrer que $\sum_{k=0}^n kP(E_k) = np$. (Développer $(px + q)^n$ à l'aide de la formule du binôme, dériver par rapport à x , puis faire $x = 1$.)

Applications

1. On lance un dé n fois de suite.

1° Calculer la probabilité p_1 d'amener 6 au moins une fois. Déterminer n pour que : $p_1 \geq \frac{1}{2}$.

2° Calculer la probabilité p_2 d'amener 6 au moins deux fois. Déterminer n pour que : $p_2 \geq \frac{1}{2}$.

2. Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois 6 en lançant quatre dés que d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés?

3. Un objectif attaqué par des projectiles d'un type déterminé a , pour chaque projectile tiré, une probabilité constante, p , d'être atteint. Quel est le nombre minimal n de projectiles qu'il faut lancer pour que la probabilité d'atteindre l'objectif au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,95?

Applications numériques : $p = 0,1$; $p = 0,01$.

4. On définit le « sex ratio » d'une espèce comme le quotient s du nombre de naissances d'individus mâles par le nombre de naissances d'individus femelles.

1° Calculer en fonction de s :

a) la probabilité d'avoir un seul individu mâle sur trois naissances;

b) la probabilité d'avoir un seul individu femelle sur trois naissances.

2° Applications numériques : $s = 0,9$; $s = 1$; $s = 1,1$.

5. Une urne contient huit boules numérotées de 1 à 8. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher. Un tirage consiste à extraire simultanément deux boules de l'urne. A chaque tirage, on associe le nombre n égal à la somme des numéros portés par les deux boules tirées.

I — Un joueur procède à un tirage.

1° Quelle est la probabilité p pour qu'il obtienne un nombre n impair?

2° Quelle est la probabilité q pour qu'il obtienne un nombre n pair?

II — Le joueur effectue trois tirages consécutifs avec remise (les deux boules extraites à un tirage étant remises dans l'urne avant de procéder au tirage suivant). A chaque tirage, le joueur obtient un nombre n . Il gagne 1 F si n est impair (gain = 1). Il perd 2 F si n est pair (gain = -2).

Soit G le gain du joueur à l'issue des trois tirages. Déterminer les valeurs possibles de G et la probabilité de chacune de ces valeurs.

6. Une urne contient $(n + 8)$ boules distinctes de trois couleurs :

- n boules bleues (n entier supérieur ou égal à 2);
- 5 boules rouges;
- 3 boules vertes.

1° On tire deux boules de l'urne sans remise et l'on se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité. Une règle du jeu a été établie de la façon suivante :

- on gagne quand on tire deux boules de la même couleur;
- on perd quand on tire deux boules de couleurs distinctes.

Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n de gain, puis la probabilité q_n de perte.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible?

2° On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules comme au 1° en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Calculer, en fonction de n , la probabilité P_n pour obtenir neuf fois, et neuf fois seulement, un tirage de deux boules de la même couleur.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$. Ce résultat était-il prévisible?

7. On jette un dé équilibré autant de fois qu'il est nécessaire pour amener l'as. On note X le nombre de jets nécessaires et pour tout entier k strictement positif on désigne par $(X = k)$ l'événement : « l'as sort pour la première fois au k -ième lancer ». On note $p_k = P(X = k)$.

1° Calculer p_1, p_2, p_3 et, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, p_k .

2° Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Interpréter S_n comme la probabilité d'un événement que l'on définira par une formulation du langage courant.

3° Calculer la limite de S_n , quand n tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir ce résultat?

4° On pose $T_n = \sum_{k=1}^n k p_k$.

a) Programmer le calcul de T_n en fonction de n . On remarquera que $T_n = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^k$.

Réponse (HP-11C)

[P/R]	met en mode programme
[PRGM]	efface la mémoire programme
[LBL] [A]	choix du label du programme
[STO] 0	place n dans R_0
0 [STO] 1	initialise le contenu k de R_1 : $k = 0$
[LBL] 0	début d'une boucle
1 [STO] [+] 1	remplace k par $k + 1$ (dans R_1)
5 [ENTER] 6 [÷] [RCL] 1 [y ^x]	calcule $\left(\frac{5}{6}\right)^k$
[RCL] 1 [×]	appelle k et effectue le produit $k \times \left(\frac{5}{6}\right)^k$
[STO] [+] 2	ajoute $k \times \left(\frac{5}{6}\right)^k$ au contenu de R_2
[RCL] 1	appelle k
[RCL] 0	appelle n
[X>Y]	compare n à k $\begin{cases} \text{retourne à [LBL] 0} & \text{si } n > k \\ \text{sort de la boucle} & \text{si } n \leq k \end{cases}$
[GTO] 0	fin de la boucle
[RCL] 2 5 [÷]	appelle le contenu de R_2 et le divise par 5

RTN

fin du programme

P/R

retour en mode calcul

0 STO 2

vide R_2

10 A

affiche $3,42 \approx T_n$ (cas $n = 10$)

b) Calculer, à l'aide du programme précédent, T_{20} , T_{30} , T_{40} , T_{50} . Quelle hypothèse peut-on faire quant à $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$?

c) On pose $A_n = \sum_{k=1}^n x^k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n kx^k$, tels que $|x| < 1$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{x}{1-x}$. Exprimer $(1-x)B_n$ en fonction de A_n , n et x . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$. L'hypothèse du b) était-elle juste?

8. Pierre jette deux pièces de monnaie; Paul en jette trois. Celui des deux qui amène face le plus de fois gagne. Si les deux joueurs amènent face le même nombre de fois, on recommence l'opération. Calculer la probabilité pour que Pierre gagne. Même question pour Paul.

EXERCICES ET PROBLÈMES

24. Dans un groupe de trente-deux personnes comprenant quatorze femmes et dix-huit hommes, on veut prélever par tirage au sort un comité de quatre personnes.

Calculer la probabilité pour que ce comité soit formé de deux femmes et de deux hommes. Donner une valeur décimale approchée du résultat comportant trois décimales exactes.

25. Un sac contient dix objets : n objets sont noirs $1 < n < 10$; les autres sont blancs. On extrait simultanément deux objets du sac. Les tirages étant équiprobables, quelles sont les probabilités d'obtenir :

a) deux objets de couleurs différentes?

b) deux objets noirs?

c) deux objets blancs?

Calculer n pour que cette dernière probabilité soit égale à $\frac{7}{15}$.

26. On tire deux cartes (simultanément) d'un jeu de trente-deux cartes. Calculer la probabilité pour qu'il y ait :

a) au moins un as;

b) exactement un as;

c) deux as.

27. Deux clubs de football, A et B , ont respectivement dix-huit et quinze joueurs. Le joueur V est du club A , le joueur W du club B . Une équipe de football étant constituée par onze joueurs, calculer la probabilité pour que V joue contre W dimanche prochain.

28. On jette trois dés. Calculer la probabilité pour que la somme des points amenés soit :

a) égale à 16;

b) supérieure à 16;

c) égale à 20;

d) inférieure à 20.

29. 1° Une urne contient a boules vertes et b boules jaunes. On extrait simultanément deux boules. Calculer la probabilité pour qu'elles soient de couleurs différentes.

2° L'urne contient maintenant a boules vertes, b boules jaunes et c boules noires. On en tire trois. Calculer la probabilité pour qu'elles soient de couleurs différentes.

3° Application : $a = 3$, $b = 5$ et $c = 2$.

30. On veut construire un tableau de mots croisés ayant cinq lignes et cinq colonnes. On noircira, au hasard, huit des vingt-cinq cases du tableau, et on considérera que les choix des cases sont équiprobables. 1° De combien de manières peut-on choisir les huit cases noires dans le tableau?

2° Quelle est la probabilité d'obtenir un tableau ainsi constitué : une case noire au centre du carré et une à chacun des sommets, les trois autres cases noires étant à une place quelconque?

3° Quelle est la probabilité d'obtenir, lors d'une épreuve, un tableau dont une colonne est entièrement composée de cases noires, les trois autres cases noires étant à une place quelconque? On donnera, des probabilités demandées, des valeurs décimales approchées exprimées avec cinq décimales.

31. Une urne contient cent billets numérotés de 1 à 100. 1° On extrait de l'urne un billet. Sachant que chaque billet a la même probabilité d'être extrait, quelle est la probabilité d'obtenir un billet dont le numéro est terminé par le chiffre 2?

2° On tire deux billets de l'urne simultanément. Donner le nombre de tirages différents possibles.

3° Ces billets sont utilisés pour une tombola. Chaque billet dont le numéro est terminé par un chiffre 2 donne droit à un lot. On extrait simultanément deux billets de l'urne. Les événements élémentaires attachés à cette expérience sont équiprobables.

Soit A l'événement : « gagner un lot et un seulement ».

Soit B l'événement : « gagner deux lots ».

Soit C l'événement : « gagner au moins 1 lot ».

Calculer la probabilité des événements A , B , et C .

32. On partage un cercle en six parties égales. On obtient les points A, B, C, D, E et F qui sont les sommets consécutifs d'un hexagone régulier. On considère l'ensemble U constitué par ces six lettres.

1° On tire au hasard et simultanément deux lettres dans U . Quelle est la probabilité pour que ces deux lettres désignent deux sommets consécutifs de l'hexagone?

2° On tire maintenant, au hasard et simultanément, trois lettres dans U . Quelle est la probabilité pour que ces trois lettres obtenues désignent les sommets :

a) d'un triangle équilatéral (trois côtés égaux)?

b) d'un triangle isocèle non équilatéral (deux côtés égaux)?

c) d'un triangle rectangle (un côté du triangle doit être diamètre du cercle)?

33. Une cible circulaire est divisée en dix régions par dix cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, ..., 10 cm. Aucune balle ne pouvant sortir de la cible, on appelle événement l'impact d'une balle dans le disque central ou dans une des couronnes circulaires ainsi tracées. On suppose que la probabilité pour que la balle atteigne une région de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. On rappelle que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2 .

1° Quelles sont les probabilités respectives d'atteindre le disque central et chacune des couronnes?

2° On donne dix points si la balle atteint le disque central, neuf si elle atteint la première couronne de rayons 1 et 2 cm, huit si elle atteint la seconde couronne, etc. et un point pour la dernière couronne. Calculer la probabilité d'un score supérieur ou égal à 8.

34. Jean possède, dans le tiroir de son armoire, 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges, mais ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.

Lorsque Jean est en train de s'habiller survient une panne de lumière. Jean qui est pressé et qui n'a pas une lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

1° Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes noires.

2° Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes de même couleur.

3° En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouges restent inchangés, calculer quel devrait être le nombre n de chaussettes noires ($n \in \mathbb{N}^*$) contenues dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\frac{2}{7}$.

35. Soit l'équation du second degré : $x^2 + px + q = 0$. Les coefficients p et q sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le coefficient p est déterminé par un premier jet d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparition. Le coefficient q est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

- a) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines réelles distinctes »;
- b) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines réelles confondues »;
- c) « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines complexes conjuguées ».

36. Un sac contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7. On tire simultanément deux boules du sac. Quelle est la probabilité :

- 1° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs?
 - 2° Pour que les deux boules tirées soient de la même couleur?
 - 3° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs et soient de la même couleur?
 - 4° Pour que les deux boules tirées portent des numéros impairs ou soient de la même couleur?
- (Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.)

37. Un dé cubique a ses faces numérotées de 1 à 6. On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_6$ d'apparition des faces numérotées 1, 2, ..., 6 forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{18}$.

Calculer les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_6$.

Un joueur joue avec ce dé dans les conditions suivantes :

- il gagne 2 F s'il fait apparaître une face portant un nombre pair;
- il perd 3 F s'il fait apparaître une face portant un nombre impair.

Calculer la probabilité de l'événement : « après trois lancers successifs, le joueur a gagné 1 F ».

38. Un sac contient dix jetons respectivement numérotés de 0 à 9. On tire successivement et sans les remettre dans le sac trois jetons. On considère le nombre formé par les trois chiffres obtenus dans l'ordre de leur tirage (on suppose que tous les nombres ainsi obtenus sont équiprobables).

1° Trouver un espace probabilisé fini correspondant à cette épreuve.

2° Soit A l'événement : « le nombre obtenu commence par 15 » et B l'événement, « le nombre obtenu se termine par 7 ». Calculer la probabilité de chacun des événements $A, B, A \cap B$ et $A \cup B$.

39. Un sac renferme huit jetons de forme et de matière identiques dont trois sont blancs et cinq sont noirs. On extrait du sac, au hasard, un par un, quatre jetons que l'on dispose, dans l'ordre où ils sont tirés, dans quatre cases numérotées de 1 à 4. (Le premier jeton est placé dans la case numéro 1, le deuxième dans la case numéro 2, etc.)

Calculer la probabilité de chacun des événements :

- 1° « Les 4 cases sont occupées par des jetons noirs. »
- 2° « Les cases 1 et 3 sont occupées par des jetons blancs, les cases 2 et 4 par des jetons noirs. »

40. (La question 3° peut être traitée indépendamment des deux précédentes.)

On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B et se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

- a) La position initiale (au temps 0) de la particule π est A . Au temps $n, n \in \mathbb{N}^*$, la particule π est soit en A , soit en B .
- b) Entre deux instants successifs, n et $(n + 1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre. Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n .

On ne demande pas d'explicitier d'espaces probabilisés. Mais on peut traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante : Si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « la particule π est en A au temps n » et par B_n l'événement « la particule π est en B au temps n ». Ainsi $A_n \cap A_{n+1}$ est l'événement « la particule π est en A au temps n et aussi en A au temps $(n + 1)$ », etc. Soient respectivement α_n et β_n la probabilité des événements A_n et B_n . On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0, 1[$. Nous exprimons a) et b) par les hypothèses :

- $\alpha_0 = 1, \alpha_n + \beta_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$,
- la probabilité de $A_n \cap A_{n+1}$ est $\theta \alpha_n$, celle de $B_n \cap B_{n+1}$ est $\theta \beta_n$.

1° Calculer, en fonction de θ et β_n , la probabilité de l'événement $B_n \cap A_{n+1}$ (c'est-à-dire l'événement « la particule π est en B au temps n et en A au temps $(n + 1)$ »).

2° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.

3° Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{(2\theta - 1)^n}{2} + \frac{1}{2}$.

Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

41. Soit S l'ensemble $\{1, 2, \dots, q\}$ des entiers naturels compris entre 1 et q . On choisit au hasard une partie B de S , de telle sorte que toutes les parties de S , y compris $\emptyset$ et S , aient la même probabilité p_0 d'être choisies.

1° Choisir un univers des possibles Ω et préciser son cardinal. Quelle est la valeur de p_0 ?

2° Soit A une partie non vide de S à k éléments. Quelles sont les probabilités respectives p_1, p_2, p_3 des événements suivants :

- a) la partie choisie B contient A ;
- b) la partie choisie B est contenue dans A ;
- c) la partie choisie B est telle que $A \cap B \neq \emptyset$?

3° Soient A_1 et A_2 deux parties non-vides, disjointes, de S ayant respectivement k_1 et k_2 éléments. Quelles sont les probabilités p_4, p_5 des événements :

- a) la partie choisie B est telle que $A_1 \cap B \neq \emptyset$ et $A_2 \cap B \neq \emptyset$;
 b) la partie choisie B est telle que $A_1 \cap B \neq \emptyset$ ou $A_2 \cap B \neq \emptyset$.

4° Reprendre les questions 3° a et 3° b lorsque A_1 et A_2 ne sont plus supposées disjointes et que $\text{Card } A_1 = k_1$, $\text{Card } A_2 = k_2$, $\text{Card } A_1 \cap A_2 = k_3$ ($k_3 \leq k_1, k_3 \leq k_2$).

42. Une urne contient n boules noires et n boules blanches.

1° On extrait les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. On note X le rang de la dernière boule noire tirée.

a) Définir un univers des possibles dont les éléments sont équiprobables.

b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

c) Pour toute valeur possible k de X calculer la probabilité de l'événement ($X = k$) (la dernière boule noire tirée l'est au rang k).

d) En déduire que : $C_{2n}^n = \sum_{k=n}^{2n} C_{k-1}^{n-1}$.

2° On suppose maintenant que les boules blanches sont numérotées de 1 à n , ainsi que les boules noires. On tire successivement n boules de l'urne, les boules tirées n'étant pas remises.

Quelle est la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, des boules (noires ou blanches) numérotées 1, 2, ..., n ?

43. Un rectangle est constitué par six cases carrées égales, numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme l'indique la figure ci-dessous. On dispose de six plaquettes carrées, égales à chacune des cases et numérotées de 1 à 6.

1	2	3
4	5	6

1° On place les plaquettes sur les cases, une par case. Combien y-a-t-il de dispositions possibles, se distinguant :

- a) uniquement par la place des plaquettes?
 b) à la fois par leur place et leur orientation?

2° Chaque plaquette coïncidant avec la case de même numéro, on marque en rouge, sur les plaquettes, le périmètre du rectangle qu'elles constituent, puis on les disperse. Quelle est la probabilité qu'en les replaçant au hasard sur les cases, par exemple les yeux fermés, le contour rouge du périmètre se trouve reconstitué?

44. 1° Un sac A contient n jetons numérotés de 1 à n ($2 \leq n \leq 9$); on retire, l'un après l'autre, deux jetons du sac, sans remise.

Exprimer en fonction de n la probabilité p_1 que les chiffres portés par ces deux jetons forment, dans l'ordre de leur tirage, un nombre fixé à l'avance et composé de deux chiffres distincts pris parmi les chiffres de 1 à n .

2° Un autre sac B contient $2m$ jetons numérotés de 1 à $2m$; on extrait deux jetons du sac.

Exprimer en fonction de m la probabilité p_2 que la somme des points portés par ces deux jetons soit égale à $2m + 1$.

3° On considère le jeu suivant : un joueur tire deux jetons du sac A ; si les jetons tirés satisfont à la condition prévue au 1°, le joueur doit remettre son gain en cause, à pile ou face.

a) S'il sort face, il est définitivement gagnant. Exprimer en fonction de n la probabilité p'_1 que la partie se termine ainsi.

b) S'il sort pile, il doit extraire deux jetons du sac B , et il gagne alors la partie si les jetons tirés remplissent la condition prévue au 2°. Exprimer, en fonction de n et de m , la probabilité p'_2 que le joueur gagne la partie à l'issue de ce dernier tirage.

c) Sachant que le jeu cesse quel que soit le résultat de ce dernier tirage, exprimer en fonction de n et de m , la probabilité p , pour le joueur, de gagner la partie d'une manière ou d'une autre.

4° Le jeu a été prévu pour que $p = \frac{1}{58}$. Exprimer m en fonction de n .

5° Sachant que m et n remplissent les conditions $2 \leq m, 2 \leq n \leq 9$, établir à l'aide de l'expression obtenue au 4° la double inégalité :

$$29 < n(n-1) < 39.$$

En déduire la seule valeur possible (entière) de n , puis celle de m (entière).

45. 1° Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{a(x-b)}{x(x-1)}$,

où a et b sont deux réels donnés, $a > 0, b > 1$.

2° Un sac contient 5 jetons rouges, 10 jetons blancs et 7 jetons verts. Un joueur tire au hasard un jeton du sac; si le jeton est rouge, il gagne; si le jeton est blanc, il perd; si le jeton est vert, il doit procéder à un second tirage, le jeton tiré précédemment n'étant pas remis dans le sac. Si, au cours de ce second tirage, le jeton tiré est rouge, le joueur gagne; si le jeton est blanc ou vert, le joueur perd et le jeu cesse.

Calculer les probabilités suivantes :

- a) probabilité p_1 de gagner la partie à l'issue du premier tirage;
 b) probabilité p_2 de gagner la partie à l'issue du second tirage;
 c) probabilité de gagner la partie.

3° Le sac contient en tout x jetons dont 5 rouges et 10 blancs, les autres étant verts. Les modalités du jeu sont les mêmes que précédemment.

Si le joueur gagne au premier tirage, il reçoit 5 F; s'il perd à ce premier tirage, il verse 3 F; s'il gagne au second tirage, il reçoit 4 F; s'il tire un jeton blanc au second tirage, il verse 1 F; enfin si le jeton tiré dans ce second essai est vert, le joueur ne reçoit ni ne verse rien.

On désigne par X le nombre (positif, négatif ou nul) exprimant en francs les gains ou les pertes éventuels du joueur.

- a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X .
 b) Pour chaque valeur x_i de E calculer la probabilité p_i que X prenne la valeur x_i .
 c) On appelle gain moyen du joueur le barycentre m des nombres x_i affectés des coefficients respectifs p_i . En utilisant la question 1°, dégager les valeurs de x pour lesquelles le jeu est favorable au joueur, équitable ou défavorable.

I — APERÇU HISTORIQUE

L'introduction des nombres entiers négatifs est liée à la résolution de l'équation $a + x = b$, où a et b sont deux nombres entiers naturels quelconques.

La résolution de l'équation $ax = b$, où a est un entier naturel non nul et b un entier relatif quelconque conduit aux nombres rationnels.

La représentation des nombres réels par les points d'une droite munie d'un repère met en évidence des nombres non rationnels comme $\sqrt{2}$, π , ..., etc. Ces nombres représentent des longueurs de lignes particulières : $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté a l'unité pour longueur; π est la longueur de la demi-circonférence dont le rayon a pour longueur l'unité.

La résolution d'équations du second degré comme $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$, conduit à la notion de nombre complexe.

A l'origine, Cardan et les algébristes italiens du xvi^e siècle n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$, avec a réel strictement positif. En appliquant les règles usuelles de l'époque, Cardan remarque que l'équation du second degré $x^2 - 10x + 40 = 0$ a pour racines $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Il considérait son résultat comme « aussi subtil qu'inutile » et traitait de « sophistiquées » ces racines de nombres négatifs.

En étudiant l'équation du troisième degré $x^3 + px = q$, Cardan trouve, lorsque p est positif, la racine réelle de cette équation sous la forme :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Il est aisé de vérifier que ce nombre est réel et qu'il est bien solution de l'équation $x^3 + px = q$. De plus, l'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 + px - q$ montre que cette fonction ne s'annule qu'une fois (lorsque $p > 0$).

Pour l'équation $x^3 - 15x = 4$, dont 4 est l'unique racine réelle, comme le montre l'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$, la formule de Cardan donne :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}},$$

ce qui fait apparaître des nombres « impossibles » ou « imaginaires ».

C'est Bombelli qui montre l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$, en procédant ainsi :

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{et} \quad (-2 - \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121},$$

par utilisation de règles de calcul connues dans $\mathbb{R}$; ce qui le conduit à :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4.$$

A l'aide des nombres imaginaires et de la formule de Cardan, il « trouve » la racine réelle de $x^3 - 15x = 4$.

Jusqu'au XVIII^e siècle les nombres imaginaires sont utilisés comme symboles purement formels pour étudier des équations algébriques. C'est au XIX^e siècle, avec Gauss et Cauchy, que les nombres imaginaires trouveront leur représentation à partir de « réalités mathématiques connues ».

On doit à Gauss le premier exposé complet de la représentation des nombres imaginaires par les points d'un plan muni d'un repère orthonormal. Comme on représentait les réels par les points d'une droite munie d'une origine, d'une unité et d'un sens, la « réalité » des nombres imaginaires était ainsi établie; Gauss les appela *nombres complexes* et il utilisa la lettre i pour désigner cet « impossible » $\sqrt{-1}$.

Cauchy remarque qu'effectuer des calculs sur les nombres complexes revient à appliquer aux nombres réels et à un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$, les règles d'opérations dans $\mathbb{R}$. Ainsi lorsque p est un entier naturel non nul i^{2p} est remplacé par $(-1)^p$ et i^{2p+1} par $(-1)^p i$. Si l'on substitue i à x dans l'expression polynômiale :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels, en appliquant la règle précédente on obtient une expression de la forme $a + ib$, où a et b sont réels. Notons que :

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2 \\ &= aa' - bb' + (ab' + ba')i.\end{aligned}$$

II — DÉFINITION DU CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Activité

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit les deux opérations internes suivantes :

- *addition* : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- *multiplication* : $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

1^o Vérifier les propriétés suivantes :

- Associativité de l'addition* : $[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a, b) + [(a', b') + (a'', b'')]$.
- (0, 0) est élément neutre pour l'addition* : $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$.
- (-a, -b) est l'opposé de (a, b)* : $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = (-a, -b) + (a, b)$. L'opposé de (a, b) est aussi noté $-(a, b)$. On a donc $-(a, b) = (-a, -b)$.
- Commutativité de l'addition* : $(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$.
- Associativité de la multiplication* : $[(a, b)(a', b')](a'', b'') = (a, b)[(a', b')(a'', b'')]$.
- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition* :

$$(a, b)[(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'')$$

$$\text{et} \quad [(a', b') + (a'', b'')](a, b) = (a', b')(a, b) + (a'', b'')(a, b).$$

- (1, 0) est élément neutre pour la multiplication* : $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$.

- Commutativité de la multiplication* : $(a, b)(a', b') = (a', b')(a, b)$.

- Tout élément (a, b) distinct de (0, 0) admet pour inverse* $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$:

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)(a, b) = (1, 0).$$

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés précédentes, on dit que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations un corps. On l'appelle corps des nombres complexes et on le note $\mathbb{C}$.

2° On pose $i = (0, 1)$. Vérifier $i^2 = -(1, 0)$; i^2 est donc l'opposé de l'élément neutre pour la multiplication.

3° a) Démontrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté $\mathbb{R}_1$, formé des couples de la forme $(a, 0)$ contient la somme et le produit de deux quelconques de ses éléments et contient l'inverse de chacun de ses éléments non nuls (c'est-à-dire différent de $(0, 0)$). En déduire que $\mathbb{R}_1$ muni de l'addition et de la multiplication est un corps. On dit que $\mathbb{R}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

b) On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_1 : a \mapsto (a, 0)$. Démontrer que φ est bijective, que $\varphi(1) = (1, 0)$ et que, quels que soient a et a' de $\mathbb{R}$:

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a') \quad \text{et} \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a').$$

On dit que φ est un **isomorphisme** du corps $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}_1$ et que $\mathbb{R}_1$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

est un corps commutatif, d'élément unité $(1, 0)$, appelé corps des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.

Le corps $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{R}$; de plus l'élément $(0, 1)$, noté i , est tel que $i^2 = -(1, 0)$.

NOTATION $a + ib$

Soit $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des complexes de la forme $(a, 0)$, où a est un réel.

La bijection φ de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}$ qui, à tout élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$ associe le réel a permet d'identifier les éléments de $\mathbb{R}_1$ à ceux de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de noter a l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$. Pour tout couple (a, b) on a : $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$, soit en utilisant l'identification précédente et la notation $i = (0, 1)$: $(a, b) = a + ib$.

Tout nombre complexe s'écrit donc sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels. Cette écriture est évidemment unique puisque l'égalité $a + ib = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels signifie que $(a, b) = (a', b')$, c'est-à-dire que $a = a'$ et $b = b'$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 2 et DÉFINITION 2

Pour tout nombre complexe z , il existe un couple (a, b) de réels et un seul tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z et sont notés $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

A noter que le nombre complexe $a + ib$, avec a et b réels, est nul si, et seulement si, $a = b = 0$.

Les nombres complexes *non nuls* de la forme iy , où y est un réel non nul, sont appelés **imaginaires purs**.

L'égalité $(iy)^2 = -y^2$ montre que le carré d'un nombre imaginaire pur est un réel strictement négatif.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Rapportons le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout nombre complexe z on associe le point M de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dans le repère $\mathcal{R}$; on dit que M est le **point-image** de z (figure 1).

Tout point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$ est évidemment l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de M .

Les nombres réels ont pour images les points de l'axe $x'Ox$ de repère $(O, \vec{e}_1)$ appelé **axe réel**.

Par exemple, l'image du réel 1 est le point $A(1, 0)$.

Les nombres imaginaires purs ont pour images les points de l'axe $y'Oy$, privé de O , de repère $(O, \vec{e}_2)$, appelé **axe imaginaire**.

Ainsi l'image de i est le point $B(0, 1)$.

A tout nombre complexe z , on peut aussi associer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

On dit que $\vec{u}$ est le **vecteur-image** de z .

Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ de coordonnées (a, b) est l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de $\vec{u}$.

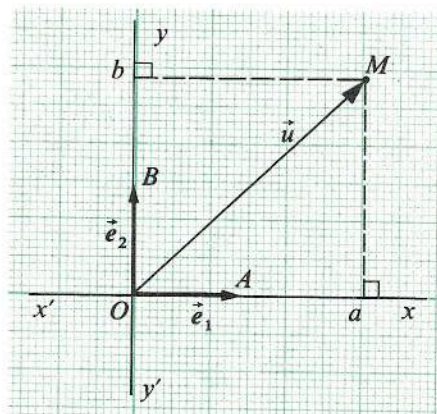


Figure 1

RÈGLES DE CALCULS DANS $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calculs concernant l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ s'appliquent à $\mathbb{C}$ qui, comme $\mathbb{R}$, est un corps commutatif.

En particulier :

1. La **différence** $z - z'$ de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe $z + (-z')$, où $-z'$ désigne l'opposé de z' .

Si z et z' sont les affixes de M et M' , $z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M}$.

2. Quels que soient les complexes z, z', z'' , on a :

$$z(z' - z'') = zz' - zz''.$$

3. Pour tout complexe z et pour tout entier naturel n on définit z^n par :

$$z^0 = 1 \quad (\text{si } z \text{ est non nul}), \quad z^1 = z, \quad z^2 = zz, \dots, \quad z^{n+1} = z^n z.$$

Quels que soient les entiers naturels n et p : $z^n z^p = z^{n+p}$ et $(z^n)^p = z^{np}$.

4. Quels que soient les complexes z_1 et z_2 :

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}(a + ib)^2 &= a^2 - b^2 + 2abi \\ (a - ib)^2 &= a^2 - b^2 - 2abi \\ (a + ib)(a - ib) &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Quel que soit l'entier naturel non nul n :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + z_1^{n-3}z_2^2 + \dots + z_1z_2^{n-2} + z_2^{n-1}).$$

En particulier : $1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$

5. Formule du binôme de Newton

Étant donnés deux nombres complexes z_1 et z_2 et un entier naturel n :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k,$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et où l'on convient de poser $z_1^0 = 1$ et $z_2^0 = 1$, même si z_1 et z_2 sont nuls. Par exemple : $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3.$

6. L'inverse de tout complexe *non nul* est noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}.$

• Si $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Nous retiendrons :

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

• Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}.$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2 \dots z_n$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2 \dots z_n} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} \times \dots \times \frac{1}{z_n}.$$

En particulier, si z est un complexe *non nul* et n un entier naturel :

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

On note $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$. Avec cette convention et la convention $z^0 = 1$, on a :

• pour tout complexe z non nul et pour tout couple (p, q) d'entiers relatifs :

$$z^p z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq};$$

• pour tout couple (z_1, z_2) de complexes non nuls et pour tout entier relatif p :

$$(z_1 z_2)^p = z_1^p z_2^p.$$

7. Étant donnés deux nombres complexes α et β tels que $\beta \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z tel que $\alpha = \beta z$, à savoir $z = \beta^{-1} \alpha$.

En effet, si le nombre complexe z_1 satisfait $\alpha = \beta z_1$, on obtient en multipliant par β^{-1} les deux membres de cette égalité : $\beta^{-1}\alpha = \beta^{-1}(\beta z_1)$, d'où $\beta^{-1}\alpha = (\beta^{-1}\beta)z_1$, et par suite $z_1 = \beta^{-1}\alpha$. De plus, $\alpha = \beta(\beta^{-1}\alpha)$.

Le nombre complexe $\beta^{-1}\alpha$ est aussi noté $\frac{\alpha}{\beta}$; on l'appelle le **quotient** de α par β .

■ Exercices résolus

1. Calculer de deux façons $(1+i)^8$ et en déduire une expression simple de :

$$S_1 = 1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$$

et de :

$$S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7.$$

On a : $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4$ et $(1+i)^2 = 2i$,

donc : $(1+i)^8 = (2i)^4 = 2^4(i^2)^2 = 2^4(-1)^2 = 2^4$.

Ainsi : $(1+i)^8 = 16$.

Par ailleurs $(1+i)^8 = 1 + C_8^1 i + C_8^2 i^2 + C_8^3 i^3 + C_8^4 i^4 + C_8^5 i^5 + C_8^6 i^6 + C_8^7 i^7 + C_8^8 i^8$.

Compte tenu de $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$, on obtient :

$$(1+i)^8 = S_1 + iS_2.$$

Donc :

$$S_1 = 16 \quad \text{et} \quad S_2 = 0.$$

2. Démontrer que les vecteurs ayant pour affixes $1-i$ et $1+i$ forment une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$ (figure 2). Trouver les composantes du vecteur ayant pour affixe $3-i$ dans cette nouvelle base.

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $1-i$ et par $\vec{v}$ celui d'affixe $1+i$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls. S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel t tel que $\vec{v} = t\vec{u}$. Comme le vecteur $t\vec{u}$ a pour affixe $t(1-i)$, on aurait :

$$1+i = t(1-i)$$

soit $t = 1$ et $t = -1$, ce qui est impossible.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont donc non colinéaires : ils forment une base de $\mathcal{V}$.

Désignons par $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $3-i$. ($\vec{u}, \vec{v}$) étant une base de $\mathcal{V}$, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, c'est-à-dire $3-i = a(1-i) + b(1+i)$.

Il s'ensuit $a+b=3$ et $b-a=-1$, d'où $a=2$ et $b=1$.

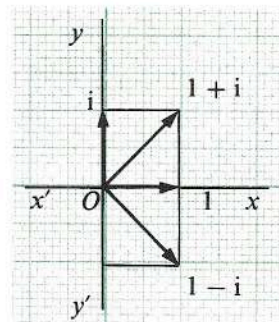


Figure 2

3. Résoudre l'équation $z^2 = a$ sur $\mathbb{C}$, où a est un réel donné.

• Si $a = 0$, la solution est 0.

• Si $a > 0$, $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$; les solutions sont donc $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

• Si $a < 0$, $z^2 - a = z^2 - (i\sqrt{-a})^2$

$$= (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a});$$

les solutions sont donc $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

4. Factoriser sur $\mathbb{C}$ les expressions suivantes : $z^2 + 4$ et $z^4 - 1$.

On a : $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$.

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

5. Soient les quatre points A, B, C, D , d'affixes respectives $1 + i, 1 - i, -i, -1$. Trouver l'affixe g du barycentre G de $(A, 1), (B, 2), (C, -4), (D, 3)$.

On a : $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OD}$,

d'où $2g = 1 + i + 2(1 - i) + 4i - 3$, soit $g = \frac{3}{2}i$.

Activité

1° Programmer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Réponse (TI-62)

[CP]		efface les programmes antérieurs
[LRN] 1		mise en mode programme
[LBL] 1		label de la séquence $z + z'$
[RCL] 1 [+] [RCL] 3 [=] [R/S]		calcule $a + a'$
[RCL] 2 [+] [RCL] 4 [=] [R/S]		calcule $b + b'$
[LBL] 2		label de la séquence zz'
[RCL] 1 [×] [RCL] 3 [-] [RCL] 2		
[×] [RCL] 4 [=] [R/S]		calcule $aa' - bb'$
[RCL] 1 [×] [RCL] 4 [+] [RCL] 2		
[×] [RCL] 3 [=] [R/S]		calcule $ab' - ba'$
[LBL] 3		label de la séquence $\frac{z}{z'}$
[(] [RCL] 1 [×] [RCL] 3 [+] [RCL] 2		
[×] [RCL] 4 [)]		calcule $aa' + bb'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x ²]		
[+] [RCL] 4 [x ²] [)] [=] [R/S]		divise $aa' + bb'$ par $a'^2 + b'^2$
[(] [RCL] 2 [×] [RCL] 3 [-] [RCL] 1		
[×] [RCL] 4 [)]		calcule $ba' - ab'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x ²]		
[+] [RCL] 4 [x ²] [)] [=] [R/S]		divise $ba' - ab'$ par $a'^2 + b'^2$

Exemple d'exécution : $z = 2 - 4i, z' = 3 + 5i$

[LRN]		retour en mode calcul
2 [STO] 1 [-] 4 [STO] 2 3 [STO] 3 5 [STO] 4		entrée des données a, b, a', b'
[GTO] 1 [R/S]		affiche $a + a' = 5$
[R/S]		affiche $b + b' = 1$
[GTO] 2 [R/S]		affiche $aa' - bb' = 26$
[R/S]		affiche $ab' - ba' = -2$
[GTO] 3 [R/S]		affiche $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \approx -0,412$
[R/S]		affiche $\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \approx -0,647$

2° Utiliser ce programme pour vérifier les résultats des calculs demandés dans l'exercice d'application 1 (ci-dessous).

3° Programmer le calcul de $(a + ib)^n$, où a et b sont des réels et n un entier naturel.

Réponse (TI-62)

Si on pose, pour tout entier $k \in \mathbb{N}_n$, $(a + ib)^k = A_k + iB_k$, on a :

$$A_k = aA_{k-1} - bB_{k-1} \quad \text{et} \quad B_k = aB_{k-1} + bA_{k-1}.$$

Le programme consiste à calculer successivement A_2 et B_2 , A_3 et B_3 . Pour cela on utilise la fonction [DSZ] de commande automatique de boucles qui opère de la façon suivante :

- le contenu k de la mémoire 0 (M_0) est d'abord diminué d'une unité (décrémentement $k \leftarrow k - 1$);
- ensuite, si $k - 1 \neq 0$, le programme se poursuit avec l'instruction qui suit [DSZ];
- si $k - 1 = 0$, le programme se poursuit en sautant l'instruction qui suit [DSZ].

[CP]	efface les programmes antérieurs
[LRN]	mise en mode programme
[STO] 0	entre n dans la mémoire M_0
[LBL] 0	début d'une boucle
[RCL] 1 [X] [RCL] 3 [-] [RCL] 2	
[X] [RCL] 4 [=] [STO] 5	calcule A_k et place A_k dans la mémoire M_5
[RCL] 1 [X] [RCL] 4 [+] [RCL] 2	
[X] [RCL] 3 [=] [STO] 4	calcule B_k et place B_k dans la mémoire M_4
[RCL] 5 [STO] 3	place A_k dans la mémoire M_3
[DSZ]	remplace k par $k - 1$ et compare $k - 1$ à 0
[GTO] 0	renvoie à [LBL] 0 si $k - 1 \neq 0$
[RCL] 3 [R/S]	si $k - 1 = 0$, affiche le contenu de M_3
[RCL] 4 [R/S]	affiche le contenu de M_4
[RST]	place le pointeur en 0 pour l'exécution

Exemple d'exécution : calcul de $(2 + i)^{18} = A + iB$

[LRN]	retour en mode calcul
[CM]	efface les mémoires
2 [STO] 1 1 [STO] 2 1 [STO] 3 0 [STO] 4	entre 2, 1, 1, 0 dans les mémoires 1, 2, 3, 4
18 [R/S]	entre $n = 18$ et affiche $A = -922\,077$
[R/S]	affiche $B = 1\,721\,764$

Exercices d'application

1. Effectuer les calculs suivants en présentant les résultats sous la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &(1 + i)^2; \quad (1 - i)^2; \quad (2 + 3i)^2; \\ &(2 - 3i)^2; \quad (3 + 4i)(3 - 4i); \\ &(1 + i)^3; \quad (1 - i)^3; \quad (3 + 2i)^3; \\ &\frac{i - 5}{3 + 5i}; \quad \frac{3 + i}{2 - i} + \frac{2 - i}{3 + i}; \end{aligned}$$

$$\frac{i - 4}{2 + 5i} + \frac{2 + 3i}{1 - i}; \quad \frac{4 + 5i}{2 - i} - \frac{1 - 3i}{1 + i}.$$

2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer :

$$j^2, \quad 1 + j + j^2, \quad \frac{1 + j}{(1 - i)^2} + \frac{1 - j}{(1 + i)^2}.$$

3. On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}.$$

Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^2 + z_2^2, \quad z_1^3 + z_2^3.$$

4. Calculer : $1 + i + i^2 + \dots + i^n$.

5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes $1, iz$ soient alignés avec M .

6. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes $1, z, z^2$ soient alignés.

7. A tout point M on associe son affixe z et le nombre complexe $Z = z^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

- a) $Z \in \mathbb{R}_+$;
- b) $Z \in \mathbb{R}_-$;
- c) $Z \in \mathbb{R}$;
- d) Z soit imaginaire pur.

8. Reprendre l'exercice précédent avec :

$$Z = z^3.$$

9. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\text{a) } \operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = 0; \quad \text{b) } \operatorname{Im} \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = 0.$$

10. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3).$$

III — MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

DÉFINITION 3

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels, est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points-images de z et $\bar{z}$ sont **symétriques** par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées (figure 3).

Activité

1° Montrer que l'application $\delta : z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés :

a) Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\delta(z + z') = \delta(z) + \delta(z'), \quad \delta(z z') = \delta(z) \delta(z'), \\ \delta(\delta(z)) = z;$$

b) δ est bijective.

c) Pour que le nombre complexe z soit invariant par δ (c'est-à-dire $\delta(z) = z$) il faut et il suffit que z soit réel.

2° Montrer que les seules bijections f de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ laissant chaque réel invariant et telles que pour tous complexes z, z' : $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(z z') = f(z) f(z')$, sont δ et l'application identique de $\mathbb{C}$.

3° Montrer que si z est un nombre complexe non nul $\delta\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\delta(z)}$.

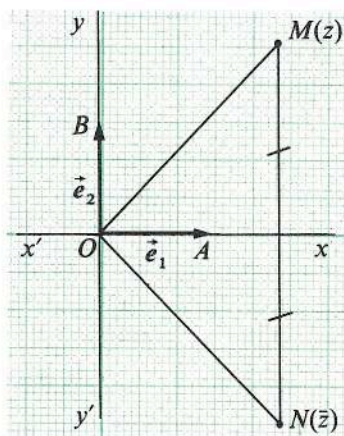


Figure 3

Nous retiendrons :

$$\begin{aligned}
 z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re}(z) \\
 z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im}(z) \\
 \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\
 \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}' \\
 \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \\
 z \text{ est réel si, et seulement si, } z &= \bar{z}
 \end{aligned}$$

Conséquence

Soit $P(z)$ une expression polynomiale en z à coefficients réels :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont réels et z complexe. On a :

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n}.$$

Comme $\overline{z^k} = \bar{z}^k$ et $\bar{a}_k = a_k$, on obtient : $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k$, d'où $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, il s'ensuit que $0 = \overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0)$.

On retiendra :

Si un nombre complexe z_0 est racine d'un polynôme P à coefficients réels, son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi racine de P .

Exemples

1. Soit : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors : $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$.

De plus : $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0$, c'est-à-dire : $j^2 + j + 1 = 0$.

Considérons $P(z) = z^2 + z + 1$, j est racine de $P(z)$ et, P étant à coefficients réels, $\bar{j}$ est racine de $P(z)$.

D'où $P(z) = (z - j)(z - \bar{j}) = (z - j)(z - j^2)$, puisque le coefficient de z^2 est 1.

2. Considérons $Q(z) = z^4 + z^2 + 1$.

On constate que $Q(j) = j^4 + j^2 + 1$ et que $j^3 = j\bar{j}^2 = \bar{j}$, donc :

$$Q(j) = j + j^2 + 1 = 0.$$

Par suite, j est racine de $Q(z)$. Comme $Q(-z) = Q(z)$ et que Q est à coefficients réels, $-\bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont aussi racines de $Q(z)$. Les nombres complexes j , $-\bar{j}$, j^2 et $-j^2$ étant distincts et le coefficient de z^4 étant 1, on obtient :

$$Q(z) = (z - j)(z - \bar{j})(z + j)(z + \bar{j}).$$

On a ainsi factorisé $Q(z)$ dans $\mathbb{C}$.

De plus : $(z - j)(z - \bar{j}) = z^2 - (j + \bar{j})z + 1$,

et : $(z + j)(z + \bar{j}) = z^2 + (j + \bar{j})z + 1$.

Donc : $Q(z) = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$.

Soit $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. On a ainsi factorisé $x^4 + x^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour tout nombre complexe z écrit sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels, on a :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Le produit $z\bar{z}$ est donc un réel positif.

DÉFINITION 4

On appelle **module d'un nombre complexe z** , le nombre réel positif, noté $|z|$, et défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

A noter que le module de z est égal à la distance de l'origine O du repère à l'image M de z : $|z| = OM$.

A noter aussi que si z est réel, son module n'est autre que sa valeur absolue.

Propriétés

1. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
2. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
3. $|z| = |-z|$, $|z| = |\bar{z}|$.
4. $|zz'| = \sqrt{zz'\bar{z}\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}z'\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z}'} = |z||z'|$.
Il s'ensuit, pour tout entier naturel n : $|z^n| = |z|^n$.

5. Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives M et M' et soit S l'image de $z + z'$ (figure 4).

L'inégalité triangulaire appliquée aux trois points O, M, S donne :

$$OS \leq OM + MS,$$

soit $OS \leq OM + OM'$. Il en résulte : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Donnons de cette inégalité une démonstration algébrique :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}');$$

d'où :

$$|z + z'|^2 = z\bar{z} + z'\bar{z}' + (z\bar{z}' + \bar{z}z'). \quad (1)$$

Comme $\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}\bar{z}'$, on a $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')$.

Or :

$$2 \operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| = 2|z||z'|.$$

Ainsi, en majorant le deuxième membre de l'inégalité (1), on obtient :

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|, \text{ c'est-à-dire } |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Plus généralement : $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

REMARQUE : On utilise souvent l'inégalité : $||z| - |z'||| \leq |z - z'|$, qui se démontre en remarquant que $z = (z - z') + z'$ et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|z| = |(z - z') + z'| \leq |z - z'| + |z'|, \text{ soit } |z| - |z'| \leq |z - z'|.$$

En échangeant les rôles de z et z' , on a aussi $|z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|$, d'où le résultat. Cette inégalité exprime que la longueur d'un côté d'un triangle est supérieure ou égale à la différence des deux autres.

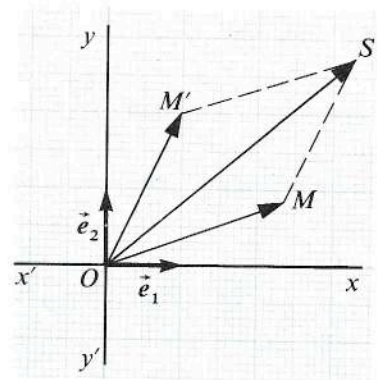


Figure 4

6. Pour tout complexe *non nul* z on a : $1 = \left| z \frac{1}{z} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right|$, d'où $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$. Par conséquent :

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \left| z' \frac{1}{z} \right| = |z'| \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}.$$

Pour tout nombre entier relatif p et tout nombre complexe non nul z , on a :

$$|z^p| = |z|^p.$$

7. Calcul de l'inverse d'un nombre complexe *non nul* z : $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Par suite :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Exemple : $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.$

8. Un nombre complexe z est de module 1 si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

En effet $|z| = 1$ signifie $z\bar{z} = 1$, soit $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Nous retiendrons :

$ \operatorname{Re}(z) \leq z \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \leq z $ $ z = 0 \quad \text{équivaut à} \quad z = 0$ $ zz' = z z' \quad \text{et} \quad \left \frac{z'}{z} \right = \frac{ z' }{ z }$ $ z + z' \leq z + z' $ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ $ z = 1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$

■ Exercice résolu

Déterminer les nombres complexes z tels que $z, \frac{1}{z}, z-1$ aient même module.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1|$.

On a $|z| = \frac{1}{|z|}$, d'où $|z| = 1$.

Ainsi $|z-1| = 1$, soit $(z-1)(\bar{z}-1) = 1$.

D'où $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$.

Comme $|z| = 1$, on a $z\bar{z} = 1$ et, par suite, $z + \bar{z} = 1$.

En posant $z = x + iy$, avec x et y réels, on obtient $x = \frac{1}{2}$.

De plus, $x^2 + y^2 = 1$, d'où $y^2 = \frac{3}{4}$.

Finalement, si $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1|$, alors $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que les nombres complexes $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ satisfont les conditions demandées.

● Exercices d'application

11. Démontrer que, si λ est réel, le nombre complexe $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ a pour module 1.

Étudier la réciproque.

12. Calculer z pour que l'on ait :

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1.$$

13. Démontrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel si $|u|=1$.

Étudier la réciproque.

14. z, z' désignent des nombres complexes. Montrer que :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

15. Déterminer les nombres complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $1+z$ aient même module.

16. Déterminer z pour que $z^2, 1-z, \bar{z}$ aient même module.

17. 1° Étant donnés les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3 , montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si :

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1.$$

2° Étant donnés les complexes distincts a et b de module 1, soit A et B leurs images respectives. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à la droite (AB) si, et seulement si :

$$z + ab\bar{z} = a + b.$$

3° Soit a, b, c, d des nombres complexes de module 1 tels que $a \neq b$ et $c \neq d$, d'images respectives A, B, C, D . Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$ab = -cd.$$

IV — ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Avant d'aborder cette partie, il est indispensable de revoir les notions d'angles de vecteurs et d'égalité modulo 2π développées au début du chapitre 7.

NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Soit z un nombre complexe de module 1.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, désignons par M l'image de z (figure 5). Les coordonnées (a, b) du point M s'expriment en fonction de toute mesure θ en radians de l'angle de vecteurs $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ par :

$$a = \|\overrightarrow{OM}\| \cos \theta = \cos \theta,$$

$$b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin \theta = \sin \theta.$$

D'où : $z = \cos \theta + i \sin \theta$.

Réciproquement, pour tout réel α tel que $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, on a :

$$\cos \alpha = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \sin \theta;$$

d'où $\alpha = \theta + 2k\pi$, ce qui montre que α est une mesure en radians de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

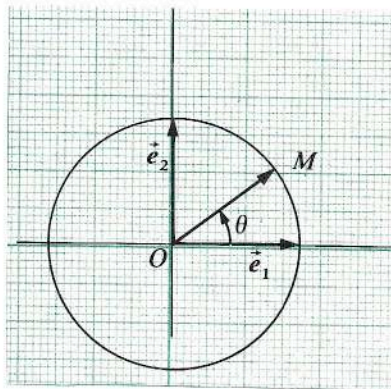


Figure 5

DÉFINITION 5
et
THÉORÈME 3

On appelle argument d'un nombre complexe z de module 1, tout réel θ tel que :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta.$$

L'ensemble des arguments de z est l'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$, où M est l'image de z dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Si θ est un argument de z , on note $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$, ce qui rappelle que tout argument de z , noté $\arg z$, est égal à θ modulo 2π .

Propriétés

1. Nous constatons que si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, zz' est de module 1 et $\frac{1}{z} = \bar{z}$ est de module 1. Par suite :

L'ensemble U des nombres complexes de module 1 contient le produit de deux, quelconques, de ses éléments et l'inverse de chacun de ses éléments.

2. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.

Si $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$ et $\arg z' = \theta' \pmod{2\pi}$, on a :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{et} \quad z' = \cos \theta' + i \sin \theta'.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc :} \quad zz' &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') \\ &= \cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta'). \end{aligned}$$

Ainsi (figure 6) :

$$\arg zz' = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$$

3. L'égalité $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos (-\theta) + i \sin (-\theta).$$

Elle montre que pour tout complexe z de module 1, on a : $\arg \frac{1}{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$.

De plus, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Finalement :

$$\text{si } |z| = 1, \quad \arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$$

Il en résulte que si $|z| = 1$, les images de z et de $\frac{1}{z}$ sont symétriques par rapport à $x'Ox$ (figure 7).

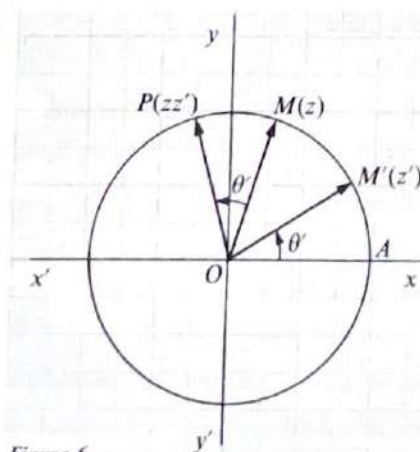


Figure 6

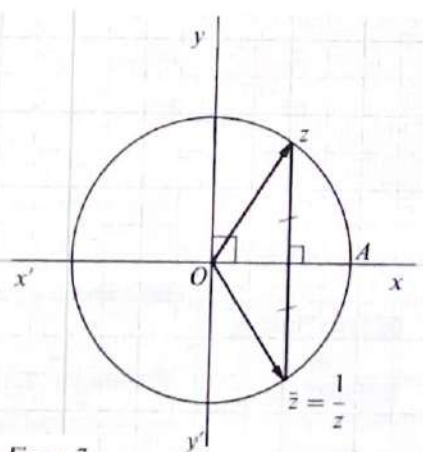


Figure 7

FORMULES DE MOIVRE

Nous avons remarqué :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta').$$

Plus généralement, on démontre par récurrence que :

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \dots (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n). \quad (1)$$

Si, dans l'égalité (1) les réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont égaux à θ , on obtient :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

De plus, quel que soit l'entier naturel n :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} &= \left(\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \right)^n = (\cos \theta - i \sin \theta)^n \\ &= (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta). \end{aligned}$$

Il en résulte, quel que soit l'entier relatif p :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^p = \cos p\theta + i \sin p\theta$$

Cette formule est appelée **formule de Moivre**. Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient :

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^p = \cos p\theta - i \sin p\theta$$

Exemples

- 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument 0.
- i est le nombre complexe de module 1 d'argument $\frac{\pi}{2}$.
- $-i$ est le nombre complexe de module 1 d'argument $-\frac{\pi}{2}$.
- -1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument π .
- $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; $i^2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$;
 $i^3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$; $i^4 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$.

Plus généralement : $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

- Si j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$\begin{aligned} j &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \\ j^2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}, \\ j^3 &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi, \text{ soit :} \\ j &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^3 = 1. \end{aligned}$$

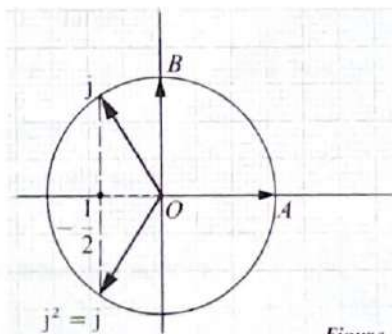


Figure 8

Par suite : $j^{3n} = 1, j^{3n+1} = j, j^{3n+2} = j^2.$

A noter que : $1 + j + j^2 = 0.$

REMARQUE : Si n est un entier naturel non nul et k un entier relatif on a :

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Pour tout nombre complexe *non nul* z , le quotient $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1.

DÉFINITION 6

On appelle argument d'un nombre complexe z *non nul* tout argument du quotient $\frac{z}{|z|}$.

Si θ est un argument de z , on a $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$, d'où :

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

C'est l'écriture **trigonométrique** du nombre complexe non nul z .

Si θ est un argument de z , l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels égaux à θ modulo 2π . On note :

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi}.$$

Interprétation géométrique

Désignons par M l'image du nombre complexe non nul z et par N l'image de $\frac{z}{|z|}$ (figure 9).

Les arguments de z sont les mesures en radian de l'angle $(\vec{e}_1, \vec{ON})$, c'est-à-dire les mesures de l'angle $(\vec{e}_1, \vec{OM})$.

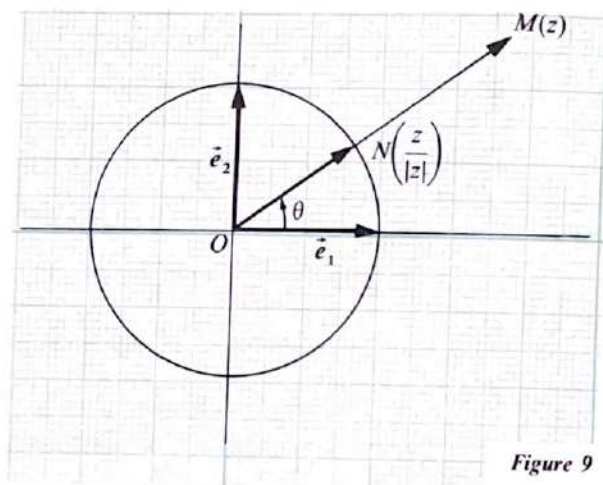


Figure 9

Égalité de deux nombres complexes

Pour que deux nombres complexes z et z' soient égaux, il faut et il suffit que :

$$|z| = |z'| = 0 \quad \text{ou} \quad (|z| = |z'| \neq 0 \quad \text{et} \quad \arg z = \arg z' \pmod{2\pi})$$

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

En effet, si z et z' ne sont pas nuls et vérifient $|z| = |z'| = r$ et $\arg z = \arg z' \pmod{2\pi}$, posons $\theta = \arg z$ et $\theta' = \arg z'$.

On a : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$,

soit : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r(\cos \theta' + i \sin \theta')$.

De plus, il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$; donc :

$$\cos \theta' = \cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin \theta' = \sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta.$$

Par suite, $z' = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, d'où $z = z'$.

Recherche d'une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1° Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe non nul.

On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$; donc $\frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$, on a $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, d'où :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Par suite : $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

La connaissance de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ détermine les arguments θ de z .

2° Soit $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, où ρ est un nombre réel :

- Si $\rho = 0$, $z = 0$.
- Si $\rho > 0$, $|z| = \rho$ et $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.
- Si $\rho < 0$, $z = (-\rho)(-\cos \theta - i \sin \theta)$
 $= (-\rho)(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)).$

Donc : $|z| = -\rho$ et $\arg z = \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Propriétés

1. Soit z et z' des nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta').$$

On a : $zz' = |z||z'|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$, d'où :

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')).$$

Ainsi :

$$\arg zz' = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$$

2. Plus généralement, si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n \pmod{2\pi}.$$

En particulier, si z est un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul :

$$\arg z^n = n \arg z \pmod{2\pi}$$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

On a : $zz^{-1} = 1$, $\arg 1 = 0 \pmod{2\pi}$; donc $\arg zz^{-1} = 0 \pmod{2\pi}$.

Or : $\arg zz^{-1} = \arg z + \arg z^{-1} \pmod{2\pi}$; par suite, $\arg z + \arg z^{-1} = 0 \pmod{2\pi}$,

d'où :

$$\arg z^{-1} = -\arg z \pmod{2\pi}$$

4. Soit z un nombre complexe non nul, $\bar{z}$ son conjugué et M et N leurs points-images respectifs. On a (figure 10) :

$$(\vec{e}_1, \overrightarrow{ON}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad (2\pi)$$

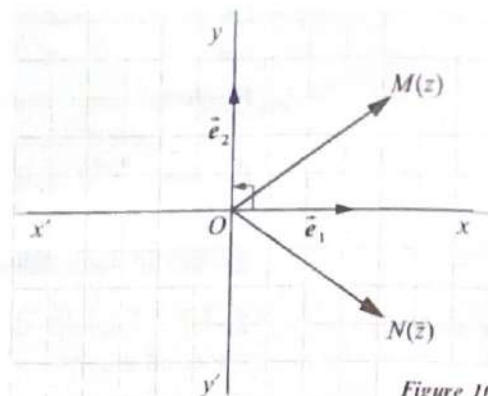


Figure 10

5. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg z \left(\frac{1}{z'} \right) = \arg z + \arg \frac{1}{z'} \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)$$

Il en résulte, pour tout entier naturel n non nul : $\arg \frac{1}{z^n} = -\arg z^n \quad (2\pi)$, et donc :

$$\arg \frac{1}{z^n} = -n \arg z \quad (2\pi)$$

Comme on a posé $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$ et $z^0 = 1$, on a pour tout entier relatif p :

$$\arg z^p = p \arg z \quad (2\pi)$$

6. Les nombres réels positifs non nuls sont les nombres complexes d'argument 0.

Les nombres réels négatifs non nuls sont les nombres complexes d'arguments π .

Les nombres complexes imaginaires purs sont les nombres complexes d'arguments $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $z' - z$

Soit z et z' deux nombres complexes distincts d'images respectives M et M' dans le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et soit N l'image de $z' - z$ (figure 11).

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{MM'}, \quad |z' - z| = ON, \\ \arg(z' - z) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) \quad (2\pi). \end{aligned}$$

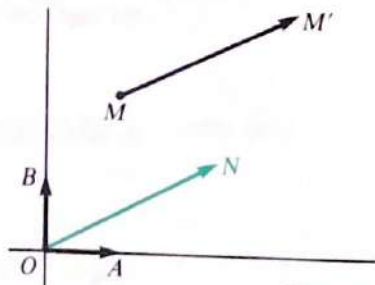


Figure 11

Par suite :

Pour tous nombres complexes distincts z et z' d'images respectives M et M' , on a, A étant l'image du nombre 1 :

$$|z' - z| = MM' \quad \text{et} \quad \arg(z' - z) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) \quad (2\pi).$$

Activité

Considérons trois nombres complexes z, z_1, z_2 d'images respectives M, M_1, M_2 dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On suppose $z \neq z_1$ et $z \neq z_2$.

1° Démontrer :

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \frac{MM_1}{MM_2} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = (\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}) \quad (2\pi).$$

2° On suppose $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = i$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = 3;$

b) $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi);$

c) $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = 3 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$

NOTATION $e^{i\theta}$

Pour tout nombre réel θ on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

1. Cette notation vérifie les règles opératoires suivantes :

- $e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ car $\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$.
- $e^{i0} = 1$; plus précisément, $e^{i\theta} = 1$ si, et seulement si $\theta = 0 \quad (2\pi)$.

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

- $e^{i\pi} = -1$.

- $e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$, c'est-à-dire $e^{i(-\theta)} = \overline{e^{i\theta}}$.

Si on pose : $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$, on a donc $e^{i\theta} = \overline{e^{-i\theta}}$.

- $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si $\theta = \theta' \quad (2\pi)$.

2. Formules d'Euler

De $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, il résulte :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

3. La formule de Moivre s'écrit, pour tout entier relatif p : $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$.

4. Dérivée de la fonction $t \mapsto e^{it}$

Une application F d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$F(t) = F_1(t) + iF_2(t), \quad \text{où} \quad F_1(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{et} \quad F_2(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

Par définition F est dérivable en t si F_1 et F_2 sont dérivables en t ; dans ce cas, la dérivée de F en t , notée $F'(t)$ est donnée par :

$$F'(t) = F'_1(t) + iF'_2(t).$$

Appliquons cette définition à la fonction $\varphi : t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ étant dérivables en chaque point de $\mathbb{R}$, φ est donc dérivable en tout réel t et on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\sin t + i \cos t \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).\end{aligned}$$

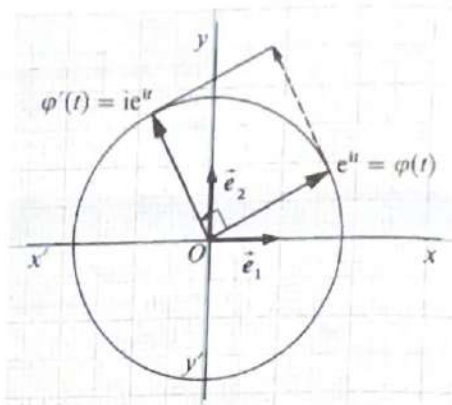


Figure 12

On constate que $\varphi'(t) = i e^{it}$.

Formellement on écrit :

$$\frac{de^{it}}{dt} = i e^{it}$$

5. Si dans l'écriture trigonométrique de tout nombre complexe non nul z d'argument θ , on utilise la notation $e^{i\theta}$, on obtient : $z = |z| e^{i\theta}$.

Si $z = \rho e^{i\theta}$, où ρ et θ sont des nombres réels, on a :

- lorsque $\rho = 0$: $z = 0$;
- lorsque $\rho > 0$: $|z| = \rho$ et $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$;
- lorsque $\rho < 0$: $|z| = -\rho$ et $\arg z = \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

REMARQUES :

Soit $f(t) = a e^{i\omega t}$, où a est un réel positif et ω un réel non nul.

1. $f(t)$ définit un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre O et de rayon a , de période $\frac{2\pi}{\omega}$, de pulsation ω .

$\operatorname{Re}(f(t)) = a \cos \omega t$ définit un mouvement rectiligne vibratoire de centre O , d'amplitude a et de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

2. $f'(t) = a i \omega e^{i\omega t}$, $f''(t) = -a \omega^2 e^{i\omega t}$, d'où : $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$.

Si l'on pose $g(t) = \operatorname{Re}(f(t))$ et $h(t) = \operatorname{Re}(g(t))$, g et h sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (1)$$

On démontre, et l'on admettra, que toute solution réelle de l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme $\lambda g(t) + \mu h(t)$, où λ et μ sont des réels quelconques. Toute solution réelle de (1) s'écrit aussi sous la forme $C \cos(\omega t - \varphi)$, où C et φ sont des réels quelconques.

■ Exercices résolus

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes : $z = 1 + i$, $z' = 1 - i$.

On a :
$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{et} \quad z' = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Par suite :
$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z' = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

2. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - i; \quad z_2 = 1 - i; \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

1° On a $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, puisque $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$.

D'où $\arg z_1 = \frac{11}{6}\pi$ (2π) et $\arg z_2 = \frac{7\pi}{4}$ (2π).

Donc $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z = \frac{11}{6}\pi - \frac{7\pi}{4}$ (2π), soit $\arg z = \frac{\pi}{12}$ (2π).

Ainsi :
$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right).$$

2° En utilisant les règles de calcul dans le corps $\mathbb{C}$, on a :

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right).$$

On conclut de 1° et 2° que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le point-image M d'un nombre complexe z écrit sous la forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$) est défini par ses coordonnées (x, y) , dites *cartésiennes*, ou *rectangulaires*.

Si z est exprimé sous la forme trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, le point M est défini par le couple (r, θ) :

$$OM = r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (2\pi).$$

On dit que r et θ sont les **coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_1)$. Les calculatrices de référence permettent de calculer les coordonnées polaires à partir des coordonnées rectangulaires et inversement. Elles permettent donc de passer de l'une à l'autre des deux écritures $x + iy$ et $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Il convient au préalable de placer la calculatrice dans le mode correspondant à l'unité d'angle choisie : degré, grade ou radian.

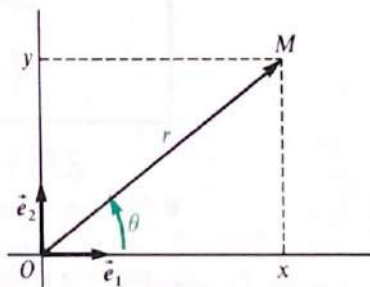


Figure 13

Passage de l'écriture algébrique $x + iy$ à l'écriture trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

TI-62	SHARP EL-5050	CASIO FX-180P	HP-11C	Commentaires
$\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}} \quad x \boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}} y$	$x \boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}} y$	$x \boxed{\text{R} \rightarrow \text{P}} y$	$y \boxed{\text{ENTER}} x$	entre x et y
$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}}$	affiche r
$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	$\boxed{\text{RCL}} \text{Z}$	$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	affiche θ

Passage de l'écriture trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ à l'écriture algébrique $x + iy$

$\boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}} \quad r \boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}} \theta$	$r \boxed{\text{R} \rightarrow \text{P}} \theta$	$r \boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}} \theta$	$\theta \boxed{\text{ENTER}} r$	entre r et θ
$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{R} \rightarrow \text{P}}$	affiche x
$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	$\boxed{\text{RCL}} \text{Z}$	$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	$\boxed{\text{X} \rightarrow \text{Y}}$	affiche y

Application :

1° Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1 + i, \quad 1 - i, \quad 3 - 4i, \quad -27 + 13i, \quad \sqrt{3} - \sqrt{2}i, \\ (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1), \quad \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{5 - 2i\sqrt{3}}.$$

(On exprimera les arguments en degrés, puis en radians.)

2° Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ), \quad \sqrt{7}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ), \\ (\sqrt{5} - 1)(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ), \quad 7\left(\cos \frac{3\pi}{7} + i \sin \frac{3\pi}{7}\right), \\ \pi\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right), \quad e^{-1,2}(\cos 0,7\pi + i \sin 0,7\pi).$$

Exercices d'application

18. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = i$; $z = 9i$; $z = -6$; $z = +8$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z = 1 - i\sqrt{3}$.

19. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = \sin \theta + i \cos \theta$, $z = 1 + i \tan \theta$,

$z = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$, où θ est un nombre fixé.

b) $z = \frac{-\sqrt{2}}{1 + i}$; $z = \frac{3}{1 - i}$.

20. Soit le nombre complexe :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Montrer que $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$,

$$j^{3n+2} = j^2 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

21. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}.$$

22. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

23. Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)},$$

où $x \in \mathbb{R}$.

24. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$.

25. Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un réel positif? un imaginaire pur?

26. En calculant de deux manières différentes $(1+i)^n$, déduire :

$$S_0 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots + (-1)^p C_n^{2p} + \dots$$

$$S_1 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots + (-1)^q C_n^{2q+1} + \dots$$

27. En calculant de deux manières différentes $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$, $(1+1)^n$ et en utilisant la relation $1+j+j^2=0$, déduire :

$$S_0 = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + \dots + C_n^{3p+1} + \dots$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots + C_n^{3q+2} + \dots$$

28. Donner une expression simple de

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \cos kx \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} \sin kx.$$

(On pourra calculer $C + iS$ en posant :

$$z = e^{ix}.)$$

29. Donner une expression simple de :

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sin kx}{\cos^k x},$$

pour $x \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

(Calculer $C + iS$ en posant : $z = \frac{e^{ix}}{\cos x}$.)

30. Ensemble décrit par l'image M du complexe z tel que :

a) $|\arg z| = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$;

b) $|z - 2i| = 2$;

c) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2$.

31. Module et argument de $z_1 = \sqrt{3} + i$,

$$z_2 = 3i - z_1, \quad z_3 = 2i + z_1 \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z_3}{z_2}.$$

32. Module et argument de $z = \frac{1}{1+i \tan \alpha}$,

lorsque $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

33. Module et argument de :

$$z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha},$$

lorsque $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$.

34. Module et argument de :

$$1 + \sin \alpha - i \cos \alpha, \quad \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}},$$

où α et β sont deux réels donnés. On donnera la condition pour que la deuxième expression soit définie.

V — APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES À LA TRIGONOMÉTRIE

CALCUL DE $\cos nx$ ET $\sin nx$ EN FONCTION DE $\cos x$ ET $\sin x$

La méthode consiste à appliquer la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, et à utiliser la relation :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

• Cas $n = 2$

On a :

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

et :

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

• Cas $n = 3$

On a : $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$,
 et : $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$,
 d'où : $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$
 $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.

En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

Si $3x \neq \frac{\pi}{2} (2\pi)$, on a $\cos 3x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors : $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x}$.

Après division du numérateur et du dénominateur par $\cos^3 x$, on obtient :

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

• Cas $n = 4$

On a : $(\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$
 et : $(\cos x + i \sin x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x$.

D'où : $\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$
 $\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$.

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \\ \sin 4x &= 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x = 2 \sin 2x \cos 2x\end{aligned}$$

Si $4x \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$ et $x \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$, on a $\cos 4x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors : $\tan 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x}{\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}$.

Après division du numérateur et du dénominateur par $\cos^4 x$, on obtient :

$$\tan 4x = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$$

Activité

1° Montrer les relations suivantes :

- $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + C_n^8 \cos^{n-8} x \sin^8 x - \dots$
- $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - C_n^7 \cos^{n-7} x \sin^7 x + \dots$

où le dernier terme de chaque expression dépend de la parité de n .

2° En déduire :

- a) $\cos nx = P_n(\cos x)$, où $P_n(\cos x)$ est une expression polynomiale en $\cos x$ de degré n dont le coefficient de $\cos^n x$ est 2^{n-1} ;
- b) $\sin nx = \sin x Q_{n-1}(\cos x)$, où $Q_{n-1}(\cos x)$ est une expression polynomiale en $\cos x$ de degré $n-1$ dont le coefficient de $\cos^{n-1} x$ est 2^{n-1} .

LINÉARISATION DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

Il s'agit d'exprimer $\cos^p x \sin^q x$ comme somme de termes de la forme :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton :

$$\cos^p x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^p \quad \text{et} \quad \sin^q x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^q.$$

Exemples

$$\bullet \cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) = \frac{1}{4} (2 \cos 2x + 2),$$

d'où :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$$

$$\bullet \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) = -\frac{1}{4} (2 \cos 2x - 2),$$

d'où :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\bullet \cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}) = \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 6 \cos x),$$

d'où :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) \\ &= -\frac{1}{8} (2 \sin 3x - 6 \sin x), \end{aligned}$$

d'où :

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3 \sin x)$$

• $y = \cos x \sin^4 x$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{2^5} (e^{ix} + e^{-ix})(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}),$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2^5} (e^{i5x} - 4e^{i3x} + 6e^{ix} - 4e^{-ix} + e^{-i3x} + e^{i3x} - 4e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-i3x} + e^{-i5x})$$

$$= \frac{1}{2^5} (2 \cos 5x - 6 \cos 3x + 4 \cos x).$$

Finalement : $y = \frac{1}{2^4} (\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x).$

Dans tous ces calculs nous avons utilisé :

$$e^{ipx} + e^{-ipx} = 2 \cos px \quad \text{et} \quad e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i \sin px.$$

ÉQUATION $a \cos x + b \sin x = c$

1° a et b désignant deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, posons $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; il existe alors un réel φ , défini modulo 2π , tel que $a = r \cos \varphi$ et $b = r \sin \varphi$: φ est un argument du nombre complexe $a + ib$. Une valeur approchée de φ s'obtient à l'aide d'une table des fonctions trigonométriques, ou d'une calculatrice.

Il s'ensuit, pour tout réel x : $a \cos x + b \sin x = r(\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi).$

Comme $\cos(x - \varphi) = \cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi$, on obtient :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

2° Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a \cos x + b \sin x = c$, où a, b, c sont des réels donnés tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a alors $a^2 + b^2 \neq 0$ ce qui, avec les notations précédentes, nous ramène à la résolution de l'équation :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Discussion :

- Si $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| > 1$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$, il existe un réel t_0 unique de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que :

$$\cos t_0 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On résout alors : $\cos(x - \varphi) = \cos t_0$.

L'ensemble des solutions est : $\{t_0 + \varphi + k_1 2\pi, k_1 \in \mathbb{Z}\} \cup \{-t_0 + \varphi + k_2 2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Une autre méthode de résolution sera donnée page 84.

■ Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1,8$.

On a $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$, d'où $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En choisissant $\varphi = \frac{\pi}{3}$, on obtient : $\cos x + 3 \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

On est donc ramené à la résolution de l'équation $\cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,9$.

Choisissons 0,451 comme valeur de t_0 telle que $\cos t_0 \approx 0,9$. L'ensemble des solutions approximatives de (1) est alors :

$$\left\{0,451 + \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi, k_1 \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-0,451 + \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

● Exercices d'application

35. Linéariser les expressions suivantes :
 $\cos^4 x \sin x$; $\sin^2 x \cos^3 x$; $\cos^4 x \sin^3 x$;
 $3 \cos^3 x \sin^3 x - 2 \cos^4 x \sin^2 x$.

36. Linéariser les expressions suivantes :

$$2^{2m} \cos^{2m} x; \quad (-1)^m 2^{2m} \sin^{2m} x;$$

$$2^{2m+1} \cos^{2m+1} x; \quad (-1)^m 2^{2m+1} \sin^{2m+1} x;$$

où m est un entier naturel.

37. Transformer en un produit les expressions :

$$\begin{aligned} &\cos(a+b+c) + \cos a + \cos b + \cos c; \\ &\sin(a+b-c) + \sin(b+c-a) \\ &\quad + \sin(c+a-b) - \sin(a+b+c). \end{aligned}$$

38. Simplifier l'expression :

$$\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \dots + \sin(2n-1)a}{\cos a + \cos 3a + \dots + \cos(2n-1)a}.$$

39. En supposant $a+b+c = \pi$, simplifier les expressions :

$$\frac{\sin a + \sin b - \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c};$$

$$1 + \cos a + \cos b - \cos c.$$

40. Calculer la somme :

$$S = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}.$$

41. Résoudre les équations :

$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0;$$

$$2 \cos x + 5 \sin x + 2 = 0;$$

$$\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1;$$

$$\cos x + \sin x = 1;$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sqrt{13} \sin x = 2.$$

VI — RACINES n -ièmesRACINES n -ièmes DE L'UNITÉCas $n = 2$

On se propose de chercher les nombres complexes z tels que : $z^2 = 1$.

Comme $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$, 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité. Remarquons que leur somme est nulle.

Cas $n = 3$

Les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$

et vérifient $e^{i3\theta} = 1 = e^{i0}$, c'est-à-dire $3\theta = 0 \pmod{2\pi}$, d'où $\theta = \frac{k2\pi}{3}$, avec k entier relatif.

Les racines troisièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$. Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{3}} = (\omega_1)^k$:

- $\omega_0 = 1$;
- $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; le complexe ω_1 est généralement noté j ;
- $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; remarquons que $\omega_2 = j^2 = \bar{j}$;
- $\omega_3 = 1, \omega_4 = \omega_1, \omega_5 = \omega_2$.

Plus généralement : $\omega_{3p} = 1, \omega_{3p+1} = j, \omega_{3p+2} = j^2$. Comme tout nombre entier relatif à l'une des formes $3p, 3p+1$ ou $3p+2$, avec p entier relatif, les racines cubiques de l'unité sont $1, j, j^2$. On pose $U_3 = \{1, j, j^2\}$.

Propriétés :

1. $1 + j + j^2 = 0$.
2. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1)(z - j)(z - j^2)$.
3. Désignons par U_3 l'ensemble des racines cubiques de l'unité. Le produit de deux éléments de U_3 , l'inverse d'un élément de U_3 , sont aussi des éléments de U_3 .

On le vérifie en considérant le tableau croisé ci-contre, où l'on met dans chaque case le produit des nombres complexes qui correspondent à la ligne et la colonne de la case.

	1	j	j ²
1	1	j	j ²
j	j	j ²	1
j ²	j ²	1	j

On a : $\frac{1}{j} = \bar{j} = j^2; \frac{1}{j^2} = j$.

4. Représentation géométrique des racines cubiques de l'unité.

De $1 + j + j^2 = 0$, il résulte :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}.$$

De plus (figure 14) :

$$OA = OM = ON = 1;$$

$$OH = \frac{1}{2}; AM = MN = NA = \sqrt{3}.$$

Les points A, M, N , images respectives de $1, j, j^2$, sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

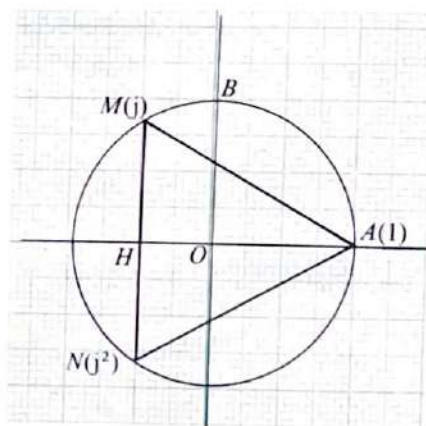


Figure 14

Cas $n = 4$

Les nombres complexes z tels que $z^4 = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i4\theta} = 1 = e^{i0}$, c'est-à-dire $4\theta = 0 \pmod{2\pi}$, d'où $\theta = \frac{k2\pi}{4}$, avec k élément de $\mathbb{Z}$. Les racines quatrièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{4}}$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{4}} = (\omega_1)^k$:

- $\omega_0 = 1$;
- $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;
- $\omega_2 = i^2 = -1$;
- $\omega_3 = i^3 = -i$;
- $\omega_4 = 1, \omega_5 = i, \omega_6 = -1, \omega_7 = -i$.

Plus généralement :

$$\omega_{4p} = i^{4p} = 1, \quad \omega_{4p+1} = i^{4p+1} = i, \quad \omega_{4p+2} = i^{4p+2} = -1, \quad \omega_{4p+3} = i^{4p+3} = -i.$$

Comme tout entier relatif a l'une des formes $4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$, avec p entier relatif, les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$.

On pose : $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

On constate : $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Les images des quatre racines quatrièmes de l'unité sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.

Le produit de deux éléments de U_4 , l'inverse d'un élément de U_4 , sont aussi des éléments de U_4 , comme le montre le tableau croisé ci-contre.

	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

■ Exercice résolu

Déterminer les solutions complexes de l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Pour tout nombre complexe z , on a : $(z-1)(z^3 + z^2 + z + 1) = z^4 - 1$.

Les solutions de l'équation sont donc celles de $z^4 - 1 = 0$ privées de 1. L'ensemble des solutions est donc $\{i, -1, -i\}$.

Cas général

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Les nombres complexes z tels que $z^n = 1$ ont pour module 1. Ils sont donc de la forme $e^{i\theta}$ et vérifient :

$$e^{in\theta} = 1 = e^{i0}, \text{ c'est-à-dire } n\theta = 0 \quad (2\pi).$$

D'où $\theta = \frac{k2\pi}{n}$, avec k entier relatif.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$. On a : $\omega_k = (\omega_1)^k$.

Tout entier relatif k a l'une des formes $np, np+1, \dots, np+r, \dots, np+n-1$, où p est un entier relatif.

On a : $\omega_{np+r} = (\omega_1)^{np+r} = (\omega_1)^{np}(\omega_1)^r = (\omega_1^n)^p(\omega_1)^r$ et $\omega_1^n = 1$.

Donc $\omega_{np+r} = (\omega_1)^r = \omega_r$, avec r entier naturel compris entre 0 et $n-1$, au sens large (c'est-à-dire $0 \leq r \leq n-1$).

Les racines n -ièmes de l'unité sont les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, où k est un entier naturel compris entre 0 et $n-1$, au sens large.

De plus, si r et r' sont deux entiers naturels distincts tels que $0 \leq r \leq n-1$ et $0 \leq r' \leq n-1$, on a $0 < |r-r'| < n$, il ne peut donc exister d'entier relatif p tel que $r-r' = pn$.

Ainsi $e^{i\frac{r2\pi}{n}} \neq e^{i\frac{r'2\pi}{n}}$, car sinon il existerait un entier relatif p tel que $\frac{r2\pi}{n} - \frac{r'2\pi}{n} = p2\pi$, soit $r - r' = pn$, ce qui n'est pas.

THÉORÈME 4

Les racines n -ièmes de l'unité sont au nombre de n , elles s'écrivent sous la forme $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, où k est un nombre entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

U_n désigne l'ensemble des racines n -ièmes complexes de l'unité.

Propriétés

1. La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Posons $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. La somme S des racines n -ièmes de l'unité est :

$$S = 1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{n-1}.$$

De l'identité : $(1-z)(1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) = 1-z^n$, pour tout nombre complexe z , il résulte pour z différent de 1 : $1+z+z^2+\dots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$.

Comme $\omega_1 \neq 1$, on a : $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{n-1} = \frac{1 - (\omega_1)^n}{1 - \omega_1}$; or $(\omega_1)^n = 1$, d'où : $S = 0$.

2. Les images des racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier convexe de n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si A désigne l'image de 1 et M_r l'image de $e^{i\frac{r2\pi}{n}}$ pour r entier naturel compris entre 1 et $n-1$, on a (figure 15) :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM_1} + \dots + \overrightarrow{OM_2} + \dots + \overrightarrow{OM_{n-1}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM_r}, \overrightarrow{OM_{r+1}}) = \frac{2\pi}{n} \quad (2\pi).$$

3. Si z et z' sont dans U_n ,

$$(zz')^n = z^n z'^n = 1,$$

donc zz' appartient à U_n .

De plus, si z est élément de

$$U_n, \quad \frac{1}{z} = \bar{z}, \quad \text{car } z \text{ est de}$$

$$\text{module } 1 \text{ et } \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1,$$

$$\text{donc } \frac{1}{z} \text{ est élément de } U_n.$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{e^{i\frac{r2\pi}{n}}} = e^{i\frac{(n-r)2\pi}{n}}.$$

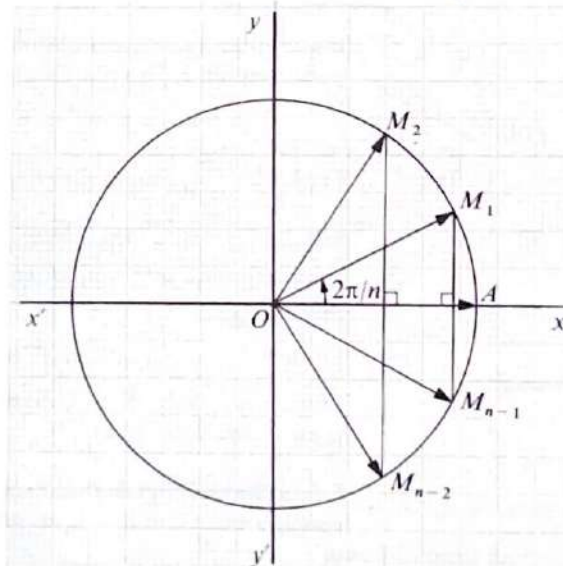


Figure 15

Le produit de deux éléments de U_n , l'inverse d'un élément de U_n , sont des éléments de U_n .

RACINES n -IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.

On appelle **racine n -ième de Z** tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Si Z est nul le seul nombre complexe z tel que $z^n = 0$ est 0.

Supposons Z non nul. $Z = |Z| e^{i\varphi}$. Pour que $z = |z| e^{i\theta}$ soit racine n -ième complexe de Z , il faut et il suffit que :

$$|z|^n e^{in\theta} = |Z| e^{i\varphi};$$

c'est-à-dire :

$$|z| = \sqrt[n]{|Z|} \quad \text{et} \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

ou encore :

$$|z| = \sqrt[n]{|Z|} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

avec k entier relatif.

L'ensemble des racines n -ièmes de Z est donc l'ensemble des nombres complexes de la forme : $\sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Comme $\sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{|Z|} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, si on pose $z_0 = \sqrt[n]{|Z|} e^{i\frac{\varphi}{n}}$, les racines n -ièmes de Z s'écrivent sous la forme $z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où z_0 est tel que $z_0^n = Z$ et où $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est une racine n -ième de l'unité.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 5

Tout nombre complexe non nul $Z = |Z| e^{i\varphi}$ admet n racines n -ièmes qui s'expriment sous la forme trigonométrique :

$$\sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$

où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

Propriétés

1. Soit Z un nombre complexe non nul. Considérons une racine n -ième c de Z .

On a : $c^n = Z$ (1)

Pour que le nombre complexe z soit racine n -ième de Z , il faut et il suffit que $z^n = Z$, c'est-à-dire d'après la relation (1) : $\left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$. Il faut et il suffit donc que $\frac{z}{c}$ soit racine n -ième de l'unité.

Nous pouvons conclure :

Les racines n -ièmes du nombre complexe Z s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par les racines n -ièmes de l'unité.

REMARQUE : Si z_1 et z_2 désignent deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel, pour que $z_1^n = z_2^n$, il faut et il suffit que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 1$, c'est-à-dire que $\frac{z_1}{z_2}$ soit une racine n -ième de l'unité.

2. Les images des racines n -ièmes du nombre complexe non nul Z sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$.

Cette propriété résulte de la représentation géométrique des racines n -ièmes de l'unité.

3. La somme des racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. Cela résulte de la propriété 1 et de la propriété vérifiée par la somme des racines n -ièmes de l'unité.

■ Exercices résolus

1. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $1 + i$.

On peut écrire : $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les racines cubiques de $1 + i$ sont donc : $\sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{12}} e^{i\frac{k2\pi}{3}}$ pour $0 \leq k \leq 2$, d'où :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

2. Déterminer les racines n -ièmes de -1 .

On peut écrire : $-1 = e^{i\pi}$. Les racines n -ièmes de -1 sont donc $e^{i\frac{\pi}{n}} \times e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, avec k entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 = 0. \quad (1)$$

Les solutions de (1) sont différentes de 1 et -1 . Posons $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

Nous sommes ramenés à résoudre : $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = 0$, c'est-à-dire $Z^6 = -1$.

Les solutions de cette dernière équation sont définies par $Z = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}\right)}$, avec k entier naturel tel que $0 \leq k \leq 5$.

Les solutions de l'équation (1) sont donc déterminées par les équations :

$$\frac{1+z}{z-1} = e^{i\theta_k}, \quad (2)$$

où $\theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ et $0 \leq k \leq 5$.

De la relation (2) il résulte $z(e^{i\theta_k} - 1) = 1 + e^{i\theta_k}$.

On a donc pour chaque entier naturel k tel que $0 \leq k \leq 5$ et $\theta_k \neq 0 \pmod{2\pi}$:

$$z = \frac{1 + e^{i\theta_k}}{e^{i\theta_k} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta_k}{2}} (e^{-i\frac{\theta_k}{2}} + e^{i\frac{\theta_k}{2}})}{e^{i\frac{\theta_k}{2}} (e^{i\frac{\theta_k}{2}} - e^{-i\frac{\theta_k}{2}})}, \quad \text{d'où } z = \frac{\cos \frac{\theta_k}{2}}{i \sin \frac{\theta_k}{2}} = -i \cot \frac{\theta_k}{2}.$$

Comme pour $0 \leq k \leq 5$ on a : $\frac{\pi}{6} \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} < 2\pi$, les racines de (1) sont donc

définies par : $z = -i \cot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \right)$, avec $0 \leq k \leq 5$ et k entier naturel.

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL Z

Première méthode : $Z = |Z| e^{i\theta}$. Les racines carrées de Z sont donc, d'après l'étude générale : $\sqrt{|Z|} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{|Z|} e^{i\frac{\theta}{2}}$. Elles sont opposées l'une de l'autre.

Seconde méthode : $Z = a + ib$, avec a et b réels.

Le nombre complexe $z = x + iy$, x et y étant réels, est racine carrée de Z si, et seulement si : $(x + iy)^2 = a + ib$; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Notons en outre que si $z^2 = Z$, alors $|z|^2 = |Z|$, donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ainsi, $z = x + iy$, x et y étant réels, est racine carrée de Z si, et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$x^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}) \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (4)$$

- Si $b = 0$ et $a > 0$, les deux racines carrées sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $b = 0$ et $a < 0$, les deux racines carrées sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
- Si $b \neq 0$, x et y sont déterminés par les relations (4) et sont de même signe si $b > 0$ (d'après (3)), et de signe contraire si $b < 0$.

Exemple

Les racines carrées de $-7 - 24i$ sont de la forme $x + iy$, avec x et y réels et sont déterminées par :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = 25 \\ 2xy = -24, \end{cases}$$

d'où : $x^2 = 9$, $y^2 = 16$ et $xy < 0$.

$3 - 4i$ et $-3 + 4i$ sont donc les racines carrées de $-7 - 24i$.

■ Exercice résolu

En exprimant de deux manières différentes les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, calculer

$$\cos \frac{\pi}{8} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8}.$$

I^o $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. Les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ sont donc

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \text{ et } -\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}.$$

2° $x + iy$, avec x et y réels, est racine carrée de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

d'où : $x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$, $y^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $xy > 0$.

D'après le résultat précédent, on a donc :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

● Exercices d'application

42. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$i; 1 + i; 9 + 40i; 7 - 24i; 4i - 3;$$

$$\frac{1+i}{1-i}; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

43. Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$$-i; 1 + i; 2 + 11i; 4\sqrt{2}(-1 + i).$$

44. Démontrer que :

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin n \frac{\pi}{4},$$

où n est un entier.

45. Déterminer les racines quatrièmes de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{24}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

46. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = 3 + 4i; z^5 + 1 = 0;$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0;$$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}, \text{ où } a \text{ est réel};$$

$$(z-i)^n - (z+i)^n = 0;$$

$$\left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n = 0.$$

47. Calculer :

$$S = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7};$$

$$S' = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7}.$$

(On pourra considérer $S + iS'$.)

VII — ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Considérons le trinôme du second degré $az^2 + bz + c$, où a est un nombre complexe *non nul* et b et c deux nombres complexes quelconques.

Pour tout complexe z , on a :

$$az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Par suite : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad (1)$

Le second membre de cette égalité est appelé *forme canonique* du trinôme $az^2 + bz + c$.

RÉSOLUTION SUR $\mathbb{C}$ DE L'ÉQUATION $az^2 + bz + c = 0$

Dans cette équation, a, b, c sont des nombres complexes donnés et a n'est pas nul. Désignons par d une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$. La relation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{d}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{d}{2a} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la résolution de $az^2 + bz + c = 0$ se ramène à celle de :

$$a \left(z + \frac{b-d}{2a} \right) \left(z + \frac{b+d}{2a} \right) = 0.$$

Or, pour qu'un produit de nombres complexes soit nul il faut et il suffit qu'au moins un des nombres complexes soit nul, donc les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $-\frac{b+d}{2a}$ et $-\frac{b-d}{2a}$. Elles sont égales si $d = 0$ et distinctes sinon.

On peut donc énoncer :

Soit a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b+d}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-d}{2a},$$

où d désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $b^2 - 4ac \neq 0$, alors $z_1 \neq z_2$.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ alors $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$; on dit que l'équation a une racine double.

Le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

REMARQUES :

1. En effectuant la somme et le produit des racines z_1 et z_2 de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on obtient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, si a, b, c sont trois nombres complexes donnés ($a \neq 0$) et si les nombres complexes u_1 et u_2 satisfont $u_1 + u_2 = -\frac{b}{a}$ et $u_1 u_2 = \frac{c}{a}$, alors u_1 et u_2 sont les solutions de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

En effet, $a(z - u_1)(z - u_2) = 0$ admet pour solutions u_1 et u_2 .

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad a(z - u_1)(z - u_2) &= a(z^2 - (u_1 + u_2)z + u_1 u_2) \\ &= az^2 + bz + c. \end{aligned}$$

2. Si, dans l'équation $b = 2b'$, alors $d^2 = 4(b'^2 - ac) = 4d'^2$, où $d'^2 = b'^2 - ac$, d' étant une racine carrée de $\Delta' = b'^2 - ac$. On a alors :

$$z_1 = \frac{-b' + d'}{a}, \quad z_2 = \frac{-b' - d'}{a}.$$

Le nombre complexe $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le **discriminant réduit** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

RÉSOLUTION SUR $\mathbb{C}$ D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

Si les coefficients a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$), le discriminant Δ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est réel. S'il est positif, ses racines carrées sont $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$, et s'il est négatif, ses racines carrées sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$.

Il résulte alors de l'étude précédente :

Pour toute équation $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul et b, c deux réels quelconques :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, elle admet une seule solution : $-\frac{b}{2a}$, réelle.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, elle admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

■ Exercices résolus

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z \cos \varphi + 1 = 0$.

Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = \cos^2 \varphi - 1 = -\sin^2 \varphi$.

Les solutions sont donc : $\cos \varphi + i \sin \varphi$ et $\cos \varphi - i \sin \varphi$.

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $3x^2 + 2x + 2 = 0$.

Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = 1 - 6 = -5 = (i\sqrt{5})^2$.

Les solutions sont donc : $\frac{-1 + i\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{5}}{3}$.

**Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$
où a, b, c sont des réels donnés**

On pose $z = \cos x + i \sin x$; on a alors $\frac{1}{z} = \cos x - i \sin x$, donc :

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

On est alors ramené à résoudre l'équation :

$$a \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{b}{i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = 2c$$

avec la condition $|z| = 1$, c'est-à-dire à résoudre l'équation du second degré :

$$(a - bi)z^2 - 2cz + a + ib = 0$$

avec la condition $|z| = 1$.

On cherche alors les racines carrées de $\Delta' = c^2 - (a - ib)(a + ib) = c^2 - a^2 - b^2$. (A noter que Δ' est réel.) On termine la résolution de l'équation du second degré. On

remarque que le produit des racines est $\frac{a + ib}{a - ib}$, et que ce complexe est de module 1. Ainsi,

si l'une des racines a un module différent de 1, l'autre a aussi un module différent de 1.

Exemples

- $\cos x + 3 \sin x = 1,8$. Posons : $z = \cos x + i \sin x$. On est ramené à l'équation :

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 3 \frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) = 1,8,$$

soit :

$$(1 - 3i)z^2 - 3,6z + 1 + 3i = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta' = (1,8)^2 - (1 - 3i)(1 + 3i) = (1,8)^2 - 10 = (2,6i)^2.$$

D'où :

$$z_1 = \frac{1,8 + 2,6i}{1 - 3i} = \frac{(1,8 + 2,6i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{-6 + 8i}{10},$$

$$z_2 = \frac{1,8 - 2,6i}{1 - 3i} = \frac{(1,8 - 2,6i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{9,6 + 2,8i}{10}.$$

On vérifie que z_1 et z_2 sont de module 1. Ceci est le cas dès que $\Delta' \leq 0$. Ce cas correspond à :

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ (voir partie V, page 74).}$$

Les solutions de l'équation sont définies par :

$$\cos x = -0,6 \quad \text{et} \quad \sin x = 0,8$$

ou

$$\cos x = 0,96 \quad \text{et} \quad \sin x = 0,28$$

On les détermine, modulo 2π , à l'aide de tables trigonométriques ou d'une calculatrice :

$$x \approx 2,2143 + k2\pi, \quad x \approx 0,2838 + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- $\cos x + 3 \sin x = 4$. Posons $z = \cos x + i \sin x$. On est ramené à l'équation :

$$(1 - 3i)z^2 - 8z + 1 + 3i = 0.$$

Calculons le discriminant : $\Delta' = 16 - (1 - 3i)(1 + 3i) = 6$.

Les racines de l'équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{1 - 3i} = \frac{(4 + \sqrt{6})(1 + 3i)}{10}, \quad z_2 = \frac{(4 - \sqrt{6})(1 + 3i)}{10}.$$

On remarque que : $|z_1| > 1$ et $|z_2| < 1$. L'équation $\cos x + 3 \sin x = 4$ n'a donc pas de solution. Ce

cas correspond à $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| > 1$ (voir partie V, page 74).

Exercices d'application

48. Soient z, z', u des nombres complexes tels que $u^2 = zz'$. Montrer que :

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} + u \right|.$$

(Interprétation géométrique.)

49. Trouver tous les couples de complexes (z, z') tels que $\sqrt{|zz'|} = \left| \frac{z + z'}{2} \right|$. Remarquer que cette relation est conservée par similitude et supposer $|zz'| = 1$.

50. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A_k ($0 \leq k < n$) d'affixes :

$$z_k = a \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (a > 0)$$

et le point M d'affixe :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0).$$

- a) Démontrer que :

$$z^n - a^n = (z - a)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}).$$

- b) De la relation trouvée pour $a = 1$, déduire :

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = n2^{1-n},$$

et $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$

51. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$;

b) $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$;

c) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;

d) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$;

e) $(1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0$;

f) $(1 - i)z^2 - 2z - 11 + 3i = 0$.

52. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; b) $z^8 + z^4 + 1 = 0$;

c) $z^4 - 2(1 + ia^2)z^2 + 1 - a^4 = 0$, où a est réel.

53. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer :

$(x + y + z)(x + yj + zj^2)(x + yj^2 + zj)$.

54. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$4z^2 + 8|z^2| - 3 = 0$.

Mettre sous forme trigonométrique la somme de deux solutions quelconques.

55. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^3 + (2i - 11)z^2 + (25 - 19i)z - 8(1 - 3i) = 0$,

sachant qu'elle admet une racine réelle.

56. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

a) $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$;

b) $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots + 2x^{n-1} + x^n = 0$.

57. 1° Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0$.

2° Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$.

3° En déduire qu'il existe des réels A, B, C, D qu'on déterminera, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D).$$

TRAVAUX PRATIQUES

PROGRAMMATION

1° On considère un nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont réels, et un entier naturel n . Programmer le calcul de $(x + iy)^n$ en utilisant les fonctions de conversion coordonnées rectangulaires-coordonnées polaires, coordonnées polaires-coordonnées rectangulaires.

Réponse (TI-62)

CP

LRN

INV P→R

RCL 1 X↔Y RCL 2

= Y^X RCL 0 = STO 3

X↔Y X RCL 0 = STO 4

P→R

RCL 3 X↔Y RCL 4

= R/S

X↔Y R/S

RST

efface les programmes antérieurs

met en mode programme

mode de conversion en coordonnées polaires

entre x et y calcule r puis r^n et place r^n dans la mémoire 3calcule θ , puis $n\theta$ et place $n\theta$ dans la mémoire 4

mode de conversion en coordonnées cartésiennes

entre r^n et $n\theta$ calcule $\operatorname{Re}(z^n)$ calcule $\operatorname{Im}(z^n)$

place le pointeur en 0 pour l'exécution

LRN

2 STO 1 1 STO 2 18 STO 0

R/S

R/S

exécution : calcul de $(2 + i)^{18} = A + iB$

entre 2, 1, 18 dans les mémoires 1, 2, 0

affiche $A = -922\,077$ affiche $B = 1\,721\,764$

2° Calculer $(3 + 2i)^{12}$, $(-3 + 2i)^{15}$, $(1 - i)^{20}$, $(1 - 2i)^{11}$, $(3 - 4i)^{17}$, $(\sqrt{2} + i)^{16}$.

3° Montrer que le programme du 1° s'applique lorsque l'entier n est négatif.

Calculer $(4 - 3i)^{-5}$, $(1 + 2i)^{-12}$, $\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^{-18}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{1}{9}i\right)^{-13}$.

4° Montrer que le programme du 1° permet de calculer une racine n -ième de z . L'utiliser pour traiter les exercices 42, 43, 45.

CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE RÉGULIER À LA RÈGLE ET AU COMPAS

1° On pose $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Déterminer l'équation du second degré qui admet $\alpha = \omega_1 + \omega_1^2$ et $\beta = \omega_1^3 + \omega_1^4$ pour solutions.

2° Considérer le pentagone régulier dont les sommets sont les images des racines cinquièmes de l'unité : $A(1)$, $M(\omega_1)$, $N(\omega_1^2)$, $P(\omega_1^3)$, $Q(\omega_1^4)$.

Soit H le point d'intersection de $x'Ox$ avec (MQ) . Montrer que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH}$.

En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. Montrer que $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.

3° B étant le point d'affixe i , le cercle de centre Ω , d'affixe $-\frac{1}{2}$, passant par B , rencontre $x'Ox$ en I et J .

Montrer que $\overline{OI} \cdot \overline{OJ} = -1$ et $\overline{OI} + \overline{OJ} = -1$.

4° En déduire une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU 3° DEGRÉ

1° Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

On pose $z = x + \frac{b}{3a}$.

Montrer qu'on se ramène ainsi à la résolution d'une équation du type $z^3 + pz + q = 0$ (1), où p et q sont des nombres complexes.

Montrer que l'équation (1) admet au moins une racine réelle lorsque p et q sont réels.

2° z étant un nombre complexe satisfaisant (1), on pose $z = u + v$, avec $3uv + p = 0$. Montrer que u^3 et v^3 sont les racines y_1 et y_2 d'une équation du second degré que l'on formera. Comment faut-il associer les racines cubiques de y_1 et y_2 pour que leur somme soit racine de (1)?

Effectuer les calculs lorsque p et q sont réels (distinguer les cas $4p^3 + 27q^2 > 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$). Retrouver les formules de Cardan (page 49).

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $x^3 - 2x - 12 = 0$ et $x^3 - 15x - 4 = 0$.

3° α, β, γ désignant les racines de (1), démontrer que $z = (\alpha + \beta j + \gamma j^2)^3$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ne prend que deux valeurs z_1 et z_2 lorsque l'on permute α, β, γ de toutes les manières possibles.

Former l'équation du second degré admettant z_1 et z_2 pour racines. En déduire une méthode de résolution de (1). Effectuer les calculs lorsque p et q sont réels.

4° a) En exprimant $\cos 3\alpha$ comme polynôme en $\cos \alpha$, montrer que l'équation $\cos 3\alpha = a$ se ramène à une équation du troisième degré du type $x^3 + px + q = 0$, avec $4p^3 + 27q^2 < 0$, lorsque l'on suppose $|a| < 1$.

b) Réciproquement, étant donnés deux réels p et q tels que $4p^3 + 27q^2 < 0$, montrer qu'il existe des réels ρ et φ tels que (1) admette pour racines : $\rho \cos \varphi$, $\rho \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\rho \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$. Calculer ρ et $\cos 3\varphi$ en fonction de p et q . Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

CALCULS DANS $\mathbb{C}$

58. Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1° Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$.

2° Déterminer les nombres réels a, b tels que :

$$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2}\sqrt{3}i.$$

59. Dans cet exercice, Z désigne le nombre complexe :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

1° Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation :

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0.$$

2° a) Exprimer Z, Z^2, Z^3, Z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités :

$$Z + Z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad Z^2 + Z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}.$$

3° Utiliser les résultats des 1° et 2° pour trouver une relation entre $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$, puis montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$; en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

60. Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à $]0, \pi[$; on pose :

$$S_n = \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos 2\theta + \dots + \cos^p \theta \cos p\theta + \dots + \cos^n \theta \cos n\theta,$$

$$S'_n = \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \sin 2\theta + \dots + \cos^p \theta \sin p\theta + \dots + \cos^n \theta \sin n\theta,$$

$$\Sigma_n = S_n + iS'_n.$$

Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on donnera le premier terme et la raison.

En déduire la valeur de Σ_n , puis de S_n en fonction de n et θ .

(On montrera que $S_n = \frac{\cos^{n+1} \theta \sin n\theta}{\sin \theta}$.)

61. On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de $\mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Soit t un élément de $[0, \pi]$; on pose pour n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt.$$

1° Calculer le nombre complexe $C_n(t) + iS_n(t)$.

2° En déduire :

$$\begin{aligned} \text{si } t = 0, \quad C_n(0) &= n; \\ \text{si } t \in]0, \pi], \quad C_n(t) &= \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

62. Calculer :

$$\begin{aligned} A &= C_n^0 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos nx, \\ B &= C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin nx. \end{aligned}$$

(Considérer $A + iB$ et poser $z = \cos x + i \sin x$.)

63. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(-1 + i)$ et les conditions suivantes : pour tout entier naturel n , un représentant de l'argument de z_{n+1} appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et

$$z_{n+1}^4 = z_n.$$

1° Déterminer le module et un argument de z_1 .

2° On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$, où $\ln r_n$ désigne le logarithme népérien de r_n . Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

IMAGE D'UN NOMBRE COMPLEXE

64. On donne $Z = \frac{1}{(4-z)(2-iz)}$. Soit M l'image du nombre complexe z , dans un repère orthonormal. Construire l'ensemble des points M tels que Z soit un réel.

65. Le plan complexe $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

- le point M d'affixe $z = x + iy$, x et y réels;
- le point M' d'affixe $z' = x + 4iy$;
- le point A d'affixe -7 ;
- le point B d'affixe 5 .

1° Quelles conditions doit vérifier z pour que l'on ait $M \neq A$ et $M' \neq B$?

Ces conditions étant remplies, on appelle $\mathcal{D}$ la droite contenant les points A et M et $\mathcal{D}'$ la droite contenant les points B et M' .

2° Montrer que $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ si, et seulement si, $\frac{z+7}{z'-5} \in \mathbb{R}^*$.

En déduire l'ensemble C_1 des points M tels que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles. Construire C_1 .

3° Déterminer, de la même manière, l'ensemble C_2 des points M tels que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient perpendiculaires. Construire C_2 .

66. Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

M est un point quelconque de $\mathcal{P}$, d'affixe $z = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2.$$

67. Le conjugué d'un élément z de $\mathbb{C}$ est noté $\bar{z}$. Soit E l'ensemble des éléments u de $\mathbb{C}$ tels que :

$$u + \bar{u} + u\bar{u} = 0.$$

Représenter l'ensemble des images des éléments de E dans le plan complexe.

68. On considère, dans $\mathbb{C}$, les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β .

1° Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul?

2° Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).

Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.

3° A l'aide du 1°, montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle AOB .

69. Soit $\mathcal{P}$ un plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout point P de $\mathcal{P}$ on associe son affixe complexe p .

Soit $1, j, j^2$ les racines cubiques de l'unité, où :

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

On se propose d'étudier la propriété (E) suivante, relative à un triplet (A, B, C) de points de $\mathcal{P}$:

(E) : les affixes a, b, c des points A, B, C satisfont :

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

1° $T_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v}$ définie dans $\mathcal{P}$. Montrer que si le triplet (A, B, C) a la propriété (E), il en est de même de $(T_{\vec{v}}(A), T_{\vec{v}}(B), T_{\vec{v}}(C))$.

2° Soit un triangle équilatéral dont les sommets A, B, C sont disposés de sorte qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$. Montrer que (A, B, C) a la propriété (E).

3° Caractériser géométriquement la propriété (E).

70. Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On rappelle qu'à tout point M du plan de coordonnées (x, y) on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe du point M .

Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 .

1° Montrer que le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré si, et seulement si, les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 vérifient les relations :

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \\ z_3 - z_1 = \pm i(z_4 - z_2). \end{cases}$$

2° Montrer, alors, que l'affixe z_0 du point I , intersection de (AC) et (BD) , vérifie :

$$(z_1 - z_0)^4 = (z_2 - z_0)^4 = (z_3 - z_0)^4 = (z_4 - z_0)^4.$$

3° Construire le carré, dans le cas où $z_0 = 1 + i$ et $z_1 + z_2 = 0$.

Déterminer les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 dans ce cas.

71. On donne le nombre complexe u :

$$u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad (i^2 = -1).$$

1° Calculer u^2 et u^4 . Calculer le module et l'argument de u^4 . En déduire le module et l'argument de u .

2° On considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal. A tout point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{P}$, on associe son affixe $z = x + iy$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

72. 1° Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z - 1| = |\bar{z} + 1|$? Expliquer géométriquement le résultat trouvé, en considérant un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et en associant à tout point $M(x, y)$ du plan son affixe z , c'est-à-dire le nombre complexe défini par $z = x + iy$.

2° Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $(z - 1)^n = (\bar{z} + 1)^n$.

73. Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} \quad (\bar{z} \text{ est le conjugué de } z).$$

1° Préciser l'application $f \circ f$ et déterminer les ensembles I_f et N_f suivants :

$$I_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = z\}; \quad N_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = 0\}.$$

2° Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A chaque nombre complexe on associe son point image dans $\mathcal{P}$. Soit F l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M image de z , associe le point M' image de $f(z)$.
a) Préciser $F \circ F$ et déterminer les ensembles $\mathcal{D}$ et Δ suivants :

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} / F(M) = M\}; \quad \Delta = \{M \in \mathcal{P} / F(M) = O\}.$$

b) Démontrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, le point $F(M)$ appartient à $\mathcal{D}$ et que, pour tout point M de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, la droite $(M, F(M))$ est parallèle à Δ . En déduire la nature de F .

74. On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et par $\bar{z}$ le conjugué de z .

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}^3$.

1° Quel est l'ensemble des nombres z tels que $f(z) = \bar{z}$?

2° Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $f(z)$. Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle MOM' soit rectangle en O ? Quel est l'ensemble des points M tels que M, O et M' soient alignés?

3° Déterminer l'ensemble des nombres complexes images par f des nombres complexes de module 1.

4° Déterminer et représenter dans le plan complexe les points M , d'affixe z telle que $f(z) = i$.

75. Soit f l'application de $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}.$$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe z .

1° Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.

2° Soit z un élément de E . On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α .

3° Soit A le point d'affixe $-i$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M vérifiant :

$$|f(z) - i| = \sqrt{2}$$

et l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que B appartient à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

RACINES n -IÈME DE L'UNITÉ

76. 1° Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

dans l'ensemble des nombres complexes.

2° En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3° Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

77. 1° Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^6 = -1$, où z est l'inconnue.

2° Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous la forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

78. Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1 .

On considère, dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

1° Démontrer que le système de n points pondérés :

$$\{(A_k, q^k), 0 \leq k \leq n-1\}$$

admet un barycentre G_n .

2° On donne :

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad z_k = (z_1)^k.$$

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n à l'aide de q et z_1 .

b) Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n .

On rappelle que :

$$X_n = \frac{Z_n + \bar{Z}_n}{2}, \quad Y_n = \frac{Z_n - \bar{Z}_n}{2i}.$$

3° a) Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel?

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n$.

79. 1° Résoudre, dans le corps des nombres complexes, l'équation $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous forme trigonométrique puis algébrique.

2° u désignant un nombre complexe différent de 1, calculer au moyen des seuls u^{n+1} et u :

$$1 + u + u^2 + \dots + u^n.$$

3° Donner les solutions de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$, par exemple en utilisant les questions précédentes.

80. 1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -i$.

On précisera le module et l'argument des racines et on représentera leurs images dans le plan complexe.

2° Calculer la somme des racines et interpréter géométriquement ce résultat en introduisant l'isobarycentre de leurs images.

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0.$$

(On se ramènera à l'équation précédente, en calculant une somme de la forme $1 + k + k^2 + k^3 + k^4$.)

81. 1° Écrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1 - i)$.

2° Pour λ nombre réel quelconque, on pose :

$$z_k = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_k + iy_k.$$

a) Calculer les réels x_k et y_k en fonction de λ .

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M_k de coordonnées (x_k, y_k) quand λ décrit $[0, 2\pi[$.

3° Montrer que les solutions de l'équation :

$$(z - (1 + i))^3 = a$$

sont les affixes de points de (C) .

82. 1° Exprimer les racines z_k dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^5 = 1 \text{ en fonction des nombres } \theta_k = \frac{2k\pi}{5}, \text{ où } k \in [0, 4].$$

2° Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixe z_k ? Déterminer l'isobarycentre des points A_k . En déduire une équation du second degré à coefficients entiers satisfaite par $a = \cos \frac{2\pi}{5}$.

3° Résoudre cette équation; calculer $\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}$,

$$\cos \frac{\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{8\pi}{5}.$$

4° A tout nombre complexe u , différent de -1 , on associe $z = \frac{u-1}{u+1}$. Calculer u en fonction de z .

5° A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(u-1)^5 = (u+1)^5$. Dessiner les affixes des racines.

6° Expliquer ce dernier résultat en déterminant l'ensemble E des points M dont l'affixe est telle que $\left| \frac{u-1}{u+1} \right| = 1$.

ÉQUATIONS

83. Dans le corps des complexes, résoudre l'équation :

$$iz^2 - 2z + 2 - i = 0,$$

où z est l'inconnue et $\bar{z}$ le conjugué de z .

84. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel.

1° Montrer que si $P(z) = 0$ admet une solution complexe z_0 , alors $\bar{z}_0$ est aussi solution. En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet au moins une solution réelle, sans chercher à résoudre l'équation.

2° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de λ ainsi trouvée.

3° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de λ ainsi trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

85. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit C_1 l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et f l'application telle que :

$$\forall z \in C_1, \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

1° Résoudre l'équation : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2° a) Montrer que :

$$\forall (z, z') \in C_1 \times C_1, \quad f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z' \text{ ou } zz' = 1.$$

b) Soit $(z, z') \in C_1 \times C_1$ tel que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$; montrer que :

$$f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'.$$

3° Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in C_1$ et $f(z)$ soit réel.

4° Dans cette question :

$$z = e^{i\theta}, \quad \theta \in \left[-\pi, \pi \right] \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

a) Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos \theta$.

b) Soit u la suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \dots + (f(z))^n.$$

Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle?

86. On considère l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$,

$$z^2 + 2(1 - \cos u)z + 2(1 - \cos u) = 0,$$

u étant un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.

1° Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. On notera z_1 et z_2 les solutions.

2° Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 .

87. θ désigne un nombre réel appartenant à $[0, 2\pi[$.

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2^{2\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0.$$

Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.

Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

88. Soit α un nombre réel appartenant à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : (1 + iz)^3 (1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3 (1 + i \tan \alpha).$$

1° Soit z une solution de (E) .

a) Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b) En déduire que z est réel.

2° a) Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b) Soit z un nombre réel; on pose $z = \tan \varphi$, où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Écrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E) .

89. $\mathbb{C}$ représente le corps des nombres complexes; θ est un nombre réel donné.

1° Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation en Z :

$$(E) : Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0.$$

En déduire la résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation en z :

$$(E') : z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0.$$

(Les racines seront présentées sous forme trigonométrique.)

2° Dans le plan complexe, on considère les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre racines de l'équation (E') .

Pour quelle valeur de θ ($0 < \theta < \pi$) ces quatre points sont-ils les sommets d'un carré?

3° Décomposer en un produit de deux facteurs du second degré et à coefficients réels le polynôme en x défini par :

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \cos \theta + 1.$$

PROBLÈMES

90. Soit d l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy,$$

$$d(z) = \inf [y - E(y), E(y+1) - y], \quad x \text{ et } y \text{ réels,}$$

où $E(y)$ désigne la partie entière de y .

1° Calculer $d(1)$, $d\left(\frac{i}{2}\right)$, $d\left(1 + \frac{5i}{4}\right)$.

Donner une interprétation géométrique de l'application d en utilisant dans $\mathcal{P}$ le point M_0 d'affixe z_0 et les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ d'équations respectives $y = E(y_0)$ et $y = E(y_0 + 1)$.

2° On pourra résoudre cette question, soit par le calcul, soit par une méthode géométrique utilisant l'interprétation précédente et, suivant les cas, une symétrie orthogonale ou une translation convenablement choisie. Comparer :

- a) pour tout nombre complexe z , $d(-z)$ et $d(z)$;
- b) pour tout nombre complexe z et pour tout nombre entier q , $d(z + iq)$ et $d(z)$;
- c) pour tout couple de nombres réels x et y , $d(x + iy')$ et $d(x + iy)$ lorsque $y' = 2E(y) - y + 1$.

Déterminer l'ensemble des valeurs $d(z)$ lorsque z décrit C .

3° Soit δ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le nombre réel $\delta(M) = d(z)$. Définir et représenter graphiquement dans $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M tels que $\delta(M) = 0$.

On définit de même une application c de C dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall z \in C, \quad z = x + iy,$$

$$c(z) = \inf [x - E(x), E(x + 1) - x], \quad x \text{ et } y \text{ réels,}$$

et l'application correspondante γ , de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le nombre réel $\gamma(M) = c(z)$.

Définir et représenter graphiquement dans $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\delta(M) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \gamma(M) = \frac{1}{2}.$$

4° Soit T l'application qui, à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z , associe le point M' de $\mathcal{P}$ d'affixe z' telle que :

$$z' = x + id(z), \quad \text{avec } x \text{ partie réelle de } z.$$

Soit M_1 d'affixe 1, M_2 d'affixe $1 + i$ et M_3 le milieu du segment $[M_1, M_2]$; déterminer leurs images par T .

T est-elle une application affine de $\mathcal{P}$?

5° On note $I_{a,b}$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont les affixes $z = x + iy$ vérifient $a \leq y < b$, a et b étant deux réels donnés.

a) Démontrer que la restriction de T à $I_{n,n+\frac{1}{2}}$, où $n \in \mathbb{Z}$, est une translation.

b) Démontrer que la restriction de T à $I_{n+\frac{1}{2},n+1}$, où $n \in \mathbb{Z}$, est une réflexion.

6° On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{2}$.

7° Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique C dans le plan $\mathcal{P}$. Montrer que C possède un centre de symétrie.

8° Construire la courbe C' , image de la courbe C par T .
9° Construire la représentation graphique Γ de la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - d(x + iy),$$

x et y étant les coordonnées d'un point M de C .

91. Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On considère les suites $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+2} - 2Z_{n+1} \cos \theta + Z_n = 0. \quad (1)$$

On donne d'autre part un plan $\mathcal{P}$ de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre Z_n est représenté par le point M_n de coordonnées x_n et y_n ; x_n et y_n désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de Z_n .

I — Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra :

$$Z_0 = 3 + i, \quad Z_1 = 1 + 2i.$$

1° On suppose dans cette question $\theta = 0$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 . Démontrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Calculer $M_0 M_n$ en fonction de $M_0 M_1$ et n .

2° On suppose dans cette question $\theta = \frac{\pi}{3}$. Construire les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_6$. Montrer que la suite (Z_n) est périodique.

3° On suppose dans cette question $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 . Montrer que quel que soit n , le point O est isobarycentre de M_{n+1}, M_{n+2} . Montrer que (Z_n) est périodique.

4° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0.$$

On appelle α et β ses racines. Montrer que si :

$$\forall n, \quad Z_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n,$$

avec λ et μ complexes quelconques, alors la suite (Z_n) vérifie la relation (1).

II — On prend dans cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_n = \lambda(\cos n\theta + i \sin n\theta) + m\bar{\lambda}(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

où λ est un complexe donné non nul, $\lambda = a + ib$, avec a et b réels, $\bar{\lambda}$ son conjugué et m un réel donné.

1° Remarquer que la suite (Z_n) vérifie la relation (1).

2° Calculer x_n et y_n en fonction de a, b, m, θ .

3° Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de x_n et y_n pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

5° Montrer que si $m = 1$, alors Z_n est réel. Exprimer dans ce cas Z_n en fonction de a, b, θ . Préciser Z_n dans le cas où $\lambda = 1$, puis $\lambda = i$.

I – GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS

Dans ce chapitre, consacré à la résolution des **systèmes d'équations linéaires**, les valeurs des inconnues, les coefficients des inconnues et, d'une façon plus générale, tous les nombres utilisés sont des nombres réels.

On appelle **équation linéaire à p inconnues** toute relation de la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \beta,$$

où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les **inconnues** et où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont p réels donnés appelés **coefficients des inconnues**, et β un réel donné appelé **coefficient du second membre** de l'équation.

On dit qu'un p -uplet de réels $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ *vérifie*, ou *satisfait*, l'équation si on obtient une égalité en substituant chaque c_j à chaque x_j dans l'équation. C'est ainsi que le 4-uplet $(-1, 2, 0, -3)$ vérifie l'équation $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1$.

• Le couple formé par deux équations linéaires à deux inconnues est appelé **système** de deux équations linéaires à deux inconnues; $(3x + 2y = 2, x + y = 1)$ en est un exemple.

Par habitude et commodité on le note :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Appelons (S_1) ce système. **Résoudre** (S_1) , c'est chercher l'ensemble des couples de réels (c_1, c_2) , appelés **solutions**, qui vérifient chacune des équations.

Si (x_0, y_0) est solution de (S_1) , c'est-à-dire si (x_0, y_0) vérifie les deux équations, on a :

$$3x_0 + 2y_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_0 + y_0 = 1;$$

en retranchant 3 fois la deuxième équation de la première, on obtient $-y_0 = -1$, d'où $y_0 = 1$ et par suite $x_0 = 0$, d'après la seconde équation. Remarquons que la seule affirmation permise par le raisonnement est : « si (S_1) a une solution alors $(0, 1)$ est la seule solution », mais pas : « (S_1) admet $(0, 1)$ pour solution ».

Il reste à examiner si $(0, 1)$ est solution. Comme $3 \times 0 + 2 \times 1 = 2$ et $0 + 1 = 1$, $(0, 1)$ est bien solution de (S_1) , et c'est la seule d'après la première partie du raisonnement.

• Considérons le système de *trois* équations linéaires à *deux* inconnues :

$$(S_2) \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Si le couple de réels (x_0, y_0) était solution, il vérifierait les deux premières équations; on aurait donc $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, d'après le résultat précédent. Comme $(0, 1)$ ne satisfait pas la troisième équation, il s'ensuit que le système n'a pas de solution.

On dit que les équations sont **incompatibles** et que le système est **impossible**.

Remarquons que le système (S_1) est déterminé par le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le système (S_2)

par le tableau $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Plus généralement, le n -uplet d'équations :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

est appelé **système de n équations linéaires à p inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$.

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$ est la i -ième équation du système, on la note L_i . Dans cette équation, les réels a_{ij} sont respectivement les coefficients des inconnues x_j et le réel b_i , le coefficient du second membre.

Lorsque tous les b_i sont nuls le système est dit **homogène**. Le système homogène associé à (S) est obtenu en remplaçant chaque coefficient des seconds membres par 0.

On appelle **solution** du système, tout p -uplet de réels $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ qui vérifie les n équations du système. Si le système est homogène, il admet la solution **banale** $(0, 0, \dots, 0)$.

Le système (S) est déterminé par le tableau M :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

appelé **matrice complète** du système.

L_i désignera aussi la i -ième ligne de cette matrice.

II — INTERPRÉTATION VECTORIELLE D'UN SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS LINÉAIRES À 2 INCONNUES

Activité

1. Soit $\mathcal{B}$ une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$, c'est-à-dire un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs du plan non colinéaires.

Rappelons qu'étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans la base $\mathcal{B}$, on appelle **déterminant** du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$, le réel $ad - bc$, noté $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Rappelons également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (resp. non colinéaires) si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (resp. $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$).

1° Démontrer les propriétés, vérifiées par des vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$:

- a) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$; en déduire $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$;
- b) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$;
- c) pour tout réel x , $\det_{\mathcal{B}}(x\vec{u}, \vec{v}) = x \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$;
- d) $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$;
- e) pour tout réel y , $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, y\vec{v}) = y \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$.

2° On considère le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 3x + 4y = -5. \end{cases}$$

Dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$ rapporté à la base $\mathcal{B}$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}(2, 3), \quad \vec{v}(-5, 4), \quad \vec{w}(12, -5).$$

(A noter que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement les coefficients de x et y et que celles de $\vec{w}$ sont les coefficients des seconds membres des équations du système.)

- a) Démontrer que le système (S_1) et l'équation (1) : $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$, sont équivalents (tout couple solution de (S_1) vérifie (1) et réciproquement).
- b) Démontrer que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$. En déduire que l'équation (1), et donc le système (S_1) , possède un couple solution unique.
- c) Des égalités $\det_{\mathcal{B}}(x\vec{u} + y\vec{v}, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{v})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, x\vec{u} + y\vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w})$, déduire les valeurs de x et y .

3° Résoudre de même les systèmes :

$$a) \begin{cases} 6x - y = 4 \\ 5x + 3y = 21; \end{cases} \quad b) \begin{cases} 6x - 15 = 8y \\ 12y = 5x - 10; \end{cases} \quad c) \begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 3y + 8x = 52. \end{cases}$$

4° Plus généralement, résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ lorsque $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$.

5° On considère le système $(S_2) : \begin{cases} \frac{5}{3}x - 3y = -1 \\ -10x + 18y = m \end{cases}$ où x, y sont les inconnues et m un nombre réel donné.

- a) Traduire le système par une équation vectorielle $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$ (2).
- b) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ forment-ils une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$?
- c) Montrer que l'équation (2) peut s'écrire sous la forme $(x + \lambda y)\vec{u} = \vec{w}$, où λ est un nombre réel que l'on déterminera.
- d) Déterminer suivant les valeurs de m les solutions du système (S_2) .

6° On considère le système $(S_3) : \begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ x - 2y + z = 9. \end{cases}$

- a) Montrer que (S_3) est équivalent à une équation vectorielle $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{t}$ (3).
- b) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$.
- c) Trouver une solution (x_0, y_0, z_0) de (S_3) et montrer que l'équation (3) est équivalente à $(x - x_0)\vec{u} + (y - y_0)\vec{v} + (z - z_0)\vec{w} = \vec{0}$. En déduire l'ensemble des solutions de (S_3) .

2. On considère le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ où x, y sont les inconnues et a, b, c, d, e, f , des réels donnés.

Notons : $A = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \quad A_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}, \quad A_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}.$

Le déterminant A est appelé déterminant du système (S) ; A_x (resp. A_y) s'obtient en remplaçant dans A les coefficients a, d de x (resp. b, e de y) par les seconds membres c, f .

L'étude faite au 4° de l'activité précédente a montré que si Δ n'est pas nul, le système (S) possède un unique couple solution (x, y) donné par les formules :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

1° Programmer le calcul de x et y sur votre calculatrice.

Réponse (SHARP EL-5050)

Ce programme contient l'expression conditionnelle $h \neq 0$.

- Si la condition est satisfaite, la calculatrice exécute la séquence entre crochets précédée et suivie de $-Y \rightarrow$.
- Si la condition n'est pas satisfaite, elle exécute la séquence entre crochets précédée et suivie de $-N \rightarrow$.

AER	mode programme
CRAMER	titre du programme
ENT	enregistrement du titre
[1] [VAR] h [≠] [VAR] 0	expression conditionnelle $h \neq 0$
[-Y→[]] [2] [▶] [-Y→[]]	séquence exécutée si $h \neq 0$
[-N→[]] [3] [▶] [-N→[]]	séquence exécutée si $h = 0$
} procédure principale	
[SUB]	sous-programme 1
[VAR] h [=] a [×] e [-] b [×] d	calcul de $h = ae - bd$
[SUB]	sous-programme 2
[VAR]	calcul, si $h \neq 0$, de :
x [=] [(c [×] e [-] b	} $x = \frac{1}{h}(ce - bf)$
[×] f [)] [÷] h [,]	
y [=] [(a [×] f [-] c	} $y = \frac{1}{h}(af - cd)$
[×] d [)] [÷] h	
[SUB]	sous-programme 3
[VAR] h [=] [VAR] 0	si $h = 0$, le calcul n'est pas possible
[ENT]	fin et enregistrement du programme

On met ensuite la SHARP EL-5050 en mode calcul (mode COMP) et, à l'aide de la touche [TITLE], on cherche le programme CRAMER. Puis on entre successivement les données a, e, b, d, c et f à l'aide de la touche [COMP]. Enfin, on affiche le résultat, x puis y , toujours à l'aide de la touche [COMP].

2° Utiliser le programme du 1° pour résoudre les systèmes :

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} -357x + 159y = 392 \\ 213x + 25y = -709; \end{cases} & b) \quad & \begin{cases} (-\ln 2)x + \sqrt{7}y = (\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \\ e^2x + \sqrt{\pi}y = \ln 5; \end{cases} \\
 c) \quad & \begin{cases} -9x - 3y = 13 \\ 24x + 8y = 1; \end{cases} & d) \quad & \begin{cases} 4x + y = 1 \\ \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)y = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

● Exercices d'application

1. A toute valeur de m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}'_m$ d'équations respectives :

$$x + 2y = m \quad \text{et} \quad mx - (2m - 1)y = m^2.$$

1° Démontrer que, pour tout réel m , $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}'_m$ se coupent en un point I_m dont on calculera les coordonnées en fonction de m .

2° Construire l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

2. On considère les trois droites d'équations respectives, dans un repère du plan :

$$2x - 5y = 3,$$

$$-x + 3y = m,$$

$$3x - 7y = 3m + 1.$$

Déterminer m de manière que ces droites soient concourantes.

Quelles sont alors les coordonnées de leur point d'intersection ?

3. A tout réel m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation :

$$(3m + 2)x + (7m + 3)y + m - 1 = 0.$$

Démontrer qu'un point $M_0(x_0, y_0)$ du plan appartient à $\mathcal{D}_m$, quel que soit m , si et seulement si :

$$3x_0 + 7y_0 + 1 = 2x_0 + 3y_0 - 1 = 0.$$

En déduire que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par un point fixe dont on calculera les coordonnées.

4. A tout réel m on associe, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation :

$$(m + 1)^2 x + m(m - 1)y - 4m^2 + m - 1 = 0$$

1° Démontrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par un point fixe dont on calculera les coordonnées.

2° En est-il de même pour les droites $\mathcal{A}_m$ d'équation :

$$(m^2 - 3m + 1)x + (2m^2 + m - 3)y + 4m^2 - 3m + 2 = 0?$$

5. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M de coordonnées (x, y) , associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y). \end{cases}$$

1° Démontrer que f est bijective et définir analytiquement sa bijection réciproque f^{-1} .

2° Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des points invariants par f .

3° Pour tout point M d'image M' par f , démontrer :

a) que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste colinéaire à un vecteur fixe;

b) que le milieu du bipoint (M, M') est invariant par f .

En déduire une définition géométrique simple de la transformation f .

III — TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES D'UN SYSTÈME

Considérons le système de n équations linéaires à p inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

et désignons par L_i la i -ième équation du système ($i = 1, 2, \dots, n$).

OPÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS D'UN SYSTÈME

Soit deux équations, L_i et L_j ($i \neq j$) du système (S).

1° En les ajoutant membre à membre, on obtient l'équation notée $L_i + L_j$:

$$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (a_{ip} + a_{jp})x_p = b_i + b_j.$$

Il est alors immédiat que tout p -uplet vérifiant L_i et L_j vérifie cette équation $L_i + L_j$.

2° On peut aussi multiplier l'équation L_i par un réel λ ; on obtient l'équation notée λL_i :

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{ip}x_p = \lambda b_i$$

Tout p -uplet vérifiant L_i vérifie évidemment λL_i et, réciproquement, si λ n'est pas nul, tout p -uplet vérifiant λL_i vérifie L_i .

3° On peut combiner ces deux opérations; par exemple, $L_j + \lambda L_i$ est l'équation :

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \lambda a_{i2})x_2 + \dots + (a_{jp} + \lambda a_{ip})x_p = b_j + \lambda b_i.$$

Remarquons que le système formé par les équations L_i et L_j ($i \neq j$) est équivalent à celui formé par L_i et $L_j + \lambda L_i$ en ce sens que tout p -uplet $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ vérifiant L_i et L_j vérifie L_i et $L_j + \lambda L_i$ et, réciproquement, que tout p -uplet vérifiant L_i et $L_j + \lambda L_i$ vérifie L_i et $(L_j + \lambda L_i) - \lambda L_i$, c'est-à-dire L_i et L_j .

TRANSFORMATIONS D'UN SYSTÈME

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont même ensemble de solutions.

Par une suite finie de transformations élémentaires, au nombre de trois, nous allons associer au système (S) un système équivalent dont la résolution est immédiate.

1. Permutation de deux équations

Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i -ième et la j -ième équation du système.

Par exemple, pour le système
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$
 la transformation $L_1 \leftrightarrow L_3$ conduit

au système
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Il est alors immédiat que le second système est équivalent au premier.

Nous retiendrons :

Si on échange deux équations d'un système, on obtient un système équivalent au premier.

2. Addition d'un multiple d'une équation à une autre équation

Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j -ième équation L_j du système par $L_j + \lambda L_i$, où λ est un réel.

Par exemple, pour le système
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$
 la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

conduit au système
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 6y - z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Comme les systèmes $\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases}$ et $\begin{cases} L_i \\ L_j + \lambda L_i \end{cases}$ sont équivalents, on peut donc énoncer :

Si dans un système on remplace la j -ième équation L_j par l'équation :

$$L_j + \lambda L_i \quad (i \neq j \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}),$$

on obtient un système équivalent au premier.

3. Multiplication d'une équation par un nombre réel non nul

Pour tout réel α , $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie que l'on remplace la i -ième équation par αL_i .

Par exemple, pour le système
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ \frac{1}{3}x - 2y + \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$
, les transformations $L_1 \leftarrow -L_1$

et $L_2 \leftarrow 3L_2$ conduisent au système
$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x - 6y + 5z = 0. \end{cases}$$

Lorsque α n'est pas nul les équations L_i et αL_i sont équivalentes. Par suite :

Si dans un système on remplace la i -ième équation L_i par l'équation αL_i , où α est un réel *non nul*, on obtient un système équivalent au premier.

REMARQUE :

Dans une suite de transformations élémentaires, toutes les lignes concernées par une instruction sont celles de la matrice qui précède immédiatement l'instruction.

Exemples

1. Considérons le système (S_1)
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ -3z = 3. \end{cases}$$

En résolvant la troisième équation, puis la deuxième et la première, on constate aisément que $(-3, 3, -1)$ est l'unique solution de (S_1) .

Remarquons que la matrice complète du système (S_1) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Considérons le système (S_2) :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + 3y + z = 3. \end{cases}$$

La matrice complète de ce système est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ on obtient le système de matrice complète :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

par $L_2 \leftarrow 2L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

par $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

par $L_2 \leftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

et enfin par $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est la matrice complète du système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 12z = 6. \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

A noter qu'on aurait pu continuer ainsi la suite des transformations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est la matrice complète du système

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ 2z = 1 \end{cases} \text{ qui admet}$$

pour unique solution $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Au système (S_3) : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$, faisons subir les transformations élémentaires successives suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice obtenue est la matrice complète du système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 0x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y + 0z = 1. \end{cases}$$

Sa troisième équation n'étant jamais vérifiée, ce dernier système n'a pas de solution. Le système (S_3) qui lui est équivalent n'a donc pas, lui aussi, de solution.

4. Appliquée au système (S_4) : $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$, la méthode précédente donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice obtenue est la matrice complète du système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 0x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y + 0z = 0. \end{cases}$$

Dans ce système la dernière équation, vérifiée par tout triplet de réels, peut être supprimée. A chaque valeur de z choisie arbitrairement, correspond alors deux valeurs x et y déterminées, de manière unique, par les deux premières équations.

L'ensemble des solutions de (S_4) est : $\left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda, \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

IV — MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

La méthode que nous venons d'utiliser pour résoudre les quatre systèmes précédents s'appelle : **méthode du pivot de Gauss**.

Supposant $a_{11} \neq 0$ dans le système général (S), la méthode consiste, dans une première étape, à effectuer les transformations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1,$$

de manière à obtenir un système de matrice complète :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & & a'_{3p} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix}.$$

Dans cette première série de transformations élémentaires, le coefficient *non nul* a_{11} s'appelle le **pivot**.

Ayant obtenu la matrice M' , on choisit un second pivot pour le système, de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues :

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{np}x_p = b'_n. \end{cases}$$

Si le réel a'_{22} n'est pas nul, on effectue les transformations élémentaires :

$$L'_3 \leftarrow L'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L'_2, \dots, L'_n \leftarrow L'_n - \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} L'_2.$$

On est ainsi conduit à la matrice :

$$M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3p} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{np} & b''_n \end{pmatrix}.$$

On itère ainsi le procédé.

REMARQUES :

1. Si $a_{11} = 0$ et si $a_{i01} \neq 0$, on commence par effectuer la transformation élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_{i01}$.
2. Si tous les a_{i1} sont nuls, l'inconnue x_1 peut prendre toutes les valeurs réelles. Le système se réduit en fait à un système de n équations linéaires à $p-1$ inconnues $x_2, \dots, x_p$.
3. Si, au cours des transformations, on obtient une équation de la forme $0x_1 + \dots + 0x_p = b$, où $b \neq 0$, le système n'a pas de solution. On arrête alors le processus.
4. Si on obtient une équation de la forme $0x_1 + \dots + 0x_p = 0$, en la supprimant, on obtient évidemment un système équivalent.

Exemples

Dans les exemples, ci-après, de résolution d'un système par la méthode du pivot, les pivots utilisés ont été encadrés. De plus, L_i désigne toujours la i -ième ligne de la dernière matrice écrite.

1. Considérons le système (S_5) :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Le système (S_5) est équivalent au système $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = -1 \\ 2t = -8 \end{cases}$. Il admet donc pour

ensemble de solutions : $\left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \lambda, \lambda, -1, -4 \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Considérons le système (S_6) :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La dernière équation du système équivalent : $0x + 0y + 0z + 0t = \frac{1}{2}$, n'est jamais vérifiée. Le système (S_6) n'a donc pas de solution.

CONCLUSION

Reprenons les notations générales d'un système (S) de n équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ en supposant $a_{11} \neq 0$.

Par des transformations élémentaires successives et par élimination des lignes dont tous les coefficients sont nuls, on se ramène, soit à un système impossible (système contenant une équation $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = \beta$, avec $\beta \neq 0$), soit à un système (S') de r équations ($r \leq n$ et $r \leq p$) à p inconnues, équivalent à (S) et de la forme suivante :

- la première équation de (S') est la première équation de (S) : dans cette équation le premier coefficient non nul est celui, a_{11} , de l'inconnue x_1 ;
- dans la deuxième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_2} dont le rang j_2 est tel que $1 < j_2$;
- dans la troisième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_3} dont le rang j_3 est tel que $1 < j_2 < j_3$;
- et ainsi de suite jusqu'à la r -ième équation dans laquelle le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j_r} dont le rang j_r est tel que $1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r \leq p$.

Les inconnues $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ sont dites **principales** et les autres **secondaires** ou **libres**.

Le choix des inconnues principales dépend du système (S'), c'est-à-dire de la façon dont on a transformé (S) pour obtenir (S'). Une autre suite de transformation de (S) peut conduire à un système (S'') autre que (S') et par conséquent à un autre choix d'inconnues principales.

Il n'y a donc pas unicité du choix des inconnues principales; par contre, on démontre, et nous l'admettons, que leur nombre r , égal au nombre d'équations du système (S'), reste invariable.

Cet entier r , *intrinsèquement lié* au système (S), est appelé le **rang** de (S). A noter que ce rang est inférieur ou égal au nombre n d'équations et au nombre p d'inconnues du système (S).

Distinguons deux cas selon que $r = p$ ou $r < p$.

• Premier cas : $r = p$

Toutes les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont alors principales et le système (S') est de la forme :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \quad \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad a'_{pp}x_p = b'_p \end{array} \right.$$

où les coefficients $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \dots, a'_{pp}$ sont non nuls.

Il est alors immédiat que (S'), et donc (S), possède une solution unique. (C'est le cas du système (S₂) de la page 100).

• Second cas : $p < r$

Il existe alors $p - r$ inconnues secondaires. Si l'on donne à ces inconnues secondaires des valeurs arbitraires, les inconnues principales sont alors déterminées par les r équations de (S'). On dit qu'il y a **indétermination d'ordre $p - r$** .

Le système (S') et, par conséquent, le système (S) possède une infinité de solutions (c'est le cas du système (S₃) de la page 103).

REMARQUES :

1. Un système homogène de n équations linéaires à p inconnues tel que $p > n$ admet au moins une solution autre que la solution banale. En effet, le système n'est pas impossible et son rang r est tel que $r \leq n < p$. Il en résulte $p - r > 0$. Il y a donc indétermination d'ordre $p - r$ et, par suite, infinité de solutions.

2. **Superposition de solutions.** Soit (S) et (S') deux systèmes qui ne diffèrent éventuellement que par les coefficients des seconds membres :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b'_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b'_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b'_n \end{cases}$$

Si $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ est solution de (S) et $(c'_1, c'_2, \dots, c'_p)$ est solution de (S') , alors $(c_1 + c'_1, c_2 + c'_2, \dots, c_p + c'_p)$ est solution du système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 + b'_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i + b'_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n + b'_n \end{cases}$$

■ Exercices résolus

Résoudre les systèmes suivants et préciser éventuellement leur rang.

$$1. (S_7) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Le système } (S_7) \text{ est équivalent au système de rang 3 : } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_4 = \frac{7}{2} \\ x_3 + 2x_4 = \frac{3}{2} \\ 2x_5 = 1. \end{cases}$$

L'ensemble de ses solutions, obtenu à partir des inconnues principales x_1, x_3, x_5 est :

$$\left\{ \left(\frac{7}{2} - 3\lambda - 5\mu, \lambda, \frac{3}{2} - 2\mu, \mu, \frac{1}{2} \right), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2. (S_8) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Le système (S_8) n'a pas de solution puisqu'il est équivalent à un système contenant l'équation $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 3$.

● Exercices d'application

6. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On suppose $a \neq 0$. Résoudre et discuter (S) par la méthode du pivot. On montrera notamment que (S) possède un couple solution et un seul si, et seulement si, $ab' - ba' \neq 0$.

7. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

où a et b sont des réels donnés.

Résoudre (S) par la méthode du pivot et discuter suivant les valeurs de a et b .

8. On considère dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les trois droites d'équations respectives :

$$2x + y = a, \quad 3x - y = b, \quad x - 2y = c.$$

A quelle condition nécessaire et suffisante ces trois droites sont-elles concourantes ?

9. Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f telle que, pour tout réel x :

$$(x^2 - x - 2)f''(x) + (1 - 3x)f'(x) + f(x) = -4x^3 - 6x^2 - 22x + 1.$$

(On déterminera le degré de f , puis on calculera ses coefficients.)

TRAVAUX PRATIQUES

DÉTERMINATION DE FONCTIONS POLYNÔMES

Pour tout entier naturel n , on note P_n l'ensemble des fonctions polynômes f de la forme : $x \mapsto f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $(n+1)$ réels appelés coefficients de f .

Question préliminaire

Il est immédiat que :

Si tous les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ d'un élément f de P_n sont nuls, alors f est la fonction nulle : pour tout réel x , $f(x) = 0$.

- Énoncer la propriété réciproque, notée Π .
- Démontrer que tout élément de P_1 vérifie Π .
- On suppose que tout élément de P_n vérifie Π . Démontrer qu'il en est de même pour tout élément g de P_{n+1} . (Considérer la fonction dérivée de g .)
- Conclure en énonçant un théorème.
- En déduire que tout élément f de P_n s'écrit de manière unique sous la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Toute fonction polynôme f est dite de degré n si f appartient à P_n et si son coefficient a_n n'est pas nul.

Les parties I, II, III suivantes sont indépendantes.

Partie I

1^o a) Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme f de degré 2 telle que $f(0) = 0$ et telle que, pour tout réel x :

$$f(x) - f(x-1) = x \quad (1).$$

b) Écrire l'égalité (1) pour $x = 1, x = 2, \dots, x = n$ et ajouter membre à membre les n égalités ainsi obtenues. En déduire une expression simple de la somme S_1 des entiers $1, 2, \dots, n$.

2^o Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f de degré 3, et une seule, telle que $f(0) = 0$ et telle que, pour tout réel x : $f(x) - f(x-1) = x^2$.

En déduire une expression simple de $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

3^o Trouver une expression simple de la somme $S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Vérifier que $S_3 = S_1^2$.

Partie II

A toute fonction polynôme f , élément de P_3 , on associe la fonction F définie par

$$F(x) = x^2f'(x) + (rx + 2)f(x),$$

où r est un réel donné et f' la fonction dérivée de f .

1^o Démontrer que F est une fonction polynôme. A quelle condition F est-elle élément de P_3 , quel que soit f ?

2^o La condition précédente étant réalisée, démontrer que l'application $\varphi : f \mapsto F$ est une bijection de P_3 sur P_3 .

Partie III

A toute fonction polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, élément de P_2 , on associe la fonction F définie par

$$F(x) = 2(x+1)f(x) - (x^2-1)f'(x),$$

où f' est la fonction dérivée de f .

1^o Démontrer que l'application F associée à tout élément f de P_2 est un élément de P_2 . On note φ l'application de P_2 dans P_2 : $f \mapsto F$.

2° Soit $g : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un élément donné de P_2 . Déterminer les éléments f de P_2 tels que $\varphi(f) = g$.

Examiner les deux cas particuliers :

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

3° On cherche à déterminer les éléments f , non nuls, de P_2 pour lesquels il existe un réel λ tel que $\varphi(f) = \lambda f$.

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une telle fonction, s'il en existe.

a) Traduire la condition $\varphi(f) = \lambda f$ par un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues a, b, c .

b) Transformer (S) par la méthode du pivot de Gauss.

c) Montrer que la condition $\lambda \in \{0, 2, 4\}$ est nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution au moins. Déterminer les solutions correspondant à chacune de ces trois valeurs.

OPTIMISATION DE $ax + by$ DANS UN DOMAINE CONVEXE

Rappels :

1° Une partie A du plan $\mathcal{P}$ est dite **convexe** si tout segment ayant pour extrémités deux points quelconques de A est inclus dans A .

2° Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormal, la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Soit D l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions

$$(I) \quad \begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ x + 2y \leq 42 \\ x + y \leq 22 \\ 2x + y \leq 26 \\ 3x + y \leq 32 \\ 4x + y \leq 40. \end{cases}$$

Si, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on représente chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par le point M de coordonnées (x, y) , l'ensemble D sera représenté par le domaine Δ , intersection des sept demi-plans respectivement définis par les conditions (I). Comme tout demi-plan est convexe et que toute intersection de parties convexes est convexe, Δ est convexe.

1° Dessiner le domaine Δ (prendre $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0,5 \text{ cm}$), puis calculer les coordonnées de ses sommets. On note $O, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ les sommets, (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et on numérote les points M_i de manière que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

On désigne par F l'ensemble des points M situés sur la ligne polygonale $OM_1M_2M_3M_4M_5M_6O$ (F est inclus dans Δ).

2° Soit a et b deux réels positifs non nuls fixés, et soit f l'application de Δ dans $\mathbb{R}_+$ qui à tout point $M(x, y)$ de Δ associe $f(M) = ax + by$.

Le but du problème est de chercher une méthode rapide de détermination d'un point R de Δ pour lequel f est maximale : $\forall M \in \Delta, f(M) \leq f(R)$.

On note S l'ensemble des points R répondant à la question.

a) Pour tout point M de Δ , interpréter $f(M)$ à l'aide de la distance $\delta(M)$ du point M à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = 0$.

b) Démontrer que tout point M de Δ non situé sur F n'appartient pas à S . En déduire que $S \subset F$.

c) Démontrer que si un point M de S appartient à $]M_i, M_{i+1}[$, alors M_i et M_{i+1} sont aussi éléments de S . En déduire que si S n'est pas vide, alors il existe au moins un sommet M_i appartenant à S .

d) Soit M_j un sommet tel que $f(M_j)$ soit le plus grand des réels $f(M_1), f(M_2), f(M_3), f(M_4), f(M_5), f(M_6)$. Démontrer que M_j appartient à S .

e) Montrer que si $f(M_2) \leq f(M_1)$, alors M_1 est élément de S .

4/ Systèmes linéaires

f) Montrer que M_j est élément de S si, pour $j > 1$ et $j < 6$, M_j est un sommet tel que :

$$f(M_j) \geq f(M_{j-1}) \quad \text{et} \quad f(M_j) \geq f(M_{j+1}).$$

g) Montrer que si $f(M_5) \leq f(M_6)$, alors M_6 est élément de S .

3° En partant du point M_1 , décrire une méthode permettant d'obtenir une solution au problème posé, parmi les sommets, et ce sans considérer nécessairement tous les sommets.

Imaginer un programme permettant d'obtenir un sommet solution.

Réponse (SHARP EL-5050)

AER	mode programme
MAXIMUM	titre du programme
ENT	enregistrement du titre
1 [VAR] z [>] a	expression conditionnelle $z > a$
[Y→[]] 2 [▶] [Y→[]]	séquence exécutée si $z > a$
[N→[]] 3 [▶] [N→[]]	séquence exécutée si $z \leq a$
} procédure principale	
[SUB]	sous-programme 1
[VAR] z [=] [VAR] 900 [×] [VAR] x	calcul de $z = 900x + 400y$
[+] [VAR] 400 [×] [VAR] y	
[SUB]	sous-programme 2
[VAR] z [VAR] [STO] A [▶]	place z dans la mémoire A
[VAR] x [VAR] [STO] B [▶]	place x dans la mémoire B
[VAR] y [VAR] [STO] C [▶]	place y dans la mémoire C
[SUB]	sous-programme 3
A [▶] B [▶] C	
ENT	fin et enregistrement du programme

On met ensuite la SHARP EL-5050 en mode calcul (mode COMP), et à l'aide de la touche [TITLE], on cherche le programme MAXIMUM. Puis, on entre les données après avoir vidé la mémoire A :

0 [STO] A	vide la mémoire A
[COMP] x	entrée de l'abscisse
[COMP] y	entrée de l'ordonnée
[COMP] [RCL] A	entrée de a
[COMP]	affiche successivement $f(M)$, x_M , y_M pour le sommet M qui, à ce stade de l'exécution, réalise le maximum de f
[COMP]	
[COMP]	

Lorsque les points sont pris au hasard, la solution est obtenue à l'issue des n opérations d'entrée de leurs coordonnées.

Lorsqu'ils sont classés par ordre d'abscisses croissantes, la solution est atteinte dès qu'il y a répétition des résultats affichés.

4° Appliquer ce programme au cas particulier : $f(M) = 900x + 400y$.
Donner également une solution graphique.