COURS

LES NOMBRES COMPLEXES 1

ARITHMÉTIQUE 14

FONCTION NUMÉRIQUES 33

ÉTUDES D'UNE FONCTION NUMERIQUE .. 42

PRIMITIVES DE FONCTION - CALCUL INTÉGRAL

..... 46

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN 56

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE .. 67

NOTION DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ... 65

SUITES NUMERIQUES 82

CALCUL BARYCENTRIQUE 77

EQUATIONS DIFFERETIELLES 82

APPLICATIONS AFFINES 84

LES ISOMÉRIES DU PLAN 100

LES SIMILITUDES PLANES 109

DÉNOMBREMENT 114

PROBABILITES CONDITIONNELLES - VARIABLE

ALEATOIRES 123

STATISTIQUES 131

EXERCICES

NOMBRES COMPLEXES 147
ARTHMÉTIQUE 158
FONCTIONS NUMERIQUES 166
PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL
..... 188
FONCTION LOGARITHME 197
FONCTION EXPONENTIELLE 213
SUITES NUMERIQUES 228
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES .. 237
CALCUL BARYCENTRIQUE 242
APPLICATIONS AFFINES 246
ISOMETRIES ET SIMILITUDES ... 253
ANALYSE COMBINATOIRE-PROBABILITE 258
STATISTIQUE 265

DEVOIR 268

I – Définition:

1°) Définition 1 : Soit ***i*** le nombre imaginaire unité tel que $i^2 = -1$. On appelle ensemble des nombres complexes, l'ensemble noté $\mathbb{C}$ et défini par :

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib \ ; (a \ ; b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

- ***a*** est appelé la partie réelle de ***z*** notée ***Re(z)*** ;
- ***b*** est appelé la partie imaginaire de ***z*** notée ***Im(z)***.

2°) Égalité de deux nombres complexes :

Soient deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

3°) Opérations dans $\mathbb{C}$:

a) Addition :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$; on a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

b) Multiplication:

$$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

c) Division:

$$\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a')^2 + (b')^2} \quad \text{avec } (a' \ ; b') \neq (0 \ ; 0)$$

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien ; $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$, d'où $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

II – Conjugué d'un nombre complexe:

1°) Définition 2:

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le complexe $\bar{z} = a - ib$.

Exemples: $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$; $z = -1 + 5i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 5i$.

2°) Propriétés: Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- Un complexe *z est réel* $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$
- Un complexe *z est imaginaire pur* $\Leftrightarrow z \neq 0$ *et* $Re(z) = 0 \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\left(\overline{z^n}\right) = \left(\bar{z}\right)^n$
- $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$.

III – Module d'un nombre complexe:

1°) Définition 3:

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$, le réel positif défini par

$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (lire module de z)

Exemples : soit $z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$;

$z_0 = -7 \Rightarrow |z_0| = 7.$ $z_1 = 2i \Rightarrow |z_1| = 2.$

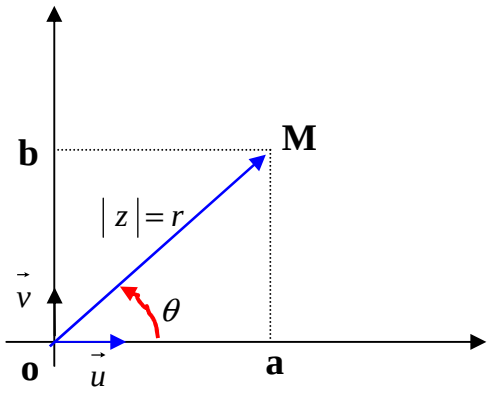
2°) Propriétés du module:

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}|$; $|z^n| = (|z|)^n$;
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec z'$\neq$ 0 ;
- $(|z| = 0) \Leftrightarrow z = 0$; $(|z| = 1) \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- **Si z = a alors |z| = |a| ; si z =bi alors |z| = |b|.**

IV– Argument d'un nombre complexe non nul:

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$. A tout nombre complexe

z = a + ib on associe le point M$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. z = a + ib $\mapsto$ M$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



- Le nombre complexe z = a + i b est appelé l'affixe du point M (a ; b) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (a ; b).
- Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelés respectivement le point image et le vecteur image du nombre complexe z.
- OM = d (O; M) = $\sqrt{a^2+b^2}$ = | z | (module de z).
- Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ($z_B - z_A$) et | $z_B - z_A$ | = AB.

1°) Argument d'un nombre complexe non nul :

On appelle argument de z noté arg(z), le réel égal à une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$. L'argument de z est définie à 2kπ près ; k $\in \mathbb{Z}$. arg(z) = θ + 2kπ où θ est la détermination principale de l'argument. On écrit : **Arg(z) = θ** avec θ ∈] –π ; π].

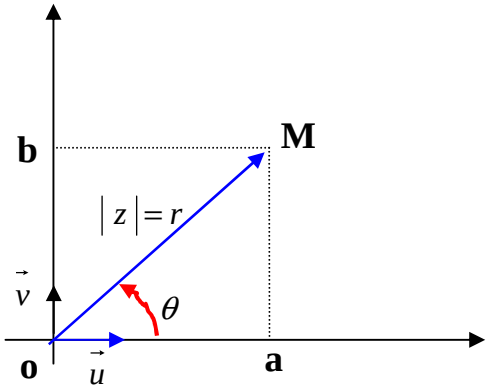
Si z ≠0 alors toute mesure θ de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ est appelée un argument de z ; (Voir figure).

2°) Forme algébrique – Forme trigonométrique d'un complexe non nul :

a) ***Forme algébrique*** :

. z = a + i b . est *la forme algébrique* du nombre complexe z.

b) ***Forme trigonométrique*** : Soit z = a + i b



on a : $\cos\theta=\dfrac{a}{OM}$ $\sin\theta=\dfrac{b}{OM}$ $\Leftrightarrow$ $a=OM\cos\theta$ *et* $b=OM\sin\theta$

$z=a+ib \Leftrightarrow z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ *ou* $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

L'écriture : z = *l z l (cosθ + i sinθ)* ,est appelée **forme trigonométrique** de z .

c) Relation entre Forme Trigonométrique et Forme algébrique :

Soit z = a + ib de module $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ et d'Argument θ.

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{cases} \Rightarrow \theta=.....(\textit{confère cercle trigonométrique})$$

3°) Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul :

P_1) Soit z = a $(a \in \mathbb{R})$, si a>0 alors Arg(z) = 0 ; si a<0 alors Arg(z) = π .

P_2) Le nombre complexe nul n'a pas d'argument ;

P_3) Soit z = bi $(b \in \mathbb{R})$, si b >0 alors $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$; si a<0 alors $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

P_4) Soient z = [|z| ; θ] et z'= [|z'| ; θ'].

$$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') = \theta + \theta' .$$

Remarque : Si z = [|z| ; θ] alors $z^2 = [\,|z|^2 ; 2\theta\,]$; $z^n = [\,|z|^n ; n\theta]$.

P_5) $$\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$$

Si z = [|z| ; θ] et z'= [|z'| ; θ'] alors $\frac{z}{z'} = \left[\frac{|z|}{|z'|} ; \quad \theta - \theta'\right]$.

P_6) $$\text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)$$

P_7) $$\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$$

4°) Notation Exponentielle :

Soit z = [1 ; θ] on convient de noter $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée la forme exponentielle de z.

Donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

5°) Formule de Moivre – Formule d'Euler :

a) ***Formule de Moivre :***

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) .$$

b) Formule d'Euler :

$Z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

V– Linéarisation:

1°) Calcul de cos(nx) et sin(nx) en fonction de cosx et sinx :

- Pour *n* = *2* d'après la formule de Moivre $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

D'après la formule du binôme de Newton

$(\cos x + i\sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2\sin x\cos x)$.

Par identification on a : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad et \quad \sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

- Même procédé pour n = 3 ; 4 ; 5 ;……..

2°) Linéarisation :

z = cosx + isinx
$\bar{z}$ = cosx – i sinx
---
z + $\bar{z}$ = 2 cosx
$\cos x = \left(\frac{1}{2}\right)\left(z + \bar{z}\right)$

z = cosx + isinx
$\bar{z}$ = cosx – i sinx
---
z – $\bar{z}$ = 2i sinx
$\sin x = \left(\frac{1}{2i}\right)\left(z - \bar{z}\right)$

. $\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(z + \bar{z}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n$.

. $\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \left(z - \bar{z}\right)^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n$.

De $z^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad et \quad \bar{z}^n = \cos(nx) - i\sin(nx)$ on déduit que

. $z^n + \bar{z}^n = e^{nx} + e^{-nx} = 2\cos(nx)$ . . $z^n - \bar{z}^n = e^{nx} - e^{-nx} = 2i\sin(nx)$.

Remarque:

$z \times \bar{z} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $z^n \times \bar{z}^n = 1$.

Exemple: Linéariser $\cos^3 x \quad et \quad \sin^4 x$.

VI– Racine n^{ième} d'un nombre complexe:

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

- **Définition :** U étant un nombre complexe non nul, on appelle racine n^{ième} de U tout nombre complexe z tel que $z^n = U$.

- Posons u = [r ; θ] = r (cosθ + i sinθ) et z = [ρ ; x] = ρ (cosx + i sinx).

$z^n = u \Leftrightarrow [\rho^n ; nx] = [r ; \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ nx = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ x = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$ d'où

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad avec \quad 0 \le k \le n-1$$

ou $Z_k = \sqrt[n]{r} \times e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

Exemple :

Déterminer toutes les racines cubiques de l'unité c'est à dire résoudre $z^3 = 1$. Placer les points images A ; B ; C des solutions dans le plan complexe et en déduire la nature du triangle ABC.

Correction

$Z^3 = 1 \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow u = [1 ; 0]$.

$$Z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad avec \quad 0 \le k \le 2$$

- Si k = 0 alors $z_0 = 1 \mapsto A(1 ; 0)$
- Si k = 1 alors $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \mapsto B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Si k = 2 alors $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto C\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- AB=AC=BC d'où le triangle ABC est équilatéral.

- **Théorème 1 :**

Tout nombre complexe non nul U admet exactement *n* racines n^{ième}.

Si Z_k est une racine n^{ième} de U alors $|Z_k| = \sqrt[n]{|U|}$ et $\arg(z_k) = \dfrac{\arg(U) + 2k\pi}{n}$.

avec 0 ≤ k ≤ n-1.

- **Théorème 2 :**

Si z_0 est une racine $n^{ième}$ de U alors on obtient toutes les autres racines de U en multipliant z_0 successivement par les racines $n^{ièmes}$ de l'unité ou 1.

Exemple : Déterminer les solutions dans de l'équation $z^4 = (2 + 3i)^4$.

Correction

$z_0 = 2 + 3i$ est une solution particulière de l'équation. Comme les racines quatrième de 1 sont : 1 ; i : –1 ; – i. Alors les solutions de l'équation $z^4 = (2 + 3i)^4$ sont: $Z_1 = z_0 \times 1 = 2 + 3i$; $Z_2 = z_0 \times i = -3 + 2i$; $Z_3 = z_0 \times -1 = -2 - 3i$; $Z_4 = z_0 \times -i = 3 - 2i$.
L'ensemble des solutions est $S = \{Z_1; Z_2 ; Z_3 ; Z_4\}$.

VII– Équations du second degré:

1°) Cas où les cœfficients sont des réels :

Soit l'équation : $az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Méthode de résolution

- Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Conclure suivant le signe de Δ.

a-/ si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b-/ si $\Delta = 0$ alors $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.

c-/ si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux racines

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad et \quad Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{C}$; $z^2 - 2z + 4 = 0$. *la résolution donne comme ensemble de solution* $S = \{1 - i\sqrt{3} ; 1 + i\sqrt{3}.\}$.

2°) Racine carrée d'un nombre complexe :

Soient z et U deux nombres complexes. On appelle racine carrée du nombre complexe U tout nombre complexe z tel que $z^2 = U$.

(z est racine carrée de U) $\Leftrightarrow$ ($z^2 = U$).

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Soient $z = x + iy$ et $U = a + ib$

($z^2 = U$) équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Exemple :

Déterminer les racines carrées du nombre complexe z = – 5 – 12i.

Correction

Soit $\delta = x + iy$ le nombre complexe tel que : $\delta^2 = z$ et $|\delta|^2 = |z|$.
on a module de z est $|z| = \sqrt{25 + 144} = 13$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ 2xy = -12 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

- Pour $x = 2$, (3) $\Rightarrow y = -3$; donc $\delta_1 = 2 - 3i$.
- Pour $x = -2$, (3) $\Rightarrow y = 3$; donc $\delta_2 = -2 + 3i$.
- δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de $z = -5 - 12i$.

3°) Cas où les coefficients sont des nombres complexes :

Si le discriminant Δ est un nombre complexe de racines carrées δ_1 et δ_2 alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ sont :

$$Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \quad et \quad Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a} .$$

Exemple ; résoudre dans : $(2i)z^2 - 3z - (1 + 3i) = 0$.

$\Delta = -15 + 8i$. Cherchons les racines carrées de Δ.

soit $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$. On a $|\Delta| = 17$;

$$\begin{cases} x^2+y^2=17 \quad (1) \\ x^2-y^2=-15 \ (2) \\ 2xy=8 \qquad (3) \end{cases}$$ (1) + (2) ⇒ $x^2 = 1$ $x = 1$ ou $x = -1$.

- Si $x = 1$ alors (3) donne $y = 4$; donc $\delta_1 = 1 + 4\,i$.
- Si $x = -1$ alors (3) donne $y = -4$; donc $\delta_2 = -1 - 4\,i$.

$$z_1 = \frac{3+1+4i}{4i} = \frac{4+4i}{4i} = \frac{1+i}{i} = \frac{-1+i}{-1} = 1-i \quad ; \quad z_1 = 1-i$$

$$z_2 = \frac{3-1-4i}{4i} = \frac{2-4i}{4i} = -1-\frac{1}{2}i \ ; \qquad z_2 = -1-\frac{1}{2}i\,.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{ 1-i\,;\, -1-\frac{1}{2}i \right\}$.

VIII – Applications géométriques:

1) *Interprétation géométrique du langage complexe :*

Soient z_A ; z_B ; z trois nombres complexes distincts d'images respectives A ; B ; et M dans le plan complexe P.

$$Z = \frac{z-z_B}{z-z_A} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = \dfrac{MB}{MA} \\ Arg(Z) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB} \right) \end{cases}$$

D'autre part arg $(z_B - z_A) = (\vec{i}\,, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$. – arg$(z_B - z_A) = (\overrightarrow{AB}; \vec{i}) + 2k\pi$.

En particulier :

$$\begin{array}{l} z_A \mapsto A \\ z_B \mapsto B \\ z_C \mapsto C \end{array} \quad alors \quad \begin{cases} \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{AC}{AB} \\ \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC} \right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \end{cases}$$

2) *Traductions complexes de certaines configurations usuelles :*

a) *Vecteurs orthogonaux – Vecteurs colinéaires :*

Soit les complexes z_A ; z_B et z_C d'images respectives A ; B ; C.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ⇔

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] ou -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ⇔ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ⇔

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0\,[2\pi] ou\ \pi[2\pi]$ ⇔ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel.

c) Exemple :

Soit les complexes – 1 – i ; 1 + i ; – 1 + i d'images respectives les points A ; B ; C. Déterminer le module et l'argument de Z = $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

Correction

$z_A = -1 - i \mapsto A(-1 ; -1)$; $z_B = 1 + i \mapsto B(1 ; 1)$; $z_C = -1 + i \mapsto C(-1 ; 1)$.

$AC = 2$; $AB = 2\sqrt{2}$; $|Z| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$Arg(Z) = Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = Arg\left(\frac{2i}{2+2i}\right) = Arg\left(\frac{i}{1+i}\right) = Arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = Arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \theta$$

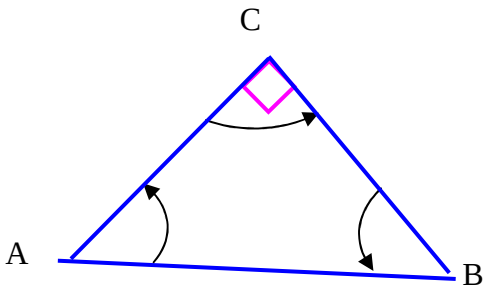
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad d'où \quad Arg(Z) = \frac{\pi}{4}. \qquad Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4}\right].$$

- Nature du triangle ABC

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. De façon analogue on a:

$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{2}{-2i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

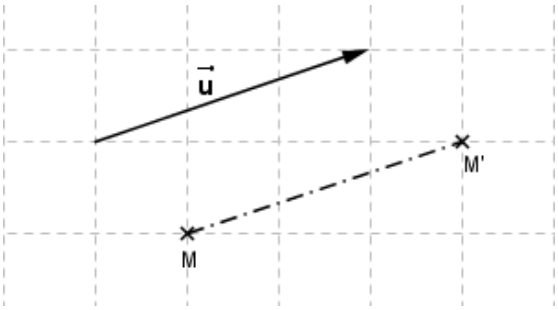
$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle.



IX – Nombres complexes et transformations:

1 – Translations

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0.
Déterminons l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ qui transforme M en M'.



$$t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$$

z' = z + $Z_{\vec{u}}$, est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$.

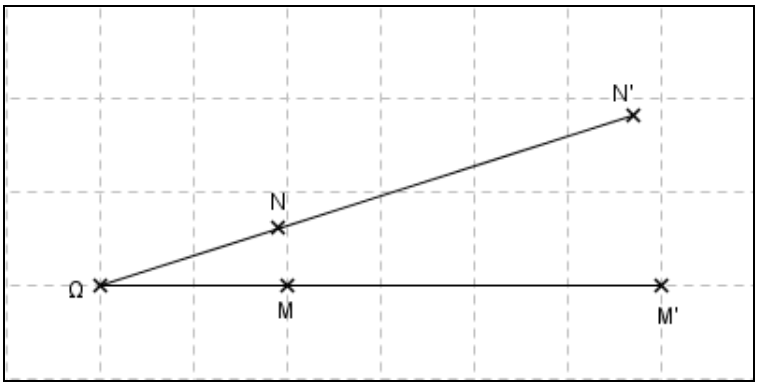
Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}=2+i$.
Déterminer l'écriture complexe de la transformation t.
Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par la transformation t.

$t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z'-z=2+i \Leftrightarrow z'=z+(2+i)$.

L'écriture complexe de la translation t est : $z'=z+2+i$.

2– L'Homothétie :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω. Déterminons l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k qui transforme M en M'.



$$h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \Omega M'=k\times\Omega M \Leftrightarrow z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega) \Leftrightarrow z'=z_\Omega+kz-k\,z_\Omega \Leftrightarrow$$
$$Z'=k\,Z+(1-k)\,Z_\Omega.$$

. $Z'-Z_\Omega = k\,(Z-Z_\Omega)$ ou $Z'=k\,Z+(1-k)\,Z$,

est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Exemple 2 :

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 2 + i$ et de rapport –2. Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par l'homothétie h.

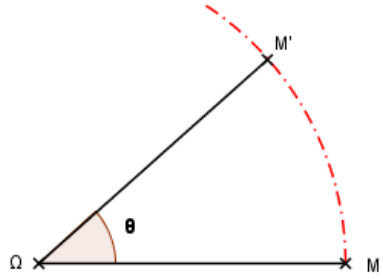
$$h_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$$

$$z' - (2+i) = -2z + 2(2+i) \Leftrightarrow z' - 2 - i = -2z + 4 + 2i \Leftrightarrow z' = -2z + 6 + 3i .$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = -2z + 6 + 3i$.

3 – La Rotation :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω . Déterminons l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle θ qui transforme M en M'.



$$r_{(\Omega;\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z' - Z_\Omega| = |Z - Z_\Omega| \\ Arg\left(\dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega}\right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{|Z' - Z_\Omega|}{|Z - Z_\Omega|} = 1 \\ Arg\left(\dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega}\right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = [1\,;\theta] \Leftrightarrow \frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z' - Z_\Omega = (\cos\theta + i\sin\theta)(Z - Z_\Omega) \Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = e^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$$

$Z' - Z_\Omega = (\cos\theta + i\sin\theta)(Z - Z_\Omega)$ ou **$Z' - Z_\Omega = e^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$** ,

est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exemple :

Soit la rotation r de centre A d'affixe $Z_A = 3i$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'écriture complexe de la transformation r.

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par la rotation r.

$r_A(M) = M' \Leftrightarrow AM' = AM \ et \ (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow z' - z_A = b(z - z_A)$ avec $b = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

$$Donc \quad z' - z_A = b(z - z_A) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = i(z - 3i) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = iz + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = iz + 3i + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = i\,(z + 3) + 3.$$

L'écriture complexe de la rotation r est : $z' = i\,(z + 3) + 3$.

4- Recherche des lieux géométriques :

Soient A ; B ; I (x_0 ; y_0) et M (x ; y) des points du plan.

Si les points M (x ; y) du plan vérifient :	Alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est :
$ax + by + c = 0$	La droite ($\mathcal{D}$) d'équation : $ax + by + c = 0$
$y = \frac{ax + b}{cx + d}$ avec $c \neq 0$	L'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Le cercle ($\mathcal{C}$) de centre I (x_0 ; y_0) et de rayon r.
$MA = MB$	La droite (Δ) médiatrice du segment [AB]
$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$	Le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre le segment [AB]
$y = ax^2 + bx + c$	La parabole ($\mathcal{P}$) d'équation : $y = ax^2 + bx + c$

Ensemble ℕ des entiers naturels

I – Propriétés de ℕ:

1- Propriétés de l'addition dans ℕ:

L'opération **+** est une loi de composition interne dans ℕ;

∀ a ∈ ℕ ; ∀ b ∈ ℕ, (a + b) ∈ ℕ.

- La loi **+** est commutative dans ℕ : ∀ (a ; b) ∈ $\mathbb{N}^2$, a + b = b + a.
- La loi **+** est associative dans ℕ :∀(a ; b ; c)∈$\mathbb{N}^3$, (a + b) + c = a + (b + c) ;
- 0 est l'élément neutre de **+** dans ℕ : ∀ a ∈ ℕ ; a + 0 = 0 + a
- Tout élément de ℕ est simplifiable ou régulier pour **+** dans ℕ :

∀ (x ; y ; z) ∈ $\mathbb{N}^3$, x + **z** = y + **z** ⇒ x = y.

2 - Propriétés de la multiplication dans ℕ:

La loi × est une loi de composition interne dans ℕ;

- La loi × est commutative et associative dans ℕ ;
- 1 est l'élément neutre pour la × dans ℕ ;
- Tout élément non nul est simplifiable ou régulier par la ×.

3 – Exemple de raisonnement par récurrence dans ℕ:

Démontrer par récurrence que ∀ n ∈ ℕ ; $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

-- 0 --

Pour n = 0 $3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$ est divisible par 11.

Supposons que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11, montrons que $3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2}$ est divisible par 11.

$$3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2} = 3^{n+3} \times 3^1 - 4^{4n+2} \times 4^4$$
$$= 3 \times 3^{n+3} - 256 \times 4^{4n+2}$$
$$= 3 \times 3^{n+3} - (253+3) \times 4^{4n+2}$$
$$= 3(3^{n+3} - 4^{4n+2}) - 11 \times 23 \times 4^{4n+2}$$

Puisque $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11 il existe un nombre k tel que :

$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 11k$ et il existe k' tel que : $-11 \times 23 \times 4^{4n+2} = -11k'$.

D'où $3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2} = 3 \times 11k - 11k'$.

⇔ $3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2} = 11(3k - k')$ est divisible par 11.

D'après le principe de récurrence ∀n∈ℕ; $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

4 – Relation d'ordre « ≤ »:

« ≤ » est une relation d'ordre total sur ℕ.

Réflexive : ∀ x ∈ ℕ , x ≤ x ;

Antisymétrique : ∀ (x ; y) ∈ $\mathbb{N}^2$ $\begin{cases} x \le y \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow x = y$;

Transitive : ∀ (x ; y ; z) ∈ $\mathbb{N}^3$ $\begin{cases} x \le y \\ y \le z \end{cases} \Rightarrow x \le z$.

Deux éléments de ℕ sont toujours comparables : ∀(x ; y)∈$\mathbb{N}^2$ x ≤ y ou y ≤ x.

II – Division euclidienne dans ℕ:

1- Activité : On donne a = 71 et b = 8. Trouver deux entiers q et r tels que :

a = bq +r avec 0≤ r < b. Que représente q et r ?.

-- 0 –

71 = (8 × 8) + 7 ⇒ q = 8 et r = 7. q = 8 est le quotient ; r = 7 est le reste.

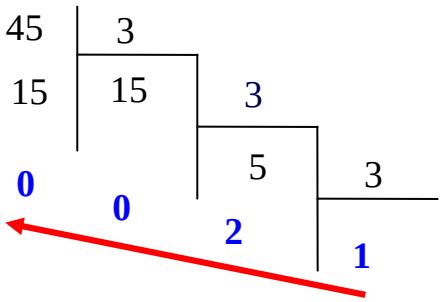
2 – Théorème et définition :

∀(a ; b)∈ℕ×ℕ*, il existe un couple unique (q ;r) tels que a = bq + r avec 0≤r< b.

a = dividende ; b = diviseur ; q = quotient ; r = reste.

III – Systèmes de numération:

1- Activité : Ecrire 45 en base 3.



45 = $\overline{1200}^{(3)}$

2 – Développement d'un entier a selon une base b de numération :

a) Théorème : Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout nombre entier naturel non nul x, il existe une et une seule suite finie (a_0 ; a_1 ; ….. ; a_i ; ….. ;a_n) de nombres entiers naturels telles que :

- ∀ i = 0 à (n – 1) ; 0 ≤a_i < b ;
- 0 < a_n < b ;
- x = a_0 + a_1 × **b** + a_2 × $\mathbf{b^2}$ +……..+a_n×$\mathbf{b^n}$.
- L'écriture **x = a_0 + a_1 × b + a_2 × b^2 +……..+ a_n×b^n** est appelée le développement du nombre x dans la base b.

Exemple : On donne x = 19473 et b = 9.

Donner le développement du nombre x dans la base neuf.

19473	9	2163	9	240	9	26	9	2	9
6	2163	**3**	240	**6**	26	**8**	2	**2**	0

$x = 6 + 3 \times 9 + 6 \times 9^2 + 8 \times 9^3 + 2 \times 9^4 = \overline{28636}^{(9)}$ d' où $19473 = \overline{28636}^{(9)}$

b) Définition :

Si le développement du nombre **x** en base **b** est :

$x = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0$ alors x s'écrit:

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{(b)}.$$

On dit qu'on a représenté **x** dans le système de numération à base **b**.

Remarques :

– Chaque nombre est strictement inférieur à la base b et représenté par un symbole appelé chiffre.

Les symboles utilisés dans la base dix sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

– Si la base b est supérieur à dix on utilise les lettres A ; B ; C ; D ;….. pour représenter les nombres appartenants à [10 ; b[. A = dix ; B = onze ; C = douze ; D = treize.

Exemple : Ecrire 19473 en base treize.

19473	13	1497	13	115	13	8	13
12	1497	**2**	115	**11**	8	**8**	0

$19473 = \overline{8B2C}^{(13)}$ ou $19473 = \overline{8B2C}_{treize}$

3 – Principales bases :

a) Système de numération décimale (ou système à base dix) :

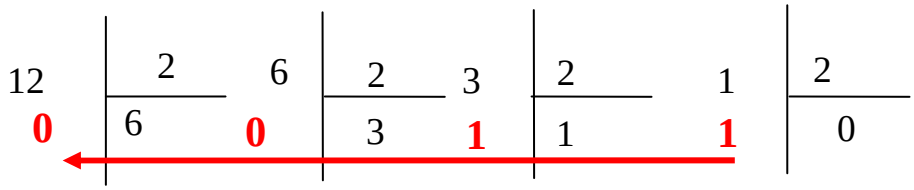
Les chiffres sont : 0 ;1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Le nombre $a = 2.10^3 + 5.10^2 + 3.10 + 1$ s'écrit $a = \overline{2531}_{dix}$ ou a = 2531.

b) Système binaire (ou système à base deux) :

C'est la plus petite base rencontrée, les chiffres utilisés sont : 0 et 1.

Exemple : Ecrire 12 en base deux.



$12 = \overline{1100}^{(2)}$

c) ***Le système hexadécimal (ou à base seize) :***

Les chiffres utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F ;

Exemple : Ecrire en base seize le nombre x = 748.
On obtient $748 = \overline{2EC}^{(16)}$.

4 – Opérations dans la base deux :

a) ***Addition :*** Dresser la table d'addition en base deux puis effectuer :

$$\overline{1101101}^{(2)} + \overline{1011}^{(2)}.$$

-- 0 --

+	0	1
0	0	1
1	1	10

report → 1 1 1 1
1 1 0 1 1 0 1
\+ 1 0 1 1
.....
$= \overline{1111000}^{(2)}$

b) ***Multiplication :*** Dresser la table de multiplication en base deux puis effectuer : $\overline{1101101}^{(2)} \times \overline{1011}^{(2)}$.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

1 1 0 1 1 0 1
× 1 0 1 1
.....
1 1 0 1 1 0 1
1 1 0 1 1 0 1
1 1 0 1 1 0 1 .
$= \overline{10010101111}^{(2)}$

Ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs .

$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots\ldots\}$

I – Extension de la division euclidienne à $\mathbb{Z}$:

Théorème : Quels que soient les entiers relatifs a et b ($a \neq b$) il existe un couple unique (q ;r) d'entiers relatifs tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

Exemple : soit a = – 1992 et b = – 5 trouver (q ; r) $\in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$. Effectuons la division euclidienne de |a| par |b|.

$1992 = 398 \times 5 + 2 \Leftrightarrow -1992 = -398 \times 5 - 2 \Leftrightarrow -1992 = (-5) \times 398 + 3 - 5$

$\Leftrightarrow -1992 = (-5) \times (398 + 1) + 3 \Leftrightarrow -1992 = (-5) \times (399) + 3$;

donc q = 399 et r = 3.

1 – Ensemble des multiples d'un nombre :

- **Définition :** Soit a et b deux entiers relatifs ; a est un multiple de b si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que **a = k b.**

. (a est multiple de b) $\Leftrightarrow$ $(\exists\, !\, k \in \mathbb{Z} \ / \ a = k \times b)$.

. (a est multiple de b, $b \neq 0$) $\Leftrightarrow$ ($\frac{a}{b}$ a pour reste 0) .

Remarque :

L'ensemble des multiples de **a** est noté : $a\mathbb{Z} = \{\ldots . ; -2a ; -a ; 0 ; a ; 2a ; \ldots .\}$.

Exemple : $7\mathbb{Z} = \{\ldots . ; -14 ; -7 ; 0 ; 7 ; 14 ; \ldots .\}$; $0\mathbb{Z} = \{0\}$; $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

2 – Ensemble des diviseurs d'un nombre :

a) Définition : Soit a $\in \mathbb{Z}$ et b $\in \mathbb{Z}^*$.

On dit que b est un diviseur de a, ou que b divise a si et seulement si a est un multiple de b. On note : b/a « lire b divise a ».

b) Propriétés : La relation (../..) est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

c) Notations : L'ensemble des diviseurs d'un entier relatif est noté :
$\mathcal{D}_a$ ou **div (a)**.

Dans la recherche de l'ensemble des diviseurs d'un nombre on se limitera aux diviseurs positifs.

Exemples : div+(10) = {1 ; 2 ; 5 ; 10 } ; div (0) = {… ; –2 ; –1 ; 1 ; 2 ; …}.

d) Détermination de l'ensemble des diviseurs d'un nombre:

Exemple : a = 30 ; nous savons à priori que 1 et 30 sont des diviseurs de 30.
On cherche les diviseurs p de 30 compris entre 2 et $\sqrt{a}$ c'est-à-dire

$p \in [2 ; \sqrt{30}] \Rightarrow p \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. p= 2 $\Rightarrow$ 30 = 2 $\times$15 ; p = 3 $\Rightarrow$ 30 =3 $\times$10 ;

p = 4 ne divise pas 30 ; p = 5 $\Rightarrow$ 30 = 5 $\times$ 6.

Donc l'ensemble des diviseurs de 30 est :

$\mathcal{D}_{30} = \{ -30 ; -15 ; -10 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30 \}$.

II – Nombres Premiers:

1- Définition : On appelle nombre premier tout élément **a** de $\mathbb{N} - \{0 ; 1\}$ qui admet comme diviseurs (–a ; –1 ; 1 ; a) dans $\mathbb{Z}^*$. Donc par définition 1 n'est pas premier. 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; …..sont premiers, par contre 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ….ne sont pas premiers.

Remarque : a est premier $\Leftrightarrow$ (–a) est premier $\Leftrightarrow$ |a| est premier.

Il est donc suffisant d'étudier les nombres premiers dans $\mathbb{N}$.
Un entier naturel a est dit premier s'il est différent de 1 et admet comme diviseurs 1 et a.

2- Recherche des entiers naturels premiers:

Pour étudier si un entier a de $\mathbb{N} - \{0 ; 1\}$ est premier on peut rechercher l'ensemble des diviseurs de a : $\mathcal{D}_a$.

- Si $\mathcal{D}_a = \{0 ; 1\}$ alors a est premier ;
- Si aucun nombre premier compris au sens large entre 2 et $\sqrt{a}$, ne divise pas **a**, alors a est premier.

Exemple : 97 est-il premier ?
- Crible d'Eratosthène :
Cherchons les nombres premiers inférieurs ou égaux à 40.

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	

Les nombres premiers inférieurs à 40 sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37. Vérifions si 97 est premier.

Pour cela on cherche les nombres p compris entre 2 et $\sqrt{97} \simeq 9{,}84 \Rightarrow$

$p \in \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$. $2 \nmid 97$; $3 \nmid 97$; $5 \nmid 97$; $7 \nmid 97$ donc 97 est premier.

Remarque : L'ensemble des nombres premiers est infini.

III – Congruence modulo n – Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

1– Définition :

Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$ et x ; x' deux entiers relatifs. On dit que x est congrue à x' modulo n si et seulement ($x - x'$) est un multiple de n.
Notation : $x \equiv x'$ [n] « se lit x congrue à x' modulo n ».

Comme exemple 15 ≡ 1 [7].

$$\forall\, x \in \mathbb{Z},\ \forall\, x' \in \mathbb{Z},\ x \equiv x'\ [n] \quad \Leftrightarrow \quad (x - x') \in n\mathbb{Z}$$

2– Propriété caractéristique : Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$; ∀ (x ; x') ∈ $\mathbb{Z}^2$.

$x \equiv x'$ [n] ⇔ (x et x' *ont même reste dans la division euclidienne par n*)

3 – Propriété de la congruence modulo n :

- **Réflexivité :** Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$; ∀ x ∈ $\mathbb{Z}$; $x \equiv x$ [n].
  En effet : $x \equiv x$ [n] car $x - x = 0 = 0 \times n$.
- **Symétrie :** ∀ x ∈ $\mathbb{Z}$; ∀ x' ∈ $\mathbb{Z}$; $x \equiv x'$ [n] ⇔ $x' \equiv x$ [n] .
  En effet $x \equiv x'$ [n] ⇔ ∃ k ∈ $\mathbb{Z}$ / $x - x' = kn \Leftrightarrow -x + x' = -kn \Leftrightarrow x' \equiv x$ [n] .
- **Transitivité :** ∀ (x ; x'; x'') ∈ $\mathbb{Z}^3$. $\begin{cases} x \equiv x'[n] \\ x' \equiv x''[n] \end{cases} \Rightarrow x \equiv x''[n]$.
  En effet : $\begin{cases} x \equiv x'[n] \\ x' \equiv x''[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x' = kn \\ x' - x'' = k'n \end{cases} \Rightarrow x - x'' = (k + k')n \Leftrightarrow x \equiv x''\ [n]$.

Conclusion : la relation de « ≡ » modulo n est une relation d'équivalence.

– Règles de calculs sur la congruence modulo n :

Soit (n ; k) ∈ $(\mathbb{N}^*)^2$; (x ; y ; z ; t) ∈ $\mathbb{Z}^4$.

R_1) Si $\begin{cases} x \equiv y\,[n] \\ z \equiv t\,[n] \end{cases}$ *alors* $(x + z) \equiv (y + t)\,[n]$;

R_2) Si $\begin{cases} x \equiv y\,[n] \\ z \equiv t\,[n] \end{cases}$ *alors* $(x \times z) \equiv (y \times t)\ [n]$;

R_3) Si $x \equiv y\,[n]$ *alors* $x^k \equiv y^k\ [n]$.

4 – Structure d'anneaux – Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

a) - Structure d'anneau :

– Définition : L'ensemble A est muni de + et de $\times$.

On dit que (A ; + ; $\times$) est un anneau si et seulement si :

- (A ; +) est un groupe commutatif ;
- La loi $\times$ est associative et distributive par rapport à +.

De plus si la deuxième loi est commutative on dit que A est un anneau commutatif.
Si la deuxième loi admet un élément neutre, on dit que A est un anneau commutatif unitaire (ou unifère). Exemple : ($\mathbb{Z}$; + ; $\times$) est un anneau unifère.

b) - Anneau ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\dot{+}$; $\dot{\times}$) :

- **Classes modulo n :** Nous savons que la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. On appelle **classe d'un élément a** l'ensemble des éléments qui sont en relation avec a. On note : cl(a) ou $\dot{a}$ se lit «classe de a ».
- **Activité :** Dans la congruence modulo 3

  1) Donnez $\dot{0}$; $\dot{1}$; $\dot{2}$; $\dot{3}$; $\dot{4}$; $\dot{5}$; $\dot{6}$; $\dot{3n}$; $\dot{3n+1}$; $\dot{3n+2}$. Que remarque-t-on ?

  2) Déterminer $\dot{0}\cap\dot{1}$; $\dot{0}\cap\dot{2}$; $\dot{1}\cap\dot{2}$;

  3) Comparer $\dot{0}\cup\dot{1}\cup\dot{2}$ et $\mathbb{Z}$.

Solution

1) $\dot{0}=\{.....;-6;-3;0;3;6;9;12;.....\}=\dot{3}=-\dot{6}=\dot{9}$.

– 6 ; – 3 ; 0 ; 3 ; 6 ; ……sont les représentants de la classe de zéro.

$\dot{1}=\{.....;-8;-5;1;4;7;10;13;.....\}$; $\dot{2}=\{.....;-7;-4;-1;2;5;8;11;14;.....\}$

$$\dot{3}=\dot{0}\ ;\ \dot{4}=\dot{1}\ ;\ \dot{5}=\dot{2}\ ;\ \dot{6}=\dot{0}\ ;\ \dot{3n}=\dot{0}\ ;\ \dot{3n+1}=\dot{1}\ ;\ \dot{3n+2}=\dot{2}\ .$$

On remarque que dans la congruence modulo 3 il n'y a que 3 classes : $\dot{0}$; $\dot{1}$; $\dot{2}$.

L'ensemble des classes modulo 3 est noté : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et s'appelle ensemble quotient.

2) $\dot{0}\cap\dot{1}=\varnothing$; $\dot{0}\cap\dot{2}=\varnothing$; $\dot{1}\cap\dot{2}=\varnothing$; $\dot{0}$; $\dot{1}$; $\dot{2}$ sont disjoints deux à deux.

3) $\dot{0}\cup\dot{1}\cup\dot{2}=\mathbb{Z}$.

Conclusion : On dit que la relation de congruence modulo 3 définie donc une partition de $\mathbb{Z}$ en 3 classes (autant que de restes possibles dans la division euclidienne par 3).

Plus généralement soit n$\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\left\{\dot{0}\,;\dot{1}\,;\dot{2}\,;.....;\ \overbrace{\dot{n-1}}\right\}$ car 0 ;1 ;2 ; …;n-1 sont les restes possibles dans la division euclidienne par n.

Remarque : La classe d'un élément a est généralement représentée par le plus petit élément positif ou nul de cette classe.

Exemple : Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on a : cl(16) est notée $\dot{1}$; cl(–12) est notée $\dot{3}$.

$$\forall (x\,;y)\in\ \mathbb{Z}^2\ ,\ \dot{x}=\dot{y}\ \Leftrightarrow\ x\equiv y\ [n]$$

- **Opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:**

➢ **Addition :** Soit n ∈ $\mathbb{N}$ – {0 ; 1}, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on définit une loi de composition interne notée $\dot{+}$ et définie par : $\forall\,\dot{x}\in\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\forall\ \dot{y}\in\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

$$\dot{x}\,\dot{+}\,\dot{y}=\overbrace{x+y}^{\cdot}$$

La loi $\dot{+}$ est appelée la loi quotient du + par la congruence modulo n.

Exemple : Dresser la table d'addition dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

➢ **Multiplication :** De façon analogue dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on définit une loi de composition interne notée $\dot{\times}$ et définie par : $\forall\,\dot{x}\in\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;$\forall\ \dot{y}\in\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

$$\dot{x}\,\dot{\times}\,\dot{y}=\overbrace{x\times y}^{\cdot}$$

La loi $\dot{\times}$ est appelée la loi quotient du $\times$ par la congruence modulo n.

Exemple : Dresser la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

5 – Anneau intègre:

a) Définition et propriété :

On dit qu'un anneau commutatif A est intègre si et seulement si ∀x ∈ A ;∀y∈ A ;

$$x\times y = 0\ \Rightarrow x = 0\ \text{ ou } y = 0.$$

(L'anneau commutatif A est intègre) ⇔ ($x\times y = 0\ \Rightarrow\ x = 0$ ou $y = 0$)

Exemple : $(\mathbb{Z}\ ;+\ ;\times)$ est un anneau intègre par contre : $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\ ;\dot{+}\ ;\dot{\times})$ est non intègre car $\dot{6}\dot{\times}\dot{3}=\dot{0}$ *mais* $\dot{6}$ *et* $\dot{3}$ sont tous non nuls dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. On dit que $\dot{6}$ *et* $\dot{3}$ sont des *diviseurs de zéro* dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Plus généralement dans un anneau commutatif unifère, s'ils existent deux éléments non nuls dont le produit est nul :

- ✓ Ces éléments sont des diviseurs de zéro ;
- ✓ L'anneau est non intègre.

b) Dans un anneau intègre : $\begin{cases} a\,x=b\,x \\ et\ \ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=b$**.** Ceci est faux dans un anneau non intègre. Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ on a : $\dot{2}\dot{\times}\dot{2}=\dot{2}\dot{\times}\dot{0}$ *mais* $\dot{2}\neq\dot{0}$.

c) Si n est premier $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\dot{+}\ ;\dot{\times})$ est anneau intègre.

d) Si n n'est pas premier, il existe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des diviseurs de zéro ; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau non intègre.

Exercice : Montrer que ∀ n ∈ ℕ, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

1ère Méthode : (Raisonnons par récurrence)

Il suffit de montrer que $4^n + 15n - 1 \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow \dot{4}^{n}\dot{+}\dot{15}\dot{n}\dot{-}\dot{1}=\dot{0} \Leftrightarrow \dot{4}^{n}=\dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{1}$.

$$Si\ \ n=0\ \ alors \left|\begin{array}{l} \dot{4}^{n}=\dot{1} \\ \dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{1}=\dot{1} \end{array}\right. \ vraie.$$

Supposons $\dot{4}^{n}=\dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{1}$ et montrons que $\dot{4}^{(n+1)}=\dot{3}(\dot{n+1})\dot{+}\dot{1}$.

$\dot{4}^{n+1}=\dot{4}^{n}\dot{\times}\dot{4}=\dot{4}(\dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{1}) \Leftrightarrow \dot{4}^{n+1}=\dot{12}\dot{n}\dot{+}\dot{4} \Leftrightarrow \dot{4}^{n+1}=\dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{4}=\dot{3}\dot{n}\dot{+}\dot{3}\dot{+}\dot{1} \Leftrightarrow \dot{4}^{n+1}=\dot{3}(\dot{n+1})\dot{+}\dot{1}$. D'où ∀ n ∈ ℕ, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

2ème Méthode : (restes de la division de 4^n par 9)

$4^0 \equiv 1\ [9]$ période = 3

$4^1 \equiv 4\ [9]$ donc ∀ k ∈ ℕ, $4^{3k} \equiv 1\ [9]$

$4^2 \equiv 7\ [9]$ $4^{3k+1} \equiv 4\ [9]$

$4^3 \equiv 1\ [9]$ $4^{3k+2} \equiv 7\ [9]$.

- Si n = 3k on a : $4^n \equiv 1\ [9]$

$15n \equiv 0\ [9]$

$-1 \equiv 8\ [9]$

$4^n + 15n - 1 \equiv 0\ [9]$

- Si n = 3k+1 on a : $4^n \equiv 4\ [9]$

$15n \equiv 6\ [9]$

$-1 \equiv 8\ [9]$

$4^n + 15n - 1 \equiv 0\ [9]$

- Si n = 3k+2 on a : $4^n \equiv 7\ [9]$

$15n \equiv 3\ [9]$

$-1 \equiv 8\ [9]$

$4^n + 15n - 1 \equiv 0\ [9]$.

D'où $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

3ème Méthode : on peut aussi calculer les valeurs prises par $4^n + 15n - 1$ lorsqu'on substitue à n les valeurs respectives : $\dot{0}\ ;\ \dot{1}\ ;\ \dot{2}\ ;\ \dot{3}\ ;\ \dot{4}\ ;\ \dot{5}\ ;\ \dot{6}\ ;\ \dot{7}\ ;\ \dot{8}$.

6 – Équations dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\ \dot{+}\ ;\ \dot{\times})$:

a) Équations $\dot{a}x + \dot{b} = \dot{0}$ **:** résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$;

1ère méthode : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\ \dot{0}\ ;\ \dot{1}\ ;\ \dot{2}\ ;\ \dot{3}\ ;\ \dot{4}\ \}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$x	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$x + $\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$

2ème méthode :

Définition : un élément **a** de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est dit inversible si et seulement si il existe un élément noté :$\mathbf{a^{-1}}$ de tel que : $\mathbf{a} \times \mathbf{a^{-1}} = 1$. $\mathbf{a^{-1}}$ est appelé l'inverse de **a.**

- Dans l'équation $\dot{a}x + \dot{b} = \dot{0}$**,** si a est inversible on multiplie les deux membres par $\mathbf{a^{-1}}$. $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$, $\dot{2}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et son inverse est $\dot{3}$.

$\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{6}x + \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{2}$.

b) Equations : $\dot{a}x^2 + \dot{b}x + \dot{c} = \dot{0}$:

Exemple 1 : résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$.

$x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow (x+\dot{1})^2 - \dot{1} + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow (x+\dot{1})^2 + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow (x+\dot{1})^2 - \dot{2} = \dot{0}$ comme $\dot{4} \times \dot{4} = \dot{2}$ alors $(x+\dot{1})^2 - (\dot{4})^2 = \dot{0} \Leftrightarrow (x+\dot{1}-\dot{4})(x+\dot{1}+\dot{4}) = \dot{0}$ puisque $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, on a :

$(x-\dot{3})(x+\dot{5}) = \dot{0} \Leftrightarrow x - \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{3}$ *ou* $x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow x = -\dot{5} \Leftrightarrow x = \dot{2}$; $S = \{\dot{2}\ ;\ \dot{3}\}$.

Exemple 2 : résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$: $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$.

En général si n est premier on cherche l'inverse de $\dot{2}$ noté $\dot{2}^{-1}$ et on multiplie b par $\dot{2} \times \dot{2}^{-1}$. $\dot{7}$ est l'inverse de $\dot{2}$. $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + (\dot{2} \times \dot{7})x + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow$ $(x + \dot{7})^2 - \dot{7}^2 + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow (x + \dot{7})^2 + \dot{9} = \dot{0} \Leftrightarrow (x + \dot{7})^2 - \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow (x + \dot{5})(x + \dot{9}) = \dot{0}$ puisque l'anneau est intègre on a :

$x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{8}$ *ou* $x + \dot{9} = \dot{0} \Leftrightarrow x = -\dot{9} \Leftrightarrow x = \dot{4}$; $S = \left\{ \dot{4} ; \dot{8} \right\}$.

Exemple 3 : résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau non intègre car 6 n'est pas premier, donc admet des diviseurs de zéro : $\dot{2}$; $\dot{3}$; $\dot{4}$. Les paires de diviseurs associés sont : $\left\{ \dot{2} ; \dot{3} \right\}$; $\left\{ \dot{3} ; \dot{4} \right\}$. $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + x = \dot{0} \Leftrightarrow x(x + \dot{1}) = \dot{0} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \dot{0} \\ x + \dot{1} = \dot{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dot{0} \\ x = \dot{5} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \dot{2} \\ x + \dot{1} = \dot{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dot{2} \\ x = \dot{2} \end{cases} \Rightarrow x = \dot{2}$ *ou* $\begin{cases} x = \dot{3} \\ x + \dot{1} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \dot{1} \end{cases}$ *impossible*

ou $\begin{cases} x = \dot{4} \\ x + \dot{1} = \dot{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \dot{1} \end{cases}$ *impossible* *ou* $\begin{cases} x = \dot{3} \\ x + \dot{1} = \dot{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dot{3} \\ x = \dot{3} \end{cases} \Rightarrow x = \dot{3}$; $S = \left\{ \dot{0} ; \dot{2} ; \dot{3} ; \dot{5} \right\}$.

Autre méthode : puisque n est petit nombre.

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$x^2 + x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \dot{0} ; \dot{2} ; \dot{3} ; \dot{5} \right\}$.

7 – Systèmes d'équations:

a) Résolvez dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

b) Résolvez dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{6}y = \dot{5} \\ \dot{5}x + \dot{2}y = \dot{3} \end{cases}$

a) méthode : (substitution)

Mise en garde : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ étant non intègre ne jamais essayer de simplifier une des équations.

$$\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} & (1) \\ x + \dot{5}y = \dot{2} & (2) \end{cases} \qquad (2) \Rightarrow x = -\dot{5}y + \dot{2},$$

en remplaçant x par sa valeur dans (1) on a :

$$\dot{2}(\dot{2} - \dot{5}y) - \dot{4}y = \dot{2} \Leftrightarrow \dot{4} - \dot{10}y - \dot{4}y = \dot{2} \Leftrightarrow \dot{4} + \dot{4}y = \dot{2} \Leftrightarrow \dot{4}y = \dot{4}; \quad y \in \{\dot{1}\,;\ \dot{4}\}$$

* si y = $\dot{1}$ alors x = $\dot{3}$

* si y = $\dot{4}$ alors x = $\dot{0}$; $S = \{(\dot{3}\,;\dot{1})\,;(\dot{0}\,;\dot{4})\}$

8 – Critères de divisibilité:

- **Divisibilité par 2 :** Un nombre est divisible par 2 s'il est terminé par 0 ; ou 2 ; ou 4 ; ou 6 ; ou 8.
- **Divisibilité par 3 :** Un nombre est divisible par 3 si la somme des ses chiffres est divisible par 3.
- **Divisibilité par 4 :** Un nombre est divisible par 4 si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres de la gauche vers la droite est divisible par 4.
- **Divisibilité par 11 :** Un nombre est divisible par 11 si la somme de ses chiffres de rang impair moins la somme de ses chiffres de rang pair (de la droite vers la gauche) est divisible par 11.

Exemple :

Soit **x = 4 3 7 1 9 5**

5 – 9 + 1 – 7 + 3 – 4 = – 11 divisible par 11 donc x est divisible par 11.

Plus Petit Commun Multiple – Plus Grand Commun Diviseur .

I – Plus petit commun multiple de deux nombres :

1) Exemple : Trouver $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$; que représente $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$. Quel est le plus petit élément positif non nul de $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$?

$2\mathbb{Z} = \{.....; -6; -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; .....\}$

$3\mathbb{Z} = \{.....; -9; -6 ; -3 ; 0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; .....\}$

$2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} = \{.....; -12; -6 ; 0 ; 6 ; 12 ; 6 ; 9 ; 12 ; .....\} = 6\mathbb{Z}$.

Le plus petit élément positif non nul de $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$ est **6**. Cet élément est appelé le plus petit commun multiple à 2 et 3. On note : P.P.C.M (2 ; 3) = 6 ou $2\vee 3 = 6$.

2) Définition : Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$. On appelle plus petit commun multiple de a et b, le plus petit élément positif non nul de $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}$.

On note : PPCM (a ; b) ou $a \vee b$.

Exemple : PPCM(–3 ; 5) = 15.

3) Théorème Fondamental:

L'ensemble des multiples communs à deux nombres est l'ensemble des multiples de leur PPCM. Autrement dit, lorsque PPCM(a ; b) = μ on a :

- $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z} = \mu\,\mathbb{Z}$;
- $\forall m \in \mathbb{Z}$, [m est multiple de a et b] $\Leftrightarrow$ [m est multiple de μ].

4) Propriétés:

P_1) Soient a et b deux entiers relatifs non nuls

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, PPCM (k a ; k b) = $k \times$ PPCM(a ; b).

P_2) Tout nombre divisible par a et par b n'est pas toujours divisible par $a\times b$.

Exemple : 20 est divisible par 4 et par 10 ; mais 20 n'est pas divisible par 40.

II – Plus grand commun diviseur de deux nombres :

1) Exemple : Soit a = 12 et b = 8. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 12 et de 8. Quel est le plus grand élément de $\mathcal{D}_{12}\cap\mathcal{D}_8$?.

-- 0 --

$\mathcal{D}_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$; $\mathcal{D}_{12} = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; \}$ alors a : $\mathcal{D}_{12}\cap\mathcal{D}_8 = \{1 ; 2 ; 4\}$.

4 est le plus grand élément. On note : **P.G.C.D (12 ; 8) = 4 ou $12\wedge 8 = 4$** .

2) Définition : Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$. On appelle plus grand commun diviseur de a et b, le plus grand élément de :$\mathcal{D}_a\cap\mathcal{D}_b$.

On note : PGCD (a ; b) ou $a \wedge b$.

3) Théorème Fondamental:

Lorsque PGCD(a ; b) = δ on a :

- $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_\delta$;
- $\forall d \in \mathbb{Z}^*$, [d/a et d/b $\Leftrightarrow$ d/δ] .

4) Détermination pratique du PGCD de deux nombres:

a) 1ère méthode : (Prendre le max de $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$).
Elle est bonne lorsque a et b sont des petits nombres.

b) 2ème méthode : on utilise la propriété suivante, pour tout nombre entier relatif non nul ; P.G.C.D(x ; y) = P.G.C.D (x – y ; y) .

Exemple : x = 924 et y = 336.

PGCD(924 ; 336) = PGCD(924–336 ; 336) = PGCD(588 ; 336)
= PGCD(588–336 ; 336) = PGCD(336 ; 252) = PGCD(252 ; 84)
=PGCD(168 ; 84) PGCD(84 ; 84) = 84.

c) 3ème méthode : (Algorithme d'Euclide).

Propriété (P) : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) avec a = bq + r.

Exemple : a = 5775 et b = 784.

5775 = 7 ×784 + 287. Donc PGCD(5775 ; 784) = PGCD(784 ; 287).
En réitérant 7 fois la propriété (P) on obtient le tableau ci-dessous.

a_i	5775	784	287	210	77	56	21	14
b_i	784	287	210	77	56	21	14	7
r_i	287	210	77	56	21	14	7	0

Le PGCD cherché est le dernier reste non nul. **D'où PGCD(5775 ; 784) = 7.**

5) Nombres étrangers (ou nombres premiers entre eux) :

a) Définition : Si a ∧ b = 1 alors on dit que a et b sont étrangers.

b) Théorème de Bézout :
Deux entiers non nuls a et b sont dits étrangers s'il existe deux entiers relatifs k et ℓ tel que : a k + b ℓ = 1.

- Formulation : $[a \wedge b = 1] \Leftrightarrow [\exists (k ; \ell) \in \mathbb{Z}^2 / a k + b \ell = 1]$.

- Exemple: Déterminer $354 \wedge 25$ et trouver deux entiers relatifs k et ℓ tel que :

$$354k + 25\ell = 1.$$

Divisions	354	25	4	1
Quotients		14	6	4
Restes		4	1	0

$$\mathbf{354 = 25} \times 14 + 4 \Rightarrow 4 = \mathbf{354 - 25} \times 4.$$

$$\mathbf{25} = 6 \times 4 + 1 \Rightarrow 1 = \mathbf{25} - 6 \times 4$$

$$1 = \mathbf{25} - 6\times(\mathbf{354 - 25}\times 14) \Leftrightarrow 1 = \mathbf{25} - 6\times\mathbf{354 + 25}\times 84) \Leftrightarrow$$

$$1 = \mathbf{354}\times\mathbf{(-}\ 6) + \mathbf{25}\times(\ 85)$$

D'où $k = -6$ et $\ell = 85$.

c) Théorème de GAUSS :

$\forall$ (a ; b ; c) $\in (\mathbb{Z}^*)^3$, si a / bc et a est étranger à b alors a/c.

$$\left.\begin{array}{l} Si \quad a / bc \\ et \quad a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \quad Alors \quad a / c$$

d) Propriétés :

P_1) $\forall$ (a_1 ; a_2 ; b) $\in (\mathbb{Z}^*)^3$, [PGCD(a_1 ; a_2 ; b) = 1 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1 \wedge b = 1 \\ a_2 \wedge b = 1 \end{cases}$] ;

P_2) $\forall$ (a_1 ; a_2) $\in (\mathbb{Z}^*)^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} a_1 \wedge a_2 = 1 \\ a_1 / n \\ a_2 / n \end{cases} \Rightarrow a_1 a_2 / n$;

P_3) Si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ;

P_4) PGCD(a ; b) = $\delta \Leftrightarrow \exists!$ (a_1 ; b_1) $\in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\begin{cases} a = \delta a_1 \\ b = \delta b_1 \\ a_1 \wedge b_1 = 1 \end{cases}$

P_5) Si $a \wedge b = 1$ alors PPCM (a ; b) = ab ;

P_6) Si a est multiple de b alors PPCM(a ; b) = a et PGCD(a ; b) = b ;

P_7) Soit m $\in \mathbb{N}^*$ et m $\in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

PPCM(a ; b) = m $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{a}$ *et* $\frac{m}{b}$ *sont étrangers*.

e) Relation entre PGCD et PPCM :

$\forall (a ; b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, PGCD (a ; b) × PPCM (a ; b) = |a b|

6) Exemple d'utilisation du PGCD, du PPCM :

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que $\begin{cases} a \wedge b = 7 \\ a \vee b = 84 \end{cases}$

-- 0 --

En utilisant la propriété P_4) on a :

PGCD(a ; b) = δ $\Leftrightarrow$ ∃! $(a_1 ; b_1) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\begin{cases} a = \delta a_1 \\ b = \delta a_2 \\ a_1 \wedge b_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7a_1 \\ b = 7b_1 \\ a_1 \wedge b_1 = 1 \end{cases}$;

$a \vee b = 84 \Leftrightarrow 7a_1 \vee 7b_1 = 84 \Leftrightarrow 7(a_1 \vee b_1) = 84 \Leftrightarrow 7 a_1 b_1 = 84 \Leftrightarrow a_1 b_1 = 12 \Rightarrow$

$a_1 \in \mathcal{D}_{12}$ et $b_1 \in \mathcal{D}_{12}$ avec $a_1 \wedge b_1 = 1$. $\mathcal{D}_{12} = \{1 ; 12 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4\}$.

- 1er cas : si $a_1 = 1$ et $b_1 = 12$ alors a = 7 et b = 84.
- 2ème cas : si $a_1 = 2$ et $b_1 = 6$ impossible car 2 et 6 sont non étrangers.
- 3ème cas : si $a_1 = 3$ et $b_1 = 4$ alors a = 21 et b = 28.

L'ensemble des solutions est : $S = \{(7;84);(84;7);(21;28) ; (28;21)\}$.

7) PGCD et PPCM de plusieurs nombres :

Exemple : PGCD (15 ; 21 ; 35) = PGCD (3 ; 35) = 1 ;
PPCM (34 ; 51 ; 78) = PPCM (102 ; 78) = 1326.

8) Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k = C_n^0 \, a^n \, b^0 + C_n^1 \, a^{n-1} \, b + \ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} \, a \, b^{n-1} + C_n^n \, a^0 \, b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

9) Décomposition en produit de facteurs premiers :

a) Exemples : Décomposer les nombres a = 60 et b = 975 en produit de facteurs premiers.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

975	5
195	5
39	3
13	13
1	

$975 = 3 \times 5^2 \times 13$

b) Application à la recherche du PGCD et du PPCM :

Prenons a = 7875 et b = 975 on a les décompositions suivantes

$$a = 3^2 \times 5^3 \times 7$$

$$b = 3 \times 5^2 \times 13$$

D'où PGCD (7875 ; 975) = 3×5^2 = 75.

Et PPCM (7875 ; 975) = $3^2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ = 102375.

III –Application à la résolution d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

En général soit à résoudre l'équation : ax + by = c ; (a ; b) $\in (\mathbb{Z}^*)^2$, (x ; y) sont les inconnues dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (E) : ax + by = c.

On cherche le PGCD (a ; b) = δ.

- Si δ ne divise pas c alors S(E) = Ø.
- Si δ/c alors on simplifie l'équation par δ on obtient (E_1) : $a_1x + b_1y = c_1$ avec $a_1 \wedge b_1 = 1$.

On cherche une solution évidente (x_0 ; y_0) de (E_1) à partir des multiples de a_1 et b_1 dont la différence donne c_1.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$-$$

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$$

$$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0$$

- $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow a_1(x - x_0) = -b_1(y - y_0) \Rightarrow$
  $a_1 / -b_1(y - y_0) \Rightarrow$ d'après Gauss que $a_1 / -(y - y_0) \Rightarrow$
  $\exists\, k \in \mathbb{Z} /\ y - y_0 = -k\, a_1 \Leftrightarrow y = y_0 - ka_1$.
- De même $b_1 / a_1(x - x_0) \Rightarrow$ d'après Gauss que $b_1/(x - x_0) \Rightarrow$

  $\exists\, k \in \mathbb{Z} /\ x - x_0 = k\, b_1 \Leftrightarrow x = x_0 + kb_1$.

  D'où l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{(\ x_0 + kb_1; y_0 - ka_1) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

Utilisation de la congruence:

$a_1x + b_1y = c_1 \Leftrightarrow a_1x = -b_1y + c_1 \Leftrightarrow a_1x \equiv c_1[\, b_1] \Leftrightarrow x \equiv x_0[\, b_1] \Rightarrow$

$\exists\, k \in \mathbb{Z} / x = b_1k + x_0$. En remplaçant x par valeur on a : $y = a_1k + y_0$.

Exemples : Résoudre les équations

a) $4x - 8y = 3$;

b) $14x - 22y = 4$.

-- 0 –

a) $4x - 8y = 3$; $4 \wedge 8 = 4 \Rightarrow \delta = 4$ ne divise pas 3 donc $S = \emptyset$.

b) $14x - 22y = 4$; $14 \wedge 22 = 2$; δ /4 donc on a : (E1) : $7x - 11y = 2$.
Une solution particulière de (E_1) est le couple $(x_0 ; y_0) = (5 ; 3)$ à partir de $7\mathbb{N}$ et $11\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{r} 7x - 11y = 2 \\ - \\ 7x_0 - 11y_0 = 2 \\ \hline 7(x - x_0) - 11(y - y_0) = 0. \end{array}$$

$7(x - x_0) - 11(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 7(x - 5) = 11(y - 3) \Rightarrow$

- $7/11(y - 3) \Rightarrow$d'après Gauss $7/(y - 3) \Rightarrow y - 3 = 7k \Rightarrow y = 7k + 3$.
- $11/7(x - 5) \Rightarrow$d'après Gauss $11/(x - 5) \Rightarrow x - 5 = 11k \Rightarrow x = 11k + 5$.

L'ensemble solution est $S = \{(11k + 5 ; 7k + 3) / k \in \mathbb{Z}\}$.

Autre méthode : (utilisation de la congruence)

$14x - 22y = 4$; $14 \wedge 22 = 2$; 2 /4 donc on a : (E_1) : $7x - 11y = 2$.

$7x = 11y + 2 \Leftrightarrow 7x \equiv 2\ [11]$ en multipliant par 8 on a :

$56x \equiv 16\ [11] \Leftrightarrow x \equiv 5\ [11] \Rightarrow x = 11k + 5$. En remplaçant x par sa valeur dans l'équation $7x - 11y = 2$, on obtient $y = 7k + 3$.

D'où l'ensemble solution est : $S = \{(11k + 5 ; 7k + 3) / k \in \mathbb{Z}\}$.

A- / Ensemble de définition d'une fonction :

1- / Définition :

Soit f : A → B une fonction. On appelle ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, l'ensemble des éléments x de A qui ont une image dans B par f.

2- / Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions définies par.

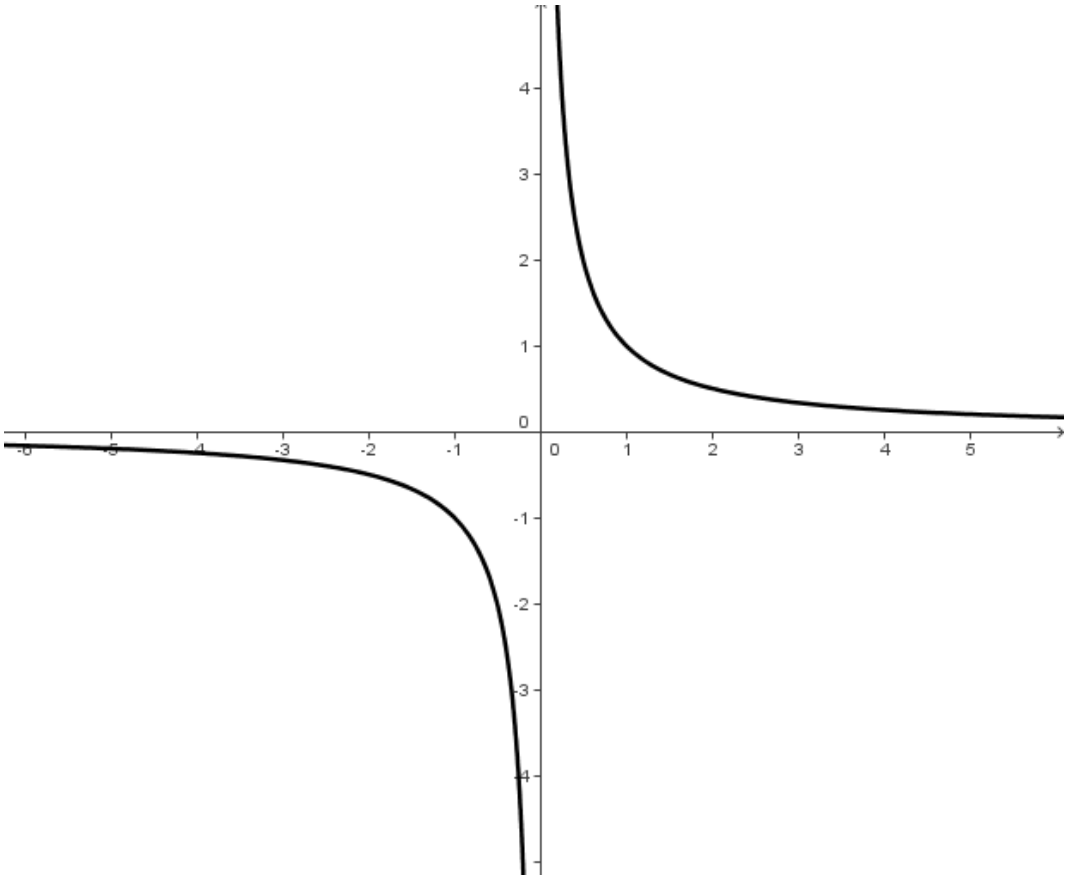
a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$; c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-5}$;

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

B- / Limites :

I- / Approche graphique :

La fonction f est donnée par sa courbe représentative ci-dessous.



1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2-/ Trouver $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

II-/ Calcul de limites :

1-/ Limites obtenues directement ou par transformation de l'expression :

a/ Fonctions Polynômes :

- **Théorème 1 :** À l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+2x^2-5x+9$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3-3x^2+x+4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^4-5x^3+4x^2-8x+1$

b/ Fonctions Rationnelles :

- **Théorème 2 :** À l'infini toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+6x-7}{4x^2-5x+2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+7x-8}{x^2+9x-7}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+2x-4}{x^3+2x^2-5x+2}$

c/ Fonctions Irrationnelles :

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions puis calculer les limites suivantes.

* $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; **

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

d-/ Fonctions Trigonométriques :

Retenons que pour x très voisin de zéro on a : sinx = x d'où

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$; *pour* $a\neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax}=1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}=0$

Exercices : Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$; *pour* $\alpha\neq 0$ *et* $\beta\neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

2-/ Limites obtenues par changement de variables :

Exemple : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$; *en posant* $x-\dfrac{\pi}{6}=u$ *on obtient* $Rép=-\sqrt{3}$

3-/ Limites obtenues par encadrement :

a) Si f(x) ≤ g(x) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

b) Si f(x) ≤ g(x) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

c) Exemple :

Soit $f : x \mapsto f(x) = x + 3\cos x$.

Pour tout réel x on a : $x - 3 \le f(x) \le x + 3$.

- $x - 3 \le f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3) \le \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
- $f(x) \le x + 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \le \lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4-/ Théorème des gendarmes :

Soient *f ; g et h* trois fonctions telles que :

$\forall x \in]a;b[$ si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ *Alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Exemple : Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+1} \right) \Leftrightarrow -1 \le \sin 3x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+1} \le \frac{\sin 3x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+1} \right) = 0$$

5-/ Utilisation de la dérivée dans le calcul des limites :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

b) Exemples

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

C- / Continuité d'une fonction f :

1– Continuité en un point d'abscisse x_0 :

a) Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\begin{pmatrix} f \text{ est continue au point} \\ x_0 \text{ de } D_f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bullet \; f(x_0) \text{ définie} \\ \bullet \; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{pmatrix}$$

b) Exemple :

– Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en x_0=1 ? ; en x_0=0 ?

– Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
- f est-elle continue en $x_0 = 2$?.

2– Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\begin{pmatrix} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{pmatrix} \text{ si et seulement, si } \begin{pmatrix} \bullet \; x_0 \notin Df \\ \bullet \; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \; , \; l \in IR \end{pmatrix}$$

Son prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

b) Exemple et contre exemple :

– Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$; f est-elle prolongeable par continuité en x_0 =1 ? si oui déterminer son prolongement g.

– Soit f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?.

3– Continuité d'une fonction sur un intervalle I = [a ;b] :

Une fonction f est continue sur I = [a ; b] , si elle est continue en tout point de I = [a ; b].

4– Théorème 3:

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

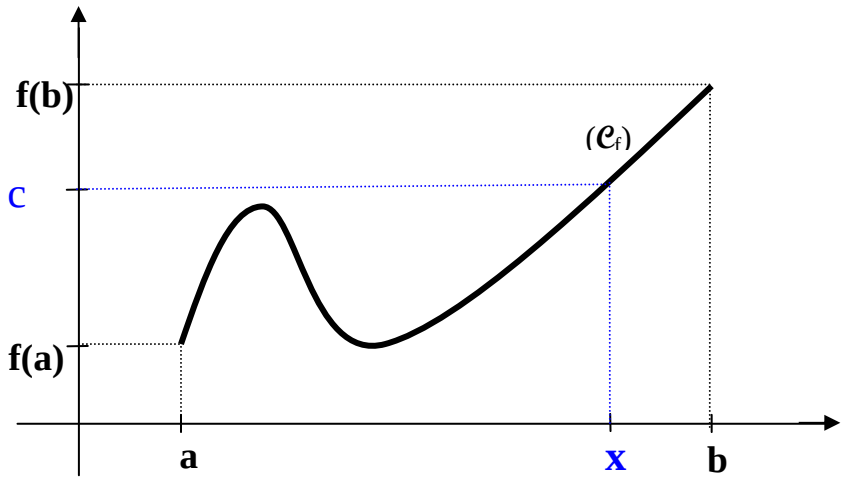
5– Théorème 4 :

Si f et g sont deux fonctions respectivement continue en x_0 ; alors les fonctions $(f+g)\ ;\ (f-g)\ ;\ (f\times g)\ ;\ (\lambda f)\ (\lambda\in IR)\ ;\ \left(\dfrac{f}{g}\right)\ si\ \ g(x)\neq 0$ sont continues en x_0.

6– Théorème des valeurs intermédiaires :

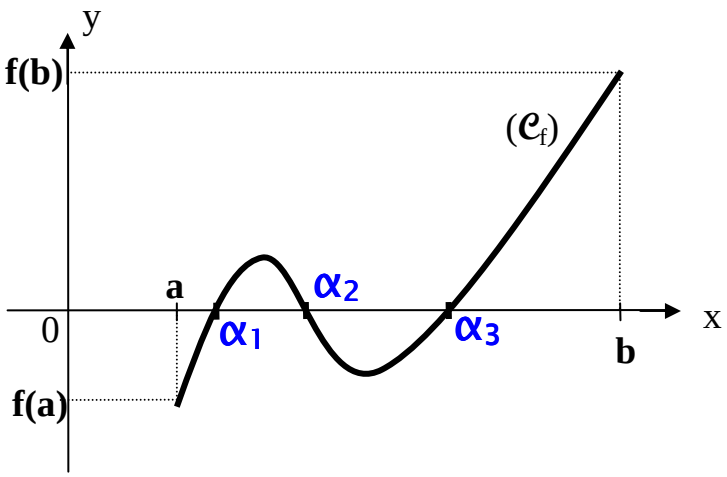
a) Énoncé du théorème 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé [a ; b] et **c** un nombre situé entre $f(a)\ \ et\ \ f(b)$ inclusivement ; alors il existe au moins une valeur x dans l'intervalle [a ; b] tel que $f(x)=c$.



b) Conséquence du Théorème 5 :

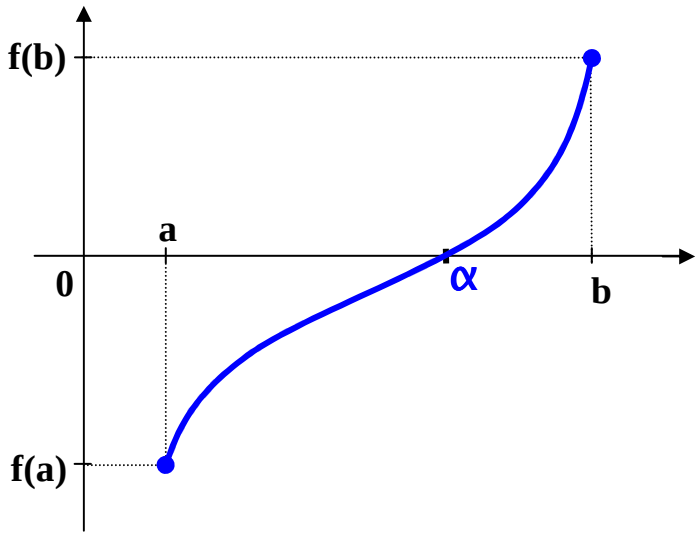
Si f est une fonction continue sur [a ; b] et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans [a ; b] tel que $f(\alpha)=0$.



b) Théorème de la bijection :

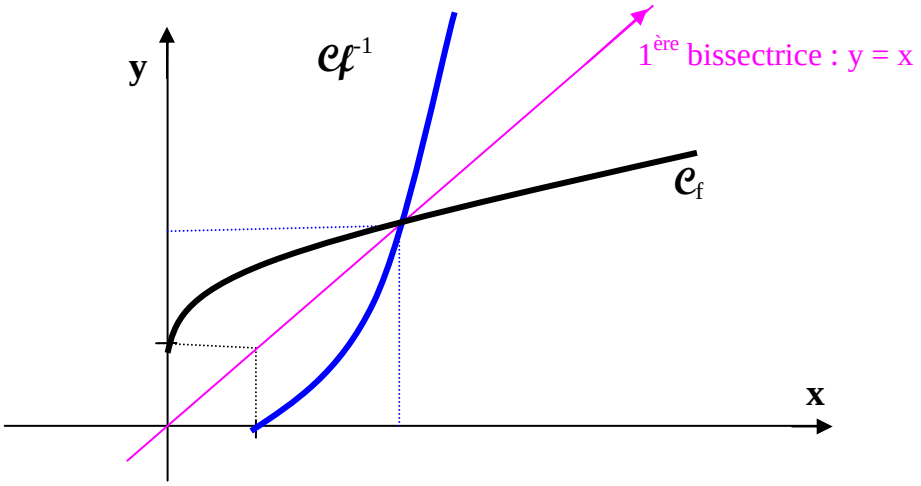
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I = [a ; b] alors f réalise une bijection de I = [a ; b] sur f (I) où f (I) est un intervalle.

De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans [a ; b] tel que $f(\alpha)=0$.



7- Représentation graphique d'une bijection réciproque :

Pour représenter la courbe ($\mathcal{C}_{f^{-1}}$) de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à la première bissectrice d'équation y = x.



8- Rappels :

Soit f la fonction définie sur un intervalle I = [a ; b]. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I.

- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ alors f est croissante sur **I**.
- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ alors f est décroissante sur **I**.
- $\forall x_1 \in \mathbf{I}$, $\forall x_2 \in \mathbf{I}$, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors f est constante sur **I**.

D- / Dérivée d'une fonction numérique :

1- Fonction dérivable en un point :

a) Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$; $(A \in IR)$. A est noté $f'(x_0)$ et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

b) Exemples :

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *et* $x_0 = 2$;
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *et* $x_0 = -1$

2- Équation de la tangente à la courbe en un point x_0 :

L'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f au point d'abscisse x_0 est

. (T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

3- Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0.

4- Techniques de dérivation :

a) Formules de dérivation :

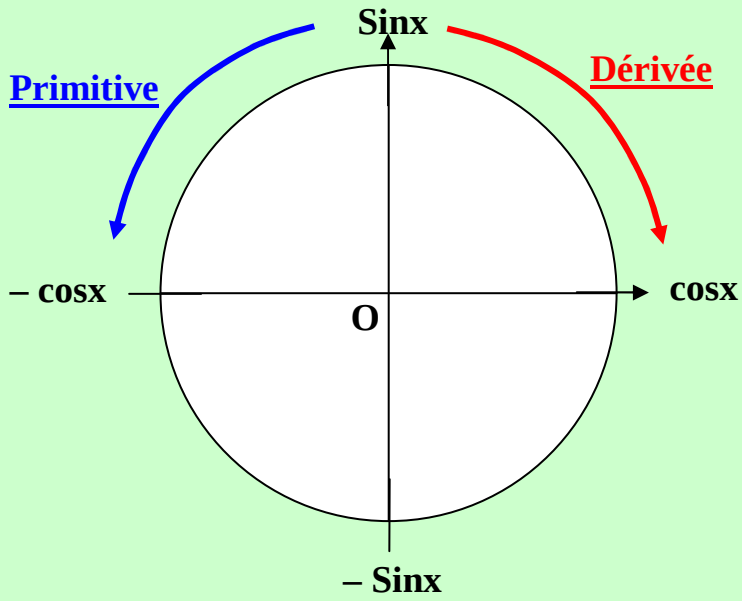
Soient $f ; u \text{ et } v$ des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I.

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = an x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u' = \left(f^n\right)' = n \times f^{n-1} \times f'$
$f = u + v$	$f' = (u+v)' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = (u \times v)' = u'v + v'u$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = a \times u'(ax+b)$

b) Dérivées de fonctions circulaires :

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$
$f(x) = tgx$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$f(x) = \cot gx$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



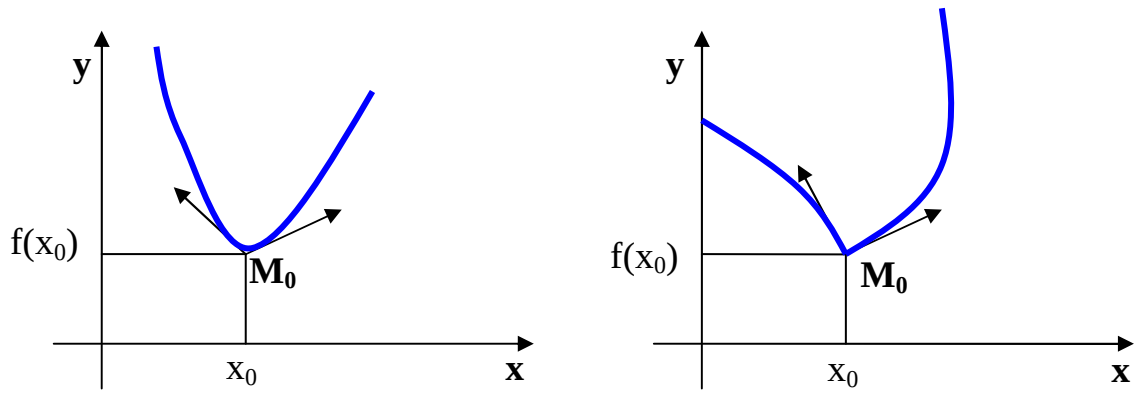
c) Dérivée de la bijection réciproque :

. $\left(f^{-1}\right)'(a)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]}$.

5- Extension du nombre dérivé :

a) Point anguleux

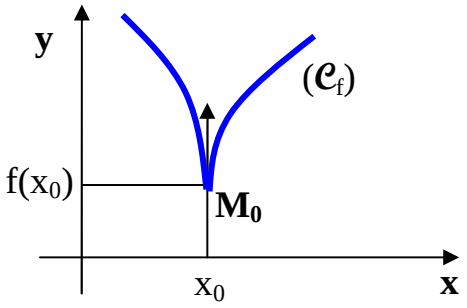
Soit f une fonction numérique admettant au point x_0 un nombre dérivé à gauche $f_g'(x_0)$ différent du nombre dérivé à droite $f_d'(x_0)$. On dit que la fonction f **n'est pas dérivable en x_0** et le point d'abscisse x_0 est **un point anguleux** de la courbe (C_f).

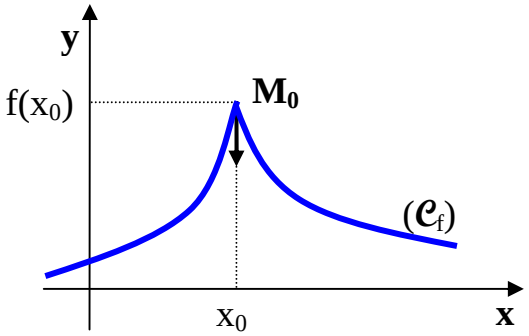


La courbe présente au point d'abscisse x_0 deux demi tangentes.

- Une demi tangente à gauche de pente = $f_g'(x_0)$;
- Une demi tangente à droite de pente = $f_d'(x_0)$.

b) Point de rebroussement ou un pic :





$Si \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \; et \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$;

Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. On dit que le point d'abscisse x_0 est un point de rebroussement ou un pic.

$Si \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \; et \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$;

Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas. On dit que le point d'abscisse x_0 est **un point de rebroussement ou un pic.**

E- / Inégalités des Accroissements Finis :

Soit f une fonction dérivable sur I = [a ; b] où a et b sont des réels.

- **Première Forme :**

Si $a \le b$ et si les réels m et M sont tels que : $\forall\, x \in [a ; b]$
$m \le f'(x) \le M$ alors $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

- **Deuxième Forme :**

Si k est un réel tel que : $\forall\, x \in [a ; b] = I$,
$|f'(x)| \le k$ alors $|f(b) - f(a)| \le k\,|b-a|$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

Démontrer que pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ on a : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} x \le \sin x \le x$.

F-/ Dérivabilité et continuité :

1- Théorème 6 : (admis)

Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point.
Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

2- Exemple : $f : x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en x = 0, **mais pas dérivable en x = 0.**

ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Quelques propriétés géométriques :

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est dite paire si, et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f ; f(-x) = f(x)$.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f ; f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation x = a , (a $\in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f, si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point I (a ; b) est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f si et seulement si, $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

5. Fonctions périodiques :

Une fonction numérique f est périodique si, seulement si il existe un réel strictement positif t tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f \; f(x+t) = f(x)$.

On dit alors que t est une période de f .

- Si f(x) = cos(ax +b) alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = sin(ax +b) alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = tan(ax +b) alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$.

II – Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

- Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
- Etudier éventuellement la parité. Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
- Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation.
- Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
- Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
- Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
- Points d'inflexion etc.

III – Exemple d'étude de fonctions polynômes :

1- Théorème 1: Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0, alors f'(x_0) = 0 ou f n'est pas dérivable en x_0.

2- Théorème 2: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert]a ; b[.

Si f'(x) s'annule en x_0 de]a ;b[en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

3- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Etudier les variations de f ;

b) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera. On déterminera les intersections de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f avec les axes de coordonnées.

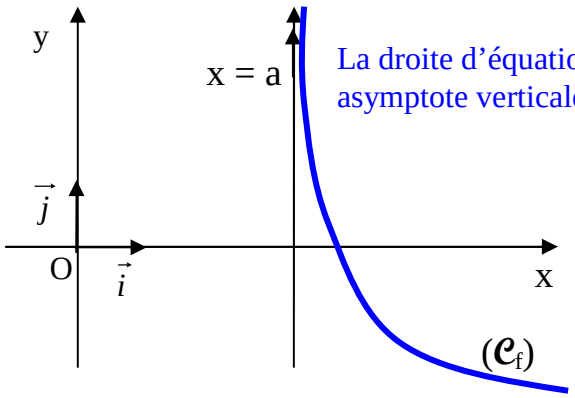
c) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé. Quels sont les extremums relatifs de f ?. En quels points sont-ils atteints ?.

IV – Exemple d'étude de fonctions rationnelles :

1- Recherche d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées :

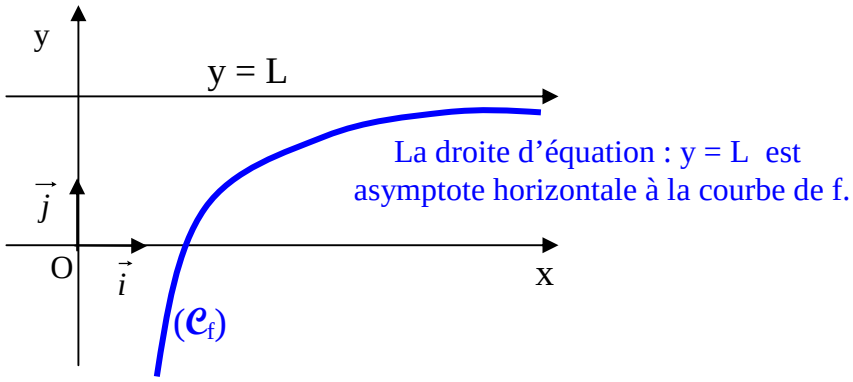
a) Asymptote Verticale :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \; ou \; -\infty$ alors la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.



b) Asymptote horizontale :

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L \ (réel)$,alors la droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f .



2- Exemple : Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

3- Asymptote oblique :

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$.
- Si $f(x) = ax + b + C(x) \quad avec \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} C(x) = 0$; alors la droite d'équation y = ax+b est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
- La droite ($\mathcal{D}$) d'équation : y = ax + b est dite asymptote oblique à la courbe au voisinage de de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [\, f(x) - (ax+b)] = 0$.

4- Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à son asymptote oblique ($\mathcal{D}$) d'équation : y = ax + b ; on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$ dans $\mathcal{D}$f.

1er cas : Si [$f(x) - (ax+b)$] **< 0 ;** alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) est en dessous de ($\mathcal{D}$).

2ème cas : Si [$f(x) - (ax+b)$] > 0 **;** alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) est au dessus de ($\mathcal{D}$).

3ème cas : Si [$f(x) - (ax+b)$] = 0 ; alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) coupe ($\mathcal{D}$) en un point x_0.

5- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-5x+15}{x-2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$;

b) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) à préciser ;

c) Etudier la fonction f ;

d) Montrer que le point I (2 ; –1) est centre de symétrie pour la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f ;

e) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$) ;

f) Construire ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}_f$) dans un repère orthonormé.

6- Recherche de l'asymptote oblique :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. S'il existe deux réels a et b tels que :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad et \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}[\,f(x)-ax\,]=b$ alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet pour asymptote la droite ($\mathcal{D}$) : y = ax + b au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Dans cette recherche 5 cas peuvent se présenter qu'on résume dans le tableau ci-dessous.

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$</td><td></td><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\,f(x)-ax\,]$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">a (a ∈ ℝ)</td><td rowspan="3">Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : y = ax</td><td>b (b ∈ ℝ)</td><td>Asymptote oblique : y = ax + b.</td></tr>
<tr><td>$+\infty$ ou $-\infty$</td><td>Branche parabolique de direction Δ.</td></tr>
<tr><td>Pas de limite</td><td></td></tr>
<tr><td>$+\infty$ ou $-\infty$</td><td>Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : x = 0.</td><td></td><td>Branche parabolique de direction Δ.</td></tr>
<tr><td>Pas de limite</td><td>Pas de direction asymptotique</td><td></td><td></td></tr>
</table>

I– Primitives d'une fonction numérique :

1- Activité : Soit la fonction f : x $\mapsto$ 2x + 3 ;
Calculer la dérivée de chacune des fonctions F ; G ; H définies par :
$F(x)=x^2+3x+10$; $G(x)=x^2+3x-17$; $H(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+11$. Que remarque-t-on ?

✓ Pour tout x de $\mathcal{D}$f , F'(x) = $f(x)$; G'(x)= $f(x)$; H'(x) = $f(x)$.

On dit que F ; G ; H sont des primitives de f sur $\mathcal{D}$f.

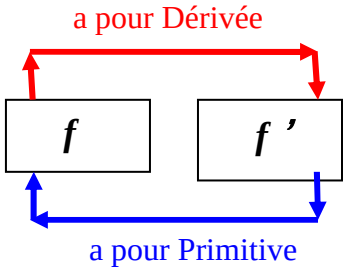
2- Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie non vide [a ; b] de $\mathbb{R}$. On appelle fonction primitive de f sur [a ; b], toute fonction F telle que :

$\forall x \in [a ; b]$, F'(x) = f (x).

3- Notations: $\underset{[a;b]}{Prim}\, f = F$ *ou* $\int f(x)dx = F(x)$; .

[Prim f = F] $\Leftrightarrow$ [$\forall x \in [a ; b]$, F'(x) = f (x)]



4- Remarques :

- Si f est continue sur [a ; b] alors sa primitive F est continue sur [a ; b] (car F est dérivable sur [a ; b]).
- Les fonctions qui à x $\mapsto$F(x) + C (C$\in\mathbb{R}$) sont appelées les primitives de f sur [a ; b]

5- Théorème (admis) :

a) Si F est une primitive de f sur [a ; b], toute autre primitive G de f sur [a ; b] est de la forme : G(x) = F(x) + C.
b) Si f admet de primitives sur [a ; b], il en existe une et une seule prenant au point x_0 donné une valeur y_0 donnée.

Exemple : Soit la fonction f définie par f(x)= cosx. Trouver la primitive F de f qui s'annule pour x = $\frac{\pi}{4}$ et celle qui prend la valeur 2 pour x = $\frac{3\pi}{4}$.

6- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies sur [a ; b] ; F et G leurs primitives respectives sur [a ; b] .

a) Prim (f+g) = Prim (f) + Prim (g) = F + G + C^{ste}.
b) Soit α un réel, Prim (α f) = α Prim (f).
c) Prim (f'$\times$g) = [f$\times$g]–Prim (f$\times$g') *(appelée Formule de primitivation par parties)*.

Exemple : Trouver les primitives de f définie par f(x) = x sinx.

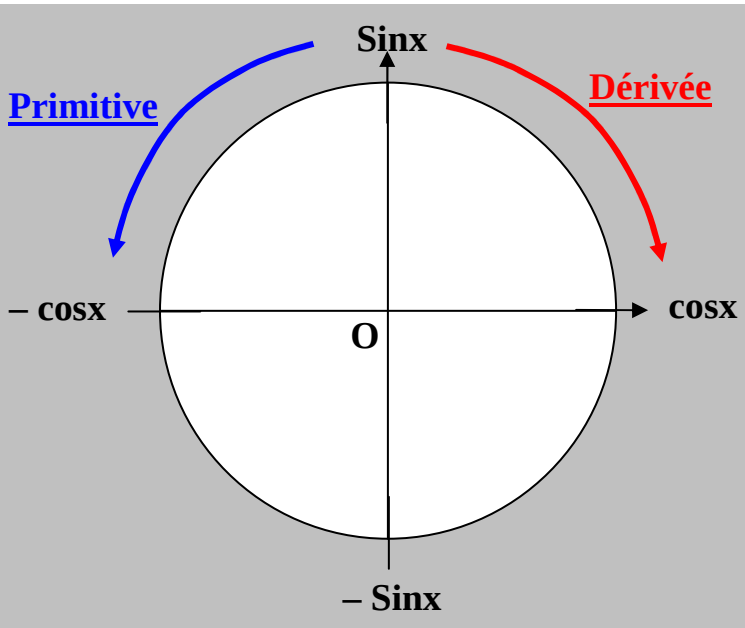
7- Calcul de Primitives :

a) Primitives de fonctions usuelles: Soient f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
f(x) = 0	F(x) = c
f(x) = a	F(x) = a x + c
$f(x) = a\,x^{n}$	$F(x) = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + c$
$f(x) = x^{r}$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = (x-a)^{m}$; $m \neq -1$	$F(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + c$
$F(x) = (a\,x + b)^{n}$; $n \neq -1$	$F(x) = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln\lvert u(x)\rvert + c$; $u(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)} + c$; $u(x) \succ 0$
$f(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$	$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + c$; $v(x) \neq 0$
$f(x) = u'(x).u^{n}(x)$	$F(x) = \frac{U^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^{n}}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c$; $n \neq 1$

b) Primitives de fonction circulaires :

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



Fonction f définies par	Fonctions Primitives F
f (x) = cosx	F(x) = sinx + c
f (x) = cos (ax + b)	F(x) = $\frac{1}{a}$ sin (ax + b) + c
f (x) = sinx	F(x) = – cosx + c
f (x) = sin (ax + b)	F(x) = $-\frac{1}{a}$ cos (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	F(x) = tgx + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2 (ax+b)}$	F(x) = $\frac{1}{a}$ tg (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	F(x) = – cotgx + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2 (ax+b)}$	F(x) = $-\frac{1}{a}\cot g(ax+b) + c$

c) Cas divers :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

f(x) = cos2xsin3x ; h(x) = $\cos^4 x$; f(x) = $\frac{1}{\cos^4 x}$.

(Méthodes utilisées: linéarisation, transformations trigonométriques)

$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \times \tan^2 x$ d'où

$F(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

d) Primitives de $\sin^n x \times \cos^p x$ où n et p sont des entiers naturels non nuls :

- **Si n ou p est impaire :** $f(x) = \cos^5 x \sin^8 x$**.**

(prendre la puissance impaire $\cos^5 x = \cos x \cos^4 x$**) ;**
d'où f(x)= $\cos x \sin^8 x - 2\cos x \sin^{10} x + \cos x \sin^{12} x$ et on a
F(x) = $\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + c$.

- **Si n et p sont paires :** (utiliser les relations suivantes)

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$**.**

Exemples : $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$; $h(x) = \sin^2 x \cos^2 x$**.**

II – Calcul Intégral :

1- Définition : Soit F une primitive d'une fonction f sur [a ; b].
On appelle intégrale définie de f sur [a ; b] le réel noté :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

2- Théorèmes : on admettra les théorèmes suivants

a) Théorème 1: Toute fonction continue sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].

b) Théorème 2: Toute fonction monotone et bornée sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].

3- Propriétés :

a) $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$;

b) $\int_a^a f(t)dt = 0$;

c) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;

d) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;

e) $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$;

f) Si $f \geq 0$ sur [a ; b] ; alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;

g) Si $f \geq g$ sur [a ; b] ; alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$;

h) $\int_a^b f'(t)dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$.

4- Définition :
On appelle **moyenne de l'intégrale sur [a ; b]** le nombre :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

5- Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables donc continues sur [a ; b] .

(u v)' = u'v – v'u ⇔ Prim(u'v)= [uv] – Prim(uv') donc pour tout x ϵ [a ; b] , on a :

La formule d'intégration par parties

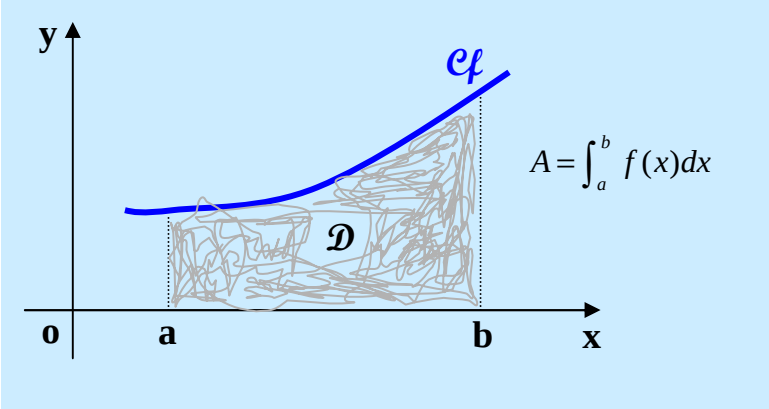
$$\int_a^b U(x)\times V'(x)\,dx = \left[U(x)\times V(x)\right]_a^b - \int_a^b U'(x)\times V(x)\,dx .$$

Exemples : Soient $I = \int_0^x t\cos t\ dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

III – Applications du Calcul Intégral :

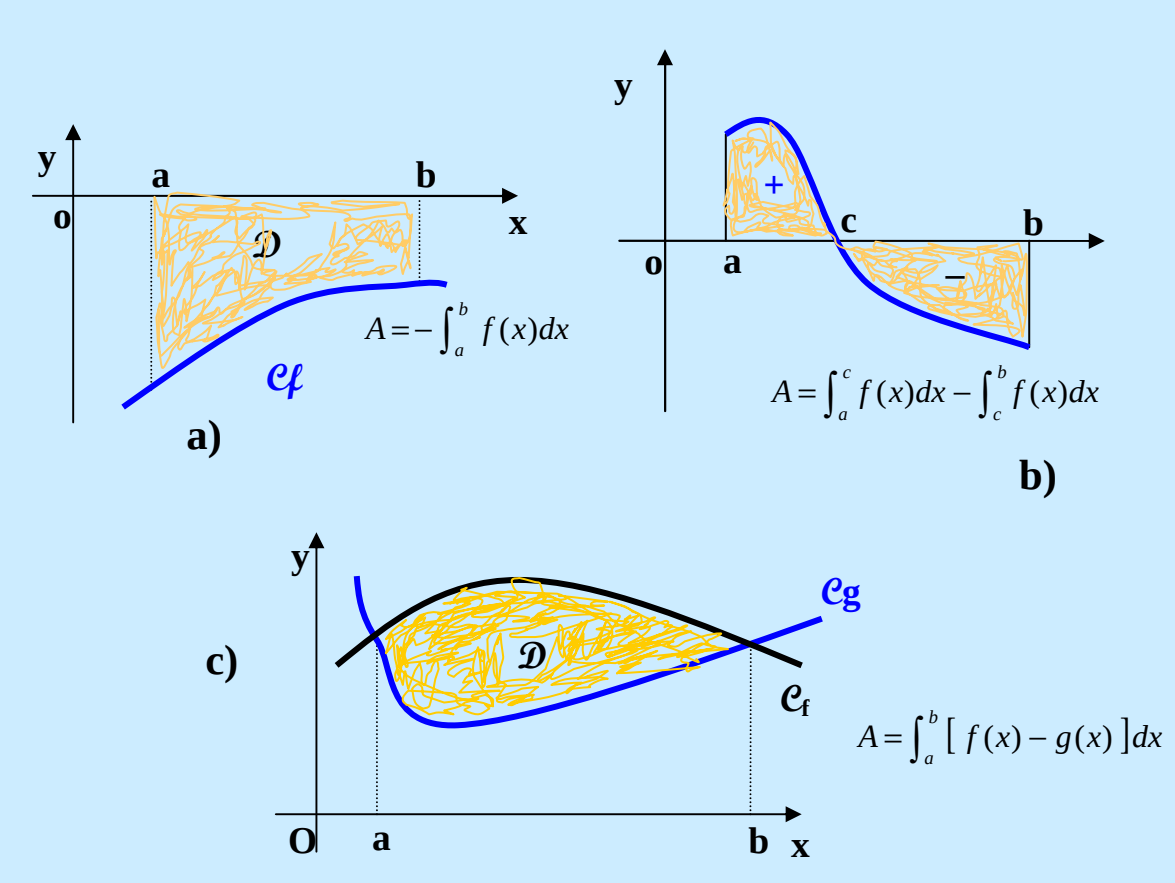
1. Calcul d'aires :

Si f est intégrable et positive sur [a ; b] , $\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation x = a ; x = b et la courbe ($\mathcal{C}$f) de f sur [a ; b].



2- Conséquences :

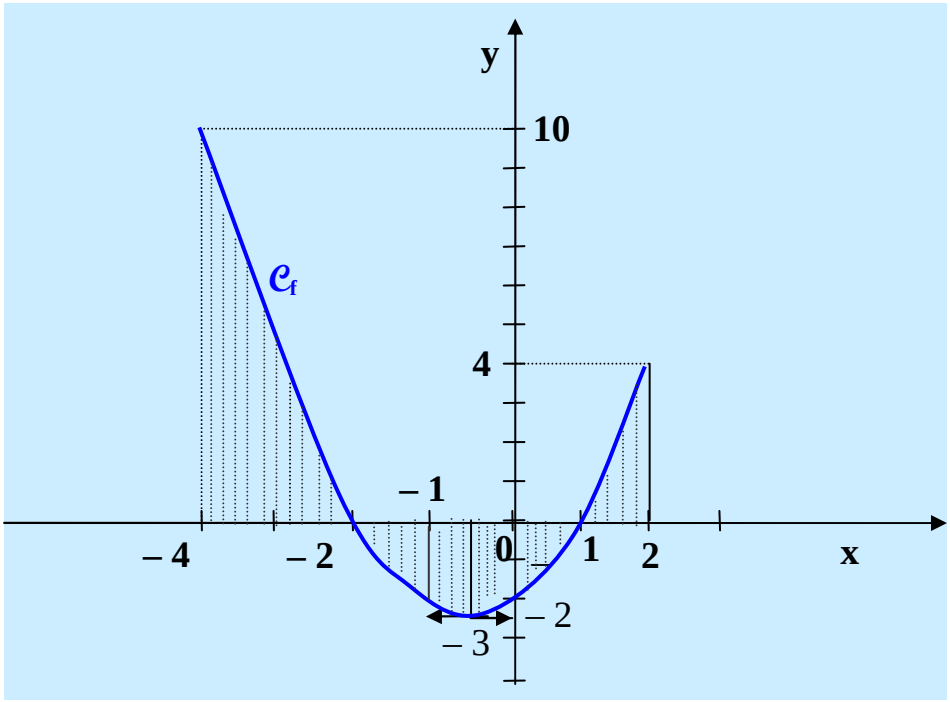
Les configurations ci-dessous nous donnent les aires des domaines $\mathcal{D}$.



Exemple :

Soit la fonction f définie sur [– 4 ;2] par $f(x) = x^2 + x - 2$ .Soit ($\mathcal{C}$f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par l'axe des abscisses les droites d'équations x = – 4 ; x = 2 et par la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.

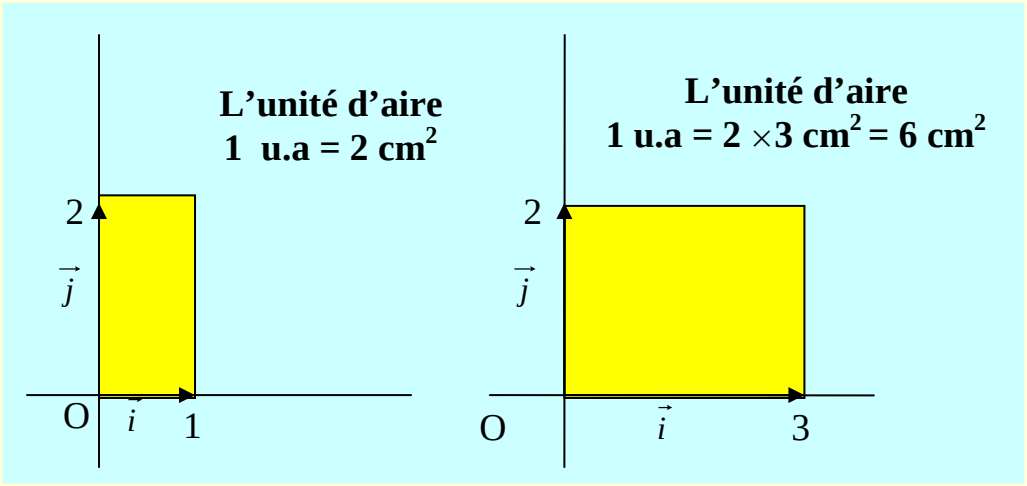


f est positive sur [–4 ; –2] et sur [1 ; 2] ; f est négative sur [–2 ;1] ; On a :

$$A = \int_{-4}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 15\,u.a\ .$$

3- Unité d'aire :

L'aire d'un domaine est mesurée en unité d'aire (U.a).

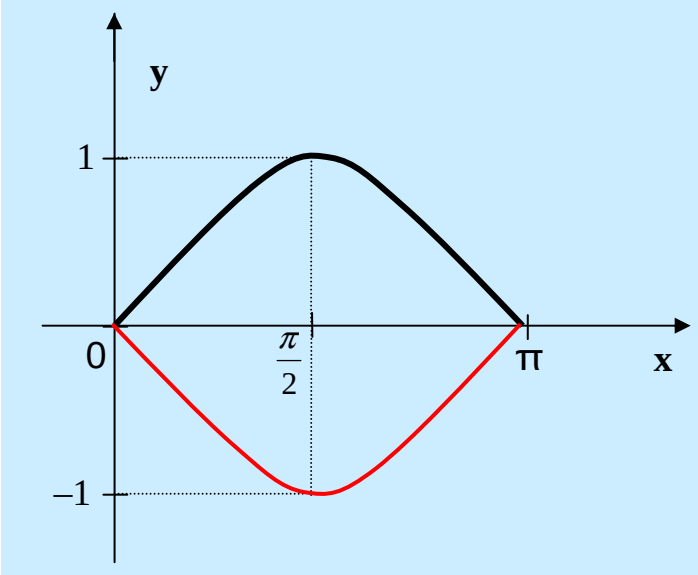


4- Volume d'un solide de révolution :

a) Théorème 3 : Le volume engendré par une aire plane limitée par l'axe (x'ox), les droites d'équations x = a ; x = b (a < b) et l'arc de courbe d'équation y = f(x) est donné la formule :

$$V = \pi \int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, dx$$

b) Exemple : Le volume limité par l'arc de sinusoïde d'équation y = sinx, x ϵ [0 ; π] tournant autour de l'axe (ox).



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

IV – Changement de variable affine :

Soient f et g deux fonctions où g est une fonction affine définie par g(x) = ax + b.

L'intégrale de la forme : $\int_m^n f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int_{am+b}^{an+b} f(u)\,du$.

En effet en posant : u = ax + b alors du = a dx et dx = $\frac{1}{a}$ du.

Cherchons les nouvelles bornes

u = ax + b $\quad \begin{cases} Si \;\; x = m \;\; alors \;\; u = am + b \\ Si \;\; x = n \;\; alors \;\; u = an + b \end{cases}$.

Exemple ;

Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\, dx$. On pose u = 2x +1 ⇒ du = 2dx et dx = $\frac{1}{2}$du.

$2x = u - 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{u-1}{2}$. Donc cherchons les nouvelles bornes :

$$\begin{cases} Si \;\; x = 0 \;\; alors \;\; u = 1 \\ Si \;\; x = 1 \;\; alors \;\; u = 3 \end{cases} \quad par \;\; suite \;\; on \;\; obtient \;\; I = \frac{1}{3}.$$

V – Valeur approchée d'une intégrale (méthode des rectangles) :

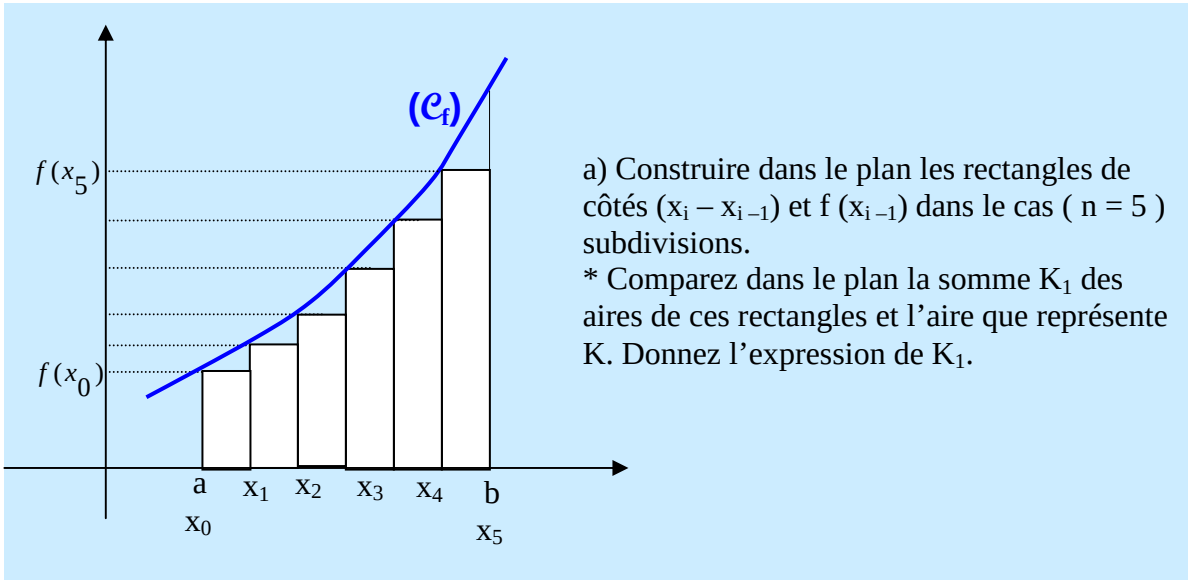
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et [a ; b] $\subset$ I.
Supposons que f ne possède pas de primitives connues.
Cherchons une valeur approchée de $K = \int_a^b f(t)dt$.

Activité 1 : Partageons [a ; b] en n intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ (ou n subdivisions égales). Déterminer les bornes : x_0 ; x_1 ; x_2 ; …. ; x_n de ces intervalles.

Réponses:

$x_0 = a$; $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$; $x_2 = a + 2\frac{(b-a)}{n}$; …. ; $x_i = a + i\ \frac{(b-a)}{n}$; $x_n = a + n\ \frac{(b-a)}{n} = b$.

Activité 2 : f est donnée par sa représentation graphique ci-dessous.



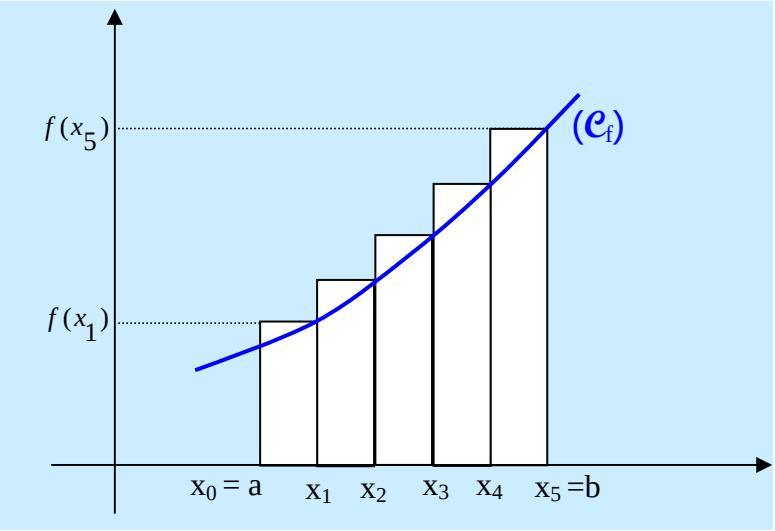
a) Construire dans le plan les rectangles de côtés $(x_i - x_{i-1})$ et $f(x_{i-1})$ dans le cas (n = 5) subdivisions.
* Comparez dans le plan la somme K_1 des aires de ces rectangles et l'aire que représente K. Donnez l'expression de K_1.

Réponses : $K_1 \leq K$ et $K_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_{i-1})$.

Posons j = i –1

$\begin{cases} pour \quad i=1, \quad j=0 \\ pour \quad i=n\ , \quad j=n-1 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Leftrightarrow K_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$. *car i et j sont des variables muettes.*

b) même questions pour les rectangles de côtés $(x_i - x_{i-1})$ et $f(x_i)$.



$K \leq K_2$;

$$K_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad K_2 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \; .$$

c) Donner un encadrement de K.

$$K_1 \leq K \leq K_2 \quad \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \, .$$

On dit que **K_1** et **K_2** sont deux valeurs approchées de **K** obtenues par la méthode des rectangles.

Remarque :

Si f est monotone sur [a ; b] ces deux valeurs approchées réalisent un encadrement de **K**. Par contre si f n'est pas monotone ce n'est plus le cas.(on ne pas préciser laquelle des deux valeurs **K_1** ou **K_2** est la meilleur valeur approchée de **K**). Ceci nous amène à étudier l'erreur commise en remplaçant **K** par l'une de ces valeurs approchées.

L'erreur **e** commise est telle que : $|\mathbf{e}| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}$, où **M** est un majorant de $|f'(x)|$ sur [a ; b] et n le nombre de subdivisions.

Exemple : Soit à calculer $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Donner un encadrement de K puis une valeur approchée de K en utilisant la méthode des rectangles pour n = 10 subdivisions.

---- 0 ----

Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $0 \leq 1 \Rightarrow f(0) \geq f(1)$ donc f est décroissante sur [0 ; 1] et on a :

$K_2 \le K \le K_1$. Pour n = 10 on a : $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

Posons $d_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $f(x_i)$.
Et $e_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par excès de $f(x_i)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totaux
x_i	0	1/10	2/10	3/10	4/10	5/10	6/10	7/10	8/10	9/10	1	
$d_2(f(x_i))$		0,99	0,96	0,91	0,86	0,80	0,73	0,67	0,60	0,55	0,50	7,57
$e_2(f(x_i))$	1	1	0,97	0,92	0,87	0,81	0,74	0,68	0,61	0,56		8,16

$$K_2 = \frac{1}{10}\times 7{,}57 = 0{,}757 \quad ; \quad K_1 = \frac{1}{10}\times 8{,}16 = 0{,}816 .$$

D'où l'encadrement de K est : 0,757 ≤ K ≤ 0,816.

Donc une valeur approchée de K est :

$$K = \frac{K_2 + K_1}{2} = 0{,}7865 \quad ; \quad K \approx 0{,}79 \ \grave{a}\ 10^{-2}\ pr\grave{e}s\ (arrondi\ d'ordre\ 2).$$

---- 0 ----

$K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$; posons x = tanα ⇒ dx = (1 + $\tan^2\alpha$) dα.

$x^2 = \tan^2\alpha \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + \tan^2\alpha$.

Nouvelles bornes : x = tanα $\begin{cases} si \quad x=0 \quad alors \quad \tan\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ Si \quad x=1 \quad alors \quad \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

D'où $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)}\,d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha = [\alpha]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \approx 0{,}79$.

VI – Majoration de l'intégrale d'une fonction continue :

1) Théorème : Supposons **a< b** et f une fonction continue sur [a ; b].
Alors on a : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

Preuve

En effet nous avons : $-|f(t)| \le f(t) \le |f(t)|$ d'où par croissance de l'intégrale $\int_a^b -|f(t)|dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)|dt$ or $\int_a^b -|f(t)|dt = -\int_a^b |f(t)|dt$ donc $-\int_a^b |f(t)|dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)|dt$ d'où $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

2) Inégalité de la moyenne :

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle **I**, **m** et **M** des nombres réels, a et b des éléments de **I**.

- Si **m** ≤ f ≤ **M** sur **I** et si **a≤b** alors **m(b–a)** $\le \int_a^b f(t)\,dt \le$ **M(b–a)** ;
- Si **|** f **'|≤M** sur **I** alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le M(b-a)$.

I – Définition et conséquences :

1- ***Définition :*** la fonction logarithme népérien notée **ln** **ou** **Log** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour **1**. Elle est définie sur]0 ; +∞[.

2- Conséquence immédiates de la définition :

La fonction **ln :**]0 ;+∞[→ ℝ est continue, et dérivable sur]0 ; +∞[.

x ↦ lnx

II – Relation fonctionnelle fondamentale:

1- Propriété : ∀ (a ; b) ∈ $(\mathbb{R}_+^*)^2$; **ln(a×b) = lna + lnb .**

2- Conséquences :

C_1) Soit a et b deux réels strictement positifs : **$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.**

En effet si $c = \frac{a}{b}$ alors a = bc ; lna = ln(bc) ⇒ lna = lnb + lnc ⇒

lnc = lna – lnb ⇔ $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.

C_2) ∀a ∈ $\mathbb{R}_+^*$; $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$.

C_3) ∀a ∈ $\mathbb{R}_+^*$; ∀n ∈ ℝ ; $\ln a^n = n \times \ln a$.

C_4) lna = lnb ⇔ a = b ; lna ≤ lnb ⇔ a ≤ b

C_5) ∀a ∈ $\mathbb{R}_+^*$; $\ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$

III – Fonction du type (ln∘u):

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle **I**.

1 – Propriétés des dérivées logarithmiques :

P_1) $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemples : a/ Soit $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$ on a : $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$.

b/ Soit g : $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[\quad \rightarrow \mathbb{R}$

$x \quad \mapsto \quad g(x) = -\ln(\cos x)$ on a $g'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$.

Donc une primitive de tanx est : – ln (cosx) .

P_2) $\boxed{[\ln(u \times v)]' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}}$.

P_3) $\boxed{[\ln(\frac{u}{v})]' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}}$.

Exemple : $f(x) = \ln\left|\frac{2x-1}{-x+3}\right| \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{-x+3}$.

P_4) $\boxed{[\ln(U^r)]' = r \times \frac{U'}{U}}$.

Exemple : $f(x) = \ln(x+3)^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5 \times \frac{1}{x+3}$.

2 – Recherche de Primitives :

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u| + c$.

Soit g(x) = $\frac{1}{x}$ on a G(x) = ln |x| + c ; h(x) = $\frac{2x}{x^2+1}$ $\Rightarrow$ H(x) = ln |x^2 + 1| + c.

IV – Etude de la fonction logarithme Népérien:

1– *Ensemble de définition*

La fonction **ln** est définie et continue sur]0 ;+∞[.

2 – Limites aux bornes

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty .$$

3 – Fonction dérivée

La fonction **ln** est dérivable donc continue sur]0 ; +∞[.

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \ \forall\ x \in\ ]0\ ;+\infty[$.

D'où ln est strictement croissante sur]0 ;+∞[.

4– Bijectivité – Nombre e :

La fonction **ln** est continue et strictement croissante sur]0 ;+∞[. C'est donc une bijection de]0 ;+∞[sur $\mathbb{R}$. $\forall y \in \mathbb{R}; \exists\ !\ x \in]0;+\infty[$ tel que lnx = y.
Pour y = 1 l'équation ln(x) = 1 admet une solution unique **x = e ≈ 2,71.**

$$2{,}718 \leq e \leq 2{,}719.$$

Définition :
On appelle **base du logarithme Népérien** l'unique nombre réel **e** tel que

lne = 1.

5 – Etude des branches infinies :

a-/ Comportement asymptotique au voisinage de zéro :
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ || donc la droite d'équation $x = 0$ est Asymptote Verticale.

b-/ Comportement asymptotique au voisinage de + ∞ :

Soit f (x) = lnx ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

En effet pour tout réel x strictement positif on a : lnx $\leq \sqrt{x}$; $\Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

De plus si $x > 1$ on a : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow$

$0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \leq 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
D'où la droite d'équation y = 0 est une direction parabolique.

- Conséquences :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \ ; \ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 .$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = (0)\times(-\infty)$ Forme indéterminée.

Posons $x = \dfrac{1}{X}$; si x → 0 $^+$ alors X → +∞.

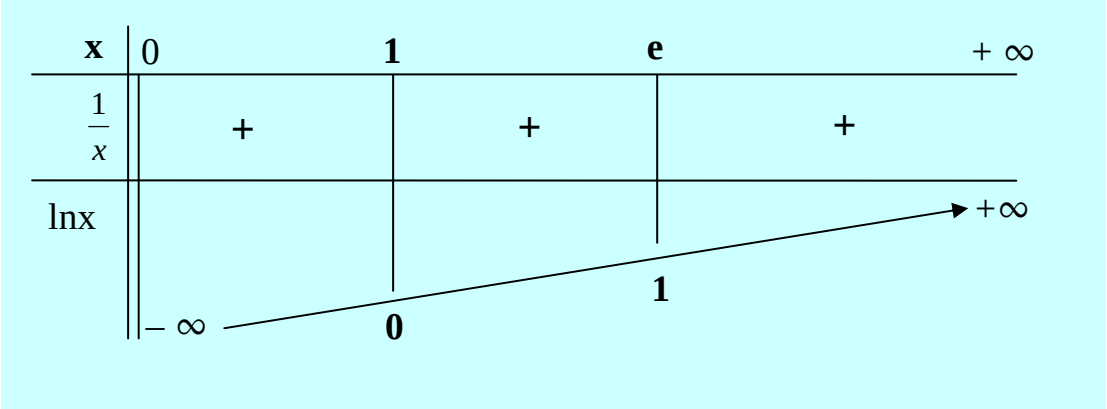
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}(\ln 1 - \ln X) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\left(\dfrac{\ln X}{X}\right) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{0}{0}$ Forme indéterminée.

Posons x + 1 = h ⇔ x = h – 1 ; si x → 0 alors h → 1.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{h\to 1} \dfrac{\ln(h) - \ln(1)}{h-1} = \ln'(1) = 1$.

6 – Tableau de variation de ln :



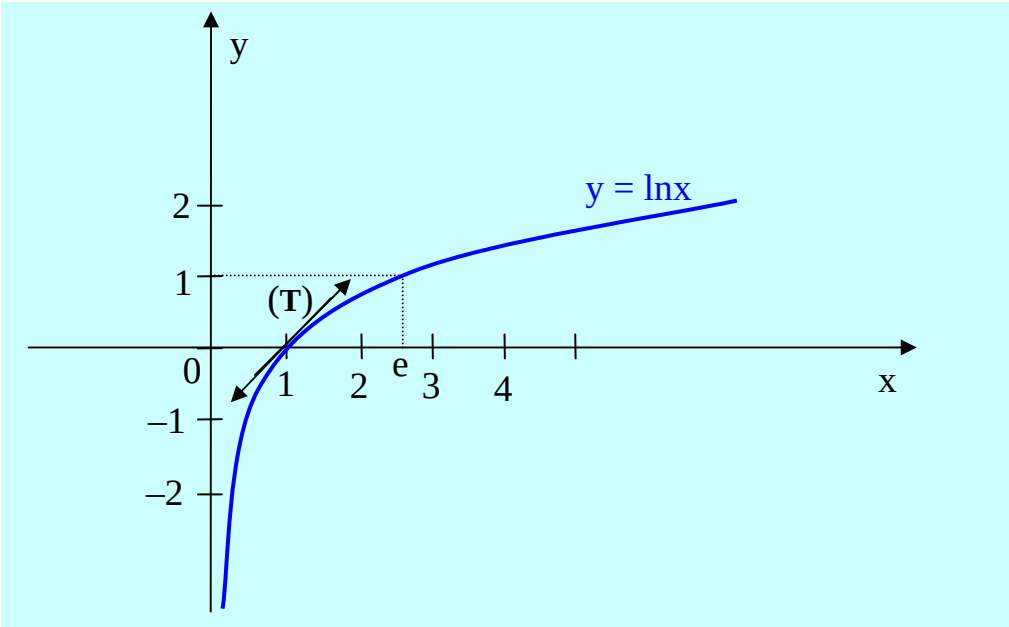
Remarques importantes :

- Si x ∈]0 ; 1[alors lnx < 0 ;
- Si x ∈]1 ; +∞[alors lnx > 0 .

- Equation de la tangente (T) en $x_0 = 1$:

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow$ (T) : $y = x - 1$.

7 – Tracé de la courbe de ln :



V – Logarithme de base a (a ∈ $\mathbb{R}_+^*$; et a ≠ 1) :

1-/ Définition **:** On appelle logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ et définie par :

$\log_a$:]0 ;+∞ [-------→ $\mathbb{R}$

$x \mapsto \quad \log_a^{(x)} = \frac{\ln x}{\ln a}$.

. $\log_a^{(x)} = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque : Si la base a = e, alors $\log_e^x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

2-/ Propriétés :

a) $\log'_a(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a \times x}$;

b) $(\log_a \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a} = \frac{1}{\ln a} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

c) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a^x - \log_a^y$;

d) $\log_a(x \times y) = \log_a^x + \log_a^y$;

e) $\log_a(x^r) = r \times \log_a^x$;

f) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a^y$;

g) $\log_a^a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$.

3-/ Logarithme décimal (log à base dix)

On définit le logarithme décimal noté **log** par : $\log_{10}^{(x)} = \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

log10 = $\log_{10}^{10} = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$. D'où log10 = 1 et $\log 10^3$ = 3 log10 = 3.

I – *Définition*:

La fonction exponentielle notée exp est la bijection réciproque de la fonction logarithme notée ln.

$$]0\,;+\infty[\underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rccl} \exp : \mathbb{R} & \to &]0\,;+\infty[& \\ x & \mapsto & \exp(x) & \text{Pour tout réel x, } \exp(x) > 0. \end{array}$$

a-/ Notation :

On note exp(x) = $\mathbf{e}^x$ et se lit « exponentielle de x » ou « e puissance x ».

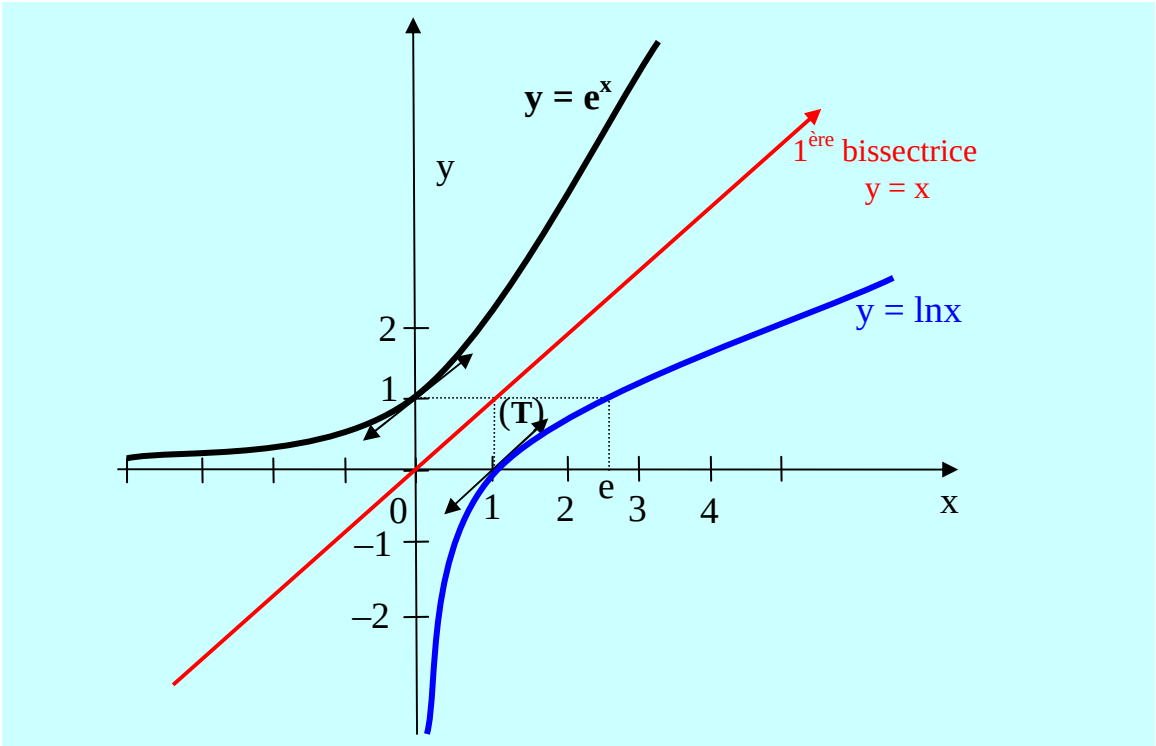
b-/ Conséquences immédiates :

c_1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$.

c_2) $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$;

c_3) De $0 = \ln 1$ et de $1 = \ln e$ on déduit que : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

c_4) Dans un repère orthonormé la courbe représentant la fonction exponentielle est le symétrique orthogonal de la courbe de la fonction logarithme par rapport à la première bissectrice d'équation y = x.



II – Propriétés algébriques de la fonction exponentielle:

P_1) Pour tout nombre réel x et y : $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Preuve

Posons A = e^x et B = e^y donc x = lnA et y = lnB ; x +y = lnA + lnB $\Leftrightarrow$ x +y = ln (AB) ;

$e^{(x+y)} = e^{\ln(AB)} \Leftrightarrow e^{(x+y)} = AB \Leftrightarrow e^{x+y} = e^x \times e^y$. (C.Q.F.D)

P_2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

P_3) Pour tout réels x et y : $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

P_4) Pour tout réels x et r : $(e^x)^r = e^{rx}$.

P_5) Pour tout réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Exemple :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - e^x - 6 = 0$; S= {ln3}.

III – Etude de la fonction exponentielle:

1-/ Ensemble de définition :

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2-/ Limites aux bornes de $\mathcal{D}$:

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ on déduit que . $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

De $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ on déduit que. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3-/ Dérivée de (exp$\circ$u) : (u est une fonction)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle **I**.

. $[e^u]' = u' \times e^u$ en particulier : $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.

4-/ Sens de variation :

Soit $y = e^x$ on a : $y' = e^x > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV – Recherche de quelques limites:

1-/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=(e^x)'(0)=1$ d'où on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

2-/ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x=-\infty\times 0$ F. ind

Posons x = lnt, t > 0 ; si x tend vers $-\infty$ alors t tend vers 0^+ : x = lnt $\Leftrightarrow$ $e^x = t$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t=0^-$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x=0^-$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x=0$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

3-/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ Forme indéterminée.

Posons x = lnt, t > 0 ; si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $+\infty$: x = lnt $\Leftrightarrow$ $e^x = t$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\ln t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln t}{t}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$. D'où on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

V – Nouvelles Primitives:

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle **I**.
, Une primitive de u'e ^{u} est e ^{u} . $\forall$ x $\in$ **I** $\int u'(x)e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)}$.

. Si $f(x)=e^{ax+b}$ alors $F(x)=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+c$.

Exemple : $f(x)=(2x+3)e^{-x^2+3x+1}$ $\Rightarrow$ $F(x)=-e^{-x^2+3x+1}+c$.

VI – Extension de l'exponentielle:(Application aux complexes)

Par convention, pour tout nombre complexe de module 1 et d'argument x on pose :

Z = cosx + i sinx = e ^{ix} et $\overline{Z}$ = cosx – isinx = e $^{-ix}$.

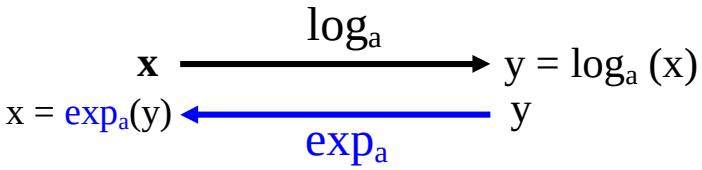
- **Conséquence : (Formule d'Euler)**

$Z+\overline{Z}=2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ $\Leftrightarrow$ **Cosx** $=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$Z-\overline{Z}=2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$ $\Leftrightarrow$ **Sinx** $=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

VII – Fonction exponentielle à base a : (a > 0 et a ≠1)

1-/ *Définition* : Les fonctions exponentielle à base quelconque **a** notée : $\exp_a$ sont les réciproques des fonctions logarithmes de base **a**.



On note la fonction exponentielle à base **a** par : pour tout réel x :

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}.$$

2-/ *Remarque :* Si **a = e** alors on a : $e^x = \exp_e(x)$.

VIII – Croissances comparées des fonctions de référence :

1-/ *Fonction puissance et fonction logarithme :*

- **Propriété :(admise)**

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad .$$

Au voisinage de +∞ la fonction puissance croît plus vite que **ln** (ou encore la puissance l'emporte sur **ln**).

2-/ *Fonction exponentielle et puissance :*

- **Propriété :(admise)**

Soit α un réel quelconque. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\, e^{-x} = 0$.

Ces deux limites traduisent le fait que au voisinage de + ∞ la fonction exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance en croissance.

I– Introduction :

Soit f une fonction dérivable au point $x_0 = 0$. Il existe donc un intervalle ouvert de centre 0 et de rayon r, noté I (0 ; r), inclus dans l'ensemble de définition de f, et une fonction numérique Ɛ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0;r),\ f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Cette écriture de *f(x)* constitue le développement limité d'ordre 1 de *f* au voisinage de 0

Remarque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'où l'existence du développement limité d'ordre 1 de f en 0 est équivalente à la dérivabilité de f en 0 et donc de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

II– Définitions :

a) Définition 1 : Dire qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 signifie qu'il existe un intervalle $I(0 ; r) \subset \mathcal{D}_f$ et une fonction Ɛ tels que $\forall x \in I(0 ; r)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. (Formule de Mac Laurin)

En posant $P_n(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!}f'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$

et $R_n(x) = x^n\,Ɛ(x)$ on a $\forall x \in I(0 ; r)$:

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + R_n(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0 \end{cases}$$

L'écriture de *f(x)* sous la forme $P_n(x) + R_n(x)$, s'appelle développement limité d'ordre n en 0 de f. P_n s'appelle la partie régulière du développement limité, et la fonction $x \mapsto x^n\,Ɛ(x)$ = $R_n(x)$ s'appelle le reste du développement limité. $P_n(x)$ s'appelle l'approximation polynomiale de degré n de la fonction f.

b) Exemple de développement limité d'ordre n en 0 :

Trouver le développement limité d'ordre 6 de la fonction cosinus.
En déduire les approximations polynomiales de degré 4 et 3 de cosinus.

Réponse : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon_1(x)$.

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ est l'approximation polynomiale de degré 4 de cos en 0.

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + 0x^3$ est l'approximation polynomiale de degré 3 de cos en 0.

III– Développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions usuelles:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1 = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_3(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_4(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_5(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon_6(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_6(x) = 0$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon_7(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_7(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_8(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_8(x) = 0$$

IV– Propriétés:

P_1) Une fonction f admet un développement limité en 0 d'ordre 0 si, et seulement si, elle est continue en 0.
P_2) si une fonction admet un développement limité en 0, alors celui-ci est unique.

V– Applications des développements limités en zéro:

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ $\quad x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$;

Pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$ *On a* $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$.

Ecrivons le développement limité d'ordre 3 de la fonction sinus en 0.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x) \qquad avec \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\forall x\in I(0;\frac{\pi}{2})-\{0\},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}}{x^2-\frac{x^4}{6}}=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{6-x^2})=0$$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x\sin x-x}{x^2})$.

Cherchons les développements limités d'ordre 3 en 0.

$$e^x\times\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2(x)\right] \quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0 \quad et \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$$

$$e^x\times\sin x=\left[x+x^2+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right] \quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x\sin x-x}{x^2})=\lim_{x\to 0}(\frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}-x}{x^2})=\lim_{x\to 0}(\frac{x^3+3x^2}{3x^2})=\lim_{x\to 0}(\frac{x+3}{3})=1.$$

VI– Développement limité en un point $x_0 = a$:

Si f admet une dérivée troisième en x_0 ; elle admet un développement limité d'ordre n en x_0=a qui s'écrit : $\forall x \in I$ (0 ; r)

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+..+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ (Formule de Taylor – Lagrange).

Exemples :

Déterminer les développements limités d'ordre 3 en x_0 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = lnx$ *et* $x_0=1$: *b)* $f(x) = e^x$ *et* $x_0 = 1$; *c)* $f(x) = sinx$ *et* $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

I – Généralité sur les suites:

1- Principe du raisonnement par récurrence :

Soit la propriété P(n) dépendant de l'indice n.

Si les propositions $\begin{cases} (1)\ \ P(0) \\ (2)\ \ \forall k \in IN; P(k) \Rightarrow P(k+1) \end{cases}$ sont toutes deux vraies, alors la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple : Démontrer par récurrence l'égalité P(n) suivante :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, P(n) : $1+2+3+4+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2- Définition d'une suite :

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
On la note :**U** ou **(U_n)** ou $(U_n)_{n\in IN}$.

U : $\mathbb{N}$ → $\mathbb{R}$

0 ↦ u (0) = u_0 est le premier terme de la suite u.

1 ↦ u (1) = u_1 est le deuxième terme de la suite u.

. .

. .

n ↦ u (n) = u_n est le terme général de la suite u.

Exemples :

Soient les suites (U_n) ; (V_n) ; (W_n) définies par leur terme général :
(U_n) est telle que $U_n = 2n + 5$; (V_n) est telle que $V_n = 2^n$;
(W_n) est telle que $W_n = \frac{1}{n^2}$.

3 – Mode de définition d'une suite :

Une suite numérique peut se définir de différentes façons.

a) Suites définies par $U_n = f(n)$:

Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général U_n en fonction de n.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 2^n$. Calculer les 4 premiers termes.

b) Suites récurrentes :

Ce sont des suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ liant deux termes consécutifs de la suite : (f est une fonction).

Exemple : Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$.

Calculer U_1 ;U_2 ; U_3 ; U_4 et représenter graphiquement les termes de cette suite.

Réponse

$n=0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4$; $n=1 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = 5$; $U_3 = \frac{11}{2}$; $U_4 = \frac{23}{4}$.

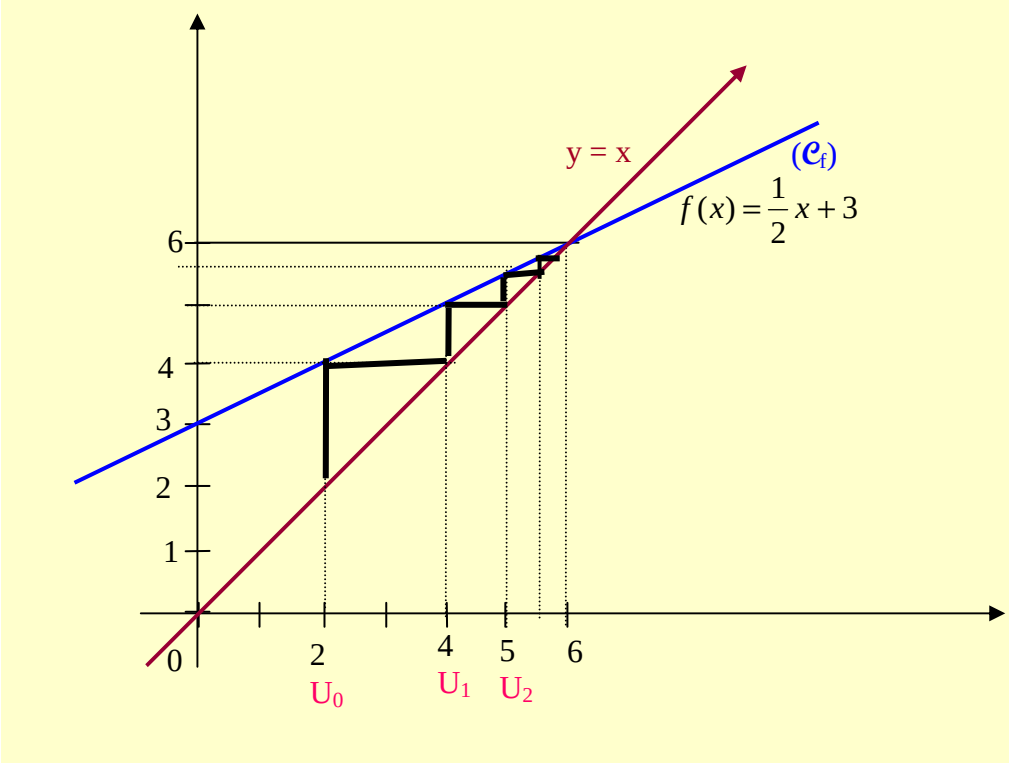
Représentons les termes de cette suite graphiquement.

Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ la fonction associée à la suite (U_n).

$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 3 \quad et \quad U_0 = 2$;

$U_1 = f(U_0) = 4$; $U_2 = f(U_1) = 5$; $U_3 = f(U_2) = \frac{11}{2}$; $U_4 = f(U_3) = \frac{23}{4}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et la droite d'équation : y = x.



4 – Sens de variation d'une suite :

a) Définitions :

– On dit que la suite (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$. \quad U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \text{ou} \quad U_n \leq U_{n+1} \quad .$$

– On dit que la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$. \quad U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \text{ou} \quad U_{n+1} \leq U_n \quad .$$

– On dit que la suite (U_n) est constante sur $\mathbb{N}$, si pour tout entier naturel n on a :

$$. \quad U_{n+1} = U_n \quad .$$

– On dit que la suite (U_n) est stationnaire à partir du rang n_0, si pour tout entier naturel n . **dès que $n \geq n_0$ alors $U_n = U_{n_0}$** .

– On dit que la suite (U_n) est à termes positifs, si pour tout entier naturel n on a :

$$. \quad U_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad .$$

Remarques : si $U_n > 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

$$[\ (U_n) \quad est \quad croissante\ ] \Leftrightarrow \left[\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1\ \right].$$

$$[\ (U_n)\ est \quad décroissante\ ] \Leftrightarrow \left[\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1\ \right];$$

b) Théorème :

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$
Si f est strictement croissante, alors (u_n) est strictement croissante.
Si f est strictement décroissante, alors (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration :
a) cas où f est strictement croissante :
Pour tout entier naturel n, la fonction f est strictement croissante, donc $f(n + 1) > f(n)$. D'où : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
La suite $(u_n$ est donc strictement croissante.
b) cas où f est strictement décroissante :
Pour tout entier naturel n, la fonction f est strictement décroissante, donc $f(n + 1) < f(n)$. D'où : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
La suite $(u_n$ est donc strictement décroissante.

NB : ***Ce théorème ne s'applique pas si la suite (u_n) est définie par récurrence $(u_{n+1} = f(u_n))$. Les variations de la fonction f et de la suite (u_n) ne sont pas toujours les mêmes.***

Exemple : Soit (U_n) définie par : $U_n = \sqrt{2+n}$ sur]0 ;+ ∞ [.

Déterminer le sens de variation de la suite (U_n) sur]0 ;+ ∞ [.

-- 0 --

Soit la fonction numérique f associée à la suite (U_n) définie par : $f(x) = \sqrt{2+x}$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$, ∀ x > 0. Donc f est strictement croissante sur]0 ;+∞[.

Par conséquent la suite (U_n) est strictement croissante sur]0 ;+∞[.

5 – Suites bornées :

– On dit qu'une suite numérique (U_n) est majorée s'il existe un réel **M** tel que . **∀ n ∈ ℕ, $U_n \leq M$** . **M** est un majorant de la suite (U_n).

– On dit qu'une suite numérique (U_n) est minorée s'il existe un réel **m** tel que . **∀ n ∈ ℕ, $m \leq U_n$** . **m** est un minorant de la suite (U_n).

– Une suite numérique (U_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée C'est à dire : . **∀ n ∈ ℕ, $m \leq U_n \leq M$** .

Exemple : Soit U la suite définie par sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 1 \end{cases}$.

Montrer que U est bornée par –2 et 1.

-- 0 --

$U_0 = 1 \quad et \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 1$;

(U est bornée par –2 et 1) ⇔ $(\forall n \in IN, \quad -2 \leq U_n \leq 1)$.

Démontrons ceci par récurrence.

n = 0 ; $U_0 = 1$ on a : $-2 \leq U_0 \leq 1$ vraie.

Soit p ∈ ℕ; supposons que : $-2 \leq U_p \leq 1$; montrons que $-2 \leq U_{p+1} \leq 1$ avec $U_{p+1} = \frac{1}{2} U_p - 1$; $-2 \leq U_p \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2} U_p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq \frac{1}{2} U_p - 1 \leq -\frac{1}{2} \leq 1$.

vraie à l'ordre (p+1). D'après le principe du raisonnement par récurrence $(\forall n \in IN, \quad -2 \leq U_n \leq 1) \Leftrightarrow$ D'où la suite U est bornée par –2 et 1.

II– Suites Convergentes – Suites divergentes:

(U_n) converge $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \quad (l \in IR)$

(Si ℓ **=** $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'existe pas**) Alors (U_n) diverge.**

a) – Suites définies par $U_n = f(n)$:

Dans ce cas on calcule directement la limite en $+\infty$.

b) – Suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$:

Si (U_n) a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est une solution de l'équation : $f(x) = x$.
(la solution de l'équation $f(x) = x$ est la limite éventuelle de **(U_n)**)

c) – Etude de quelques suites récurrentes :

- **$U_{n+1} = a\,U_n + b$; ($a \neq 0$; $b \neq 0$) :** $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = ax + b$.

  Soit **α l**a solution de l'équation $f(x) = x$. On pose $V_n = U_n - \alpha$. On étudie la convergence de (V_n) puis on déduit celle de (U_n).

- **Exemple :** Soit $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

  - Déterminer la limite éventuelle α de cette suite (U_n) ;
  - On pose $V_n = U_n - \alpha$. Etudier la convergence de (U_n).

- **Suites homographiques** $U_{n+1} = \dfrac{aU_n + b}{cU_n + d}$ ($c \neq 0$) **:**

  $U_{n+1} = f(U_n)$ **.** On résout $f(x) = x$. Soient α et β les solutions de l'équation $f(x) = x$. Soient A (α ; 0) ; B (β ; 0) ; M_n (U_n ; 0).

  On pose $V_n = \dfrac{\overline{BM_n}}{\overline{AM_n}} \Leftrightarrow V_n = \dfrac{U_n - \beta}{U_n - \alpha}$.

  On étudie la convergence de (V_n) puis celle de (U_n).

III – Propriétés des limites:

a) Théorème 1 : (admis)

Si (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.
Alors on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \ell + \ell'$ avec $\ell' \neq 0$.

b) Théorème 2 : (des gendarmes)

Soient (U_n) ; (V_n) et (W_n) trois suites telles que (U_n) et (V_n) convergent vers ℓ et $U_n \leq W_n \leq V_n$, alors la suite (W_n) converge vers ℓ.

c) Théorème 3 : (admis)

- Toute suite croissante et majorée est convergente ;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

IV – Suites Arithmétiques:

1- Définition : On appelle suite arithmétique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$; où **r** est un réel appelé la raison de la suite (U_n).

Exemples : a) Soit (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n).

b) Déterminer la suite de raison r = –3 dont le terme d'indice 4 égale à 30.

Remarque : une suite arithmétique (U_n) est croissante si r est positive et décroissante si r est négative.

2- Expression du terme général U_n :

Soit une suite arithmétique (U_n) de 1er terme U_1 et de raison r.

$$U_1$$
$$U_2 = U_1 + r$$
$$U_3 = U_2 + r = U_1 + 2r$$
$$U_4 = U_3 + r = U_1 + 3r$$
$$U_5 = U_4 + r = U_1 + 4r$$
$$\vdots$$

$\forall\ p \in \mathbb{N},\ p < n$ on a : $\mathbf{U_n = U_p + (n - p)\, r \iff U_n - U_p = (n - p)\, r}$.

- Si le 1er terme est U_0 alors $U_n = U_0 + nr$. (p=0)
- Si le 1er terme est U_1 alors $U_n = U_1 + (n - 1)\, r$. (p=1)

Exemples :

a) Trouver le 50è terme de la suite arithmétique : 12 ; 16 ; 20 ; …

b) Trouver le nième terme de la suite : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ……. ; n.

3 – Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Nous avons démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit (U_n) une suite arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n .$$

$$S_n = U_0 + (U_0+r) + (U_0+2r) + (U_0+3r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (U_0+nr) \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n = \underbrace{U_0 + U_0 + \ldots\ldots\ldots + U_0}_{U(n+1)\ \ fois} + (1+2+3+\ldots\ldots+n)\,r \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n = (n+1)\,U_0 + \frac{n(n+1)}{2} \quad \Leftrightarrow$$

. **$S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,2U_0 + nr\,]$ ou $S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,U_0 + U_n\,]$** .

(*Somme des n+1 premiers termes*)

– Si le 1er terme est U_1 alors on a :

. **$S_n = \frac{n}{2}\,[\,2U_1 + (n-1)\,r\,]$ ou $S_n = \frac{n}{2}\,[\,U_1 + U_n\,]$** .

(*Somme des n premiers termes*)

Exemple : Calculer la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique : 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ……

V – Suites géométriques:

1- Définition : On appelle suite géométrique toute suite (U_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme: **$U_{n+1} = q \times U_n$**, où **q** est un réel appelé la raison de la suite (U_n).

2 – Expression du terme général U_n :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q.

U_1 ; q

$U_2 = q \times U_1$

$U_3 = q \times U_2 = q^2\,U_1$

$U_4 = q \times U_3 = q^3\,U_1$

.

.

$\forall\ p \in \mathbb{N},\ p < n$ on a : . **$U_n = U_p \times q^{\,n-p}$** .

- Si le 1er terme est U_0 alors $U_n = U_0 \times q^{\,n}$ (p=0) .
- Si le 1er terme est U_1 alors $U_n = U_1 \times q^{\,(n-1)}$ (p=1)

Exemple :

Déterminer le sixième terme de la progression géométrique : 2 ; 6 ; 18 ;…….

3 – Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n .$$

$$- $$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + qU_n .$$

$$(1- q)\, S_n = U_0 - qU_0 + U_1 - qU_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n - qU_n. \Leftrightarrow$$

$$(1- q)\, S_n = U_o - qU_n \quad \Leftrightarrow$$

$$(1- q)\, S_n = U_o - qU_0 \times q^{\,n} \quad \Leftrightarrow$$

$$(1- q)\, S_n = U_o\,(1 - q^{\,n+1}) \quad \Leftrightarrow$$

. **$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{\,n+1}}{1-q}$ avec q ≠ 1** .

– Si le 1er terme est U_1 alors :

. **$S_n = U_1 \times \frac{1-q^{\,n}}{1-q}$ avec q ≠ 1** .

– Si q = 1 alors on a :

. **$S_n = n\, U_1$** .

4 – Limites d'une suite géométrique :

Soit une suite géométrique de raison q et de terme général U_n.

- Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$;
- Si $|q| > 1$ alors (U_n) diverge.

5 – Limites de la somme des termes d'une suite géométrique :

- Si q = 1 alors $S_n = n\, u_1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_1 = +\infty$;
- Si $q > 1$ alors $S_n = u_1 \times \frac{1-q^{\,n}}{1-q}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$;
- Si $q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{U_1}{1-q}$.

6 – Progressions Arithmétiques et Géométriques :

Soit la progression de trois termes x ; y ; z.

. (x ; y ; z sont en progression arithmétique) $\Leftrightarrow$ ($x + z = 2y$) .

. (x ; y ; z sont en progression géométrique) $\Leftrightarrow$ ($x \times z = y^2$) .

VI – Tableau de Formules des suites arithmétiques et géométriques:

Nature de la suite	Si le 1er terme est	Terme Général U_n	Somme des termes
(U_n) est une suite Arithmétique de raison r	U_p	$U_n = U_p + (n-p)r$	$S_n = \frac{(n+1)}{2}[2U_0 + nr]$ ou $S_n = \frac{(n+1)}{2}[U_0 + U_n]$
	U_0 (p=0)	$U_n = U_0 + nr$	
	U_1 (p=1)	$U_n = U_1 + (n-1)r$	$S_n = \frac{n}{2}[2U_1 + (n-1)r]$ ou $S_n = \frac{n}{2}[U_1 + U_n]$
(U_n) est une suite Géométrique de raison q	U_p	$U_n = U_p \times q^{n-p}$	$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$
	U_0 (p=0)	$U_n = U_0 \times q^n$	
	U_1 (p=1)	$U_n = U_1 \times q^{n-1}$	$S_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ avec $q \neq 1$
	U_1	Si q = 1 alors	$S_n = n\,U_1$.

Exercice : On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

a-/ Trouver la limite éventuelle α de la suite (U_n).

b-/ On pose $V_n = U_n - 8$. Etudier la convergence de (U_n).

CALCUL BARYCENTRIQUE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Fonction vectorielle de Leibniz:

Dans ce chapitre désignons par **X** une droite, un plan, ou un espace, et $\overrightarrow{X}$ l'ensemble des vecteurs. Appelons **point pondéré** le couple **(A ; α)** formé par un point **A** de **X** et **α** un réel appelé coefficient ou masse de **A**.

Considérons une famille finie :

$[(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) ; (A_3 ; \alpha_3) ; \ldots ; (A_i ; \alpha_i) ; \ldots ; (A_n ; \alpha_n)]$ de n points pondérés. Nous noterons cette famille finie $\left[(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}\right]$; c'est une famille de couples.

1– *Définition*:

On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à la famille $(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ l'application $\vec{f} : X \to \overrightarrow{X}$

$$M \mapsto \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} .$$

$$. \quad \vec{f}(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \quad .$$

2– *Remarques*:

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors $\vec{f}$ est constante.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors $\vec{f}$ est bijective.

II – Barycentre de n points pondérés:

1– *Définition*: On appelle barycentre de la famille des points pondérés $(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$ le point **G unique** en lequel la fonction vectorielle de Leibniz s'annule. $\vec{f}(G) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

O étant un point quelconque de **X** on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right)$.

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n$; alors G est l'isobarycentre ou l'équibarycentre des points $[(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) ; (A_3 ; \alpha_3) ; \ldots ; (A_i ; \alpha_i) ; \ldots ; (A_n ; \alpha_n)]$.

2– *Propriétés du barycentre*:

P_1) Le barycentre ne change ne pas si on change l'ordre des couples $(A_i ; \alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$;

P_2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (k\alpha_i) \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$; $(k \in IR^*)$;

P_3) La recherche du barycentre plusieurs points peut se ramener de proche en proche à la recherche du barycentre de deux points.

3 – *Coordonnées du barycentre*:

Plaçons-nous dans le cas où **X** est l'espace E. Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ un repère cartésien de E et les points A_i (x_i ; y_i ; z_i) ; G_i (x_G ; y_G ; z_G) est barycentre des (A_i ; α_i) a pour coordonnées :

$$\ldots \quad X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i}{\sum \alpha_i} \quad ; \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y_i}{\sum \alpha_i} \quad ; \quad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, z_i}{\sum \alpha_i} \quad .$$

III – Fonction numérique (ou scalaire) de Leibniz:

1– *Définition et Formule de Leibniz*:

On appelle fonction scalaire de Leibniz associée à la famille $(A_i\ ;\ \alpha_i)_{i=1\ à\ n}$

l'application $f : X \to IR$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 .$$

$$\ldots\ f(M) = \alpha_1\, MA_1^{\,2} + \alpha_2\, MA_2^{\,2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n\, MA_n^{\,2} \quad .$$

Quels que soient M et O de X on a : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 \Leftrightarrow f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 \Leftrightarrow$

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \bullet \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_i}^2) \Leftrightarrow f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2$.

D'où : $$\ldots \quad f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO} \bullet \vec{f}(O) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MO^2 \quad .$$

- 1er cas : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{f}(O) = \vec{v}$ est un vecteur constant.

$$\ldots \quad f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO} \bullet \vec{v} \qquad \textbf{(1)} \quad .$$

Remarque :

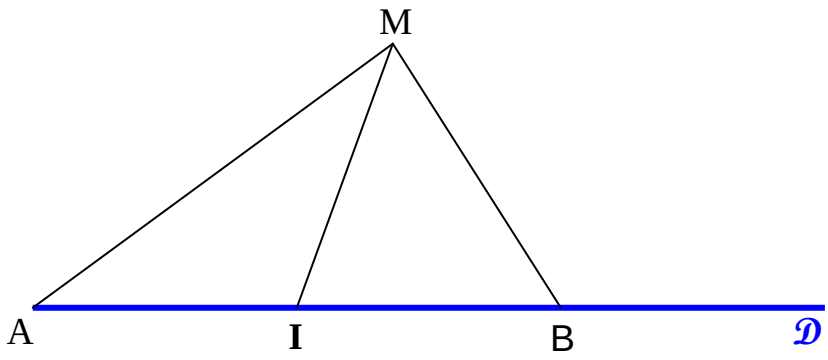
Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors la fonction scalaire est une fonction constante.

- 2ème cas : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point unique **G** barycentre des points pondérés $(A_i\ ;\ \alpha_i)_{i=1\ à\ n}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ .On a: $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$ **(2)**

Les formules **(1)** et **(2)** sont connues sous le nom de **« formules de Leibniz »**.

2 – *Cas Particuliers* :

Soit A et B deux points d'une droite ($\mathcal{D}$), I le milieu du segment [AB].
Soit M un point quelconque de X, H le projeté orthogonal de M sur ($\mathcal{D}$).



- En appliquant ce qui précède aux points pondérés (A,1) ; (B,1) on obtient le théorème de la médiane : . $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- En utilisant les deux points pondérés (A,1) ; (B,–1) on obtient :

$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 + 2\,\overrightarrow{MI}\bullet\vec{v}$ avec $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$.

. $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\,\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{IH}\times\overrightarrow{AB}$.

3 – *Ensemble des points M tels que f (M) = k (k ∈ ℝ) :*

Etant donnés n points pondérés $(A_i\ ;\alpha_i)_{i=1\ à\ n}$ et k une constante réelle.

Etudions l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M de X tels que f(M)=k.

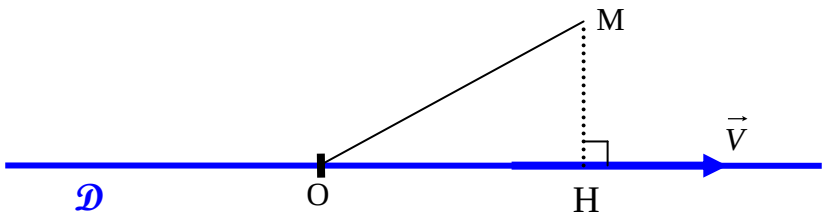
$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO}\bullet\vec{v} + \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)MO^2 = k \ .$$

- 1er cas : Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$ on sait que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{f}(O) = \vec{v}$ est un vecteur constant on a :

$$f(O) + 2\overrightarrow{MO}\bullet\vec{v} = k \quad \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MO}\bullet\vec{v} = k - f(O) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}\bullet\overrightarrow{OM} = \frac{f(O)-k}{2}\ .$$

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $f(O) \neq k$ alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) = ∅.
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $f(O) = k$ alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) est l'espace X.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, Soit $\mathcal{D}$ (O, $\vec{v}$) la droite passant O et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Soit H le projeté orthogonal d'un point M de **X** sur $\mathcal{D}$.



$$M \in (E) \ \Leftrightarrow\ \vec{v}\bullet\overrightarrow{OM} = \frac{f(O)-k}{2} \ \Leftrightarrow\ \left\|\vec{v}\right\|\times\overrightarrow{OH} = \frac{f(O)-k}{2} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OH} = \frac{f(O)-k}{2\times\left\|\vec{v}\right\|}\ .$$

L'ensemble ($\mathcal{E}$) est les points M de X qui se projètent perpendiculairement sur $\mathcal{D}$ au point H.

Remarque :

- Sur une droite, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est {H }.
- Dans le plan, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est la droite (**Δ**) perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (O, $\vec{v}$) au point H.
- Dans l'espace, l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est le plan ($\mathcal{P}$) perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (O, $\vec{v}$) au point H.

- 2ème cas : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point unique **G** barycentre des points pondérés $(A_i\ ;\ \alpha_i)_{i=1\ à\ n}$. On a $f(M)=k \Leftrightarrow f(G) + 2\overrightarrow{MG} \bullet \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 = k$

$\Leftrightarrow$

$f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 = k \Leftrightarrow$. $MG^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum \alpha_i}$.

- Si $\dfrac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} < 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le vide.
- Si $\dfrac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} = 0$, alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est {G }.
- Si $\dfrac{k - f(G)}{\sum \alpha_i} > 0$, alors $MG = \sqrt{\dfrac{k - f(G)}{\sum \alpha_i}}$, d'où l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est le cercle (respectivement la sphère) de centre G et de rayon r =MG.

4 – *Calcul de f(G) (G barycentre)* :

Faisons le calcul pour n = 3. Soient $(A_1\ ;\ \alpha_1)$; $(B\ ;\ \alpha_2)$; $(C\ ;\ \alpha_3)$ trois points pondérés de barycentre le point G. La formule de Leibniz (∀ M ∈ X),

$f(M) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2$.

$$\begin{cases} f(A) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,AG^2 \\ f(B) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,BG^2 \\ f(C) = f(G) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,CG^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 f(A) = \alpha_1 f(G) + \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,AG^2 \\ \alpha_2 f(B) = \alpha_2 f(G) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,BG^2 \\ \alpha_3 f(C) = \alpha_3 f(G) + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,CG^2 \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre on déduit que :

. $f(G) = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\ AB^2 + \alpha_1\alpha_3\ AC^2 + \alpha_2\alpha_3\ BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$.

5 – *Ensemble des points M du plan tels que* $\dfrac{MA}{MB} = k$:

Soit A et B deux points distincts du plan, k un réel strictement positif.

$\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 = k^2\ MB^2 \Leftrightarrow$. $MA^2 - K^2\ MB^2 = 0$.

- 1er cas : Si k = 1 alors **MA** = **MB**, alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est la droite (**Δ**) médiatrice du segment [AB].

- 2ème cas : Si k ≠ 1 alors $\sum \alpha_i \neq 0$, il existe un point unique **G** barycentre des points pondérés : (A,1) ; (B, – k²).

$\overrightarrow{MA}^2 - k^2\ \overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$

Soit G_1 barycentre de (A ,1) et (B , k) $\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$.

Soit G_2 barycentre de (A ,1) et (B ,– k) $\Leftrightarrow \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$.

$$\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{G_1B}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{MG_1}\right) + \left(\overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{G_1B}\right)\right] \bullet \left[\left(\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{MG_2}\right) + \left(\overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{G_2B}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(1+k)\overrightarrow{MG_1}\right] \bullet \left[(1-k)\overrightarrow{MG_2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MG_1} \bullet \overrightarrow{MG_2} = 0 \ .$$

D'où l'ensemble des M cherchés est le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$.

Exemple d'application :

Soit a un nombre réel strictement positif, OAB un triangle rectangle en O tels que : OA = 2a ; OB = a. Déterminer et construire l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 2$ **.** Montrer que O appartient à ($\mathcal{E}$).

--- 0 ---

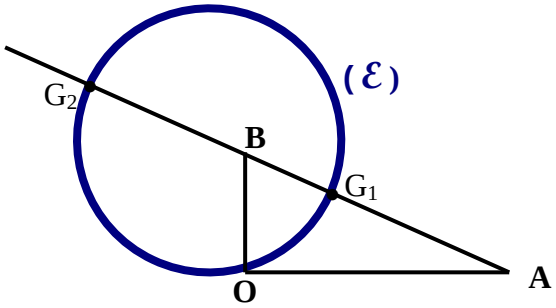
$\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow$ MA² – 4 MB² = 0 $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

Soit G_1 barycentre de (A,1) et (B,2) on a : $\overrightarrow{G_1A} + 2\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ fixons A on obtient $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Soit G_2 barycentre de (A,1) et (B,–2) on a : $\overrightarrow{G_2A} - 2\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$ fixons A on obtient $\overrightarrow{AG_2} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \bullet \overrightarrow{MG_2} = 0$.

D'où l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M est le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$.

- Montrons que O appartient à ($\mathcal{E}$). Si M = O on a : $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = 2 \Leftrightarrow \frac{2a}{a} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$.

  D'où O appartient à ($\mathcal{E}$).



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Généralités :

1) – Définitions 1 : On appelle équation différentielle d'ordre n , (n ∈ ℕ) toute équation de la forme **F(x ; y(x) ;y'(x) ; y''(x) ; ……. ; y^n(x)) = 0** où **F** est une fonction de (n+1) variables, où y est la fonction inconnue supposée n fois dérivable de dérivées successives y' ; y'' ; y''' ;…… ; y^n de la variable x.

Exemples : y' + y – x = 0 est une équation différentielle du 1er ordre.

y''+ 2y' + 4y + 2x– 5 = 0 est une équation différentielle du 2ème ordre.

2) – Solutions d'une équation différentielle :

- **Définition 2 :** Etant donnée une équation différentielle d'ordre n, on appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f définie sur un intervalle **I** de ℝ; n fois dérivable sur **I** et vérifiant l'équation différentielle donnée pour tout x de **I**.

- **Remarque :** Si **U** est une fonction définie sur **I** et continue alors l'équation différentielle **y' = U(x)** admet comme solution toute fonction primitive de **U** sur **I**.

- **Exemple 1 :** Soit l'équation différentielle y' = 6x + 2.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies par :

$f(x) = \int (6x+2)dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 3x^2 + 2x + c$.

- **Exemple 2 :** Soit $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies par :

$f(x) = \int -\dfrac{\sin x}{\cos x}\, dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \ln|\cos x| + c$.

- **Définition 3 :** Résoudre ou intégrer une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions f définies sur **I** et vérifiant l'équation différentielle. Toute fonction f solution de l'équation différentielle est appelée est encore appelée intégrale de l'équation différentielle.

II– Équations différentielles linéaire du 1er ordre à coefficients constants sans second membre :

1 - Définition 4 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme

(E) : ay ' + by = 0 . b est un réel et a un réel non nul.

2 - Solutions de (E) : ay' + by = 0 :

a-/ Notion d'équation caractéristiques de (E) :

Recherchons une condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel **r** pour que la fonction y : ↦ e^{rx} soit solution de (E). $y = e^{rx} \Rightarrow y' = r\,e^{rx}$; y est solution de (E) si et seulement si elle vérifie (E). $ar\,e^{rx} + b\,e^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}(ar + b) = 0 \Leftrightarrow ar+b = 0$. **ar + b = 0 (est appelée équation caractéristique de (E)).**

ar +b = 0 ⇔ **r =** $\dfrac{-b}{a}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $f(x) = K \times e^{rx}$ **; K ∈ ℝ** .

- Exemple : Résoudre l'équation différentielle (E) : 2y' – y = 0

L'équation caractéristique est : 2r – 1 = 0 ⇔ r = $\frac{1}{2}$. Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $f(x) = K e^{\frac{1}{2}x}$, $K \in IR$.

III– Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants sans 2ème membre :

1- Définition 5 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme

(E) : ay '' + by' +cy = 0 .

Où b et c sont des réels et a un réel non nul.

2- Résolution de l'équation différentielle ay''+ by' + cy = 0 :

a-/ Recherche d'une solution particulière :

Notons (E) : ay''+ by' + cy = 0. Soit r ∈ ℝ, et une fonction U : x ↦ e^{rx}.

Cherchons le réel r tel que U soit solution de (E) . U est solution de (E) si et seulement si : aU'' + bU' + cU = 0 ; or U(x) = e^{rx} ⇒ U'(x) = r e^{rx} ⇒ U''(x) = r^2 e^{rx} .D'où on a: e^{rx} (ar^2 + br + c) = 0⇒**ar^2+br+c=0 (équation caractéristique de (E).)** .

b-/ Définition 6 :

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle **(E): ay''+ by'+cy = 0,** l'équation d'inconnue r réel ou complexe : **ar^2 + br + c = 0.**

c-/ Théorème (admis) :

Si l'équation caractéristique : **ar^2 + br + c = 0** admet	Alors les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par
2 racines réelles : **r_1** et **r_2**	$f(x) = Ae^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$; A ∈ ℝ; B ∈ ℝ.
1 racine double réelle : **r_0**	$f(x) = (A x + B) e^{r_0 x}$; A ∈ ℝ; B ∈ ℝ.
2 racines complexes conjuguées : **$r_1 = \alpha + i\beta$** et **$r_2 = \alpha - i\beta$**	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$; A ∈ ℝ ; B ∈ ℝ

Exemples:

Déterminer pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

1/ (E_1) : y'' + y' – 6y = 0 sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$.

2/ (E_2) : y'' + 6y' + 9y = 0 sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

3/ (E_3) : y'' – 6y' + 13y = 0 sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

APPLICATIONS AFFINES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Applications linéaires:

Activité : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ et

$$\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u}) = k\vec{u} \qquad (k \in IR^*)$$

a) montrer que $\forall (\vec{u} ; \vec{v}) \in \mathcal{V}^2 : \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

b) montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R} ; \forall \vec{u} \in \mathcal{V} : \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$.

-- 0 --

a) Soit $(\vec{u} ; \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$; $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; et $\vec{u} \in \mathcal{V}$; $\varphi(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$. Les conditions a) et b) étant vérifiées on dit que **φ** est une application linéaire.

1 – Définition :

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On appelle application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, toute application **φ** de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ telle que :

- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$; $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda \times \varphi(\vec{u})$.

Désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs de la droite $(\mathcal{D})$ et par $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace affine $(\mathcal{E})$. On définit de façon analogue une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$; de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$.

2 – Propriétés :

Soit **φ** une application linéaire respectivement de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$, de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$.

P_1 : $\forall (\vec{u} ; \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$; $\forall (\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$; $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\ \varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$

P_2 : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$; $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$;

P_3 : $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

II – Applications affines:

1) Activité : Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que : } \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} .$$

Montrer que si G est le barycentre du système pondéré $\{(A_1;\alpha_1) ; (A_2;\alpha_2) ;\ldots\ldots ; (A_n;\alpha_n)\}$ alors $G' = f(G)$ est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(f(A_1);\alpha_1) ; (f(A_2);\alpha_2) ;\ldots\ldots ; (f(A_n);\alpha_n)\}.$$

Supposons G barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$.

G barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \text{ en multipliant par 2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (2\overrightarrow{OA_i} - 2\overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i}' - \overrightarrow{OG}') = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A_i}' = \vec{0} \Leftrightarrow \text{G'= } f \text{ (G) est barycentre}$$

du système $(f(A_i);\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n}$. On dit que f «conserve» le barycentre. Ainsi l'application ponctuelle f qui conserve le barycentre est appelée une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

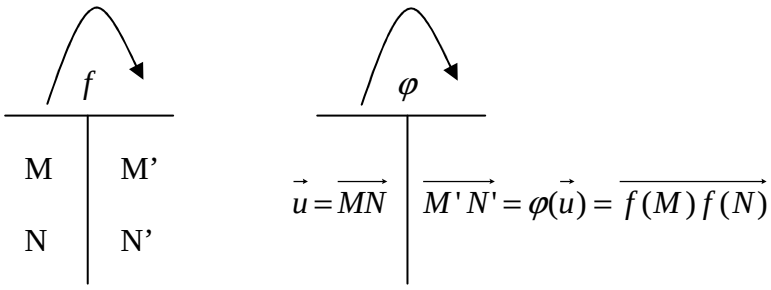
2) **Définition :** On appelle application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, toute application qui donne pour image du barycentre de tout système de points pondérés de $\mathcal{E}$, le barycentre des points images de ce système.
3) **Théorème :** Une application ponctuelle est une application affine si et seulement si, f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés.

. (f est affine) $\Leftrightarrow$ (f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés) .

Remarque : Les images par une application affine de deux bipoints équipollents sont deux bipoints équipollents. On dit qu'une application affine « conserve » l'équipollence.

4) **Application linéaire associée :**

a) **Définition :** soit f une application affine. L'application linéaire **φ** qui à tout vecteur $\vec{u}$ de représentant (M ; N) associé le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine f **.**



– f est alors appelée application ponctuelle associée à φ.

b) Remarque : soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Soit (K ; K') un couple de points homologues c'est-à-dire (f (K) = K '). On appelle application vectorielle associée à f relativement au point K (relativement au couple de points homologues (K ; K')) l'application linéaire notée :

$$\varphi_k : \mathcal{W} \to \mathcal{W}.$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{KM} \mapsto \vec{u}' = \overrightarrow{K'M'} = \varphi_k(\vec{u}) .$$

5) Détermination d'une application affine :

a) Détermination analytique :

– Activité : Soit le plan P muni d'un repère (O ; I ; J).

A (3 ; 2) ; B (1 ; 1) ; C (0 ; 1) trois points non alignés de P d'images respectives

A'(6 ; 6) ; B'(3 ; 3) ; C'(2 ; 1) par une application affine f . Soit M (x ; y) un point de P d'image M' (x' ; y') par f . Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

-- 0 --

Soit φ l'application linéaire associée à l'application affine f .

f	
A	A'
B	B'
C	C '
M	M '

φ			
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A'B'}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{A'C'}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{A'M'}$	$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A'M'}\begin{pmatrix}x'-6\\y'-6\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}\\ \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\varphi(\overrightarrow{OI}) - \varphi(\overrightarrow{OJ}) = -3\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}\\ -3\varphi(\overrightarrow{OI}) - \varphi(\overrightarrow{OJ}) = -4\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}\end{cases} \times par\ (-2)$$

$\varphi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$. On en déduit que $\varphi(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} \Leftrightarrow \varphi\left[(x-3)\overrightarrow{OI} + (y-2)\overrightarrow{OJ}\right] = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\varphi(\overrightarrow{OI}) + (y-2)\varphi(\overrightarrow{OJ}) = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$\left[(x-3)+(y-2)\right]\overrightarrow{OI} + \left[2(x-3)-(y-2)\right]\overrightarrow{OJ} = (x'-6)\overrightarrow{OI} + (y'-6)\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x'-6 = x-3+y-2\\ y'-6 = 2x-6-y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = x+y+1\\ y' = 2x-y+2\end{cases}$$ est l'expression analytique de f

Remarque :

- Soit f : $\mathcal{D}$ → $\mathcal{D}$ une application

  M(x) ↦ M'(x')

. (f est affine) ⇔ (x'= ax + b avec a , b réels) .

- Soit f : $\mathcal{P}$ → $\mathcal{P}$ une application

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

. (f est affine) ⇔ $\left(\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad a, b, c, a', b', c' \text{ réels}\right)$.

La matrice de l'application linéaire φ associée est $M\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

- Soit f : $\mathcal{E}$ → $\mathcal{E}$ une application

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

. (f est affine) ⇔ $\left(\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases} \quad a, b, ..., d'' \text{ réels}\right)$.

La matrice de l'application linéaire φ associée est $M\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

- Une application affine est bijective si $dét\, M\varphi \neq 0$.

b) Détermination par une application linéaire associée et un couple de points :

Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée de l'application linéaire associée **φ** et d'un couple de points.

Exemple : soit $\mathcal{P}$ rapporté au repère (O ; I ; J) et **φ:** $\mathcal{V}$ → $\mathcal{V}$

$\vec{u}$ ↦ $\varphi(\vec{u}) = 2\vec{u}$

Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ d'application linéaire associée **φ** qui au point K(1 ;2) associe K'(3 ;–1). Donnez l'expression analytique de f .

Soit M(x ; y) $\mapsto$ M'(x' ; y')

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{K'M'}=\varphi(\overrightarrow{KM})=2\overrightarrow{KM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-3 \\ y'+1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=2y-5 \end{cases}$$

6) Image d'une droite, d'un plan par une application affine :

a)- Image d'une droite :

Théorème : L'image d'une droite (AB) par une application affine f est :

- la droite passant par f(A) et f(B) si et seulement si f(A) ≠ f(B) .
- l'ensemble $\{f(A)\}$ $si\ \ et\ \ seulement\ si\ \ f(A)=f(B)$.

b)- Image d'un plan :

Théorème : L'image d'un plan (ABC) par une application affine f est :

- le plan passant par f(A) , f(B) et f(C) si et seulement si les trois points f(A) , f(B) et f(C) sont non alignés .
- la droite passant par f(A) , f(B) et f(C) si et seulement si f(A) , f(B) et f(C) sont alignés non tous confondus.
- Le singleton $\{f(A)\}$ $si\ \ et\ \ seulement\ si\ \ f(A); f(B)\ et\ f(C)\ \ sont\ \ confondus$.

c)- Conservation du parallélisme :

Théorème : Si une application affine f (de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$) transforme une droite ($\mathcal{D}$) en une droite ($\mathcal{D}$'), alors elle transforme toute droite parallèle à ($\mathcal{D}$) en une droite parallèle à ($\mathcal{D}$').
Si une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ transforme un plan ($\mathcal{P}$) en un plan ($\mathcal{P}$'), alors elle transforme tout plan parallèle à ($\mathcal{P}$) en un plan parallèle à ($\mathcal{P}$').
On dit que les applications affines conservent le parallélisme.
Remarque : En général une application affine ne conserve pas l'orthogonalité, les distances, le rapport des distances.

7) Ensemble des points invariants par une application affine :

- On dit qu'un point M est invariant par une application affine f ssi $f(M)=M$.

- On dit qu'un ensemble E est globalement invariant par f ssi $f(E)=E$ c'est-à-dire pour tout M de E, $f(M)\in E$.

- E est dit invariant point par point si pour tout point M de E, $f(M)=M$.

III – Transformations Affines :

1) Définition :

On appelle transformation affine toute application affine bijective.

2) Etude de quelques transformations affines :

2-1 Translations :

a) Définition :

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée : $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$

($\mathcal{F}$ désignant $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$) qui à tout point M de $\mathcal{F}$ associe M' de $\mathcal{F}$ tel que: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$M \mapsto M' = t_{\vec{u}}(M)$$

. $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b) Points invariants par une translation:

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point est invariant ;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors pas de points invariants.

c) Propriété vectorielle d'une translation :

$$\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$$

Remarques :

- ✓ La bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
- ✓ $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}$.

d) Expression analytique d'une translation :

Soit $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$. En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée et sa matrice.

-- 0 --

Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') son image par $t_{\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad est\ l'expression\ analytique\ de\ t_{\vec{u}}.$$

L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad et\ sa\ matrice\ est\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad matrice\ unité.$$

2- 2 Les Homothéties :

a) Définition : Soit Ω un point de $\mathcal{F}$ et k ∈ $\mathbb{R}^*$ ($\mathcal{F}$ désignant $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$).

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application notée :

$h_{(\Omega;k)}$ de F dans F qui à tout point M associe le point M'.

$$h_{(\Omega;k)} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$M \mapsto M'$$

. $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques : $h_{(\Omega,1)}$ est l'identité ; $h_{(\Omega,-1)}$ est la symétrie de centre Ω.

b) Points invariants par une homothétie:

- Si k = 1, alors tout point est invariant ;
- Si k ∈ $\mathbb{R}^*$–{1 } , alors Ω est le seul point est invariant .

c) Propriété vectorielle:

$$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}$$

Remarques : La réciproque de $h_{(\Omega;k)}$ est $h^{-1}_{(\Omega;k)} = h_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.

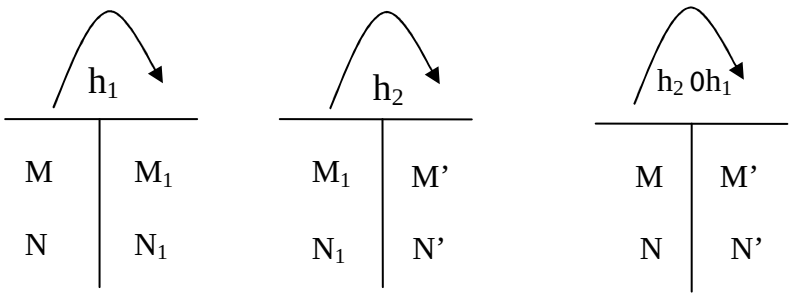
d) Composée de deux homothéties :

- **Homothéties de même centre Ω :**

$$h_{1(\Omega,k)} \circ h_{2(\Omega,k')} = h_{(\Omega,kk')}$$

- **Homothéties de centres différents :**

Soit $h_{1(A_1,k_1)}$ et $h_{2(A_2,k_2)}$ deux homothéties de centres respectifs A_1 ; A_2.



D'après la propriété vectorielle on a : $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} = k_1\ \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{M'N'} = k_2\ \overrightarrow{M_1N_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k_1 k_2\ \overrightarrow{MN}$.

- Si $k_1k_2 = 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, d'où $h_2 \circ h_1$ est une translation. Cherchons donc le vecteur de translation $\vec{u}$ de $h_2 \circ h_1$. Posons $h_2(A_1) = A'$.
  $h_2 \circ h_1(A_1) = h_2(A_1) = A'$.

  D'où $\overrightarrow{A_1A'} = \vec{u}$ est le vecteur de translation.
- Si $k_1k_2 \neq 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k_2k_1\ \overrightarrow{MN}$, d'où $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport k_1k_2.

Cherchons le centre Ω de $h_2 \circ h_1$.

$h_2(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M'} = k_2 \overrightarrow{A_2M_1}$;

$h_1(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M_1} = k_1 \overrightarrow{A_1M}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_1} = k_1 \overrightarrow{A_1M}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M_1} = \overrightarrow{A_2A_1} + k_1 \overrightarrow{A_1M}$ d'où écrire que

$h_2 \circ h_1(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2M'} = k_2 (\overrightarrow{A_2A_1} + k_1 \overrightarrow{A_1M})$ comme le centre Ω est invariant on a :

$\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2 \overrightarrow{A_2A_1} + k_2k_1 \overrightarrow{A_1\Omega} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2\Omega} = k_2 \overrightarrow{A_2\Omega} + k_2 \overrightarrow{\Omega A_1} + k_1k_2 \overrightarrow{A_1\Omega} \Leftrightarrow$

$(1-k_2)\overrightarrow{A_2\Omega} = k_2(1-k_1)\overrightarrow{\Omega A_1} \Leftrightarrow (k_2-1)\overrightarrow{\Omega A_2} + k_2(k_1-1)\overrightarrow{\Omega A_1} = \vec{0}$.

D'où le centre Ω est le barycentre des points pondérés

$[A_2, (k_2-1)]$ *et* $[A_1, k_2(k_1-1)]$.

e) Expression analytique d'une homothétie :

Soit $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ Ω (x_0 ; y_0) un point de $\mathcal{P}$ et k un réel non nul. Donner l'expression analytique de $h_{(\Omega,k)}$. En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée puis sa matrice.

-- 0 --

Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') son image par $h_{(\Omega,k)}$. $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

$$\begin{cases} x'-x_0 = k(x-x_0) \\ y'-y_0 = k(y-y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } h_{(\Omega,k)} .$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-k) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ et sa matrice est } M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} .$$

2-3 Groupe des homothéties – Translations :

Soient $h_{(O,k)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k ; $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t \circ h = h \circ t = h$;
- Si k = 1, alors $t \circ h = h \circ t = t$;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et* $k \neq 1$, alors $t \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k tel que : $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$ *car* $t_{\vec{u}}(O) = O' \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et* $k \neq 1$, alors $h \circ t$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k tel que : $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$.

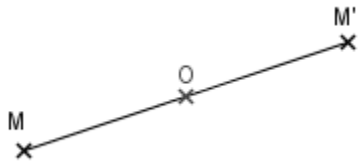
2-4 Symétrie centrale :

a) Définition :

Soit O(x_o ;y_o) un point du plan. On appelle symétrie de centre O, l'application

S_o : $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

M(x ; y) $\mapsto$ M' (x' ; y') *avec O milieu de* [MM']



. S_o (M) = M' $\Leftrightarrow$ O est milieu de [MM'] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}$.

b) Expression analytique d'une symétrie centrale

$$S_o\,(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 2(x_0 - x) \\ y'-y = 2(y_0 - y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

. D'où $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ *Expression analytique de* S_0 .

c) Ensemble des points invariants

Le centre O de la symétrie centrale S_o est le seul point invariant.

d) Exemple

Soit f l'application affine définie par son expression analytique

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$$

- Montrer que f est bijective
- Déterminer les éléments caractéristiques de f
- Quelle est la nature de f ?

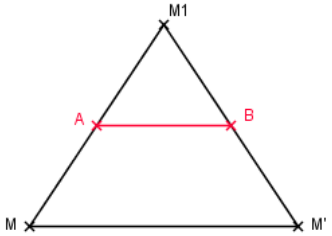
Solution

- f est bijective car $dét\, M\varphi = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
- l'ensemble des points est le point A(1 ; 2)
- f est la symétrie centrale de centre le point A.

Remarques:

- ☞ Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport –1. $S_0 = h_{(O,-1)}$;
- ☞ Une symétrie centrale de centre O est aussi une rotation de centre O et d'angle π (on l'appelle demi-tour).

☞

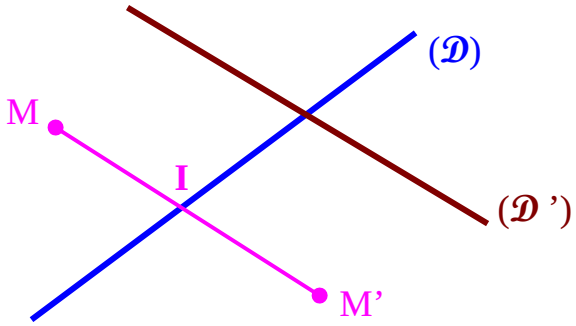


$S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$

2- 5 Symétries axiales :

a) Activité : Soit ($\mathcal{D}$) : x + 2y = 5 et ($\mathcal{D}$') : x – 3y = 1.
Donner l'expression analytique de la symétrie $\mathcal{S}$ par rapport à ($\mathcal{D}$) parallèlement à ($\mathcal{D}$'). Que peut-on dire de $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}$?

-- 0 --



Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') tel que $\mathcal{S}$(M) = M'. Soit I milieu de [MM'] et $\vec{u}'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D'). $\mathcal{S}$(M) = M' $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} I \in (D) \\ \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{u}' \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} + 2\dfrac{(y+y')}{2} = 5 \\ \begin{vmatrix} x'-x & 3 \\ y'-y & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-x-12y+30) \\ y' = \dfrac{1}{5}(-2x+y+10) \end{cases}$ est l'expression analytique de S.

$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}$ = id. On dit que $\mathcal{S}$ est involutive.

b) Définition :

Une application affine f telle que $f \circ f = Id$ est dite **involutive**.
Toute involution est une symétrie.

2- 6 Symétrie orthogonale :

a) Définition : Soit (D) une droite du plan, on appelle symétrie orthogonale d'axe (D) ou réflexion d'axe (D) l'application

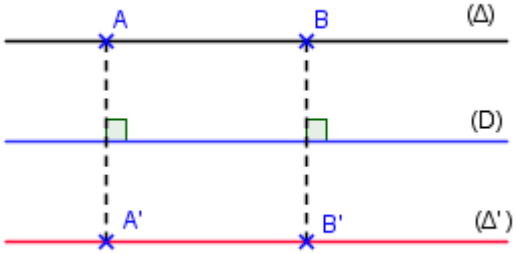
$S_D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

M $\mapsto$ M' telle que (D) est la médiatrice du segment [MM'].

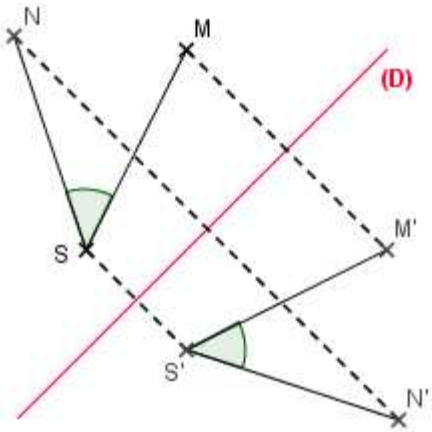
. $S_D(M) = M' \Leftrightarrow (D)$ est la médiatrice du segment [MM'] .

b) Exercice

Construire les images de la droite (Δ) et l'angle orienté (SM,SN) par la symétrie orthogonale d'axe (D).



$S_D(\Delta) = \Delta'$ et $\Delta // \Delta'$



L'angle $(S'M', S'N') = -(SM, SN)$

c) Expression analytique

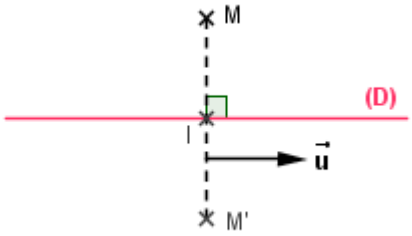
Soient une droite (D): ax+by +c = 0 et $\vec{u}(-b\,;\,a)$ un vecteur directeur de (D). M'(x';y') le symétrique de M(x;y) par S_D la symétrie orthogonale d'axe (D).

. $S_D(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0 \\ Le\ \ milieu\ \ I\ \ de\ [MM'] \in (D) \end{cases}$.

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S_D d'axe la droite (D) : 2x + 3y – 4 = 0.

Solution



1ère méthode : On sait que $\vec{u}\ (-3\ ;\ 2)$

$$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x'+2y' = -3x+2y \qquad (1)$$

Le milieu I de [MM'] appartient à (D) est équivalente à

$$2\left(\frac{x+x'}{2}\right)+3\left(\frac{y+y'}{2}\right)-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x'+3y'=8-2x-3y \qquad (2)$$

En résolvant le système formé par (1) et (2) on a

$$\begin{cases} -3x'+2y'=-3x+2y \\ 2x'+3y'=8-2x-3y \end{cases} \begin{matrix} \times(2) \\ \times(3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x'+4y'=-6x+4y \\ 6x'+9y'=24-6x-9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y'=24-12x-5y \\ 2x'=8-2x-3y+3y' \end{cases}$$

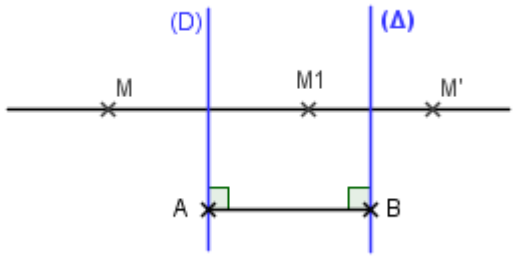
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{13}(16+5x-12y) \\ y'=\frac{1}{13}(24-12x-5y) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{13}(15x-12y+16) \\ y'=\frac{1}{13}(-12x-5y+24) \end{cases} \quad \textit{est l'expression analytique de } S_D$$

d) Ensemble des points invariants

L'ensemble des points invariant par une symétrie orthogonale S_D est l'axe (D).

e) Remarques :

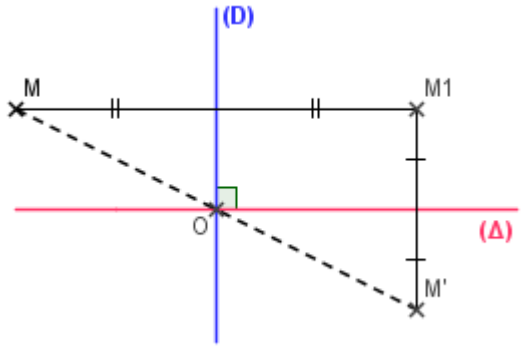
- **Composée de 2 symétries orthogonales d'axes parallèles**



. (D) et (Δ) sont parallèles .

. $S_{\Delta} \circ S_{D} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

- **Composée de 2 symétries orthogonales d'axes orthogonaux**

	. (D) et (Δ) sont perpendiculaires . . $S_{\Delta} \circ S_{D} = S_{O}$.

2- 7 Rotation :

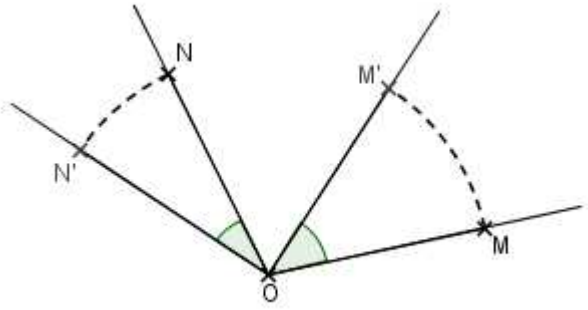
a) Définition

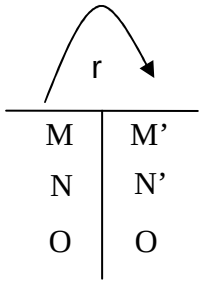
Étant donnés un point O du plan et un angle orienté $(\hat{\alpha})$. On appelle rotation de centre O et d'angle $(\hat{\alpha})$ l'application :

$$r : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

M $\mapsto$ M ' telle que

- Si M = O alors M' = O
- Si M $\neq$O alors OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\hat{\alpha})$





b) Remarques

- La rotation d'angle nul de centre O est l'identité.
- La rotation d'angle plat de centre O est la symétrie de centre O.

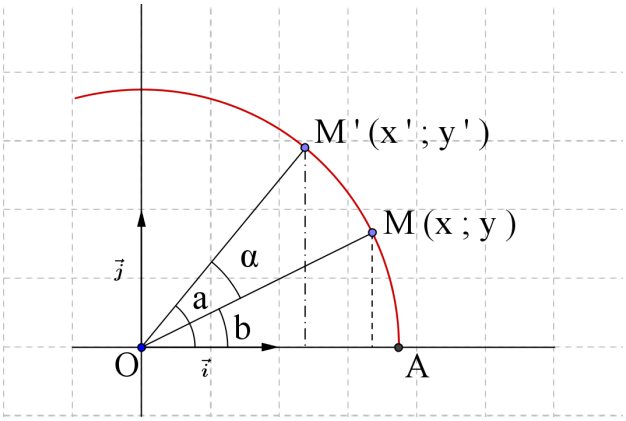
c) Ensemble des points invariants

Si l'angle est non nul, le seul point invariant est le centre.

d) Expression analytique

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

soit la rotation $r_{(O;\alpha)}$ de centre O et d'angle α, les points M(x ; y) et M'(x' ; y') du plan, $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des mesures des angles de vecteurs.



On a : α =(a–b)+2$k\pi$

$$\begin{cases} x = OM\cos b \\ y = OM\sin b \end{cases};\ \begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = OM\cos(\alpha+b) \\ y' = OM\sin(\alpha+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = OM(\cos\alpha\cos b - \sin\alpha\sin b) \\ y' = OM(\sin\alpha\cos b + \sin b\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (OM\cos b)\cos\alpha - (OM\sin b)\sin\alpha \\ y' = (OM\cos b)\sin\alpha + (OM\sin b)\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ y' = (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{cases}$$

est l'expression analytique de la rotation $r_{(O;\alpha)}$ ***de centre O et d'angle*** α ***dans le repère orthonormé*** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

e) Formule du changement de repère

Soit M(x ; y) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et M(x ; y) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,';\vec{j}\,')$

On a : $\begin{cases}\vec{i}\,'=\cos\alpha\,\vec{i}-\sin\alpha\,\vec{j}\\ \vec{j}\,'=\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}\end{cases}$;

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM}=X(\cos\alpha\vec{i}-\sin\alpha\vec{j})\vec{i}+Y(-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{j})$

D'où $x\vec{i}+y\vec{j}=X(\cos\alpha\vec{i}-\sin\alpha\vec{j})\vec{i}+Y(-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{j})\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha\end{cases}$$

f) Composition de rotations : Soit $f=r'_{(O';\alpha')}\circ r_{(O;\alpha)}$

- Si O = O' alors f est une rotation de centre O et d'angle $\alpha+\alpha'$, $f=R(O;\alpha+\alpha')$
- Si O$\neq$ O' et $\alpha+\alpha'=2k\pi\quad(k\in Z)$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ou $f(M)=M'\ \ et\ \ f=t_{\overrightarrow{MM'}}$.
- Si O$\neq$ O' et $\alpha+\alpha'\neq 2k\pi\quad(k\in Z)$ alors f est une rotation de centre le point invariant par f **et d'angle** $\alpha+\alpha'$. $f=R(I;\alpha+\alpha')$ où $I=f(I)$.

IV- Projections affines :

1) Activité :

Soit ($\mathcal{D}$) ; x + 2y = 5 et ($\mathcal{D}$') : x – 3y = 1.

a) Donner l'expression analytique de la projection p sur ($\mathcal{D}$) parallèlement à ($\mathcal{D}$').

b) Que peut-on dire de $p\circ p$?

-- 0 --

a) Soit M(x ; y) et M' (x' ; y') tel que p(M) = M' et $\vec{u}'\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D'). (Figure 1).

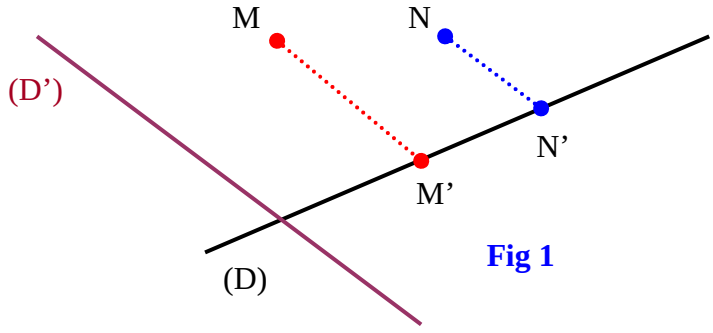


Fig 1

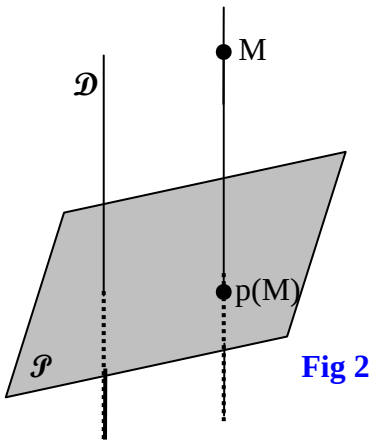


Fig 2

$$p(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} M'\in(D) \\ \overrightarrow{MM'} \ colinéaire \ à \ \vec{u}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+2y'=5 \\ x'-x-3y'+3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{3}{5}(x-3y+\frac{15}{2}) \\ y'=\frac{1}{5}(-x+3y+5) \end{cases} \ qui \ est \ l'expression \ analytique \ de \ p$$

b) $p\circ p=p$.

2) Définition :

Soit $\mathcal{P}$ un plan et ($\mathcal{D}$) une droite sécante à $\mathcal{P}$. (Figure 2).
On appelle projection sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite ($\mathcal{D}$) l'application p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite parallèle à ($\mathcal{D}$) passant par M.

LES ISOMÉTRIES DU PLAN

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Définitions:

a) Activité : Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad tel\ que \quad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Soit $N\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ d'image $N'\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$ comparer les distances d (M, N) et d (M', N').

-- 0 --

Réponse : d (M, N) = d (M', N'). On dit que f conserve la distance.

b) Définition 1 : On appelle isométrie du plan toute application affine du plan qui conserve la distance de deux points.
Exemples : la translation, la symétrie orthogonale sont des isométries.

c) Déplacements et antidéplacement :
- Si f est une isométrie de (P), on a dit que f est un Déplacement de ($\mathcal{P}$) si f conserve les mesures des angles orientés.
- On dit que f est un Antidéplacement si les angles orientés sont changés en leur opposé.
- Toute isométrie du plan est soit un déplacement soit un antidéplacement.

d) Notations : On note $\mathcal{I}^+$ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$; et $\mathcal{I}^-$ l'ensemble des antidéplacements de $\mathcal{P}$. $\mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^- = \mathcal{I}$ ensemble des isométries du plan.
Remarque : Toute isométrie est une transformation.

II – Isométries vectorielles:

a) Définition : On appelle isométrie vectorielle toute application linéaire **φ** associée à une isométrie f .

b) Propriétés : $\forall$ ($\vec{u}$; $\vec{v}$) $\in$ $\mathcal{V}^2$.

P_1 : $\|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$;

P_2 : $\varphi(\vec{u}) \bullet \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$;

c) Théorème : (admis)
Une application affine du plan est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée conserve la norme de tout vecteur de $\mathcal{V}$ ou le produit scalaire de tout couple de vecteurs de $\mathcal{V}$.

III– Déplacements et Antidéplacements :

Une isométrie de ($\mathcal{P}$) f laissant un point O invariant est une rotation ou une réflexion.

Soient A, B et C trois points non alignés de ($\mathcal{P}$). A'= f (A) , B'= f (B) et C'= f (C) sont aussi trois points non alignés.

Dans le cas où f est une rotation, alors les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ admettent une même mesure.

Dans le cas où f est une réflexion, les angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ admettent des mesures opposées.

De plus, les translations conservent les angles orientés.

On en déduit alors que pour une isométrie f quelconque, si O un point fixé dans ($\mathcal{P}$), en écrivant $f = t \circ g$ où t est une translation et g une isométrie laissant O invariant, le fait que f conserve ou non les angles orientés ne dépend que de la nature de g.

Propriété1:

Toute isométrie f de ($\mathcal{P}$) est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

Exemple 1:

Le plan ($\mathcal{P}$) orienté est un muni d'un repère orthonormé direct.

Soit f est l'application qui, au point M(x , y) associe le point M'(x' , y') avec $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$.

a) f est une isométrie. Pour le voir , il suffit de prendre 2 points A(a,b) et B(c,d).
f (A) (– b + 1 , a + 2) , f (B)(– d +1 , c + 2) et de vérifier directement que AB = f(A) f(B).

b) Pour savoir si f est un déplacement ou un antidéplacement, il suffit de savoir si f conserve un angle orienté.

On peut donc prendre une exemple. Pour O(0,0) , A(1,0) et B(0,1) , on a :
O' = f (O) avec O' (1,-2) , A' = f (A) avec A'(1,-1) et B'= f (B) avec B'(0,-2).

On remarque que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \frac{\pi}{2}$. f conserve donc l'orientation , c'est un déplacement.

c) f n'admet aucun point invariant car le système { x = – y +1 ; y = x + 2 } n'admet aucun couple (x ;y) comme solution.

Le point O'(1, –2) étant l'image de O par f, posons t comme la translation vérifiant t(O) = O'.

L'isométrie f se décompose alors en f = tog où g est un déplacement laissant O invariant. C'est donc une rotation de centre O.

On vérifie sans peine que g est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exemple 2:

f est l'application qui, au point M(x , y) associe le point M'(x' , y') avec $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

a) On vérifie directement que f est bien une isométrie.

b) Si on pose t comme étant la translation de vecteur $\vec{u}(-1\,;\,1)$, on remarque que : $f = t \circ g$ où g est l'application qui associe au point M(x , y) le point M'(y , x) . g est donc la réflexion par rapport à la droite (D) d'équation : y = x.

Donc, f est un antidéplacement.

Propriété 2:

La composée de 2 déplacements est un déplacement.
La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque : (Loi générale)

« La composée d'un nombre quelconque de déplacements et d'un nombre impair d'antidéplacements est un Antidéplacement ».

« La composée d'un nombre quelconque de déplacements et d'un nombre pair d'antidéplacements est un Déplacement ».

IV– Différentes isométries du plan :

A - Déplacement (Caractérisation, Composition, Expression analytique, Exemples)

Propriété 1:

Si deux déplacements f et g sont tels qu'il existe deux points A et B distincts tels que f(A)=g(A) et f(B)=g(B)
alors f = g.
En particulier, si un déplacement f admet deux points distincts invariants alors f est l'identité sur $(\mathscr{P})$.

Effectivement, la composée de deux déplacements est un déplacement et la réciproque d'un déplacement est un déplacement.
Donc, si f(A)=g(A) et f(B)=g(B) alors fog^{-1} est un déplacement admettant deux point invariants.
C'est donc une rotation ou une translation. Et donc l'application identité (car il y a deux points invariants distincts dans le plan $(\mathscr{P})$).
D'où f = g.

Propriété 2:

Si A et B sont deux points distincts et si A' et B' sont deux points tels que AB = A'B' alors Il existe un unique déplacement f tel que f(A) = A' et f(B) = B'. De plus, f est soit une translation soit une rotation.

Propriété 3:

Si f et g sont 2 rotations de centres respectives A et B et d'angles respectifs a et b , alors $f \circ g$ est une rotation d'angle (a+b) à 2p près..
De plus, si f et g ont même centre alors $f \circ g$ est aussi de centre A = B .

En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Expressions Analytiques.

Un déplacement dans ($\mathcal{P}$) est une translation ou une rotation.
Dans le cas d'une translation t , de vecteurs de coordonnées (a ; b), l'expression analytique de t est :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Dans le cas de la rotation R de centre W(a;b) et d'angle θ , R est la composée de la rotation de centre O, centre du repère, et d'angle θ,
et de la translation de vecteur u(a ; b). R = t∘R' , R' = rotation ce centre O , d'angle θ, et t translation de vecteur u(a;b).
On en déduit que l'expression analytique de R est :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, l'expression analytique de f est :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

Remarquons que si A, B, A' et B' sont 4 points tels que AB = A'B' , il existe un unique déplacement f tel que f (A) = A' et f (B) = B'.
Dans le cas où ce déplacement est une rotation, l'angle θ de cette rotation est déterminé par les relations:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{A'B'}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \text{ où } \quad dét\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ \sin\theta = \dfrac{dét\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \quad (a,b) \text{ et } (c,d) \text{ les coordonnées de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$$

Exemple :

$A(0\,;\,0)$ $B(-1\,;\,\sqrt{3})$ $A'(2\,;\,-1)$ $B'(0\,;-1)$

On a AB = A'B' = 2. Donc l'existence d'un déplacement f tel que f(A)=A' et f(B)=B' est assurée et celui-ci est une rotation.

En appliquant les formules précédentes, on détermine alors que l'angle de cette rotation vérifie: $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ *et* $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta=\frac{\pi}{3}$ *à* $2k\pi$ *près* .

Un simple calcul en utilisant les médiatrices de [AA'] et [BB'] donne que leur point d'intersection est W(2 ; -1).

f est déterminée par l'expression analytique suivante: $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1 \end{cases}$

B) – Antidéplacement

On sait que la composée d'un nombre pair d'antidéplacements est un déplacement, c'est à dire, une translation ou une rotation.

On sait aussi que si S et S' sont deux réflexions par rapport à des droites (D) et (D'), alors:

- S∘S' est un translation si (D) et (D') sont parallèles, le vecteur u de la translation étant un vecteur normal à (D) et (D').
- S∘S' est une rotation sinon, le centre de cette rotation étant le point d'intersection de (D) et (D'), l'angle de cette rotation étant 2 Angles (D', D), l'angle (D', D) étant donné à π près.

Soit f un antidéplacement de (P).

Soit S une réflexion quelconque. La composée g = f∘S est alors un déplacement, donc une translation ou une rotation.

On peut donc écrire que g = S"∘S' où S" et S' sont deux réflexions, S' étant choisie arbitrairement.

Comme S∘S =identité sur (P), on a alors : S"∘S'∘S = f

On voit donc que:

Propriété 1:
Tout antidéplacement est la composée d'un déplacement et d'un réflexion :

f = g◦S Ce produit est alors de deux natures: g est soit une translation, soit une rotation. Pour g translation on a 2 cas:

- **1er cas : le vecteur u de cette translation est normal à (D), axe de la réflexion S.**
  On écrit alors g = S"◦S' où S" et S' sont deux réflexions d'axes parallèles (D") et (D'), avec u normal à (D")et (D').
  Donc, les droites (D), (D') et (D") sont parallèles.
  On peut alors choisir (D') = (D). Donc S'= S et f = S"◦S'◦S = S". Donc, f est la réflexion S".
- **2ème cas : le vecteur u n'est pas normal à (D).**
  On écrit u = v + w où v est un vecteur directeur de (D) et w un vecteur normal de (D).
  Les translations T_v et T_w de vecteurs respectifs v et w vérifient alors g = T_v◦T_w.
  On a a donc f = T_v ◦(T_w ◦S) . Comme (T_w ◦S) est une réflexion d'axe (D") parallèle à (D) d'après le cas 1, on en déduit que f est la composée d'un translation de vecteur v et d'un réflexion d'axe (D"), v étant vecteur directeur de (D").

D'où:
Propriété 2:
La composée d'une translation T de vecteur u et d'une réflexion S d'axe (D) est
- une réflexion si u est normal à (D)
- la composée d'un translation T_v de vecteur v, directeur de (D), et d'une réflexion d'axe parallèle à (D) sinon.

On voit sur les figures ci-dessous les deux cas:

Figure 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est normal à (D)

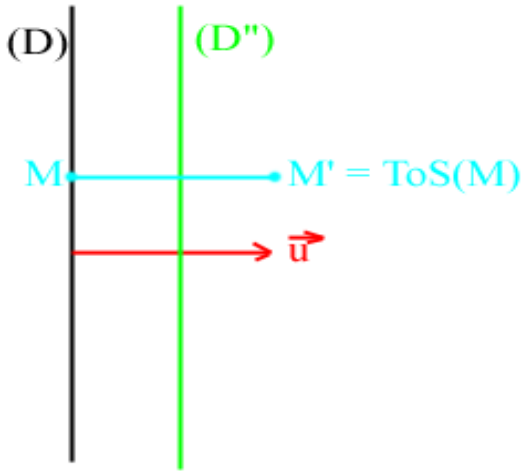
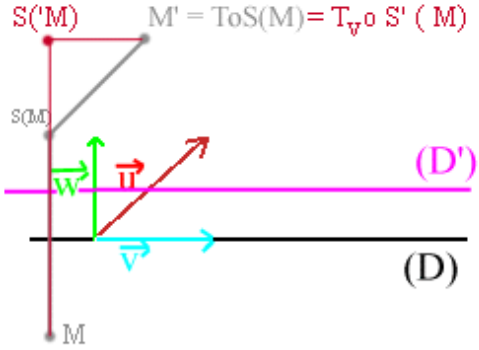


Figure 2: Le vecteur u n'est pas normal à (D)



Conclusion :

Un produit (ou une composition) d'un nombre impair d'antidéplacements se décompose en :
- Soit une réflexion
- Soit une composée d'un translation et d'une réflexion le vecteur de la translation étant un vecteur directeur de l'axe de la réflexion.

V– Classification des isométries :

1- Comment identifier une isométrie :

Pour reconnaître une isométrie f on cherche l'ensemble des points invariants.

	Nature de l'isométrie	
Ensemble des points invariants par f	Déplacement	Antidéplacement
$\mathcal{P}$	$f = \mathrm{Id}\mathcal{P}$	
(Δ)		$f = S_{\Delta}$ *symétrie orthogonale*
$\{\Omega\}$	$f = r_{(\Omega\ \theta)}$	
Pas de points invariants	$f = t_{\vec{u}}\ (\vec{u} \neq \vec{0})$ *si* $\overrightarrow{MM'} = Cste$	$\overrightarrow{MM'} \neq Cste \Rightarrow f =$ *symétrie glissée*

2 – Expression analytique d'une isométrie :

a) Théorème : Une application affine de P dans P est un déplacement si et seulement, si son expression analytique est de la forme

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ *où a et b sont des réels tels que* $a^2 + b^2 = 1$.

- **Si a = 1 et b = 0 ,** Alors $\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + c' \end{cases}$ *Expression de la translation de vecteur* $\vec{U}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$;
- **Si a ≠ 0 et b ≠ 0,** c'est la rotation dont le centre est le point invariant par f et dont l'angle α est tel que :

$$\begin{cases} \cos\alpha = a \\ \sin\alpha = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{A'B'}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \\ \sin\alpha = \dfrac{dét\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \end{cases}$$

b) Remarque :

Soit une application affine f et φ son application linéaire associée.

- (**dét Mφ = 1**) ⇔ (f est un **Déplacement**) .
- (**dét Mφ = – 1**) ⇔ (f est un **Antidéplacement**) .

Exercice d'application :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$.
Soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') avec $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$.

1) Montrer que est une isométrie affine. f est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?.
2) Démontrer que l'ensemble des points I milieux des segments [MM'] est une droite ($\mathcal{D}$).
3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
4) Déterminer t tel que $f = \mathcal{S} \circ$ t.

Correction :

1) Soient $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto M_1'\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ *et* $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto M_2'\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}$

$$\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ;$$

$$\left\| \overrightarrow{M_1'M_2'} \right\| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| ;$$

D'où f conserve la distance ; par conséquent f est une isométrie.

- Ensemble des points invariants par f .

$\begin{cases} x = y+1 \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$ *pas de point s invariants* .

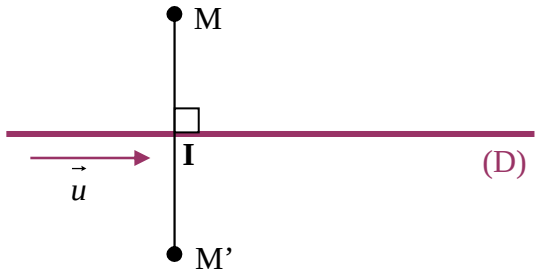
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y+1-x \\ x+2-y \end{pmatrix}$ est non constant ; $\overrightarrow{MM'} \neq Cste$ c'est-à-dire non colinéaire à un vecteur constant ($\overrightarrow{MM'} = k\vec{v}$; $\vec{v}$ *vecteur constant*).Donc f n'est pas un déplacement, c'est donc un antidéplacement (une symétrie glissée).

2)

$$\begin{pmatrix} \frac{x'+x}{2} \\ \frac{y'+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+1}{2} \\ \frac{x+2+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{x+y}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ on remarque que : } X = Y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow X - Y + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D): 2X - 2Y + 1 = 0 \quad ; \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur.}$$

3)



$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0 \\ I \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \\ x'+x-y'-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y' = x+y \quad (1) \\ x'-y' = -x+y-1 \quad (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x' = y - \frac{1}{2}$; $\Rightarrow y' = x + \frac{1}{2}$. D'où l'expression analytique de S est :

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

4) f étant une symétrie glissée, $f = S \circ t$. $f = S \circ t \quad \Leftrightarrow \quad t = S \circ f$

$$f : \begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+1 \end{cases} \quad et \quad S : \begin{cases} x' = y - \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{S}{\mapsto} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = y+1 \\ y_1 = x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y_1 + 1 \\ y' = x_1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 - \frac{1}{2} \\ y' = y + 1 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y + \frac{3}{2} \end{cases}.$$

D'où t est la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

LES SIMILITUDES PLANES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition:

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien. S une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On dit que S est une similitude de $\mathcal{P}$ s'il existe un nombre réel k $>$0, tel que quels que soient les points A et B distincts d'images respectives A' et B' par S, $||\overrightarrow{A'B'}||$ = k $||\overrightarrow{AB}||$.

(f Similitude de $\mathcal{P}$) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ k $\in$ $\mathbb{R}_+^*$ / $\forall$(A ; B) $\in$ $\mathcal{P}^2$ $||\overrightarrow{A'B'}||$ = k $||\overrightarrow{AB}||$ avec ; (S(A)=A' ; S(B)=B') .

1) Théorème:

Etant donnée une similitude S de rapport k (k $>$ 0) ; il existe une homothétie h_k et une isométrie i telle que S= $h_k \circ i$.

2) Conséquence :

S est une similitude $\Leftrightarrow$ son application linéaire associée est sous la forme : kφ où φ est une isométrie.
- Si φ est un déplacement la similitude est dite **directe** ;
- Si φ est un antidéplacement la similitude est dite **indirecte** ;

II – Similitudes directes:

1) Définition :

(S similitude directe) $\Leftrightarrow$ (S est une bijection transformant les distances dans un rapport constant k et conservant les angles orientés) $\Leftrightarrow$ (S est la composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation de même centre) $\Leftrightarrow$ (S admet pour écriture complexe z' = az + b, a $\in$ $\mathbb{C}$, b $\in$ $\mathbb{C}$, dans un repère orthonormé direct du plan).

2) Exemples et contre-exemples :

- Les homothéties, les Translations, les Rotations et leurs composées sont des similitudes directes ;
- Les Réflexions ou symétries orthogonales conservent les distances, mais ne conservent pas les mesures des angles orientés : ce ne sont pas des similitudes directes.

3) Caractérisation et reconnaissance :

a)- Comment reconnaître qu'une application S est une similitude directe :

- S est une bijection transformant les distances dans un rapport constant k et conservant la mesure des angles orientés ;
- S est la composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation d'angle θ de même centre ;
- S admet pour écriture complexe z' = az + b, a ∈ ℂ*, b ∈ ℂ, |a |= k et arg(a)= θ.

b)- Comment caractériser une similitude directe S :

- Si S transforme un couple (A ; B), A≠ B en (A' ; B') alors

$$\begin{cases} Son \quad rapport \quad k = \dfrac{A'B'}{AB} \\ Son \quad angle \quad \hat{\alpha} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \end{cases}$$

- Si S admet pour écriture complexe z'= az + b a ∈ ℂ*, b ∈ ℂ, dans un repère orthonormé direct alors :
  - ❖ Si a = 1, S est une translation ; le vecteur de translation est l'affixe de b ;
  - ❖ Si a ≠ 1, S est une similitude $\begin{cases} de\ rapport = \text{module}\ de\ a = |k| \\ d'angle = \arg(a)..... \end{cases}$.

  Le centre de la similitude est l'ensemble des points invariants.

- Dans une base orthonormée directe si l'expression analytique de S est de la forme : $\begin{cases} x' = ka_1 x - kb_1 y + c \\ y' = kb_1 x + ka_1 y + c' \end{cases}$ la matrice de la similitude directe $S_{k,\vartheta}$ est

$$A = k \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix}.$$

On aura détA = $k^2 \cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta = k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = k^2$.

Donc dét A = $k^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{détA}$.

Le centre de la similitude est l'ensemble des points invariants.

Pour déterminer l'angle θ de la similitude on pose : $\begin{cases} \cos\theta = a_1 \\ \sin\theta = b_1 \end{cases}$.

4) Exercice d'application :

Soit f l'application définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}\,x + y + \sqrt{3} \end{cases}$ dans un repère orthonormé directe $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Déterminer son écriture complexe.

Correction

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k=\sqrt{détA}=\sqrt{1+3}=2 \qquad rapport = 2$

- Centre (point invariant) :

$$\begin{cases} 0x+\sqrt{3}y=\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}x+0y=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ et } y=1 \text{ . } \Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ est le centre}$$

- Recherche de l'angle :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

$f = h_{(\Omega;2)} \circ r_{(\Omega;-\frac{\pi}{3})}$. f est une similitude directe de rapport k = 2 et de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

b) Mettons sous la forme de z' = az + b avec z = x + iy et z' = x' + iy'.

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}) + i(-\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}) \\ &= x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} - i\sqrt{3}x + iy + i\sqrt{3} \\ &= (1 - i\sqrt{3})x + (\sqrt{3} + i)y - \sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= (1 - i\sqrt{3})x + i(1 - i\sqrt{3})y - \sqrt{3} + i\sqrt{3} \\ &= (1 - i\sqrt{3})(x + iy) - \sqrt{3}(1 - i) \end{aligned}$$

z' = $(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$. D'où f est une similitude directe.

- Eléments caractéristiques : $a = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow k = |a| = \sqrt{1+3} = 2$; k = 2 ;
- Ensemble des points invariants :

$z = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3} \Leftrightarrow i\sqrt{3}z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = 1+i$. Le point invariant est le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ d'affixe z = 1 + i.

- Angle = Arg(a) :

$$\begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{|a|}=\frac{1}{2} \\ \sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{|a|}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

D'où f est une similitude directe de centre Ω de rapport 2 et d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

III – Similitudes indirectes:

1) Définition :

(S similitude indirecte) ⇔ (S est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement) ⇔ (S a pour écriture complexe : $z' = a\bar{z} + b$).

2) Caractérisation :

Une similitude indirecte de rapport (module de a) ; son centre (le point invariant) ; son axe (celui de la symétrie orthogonale entrant dans la décomposition).

IV – Nombres complexes et transformations:

1 – Translations

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe **a**.

La transformation : **z' = z + a**, avec **a** $\in \mathbb{C}$, définit M' comme l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe **a**.

Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = 2 + i$.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation t.

Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par la transformation t.

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z'-z = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z'-z = 2+i \Leftrightarrow z' = z + (2+i).$$

L'écriture complexe de la translation t est : $z' = z+2+i$.

2– L'Homothétie :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'.

La transformation : **z' = α z**, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit M' comme l'image de M par l'homothétie de centre O origine du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ et de rapport α.

Exemple1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$. On considère l'homothétie h de centre O et de rapport 3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par l'homothétie h .

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = 3z.$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = 3z$.

3– L'Homothétie excentrée:

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω .

La transformation : **z'– Z_Ω = α (z – Z_Ω)**, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit M' comme l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport α .

Exemple 2 :

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 2 + i$ et de rapport –2. Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par l'homothétie h .

$$h_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z'-z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$$

$$z'-(2+i) = -2z + 2(2+i) \Leftrightarrow z'-2-2i = -2z+4+2i \Leftrightarrow z' = -2z+6+4i.$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = -2z + 6 + 4i$.

4 – La Rotation :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'.

Soit **b** un nombre complexe de module **1** et d'argument θ.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad b\,z = e^{i\theta}\, z = |z| e^{i\theta + Arg(z)}$, ce qui signifie que $OM' = OM$ et

$\left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}\right) = \theta + 2k\pi$, avec k $\in \mathbb{Z}$.

La transformation : **z' = $e^{i\theta}$ z**, définit M' comme l'image de M par la rotation de centre O origine du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ et d'angle θ .

5 – La Rotation excentrée :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'.

Soit b un nombre complexe de module **1** et d'argument θ.

Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω .

La transformation : **Z'– Z_Ω = $e^{i\theta}$ (Z – Z_Ω)**, définit M' comme l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exemple :

Soit la rotation r de centre A d'affixe $Z_A = 3i$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'écriture complexe de la transformation r.

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par la rotation r.

$r_A(M) = M' \Leftrightarrow AM' = AM \;\; et \;\; (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow z' - z_A = b(z - z_A)$ avec $b = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

$$Donc \quad z' - z_A = b(z - z_A) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = i(z - 3i) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = iz + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = iz + 3i + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = i\,(z + 3) + 3.$$

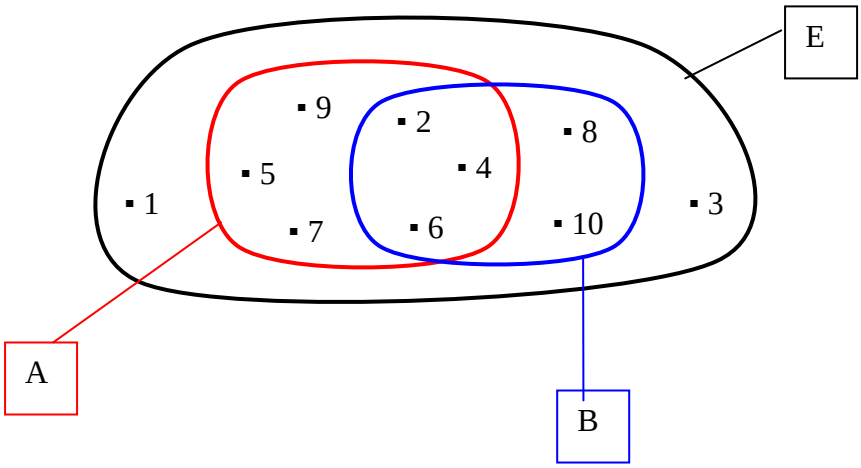
L'écriture complexe de la rotation r est : $z' = i\,(z + 3) + 3$.

Dénombrement

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A) Parties d'un ensemble :

Soit la représentation sagittale des ensembles E, A et B.



1°) Existe-t-il des éléments de A qui ne sont pas dans E ? Que dit-on des ensembles A et E ?

Réponse :

Tout élément de A est aussi élément de E, on dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E ou que A est un sous ensemble de E ou encore A est une partie de E.

On note : $A \subset E$ ou $E \supset A$.

Un ensemble C qui n'a pas d'élément est appelé ensemble vide et noté : ϕ ou $\{\}$.

Soient A et B deux ensembles :

$A \subset E \Leftrightarrow$ tout élément de A est élément de E ;

$A = E \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset E \\ E \subset A \end{cases}$.

2°) Déterminer $A \cap B$ puis $A \cup B$

Réponse : $A \cap B = \{2;4;6\}$ *et* $A \cup B = \{5;7;2;4;6;8;9;10\}$.

Soient A et B deux ensembles :

$A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B ;

$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B.

Remarque : si $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont disjoints.

3°) Trouver le complémentaire de A dans E.

Réponse : $C_E^A = \{1;8;10;3\}$.

Soit A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Remarque : s'il n'ya pas d'ambiguïté sur E C_E^A est noté $\overline{A}$.

Exercice : déterminer $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cup \overline{A}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$. Que remarque-t-on ?

Réponse : on remarque que : $A \cup \overline{A} = E$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Théorème : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,

$$A \cup \overline{A} = E \; ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \; .$$

4°) Définition : on appelle différence de A et B notée : A – B l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Exemple : Trouver A – B puis B – A.

B) Analyse Combinatoire :

I– Ensemble fini – Cardinal : soit n un entier naturel non nul

1- Définition 1 :

Lorsque un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini et que son cardinal est n. On note alors Card (E) = n.

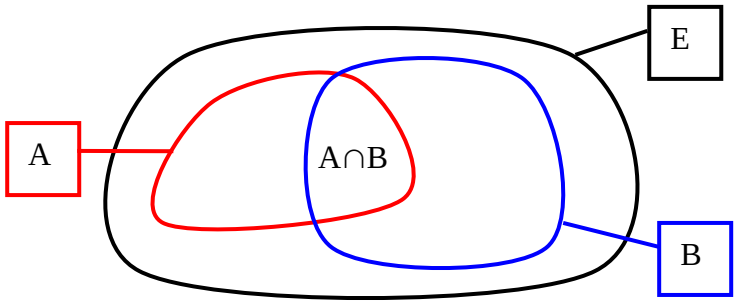
2- Exemple :

- E = { a, b, c, d, e } est un ensemble fini et card E = 5 ;
- Si E = ϕ , il comporte 0 élément et on pose card E = 0
- Certains ensembles ne sont pas finis tels que ℕ ; ℝ ; [0,1]

3- Cardinal d'une réunion d'ensemble finis :

Activité : Dans une classe de terminale, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand. 30 élèves étudient l'anglais, 20 élèves étudient l'allemand et 15 élèves étudient l'anglais et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Réponse : Désignons par E l'ensemble des élèves de cette classe, par A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais et B l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand.



Card A = 30 ; Card B = 20 ; ; Card(A∩B) = 15 et E = A∪B ;
Donc Card E = card A + card B – card (A ∩B) = 30 + 20 – 15 = 35.

Théorème:

Soient A et B des parties d'un ensemble fini E.

Card (A∪B) = Card A + Card B – Card (A∩B) .
Card (C_E^A) = Card $\overline{A}$ = Card E – Card A .

Remarque: Si A et B sont disjoints alors Card (A∪B) = Card A + Card B.

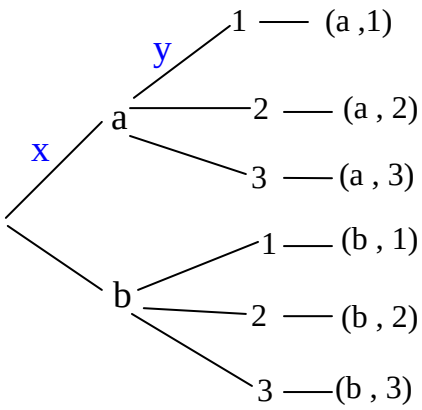
4- Produit cartésien d'ensembles finis:

a) Définition 2 : E et F sont deux ensembles finis et non vides. Le produit cartésien de E par F, noté E×F, est l'ensemble des couples (x ;y) où x∈E et y∈F.

b) Exemple:

- Soient les ensembles $E=\{a;b\}$; $F=\{1;2;3\}$ trouver E×F, F×E.

x \ y	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)



E×F = $\{(a,1);(a,2);(a,3);(b,1);(b,2);(b,3)\}$

F×E = $\{(1,a);(1,b);(2,a);(2,b);(3,a);(3,b)\}$.

Il y'a deux choix possibles pour x ; x étant fixé il y'a trois choix possibles pour y. Il en résulte qu'il y'a 6 couples (x ; y).

c)Théorème : Si E et F sont deux ensembles finis tels que card E = p et card F = n alors E×F est un ensemble fini et card (E×F) = n p.

Si E = F, alors card (E×E) = card (E^2) = (cardE)².

5- p-listes d'éléments d'un ensemble fini :

a) Définition 3 :

Soit E un ensemble fini non vide, p un nombre entier supérieur ou égal à 1.

On appelle p-liste d'élément de E (ou p-uplets) toute liste (x_1 ; x_2 ; x_3 ; … ; x_p) de p éléments de E.

L'ensemble de ces p-listes sera noté E^p.

b) Exemple 1 : on lance un jeton de 10F, on note la face apparue. Puis un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Réponse : $A=\{P;F\}$ $B=\{1;2;3;4;5;6\}$ *; Nombre de résultats = 2×6 = 12.*

c) Exemple 2 :

La Bank of Africa MALI (BOA) veut établir pour ses clients des cartes de crédits « SESAME » dont le code est composé de quatre chiffres, tous distinct de zéro. Quel est le nombre de carte « SESAME » qu'elle peut émettre ?

Réponse : Un code s'écrira $x_1x_2x_3x_4$ *où les* x_i $(1 \le i \le 4)$ *sont les éléments de l'ensemble* $E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$*. Il y en aura autant que de 4-listes (ou quadruplets) d'éléments de E, soit* 9^4*, donc 6 561 cartes possibles. Remarques :*

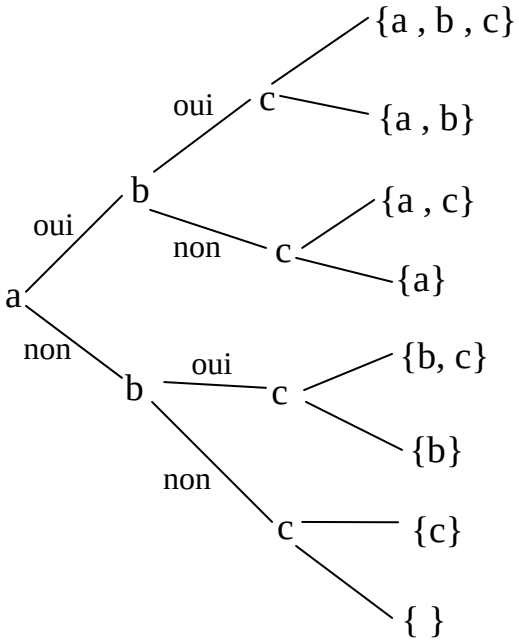
-R_1/ Chaque cas correspond à une application d'un ensemble de 9 éléments vers un ensemble de 4 éléments.

-R_2/ Déterminer le nombre de carte revient à dénombrer le nombre de 4-listes ou de quadruplets d'éléments de E.

-R_3/ Plus généralement le nombre d'application de E_p dans E_n est : n^p .

d) Théorème :
Soit E un ensemble à n éléments, et soit p un entier naturel non nul.
Le nombre de p-listes de E est n^p.

6- Ensemble des parties d'un ensemble fini :
Pour déterminer l'ensemble des parties d'un ensemble E noté P(E) on construit l'arbre des parties de E. Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ \}$



$$\mathcal{P}(\text{E}) = \{\{a\ ;\ b\ ;c\}\ ;\ \{a;b\}\ ;\ \{a\ ;c\}\ ;\ \{a\ \}\ ;\{b;c\};\{b\ \};\ \{c\ \};\ \phi\ \}$$

Théorème :
Le nombre des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

7- Arrangement de p éléments d'un ensemble fini :

a) Définition 4 :

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à un. E un ensemble fini non vide.
Un arrangement de p éléments de E, est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.

b) Exemple :
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On en tire 3, une à une, sans remise. Combien y'a-t-il de tirages possibles ?
Réponse : le résultat d'un tirage peut se représenter par un triplet (x_1 ; x_2 ; x_3) où x_1 désigne le numéro de la 1ère boule tirée ;
x_2 désigne le numéro de la 2ère boule tirée ;
x_3 désigne le numéro de la 3ère boule tirée .
Pour x_1 il y'a 15 numéros possibles ; pour x_2 il y'a 14 numéros possibles et pour x_3 il y'a 13 numéros possibles.
Le nombre de tirage possible est donc : $15\times14\times13 = 2\ 730$.

c) Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangement à p éléments est noté $A_n^p = n \times (n-1) \times ..... \times (n-p+1)$.

$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.

d) Permutation (cas particulier) :

Si n = p , on appelle permutation de E un arrangement à n éléments de E. Il y'a donc $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$ permutations.

Cet nombre est noté : n ! (lire factorielle n).

. n ! = n ×(n-1)×(n-2)×….. ×3×2×1 et 0 ! = 1 ! = 1 *par convention* .

Par exemple on a : 5 ! = 5×4×3×2×1 = 120

10 ! = 10×9×8×7×6×5×4× 3×2×1 = 3 628 800

- Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations des éléments de E est égal à n !.

- Exemple : Un parieur a sélectionné trois chevaux avec lesquels il veut composer son tiercé. De combien de façon dispose- t-il pour les classer dans l'ordre ?

Réponse : Le nombre de façon est 3 ! = 6 façons.

8- Combinaison de p éléments d'un ensemble fini :

a) Définition : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier compris entre zéro et n. On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E fini, toute partie de E ayant p éléments.

Exemple : soit E = { a ; b ; c} un ensemble à 3 éléments. Les parties de E ayant 2 éléments sont : { a ; b} ; { a ; c} ; { b ; c} .

b) Théorème :

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier tel que : $1 \leq p \leq n$. Le nombre de combinaison à p éléments de E à n éléments est noté :

C_n^p *ou* $\binom{n}{p}$ et donné par la formule :

. $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times ..... \times (n-p+1)}{p \times ..... \times 2 \times 1}$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$.

Exemples : Calculer C_8^2 et C_{50}^3

$C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$; $C_{50}^3 = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19600$.

$C_n^0 = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie vide ;

$C_n^1 = n$ signifie : il y a en effet n singleton dans un ensemble à n éléments ;

$C_n^n = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie pleine.

9- <u>Pour s'y retrouver dans les différents tirages</u> :

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés (l'ordre ne compte pas)
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p Arrangements	C_n^p Combinaisons

<u>Exercices</u> :

Un sac contient 9 jetons numérotés : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

a) On tire 3 jetons successivement, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac avant de tirer le suivant. On écrit côte à côte chacun des 3 chiffres tirés, dans l'ordre du tirage, formant ainsi un nombre de 3 chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemples de résultats : 232 ; 551 ; 333 ; 124 ; 421…
Réponse : Il s'agit de triplets (3-listes) ; leur nombre est : $9^3 = 729$.

b) On procède au tirage de 3 jetons successivement, mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien de peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?. Exemples de résultats : 235 ; 541 ; 145 ; …
Réponse : Il s'agit d'arrangements $A_n^p = 9\times8\times7 = 504$.

c) On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemple de résultats : { 2 ; 3 ; 5} ; { 4 ; 5 ; 8} …
Réponse : Il s'agit de combinaisons. On ne tient pas compte de l'ordre :
{ 2 ; 3 ; 5} = {3 ; 2 ; 5} = { 5 ; 3 ; 2}. Il y'a donc C_9^3 résultats possibles.
$C_9^3 = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$.

II– <u>Propriétés de</u> A_n^p <u>et de</u> C_n^p :

1) <u>Expression de</u> A_n^p <u>et de</u> C_n^p <u>à l'aide de factorielles</u> :

En posant 0 ! = 1 on a :

. pour $1 \le p \le n$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et pour $0 \le p \le n$, $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

2) Triangle de Pascal et propriétés des C_n^p :

Disposons des C_n^p dans un tableau à double entrée, appelé triangle de Pascal.

n \ P	0	1	2	3	4	……
0	C_0^0	×	×	×	×	……
1	C_1^0	C_1^1	×	×	×	……
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2	×	×	……
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	×	……
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	……
.	.	.	.	.	.	……

$C_n^p \rightarrow + \rightarrow C_n^{p+1} \rightarrow = \rightarrow C_{n+1}^{p+1}$.

Remplaçons chaque C_n^p par sa valeur on obtient :

1
1 1 Triangle de PASCAL
1 2 1
1 3 3 1 4 + 6 = 10
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

– Propriétés :

P_1) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$;

P_2) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$

3) Formule du binôme de Newton :

$(a + b)^1 = 1a + 1b$; $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$; $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Nous admettons que :

$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$ (appelé Formule du binôme de Newton) .

Exemples :

$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.
$(x - y)^4 = 1x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 1y^4$.

III– NOTION DE PROBABILITÉS :

1°) Introduction :

a) Exemple :
On lance 2 fois en l'air un dé non pipé (normal), x et y font un pari.
Si 66 apparaît alors x gagne 600Frs. Si 4 ou 5 apparaît alors y gagne 300Frs. Qui est favorisé dans ce jeux ?.
On constate que x a « une chance » sur 6 de gagner 600Frs. Par contre y a « deux chances » sur 6 de gagner 300Frs.
6 numéros peuvent apparaître quand on lance un dé en l'air : c'est ce qu'on appelle les cas possibles. L'ensemble des cas possibles forment l'Univers de probabilité Ω ; Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 } . Dans le cas de y, 2 numéros lui permettent de gagner 300Frs. On dit qu'il y'a 2 cas favorables pour y.
Conclusion :
Dans cet exemple l'issue de l'opération « lancer le dé en l'air » n'est pas certaine, on dit que c'est une opération aléatoire.

b) Définitions ou vocabulaire :

- Cas possibles = *résultats d'une épreuve* :
- Univers de probabilité = *ensemble de cas possibles* ;
- Cas favorables = *situation qui est favorable* ;
- Évènement = *sous-ensemble de l'univers de probabilité* ;

Exemple1 : Dans le lancé de dé Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } un évènement A={1; 3 ;6}. Pour y les cas favorables sont : 4 et 5 ; B = {4 ; 5} est *un évènement favorable* ; C ={4} est un *évènement favorable*.

- Évènement élémentaire ou éventualité = *sous-ensemble de Ω ayant un seul élément.*
Exemple2 : On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie normale. Déterminer le nombre de cas possibles.
Le nombre de cas possible Ω = {PPP ; PFP ; FFP ; FFF ; FPF ; PFF ; FPP ; PPF}
Un cas possible est : {3 lancers} → {P, F} le nombre d'application : $2^3 = 8$;
X = {PFP} est une éventualité.

- Évènement impossible = c'est un évènement qui ne peut pas se réaliser ; il est noté ϕ.
Exemple : On tire au hasard 2 cartes d'un jeux normal de 32 cartes. Le nombre de cas favorables est C_{32}^{2}. « *Avoir 2 As de cœur* » est un évènement impossible.

- Évènement certain = évènement qui se réalise à coup sûr au cours d'une épreuve
Par exemple « *Avoir Pile* (P) *ou bien Face* (F) *en lançant une pièce de monnaie en l'air* ».

- Évènements équiprobables = évènements ayant les même chances de réalisation.

Exemple : On lance en l'air une pièce de monnaie 2 fois. Le nombre de cas possibles est $2^2=4$. $\Omega = \{PP ; PF ; FF ; FP\}$. Les évènements A = « *avoir 0 fois P* » et B = « *avoir exactement 2 fois F* » sont *2 évènements équiprobables*.

2°) Probabilité :

Soit un Ω univers d'éventualités équiprobables (*on ne peut pas discerner les éventualités qu'après l'épreuve*). Posons Card Ω = n.
Soit A un évènement de Ω tel que cardA = k .

- Définition :

La probabilité de réalisation de A est k réel notée P(A) définie par :

$$. \ P(A) = \frac{k}{n} = \frac{Nombre\ de\ cas\ Favorables}{Nombre\ de\ cas\ Possibles} .$$

$k \le n \Rightarrow \frac{k}{n} \le \frac{n}{n}=1 \Rightarrow P(A) \le 1$; $k \ge 0 \Rightarrow \frac{k}{n} \ge \frac{0}{n} = 0 \ (n \neq 0) \Rightarrow P(A) \ge 0$ d'où

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Remarques :

R_1) La probabilité d'un évènement certain est égal à 1 ; $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

R_2) La probabilité d'un évènement impossible est égal à 0.

Exemple :

Dans un jeu normal de 32 cartes, on tire au hasard sans remise 3 cartes. Calculer la probabilité d'avoir exactement 2 Rois et 1 As parmi les 3 cartes tirées.

Réponse : le nombre de cas possibles est C_{32}^3 *et le nombre de cas favorable est :* $C_4^2 \times C_4^1$. *La probabilité de A = « d'avoir 2 Rois et 1 As » est :*

$$P(A) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_{32}^3} = \frac{24}{32 \times 155} = \frac{3}{620} = 0{,}004 .$$

I– Variables Aléatoires Réelles :

Dans toute la suite Ω désigne l'univers associé à chaque expérience aléatoire.

1°) Exemple introductif :

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules. On perçoit un franc par boule rouge tirée. Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?
On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2 francs.
Désignons par X la somme perçue. La probabilité que X soit égal à 0 est noté p(X=0) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 0 boule rouge et 2 boules blanches » ; $p(X=0)=\frac{C_3^0\times C_4^2}{C_7^2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$;

La probabilité que X soit égal à 1 est noté p(X=1) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 1 boule rouge et 1 boules blanches » ;

$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$;

La probabilité que X soit égal à 2 est noté p(X=2) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 2 boules rouges et 0 boule blanche » ;

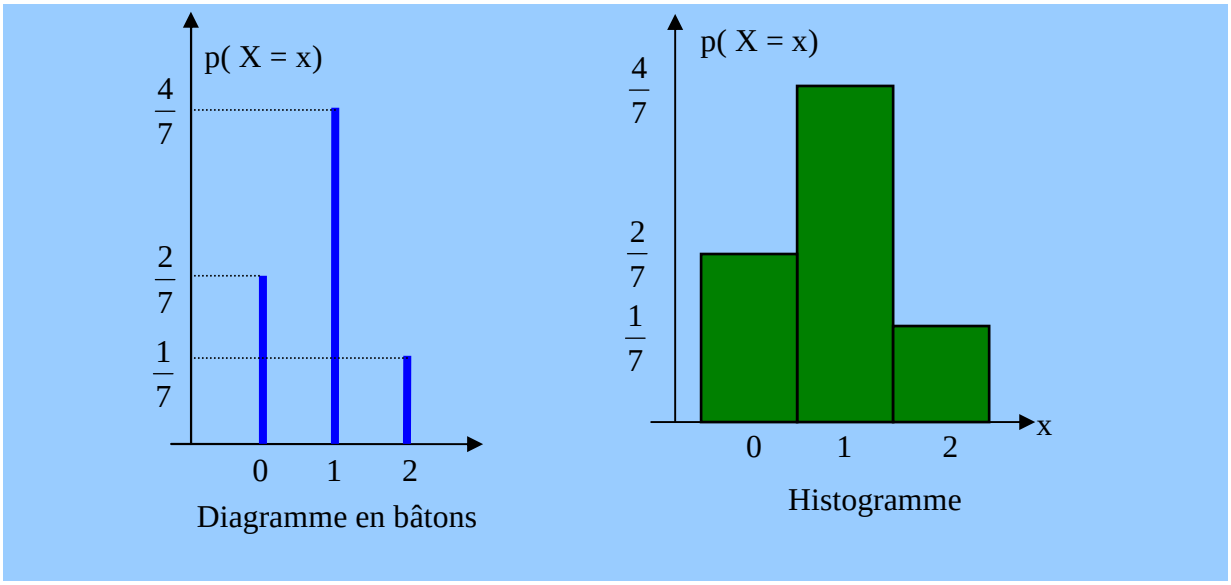
$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_4^0}{C_7^2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$.

Ces résultats peuvent se présenter dans un tableau, la première ligne indiquant les valeurs possibles x de X.

x	0	1	2
p(X = x)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

Représentations graphiques :



2°) Variable aléatoire – Loi probabilité :

a) Définition 1 :
On appelle variable aléatoire X réelle toute application de Ω dans ℝ,
qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.
Notons X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X. X(Ω) = { x_1 ; x_2 ;…… ; x_n}.

b) Définition 2 :

La loi de probabilité de X est la fonction qui à tout élément *x* de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à *x* » et que l'on note : p(X = *x*).

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2	…….	x_n
p(X = x)	p_1	p_2	…….	p_n

Conseil : Lorsqu'on calcul une loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est indispensable de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

II– Fonction de Répartition :

1°) Définition :

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ vers [0 ; 1] définie de la façon suivante :

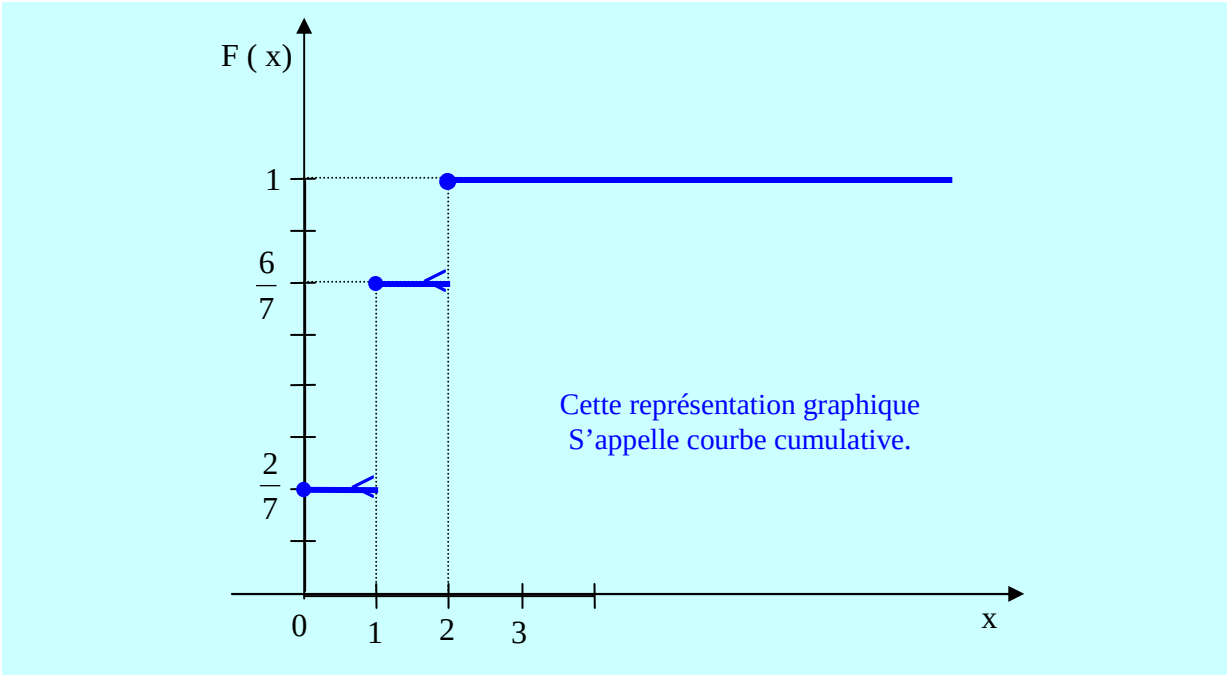
X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4

- $x \in]-\infty ; x_1[$; $F(x) = 0$
- $x \in [x_1 ; x_2[$; $F(x) = P_1$
- $x \in [x_2 ; x_3[$; $F(x) = P_1 + P_2$
- $x \in [x_3 ; x_4[$; $F(x) = P_1 + P_2 + P_3$
- $x \in [x_4 ; x_5[$; $F(x) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$
- $x \in [x_5 ; +\infty[$; $F(x) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$.

En reprenant l'exemple introductif on a :

Intervalles des valeurs de x	Valeurs de X Vérifiant $X \leq x$	F(x) c'est- à-dire $p(X \leq x)$ vaut
$]-\infty ; 0[$	Aucune	0
$[0 ; 1[$	0	$p(X = 0) = \frac{2}{7}$
$[1 ; 2[$	0 et 1	$p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$
$[2 ; +\infty[$	0, 1 et 2	$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = 1$

2°) Représentation graphique de F :



3°) Propriétés de la fonction de répartition :

a) F est une fonction en escalier.
b) F est une fonction croissante.

III– Espérance Mathématique :

1°) Définition :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités p_1 ; p_2 ; … ; p_n . On appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \ldots\ldots + x_n\, p(X=x_n)$$

ou encore $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$.

Dans la pratique, la loi de probabilité étant donnée par un tableau :

x	x_1	x_2	…….	x_n
p(X = x)	p_1	p_2	…….	p_n

Il suffit de calculer la somme : $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots\ldots + x_n\, p_n$.

2°) Exemple :

Pour l'exemple introductif on a $E(X) = 0\times p(X=0) + 1\times p(X=1) + 2\times p(X=2) = \frac{6}{7}$.

IV– Variance, Écart Type :

1°) Définition de la variance :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités p_1 ; p_2 ; … ; p_n . On appelle Variance de X le nombre réel positif noté : V(X) et définie par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$ ou $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$.

En statistique, la dispersion se mesure par la variance qui est la moyenne pondérée de la série $(x_i - \bar{x})^2$.
De façon analogue, en probabilité, la variance est l'espérance mathématique de $[X - E(X)]^2$.

2°) Autre Expression de la variance :

On démontre que la variance est l'espérance du carré moins le carré de l'espérance.

. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

3°) Écart-type :

– Définition : Pour toute variable aléatoire X, on appelle écart-type de X le nombre réel $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

– Exemple : Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées »
a) quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance, l' écart type de X.
Solution :

a) $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$P(X=0) = P_1 = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} \; ; \; P(X=1) = P_2 = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} \; ;$$

$$P(X=2) = P_3 = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56} \; ; \; P(X=3) = P_4 = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} \; .$$

b) Loi de probabilité

X	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

c) L'Espérance mathématique $E(x)=\sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i = P_1\, x_1 + P_2 x_2 + \ldots\ldots + P_n x_n$.

$$E(x)=0\times\frac{10}{56}+1\times\frac{30}{56}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}.$$

La variance est $V(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i - E(x)\right)^2$.

$$V(X)=P_1\left(x_1-\frac{9}{8}\right)^2+P_2\left(x_2-\frac{9}{8}\right)^2+\ldots\ldots+P_4\left(x_4-\frac{9}{8}\right)^2 \;;$$

$$V(X)=\frac{10}{56}\left(0-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{30}{56}\left(1-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{15}{56}\left(2-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{1}{56}\left(3-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{1800}{3584}=0{,}5.$$

L'Ecart type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ *;* $\sigma(X)=\sqrt{0{,}5}=0{,}20$.

V– Probabilité conditionnelle :

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B 2 évènements de Ω.

1°) Évènement Somme :

a) Définition 1 :
L'évènement somme de A, B est l'évènement noté :A∪B « A ou B » qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des évènements A ou B est réalisé.

Exemple : On lance en l'air un dé normal. C= « avoir 5 ou 4 » est la somme des évènements A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; C = A∪B.

b) Définition 2 : On dit que 2 évènements A et B sont incompatibles si et seulement si ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple : Dans le lancé d'un dé, A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; A et B sont incompatibles, A∩B = ϕ.

c) Théorème 1 :
Soient A et B 2 évènements incompatibles d'un univers Ω.

. P (A∪B) = P(A) + P(B) .

Démonstration

Le nombre de cas possibles est card Ω = n ; n ≠ 0.
Le nombre de cas favorables : posons cardA = k et cardB = m.
Card(A∪B) = cardA + cardB – card(A∩B) ; A∩B = ϕ *⇒ card(A∪B) = k + m.*
P (A∪B) = $\frac{k+m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{m}{n}$ *= P(A) + P(B).*

Exemple: On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Calculer la probabilité d'avoir 2 Dames ou 2 Rois.

Le nombre de cas possibles est C_{32}^{2}. *Soit C = « avoir 2D ou 2R » et soient les évènements A = « avoir 2D » ; B = « avoir 2R ».*

A et B sont incompatibles $A \cap B = \phi$. *Donc P (A∪B) = P (A) + P (B).*

$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2}$ *et* $P(B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2}$; $P(A \cup B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} + \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = 2\,\frac{C_4^2}{C_{32}^2}$.

2°) **Évènement Contraire :**

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω.

a) Définition 3 : On dit que l'évènement B est l'évènement contraire de A si et seulement si, $\begin{cases} B \text{ est réalisé si } A \text{ ne l'est pas} \\ \text{et } A \text{ est réalisé si } B \text{ ne l'est pas} \end{cases}$ *Notation :* $B = \overline{A}$.

– Exemple 1 : Dans le lancé d'une pièce de monnaie, soient A = « avoir P » et B = « avoir F » ; $B = \overline{A}$ *et* $A = \overline{B}$.

b) Théorème 2 :

Soit A un évènement d'un univers Ω. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration

$A \cap \overline{A} = \Phi$; $A \cup \overline{A} = \Omega$, $p(\overline{A} \cup A) = p(A) + p(\overline{A}) = 1$; *d'où* $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple 2 :

i) Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant 5 cartes au hasard ait au moins 1 cœur ?

ii) Même question avec au moins 2 cœurs ?

Solution :

i) A = « avoir au moins 1 cœur » $\overline{A}$ *= « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées ».*

P(A) + P($\overline{A}$*) = 1. Calculons* $P(\overline{A})$

Nombre de cas possibles est C_{32}^{5} *; nombre de cas favorables* C_{24}^{5}.

$P(\overline{A}) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$. *Donc P (A) = 1 – p (* $\overline{A}$ *) = 1 –* $\frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$.

ii) A = « avoir au moins 2 cœurs » $\overline{A}$ *= « avoir 0 cœur ou 1 cœur ».*

P(A) + P($\overline{A}$*) = 1. Calculons* $P(\overline{A})$

B = « avoir 1 cœur parmi les cartes tirées » ; C = « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées » . $B \cup C = \overline{A}$ *et* $B \cap C = \phi$ *donc* $P(\overline{A}) = P(B) + P(C)$.

- P(B) : nombre de cas possibles = C_{32}^{5} *; nombre de cas favorables =* $C_8^1 \times C_{24}^4$. *D'où*

$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4}{C_{32}^5}$.

- P(C) : nombre de cas possibles = C_{32}^5 ; nombre de cas favorables = $C_8^0 \times C_{24}^5$.

D'où P(C) = $\frac{C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5}$ *.* $P(\overline{A}) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4 + C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5} \Leftrightarrow P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 0{,}37.$

3°) **<u>Évènement Produit</u> :**

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω.

a) <u>Définition 4</u> :

l'évènement produit des évènements A , B est l'évènement C noté A∩B qui est réalisé si et seulement si, A et B sont simultanément réalisés.

<u>Exemple</u> :

un lancé de 2 dés C « avoir 6 et 5 » ; A= « avoir 5 » ; B = « avoir 6 » . C = A∩B.

b) <u>Théorème 3</u> :

Soient 2 évènements quelconques A et B. P (A∪B) = P (A) + P (B) – P (A∩B).

<u>Exemple</u> : D'un jeu de 32 cartes on tire au hasard simultanément 2 cartes. Calculer la probabilité d'avoir un Roi ou un Valet parmi les cartes tirées.

4°) <u>Probabilité conditionnelle – évènements indépendants</u> :

Soient les évènements A et B d'un univers Ω .

a) <u>Définition 5</u> : La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté P (B/A) et définie par : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \quad p(A) \neq 0$.

<u>Exemple</u> : D'un jeu de 32 cartes on tire successivement 2 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir un as au 2ème tirage ?

b) <u>Définition 6</u> :

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$$

<u>Remarque</u> : En réalité dans le concret, 2 évènements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'a aucune influence sur celle de B et réciproquement.

<u>Exemple</u> : d'un sac contenant des boules blanches et des boules noires on tire au hasard successivement en remettant chaque fois la boule tirée.
A = « avoir une boule blanche au 1er tirage »
B = « avoir une boule noire au 2ème tirage »
A et B sont indépendants. Deux évènements concrètement indépendants sont indépendants en probabilité.

1 – Description Statistique :

Autrefois la statistique était une science qui s'occupait seulement de la démographie (étude de la population humaine) ; nombre d'habitant des villes ; taux de mortalité, de naissance, densité.

Actuellement selon Olivier Maggioni, la statistique peut être vue comme l'ensemble des méthodes et des techniques permettant de traiter les données (informations chiffrées) associées à une situation ou un phénomène. Par exemples le recensement de la population, la production agricole d'un pays, l'efficacité d'un nouveau remède contre telle maladie, rendement d'une nouvelle variété de riz.

La statistique se révèle être un outil fondamental d'aide à la décision.

2 – Quelques vocabulaires Statistique :

Définitions

- ***Population statistique*** : ensemble d'unités statistiques ou individus.

Exemples :

- Relevés pluviométriques quotidiens (populations = jours)
- Tous les malades atteints de vers de Guinée (où ? quand ?)

- ***Unité statistique ou Individu*** : tout élément d'une population statistique.

- ***Effectif d'une population*** : le nombre d'individu de cette population.

Exemple : On pèse un lot d'œufs. L'unité employée étant le gramme on obtient :

50	*62*	*57*	*70*	*60*
65	*57*	*45*	*56*	*61*
63	*61*	*64*	*56*	*50*

La Population statistique = ensemble des œufs
Individu = œuf
Effectif de cette population = 15.

- ***Echantillon*** : sous ensemble de la population.

En général si la population est très nombreuse, on prélève une partie de la population (sondage). Si on a une connaissance à priori, on peut parler d'échantillon représentatif (stratification).

Exemple : *A la veille des élections présidentielles on veut savoir quel est le candidat favori ?*
X candidat ADEMA ; Y candidat RDA ; Z candidat CNID. On fait un sondage d'opinion. Population = ensemble des électeurs. On prélève une partie de cette population (échantillon). A partir des pourcentages obtenus pour l'échantillon on tire des conclusions valables pour la population. 40% des électeurs favorables à Z ; 20% des électeurs favorables à X ; 10% des électeurs favorables à Y.

- ***Caractère (ou variable statistique) :***

Le critère qui guide le statisticien dans le travail d'observation est le caractère.
Opération qui associe à chaque unité statistique une propriété, une modalité, un score.

Exemple 1 : On mesure les longueurs en centimètre de quelques pieds de riz, on obtient les résultats suivants : 97 ; 93 ; 95 ; 90 ; 94 ; 93 ; 94 ; 93 ; 92 ; 91 ; 94 ; 93 ; 90 ; 95 ; 93 ; 96 ; 94 .
Population = ensemble des pieds de riz ; Effectif = 17.
L'étude statistique porte sur la taille (longueur) des pieds de riz. On dit que le caractère de cette étude porte sur la taille ou la longueur. Ici le caractère s'exprime à l'aide de chiffre, on dit que c'est un caractère quantitatif (ou une variable numérique).

Exemple 2 : Un parc automobile comporte 15 voitures dont 5 Bleues ; 7grises : 2 rouges ; 1verte . L'étude statistique porte sur la couleur des voitures. On dit que le caractère statistique est la couleur des voitures. Ici le caractère ne s'exprime pas à l'aide de chiffres, on dit que c'est un caractère qualitatif (ou une variable nominale).

- ***Observation :*** valeur prise par la variable sur une unité statistique.

- ***Données :*** sont constituées par l'ensemble des observations (tableaux ; fichiers ; données primaires).

- ***Variable Discrète :*** c'est un caractère qui s'exprime à l'aide de nombres entiers uniquement.

Exemple : Recenser au Mali le nombre de mères ayant plus de 10 enfants par régions du Mali.

Régions du Mali	*Nombre de mère ayant plus de 10 enfants*
Kayes	x_1
Koulikoro	x_2
Sikasso	x_3
Ségou	x_4
Mopti	x_5
Tombouctou	x_6
Gao	x_7
Kidal	x_8

$x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots\ldots ; x_8$ *sont des nombres entiers.*

- ***Variable Continue*** : c'est une variable qui s'exprime à l'aide de nombres réels

3 – Distribution (ou Série statistique) :

Les données sont recueillies par des enquêteurs en examinant chacun des individus ou en faisant un sondage. Les enquêteurs livrent ces observations en désordre au statisticien. Celui-ci les classes en séries.

3-1 Distribution d'un caractère qualitatif :

- Le statisticien regroupe les individus en classes ou rubriques suivant le caractère.
- Il dresse un tableau dans lequel les classes occupent une colonne ou une ligne et en face des effectifs des classes. On obtient alors une série des effectifs.

Classes	Effectifs
C_1	n_1
C_2	n_2

3-2 Distribution d'un caractère discret :

- Classer par ordre croissant ou décroissant les valeurs du caractère ;
- Déterminer l'effectif associé à chaque valeur ;
- Dresser un tableau dans lequel les valeurs du caractère 1 colonne ou 1 ligne
- En face de valeur écrire son effectif.

Valeurs	Effectifs
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3

Exemple **:** *voici les tailles des élèves d'une classe de Lycée en (cm).*
158 ; 160 ; 166 ; 165 ; 150 ; 158 ; 157 ; 170 ; 166 ; 167 ; 166 ; 158 ; 172 ; 181 ; 182 ; 175 ; 172 ; 170 ; 165 . Dresser la série des effectifs.

Valeurs	*Effectifs*
150	*1*
157	*1*
158	*3*
160	*1*
165	*2*
166	*3*
167	*1*
170	*2*
172	*2*
175	*1*
181	*1*
182	*1*
	19

Remarque **:** lorsque le nombre de la variable discrète est élevé il est nécessaire de les grouper en intervalles semi-ouverts.

3-3- Distribution de la variable continue :

- Classer si possible les valeurs du caractère par ordre croissant ou décroissant ;
- Calculer l'amplitude de la série c'est-à-dire la différence entre la plus grande valeur du caractère et sa plus petite valeur ;
- Dresser un tableau analogue au tableau ci-dessus.

Exemple : *Une série statistique sur le poids des enfants d'un groupe d'enfants de 7 ans donne : 22 ; 25 ; 23 ; 24 ; 19 ; 23 ; 18 ; 20 ; 21 ; 19 ; 22 ; 20 ; 17 ; 21 ; 23 ; 24 ; 17 ; 21 ; 20 ; 20 ; 19 ; 22 ; 19 ; 20 ; 19 ; 21. Classer ces renseignements en classes d'amplitude 2.*
Solution : [17, 19[; [19, 21[; [21, 23[; [23, 25[; [25, 27[; etc…

Remarque **:** le centre d'une classe est le centre de l'intervalle semi-ouvert considéré.

$$\text{Le centre} \quad c = \frac{19+17}{2} = 18 .$$

3-4– Fréquence – Effectifs Cumulés :

- ***La fréquence*** d'un score f_k est son effectif n_k divisé par la taille de la population (effectif total n). $f_k = \frac{n_k}{n}$.
- ***La fréquence cumulée*** est obtenue par la somme des fréquences des scores inférieurs ou égaux au score considéré. $f_k \uparrow = \sum_{i=1}^{k} f_i$.
- ***L'effectif cumulé*** est donné par le nombre d'unités statistiques ayant un score inférieur ou égal. $n_k \uparrow = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Soient x_1 ; x_2 ; ….. ; x_k les valeurs d'une variable statistique ; n_1 ; n_2 ; …. ; n_k les effectifs associés. $n = n_1 + n_2 + \ldots. + n_k$ effectif total.

Valeurs x_i	Effectifs	fréquences	Effectifs cumulés	Fréquences cumulées
x_1	n_1	$\frac{n_1}{n}$	n_1	$\frac{n_1}{n}$
x_2	n_2	$\frac{n_2}{n}$	$n_1 + n_2$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}$
x_3	n_3	$\frac{n_3}{n}$	$n_1 + n_2 + n_3$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n}$
. .	. .	. .	. .	. .
x_k	n_k	$\frac{n_k}{n}$	$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots. + n_k = n$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} = 1$

Remarque : les x_i sont classés par ordre croissant.

Exemple : *Une série statistique sur le poids des enfants d'un groupe d'enfants de 7 ans donne : 22 ; 25 ; 23 ; 24 ; 19 ; 23 ; 18 ; 20 ; 21 ; 19 ; 22 ; 20 ; 17 ; 21 ; 23 ; 24 ; 17 ; 21 ; 20 ; 20 ; 19 ; 22 ; 19 ; 20 ; 19 ; 21. Classer ces renseignements en classes d'amplitude 2. Dresser la série des effectifs par classes.*

Solution :

Classes : $x_1 = [17, 19[$; $x_2 = [19, 21[$; $x_3 = [21, 23[$; $x_4 = [23, 25[$; $x_5 = [25, 27[$.

Séries des effectifs par classes :

Classes	*Effectifs*
x_1	*3*
x_2	*10*
x_3	*7*
x_4	*5*
x_5	*1*
	Total 26

Série par classe des effectifs cumulés, des fréquences, fréquences cumulées :

classes	*Effectifs*	*Effectifs cumulés*	*Fréquences*	*Fréquences cumulées*
x_1	*3*	*3*	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$
x_2	*10*	*13*	$\frac{10}{26}$	$\frac{13}{26}$
x_3	*7*	*20*	$\frac{7}{26}$	$\frac{20}{26}$
x_4	*5*	*25*	$\frac{5}{26}$	$\frac{25}{26}$
x_5	*1*	*26*	$\frac{1}{26}$	$\frac{26}{26}=1$

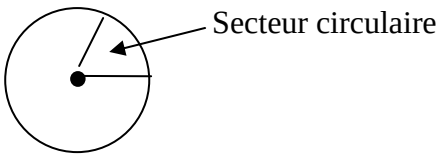
4– Représentation graphique des distributions statistiques :

Il est difficile de comparer plusieurs séries statistiques comportant un grand nombre de chiffres. On représente les séries par des diagrammes que l'on peut facilement comparée. Voici des exemples de représentations graphiques de distributions.

4-1– Distribution d'un caractère qualitatif :

Principe : On représente par des aires proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences) ; les effectifs (ou les fréquences)

- ❖ Si l'on choisit des rectangles, alors on obtient un diagramme par bandes.
- ❖ Si l'on choisit des secteurs circulaires, on obtient alors des diagrammes à secteurs.



Exemple :
En 12ème MTE$_1$ au Lycée Technique de Bamako, on interroge les 42 élèves sur leur goût pour le thé et pour le café. On a classé les élèves en plusieurs groupes.
x_1 = 30 élèves n'aiment que le thé
x_2 = 20 élèves n'aiment que le café
x_3 = 18 élèves aiment le thé et le café
x_4 = 10 élèves n'aiment ni thé, ni café .

Représentons cette série des effectifs par bandes.

x_1	30
x_2	20
x_3	18
x_4	10

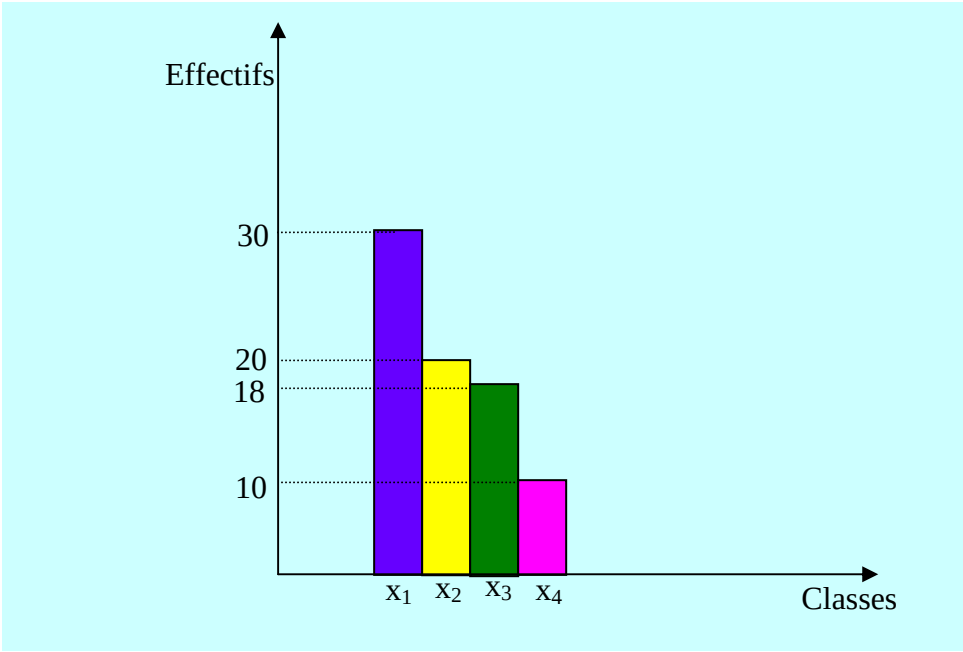
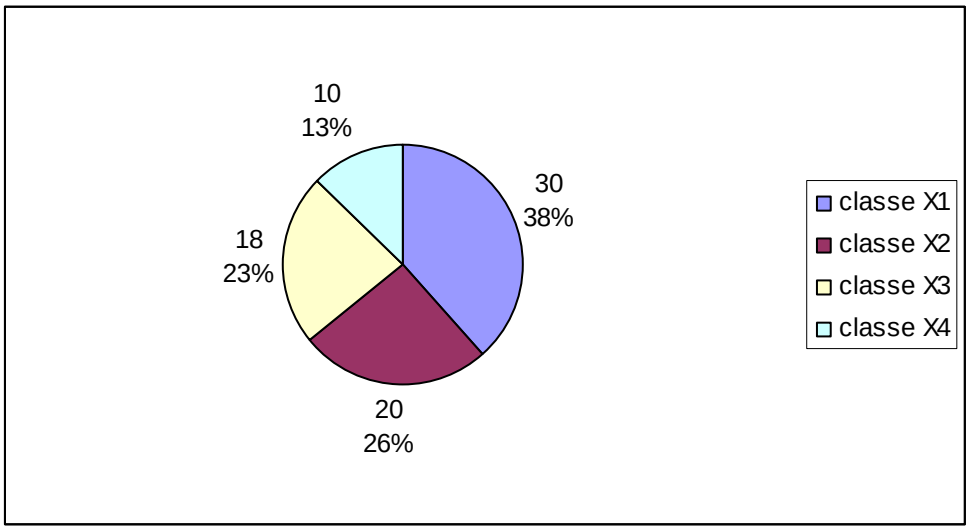


Diagramme des fréquences par secteur :

Classes	Fréquences
x_1	$\frac{30}{42}=\frac{15}{21}$
x_2	$\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$
x_3	$\frac{18}{42}=\frac{9}{21}$
x_4	$\frac{10}{42}=\frac{5}{21}$



4-2 – Représentations graphiques d'une distribution à variable discrète :

a) Diagramme en bâtons :

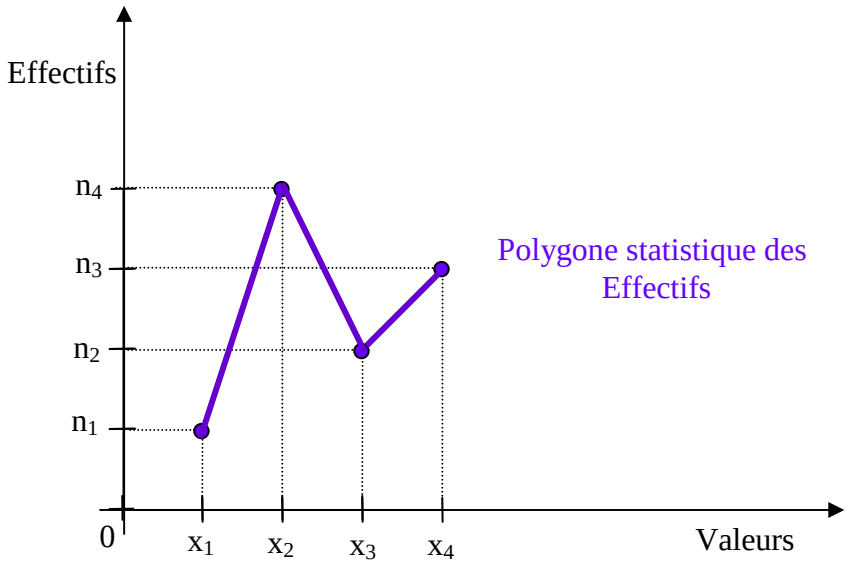
On peut aussi représenter une série des effectifs qu'une série des fréquences.

Méthode : Dans un système d'axes rectangulaires

- Porter les valeurs x_i du caractère en abscisse ;
- Porter sur l'axe des ordonnées des graduations des effectifs ou des fréquences ;
- Elever en chaque point x_i de l'axe des abscisses un bâton dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif ou la fréquence de x_i.
-

b) Polygone statistique des effectifs (ou Fréquences) :

Dans un système d'axes rectangulaires, porter les effectifs ou fréquences n_i en ordonnée, et en abscisse les valeurs x_i. Relier par des segments les points de coordonnées $(x_i ; n_i)$.



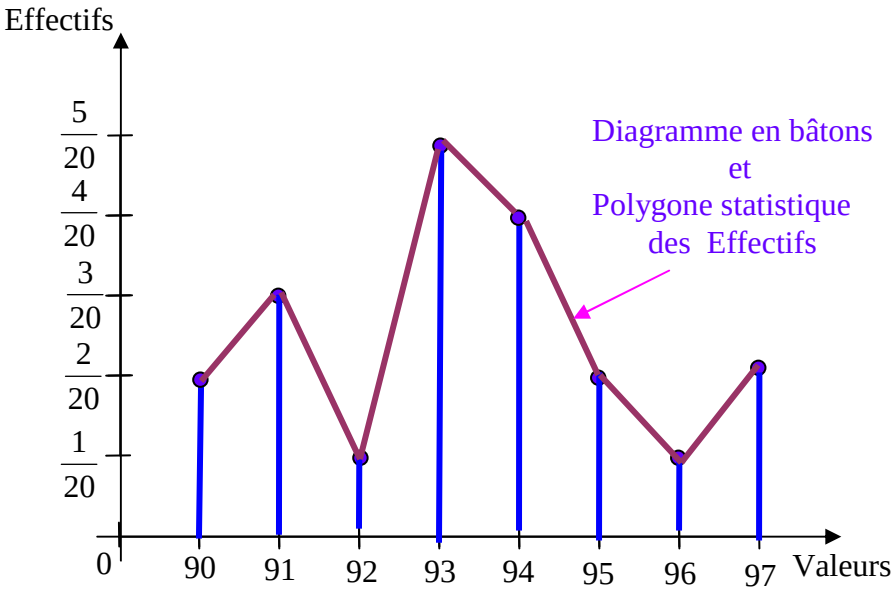
Exemple :

Soit la série statistique :

97, 93, 95, 91, 90, 94, 97, 91, 93, 94, 93, 92, 91, 93, 94, 90, 95, 93, 96, 94.

Tracer le diagramme en bâton et le polygone statistique des fréquences.

valeurs	Effectifs	Fréquences
90	2	$\frac{2}{20}$
91	3	$\frac{3}{20}$
92	1	$\frac{1}{20}$
93	5	$\frac{5}{20}$
94	4	$\frac{4}{20}$
95	2	$\frac{2}{20}$
96	1	$\frac{1}{20}$
97	2	$\frac{2}{20}$
	n = 20	



4-3 – Fonction cumulative des effectifs (ou des fréquences) :

a) Fonction cumulative des effectifs

Soit une variable discrète x prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; x_3 ; ….. ; x_k. La fonction cumulative des effectifs est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \sum n_i \quad \text{tel que pour } x_i < x \ \ n_i \text{ effectif de } x_i .$$

b) Fonction cumulative de fréquences

Elle est l'application G de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $G(x) = \sum f_i$ tel que pour $x_i < x$, f_i fréquence de x_i.

La représentation est une fonction de répartition des effectifs. La courbe de la fonction de répartition des fréquences est appelée courbe cumulative des fréquences.

Remarque : Une fonction de répartition est une fonction croissante.

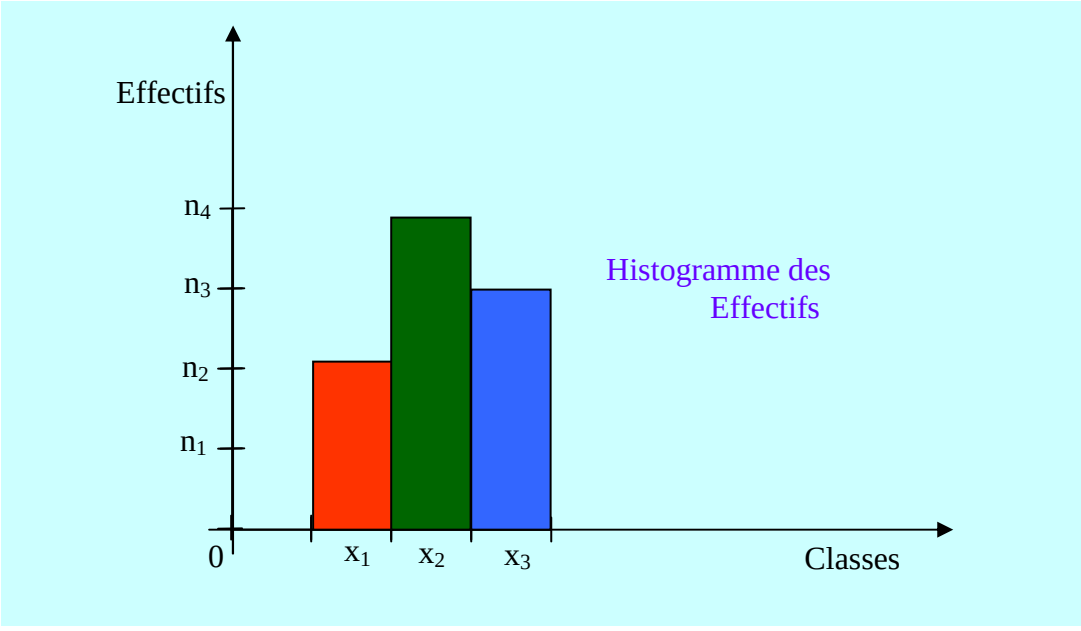
4–4 – Diagramme d'une série statistique à caractère continu :

Histogramme :

Il sert à représenter les effectifs comme les fréquences.

- Grouper les valeurs x_i de la variable en intervalles d'égale amplitude semi-ouverts d'un côté.
- Dans un système d'axes rectangulaires, porter les valeurs x_i en abscisses ; en ordonnées les effectifs (ou fréquences).
- Elever en chaque intervalle une bande dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) de la classe.

Remarque 1 : Si les classes sont d'amplitudes égales, la « hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.



Remarque 2: Si les classes n'ont pas la même amplitude alors la présence d'un axe de coordonnées est dépourvue de sens.
Dans la pratique si on note h_i la hauteur du rectangle représentant la $i^{ème}$ classe et a_i son amplitude, l'écriture de la proportionnalité des produits (a_i h_i) (aires des rectangles) et des effectifs et n_i permet de déterminer toutes les hauteurs, une fois choisie l'une d'entre elles h_1.

Ainsi nous avons la relation $\frac{a_1 h_1}{n_1} = \frac{a_2 h_2}{n_2} = \frac{a_3 h_3}{n_3} = ... = \frac{a_i h_i}{n_i}$. La connaissance de h_1 permet de représenter les hauteurs des autres rectangles de l'histogramme.

Exemple :

Les notes obtenues par 1000 candidats à un examen sont données dans le tableau suivant :

Notes	**[0 ; 2[**	**[2 ; 3[**	**[3 ; 4[**	**[4 ; 6[**	**[6 ; 8[**	**[8 ; 12[**	**[12 ; 16[**
Effectifs	**120**	**100**	**140**	**200**	**180**	**160**	**100**

Construire l'histogramme de cette série statistique.(Unité : 20 cm en ordonnées)

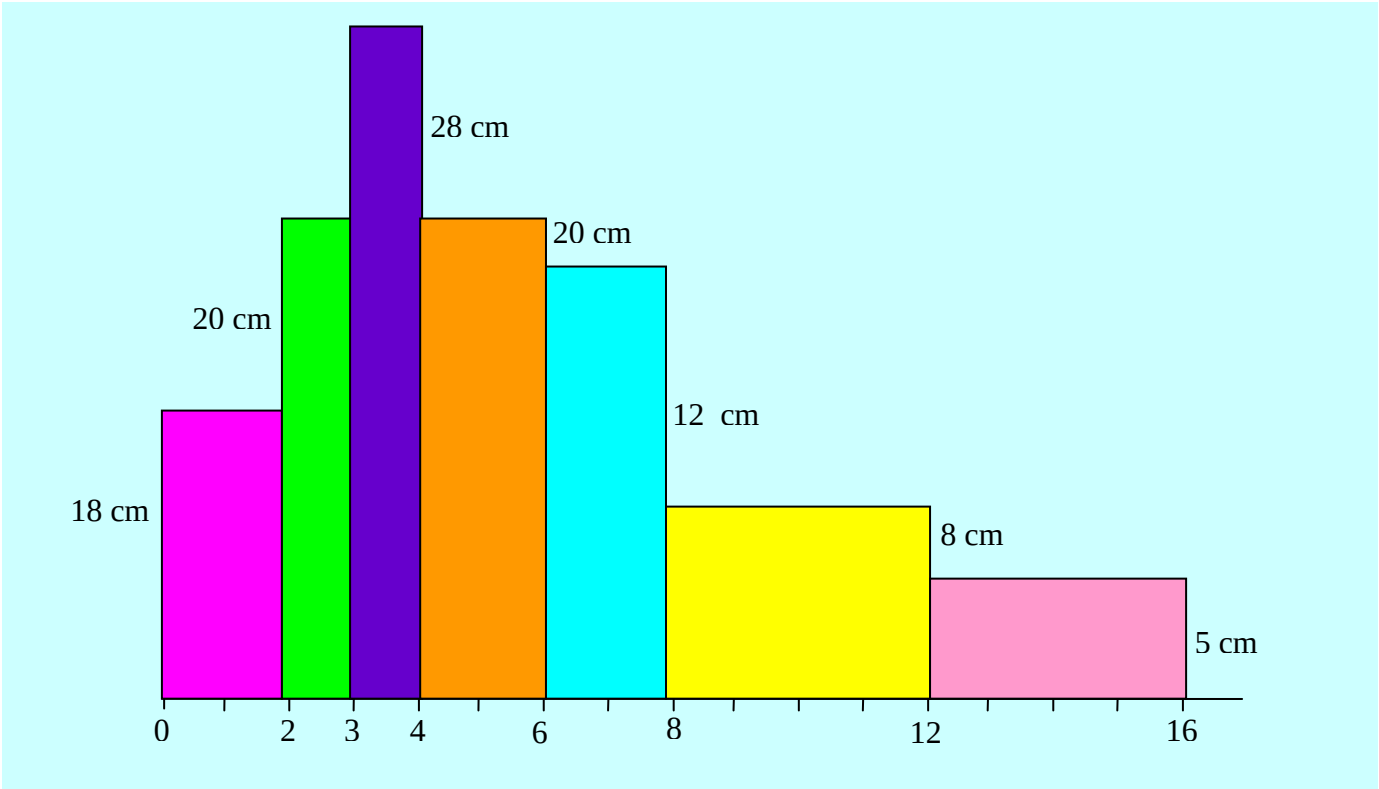
Soit h_2 = 20 cm la hauteur de l'intervalle [2 ;3[qui a la plus petite amplitude a_2 =1.

n_2 = 100 son effectif.. Nous savons que $\frac{a_1 h_1}{n_1} = \frac{a_2 h_2}{n_2} = \frac{a_3 h_3}{n_3} = \frac{a_4 h_4}{n_4} = \frac{a_5 h_5}{n_5} = \frac{a_6 h_6}{n_6} = \frac{a_7 h_{7i}}{n_7}$

$$\Leftrightarrow \frac{2h_1}{120} = \frac{1\times 20}{100} = \frac{1\times h_3}{140} = \frac{2h_4}{200} = \frac{2h_5}{180} = \frac{4h_6}{160} = \frac{4h_{7i}}{100} \ ;$$

$\frac{2h_1}{120} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_1 = \frac{2400}{200} = 12\,cm$; $\frac{h_3}{140} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_3 = \frac{2800}{100} = 28\,cm$; $\frac{2h_4}{200} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_4 = \frac{4000}{200} = 20\,cm$

$\frac{2h_5}{180} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_5 = \frac{3600}{200} = 18\,cm$; $\frac{4h_6}{160} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_6 = \frac{3200}{400} = 8\,cm$; $\frac{4h_7}{100} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow h_7 = \frac{2000}{400} = 5\,cm$



5 – Caractéristiques de position (ou indicateurs de position) :

Pour comparer rapidement deux séries statistiques, on va trouver des nombres réels caractérisant les séries.

5–1 Mode ou dominante :

Le mode ou la dominante d'une série statistique est la valeur x_i du caractère ayant le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence). C'est la valeur qui revient le plus souvent.

Exemple : *on pèse 15 élèves de la MTE$_1$ au Lycée Technique de Bamako voici les poids obtenus en kilogrammes (Kg)*

55 ; 45,8 ; 75 ; 63 ; 57 ; 61,9 ; 81 ; 72 ; 101 ; 40 ; 63 ; 72 ; 57 ; 61,7 ; 60.

Dominantes : 57 ; 63 ; 72

(2fois) ; (2fois) ; (2fois)

***Classe Modale* :** est la classe ayant le plus grand effectif.

5–2 Médiane, Valeur médiane

Quand les valeurs x_i d'une série statistique sont données par ordre croissant ;

la valeur x_k telle qu'il y ait autant d'observations avant qu'après est la médiane de la série.

$$\underbrace{x_0 ; x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ;}_{k \text{ observations}} \; x_k \; ; \; \underbrace{x'_0 ; x'_1 ; x'_2 ; \ldots ; x_n}_{k \text{ observations}}.$$

Quand il y a un nombre impair d'observations, alors il sa nécessairement une médiane.

Quand le nombre d'observations est paire, alors on parle de :

Valeur médiane = demi somme des termes médians.

$$\underbrace{x_0 ; x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ;}_{m \text{ termes}} \; \overbrace{x_k \; ; \; x_p}^{\text{termes médians}} \; \underbrace{x'_0 ; x'_1 ; x'_2 ; \ldots ; x_n}_{m \text{ termes}}.$$

Valeur médiane de la série est : $\dfrac{x_k + x_p}{2}$.

Exemple1 :

On mesure les longueurs en centimètre de quelques pieds de riz, on obtient les résultats suivants : 97 ; 93 ; 95 ; 91 ; 90 ; 94 ; 97 ; 91 ; 93 ; 94 ;

93 ; 92 ; 91 ; 94 ; 93 ; 90 ; 95 ; 93 ; 96 ; 94 .

Trouver le mode et la médiane de cette série statistique.

Solution :

Valeurs	*90*	*91*	*92*	*93*	*94*	*95*	*96*	*97*	*Total*
Effectifs	*2*	*3*	*1*	*5*	*4*	*2*	*1*	*2*	*20*

Le Mode de la série est : 93

90, 90, 91, 91, 91, 92, 93, 93, 93, 93, 93, 94, 94, 94, 94, 95, 95, 96, 97, 97.

Il n'y a pas de terme médian par ce que le nombre d'observations est pair = 20.

La valeur médiane est : 93.

Cas d'une variable continue

L'intervalle contenant la médiane est appelé intervalle médian. Dans le cas d'une variable continue la médiane est calculée par interpolation linéaire.

Exemple2:
On donne les âges des élèves d'une classe de1ère génie civile, on obtient les résultats suivants dans le tableau :

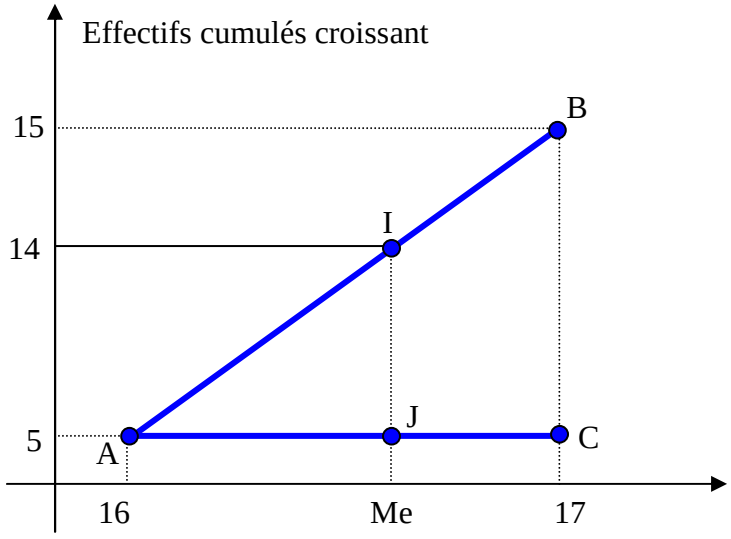
Classes	Effectifs n_i
[15 ; 16[	7
[16 ; 17[	8
[17 ; 18[	11
[18 ; →[	2

Quelle est la classe modale de cette série statistique
Déterminer l'intervalle médian et en déduire la médiane Me.

Solution :

Classes	Effectifs n_i	Effectifs cumulés croissant
[15 ; 16[	7	7
[16 ; 17[	8	15
[17 ; 18[	11	26
[18 ; →[	2	**28**
Total	**28**	//////////////////////////

La classe modale est l'intervalle [17 ; 18[.
On remarque que l'effectif moitié est 14. La 14ième valeurs du caractère est la médiane qui appartient à [16 ; 17[. *Donc l'intervalle médian est* [16 ; 17[.
Procédons par interpolation linéaire pour calculer la médiane Me.



Les triangles AIJ et ABC sont semblables. On a : $\frac{AJ}{AC}=\frac{JI}{CB}\Leftrightarrow\frac{Me-16}{17-16}=\frac{14-5}{15-5}$

$\Leftrightarrow\frac{Me-16}{1}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow Me-16=\frac{9}{10}\Leftrightarrow Me=16+0{,}9\ \Leftrightarrow\ Me=16{,}9$.

Remarque : 2 séries statistiques peuvent avoir le même mode et la même médiane.
Par exemple soit les séries statistiques S_1 et S_2 données par
Série S_1 : *90, 90, 91, 91, 91, 92, 93, 93, 93, 93, 93, 94, 94, 94, 94, 95, 95, 96, 97, 97.*
Série S_2 : *91, 91, 91, 92, 93, 93, 93, 93, 93, 94, 94, 94, 94, 95, 95, 96, 97.*

5–3 Moyenne arithmétique ; moyenne pondérée :

Définition 1 : soit la série statistique

Valeurs x_i	x_1	x_2	……	x_n
Effectifs n_i	n_1	n_2	……	n_k

La moyenne arithmétique de cette série est : $m = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$.

Définition 2 :
La moyenne pondérées des valeurs x_1 ; x_2 ; x_3 ; ….. ; x_k affectées respectivement des coefficients p_1 ; p_2 ; p_3 ; …… ; p_k , est le nombre :

. $\overline{m} = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_kx_k}{p_1 + p_2 + ... + p_k}$ *où les* p_k *sont réels donnés* .

Exemple : voici la série des notes d'un élève de la MTE₁.

Philosophie	*Maths*	*Economie*	*Anglais*	*Géographie*
08	*12*	*13*	*07*	*15*

Calculer la moyenne arithmétique des notes. Calculer la moyenne pondérée des notes sachant que les matières ont respectivement pour cœfficient : Philo = 3 ; Maths = 5 ; Economie = 5 ; Anglais = 2 ; Géographie = 2.
Solution :

- *Moyenne arithmétique est :* $m = \dfrac{8+12+13+7+15}{5} = \dfrac{55}{5} = 11$;
- *La moyenne coefficiée ou pondérée est :*
- $\overline{m} = \dfrac{(3\times8)+(5\times12)+(5\times13)+(2\times7)+(2\times15)}{3+5+5+2+2} = \dfrac{193}{17} = 11{,}35.$
- *D'autres notation de la moyenne pondérée est :* $\overline{x}$ *ou* $E(X)$.

5–4 La moyenne quadratique :

a) ***Définition*** : soit une distribution d : x_1 ; x_2 ; x_3 ;….. ; x_n .

On appelle moyenne quadratique la valeur de l'expression :

$$M.Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

b) ***Formule*** :

$$M.Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}{n}}$$

c) ***Exemple*** **:** calculer la moyenne quadratique de la distribution μ : 3 ; 3 ; 5 ; 8.

$$MQ = \sqrt{\frac{9+9+25+64}{4}} = \sqrt{\frac{107}{4}} \approx 5{,}17 .$$

5–5 La moyenne harmonique :

a) ***Définition*** **:** Etant donnée une distribution : x_1 ; x_2 ; x_3 ;…. ; x_n. On appelle moyenne harmonique la valeur notée :

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \qquad avec\, x_i \neq 0$$

ou encore on a :

$$MH = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

b) ***Exemple*** **:** Calculer la moyenne harmonique de la distribution : 8 ; 2 ; 7 .

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}} = \frac{3 \times 56}{43} = \frac{168}{43} = 3{,}9 .$$

5–6 Moyenne géométrique :

a) Définition **:** Soit une distribution : x_1 ; x_2 ; x_3 ;…. ; x_n. On appelle moyenne géométrique, la racine $n^{ième}$ du produit des éléments de la distribution.

c) Formule :

$$M.G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times ..... \times x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

c) Exemple : la distribution d : 3 ; 5 ; 7 ; 2 a pour moyenne géométrique :

$$M.G = \sqrt[4]{3 \times 5 \times 7 \times 2} = \sqrt[4]{210} = (210)^{\frac{1}{4}} = 3{,}80 .$$

5–7 Autres caractéristiques de position appelée quantiles :

5–7-1 Quartiles, écart inter-quartiles :

Les quartiles d'une série statistique sont les 3 valeurs Q_0 ; Q_1 ; Q_2 qui partage la série en 4 groupes de même effectif.

$$\underset{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots}{\overset{Q_0}{|}}\ \ldots\ldots,\ x_k,\ \ldots\ \underset{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\overset{Q_1}{|}}\ \underset{\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_n.}{\overset{Q_2}{|}}$$

Par exemple considérons la série S3

$$\begin{array}{cccccccc} 40 & 60 & 60 & 80 & 80 & 80 & 100 & 100. \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ & Q_0 & & Q_1 & & Q_2 & & \end{array}$$

La demie différence entre le 3ème quartile et le 1er quartile est appelée écart probable (ou écart semi-quartile). $\frac{Q_2 - Q_0}{2} = \frac{80-60}{2} = 10$. L'écart inter-quartiles est : $Q_2 - Q_0$.

5–7–2 Déciles :

Les déciles d'une série statistique sont les 9 valeurs (D_1 ; D_2 ; D_3 ;…… ; D_9) du caractère qui partage la série en 10 groupes de même effectif.

5–7–3 Centiles :

Les centiles d'une série statistique sont les 99 valeurs du caractère qui partage la série en 100 groupes de même effectif.

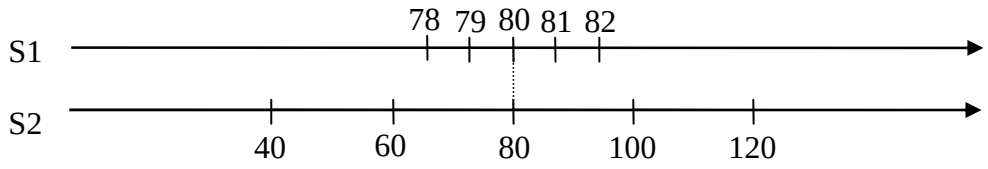
6 – Caractéristiques de dispersion (ou indicateurs de dispersion) :

Soient deux séries statistiques S1 et S2 données par
S1 : 78 ; 79 ; 80 ; 80 ; 80 ; 81 ; 81 ; 82.
S2 : 40 ; 60 ; 60 ; 80 ; 80 ; 80 ; 100 ; 100 ; 120.
Déterminer les modes, médianes, moyennes arithmétiques, de ces deux séries.
Solution :

Série S_1	*Série S_2*
Mode : 80	*Mode : 80*
Médiane : 80	*Médiane : 80*
Moyenne arithmétique = 80,12	*Moyenne arithmétique = 80*

***Conclusion* :**

les 2 séries ont sensiblement les mêmes caractéristiques de position.
Représentons par des points sur 2 axes, les valeurs de chaque série.



On constate que dans la série S1, les valeurs sont plus regroupées autour de la médiane. Dans celle de S2, elles sont dispersées.

6–1 Etendue ou Amplitude d'une série ou dimension d'une distribution :

L'amplitude (ou l'étendue) d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur de la série et de sa plus petite.

Etendue de S1 = 82 – 78 = 4 ;
Etendue de S2= 120 – 40 = 80.

La dimension est notée :
C = sup(x) – inf(x)
C = Max(x) – min(x)

Remarque : l'étendue dépend des valeurs extrêmes de la série.

6–2 Fluctuation ou variance, Ecart-type :

Définition 1 :

La fluctuation ou la variance d'une série statistique est le réel noté V(x) ou $\sigma^2(x)$.

$$V(x)=\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+.....+n_k(x_k-\bar{x})^2}{n_1+n_2+.....+n_k}$$

Où x_1 ; x_2 ; ……. ; x_k sont les valeurs de la variable.

Et où n_1 ; n_2 ; …….. ; n_k sont les effectifs attachées aux valeurs x_1 ; x_2 ; …. ; x_k.

$\bar{x}$ = *moyenne pondérée par les effectifs, c – à – d moyenne arithmétique*.

Définition 2 :

L'écart-type d'une série est la racine carrée de la variance. Il est noté σ.

$$\sigma=\sqrt{V(x)} \quad \text{ou} \quad \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

Remarques :

- $\sigma \geq 0$;
- Plus σ est grand plus les valeurs x_i sont dispersées. Plus σ est petit les valeurs x_i sont regroupées autour de la médiane.

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1

1°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_0 = 1+i \; ; \; z_1 = -1+i\sqrt{3} \; ; \; z_2 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; T = \frac{z_2}{z_3} \; ; \; P = z_2 \times z_3$$

2°) Mettre sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i) \; ; \; z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 \; ; \; z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \; .$$

3°) Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes

$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{13}$; $z_2 = 1+i\sqrt{3}$; $z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{(1+i)^2}$; $z_4 = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$, $\alpha \in [0 ; \pi[$

4°) soit α un nombre réel élément de]0 ; π [. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes : $z_0 = 1-e^{i\alpha}$; $z_1 = 1+e^{i\alpha}$; $Z = \frac{z_0}{z_1}$; $T = z_0 \times z_1$.

EXERCICE 2

Soient A ; B et M les points du plan complexe d'affixes respectives

$z_A = -2+i$; $z_B = 2-3i$ et $z = x+iy$.

1°) Résoudre dans ℂ l'équation $\frac{z+2-i}{z-2+3i} = \frac{1}{2}$

2°) Déterminez et construire l'ensemble ($\mathcal{E}_0$) des points M tels que $\left|\frac{z+2-i}{z-2+3i}\right| = 1$

3°) Déterminez et construire l'ensemble ($\mathcal{E}_1$) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 32$

4°) On pose $K = (z+2)(z+1+i)$. Déterminez l'ensemble ($\mathcal{E}_2$) des points M tels que K soit un réel.

EXERCICE 3

1°) Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes *z* tels que le nombre complexe A = (1– *z*) (1– iz) soit : a) un réel ; b) un imaginaire pur.

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère un point M d'affixe z = x + iy , (z ≠ – i) et on pose $P = \frac{z+2}{z+i}$.

a) Écrire P sous la forme algébrique en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   - P soit un réel ;
   - P soit imaginaire pur.

3°) Pour tout nombre complexe $z = x+iy$; on pose $Z_0 = \frac{iz+3}{(1+i)z-1}$.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z_0 soit un réel
b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z_0 soit un imaginaire pur.

4°) Déterminer l'ensemble des images des complexes z tels que les images des nombres complexes : i ; z ; iz soient alignées.

EXERCICE 4

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par f (z) = $z^4 - \sqrt{2}\,z^3 - 4\sqrt{2}\,z - 16$

1°) Trouver les réels a et b tels que f (z) = $(z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

2°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation f (z) = 0

3°) Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé (o, $\vec{u}$; $\vec{v}$) les images A ; B ; C ; D des solutions de f (z) = 0 ; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 5

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$; b) $z^2 - (5+3i)z + 4 + 7i = 0$; c) $iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$

d) $z^2 - (1 - i)z - 18 + 13i = 0$; e) $z^2 + (1+6i)z + (1 + 23i) = 0$;

f) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$; g) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; h) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

h) $(2iz + 3 - i)^2 + (z + 1 + 5i)^2 = 0$; i) $z^3 = 8i$; j) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$;

k) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; l) $z^4 = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

2°) – a) Déterminer les solutions complexes de l'équation : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ les écrire sous forme trigonométrique ;

b) Vérifiez que a = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.

En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE 6

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1°) Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$.

2°) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3°) On considère l'équation d'inconnue réelle x

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 7

1°)Soit z et **Z** les nombres complexes définis par : $z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $\mathbf{Z} = z^4$

Déterminer les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes de $\text{Cos}\,\frac{\pi}{8}$ et $\text{Sin}\frac{\pi}{8}$.

2°) Déterminer A= $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{1987}$; B = $(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{1992}$

3°) Déterminer et construire l'ensemble (**E**) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée :

a) $|z+1+2i|=|z-4|$; b) $|z-3i|=2$; c) $|\bar{z}-2+i|=1$; d) $|(1+i)z-2i|=2$.

EXERCICE 8

1°) a) Calculer les nombres: $a = i^4$; $b = i^5$; $c = i^6$; $d = i^7$.

b) En déduire les valeurs de : i^{4n} ; i^{4n+1} ; i^{4n+2} ; i^{4n+3} avec ($n \in \mathbb{N}$).

c) Calculer : $A = i^{60}$; $B = i^{149}$; $C = i^{134}$; $D = i^{167}$;

$E = i^{156}$; $F = i^{205}$; $G = i^{94}$; $H = i^{215}$.

2°) a) Linéariser : $\cos^5x$; $\sin^5x$; $\cos^3x$; $\sin^3x$.

c) Écrire cos(4x) en fonction de sinx .
d) Écrire sin(4x) en fonction de sinx et cosx .
e) Écrire cos(3x) en fonction de cosx .
f) Écrire sin(3x) en fonction de sinx .
g) En déduire une linéarisation de :

$H = \cos(4x)\sin x$; $G = 4\cos^3x - 3\cos x - 4\sin^3x + 3\sin x$;

$K = \cos(3x)\sin^2x$; $L = \sin(3x)\sin^2x$;

4°) Linéariser les expressions suivantes :

$A = \cos^2x\sin^3x$; $B = \sin3x\cos^2x$; $C = \cos x\sin^4x$; $D = \sin^4x + \sin^2x$;

$E = \cos^2x\,\sin^5x$; $F = \cos^3x\,\sin^3x$; $G = \cos^3x\,\sin^2x$; $H = \cos^4x + \sin^4x$.

EXERCICE 9

Le plan est orienté et rapporté au repère orthonormé direct. Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives **a** et **b**

1- construire le point M_1 dont l'affixe z_1, vérifie : $\frac{Z_1 - a}{Z_1 - b} = -1$

2- construire le point M_2 dont l'affixe z_2, vérifie : $\frac{Z_2 - a}{Z_2 - b} = 2$

3- construire le point M_3 dont l'affixe z_3, vérifie : $\frac{Z_3 - a}{Z_3 - b} = i$

4- construire le point M_4 dont l'affixe z_4, vérifie : $\frac{Z_4 - a}{Z_4 - b} = -i$

EXERCICE 10

1– Pour tout complexe z distinct de 1, on appelle A ; M et M' les points d'affixes respectives 1 ; z ; z^2. Déterminer les points M tels que le triangle AMM' soit équilatéral.

2 – Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

3– Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u = \frac{1}{1 + itg\theta}$.

(On discutera suivant les valeurs de θ).

EXERCICE 11

Pour chaque réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, on définit l'application

$f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$Z \mapsto f_\alpha(z) = z^2\cos^2\alpha - 2z\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha$.

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (o,i,j) on désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telle qu'il existe $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, vérifiant $f_\alpha(z) = 0$.

1-a) résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z) = 0$.

b) si le point M(z) appartient à (E), que peut-on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$?

2- Pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ fixé on pose : $Z = \frac{1}{2}i(z' + z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z) = 0$. Déterminer les racines quatrièmes de *Z* et représenter les points images sur un cercle.

EXERCICE 12

Soit l'application f : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z \mapsto f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$$

1– Déterminer les nombres complexes a, b ; et c pour que

$$f(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$$

2– résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f (z) = 0

3– Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

EXERCICE 13

Soit le polynôme complexe P (z) de la variable complexe z

$P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$

1-Montrer que l'équation P (z) = 0 admet une racine z_0 imaginaire pure.

2- Résoudre l'équation P (z) = 0. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus petite partie réelle et z_2 la troisième.

3-Dans le plan affine euclidien rapporté au repère (o , i , j) orthonormé on considère les points A, B, et C d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

EXERCICE 14

1– Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 6i)z^2 - (9 - 15i)z + 22 - 6i$

a) Montrer que l'équation P (z) = 0 admet une racine réelle que l'on déterminera.

b) En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de P (z) = 0 ;

c) Soient A ; B ; C les images respectives des solutions de P(z) =0. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ces points et en déduire la nature du triangle ABC. Donner une équation cartésienne du cercle (**C**) circonscrit au triangle ABC.

2– Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

3– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1 + 12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14 + 6i \\ (1-i)\bar{z} + (5-2i)\bar{z}' = 4 - 18i \end{cases}$ c) $\begin{cases} (1+i)z_1 + 2i\bar{z}_2 = 3 - i \\ 2z_1 + 3\bar{z}_2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2iz + 2z' = 4 - 4i \\ (1+i)z - 2z' = -5 + 7i \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$; f) $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$

4– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^7 = \dfrac{(4+4i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$ b) $z^5 = \dfrac{\left[1 - 2\sqrt{3} + i(2+\sqrt{3})\right]^7}{(2-i)^7 (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^2}$

EXERCICE 15

Soit le polynôme complexe $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1) Factoriser P(z) en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients complexes.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation P(z) = 0 ; puis montrer que P(z) est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE 16

Le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u}; \vec{v})$

1– Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2– On donne les points A (–1 ;–5) et B($\frac{1}{3}; \frac{1}{6}$). A tout point M d'affixe z, ($z \neq -1-5i$) on associe le point M' d'affixe Z tel que : $Z = 3i \times \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $\mathbf{Z} = z$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que :| Z | = 3 ;

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1 ;

d) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[o, \vec{u})$ privé de {0}.

EXERCICE 17

Soit α un nombre réel appartenant à$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. on considère l'équation d'inconnue z complexe (E) : $(1+iz)^3 (1- itg\ \alpha) = (1-iz)^3 (1+itg\ \alpha)$

1- soit z une solution de (E)

a) Montrer que$|1+iz| = |1- iz|$.

b) En déduire que z est un réel.

2- a) Exprimer $\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$

b) Soit z un nombre réel, on pose z = tg φ où $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et le résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de (E).

EXERCICE 18

Soit u le nombre complexe défini par u = cosθ + i sinθ où θ ∈]–π ; π]

1- Calculer le module et un argument de $\frac{1-u}{1+u}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

2-En déduire le module et un argument de z tel que : u = $\frac{2+iz}{2-iz}$

3- Résoudre $(2+iz)^6 = (2-iz)^6$.

EXERCICE 19

Le plan rapporté au repère orthonormé (o, $\vec{u}$; $\vec{v}$)

1– Trouvez l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points images des nombres complexes 1 ; z ; $1+z^2$ soient alignées.

2– On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe **Z** tel que **Z** = $\frac{z+1}{z-1}$

a) Trouver l'ensemble (D) des points M tel que Z soit un réel ;

b) Trouver l'ensemble (ϑ) des points M tel que Z soit un imaginaire pur ;

c) Trouver l'ensemble (Γ) des points M tel que O ; M ; M' soient alignés.

EXERCICE 20

Soit l'équation dans ℂ : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1) Montrer que l'équation admet dans ℂ une solution réelle.

2) En déduire la résolution dans ℂ de cette équation.

3) Soient A ; B ; et C les points images de ces solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle ABC.

4) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G de ce triangle.

EXERCICE 21

Soit l'application f : z ↦ f (z) = $f : z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$; $z \neq -i$

1- Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que : $f(z_0) = 1 + 2i$

2- Soit z ∈ ℂ – {- i}. On note r le module de z+i et α une mesure de son argument. Donner la forme trigonométrique de f (z) – i en fonction de r et α.

3- Soit A le point d'affixe – i.

a) Déterminer l'ensemble (Ɛ) des points M vérifiant: | f (z)-i | = $\sqrt{2}$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure l'argument de f (z) – i.

b) Montrer que B appartient à (Ɛ) et (D) puis construire (Ɛ) et (D).

4- à tout point d'affixe $Z = (\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})z$. Déterminer l'ensemble (Ɛ) des points M tels que |Z| = 8.

5– résoudre dans ℂ, l'équation $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)\, z + \frac{1}{2} i\sin 2\theta = 0$ où θ est un paramètre réel. En discutant selon les valeurs de θ , on écrira les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

EXERCICE 22

1°) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7 - i + \frac{5}{(1-7i)(i-1)}$

2°) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :

a) $t = \frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$; b) $t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; c) $t = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

3°) a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes Trigonométrique et algébrique.

b) Calculer $(1-i)^6$.

c) En déduire les racines sixièmes du complexe T = 8i sous formes trigonométrique et algébrique.

EXERCICE 23

1°) a) Vérifier que $(2 + i)^4 = -7 + 24i$

b) Trouver les racines quatrièmes de 1

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7 - 24i = 0$

2°) Soit l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - 9z + 18i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre (E).

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z - 1 + 3i = 0$.

EXERCICE 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A est le point d'affixe z =1+2i ; B est le point d'affixe t = 1+5i

C est le point d'affixe k = 4+2i. On pose $Z = \frac{k-z}{t-z}$

1°) Que représente |Z| ?

2°) Que représente arg (Z) ?

3°) Calculer Z et en déduire la nature du triangle ABC

4°) Déterminer l'ensemble ($\mathfrak{I}$) des points M d'affixe m tels que $|m - z| = |\overline{m} - t|$.

EXERCICE 25

1) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées de u = 7 + 24i.

2) Les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré à cœfficients complexes vérifient : $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 4 \\ \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = 1 \end{cases}$. Former cette équation et la résoudre dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 26

I) Soit le complexe $Z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

1°) Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z.

2°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=\sqrt{2}$

II) 1°) Trouver l'ensemble des points M(x ;y) du plan d'affixe z tel que :

$Z^2 + 2z - 3$ soit un réel .

2°) Déterminer l'ensemble des nombres z tels que : $\frac{z+2i}{z-4i}$ soit réel (on suppose $z \neq 4i$).

EXERCICE 27

On pose $P(z)= z^4 -6z^3 + 23z^2 -34z + 26$.

1°) α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\overline{\alpha})=\overline{P(\alpha)}$.

Déduisez que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2°) Calculer P(1–i) ; en déduire les solutions de l'équation P(z) = 0

3°) Placer les points images des solutions de l'équation f(z) = 0 dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$.

4°) Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (points cocycliques).

EXERCICE 28

On donne $A=5\sqrt{2}(1+i)$; $B=-5(1+i\sqrt{3})$

1°) Déterminer le module et un argument des nombres complexes :A ; B ; $\overline{A}$; $\frac{1}{A}$.

2°) Soit Z le complexe tel que A Z = B. Écrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

EXERCICE 29

Soit l'équation (E) : $z^3-10z^2+36z-40=0$.

1°) Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E).

2°) Trouver les réels a ; b ; c tels que : $z^3-10z^2+36z-40=(z-2)(az^2+bz+c)$.

3°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

4°) On pose $z_A=2$; $z_B=4-2i$; $z_C=4+2i$. Placer les images respectives A ; B ,C dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

5°) Calculer $|z_C-z_A|$; $|z_C-z_B|$; $|z_A-z_B|$. En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$.

1°) Calculer $f(2i)$. Que peut-on conclure ?

2°) Trouver les complexes a ; b ; c tels que $f(z) = (z-2i)(az^2+bz+c)$.

3°) a) Calculer $(1+2i)^2$.

b) En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$.

4°) Soient A ; B ; C les points d'affixes respectives 2i ; 3+i ; 2–2i.

a) Placer les points A ; B ; C.

b) On pose $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Donner la forme algébrique de Z. en déduire le module et un argument de Z.

c) Interpréter le module et un argument de Z.

5°) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Déterminer les coordonnées de D puis le placer sur la figure précédente.

6°) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique = 1cm).
Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+8i)z^2 - (13-32i)z + 57 - 24i$

1°) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle α.

2°) Déterminer les complexes P et Q tels que $f(z) = (z-\alpha)(z^2+Pz+Q)$.

3°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (On notera z_A la solution réelle ; z_B la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive ; et z_C la troisième solution).

4°) Soient A ; B ; C les points images respectives des solutions z_A ; z_B ; z_C de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe. En déduire la nature du triangle ABC.

5°) Déterminer les coordonnées du point I d'affixe z = x + iy tel que :

$$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C| .$$

6°) Déterminer et construire l'ensemble (Q) des points M(x ; y) du plan tel que :

$$MA^2 + MC^2 = 32.$$

7°) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 - 3i$.

a) Déterminer la nature du polygone ABCD.

b) Calculer le périmètre et l'aire du polygone ABCD.

EXERCICE 32

Soit le polynôme complexe $P(z)= z^3 – iz^2 – 11z + 51i$

1) Calculez P(3i)
2) Déterminez les complexes a et b tels que $P(z) = (z – 3i)(z^2 +az + b)$
3) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$
4) Placez dans le plan complexe les points A, B , C d'affixes respectives :
   $Z_A = 3i$; $Z_B = – 4 –i$; $Z_C = 4 – i$.
5) a) Calculez $|Z_B – Z_A|$; $|Z_C – Z_A|$; $|Z_C – Z_B|$.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
6) Déterminez et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   $MB^2 + MC^2 = 64$.

EXERCICE 33

On désigne par $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On pose :

$f(z) = z^3–(3+3i)z^2 –(2–9i)z + 8 – 6i$; $z \in \mathbb{C}$

1°) Montrer que l'équation $f(z)= 0$ admet une solution réelle m.
2°) Déterminer le polynôme g(z) à coefficients complexes tel que:$f(z)=(z–m)g(z)$.
3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=0$.

EXERCICE 34

On veut déterminer trois nombres complexes. Les modules de ces trois nombres forment une suite géométrique de raison 2, et leurs arguments une suite arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer ces trois nombres z_1 ; z_2 ; z_3 sachant que leur produit est $z_1 z_2 z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$; et que l'argument de z_1 appartient à $]0 ; \frac{\pi}{2}[$. On donnera la réponse sous forme trigonométrique.

EXERCICE 35

Soient trois nombres complexes $Z_1=[r_1 ;\theta_1]$; $Z_2=[r_2 ;\theta_2]$; $Z_3=[r_3 ;\theta_3]$ tels que les modules r_1 ; r_2 ; r_3 forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et les arguments θ_1 ; θ_2 ; θ_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Déterminez ces trois nombres complexes Z_1 ; Z_2 ; Z_3 sachant que leur produit est $Z_1Z_2Z_3 = –i$ et que $\theta_1 \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$. On donnera les nombres complexes Z_1 ; Z_2 ; Z_3 sous forme trigonométrique ; algébrique et exponentielle.

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 01 :

1) Démontrer par récurrence que :

a) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$: $1+2+3+.....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$: $1+3+5+.....+(2n-1) = n^2$

c) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$: $1+3+5+.....+(2n+1) = (n+1)^2$

d) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$: $\sum_{p=1}^{n} p(p+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{1\times 2\times 3} + \dfrac{1}{2\times 3\times 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

f) $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

g) $\forall$n $\in \mathbb{N}^*$ $2\times 6\times 10\times .....\times (4n-2) = (n+1)(n+2)\times .....\times 2n$.

h) $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\,2^{k-1} = (n-1)\times 2^n + 1$;

i) $\forall$n $\in \mathbb{N}^* - \{1\}$; a$\in \mathbb{R}_{+,}^{*}$ $(1+a)^n > (1 + n\,a)$

j) $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ et n ≥ 4, $2^n > n^2$

k) $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2°) Démontrer par récurrence que $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

En déduire la somme : S = $12^3 + 13^3 + 14^3 + ……..+20^3$.

3°) On pose $I_0 = 0$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $I_n = \sqrt{2 + I_{n-1}}$.

Démontrer que $I_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

EXERCICE 02 :

1°) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

2°) Détermine les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

3°) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que a + b + r = 3025 et q = 50. Rétablir la division.

4°) Détermine le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7.

EXERCICE 03 :

1°) Quels sont les restes successifs de la division par 8 de 7^n. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8.

2°) a) Quel est le reste de la division de 5^{136} par 7 ?

b) Un nombre s'écrit : $\overline{3x53}$ en base dix. Déterminer x pour que :

$5^{136} + \overline{3x53}$ soit divisible par 7.

3°) Les nombres sont écrits en base cinq ; effectuer les opérations suivantes

3421	3421
+ 240	× 230
----------	----------
=	=

EXERCICE 04 :

Démontrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$:

1) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

3) $n^3 - n$ est divisible par 3.

4) $n^7 - n$ est divisible par 7.

EXERCICE 03 :

Dans le système de numération de base trois, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^3$.

1°) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^n$?

2°) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.

3°) Soit **a** un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres N = 2(**a** –1) et N' = (**a** – 1)^2. Ecrire N et N' dans le système de base **a**.

4°) Démontrer que dans tout système de numération de base **b** (avec **b**$\geq$ 4) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.

EXERCICE 04 :

1°) Existe-t-il un entier N qui s'écrive $\overline{abcca}^{\,5}$ en base cinq et $\overline{bbab}^{\,8}$ en base huit.

2°) Déterminer x, y, z sachant que : $\overline{xyz}^{\,7} = \overline{zyx}^{\,9}$.

3°) Déterminer le nombre entier A du système décimal qui s'écrit :

$$\overline{a\,b\,7}^{\,9} \quad et \quad \overline{a\,7\,b}^{\,8}.$$

4°) En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$ montrer que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10}\times\overline{11}\times\overline{12}\times\overline{13} + 1 = (131)^2$.

EXERCICE 05:

1°) Le nombre entier naturel N, qui s'écrit $\overline{341}$ dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}^{\,a}$ en base a.

a) Trouver un encadrement de a^3.

b) Déterminer a et vérifiez.

2°) Développer $(k + 1)^5$. Ecrire le nombre 13^5 dans le système de base 12.

EXERCICE 06:

1°) Soient x, y, et z trois entiers naturels avec $x \geq 2$. On suppose qu'en base x ; y s'écrit : $\overline{304}$ et z s'écrit : $\overline{100}$.

a) Quelle est l'écriture en base x du produit yz ?

b) Sachant que l'écriture décimale de y + z est 104, déterminer les écritures décimales de x et du produit yz.

2°) Les nombres x, y et z étant trois entiers naturels, on suppose que l'écriture en base x de y est 131 et que l'écriture de en base x de z est 101. Montrer que l'on peut sans connaître x, exprimer dans le système de base x le produit xy.

EXERCICE 07 :

Les entiers $\overline{cb}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ sont écrits dans le système à base dix. Déterminer les chiffres a, b, et c sachant que :

$$\begin{cases} a + b + 5c + 3 = \overline{cb} \\ \overline{bc} - \overline{ac} = 10c \end{cases}$$

EXERCICE 08 :

1°) Trouver le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de : 2^{1999}.

2°) Trouver 3 entiers naturels a, b, c premier entre eux deux à deux tel que :

abc = 495

3°) x, y, z étant des chiffres de la base dix ; on considère le nombre A = $\overline{x\,13\,y\,8\,z}$ en base 10. Déterminer tout les triplets (x ; y ; z) pour lesquels A est divisible par 495.

EXERCICE 09 :

1°) On note n un entier naturel non nul, p l'entier naturel (3n + 1) et q l'entier naturel (5n – 1) c'est-à-dire p = 3n+1 et q = 5n–1.
a) Démontrer que le P.G.C.D de p et q est un diviseur de 8.
b) Pour quelles valeurs de n ce **p.g.c.d** est-il est égal à 8 ?. Calculer alors le P.P.C.M de p et q.
2°) Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n. En déduire que pour tout entier naturel n ≥ 1 le nombre
N = $22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

EXERCICE10:

1°) Déterminer un nombre N de trois chiffres tels que leur somme est égale à 17. Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 360. Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 198.

2°) Trouver tous les couples $(\dot{a};\dot{b})$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que :

$$\dot{a}\dot{b} = \dot{0} \text{ et } \dot{a} - \dot{b} = \dot{5}.$$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$.

3°) Calculer x^4 pour x appartenant à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire la valeur de $x^5 - x$. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^5 + y^5 = \dot{3}$ puis l'équation : $x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$. Déterminer les entiers relatifs n tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égal à 3.

EXERCICE 11 :

1°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}$: $(x + 1)^4 \equiv x^4 + x^3 + x + 1$ [3]. En déduire l'ensemble (E) des éléments x de $\mathbb{Z}$ tels que : $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0$ [3]. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de l'équation :

$$x^2 + x - \dot{m} = \dot{0} \quad (m \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}).$$

2°) Ecrire les expressions des éléments de $\mathbb{Z}$ congrues à **a** modulo n.
a) **a** = m –1 ; **n** = m + 1 avec $m \in [-1; +\infty[$;
b) **a** = $m^2 + 2$; **n** = m – 4 avec $m \in [1; +\infty[$;

3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences : a) $n + 5 \equiv 0\ [n+3]$ b) $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 [n+1]$.
4°) Trouver les restes des divisions euclidiennes de $\mathbf{n}^3$ par **7. n** entier naturel.
a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences : $x^3 - 1 \equiv [7]$; $x^6 - 1 [7]$.
b) Quels sont les restes des divisions euclidiennes de 100 ; 102 ; 103 par 7 ?
c) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $100 + 102^n + 103^n \equiv 0\ [7]$.

EXERCICE 12 :

1°) Soit $A = \frac{2n+18}{n+3}$; n $\in \mathbb{N}$.

a) Pour quelles valeurs de n, A est-il un entier naturel ?
b) Pour quelles valeurs de n, A est-il irréductible ?

2°) On considère l'entier naturel représenté en base **b** par : $N = \overline{342x}^{\,b}$.
Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit :
a) divisible par 5 quand b = 6 ;

b) On donne x =1.Trouver la plus petite valeur de b sachant que N est divisible par 3.

EXERCICE 13

1°) Pour quelle valeurs de l'entier naturel n le nombre **A** = $2n^2 - 3n + 3$ est-il divisible par (n – 3).

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

a) $3x - 5y = 6$; b) $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ y \equiv x^2\,[5] \end{cases}$

3°) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

a) $(x \wedge y)+(x \vee y) = y+9$; b) $2(x \vee y)+3(x \wedge y) = 78$; c) $(x \vee y)-18(x \wedge y) = 791$

d) $8(x \vee y)=105(x \wedge y) + 30$; e) $(x \wedge y)= y+9$.

f) $\begin{cases} x+y = 651 \\ \frac{x \vee y}{x \wedge y} = 108 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x \vee y = 120 \\ x^2+y^2 = 801 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x \vee y = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x \wedge y = 354 \\ x+y = 5664 \end{cases}$; L) $\begin{cases} x+y = 312 \\ x \vee y = 1980 \end{cases}$

EXERCICE 14:

1°) Soit b un entier naturel strictement positif supérieur à 1. On rappelle que :
$b^2 - 1 = (b-1)(b+1)$.
a) Quel est le P.G.C.D de b^2 et (b – 1) ?

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $b^2x + (b-1)y = 1$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $3^{3x} - 5\times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0\,[11]$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $34x \equiv 2\,[5]$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 21590x + 9525y = 1270.

EXERCICE 15:

Soit l'équation (E) : 324x – 245y = 7 où (x ; y) $\in \mathbb{Z}^2$.
1°) Montrer que pour toute solution (x ;y) de (E), x est multiple de 7.
2°) Résoudre l'équation (E).
3°) Soit (x ; y) un couple solution de (E). On pose $x \wedge y = d$.
a)Quelles sont les valeurs possibles de d ?.
b) Déterminer les solutions (x ; y) de (E) telles que x et y soient étrangers.
4°) Résoudre les systèmes d'inconnues (a ;b) :

a) $\begin{cases} P.G.C.D(a;b) = 4 \\ P.P.C.M(a;b) = 1680 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + b = 96 \\ a \vee b = 180 \end{cases}$

EXERCICE 16 :

1°) Pour tout nombre entier naturel n, calculer le reste de la division euclidienne par 7 de 5^n et de 4^n. Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?.

2°) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ puis dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} \\ \dot{2}x + y = \dot{5} \end{cases}$

3°) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer : $354 \wedge 25$ et trouver deux entiers relatifs k et ℓ tels que : $354k + 25\ell = 1$; x et y tels que $45x - 28y = 1$
4°) a) Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.
b) Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient : $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 \le d \le 30 \end{cases}$

5°) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.
b) Déterminer l'ensemble des couples (x ; y) d'entiers naturels tels que : $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ vérifient la relation $\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 \le d \le 50 \end{cases}$

6°) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 108.
b) Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels tels que : $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ vérifient la relation $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 \le d \le 15 \end{cases}$

EXERCICE 17:

Soit m un nombre entier.

1°) Montrer que l'équation : (x ; y) $\in \mathbb{Z}^2$; 6y – 3x = m admet des solutions si et seulement si m est multiple de 3.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :
a) 6y – 3x = 5
b) 6y – 3x = 3

3°) Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :
(6y – 3x – 4)(6y – 3x + 4) = 1

EXERCICE 18 :

Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

1°) Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.

2°) Ecrire ce nombre dans le système à base 8.

EXERCICE 19 :

1°) Déterminer les chiffres x et y du nombre n dont l'écriture décimale est n = 28x75y pour que ce nombre soit divisible par 3 et 11.

2°) Un nombre s'écrit x43y dans la base dix. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9

3°) Soit le nombre **n** qui s'écrit dans la base dix, **n** = y17x35 ; trouver x et y pour que **n** soit divisible par 9 et 11.

4°) Déterminer les chiffres x, y, et z pour que le nombre dont l'écriture décimale est n = 13xy45z soit divisible par 8 ; 9 et 11.

5°) Déterminer les entiers x tels que : $5 / (4x^2+1)$ et $13 / (4x^2+1)$.

6°) Trouve un entier naturel de deux chiffres sachant qu'il est égal à 3 fois la somme de ses chiffres ; qu'en le multipliant par 3, on trouve pour résultat le carré de la somme de ses chiffres.

EXERCICE 20 :

On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés respectifs 132m ; 156m et 204m de telle sorte que qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?.

EXERCICE 21 :

1°) Soient p *et* q deux entiers relatifs étrangers, n un entier naturel non nul.

Démontrer que p *et* q^n sont étrangers.

2°) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ $(p \text{ et } q \text{ entiers relatifs étrangers})$;

Démontrer que p *divise* a_0 *et* q *divise* a_n.

3°) Factoriser le polynôme $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

EXERCICE 22 : « Nombres amiables – Nombres parfaits »

1°) « On appelle diviseurs stricts d'un entier naturel *n* tout diviseur de n positif autre que lui-même ». Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2°) « On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que, chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre ».
Vérifier que 220 et 284 sont amiables. 17 296 et 18 416 sont amiables.

3°) « On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire amiable avec lui-même) ».

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier p tel que $(2^4 \times p)$ soit un nombre parfait

c) Soit *n* et *p* deux entiers naturels, tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de *p* en fonction de *n* pour que $\left(2^n \times p\right)$ soit parfait.

d) Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme, pour *n <10.*

EXERCICE :01

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-5}$; 2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{x^2+3}$; 3°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{-3x^2+7x+1}$; 4°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^4+3x-2}$;

5°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{|-2x+6|}$; 6°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{|-3x+6|}$; 7°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$; 8°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)$;

9°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)$; 10°) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$; 11°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{2x^2-3x-2}$;

12°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$; 13°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-7x+5}{x-1}$; 14°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+5x-12}{(x-2)(x+3)}$; 15°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{|x^2-4|}$

16°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{|x^2-1|}$; 17°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3}$; 17°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 19°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;

20°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; 21°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; 22°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; 23°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}}$

EXERCICE :02

Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; b) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; f) $f(x)=\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

EXERCICE :03

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$; 2°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$; 3°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin^3 x}{x^2}\right)$; 4°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x+\tan x}{x}\right)$;

5°) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 6°) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 7°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos x}{3+\cos x}\right)$; 8°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$;

9°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$; 10°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 11°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{\cos(2x)}\right)$; 12°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}\right)$

12°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}\right)$; 13°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{tgx-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$; 14°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

EXERCICE :04

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1°) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$; 3°) $f(x)=\dfrac{4-5x}{x^2+2x-3}$

4°) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$; 5°) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$; 6°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{-x+2}$

7°) $f(x)=\dfrac{6x-2}{-2x+8}$; 8°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{-x^2-x+2}$; 9°) $f(x)=-3x^3+5x^2-7x+1$

EXERCICE : 05

A-/ Soit la fonction *f* définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où *a ; b et c* sont des réels.

1°) Calculer *f '(x).*

2°) Déterminer les réels a, b, c sachant que *f* admet 1 pour extremum en x = 0 et – 3 pour extremum en x = 2.

3°) Étudier la fonction *f*. Montrer que l'équation *f(x) = 0* admet une solution unique α dans [–1 ; 0] ; une solution unique β dans [0 ; 1] ; une solution unique λ dans [2 ; 3].

4°) Tracer la courbe (C_f) de *f*.

B-/ Soit la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x^2+x-5$

1°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in [4\,,\,5]$

3°) Déterminer un encadrement de α *à* 10^{-2} près**.**

EXERCICE : 06

Soit la fonction numérique f définie par $f(x)=-(x-1)^2(x+2)$.

1°) Etudier les variations de f ;

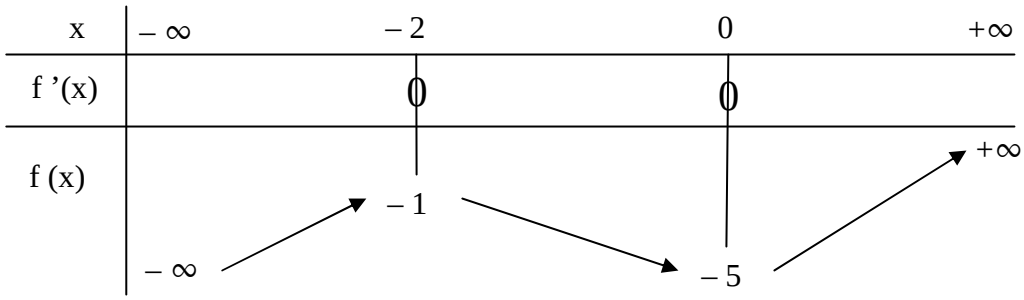
2°) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

On déterminera les intersections de la courbe ($\mathcal{C}$) de f avec les axes de coordonnées.

3°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 07

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :



La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

1°) Déterminer l’ensemble de définition de f.

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Déterminer les réels a ; b ; et c en utilisant les données du tableau de f.

4°) Montrer que la restriction g de f à [0 ; +∞[est une bijection de [0 ; +∞[sur un intervalle J que l’on précisera.

5°) Montrer que l’équation g(x) = 0 admet une solution unique α .

Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de à 10^{-2} près (on précisera la méthode).

6°) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d’abscisse $x_0 = 1$.

EXERCICE : 08

A-/ 1°) aux trois réels a ; b ; c on associe la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}.$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Déterminer les constantes a ; b ; c pour que ($\mathcal{C}$) passe par les points A(1 ; 8) ; B(– 4;–2) ; et admette au point E d’abscisse –2 une tangente parallèle à l’axe des abscisses.

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

a) Etudier f et construire sa courbe ($\mathcal{C}$). Montrer que ($\mathcal{C}$) admet un centre de symétrie dont on précisera.

b) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l’équation : $x^2 + (3 - m)x + 4 = 0$

EXERCICE : 09

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+1}$ où α et sont β des réels.

1°) Déterminez l'ensemble de définition D_f de f

2°) Déterminez les réels α et β sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$.

3°) Déterminez les limites de f aux bornes de D_f

4°) Déterminez les réels a ; b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

5°) Montrez que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet une droite asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

6°) Étudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à l'asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

7°) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f.

8°) Étudier le signe $f(x)$ suivant les valeurs de x.

9°) Déterminez une équation de la tangente (T_0) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse $x=0$

10°) Montrez que le point I(–1 ;–1) est centre de symétrie de ($\mathcal{C}_f$)

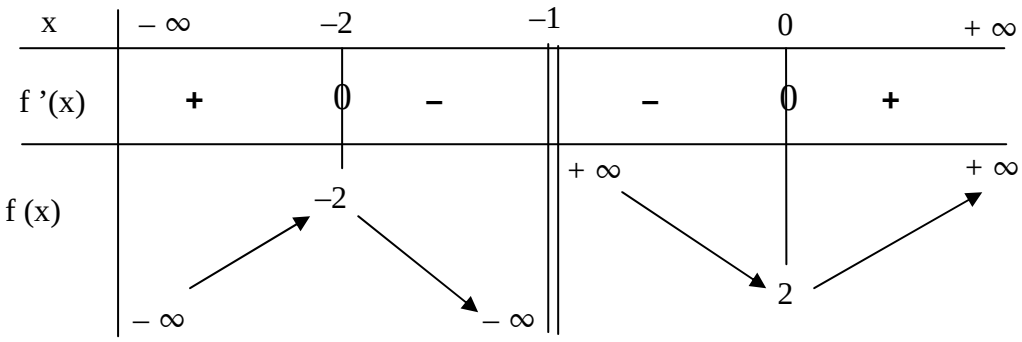
11°) Calculez $f(3)$; $f(-3)$; $(f^{-1})'(4)$.

12°) Tracez la courbe ($\mathcal{C}_f$), la droite ($\mathcal{D}$) dans le plan rapporté à un repère orthonormé

13°) Calculez l'aire A du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), la droite ($\mathcal{D}$) et les droites d'équation $x= 0$ et $x=2$.

EXERCICE : 10

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :



La fonction f est de la forme : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

1°) calculer $f'(x)$.

Trouver les cœfficients a ; b et c en utilisant les données du tableau.

2°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) admet une droite asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

Étudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

3°) Donner le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .

4°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 11

Soit $h(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$. Déterminer les réels a ; b ; c sachant que la courbe ($\mathcal{C}_h$) de la fonction *h* passe par les points A(0 ; 2) ; B(2 ; –2) et la dérivée de *h* s'annule pour x = 2.

A) Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$

1°) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

2°) Etudier la fonction f ;

3°) Montrer que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation: y = – x +1 est asymptote oblique à ($\mathcal{C}_f$).

4°) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

5°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse 2.

6°) Montrer que le point I (1 ; 0) est centre de symétrie de ($\mathcal{C}_f$).

7°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 12

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x-5}{x-3}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une droite (Δ) asymptote oblique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

3°) Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (Δ).

4°) Etudier le sens de variation de f et construire ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormé.

5°) Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

6°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point E d'abscisse 1.

Existe-t-il un autre point de ($\mathcal{C}$) en lequel la tangente à ($\mathcal{C}$) est parallèle à (T) ?

si oui, déterminer les coordonnées de ce point et une équation de cette tangente (T').

7°) résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2-(m+1)x+3m-5=0$.

EXERCICE : 13

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

1-/ Trouver a, b, et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2-/ Montrer que la droite (D) d'équation y = x –1 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$) de *f*

3-/ Etudier les variations de *f*.

4-/ Etudier les positions de (C_f) par rapport à (D).

5-/ Montrer que la restriction de *f* à l'intervalle]–∞ ; –3] est une bijection g de]–∞ ; –3] sur un intervalle J que l'on précisera.

6-/ Calculer g(– 5) ; g(– 4) ; $(g^{-1})'(-7)$.

7-/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de *f* ainsi que ($\mathcal{C}'$) de g^{-1} dans le même repère.

8-/ Démontrer que pour tout x de [1 ;3] on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

9-/ Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs de *m* le nombre de solutions de l'équation $x^2 - m\,x + 3 - m = 0$.

EXERCICE : 14

Soit la fonction *f* la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x}$. Soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1-/ Déterminer l'ensemble de définition de $\mathcal{D}_f$ de *f*.

2-/ Trouver les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$.

3-/ Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de *f* admet une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) que l'on précisera.

4-/ Déterminer les limites de *f* ; calculer sa dérivée *f* '(x) puis dresser son tableau de variation.

5-/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ($\mathcal{C}_f$) avec l'axe des abscisses.

6-/ Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

7-/ Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse x = – 1.

8-/ Calculer *f* (1) ; *f* (2) ; puis (f^{-1})' (2).

9-/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$).

EXERCICE : 15

A/ Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1-/ Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation ;

2-/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que

$$2{,}19 < \alpha < 2{,}20.$$

3-/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2-/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\, g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3-/ Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation f .

4-/ Montrer que la droite (D) d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au voisinage de $+\infty$.

5-/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

6-/ Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

7-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 16

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ;
2°) Montrer que f est impaire. En déduire la symétrie correspondante.
3°) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude ;
4°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe ;
5°) Dresser le tableau de variation de f ;
6°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
7°) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
8°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.
9°) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]1;+\infty[$ est une bijection sur un intervalle J à préciser.
10°) Calculer : g(3) ; $(g^{-1})'(0)$.
11°) Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

EXERCICE : 17

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$. On désigne par ($\mathcal{C}_f$) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ;

2°) Trouver les réels a ; b et c tels que pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}.$$

3°) Étudier les limites de f puis son sens de variation.

4°) Montrer que le point I de ($\mathcal{C}_f$) d'abscisse x = 0 est centre de symétrie de ($\mathcal{C}_f$).

5°) Écrire une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) au point I.

6°) Étudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (T).

7°) Calculer $f(0{,}5)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ puis tracer ($\mathcal{C}_f$).

EXERCICE : 18

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^4-12x^3+50x^2-84x+46}{x^2-6x+9}$

1) Trouver les réels a ; b ; c ; d tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f on ait : $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{(x-3)^2}$

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que la parabole (P) d'équation : $y = x^2 - 6x + 5$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.

4) Étudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (P) ;

5) Tracer (P) et ($\mathcal{C}_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

6) Trouver une primitive F de f sur $\mathcal{D}_f$.

7) Calculer en cm^2 l'aire A de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}_f$), la parabole (P) et les droites d'équations : x = 4 et x = 5.

EXERCICE : 19

A]- Soit la famille de fonctions f_m définie par : $f_m(x) = \dfrac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$

où *m* est un paramètre réel.

1°) Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

2°) Déterminer *m* pour que, quel que soit le réel $x \neq \{0; -2; 2\}$, L'entier naturel $[f_m(x)]^2$ soit au plus égal à 1.

3°) Représenter graphiquement la fonction pour *m = 0*.

B]- Soit la fonction f_m définie par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$; où x est la variable et *m* un paramètre ; à chaque valeur de *m* correspond une courbe (C_m).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de *m*.

2) Déterminer *m* pour que le point d'intersection P de (C_m) et de l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\dfrac{3}{2}$.

3) Construire la courbe (C_0).

EXERCICE : 20 Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie A :

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$.

Déterminer les réels a ; b ; c ; d sachant que la représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$ donné :

- admet la droite d'équation : x = 2 pour asymptote ;
- n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ;
- passe par le point A de coordonnées (1 ;–2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur (–5).

Partie B :

Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x+4}{x+1}$.

1°) Étudier les variations de la fonction g.

2°) Montrer que g est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(5)$.

4°) Montrer que pour tout réel x de $[1 ; 3]$ on a : $-\dfrac{3}{4} \leq g'(x) \leq -\dfrac{3}{16}$.

En déduire que pour tout réel α de $]1 ; 3[$ on a : $\dfrac{13 - 3\alpha}{4} \leq g(\alpha) \leq \dfrac{43 - 3\alpha}{16}$.

EXERCICE : 21

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) a) La fonction f est-elle continue au point 1 ?

b) La fonction f est-elle dérivable au point 1 ?.

Interpréter graphiquement votre réponse.

4°) Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe.

EXERCICE : 22

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

a) Montrer que f admet un centre de symétrie

b) Étudier et représenter sa courbe. (on étudiera les points d'inflexion, les positions de la courbe par rapport à la direction asymptotique).

EXERCICE : 23

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Étudier la fonction f. Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet un point d'inflexion dont on précisera.

2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) de f au point $x_0 = 0$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \in [1 ; 2]$.

4) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) de f dans un repère orthonormé.

6) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée de la bijection réciproque f^{-1} de f. Définir f^{-1} en exprimant $f^{-1}(x)$.

7) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$') de f^{-1} dans le même repère.

EXERCICE : 24

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ et ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f.

1) Donner une équation de la tangente à ($\mathcal{C}$) au point $x_0 = -2$.

2) Existe-t-il un point de ($\mathcal{C}$) où la tangente à ($\mathcal{C}$) a pour pente – 5 ?

3) Déterminer les points de ($\mathcal{C}$) en lesquels la tangente à ($\mathcal{C}$) est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 4$. Vérifier que ces points sont symétriques par rapport au point S($\frac{-5}{2}$;$\frac{1}{2}$). Donner les équations des tangentes à ($\mathcal{C}$) en ces points.

Étudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à la droite ($\mathcal{D}$) : $y = \frac{1}{2}$.

EXERCICE : 25

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x$.

1) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à [0 ; $\frac{\pi}{2}$].

2) a-/ Montrer que $f'(x) = \cos x \cos 2x$.

b-/ Donner pour x ϵ [0 ; $\frac{\pi}{2}$] les signes de cosx et de cos2x. Déduisez en le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe représentative de f lorsque x ϵ [– π ; π].

EXERCICE : 26

Soit la fonction f définie sur [0 ; π] par : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\cos x - \frac{5}{2}$

1) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Etudier les variations de f' sur [0 ; π] .

c) Déduisez de cette étude que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur]0 ; π[une solution unique notée α.

d) Déterminer le signe de f' sur [0 ; π] .

2) a) Donner le tableau de variation de f sur [0 ; π] .

b) Déduisez-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE : 27

I-/ Soit la fonction f définie sur [–1 ; 1] par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de [0 ;1] on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2) Montrer que pour tout x de x de [0 ;1] on a :

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - 1|$$

II-/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4}$

1) Démontrer que pour tout x de [4 ; 6] on a :

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$$

2) Montrer que pour tout x de [4 ; 6] on a :

$$\left| f(x) - \frac{11}{2} \right| \leq \frac{3}{8}|x - 6|$$

EXERCICE : 28

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\left| x^2 - 2x - 3 \right|}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Écrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

3) Étudier la continuité de f en $x_0 = -1$ puis en $x_0 = 3$.

4) La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = -1$? puis en $x_0 = 3$?.
Interpréter graphiquement ces résultats.

5) Étudier la fonction f puis dresser son tableau de variation.

6) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet une droite $(\mathcal{D}_1)$ asymptote au voisinage de $-\infty$ et une droite $(\mathcal{D}_2)$ asymptote au voisinage de $+\infty$.

7) Tracer $(\mathcal{D}_1)$; $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 29

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}$$

1°) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.

2°) Étudier la fonction f et construire sa courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

4°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$; m étant un paramètre réel.
Indiquer le signe des solutions lorsqu'elles existent.

EXERCICE : 30

A] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

1°) Étudier la dérivabilité de f en -1 *et en* 1, donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

2°) Étudier le sens de variation de f.

3°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet deux droites asymptotes que l'on précisera.

4°) Construire la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

B] Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$.

On désigne par ($\mathcal{C}_g$) la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthogonal

1°) x étant un nombre réel , on considère les points $M(x; f(x))$ *et* $N(-x\,;\, g(-x))$.
Déterminer le milieu du segment $[MN]$. Donner une interprétation géométrique et une illustration de ce résultat.

2°) En tenant compte de la question 1°) donner une méthode de construction de ($\mathcal{C}_g$).
Construire ($\mathcal{C}_g$).

EXERCICE : 31

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i ; j).

1°) Étudier les variations de f ; et en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe ($\mathcal{C}$).

2°) a) Le point **I** (–2 ; 1) est-il un centre de symétrie pour la courbe ($\mathcal{C}$) ?

b) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe ($\mathcal{C}$) avec la droite d'équation y = 1 ?

3°) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 0. Déterminer la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à la droite (T).

4°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite (T).

5°) Soit l'équation (E) où x désigne une inconnue réelle :

(E) : (m – 1) x^2 + (4m –1) x + 4m = 0 ; m étant un paramètre réel.

A l'aide de la courbe ($\mathcal{C}$) déterminer pour quelles valeurs de m, (E) admet :

a) Zéro solution ;
b) Deux solutions négatives ;
c) Une seule solution.

6°) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{|x^2 + x|}{(x+2)^2}$ et soit ($\mathcal{C}$') sa courbe représentative dans le repère (O ; i ; j). Comment ($\mathcal{C}$') se déduit-elle de ($\mathcal{C}$) ?
Tracer la courbe ($\mathcal{C}$ ') dans le même repère que ($\mathcal{C}$).

7°) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & si \quad x \geq -1 \\ h(x) = 2x + a & si \quad x < -1 \end{cases}$

Pour quelle valeur du réel a la fonction h est-elle continue au point – 1 ?
Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction h au point – 1.

EXERCICE : 32

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{|x^2-3x|}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.

3) Trouver les réels a ; b ; c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

4) Étudier la dérivabilité de f en x = 0 puis en x = 3 et interpréter.

5) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

6) Soit (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm. Montrer que la droite (D) d'équation: y = x – 4 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$).

7) Construire la courbe ($\mathcal{C}_f$) .

8) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions réelles de l'équation : $|x^2-3x| = m(x+1)$. Résoudre l'équation pour m = 1.

EXERCICE : 33

A] Soit la fonction f définies sur [1 ;+∞[par : $f(x)=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

a) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

En déduire que f détermine une bijection de [1 ; +∞[sur [0 ;+∞[.

b) Résoudre l'équation $f(x)=b$, $b\in IR$. En déduire que l'application réciproque g de la bijection déterminée par f est définie par $g(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$.

c) Construire la courbe (C_f) de f . En déduire (C_g) celle de g .

B] Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x-1}{|x|+1}$

a) Étudier la continuité de g en x = 0

b) La fonction g est-elle dérivable en x = 0 ?

c) Étudier et construire la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé.

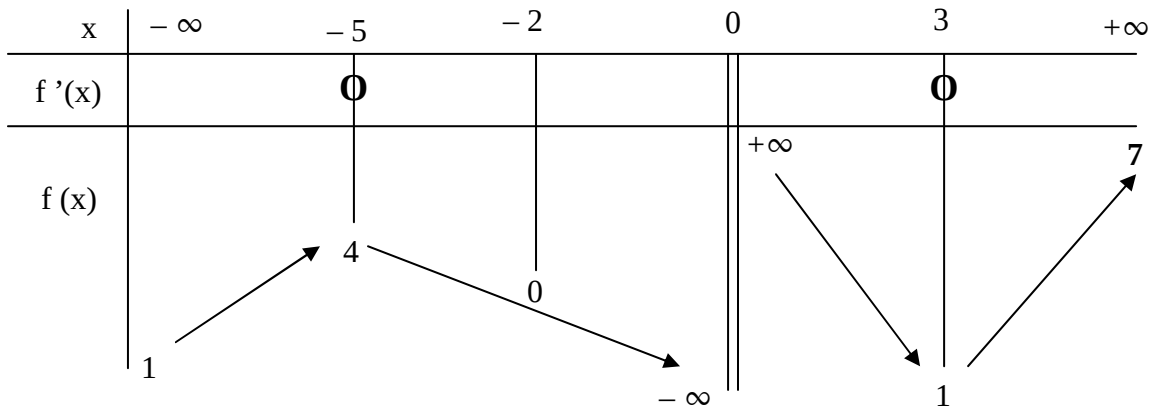
EXERCICE : 34

Soit la fonction f définie sur [-1,1] par $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

1) Montrer que si $x \in]-1 ; 0]$ alors $f'(x) > 0$.
2) Montrer que pour x $x \in [0 ,1[$ $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}+x)}$.
3) En déduire le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 1], puis donner le tableau de variation de f sur [-1,1].
4) Donner l'équation de la tangente (Δ) à ($\mathcal{C}_f$) au point x = 0.
5) Étudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (Δ).
6) Tracer ($\mathcal{C}_f$) et (Δ) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE : 35

Soit la fonction f définie par son tableau de variation ci-dessous



1°) Compléter le tableau de variation de f ci-dessus.
2°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

3°) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4°) Soient les fonctions h ; g ; k et u définies par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{f(x)} \; ; \; k(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \; ; \; u(x) = |f(x)| \; .$$

En utilisant le tableau de variation de f ci-dessus donner les ensembles de définitions respectives des fonctions : h ; g ; k et u.
5°) Donner les équations des asymptotes à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f .
6°) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.

EXERCICE : 36

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$. Soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Déterminer a et b pour que la droite d'équation y = 4x + 3 soit tangente à ($\mathcal{C}_f$) au point I (0 ; 3).

2-/ Étudier les variations de f ; puis tracer ($\mathcal{C}_f$).

3-/ Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$.

a) Étudier la parité de g ;

b) En déduire, sans nouveaux calculs, la représentation graphique de g.

On tracera la courbe (C_g) de g dans le même repère que ($\mathcal{C}_f$).

EXERCICE : 37

I-/ Soit la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f

2°) Trouver les réels a ; b et c tels que $F: x\mapsto F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+4}$ soit une primitive de f .

II-/ Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+2x+c}{2x^2+bx-1}$ passe par l'origine O des coordonnées et admette les droites d'équation $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $y=0$ pour asymptotes.

EXERCICE : 38

Partie A : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans repère orthonormé (unité graphique 1cm) .

1°) Déterminer les réels a ; b ; c tel que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{3x^2+1}$.

2°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis les limites de f .

3°) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.

4°) Dresser le tableau de variation de f .

5°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une droite ($\mathcal{D}$) asymptote que l'on déterminera.

6°) Étudier la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à son asymptote ($\mathcal{D}$).

7°) Montrer que ($\mathcal{C}$) admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées.

8°) Donner l'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse x = 0.

9°) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique ℓ dans $\mathcal{D}_f$.

Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près par excès.

10°) Tracer ($\mathcal{D}$) ; (T) et la courbe ($\mathcal{C}$) de f .

Partie B

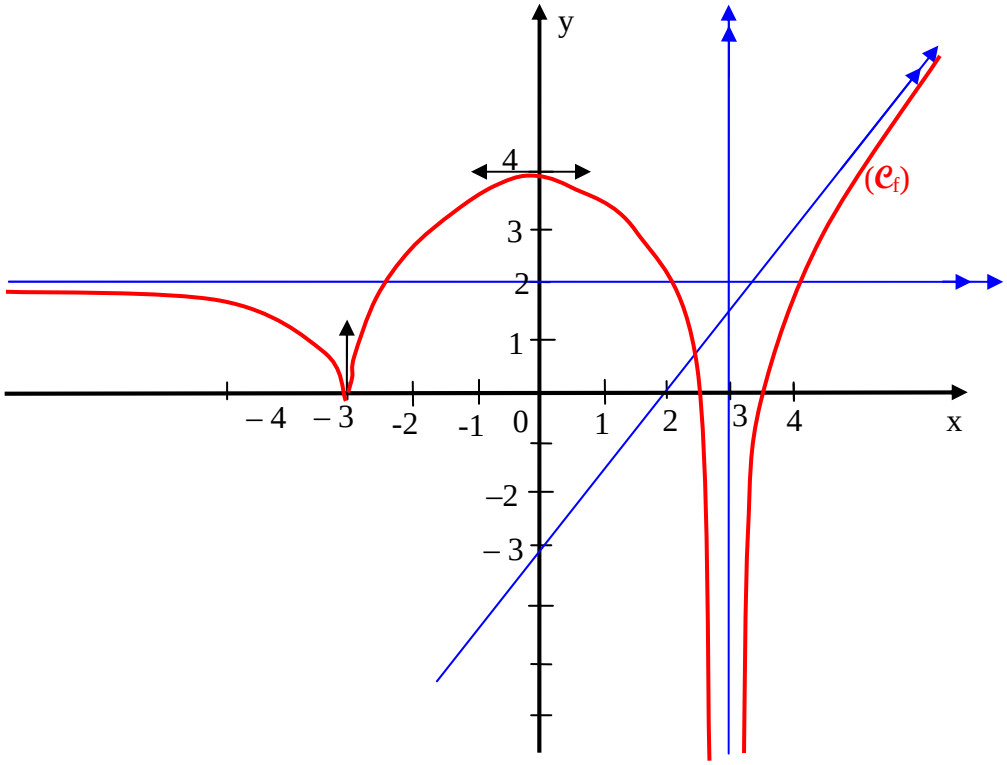
On pourra dans cette partie utiliser certains résultats de la partie A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{3(\sin x-1)^2}{3\sin^2 x+1}$.

1°) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'(x).
2°) Dresser le tableau de variation de g sur $[-\pi\,;\pi]$.
3°) Tracer sur un nouveau dessin, la courbe représentative de g.

EXERCICE : 39

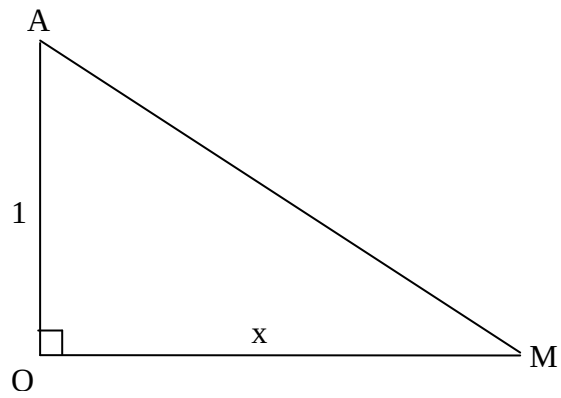
Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous



1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2°) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3°) Dresser le tableau de variation de f.
4°) La fonction f est-elle continue ; dérivable en x = –3 ? Justifier votre réponse
5°) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en x = 0.
6°) Montrer que la restriction g de f à [0;3[est une bijection de [0;3[sur une partie J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
7°) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f.
8°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

EXERCICE : 40 Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

Partie A : cette partie est composée de trois exercices indépendants.
1°) Dans la figure ci-dessous, on pose pour $x \succ 0$ $f(x) = AM$.



a) Expliciter $f(x)$
b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

Partie B :

f_a est la fonction définie par $f_a(x) = \sqrt{ax^2 + (a-2)x + 1}$ où a est un nombre réel.
On note ($\mathcal{C}_a$) la courbe représentative de f_a.

a) Montrer que toutes les courbes ($\mathcal{C}_a$) de f_a passent par un point fixe A dont déterminera les coordonnées.
b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles est f_a définie sur $\mathbb{R}$.

Partie C :

g est la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x - 4}$ *et* h est celle définie par :

$$h(x) = x^3 - 3x - 4 .$$

a) Étudier les variations de h.
b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.
c) Étudier le signe de $h(x)$.
d) Dresser le tableau de variation de g.

EXERCICE : 41

On donne les renseignements suivants sur la fonction f :

- L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty , 4[\cup]4; +\infty[$;
- $f'(x)$ est positive sur $=]-\infty , -1[\cup]4; +\infty[$ et négative sur $=]-1 , 4[$
- $f(0) = \frac{11}{4}$; $f(-1) = 3$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = f(6) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - x + 5 \,] = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$.

1°) Dresser le tableau de variation de f ;

2°) Les équations de chacune des asymptotes ;

3°) Tracer soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

PROBLÈMES ÉCONOMIQUES

EXERCICE : 01

Le coût moyen de production d'une quantité q est donné par : $C_{m_0}(q) = \frac{C(q)}{q}$;

le coût marginal de production d'une quantité q est donné par :

$$C_{m_a}(q) = C(q+1) - C(q).$$

Une entreprise produit des objets en quantité q dans un régime de concurrence parfaite. Le coût de production en milliers de francs de la quantité q est :

$$C(q) = q^2 + 100q + 100.$$

Le prix de vente p par unité lorsque la quantité produite est q est:

$$p(q) = 2q^2 - 4q + 300. \text{ On suppose } q \leq 100.$$

1) Calculer en fonction de q, le coût moyen C_{m_0} de production.

   Déterminer la production q_0 qui rend le coût moyen minimum.

2) Calculer le coût marginal à partir de la définition ; puis à partir de la dérivée du coût total. Quelles remarques peut-on faire ?.

   Vérifier que pour $q = q_0$ le coût moyen est égal au coût marginal obtenu à partir de la dérivée. Peut-on généraliser ce résultat ?.

3) Calculer, en fonction de q le revenu global puis le bénéfice réalisé.

Déterminer la production q_1 qui rend le revenu maximum.

Déterminer la production q_2 qui rend le bénéfice maximum.

EXERCICE : 02

Partie A : Soit C la fonction définie sur [0 ; 300] par $C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$.

1°) a) Calculer C'(x) ; où C' désigne la dérivée de C.

b) Établir le tableau des variations de C' sur [0 ; 300] et en déduire son signe.

2°) On rapporte le plan d'un repère orthogonal (unités : 1cm pour 50 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 750 000 unités sur l'axe des ordonnées).

On note ($\mathcal{E}$) représentative de C.

On note A le point de ($\mathcal{E}$) d'abscisse 10.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{E}$) au point A.

b) A l'aide des variations de C', préciser la position de ($\mathcal{E}$) par rapport à (T).

3°) Représenter graphiquement ($\mathcal{E}$) et (T).

Partie B

Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction $C(x)=\frac{x^3}{30}-15x^2+2500x$.

On rappelle que le coût marginal est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire ; on choisit comme modélisation de ce coût marginal: $C_m(x)=C(x)$.

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole ; ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant prix de vente unitaire p et demande x (en unités) est : $p(x)=\frac{-45}{8}x^2+2750$; (autrement dit quand *x* objets sont vendus, chacun l'est au prix p(*x*).)

1°) Calculer la recette totale R(*x*) pour *x* objets.

2°) On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire ; on modélise cette recette marginale par : $r_m(x)=R'(x)$ où R' désigne la fonction dérivée de R. pour quelle valeur de la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?

3°) Montrer que le bénéfice pour la fabrication et la vente de *x* unités est donné par :

$$B(x)=-\frac{x^3}{30}+\frac{75}{8}x^2+250x.$$

4°) a) Calculer B'(*x*) où B' désigne la fonction dérivée de B.

b) En déduire que le bénéfice est maximum quand la recette marginale est égale au coût marginal. Que vaut alors ce bénéfice maximum ?

EXERCICE : 03

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs de luxe. Chaque jour, elle produit un nombre *x* de sacs, *x* étant compris entre 0 et 10.

Le coût, exprimé en milliers de francs, de la production journalière de *x* sacs est donné par : $f(x)=x^3-7x^2+20x$.

1°) a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) En déduire le sens de variation de f

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé tel que :

- 1 cm représente 1 sac en abscisse
- 1 cm représente 40 000 Frs en ordonnées.

a) Compléter le tableau des valeurs suivantes :

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$										

c) Construire la représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f.

3°) On suppose que toute la production est vendue au prix de 14 000 F l'unité.

La recette journalière, exprimée en milliers de francs est donnée par $g(x) = 14x$.

a) Exprimer le bénéfice journalier total h(x) en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

b) Vérifier que pour tout x de [0 ; 10] $h(x) = -x(x-1)(x-6)$.

4°) a) Construire sur le même dessin, la représentation graphique de la fonction *h*.

b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle auquel x doit appartenir pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

c) Retrouver le résultat précédent par calcul.

EXERCICE : 04

A-/ soit g la fonction définie sur [0 ;+∞ [par g(x) = $x^3 - 1200x - 100$.

1°) Déterminer la limite de g en +∞. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2°) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [20 ; 40] . Donner en justifiant, une valeur approchée de α à l'unité près.

3°) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

B-/ Soit la fonction *f* définie sur] 0 ;+∞ [par $f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$. On appelle ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. (On prendra 1cm pour 5 unités en abscisse et 1cm pour 20 unités en ordonnées).

1°) Déterminer les limites de *f* en 0 et en +∞.

2°) Montrer que pour tout x de] 0 ;+∞ [on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ où g est la fonction définie dans la partie A-/.

3°) Étudier les variations de *f*.

4°) Montrer que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation y = x + 50 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$).

5°) Construire ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{D}$) sur le même graphique.

6°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera des valeurs approchées des solutions à l'unité près.

C-/ Le coût de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimé en centaines d'unités est définie sur]0 ;100[par $C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x^2}$. C($x$) étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est donc défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1°) Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.

2°) On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 1300 euros. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

EXERCICES PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 01 :

Trouver une primitive de chacune des fonctions f définies par

1°) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4$; 2°) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x$

3°) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$; 4°) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$

5°) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3$; 6°) $f(x) = (6x+3)(x^2 + x + 1)^4$

7°) $f(x) = 5x\,(x^2 + 1)^6$; 8°) $f(x) = 3x^2\,(x^3 + 1)^5$

9°) $f(x) = 7x^2\,(x^3 + 5)^3$; 10°) $f(x) = x\,(x^2 - 4)^2$

11°) $f(x) = (5x + 1)^7$; 12°) $f(x) = (-3x+2)^4$

13°) $f(x) = (x - 4)^3$; 14°) $f(x) = (5 - 2x)^6$

15°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2 + x - 3)^3}$; 16°) $f(x) = \dfrac{3}{(5x-1)^2}$

17°) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^4}$; 18°) $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2 - 9)^5}$

19°) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^3}$; 20°) $f(x) = 5 + x + \dfrac{4}{(x+1)^2}$

21°) $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+2)^3}$; 22°) $f(x) = -x^2 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{2}{(x+3)^2}$

23°) $f(x) = \dfrac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2}$; 24°) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 1}{3x^2}$

25°) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2}$; 26°) $f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5 (3x^2 - 7)$

27°) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; 28°) $f(x) = \sin x \cos^4 x$

29°) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$; 30°) $f(x) = \cos x \sin^4 x$

31°) $f(x) = \sin 3x$; 32°) $f(x) = \sin(4x + \dfrac{\pi}{3})$

33°) $f(x) = 4\cos 2x$; 34°) $f(x) = \cos(6x + 2)$

34°) $f(x) = \cos 3x + 6\sin 3x - \sin x \cos^3 x$; 35°) $f(x) = \cos^5 x$

36°) $f(x) = 10\sin 5x + 12\cos 4x - 3\sin(6x - \dfrac{\pi}{6})$; 37°) $f(x) = \sin^4 x$

EXERCICE 02:

1- Calculer les intégrales suivantes

$A=\int_{-3}^{2}(x^4-5x^2+3)dx$; $B=\int_0^1(x+3)(x^2+6x+4)^2dx$; $K=\int_0^1 (x+1)^n dx$; $L=\int_0^1 (3x+1)^5 dx$

$C=\int_1^2 \frac{4x^3-3x^2+1}{5x^2}dx$; $D=\int_0^2(2x+1)^3dx$; $E=\int_1^2 \frac{3x+6}{(x^2+4x+3)^4}dx$; $T=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

$F=\int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4}dx$; $G=\int_2^3(3x^2-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x})dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; $K=\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$; $H=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$

$L=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x\,dx$; $N=\int_0^1 x(x^2+1)^5dx$; $P=\int_{-2}^1 \sqrt{x+3}\,dx$; $D=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)dx$

$Q=\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; $R=\int_0^{\frac{\pi}{3}} cox(2x+\frac{\pi}{3})dx$; $U=\int_0^1 (x+e^x)dx$; $K=\int_{-1}^0 (x^2+x)e^{2x}dx$

$V=\int_0^1 \frac{3x}{x^2+4}dx$; $W=\int_1^2 \frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}dx$; $X=\int_0^{\pi}\cos x(1-3\sin^2 x)dx$; $W=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{\cos(x)}dx$

$I=\int_1^2 (\sqrt{3x-2})dx$; $J=\int_1^2 x(x^2-3)dx$; $L=\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$; $L=\int_{-1}^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx$;

$A=\int_3^5 \left(2x-1+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$; $B=\int_0^1 (\frac{x}{\sqrt{x+1}})dx$; $E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^5 x\,dx$; $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x\,dx$;

$M=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\sin^3 x\,dx$; $N=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; $P=\int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$; $Q(x)=\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+3)^3}dx$;

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\cos x+1)^2dx$; $T=\int_0^3 |x^2-3x+2|dx$; $P=\int_{-3}^4 |x^2-2x-3|dx$; $K=\int_{-1}^4 (|x^2-2x|+3)dx$

$D=\int_{-4}^1 (|x+3|+|2x-1|)dx$; $T=\int_{-5}^7 (|x+3|+2|x^2-3x+2|)dx$; $G=\int_0^5 (|2x-5|+|x-3|)dx$;

$U=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t\cos 4t\,dt$; $Y=\int_{-1}^3 (x\,|x^2-x-2|)\,dx$; $Z=\int_1^2 \left(\frac{e^x}{x}+e^x\ln x\right)dx$.

EXERCICE 03:

En utilisant la formule d'intégration par parties calculer les intégrales

$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $J=\int_0^1 x^2e^x dx$; $M=\int_0^1(-2x^2+x+1)e^x dx$; $I=\int_1^2 x\sqrt{2x+1}\,dx$

$P=\int_0^1 (x+1)\sqrt{2x+1}dx$; $T=\int_1^x \ln t\,dt$; $S=\int_e^{2e} x\ln x^2 dx$; $P=\int_1^2 x\ln x\,dx$;

$C=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$; $H=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; $F=\int_1^e (t^2+3)\ln t\,dt$; $I=\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$;

$H=\int_0^1 t^2e^t dt$; $J=\int_0^{\pi}(3t^2-t+1)\sin t\,dt$; $R=\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; $V=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin^2(3x)\,dx$

$K=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\cos(2x)dx$; $J=\int_0^1 (x+2)e^x dx$; $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x\,dx$.

EXERCICE 04:

Soient la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^3+5x^2-4x-7}{(x+2)^2}$

1°) Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+2)^2}$

2°) Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\dfrac{5}{2}$ en 0.

3°) En déduire $I=\int_2^3 f(x)\,dx$.

EXERCICE 05:

Soit Soient la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$

1°) Trouver les réels a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

2°) En déduire $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.

EXERCICE 06:

1°) Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$.

a) Trouver les réels a et b tels que pour tout x≠ -1 , $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

b) En déduire le calcul de $I=\int_0^3 \dfrac{2x+5}{(x+1)^2}dx$.

2°) Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

a) Trouver les réels a , b et c tels que pour tout x≠0 , $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

b) En déduire le calcul de $J=\int_1^3 \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$.

3°) Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Trouver les réels a et b tels que , $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}$

c) En déduire le calcul de $K=\int_0^2 \dfrac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$.

EXERCICE 07:

1°) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x\,dx$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x\,dx$

a) Calculer I + J puis I – J

b) En déduire les valeurs de I et de J.

2°) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout réel strictement positif x on ait : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

3°) Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}dx$; en déduire en utilisant l'intégration par partie le calcul de $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x)}{x(x^2+1)}dx$

4°) Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

a) Calculer I_0

b) Pour tout entier naturel n, en utilisant une intégration par parties,

c) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire I_4.

EXERCICE 08:

Pour tout entier naturel n >0 ; on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x}\,dx$ *et* $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x}\,dx$

1°) a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2°) Comparer x^{n+1} *et* x^n lorsque $0 \le x \le 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3°) a) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$.

b) Etudier la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

4°) a) Démontrer que, pour tout nombre x de [0 ; 1] on a :

$$0 \le 2 - \sqrt{x+3} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$$

b) Déduisez du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (nI_n).

EXERCICE 09:

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

On se propose de calculer : $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,dx$, où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

1°) Quel est le signe $I(\lambda)$?

2°) Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout réel *x*, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$

3°) Calculer $J(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+e^x}\,dx$

4°) f' étant la fonction dérivée de f, calculer $f + f'$

5°) Calculer $I(\lambda)$.

EXERCICE 10:

Soit *f* une fonction numérique continue sur [0 ;1] et telle que pour tout x de [0 ;1] $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. Soit F une primitive de *f* sur [0 ;1] .

1°) Prouver que : $F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$.

2°) En déduire que : $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

3°) En déduire que : $\int_0^1 [f(x)]^2\,dx \geq \frac{1}{3}$.

4°) Soit h définie par $h(x) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

Démontrer que pour n élément de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq h(x) \leq \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 11:

1) Soit la fonction *f* continue sur [0 ;1] telle que,

pour tout réel x de [0 ;1] on a : $\frac{1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que : $\ln 1{,}5 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \ln 2$.

2) Pour tout entier naturel n on donne $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$

a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ (on remarquera que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x^n \sin(\pi x) \leq x^n$)

b) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} (n^2 I_n)$.

EXERCICE 12:

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{\left|x^2-2x\right|+1}$ et *m* un réel supérieur à 2.

Calculer $\int_1^2 f(x)dx$, *puis* $\int_1^m f(x)\,dx$.

Quelle est la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle [1; *m*].

EXERCICE 13:

Pour tout entier naturel non nul n, on définit : $I_n=\int_1^e(\ln x)^n\ dx$.

1-/ a/ justifier l'existence de cette intégrale.
b/ Calculer I_1.
c/ Démontrer la relation : pour n $\geq$2, $I_n=e-nI_{n-1}$.
(on pourra effectuer une intégration par parties).
2-/ l'entier naturel non nul n étant fixé, on note F_n une primitive de la fonction $x\mapsto(\ln x)^n$ sur l'intervalle]0 ;+∞[.

a/ Démontrer que la fonction $t\mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa fonction dérivée.
b/ En déduire les propriétés suivantes :

- Pour tout entier naturel non nul $I_n=F_n(e)-F_n(1)=\int_0^1 t^n\,e^t\,dt$.
- Pour tout entier naturel non nul $0\leq I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$

Indication : pour la deuxième propriété, encadrer d'abord t^ne^t sur [0 ; 1].

EXERCICE 14:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la fonction

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x\dfrac{e^t}{1+e^t}dt$

1°) Indiquer sans calcul $f'(x)$ *et* $f(0)$;

2°) Etudier les variations de f ;

3°) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x)=x+\ln\left(e^{-x}+1\right)-\ln 2$

En déduire que la droite d'équation : $y=x-\ln 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) de f.

4°) Construire dans le plan la courbe (C_f) de f.

EXERCICE 15:

Le but de l'exercice est de montrer que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'est pas un nombre rationnel.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{1-x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ d'unité graphique 4cm.

1-/ Etudier les variations de f ; on précisera les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2-/ Construire la courbe (C_f) dans le plan.

3-/ Utiliser une intégration par parties pour calculer : $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Quelle est l'interprétation géométrique de I_1.

Partie B :

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx$.

1-/ a/ Montrer que $x^n \le x^n\, e^{1-x} \le e\,x^n$, pour tout x de [0 ;1].

b/ Exprimer en fonction de l'entier n : $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

c/ Déduire de a/ et de b/ que l'on a : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ pour n≥1.

2-/ Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout n≥1 on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

3-/ Pour tout entier n≥1 on pose $k_n = n!e - I_n$.

a/ Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n.

b/ Calculer k_1 (on pourra utiliser la 3ème question de la partie A).

En déduire, en procédant par récurrence sur n, que k_n est un nombre entier pour n≥1.

c/ Utiliser le b/ et le 1-/ c/ pour montrer que, quelque soit l'entier n≥ 2, le nombre $(n!\times e) = k_n + I_n$ est un entier.

4-/ a/ Soit p et q deux nombres entiers strictement positifs.

Montrer que, pour n ≥q, le nombre $\frac{n!\,p}{q}$ est un nombre entier.

b/ En déduire, à l'aide du 3-/ b/ et 3-/ c/ que e n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 16:

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$. (on indique que $\sin^n x = \sin^{n-1} x \times \sin x$)

1°) Calculer I_0 *et* I_1.

2°) Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3°) A l'aide d'une intégration par parties de I_n démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4°) a) Calculer I_9 ; I_{10} *et* I_{11}

b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

EXERCICE 17:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$.

1°) A l'aide d'une intégration par parties trouver une relation entre I_n *et* I_{n-1}

2°) Calculer I_0.

3°) Calculer I_n.

EXERCICE 18:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} dx$

1°) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{a\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{b\cos(x)}{1+\sin(x)}$.

En déduire le calcul de $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx$.

2°) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 19:

On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \ dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \ dx \ ; \ K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x \ dx$$

1°) Calculer $I - J$ *et* $I + J + K$.

2°) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ *et* $\sin x$.

En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de I ; J ; K.

EXERCICE 20:

On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$ et $I_2 = I_1 + I$.

1°) Calculer I_2

2°) Calculer I_1

3°) En déduire I.

EXERCICE 21:

On considère les intégrales définies $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.

1°) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$.

c) Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$.

2°) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $J - I = 0$

c) En déduire les valeurs des intégrales I et J.

EXERCICES SUR LA FONCTION LOGARITHME

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x-2)+\ln(x+1)=\ln(3x-5)$; $\ln(2x-5)=0$.

b) $2\ln(x-2)+\ln(3x+1)=2\ln 2$; $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 5+2\ln 3$.

c) $\ln|x+1|+\ln|x-5|=\ln 16$; $\ln|6-x|=1$.

d) $\ln(-x-1)=\ln\left(\dfrac{-x-10}{x+2}\right)$; $\ln x-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{15}{4}$.

e) $6\ln^2 x+7\ln x-3=0$; $\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2=0$.

f) $2\ln(2x-1)-\ln(3x-2x^2)=\ln\left(\dfrac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(x+2)+1=\ln(x-1)+\ln 2$.

g) $2\ln x=\ln 2+\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})+\ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

h) $(\ln x)^2-7\ln x+6=0$; $2(\ln x)^2-3\ln x+1=0$.

i) $\log x+\log(3-x)=\log 5$; $\log_3^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}+\log_9^{(4x+15)}=0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x^2-10x+9)\geq\ln(3x-27)$; $\ln[x(3-x)]\leq\ln 2$

b) $\ln(5x^2+6x+1)>0$; $2(\ln 2x)^2-5\ln 2x-3\leq 0$

c) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right)\leq 0$; $\ln(x+5)+\ln(x+4)\leq\ln(x+13)$

d) $\ln x+\ln(2-x)+\ln(x+4)\geq\ln(5x)$; $\ln^2 x+2\ln x-15<0$

e) $\ln x-\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{8}{3}$; $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln 3x$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x+\ln y=6\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ln x-3\ln y=9 \\ \ln x+5\ln y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^3y^4)=6 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{y^5}\right)=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln y=\ln x+2 \\ xy=9e^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3+\ln y^2=3 \\ \ln y^2-\ln x^2=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3-\ln y^2=-4 \\ \ln x+\ln y^4-1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=29 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=4e \\ \log x+\log y=2+\log 3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=243 \\ \log_x^y+\log_y^x=\dfrac{17}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} xy=256 \\ \log_y^x+\log_x^y=\dfrac{50}{7} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \ln(x-2)+3\ln(y-1)=0 \\ 2\ln(x-2)-\ln(y-1)=4 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(\sin x)+\ln(\cos x)=\ln\sqrt{3}-\ln 4 \\ 2(\sin x+\cos x)=\sqrt{3}+1 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)=9 \\ \ln(xy^5)=\dfrac{-17}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+1}-3\log_2^y=-11 \\ 2^{x+2}+7\log_2^y=43 \end{cases}$

EXERCICE 2

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$

2°) Déterminer les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2x+1+\ln(3x-12)$; b) $f(x)=x^2\ln(-x^2+6x-5)$; c) $g(x)=\ln(3x-6)+\ln(x+4)$

d) $g(x)=x\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$; e) $g(x)=x+1+\ln\left(\dfrac{2x-4}{-x+5}\right)$; f) $g(x)=\ln|-3x+12|$; g) $g(x)=\ln|x^2-16|$

h) $p(x)=\ln|-x^2-3x+4|$; i) $q(x)=-3x+1+\ln\left|\dfrac{x+3}{-x+5}\right|$; j) $r(x)=x^2-3+\ln|3x-21|$.

k) $S(x)=x^2\ln\left(\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right)$; L) $T(x)=3x+2-\ln(\sqrt{-x^2+3x-2})$; m) $u(x)=\sqrt{3-\ln x}$

n) $v(x)=\dfrac{x-5}{\ln^2 x-4\ln x+3}$; o) $i(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-5x+6}{-x^2+7x+8}\right)$; p) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} \\ f(0)=-1 \end{cases}$

q) $\begin{cases} f(x)=x\ln(3-\ln x) \quad si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; r) g(x) $=\dfrac{\ln(x^2-5x+4)}{\ln(x^2+7x+10)}$; s) h(x)= $\ln(x^2-1)-\ln(2x^2-8)$.

3°) Soient les fonctions $f: x\mapsto f(x)=\ln x$ et $g: x\mapsto g(x)=\ln(x+2)+1$.

a) Ecrire $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Déterminer les ensembles de définition de f et de g .

c) à partir du tableau de variation de f déduire celle de g.

EXERCICE 3 :

A) On considère la fonction g définie par $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x)=-x+3+\dfrac{\ln x}{x}$.

1°) Etudier les variations de f.

2°) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (**Δ**) d'équation y = –x+3 comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (**Δ**).

3°) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (**Δ**). Donner une équation de cette tangente.

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0\ ;\ 1]$; puis une solution unique β dans [3 ; 4].

5°) Tracer (Cf) et (**Δ**) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

6°) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (**Δ**) et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \ln|x|$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.
Déterminer les limites de f aux bornes de Df.

2°) Calculer $f(-1)$ *et* $f(1)$; étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec la droite $(\mathcal{D})$ d'équation y = x.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\ ;1]$.

5°) En déduire le signe de $f(x)$ dans Df.

6°) Tracer sa courbe représentative (Cf) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

7°) Déterminer en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations x = 1 et x = e.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]0\ ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x - 3x\ln x$.

1°) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? Si oui déterminer son prolongement g.

2°) Déterminer l'intervalle **I** de définition de g.

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.

4°) a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
b) Montrer que dans [1 ; 2] $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α.

5°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ puis interpréter.

6°) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

EXERCICE 6 :

I) Soit f l'application de $]-1\ ; 5]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 1 - \ln(x+1)$.
On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm.

1°) Etudier le sens de variation de f et la limite de f quand x tend vers (–1).
Donner le tableau de variation de f.

2°) a) Calculer les images par f des réels : 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. En donner une valeur approchée à 0,1 près.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse : $\dfrac{-1}{2}$.

3°) Construire (T) et (Cf).

II) – On appelle D l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$0 \le x \le 5 \quad ; \quad 1 \le y \le f(x).$$

A] 1°) f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Etudier le sens de variation de f' et donner son tableau de variation.

b) En déduire, pour x $\in$ [0 ; 5] : $0 \leq f'(x) \leq \frac{5}{6}$.

2°) En appliquant l'inégalité des accroissements finis au segment [0 ; x],

établir que : $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{6}x + 1$.

3°) a) Tracer la droite d'équation : $y = \frac{5}{6}x + 1$.

b) Déduire de ce qui précède une majoration de l'aire de D.

B] On appelle $\mathcal{A}$ l'aire de D, en cm^2.

1°) Exprimer $\mathcal{A}$ à l'aide d'une intégrale.

2°) Donner la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

En déduire $K = \int_0^5 \ln(x+1)dx$.

3°) Calculer $\mathcal{A}$; en donner une valeur approchée à 1 cm^2 près par défaut.

EXERCICE 7 :

A] Soit $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1°) Etudier la fonction g ;

2°) a) Calculer $g(1)$;

b) En utilisant le tableau de variation de g, déduire que : $g(x) > 0 \ \forall x \in]0;1[$

B] Soit $f(x) = \frac{-1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f.

b) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de Df : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

d) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

2°) Soit (Cf) la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. Soit D la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $h(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)$ et en déduire la position de (Cf) par rapport à D.

b) Soient respectivement M et N les points de même abscisse x de (Cf) et D. Calculer la distance MN en fonction de x. Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

c) Construire (Cf) et D.

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction U définie par $U(x) = (\ln x)^2$

b) En déduire l'aire A du domaine plan limité par (Cf) la droite D et les droites d'équations : x = 1 ; $x = e^2$.

EXERCICE 8:

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ (Unité graphique : 2 cm).

1°) a) Prouver que pour tout réel t ≥ 0 on a : $1 - t \le \dfrac{1}{1+t} \le 1$.

b) En déduire que ∀x >0, $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ (1).

2°) Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$

a) Calculer $g'(x)$

b) Prouver que pour tout nombre réel x ≥0 : $0 \le g'(x) \le \dfrac{x^2}{4}$

c) En déduire que pour tout nombre réel x ≥0 : $0 \le g(x) \le \dfrac{x^3}{12}$ (2).

3°) Etude des variations de f .

a) Calculer $f'(x)$ pour x >0.

b) Etablir que pour x ≥0 on a : $g(x) \le \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

Grâce à (2) établir le sens de variation de f .

4°) a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞.

b) à l'aide de (2) montrer que pour x ≥0 on a :

$x - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{2x}{2+x} \le x - \ln(1+x) \le x - \dfrac{2x}{2+x}$. puis $\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{x}{12} \le \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \le \dfrac{1}{x+2}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et en déduire que $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

d) Soit T la tangente à (Cf) en $x_0 = 0$.

En utilisant (1) montrer que (Cf) est au-dessus de T pour x ∈ IR_+^*.

5°) Dresser le tableau de variation de f . Tracer (Cf) et T dans le même repère.

EXERCICE 9:

Partie A : On considère la fonction g définie sur]0 ; + ∞ [par : $g(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1}$.

1°) a) Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x ε, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

b) Etudier le signe de g'(x) selon les valeurs de x.

2°) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ *puis* $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel α > 0 tel que g (α)=0.
Vérifier que 0,5< α < 0,6.

4°) Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur]0 ;+ ∞[.

Partie B : On considère la fonction f définie sur]0 ;+ ∞[par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x^2}) & si\ x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 5cm.

1°) a) Montrer que pour tout x ∈]0 ;+ ∞[, on a f '(x)= g(x).

b) En déduire les variations de f sur]0 ;+ ∞[.

2°) Calculer $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$; en déduire que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3°) a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x^2}) = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
Préciser la tangente à la courbe (Cf) en x=0.

4°) a) Prouver que, pour tout élément x de [0,5 ; α] ; 0 ≤ f '(x) ≤ f '(0,5).

b) En déduire que, pour tout élément x de [0,5 ; α] :

$$0 \le f(\alpha) - f(0,5) \le (\alpha - 0,5) f'(0,5) \quad puis\ que \quad 0 \le f(\alpha) - f(0,5) \le \frac{1}{10} f'(0,5).$$

d) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5°) Dresser le tableau de variations de f . Tracer la courbe de f .

6°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équations x = 0 et x = 1.

EXERCICE 10:

Partie A : On considère la fonction g définie sur]0 ; + ∞ [par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1°) Etudier le sens de variations de g.

2°) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans] 0 ; + ∞ [.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

3°) Déduire le signe de $g(x)$ sur]0 ;+ ∞[.

Partie B : On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$$

On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité Graphique 2 cm.

1°) Etudier les limites de f en 0 et en +∞ puis interpréter graphiquement ces limites.

2°) a) Montrer que, pour tout x de]0 ; + ∞[, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Montrer que, $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .

3°) Construire la courbe (Cf) de f .

Partie C : On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\begin{cases} 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

1°) Montrer que, pour tout x ≥1 : $\frac{\ln x}{x^2} \le f(x) \le \frac{\ln x}{x}$.

2°) a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$;

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3°) a) Déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$.

b) Exprimer A en fonction de K, puis déduire une valeur approchée de A en cm^2.

EXERCICE 11:

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1°) Après avoir montré que, pour tout x réel $x \neq \ln x$, préciser l'ensemble de définition de la fonction f . Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

2°) Etudier les variations de cette fonction en précisant éventuellement les asymptotes.

3°) Construire la représentation graphique des variations de la fonction f dans le plan rapporté à un repère. (On donnera l'équation de la tangente au point d'abscisse x = 1).

EXERCICE 12:

Soit la fonction P définie par $P(x)=(1+\dfrac{1}{x})\ln(1+x)$.

1°) h désigne la fonction numérique définie par : h(x) = x – ln(1+x).

Etudier le sens de variation de h et le signe de h(x).

2°) Quelle est l'ensemble de définition de P noté D_P ?

Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$; $\lim\limits_{x\to-1} P(x)$.

On désigne par F l'application de $D_P \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} F(-1)=0 \\ F(x)=P(x) \quad pour \quad x\in D_P \end{cases}.$$

Etudier la dérivabilité de F en x = –1.

3°) Quelle est la limite de P(x) quand x tend vers 0 ?

On désigne par f l'application de $D_P \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=F(x) \end{cases} \quad \text{Pour } x \in D_P \cup \{0;-1\} \ ;$$

4°) Etudier les variations de f en utilisant en particulier la question 1°).

Construire la courbe représentative de f .

EXERCICE 13:

1°) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x)$$

b) Étudier les variations de la fonction g définie sur [0 ; +∞[par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

c) Déduire des questions précédentes que, pour tout nombre réel *x* strictement positif,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \quad (1)$$

d) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x(x+2)}{2(x+1)} < x$. (2).

2°) a) Déduire de (1) et (2) que pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{1+y} < \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y}.$$

b) Déduire de (1) et (2)que pour tout $z > 0$,

$$\frac{z-1}{z} < \ln z < z-1.$$

3°) Utiliser l'un de ces encadrements pour encadrer lna dans chaque cas suivant :

a = 0,5 ; a = 0,8 ; a = 0,98 ; a = 1,02 ; a = 1,5.

EXERCICE 14:

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln x\right)$ et construire sa courbe représentative Cf dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

1°) Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en +∞.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1{,}30 \le \alpha \le 1{,}35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Etudier les limites de f en 0 et en +∞.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f.

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en +∞ à la courbe Cf.

b) Déterminer le point d'intersection A de Cf et (Δ) ; préciser la position de Cf par rapport à la droite (Δ).

c) Construire la courbe Cf et la droite (Δ), en précisant la tangente en A à Cf.

EXERCICE 15:

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\frac{1}{2} ; 1]$.
3) Donner un encadrement α de par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel.
4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

B) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Étudier les limites de f en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f.
3) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
4) En utilisant l'encadrement de α trouvé au A) 3°) montrer que :
$$1{,}6 < f(\alpha) < 2{,}1.$$

C) soit les points M(x ; y) et M'(x' ; y') dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
2) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe (Cf) est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$
3) Étudier la position relative de (Γ) par rapport à (Cf).

D) On considère un réel m supérieur à 1.

Soit h la fonction définie sur [1;+∞[par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1) Démontrer que H définie sur [1;+∞[par $H(x) = -\frac{1+\ln x}{x}$ est une primitive de h.
2) On désigne par A(m) l'intégrale $\int_1^m [2x - f(x)]dx$. Calculer A(m).
3) Déterminer si elle existe la limite de A(m) quand m tend vers $+\infty$.

EXERCICE 16:

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

1) Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition. On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Préciser les asymptotes à la courbe (Cf) de f. En particulier on établira l'existence d'une asymptote oblique ($\mathcal{D}$).
2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à ($\mathcal{D}$).
4) Construire la courbe de f.

EXERCICE 17:

A/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln\left|x^2 - 2x - 3\right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Ecrire f(x) sans valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de la courbe de f.
5. Tracer la courbe représentative (Cf) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

B/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \quad et \quad f(0) = 0$$

1. Etudier le signe de $f'(x)$
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Quelle est la demie tangente en $x_0 = 0$?
4. Donner l'équation de la tangente (T) en $x_0 = e$.
5. Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.
6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$.
   a) Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f.
   b) Calculer l'aire A(λ) de la portion du plan comprise entre ($\mathcal{C}_f$) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ $(0<\lambda<1)$; x = 1.
7. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$.

EXERCICE 18:

Pour *m* réel on considère la famille de fonctions f_m définie par

$$f_m(x) = x + \ln\sqrt{x^2 + mx + 1}$$

1. pour m = 2 étudier les variations de f_m

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de m, noté V_m pour que f_m soir définie sur □.

3. Montrer que les courbes (C_m) des fonctions f_m passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

4. Pour *m* = 0, on considère la fonction f_0

a) Etudier les variations de la fonction f_0.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_0 sur son ensemble de définition.

5. a) Montrer que la courbe (C_0) de f_0 admet deux points d'inflexion dont on donnera leurs coordonnées.

b) Etudier les branches infinies de (C_0) ;

c) Tracer la courbe (C_0) dans le plan muni d'un orthonormé.

6. Soit la fonction F définie par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\ln(x^2 + 1)$

a) Quel est son domaine de définition ?

b) Montrer que l'on a : $F'(x) = f_0(x) + \frac{x^2}{x^2 + 1}$;

c) Soit h une primitive de la fonction u telle que : $U(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ vérifiant

h'(*x*) = U(*x*) et h (0) = 0 ; h(1) = $\frac{11}{4}$. En déduire une primitive de la fonction f_0

(On montrera que : F'(*x*) = f_0(*x*) + 1 – U(*x*)). Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C_0) l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = 0 et *x* = 1.

7. Pour m ∈ V_m, on considère la droite (D_m) d'équation *y* = *x* + *m*.

a) Montrer que pour tout m de V_m et *m* >0 l'intersection de (C_m) et (D_m) contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées ; on les notera M_m et M'_m.

b) Montrer que les points M_m et M'_m sont symétriques par rapport à un point I_m

c) Que se passe-t-il si on fait tendre *m* vers 0 ?.

EXERCICE 19:

Partie A :

On considère la fonction f définie sur]-1;+ ∞[par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ;
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans]1;+ ∞[une solution unique α. Vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut est 3,9.
4. Préciser suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur]0;+ ∞[par : $g(0) = 0$ *et* $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ *si* $t \succ 0$.

1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de g au point t = 0.
2. Montrer que pour tout réel t strictement positif on a : $g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} f(t)$.
3. a) Calculer la limite de g en + ∞.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$.

On prendra pour unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées. Construire la courbe (**Γ**) de g.

Partie C :

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire A, en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation : x = 1.

1. a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur [0; + ∞[par : $g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0.

b) Soit **φ** la fonction définie sur [0; + ∞[par $\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

Montrer que **φ** est dérivable en tout point de l'intervalle [0; + ∞[et que **φ**'(x)= g(x).

2. Déduisez des questions précédentes que : $A = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

et K la fonction définie sur l'intervalle I = $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ par : $K(\theta) = \tan^2\theta$ et

$$h : x \mapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt .$$

a) Calculer $(h \circ k)(\theta)$;

b) Prouver que, pour tout θ ∈ I, $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2\theta$.

c) Ecrivez $\tan^2\theta$ sous la forme $(\tan^2\theta + 1) - 1$ puis déterminer une primitive de $(h \circ k)'$. Donner l'expression de $(h \circ k)$.

d) Calculer h(1).

4. Déduisez des résultats précédents la valeur exacte de A.

EXERCICE 20:

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n ; n $\in \mathbb{N}^*$ définies sur l'intervalle]0 ;+∞[par : $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$. La courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm est notée (C_n).

A) Etude des variations de f_n ; n $\in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction g_n définie sur]0 ; +∞[par

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

a) Etudier le sens de variation de g_n et préciser ses limites en 0 et en +∞.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n ; et que α_n appartient à [1 ;3].

2°) a) Etablir que, pour x $\in$]0 ; +∞[: $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

3°) a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en +∞.

b) Montrer que la droite (D_n), d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe (C_n), puis étudier la position de (C_n) par rapport à (D_n) sur l'intervalle] 0 ; +∞[.

B) Etude des cas particuliers n = 1 et n = 2.

1°) α_n étant le nombre définie en A) 1°) montrer que :

- Pour n = 1, $\alpha_1 = 1$; Pour n = 2 ; $1{,}2 < \alpha_2 < 1{,}3$.

2°) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus montrer que $f_2(\alpha_2) \geq -1{,}24$. En utilisant le sens de variation de f_2, montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1{,}10$.

3°) Donner les tableaux de variations de f_1 *et de* f_2.

4°) Représenter dans le même repère les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

C) Etude des positions relatives des courbes (C_n).

1°) Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x de l'intervalle]0 ; +∞[, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers + ∞.

2°) Soit d la fonction définie sur]0 ; +∞[par $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Etudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en +∞.

b) Déduire de la question précédente que l'équation *d(x) = 0* admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle]0 ; 1[.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a $f_n(\beta) = \beta$.

3°) A l'aide des résultats obtenus dans les questions C) 1°) et 2°), établir que toutes les courbes (C_n) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour n $\in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}).

EXERCICE 21:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2°) Démontrer que pour tout x de D_f $\quad f(x) > x + |x|$.

3°) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.

4°) Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative (C_f).

5°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

a) résoudre l'équation $g(x) = -\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

b) Démontrer que g est une fonction impaire ;

c) Etudier g et tracer sa courbe (Cg).

d) Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; et que pour tout entier relatif n, $g\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = n$.

EXERCICE 22:

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1°) Étudier les variations de la fonction f ;

2°) Construire la courbe (Cf) de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 10cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

3°) On note λ un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x\, dx$;

b) En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\, dx$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer la limite ℓ de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+.

4°) Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à 2 on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur]0 ;1] ; démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \le p \le n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \le \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n$, puis que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 23

Une entreprise fabrique un produit en quantité x, exprimée en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication est donné par : $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln(x+1)$

pour $x \in [0 ; 5]$. Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A-/ Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction f définie sur [0 ; 5] par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1)$.

1°) Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.

2°) Établir le tableau de variation de f sur [0 ; 5].

3°) En déduire que f s'annule sur [0 ; 5] pour une valeur unique ℓ.

4°) Déterminer des résultats précédents le signe de f sur [0 ; 5].

B-/ Étude d'un coût moyen C_m.

La fonction coût moyen est définie sur [0 ; 5] par : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$

1°) Calculer $C_m'(x)$. Vérifier que l'on peut écrire $C_m'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question A-/.

2°) Étudier le sens de variation de C_m sur]0 ; 5].

3°) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal exprimé en francs par tonnes ? Quel est ce coût ?

EXERCICE 24 :

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production en francs, de q objets est donné par la fonction C(q) = 20 ln(3q+1).

1°) Déterminer le coût de fabrication de 5 objets, de 10 objets.

On arrondira le résultat au centimètre près.

2°) Quel est le nombre d'objets fabriqués sachant que le coût de production s'élève à 90,22F ?

3°) Etudier les variations de C et construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) pour q variant de 0 à 50.

4°) Chaque objet est vendu à 3 F

a) Exprimer la fonction bénéfice B en fonction de q.

b) Calculer B (5) ; B(10) ; puis B(40).

c) En utilisant le graphique, déterminer la quantité minimale d'objets que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire en supposant qu'elle vend toute sa production.

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1

I – résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{5x+1} = e^{3x+2}$; 2) $e^{x^2+2} = e^{3x}$; 3) $e^{x^2} = 4$; 4) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3$

5) $\frac{e^x}{e^3} = e^5$; 6) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; 7) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$;

8) $e^x - 10e^{-x} = 3$; 9) $e^{2(x+1)} - 8e^{x+2} - 9e^2 = 0$; 10) $3^{2x+2} + 26.3^x - 3 = 0$;

11) $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$; 12) $\frac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^x} = 1$; 13) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$;

14) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$; 15) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$;

16) $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; 17) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$; 18) $2e^{2x} - 11e^x + 15 > 0$.

19) $2e^{3x-3} + 3e^{2x-2} - 8e^{x-1} + 3 = 0$.

II- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.

En déduire la résolution des équations suivantes

a) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

b) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0$

c) $(\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0$

2) Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

a) Calculer P(1). Écrire P(x) sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

b) Résoudre P(x) = 0. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations

- $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 4(\ln x) + 4 = 0$
- $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$.

3) Résoudre dans les équations : $3^{2x} = 2^{3x}$; $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$

III – Résoudre dans les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \ln(y+1) - \ln(x+4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 \succ 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln 7 = \ln(2-5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^{2-y}} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4^x \times \left(\sqrt{2}\right)^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$

IV – Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

1°) $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-2}$; 2°) $f(x)=\frac{5}{e^x-1}$; 3°) $f(x)=\frac{3x}{e^x+1}$; 4°) $f(x)=\ln(e^x-2)$

5°) $f(x)=1+xe^{\frac{1}{x}}$; 6°) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; 7°) $f(x)=\ln\left(e^{x+1}+2\right)$; 8°) $f(x)=\sqrt{e^x-3}$

9°) $f(x)=x+e^{\ln\left(\frac{3}{x^2-4}\right)}$;10°) $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x+1}$;11°) $f(x)=x+4-\frac{4}{e^x+1}$;12°) $f(x)=e^x(e^x-2)$

Exercice 2

A] Soit h la fonction numérique définie par : $h(x)=(x-1)\,e^{-x}+2$

1) Etudier la fonction h ;
2) Démontrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α et que :

$$-1 \le \alpha \le 0.$$

3) Donner le signe de h(x) dans son domaine de définition.
4) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} (On explicitera la méthode utilisée).

B] Soit la fonction f définie par ; $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier les variations de f ;
2. Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet une droite (D) asymptote oblique en +∞ que l'on précisera.
3. Etudier la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D) ;
4. Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse x = 0.
5. Déterminer sur la figure le domaine puis calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par ($\mathcal{C}$) , (D) et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x}\ e^{\frac{1}{x}} & pour \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1°) Donner l'ensemble de définition Df de f et étudier les limites aux bornes de Df .

2°) Etudier le problème de la continuité de f au point 0.

3°) Déterminer les variations de f et tracer sa courbe.

4°) Calculer la dérivée de la fonction F définie pa r : $F(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

5°) Déterminer l'aire A de la partie du plan limité e par la courbe de f et les droites d'équations respectives : $y = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x(e^x - 2)$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormée d'unité 1cm.

1. Etudier les variations de f
2. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point x = ln2.
3. Tracer (T) et (C_f) dans le même repère ;
4. Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln2 ;
5. Déterminer graphiquement en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

A] Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$;
2. Etudier le sens de variation de g. Calculer g(0) puis déduire du tableau de variation de g le signe de g(x) suivant les valeurs de x.
3. Déterminer les réels a ; b ; et c pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction qui à x $\mapsto$ – x e ^{2x}.
4. En déduire la primitive de g qui prend la valeur 3 pour x = 0.

B] Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$. On appelle ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Etudier la fonction f
2. Montrer que la droite (D) d'équation : y = x + 3 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$).
3. Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D) ;
4. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions α et β (α< β).
5. Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) et la droite (D) ;
6. Calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^{0} [f(x) - y]\,dx$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$;

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Montrer que les droites $(D_1) : y = x + 1$ et $(D_2) : y = x - 1$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D_1) et (D_2).

3. Montrer que la fonction f est impaire. On limitera l'étude de f à l'intervalle $[0;+\infty[$

4. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 et les asymptotes (D_1) et (D_2).

6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0.

7. Déterminer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ la droite (D_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
(On hachurera le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure).

Exercice 7:

Soit la famille de fonctions f_m définies par $f_m(x) = (x+1)e^{m\,x}$ et soit (C_m) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont précisera les coordonnées.

2. Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1}.

3. Donner les équations des tangentes aux courbes (C_1) et (C_{-1}) aux points A et B.

4. Tracer les courbes (C_1) et (C_{-1}).

5. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_1) et (C_{-1}) les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 8

1°) On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{x}$ et on appelle ($\mathbf{C}_f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

a) Etudier les variations de f. préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Tracer la courbe ($\mathbf{C}_f$) .

d) Soit α un réel strictement négatif. On note A(α) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathbf{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = α et x = 0. Calculer A(α) en fonction de α.

Déterminer la limite de A(α) lorsque α tend vers $-\infty$.

2°) Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x) = \ln\left(\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right|\right)$. On note ($\mathbf{\Gamma}$) la courbe représentative de g dans le repère précédent.

a) Préciser les limites de g en $-\infty$; en $+\infty$ et en 0.

b) Calculer g'(x) et déterminer le signe de g'(x) en utilisant les signes de f '(x) et f(x). Dresser le tableau des variations de g.

c) Démontrer que pour tout réel x strictement positif $g(x) - x = \ln(1 - e^{-\frac{x}{2}})$.

Montrer que la droite ($\mathcal{D}_1$) d'équation y = x est asymptote à la courbe (Γ).

Préciser la position de (Γ) par rapport à ($\mathcal{D}_1$) pour tout réel strictement positif.

d) Démontrer que pour tout réel x strictement négatif $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{\frac{x}{2}})$. Montrer que la droite ($\mathcal{D}_2$) d'équation y = $\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (Γ). Préciser la position de (Γ) par rapport à ($\mathcal{D}_2$) pour tout réel strictement négatif.

e) Construire (Γ) ; ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) dans le repère (O ; i ; j) .

NB : On utilisera un graphique différent de celui de la partie 1°).

Exercice 09

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n définies sur [0 ;+∞[par :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{-1}{n\,x}},\ si\ x \succ 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1°) Etude des variations de f_n pour x ϵ[0 ;+∞[.

a) Prouver que f_n est continue sur [0 ;+∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

c) Calculer f_n'(x) pour x >0 et justifier que f_n est strictement croissante sur [0 ;+∞[.

2°) Etude au voisinage de +∞.

a) Etudier la limite de f_n en +∞.

b) Donner le tableau des variations de la fonction g définie sur [0 ;+∞[par $g(x) = e^{-u} - (1-u)$.

En déduire que pour tout nombre réel u ≥ 0 : $0 \le 1 - e^{-u} \le u$. **(1)**

3°) Soit t ≥ 0, en intégrant sur l'intervalle [0 ; t] l'encadrement **(1)**, en déduire que,

pour tout nombre réel t ≥0 on a : $0 \le e^{-t} - (1-t) \le \frac{t^2}{2}$. **(2)**

4°) Démontrer grâce à **(2)** que, pour tout réel x ≥ 0 ; on a

$$0 \le f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \le \frac{1}{2n^2 x}. \textbf{ (3)}$$

En déduire que la droite D_n d'équation y = x – $\frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) de f_n.

5°) Préciser la position relative de (C_n) et (D_n).

6°) Tracé de courbes

a) Donner le tableau des variations de f_n.

b) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en O.

c) Démontrer que, pour tout n > 0, (C_1) est l'image de (C_2) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$. Construire (C_2) sur le même graphique que (C_1).

7°) Pour n entier naturel non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

On se propose d'encadrer l'intégrale I_n sans chercher à la calculer.

a) Montrer que, pour tout x de [0 ;1] : $f_n(x) \le x$.

En déduire que, pour tout entier n ≥1, $I_n \le \frac{1}{2}$.

b) En utilisant la relation (3), établir que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le I_n$.

c) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers +∞.

Exercice 10

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$. On note ($\mathcal{C}_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; i ; j).

A] Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Déterminer la dérivée de g_n. Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que g_n s'annule pour une valeur α_n, et que α_n est positif ou nul.
3. Montrer que : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.

4. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x \leq x-1$, **(1).**

b) Déduire de **(1)** le signe de $g_n(\ln\sqrt{n})$;

c) Justifier que : $\frac{1}{2}\ln(n) \leq \alpha_n$.

Quelles sont les limites des suites de termes généraux α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B] – 1. a) Déterminer la dérivée de f_n . En déduire les variations de f_n.

b) Déterminer les limites de aux bornes de f_n son ensemble de définition.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2. Montrer que ($\mathcal{C}_n$) admet une asymptote ($\mathcal{D}_n$) que l'on déterminera.

3. Déterminer les points d'intersection de ($\mathcal{C}_n$) avec l'axe des abscisses, et préciser la position de par rapport à cet axe.

4. Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_n$) et ($\mathcal{C}_{n+1}$).

5. a) Montrer que : $0{,}35 \leq \alpha_2 \leq 0{,}40$. Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès de α_2. En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Tracer ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) sur le même graphique d'unité 10cm, en mettant en évidence les résultats précédents. Préciser les tangentes en O à ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$).

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies sur [0 ;+ ∞[par

$$f(t) = \frac{36}{8 + e^{-t}} \quad et \quad g(t) = 2\ln(t+1) + 2 .$$

Soit (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1/- a) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.

b) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t)$

c) Tracer les tangentes à ($\mathcal{C}_f$) et à ($\mathcal{C}_g$) aux points d'abscisse x = 0 puis les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère.

2/- On suppose $h = g - f$

a) Calculer la dérivée h' de la fonction h

b) On admet que h'(x) $>$0 sur [0 ;+ ∞[. Montrer que h s'annule en une seule valeur α de [0 ; 5] et une seule. Montrer que α ∈ [2 ;3].

3/- a) vérifier que $f(t) = \frac{36e^t}{8e^t + 1}$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^5 f(t)dt$; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

b) Calculer $J = \int_0^5 g(t)dt$. (on utilisera la dérivée de la fonction k définie sur

[0 ;+ ∞[par *k(t) = (t+1)ln(t +1) – t)* ; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

4/- On estime que sur une période [t ; t+1[où 0 ≤ t ≤ 9. Un plan de restructuration industrielle entraîne des suppressions d'emplois données par $f(t)$ (nombre d'emplois supprimés exprimé en milliers) pendant la même période ce plan crée de nouveaux emplois donnés par $g(t)$ (nombre d'emplois crées exprimé en milliers). On suppose que ces deux phénomènes se réalisent

continûment au cours du temps. Le solde d'emploi à l'instant t est donc

$$h(t) = g(t) - f(t) .$$

a) D'après le graphique de h, à partir de quelle année ce solde devient-il positif ?.

b) On admet que sur les cinq premières années le de restructuration induit une variation dans le nombre d'emploi assimilable à l'intégrale $L = \int_0^5 h(t)dt$.

Exprimer le bilan de restructuration sur 5 années.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x)=(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}}+2-x$; et soit ($\mathcal{C}$f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Partie A :

Pour tout réel x, on considère la fonction g définie par : $g(x)=x-e^{\frac{x}{2}}$.

1°) Etudier les variations de la fonction g.

2°) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B :

1°) Calculer la limite de f en – ∞ et en + ∞.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2-x)]$ puis interpréter.

3°) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=g(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

4°) En déduire le sens de variation de f.

5°) Déterminer les coordonnées du point B intersection de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f et de son asymptote oblique ($\mathcal{D}$). En déduire la position de ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{D}$).

6°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifier que $-2 < \ell < -1$.

7°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$f) au point d'abscisse 0.

8°) Tracer ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$f) dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

9°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$f) , ($\mathcal{D}$) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = – 2 , x = 0

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=x-e^x$ *et* $g(x)=(1-x)e^x$.

On désigne par ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1°) Etudier les variations des fonctions f et g.

2°) Montrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote oblique à (C_f) en –∞.

3°) Pour tout réel x on pose $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x, $h'(x)=1-g(x)$;

b) En déduire le sens de variation de h ;

c) Dresser le tableau de variation de h , on calculera les limites de h.

4°) Démontrer que les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) admettent un unique point d'intersection, dont, l'abscisse, notée α, appartient à [1; 2].

5°) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{C}_g$).

6°) Tracer la droite ($\mathcal{D}$) et les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$).

7°) Calculer en cm² l'aire A du domaine plan limité par ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = α.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$ et soit (Cf) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) d'unité graphique 1cm.

1°) Étudier les variations de la fonction f.

2°) Vérifier que le point I (0 ; $\frac{3}{2}$) est centre de symétrie pour la courbe (Cf).

3°) Déterminer les coordonnées des points de la cou rbe (Cf) en lesquels la tangente admet un coefficient directeur égal à (–6).

4°) Tracer la courbe (Cf) dans le plan muni du repè re orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

5°) Calculer en cm² l'aire du domaine formé par l'e nsemble des points dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ 1\le y\le f(x) \end{cases}$

6°) La droite (D) d'équation y = x coupe (Cf) en de ux points. Soit M_0 leur point d'intersection dont l'abscisse x_0 est positive.

a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $xe^x - 2e^x - x + 1 = 0$.

b) Montrer que la fonction numérique h définie par $h(x) = xe^x - 2e^x - x + 1$ est continue et strictement monotone sur [2 ; +∞[.

En déduire que x_0 appartient à l'intervalle [2 ; 3] et calculer une valeur approchée de x_0 par défaut et par excès à 10^{-1} près.

Exercice 15

Soit g la fonction définie sur [1 ;+∞[par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1°) Etudier les variations de g sur K=[1 ;+ ∞[.(On ne demande pas de tracer sa courbe).

2°) Montrer que si x appartient à [1 ;+ ∞[alors g(x) appartient à K=[1 ;+∞[.

3°) Montrer que l'équation g(x) = x admet une solut ion unique $\alpha \in$ K=[1 ;+∞[.

4°) Montrer que pour tout x de K, on a : $|g'(x)| \le \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout x de K, on a : $|g(x)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$..

5°) Soit (U_n) la suite d'élément de K définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

Exercice 16

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $f_2(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Partie I :

1) déterminer les fonctions dérivées de f_1 et f_2.

2) Dresser le tableau de variation de f_1 puis celui de f_2.

3) Déterminer la position relative des courbes ($\mathcal{C}_1$) de f_1 et ($\mathcal{C}_2$) de f_2.

4) Déterminer les points d'intersection de chacune de ces courbes avec l'axe des ordonnées et une équation de la tangente à chacune des courbes en ces points.

4) Tracer les courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) dans un repère orthonormé (unité 2cm).

5) calculer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine plan limité par les courbes ($\mathcal{C}_1$);

($\mathcal{C}_2$) et les droites d'équations : x = 0 et x = λ , ($\lambda>0$). Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

Partie II :

On considère la fonction h définie par : $h(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

1) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$, et que $(f_1(x))^2-(f_2(x))^2=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

En déduire la fonction dérivée h' de h et dresser le tableau de variation de h

2) Préciser les asymptotes éventuelles de la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h.

3) Déterminer la position relative de ($\mathcal{C}_h$) par rapport aux asymptotes

4) Déterminer le point de ($\mathcal{C}_h$) d'abscisse nulle et la tangente en ce point

5) Construire dans un repère orthonormé la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h.

6) En posant $u(x) = e^x + e^{-x}$, montrer que h(x) peut s'écrire sous la forme

$h(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Calculer alors $I=\int_0^{\ln 2} h(x)\,dx$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Soit U la fonction définie par $U(x)=\frac{e^x}{1-x}$. Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul et différent de 1, $(f(x)-x)$ est le taux de variation de U entre 0 et $\frac{1}{x}$.

Déduisez-en la limite de $(f(x)-x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) Soit g la fonction définie de la façon suivante : $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=f(x), \quad si \quad x\neq 0 \end{cases}$

On désigne par (Cg) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Justifier que g est le prolongement de f par continuité à gauche en $x_0 = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

4°) a) Démontrer que l'équation $f(x)=x+2$ a les même solutions que l'équation : $e^{\frac{1}{x}}=(1-\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})$.

b) Résolvez l'équation : $e^x=(1-x)(1+2x)$ et déduisez-en les solutions de l'équation : $f(x)=x+2$ puis les positions relatives de (Cf) et de la droite D d'équation : $y=x+2$.

5°) Dessiner la courbe (Cf).

Exercice 18

Soit $C_m(x)$ la fonction coût marginal exprimé en *k* Euros est définie par : $C_m(x)=(1-x)e^{-x+2}+2$ pour une production x en tonnes.

1°) a) Étudier les variations de la fonction coût marginal

b) Pour quelle quantité x le coût marginal est-il minimum ?

c) Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[\ C_m(x)>0$. Que peut-on en déduire pour le coût total.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(x)$. Pour de grandes quantités que peut-on dire du coût marginal ?

2°) a) Le coût fixe étant 10*k* Euros ; montrer que le coût total $C_T(x)=xe^{-x+2}+2x+10$.

b) Le coût moyen étant définie par $C_M(x)=\frac{C_T(x)}{x}$; exprimer $C_M(x)$ en fonction de *x*.

c) Montrer que le coût moyen est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 19

A-/ *Étude d'une fonction auxiliaire*.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$.

1°) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
2°) Calculer g'(x) et dresser le tableau de variation de g.
3°) Calculer g(0). En déduire le signe de g(x).

B-/ *Étude de la fonction f.*

Soit la fonction numérique *f* définie par $f(x) = -x + 4 + xe^{-x}$. Soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.
1°) Déterminer l'ensemble de définition D*f* de *f* puis calculer les limites de *f*.
2°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à ($\mathcal{C}_f$) en $+\infty$.Étudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D).
3°) Vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variation de *f*.
4°) a) A l'aide du tableau de variation de *f*, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions.
5°) Tracer soigneusement la droite (D) et la courbe ($\mathcal{C}_f$).

C-/ *Modélisation économique de la fonction f.*

La fonction *f* modélise la demande d'un produit, x la quantité demandée de 0 à 4 milliers de tonnes, $f(x)$ le prix en Euros de ce produit en Kg.

1°) justifier que pour $x \in [0 ; 4]$, $f(x)$ est positif.
2°) La fonction d'offre de ce même produit est définie sur [0 ;4] par $h(x) = 0{,}5x + 2$, où x est la quantité et h(x) le prix en Euros. Construire sa représentation graphique (Δ) dans le même repère que ($\mathcal{C}_f$).

3°) Lire graphiquement le prix d'équilibre du marché de la quantité échangée à ce prix.

4°) On suppose que la quantité produite au prix d'équilibre est x =1,55.

a) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans [0 ; 1,55]. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?

b) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans [1,55 ; 4]. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?

Exercice 20

Partie A

Pour tout entier naturel n strictement positif on donne f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$- {-1} par $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^n}$. On note ($\mathcal{C}_n$) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1°) Déterminer la fonction dérivée f_n' de f_n et donner l'expression de f_n' en fonction de f_n et f_{n+1}.

2°) Étudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$;–1 ; $+\infty$ (On distinguera le cas n pair et impair)

3°) Démontrer que toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) passent par un même point fixe.

4°) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) ? Tracer sur deux figures distinctes les courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$).

Partie B

On donne $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1°) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

2°) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\leq I_n \leq \dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) En utilisant la question A) 1°) trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

4°) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1}=1$. En déduire que la suite ($n\times I_n$), $n\in\mathbb{N}^*$ converge et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie on donne n = 2

1°) Démontrer que l'équation $f_2(x)=x$ admet une solution unique α et que $\alpha\in\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

2°) Étudier les variations de f_2' dans $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ et en déduire que pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ on a :

$-0{,}25\leq f_2'(x)\leq 0$.

3°) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f_2(u_n)\end{cases}$

a) Démontrer en utilisant la question C) 2°) que pour tout entier n on a :

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$

b) En déduire que $|u_n-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$, et que $(U_n)_{n\in IN}$ converge vers α.

b) Déterminer n pour que U_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

NB : On donne $\sqrt{e}=1{,}65$; $\ln 2=0{,}69$; $\ln 5=1{,}6$.

Exercice 21

Partie A : Étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$. On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$). L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1°) a) On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. Déterminer la limite de f en -∞.

b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe ($\mathcal{C}$) admet deux asymptotes que l'on précisera.

2°) On considère la fonction g définie sur]-1 ;+∞[par $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

b) En déduire le signe de g(t) lorsque t > 0.

3°) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de g(e^{x}).

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4°) Tracer les asymptotes à la courbe ($\mathcal{C}$) et la courbe ($\mathcal{C}_g$).

Partie B : Comportement asymptotique d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1°) Étudier le sens de variation de la fonction F..

2°) a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+e^{t}}=1-\dfrac{e^{t}}{1+e^{t}}$ et calculer $\int_0^x \dfrac{dt}{1+e^{t}}$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de F(x).

c) Vérifier que F(x) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$F(x)=x-\ln(1+e^{x})-f(x)+2\ln 2 \quad ; \quad F(x)=\ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)-f(x)+2\ln 2.$$

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}(F(x)-x)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Partie C : Étude d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ* par : $U_n = f(1)+f(2)+....+f(n)=\sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^{k})$.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) a) Justifier que pour tout entier k, tel que $1\le k\le n$; on a : $f(k)\le\int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

b) Comparer U_n et F(n).

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

EXERCICES SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

I) – U_1 ; U_n ; r *et* S_n désignant respectivement le premier terme, le $n^{\text{ième}}$ terme, la raison et la somme des n premier termes d'une suite arithmétique, calculer :

1) U_n *et* S_n , connaissant $U_1 = 7$; $n = 120$; $r = 5$;
2) U_1 *et* S_n , connaissant $U_n = 326$; $n = 72$; $r = 2$;
3) r *et* S_n , connaissant $U_1 = 397$; $U_n = 64$; $n = 1000$;
4) n *et* U_n , connaissant $U_1 = 50$; $r = -4$; $S_n = 330$;
5) n *et* r , connaissant $U_1 = -3$; $U_n = 6$; $S_n = 28{,}5$;
6) U_1 *et* U_n , connaissant $n = 54$; $r = 4$; $S_n = 270$;

II) – Calculer dans le cas suivant d'une suite géométrique :

1) U_n *et* S_n , connaissant $U_1 = 2$; $q = 3$; $n = 5$;
2) q *et* S_n , connaissant $U_1 = 162$; $U_n = 32$; $n = 5$;
3) U_1 *et* S_n , connaissant $U_n = 54$; $q = 3$; $n = 4$;
4) U_1 *et* U_n , connaissant $q = 0{,}5$; $n = 7$; $S_n = 571{,}5$;
5) n *et* q , connaissant $U_1 = 48$; $U_n = 243$; $S_n = 633$;

EXERCICE 2 :

1°) Etudier le sens de variation de chacune des sui tes suivantes définies par
a) $u_n = 3n - 8$; b) $v_n = -5n + 4$; c) $w_n = 7n - 3$.

2°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser son premier terme u_0 et sa raison.

3°) Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $t_{n+1} = \dfrac{t_n + 4}{3}$.

On pose $k_n = t_n - 2$; montrer que (k_n) est une suite géométrique dont déterminera la raison et le premier terme.

EXERCICE 3 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$

1°) représenter graphiquement les cinq premiers ter mes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

2°) On pose $v_n = u_n - \alpha$. ($\alpha \in \mathbb{R}$)

a) Déterminer α pour que (V_n) soit une suite géométrique.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4 - 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$; on note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Trouver l'expression de S_n en fonction n.

d) Déterminer les limites des suites (u_n) et (S_n).

EXERCICE 4 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Justifier que $\forall n > 1$, $u_n \geq 1$.

3°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 5 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

1°) Calculer les termes u_1 ; u_2 ; u_3.

2°) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$; la suite (v_n) est-elle géométrique ?

3°) Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.

c) En déduire l'expression de u_{n+1} puis celle de u_n en fonction de n.

EXERCICE 6 :

I – On considère la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_1 = 1 \\ 5V_{n+1} = V_n + 8 \end{cases}$

1) Calculer V_2 ; V_3 ; V_4 ;

2) On pose $U_n = V_n - 2$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

3) Démontrer que la suite (V_n) est convergente et trouver sa limite ;

4) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$.

5) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

II –

Soient a, b, c, d, e cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} a + b + d + e = 60 \\ d + e = 42 \end{cases}$.

1) Exprimer a , b , d et e en fonction de c et r.

2) Déterminer les nombres réels a , b , c , d , e.

EXERCICE 7 :

I) – 1°) Trouver 3 nombres consécutifs a , b , c d'une s uite arithmétique sachant que :

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{12}{7} \\ 5a-6b+c=\dfrac{-10}{2} \end{cases}$$ Donner la raison de cette suite.

2°) Trouver 3 nombres a , b , c en progression géom étrique sachant que :

$$\begin{cases} a+b+c=403 \\ c-a=312 \end{cases}$$

II) Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que :

$$\begin{cases} U_1+U_2+U_3=9 \\ U_1^2+U_2^2+U_3^2=35 \end{cases}$$

1. Calculer le premier terme U_0 et la raison r de cette suite, puis exprimer le terme général U_n en fonction de n.

2. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n=2^{Un}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera V_0 et q.

b) Calculer : $P_n=V_0\times V_1\times V_2\times .....\times V_n$.

EXERCICE 8 :

1. Déterminer une progression arithmétique de quatre termes a , b , c , d ayant pour raison r = 6 telle que le produit des termes est égal à 385.

2. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r, $(r\neq 0)$ tel que dans cet ordre U_2 ; U_4 ; U_7 sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q\neq 1$.

a) Montrer que $U_0 = 2r$ et $q = \dfrac{3}{2}$

b) Sachant que $U_2 = 3$, calculer U_0 puis U_n en fonction de n.

c) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n=e^{Un}$;

Calculer $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$ puis en déduire $P_n=V_0\times V_1\times .....\times V_n$.

EXERCICE 9 :

1) L'Opération Puits, une entreprise de forage estime le coût d'un puits à grand diamètre comme suit :

- le premier mètre creusé coûte 1000 F
- le second mètre creusé coûte 1050 F et chaque mètre creusé coûte 50 F de plus que le précédent. Quelle serait la profondeur maximale de ce puits si le crédit alloué à l'entreprise est de 519 750 F ?

2) Une société Forestière décide de créer un bosquet (Petit bois, touffe d'arbres) à chaque kilomètre entre deux villes A et B distant de 300 Km.

- Au premier kilomètre le bosquet compte 15 arbres
- Au second kilomètre le bosquet compte 22 arbres et à chaque kilomètre qui suit le bosquet compte 7 arbres de plus que le précédent.

Quel est le nombre d'arbres que compte le dernier bosquet ?
Quel est le nombre total d'arbres que la société doit planter ?

EXERCICE 10 :

1. Trouver sept termes d'une suite géométrique : U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5 ; U_6 ; U_7

tels que : $\frac{U_5}{U_1}=\frac{U_5+U_6+U_7}{U_1+U_2+U_3}$ *et* $\begin{cases} U_1+U_2+U_3=2 \\ U_5+U_6+U_7=1250 \end{cases}$

2. Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+5 \end{cases}$

   a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

   b) On pose $V_n=\alpha U_n-10$. Quelle valeur faut-il donner à α pour que (V_n) soit une suite géométrique.

   c) Exprimer Un en fonction de n puis calculer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n$.

EXERCICE 11:

A/– soit (U_n) définie par la relation $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{2+U_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (U_n) est à terme positif et majorée par 2.
2. Démontrer par récurrence que (U_n) est croissante ;
3. la suite (U_n) est-elle convergente ?justifier.

B/– Soit u la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n e^{-Un}$ (n ϵ ℕ).

On pose ∀ n ϵ ℕ ; $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$;

1. Montrer que u est à termes positifs.
2. Montrer que u est décroissante.
3. En déduire que u converge et trouver sa limite.
4. Montrer que pour tout n de ℕ $U_{n+1} = e^{-Sn}$.

EXERCICE 12:

Un épargnant dispose au 1er janvier 2006 d'un capital C_0 = 10 000F qu'il place à la Bank of Africa (BOA) à un taux de 6% l'an. Au bout de chaque année le capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital au bout de n années.

1) Calculer C_1 ; C_2 ; C_3.
2) Démontrer que : $C_n = C_0 \times (1{,}06)^n$.
3) Au bout de combien de temps n le capital C_0 aura-t-il doublé ?
4) En supposant le prix du marché stable, en quelle année son capital peut payer une voiture dont le prix est 20 000F ?

EXERCICE 13:

A/– On pose ∀ n ϵ ℕ , $U_n = \underbrace{1111.....111}_{n \quad fois}$

1) Calculer U_n en fonction de n.
2) Soit $S_n(a) = a + aa + aaa + ... + \underbrace{aaa.....aaa}_{n \quad fois}$. Calculer : $S_n(1)$ en fonction de n.
3) Calculer $S_n(a)$ en fonction de n et de a.
4) Calculer S = $S_n(1)$ + $S_n(2)$ + ……+ $S_n(9)$.

B/– Soient (Δ_1) ; (Δ_2) ; (Δ_3) ; ……. ; (Δ_n) ; n droites d'un plan $\mathcal{P}$, sécantes deux à deux en des points distincts. Soit U_p le nombres des régions du plan, déterminées par p de ces droites. Etablir une relation entre U_{p+1} et U_p. En déduire Un en fonction de n.

EXERCICE 14:

Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par :

$$U_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \qquad et \qquad V_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

On pose $d_n = U_n - V_n$ et $w_n = U_n + V_n$.

1. montrer que (d_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.
2. montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
3. déduire de ce qui précèdent les sommes suivantes :

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ……..+ U_n$ et $S_n' = V_0 + V_1 + ……+ V_n$.

EXERCICE 15:

L'étude de la production intérieure brute, au Mali (en milliard de francs) a donné le résultat suivant :

Si P(n) désigne la production intérieure de l'année numérotée n, (n ∈ℕ), le rapport : $\frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)} = 0{,}11$ constant. On suppose P(0)= 140.

1. a) calculer P(n+1) en fonction de P(n) ;
   b) calculer P(1) et P(2).
   c) calculer P(n) en fonction de P(0) et n. En déduire P(10). (On arrondira au milliard supérieur).
2. A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à 3×P(0) ?

3. A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à 14.000 ?

EXERCICE 16 :

1. pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}dx$

   a) calculer $\mathbf{I_n}$ en fonction de n à l'aide d'une intégration par parties.

   b) Etudier la convergence de la suite ($\mathbf{I}_n$).

2. pour tout entier naturel n on pose : $S_n = \sum_{i=0}^{n} I_i$.

a) Calculer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

b) calculer une valeur approchée de S_{10}.

EXERCICE 17 :

On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et $\forall n \in IN^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1°) Calculer I_0 puis I_1 en utilisant une intégration par parties.

2°) Pour tout n ∈ ℕ* établir que : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

3°) Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante sur [1 ;e].

4°) En déduire en utilisant la relation de récurrence de la question 2°) que $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

EXERCICE 18 :

A/- soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$;

1) démontrer que (U_n) est à termes positifs et majorée par 5.

2) Quelle est la limite éventuelle de la suite (U_n) ?

3) Etudier le sens de variation, puis la convergence de (U_n).

4) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\left|U_{n+1} - 3\right| \le \frac{1}{3}\left|U_n - 3\right| \quad et \quad \left|U_n - 3\right| \le 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

B/- Un bien qui valait au départ 5.000.000 Frs se déprécie d'année en année suivant la loi suivante :
La valeur du bien de l'année considérée est égale au produit du bien de l'année précédente par 0,65, ce produit augmenté de 550.000 frs.

1) Au bout de combien d'années le bien sera-t-il inférieur à 1 572 384,6 Frs ?

2) Est-il possible que le bien soit un moment inférieur à 1 571 420 ?.

EXERCICE 19 :

Le plan complexe est rapporté au repère (O, i ; j) unité graphique 2cm. Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe 2i et A_1 le milieu du segment $[A_0\ A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n ; on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_n ; A'_n]$.
On note P_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1°) Déterminer les affixes des points A_1 ; A_2 ; et A_3.
Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et θ_1 ; θ_2 ; θ_3.

2°) a) Pour tout entier n, exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n.
b) Exprimer P_n et θ_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de la suite (P_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
d) Comparer les modules et les arguments de Z_n et Z_{n+8}.

3°) Établir que : $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$.

4°) Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n, déterminer en fonction de n la longueur D_n de la ligne brisée : $A_0 A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-1} A_n A_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite (D_n).

EXERCICE 20 :

Un fonctionnaire consacre 80% de son revenu à une épargne. Ce fonctionnaire voit son revenu annuel augmenter de 3% par an et décide de diminuer la part de l'épargne dans son revenu annuel de 2,5% par an. Le revenu initial du fonctionnaire est R_0 = 400 000 F. On désigne par R_n le revenu annuel du fonctionnaire et E_n l'épargne annuelle au bout de n années ($n \in \mathbb{N}$).

1°) Calculer l'épargne initiale E_0 du fonctionnaire.
2°) Calculer le revenu R_1 et l'épargne E_1 de l'année suivante (n = 1) ;
3°) Calculer le revenu R_2 et l'épargne E_2 de l'année suivante (n = 2) ;
4°) Exprimer R_n en fonction de R_0 et n ; puis E_n en fonction de E_0 et n.
5°) Calculer la limite de E_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 21 :

Soit la suite (Z_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + i) \end{cases}$

1°) Soit dans le plan complexe P muni du repère ort honormé (O ;I ;J) les points M_n d'affixes Z_n. Placer M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4.

2°) Soit $(X_n)\, et\, (Y_n)$ les suites de nombres réels définies par $\forall n \in IN,\ Z_n = X_n + iY_n$. Exprimer $X_{n+1}\ et\ Y_{n+1}$ respectivement en fonction de $(X_n)\, et\, (Y_n)$. En déduire $(X_n)\, et\, (Y_n)$ en fonction de n.

3°) Montrer que $(X_n)\, et\, (Y_n)$ sont convergentes et donner leurs limites respectives. Que peut-on en déduire pour la suite (Z_n) ?

EXERCICE 22 :

I - Soit une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r.

1°) Calculer u_1 et r sachant que u_{100} =781 et $u_1 + u_2 + \ldots + u_{100} = 38500$

2°) Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $u_1 + u_2 + \ldots + u_{100} \leq 168\,300$

II - Soit la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ pour $t \in [n; n+1],\ n \succ 0$

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$.

2°) On considère la suite de terme général $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n$; $n \geq 1$.

Montrer que (U_n) est monotone à termes positifs ; conclure.

EXERCICE 23 :

Pour tout entier naturel n non nul ; on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

1°) Montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$

2°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \geq 0$

3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

4°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est décroissante.

EXERCICE 24 :

Pour tout entier naturel n non nul ; on pose $I_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t}\,dt$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n = 2n-1$

2°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite (I_n) est bornée

3°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)$ est convergente

4°) Montrer pour n $\in \mathbb{N}^*$, on a : $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = n^2$.

EXERCICE 25 :

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On définit la suite (U_n), pour tout entier naturel n, par

$U_0 = a$; $U_1 = b$; $U_{n+2} = U_{n+1} + 6U_n$.

On considère les suites (V_n) et (W_n) définies, pour tout entier naturel n,

$V_n = U_{n+1} - 3U_n$ et $W_n = U_{n+1} + 2U_n$.

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison q = –2 et de premier terme $V_0 = b - 3a$.

Déterminer, pour tout entier naturel n, V_n en en fonction de n, a et b.

2°) Montrer aussi que (W_n) est une suite géométrique et exprimer W_n en fonction de n, a et b.

3°) En déduire U_n en fonction de n, a et b.

4°) Montrer que si (U_n) est une suite géométrique, alors sa raison ne peut être que q = –2 ou q = 3.

5°) déterminer la limite de la suite (U_n).

EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTELLES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1 :

Intégrer les équations différentielles suivantes

1) $y' - 5y = 0$; $2y' = \frac{-y}{2}$; $3y' + 5y = 0$; $9y^2 = (y')^2$; $(y')^2 - 2yy' = 0$.

2) $2y'' - 14y' + 20y = 0$; $y'' + 8y' + 16y = 0$; $3y'' + 9y' - 12y = 0$.

3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y'' - 8y' + 25y = 0$.

4) $y'' - 16y = 0$; $y'' + 25y = 0$; $9y'' + 64y = 0$; $9y'' - 36y = 0$;

5) $y'' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

6) $4y'' + 49y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Trouver la solution f de chacune des équations différentielles vérifiant les conditions initiales ci-dessous :

1) $(E_1) : y'' + y' - 6y = 0$ sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$.
2) $(E_2) : y'' + 6y' + 9y = 0$ sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.
3) $(E_3) : y'' - 6y' + 13y = 0$ sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.
4) $(E_5) : y'' - 3y' - 4y = 0$ sachant que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 4$.
5) $(E_6) : 4y'' + 4y' + 65y = 0$ sachant que $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = 0$.

Exercice 2 :

1°) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0$ **(1).**

2°) Soit l'équation différentielle : $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}$ **(2).**

a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$ est solution de **(2)**.

b) On admettra qu'une fonction f est solution de **(2)** si et seulement si (f – h) est solution de **(1)**. En déduire les solutions de **(2).**

3°) Déterminer la solution f de **(2)** dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé (O ; i ; j) passe par le point A $(0 ; \frac{2}{5})$ et dont la tangente en A à $(\mathcal{C}_f)$ a pour coefficient directeur 2.

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$.

1) Intégrer cette équation différentielle (E).
2) Déterminer la solution f de cette équation différentielle sachant que :
   a) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point A (0 ; 4) ;
   b) La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0, a pour coefficient directeur 2.
3) Etudier la fonction f déterminée ci-dessus et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_f)$.
4) Calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle (E) : y '' – 4y ' + 4y = 0.

1) Déterminer la solution f de (E) sachant que f (0) = 0 et f '(0) = 1 ;
2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i ; j) d'unité 2cm.
3) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et les droites d'équations respectives y = 0 ; x = –1 et x = 1.

Exercice 5 :

Soit les équations différentielles :

(E) : y ''+ 4y ' + 4y = 4x + 12 et (E_1) : y ''+ 4y ' + 4y = 0.

1°) Trouver les réels a et b pour que la fonction g définie par g(x) = ax + b soit solution de (E).

2°) Pour toute fonction f solution de (E), montrer que si (f+g) est solution de (E) alors f est solution de(E_1).

3°) Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1).

4°) Déterminer la solution f de (E_1) sachant que f(0) = 2 et f '(0) = 0.

5°) Étudier la fonction f et tracer sa courbe (Cf).

6°) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (Cf) l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

Exercice 6 :

Soient les équations différentielles : (E_0) : y ''+ 4y ' + 4y = 4x et
(E_1) : y ''+ 4y ' + 4y = 0.

1°) Trouver les réels a et b pour que h : x ↦ h(x) = ax+b soit solution de (E_0).
2°) Déterminer la solution g de (E_1) sachant que g(0) = 1 et g '(0) = -1.
3°) Soit la fonction f définie sur [0 ;+ ∞[par : $f(x) = g(x) - h(x)$. Soit ($\mathcal{C}_f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm .
4°) Etudier la fonction f ' dérivée de f sur [0 ;+ ∞[et en déduire le signe de f ' (x).
5°) Etudier la fonction f sur [0 ;+ ∞[.
6°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet une asymptote (D) que l'on précisera.
7°) a) Etablir que l'équation f(x) = 0 admet sur [0 ;+∞[une solution unique α.

b) montrer que : $1 \leq \alpha \leq 2$.

8°) Construire ($\mathcal{C}_f$) et (D) sur un même graphique.
9°) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'asymptote (D) et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

Exercice 7 :

1) Soit l'équation différentielle (E) : y '' – 3y ' + 2y = 0.

Déterminer la solution f de (E) sachant que f (0) = – 3 et f '(0) = – 2 .

2) Etudier les variations de f (on déterminera les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f avec les axes de coordonnées).

3) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) avec son asymptote horizontale (Δ).

4) Tracer (Δ) et ($\mathcal{C}_f$) dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

5) Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}_f$) l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

a) Déterminer la limite de la suite (U_n).

b) Déterminer l'entier naturel k pour lequel on a $\left|U_k - \alpha\right| \leq 10^{-3}$.

Exercice 8 :

1) Soit l'équation différentielle (E) : y '' – 3y ' + 2y = 0.

Déterminer la solution g de (E) sachant que g(0) = $-\frac{7}{2}$ et g ' (0) = – 3 .

2) Soit la fonction f définie par f(x) = g(x) + 3x. Soit ($\mathcal{C}_f$) la courbe de f dans un repère d'unité graphique 2 cm. Etudier les variations de f.

3) Montrer que ($\mathcal{C}_f$) admet en – ∞ une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) dont on donnera une équation.

4) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

5) Tracer ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}_f$).

6) Soit α un réel négatif ou nul. On désigne par A(α) l'aire, en cm² du domaine plan limité par ($\mathcal{C}_f$), l'asymptote oblique ($\mathcal{D}$) et les droites d'équations :

x = α et x = 3ln2.

a) Calculer A(α) ;

b) En déduire A(0) ;

c) Calculer la limite de A(α) lorsque α tend vers – ∞.

NB : On donne ln3 = 1,09 ; 3ln3 – $\frac{15}{2}$ = – 4,20 ; ln2 = 0,69.

Exercice 09 :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E_1) : y '' – 3y ' + 2y = 8x² – 24x.

1°) Déterminer les nombres réels a ; b ; c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que la fonction f est solution de l'é quation (E_1) si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle : (E_2) : h''– 3h' + 2 h = 0.

3°) Intégrer l'équation différentielle (E_2). En déduire les solutions les solutions de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

4°) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que :

$$\varphi(0) = 0 \ et \ \varphi'(0) = 0.$$

Partie B :

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = -4e^{2x} + 8e^{x} + 4x^2 - 4.$$

1°) a) Calculer $\varphi'(x) \ et \ \varphi''(x)$. On vérifiera que $\varphi''(x) = -8(2e^{x} + 1)(e^{x} - 1)$

Etudier les variations de la fonction φ'. En déduire le signe de $\varphi'(x)$ et le sens de variation de φ.

b) Déterminer les limites de φ en $-\infty$. Déterminer les limites de φ en $+\infty$; on pourra remarquer que : $\varphi(x) = -4e^{2x}(1 - \frac{2}{e^{x}} - \frac{x^2}{e^{2x}}) - 4$

2°) Dresser le tableau des variations de la fonctio n g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4$$

3°) On désigne respectivement par ($\mathcal{C}_{\varphi}$) et ($\mathcal{C}_g$) les courbes représentatives des fonctions φ et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a) Montrer que pour tout réel x , $\varphi(x) - g(x) = -4e^{x}(e^{x} - 2)$
b) En déduire la position relative des courbes ($\mathcal{C}_{\varphi}$) et ($\mathcal{C}_g$).
c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (\varphi(x) - g(x))$.

4°) Tracer les courbes ($\mathcal{C}_{\varphi}$) et ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère.

5°) Calculer l'intégrale $I = \int_{\alpha}^{\ln 2} \left(-4e^{2x} + 8e^{x}\right) dx$ où α est un réel tel que (α< ln2).

6°) On note A(α) l'aire en cm² du domaine limité par les courbes ($\mathcal{C}_{\varphi}$) ; ($\mathcal{C}_g$) et les droites d'équations respectives x = α et x = ln2.

a) Mettre en évidence le domaine sur le graphique ;
b) Calculer en cm² l'aire A(α) ;
c) Calculer la limite de A(α) lorsque α tend vers – ∞.

Exercice 10 :

Partie A :

1°) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) : y' +2y = cosx

a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie par

g(x)= acosx + bsinx soit solution de (E).

b) Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que (f +g) est une solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle (E_1):y' +2y = 0.

c) Intégrer (E_1) et en déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

2°) Soit à résoudre l'équation différentielle (F) : y'' –2y' + 5y = e^{-2x}.

a) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par g(x) = ke^{-2x} soit solution de (F).

b) Résoudre (F_1) : y'' –2y' + 5y = 0.

Partie B :

Soit l'équation différentielle (E) : y' + 2y = (x-3)e^{-x}.

1°) Résoudre (E1) : y' + 2y = 0

2°) Trouver les réels a et b pour que f(x)=(ax+b)e^{-x} soit solution de (E).

3°) Démontrer que h est solution de (E) implique qu e (h-f) est solution de (E_1)

4°) En déduire toutes les solutions de (E) et trouv er celle qui passe par le point de coordonnées (0 ;1).

EXERCICES SUR LE CALCUL BARYCENTRIQUE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

Dans le plan affine euclidien soit ABCD un rectangle et DEC un triangle isocèle rectangle en E , $E \notin [A,B]$ tels que : AB = 2 ; BC = 1 ; DE = CE.

1°) a) Déterminer le barycentre des points pondérés : (A,1) ; (B,1) ; (C,1) ; (D,1) ; (E,2).

b) Quel est l'ensemble ($\mathbf{E_a}$) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MD^2 + 2ME^2 = 8 .$$

c) Quel est l'ensemble ($\mathbf{E_b}$) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MD^2 + 2ME^2 = 3 .$$

2°) Soit $\mathcal{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

a) $\overrightarrow{f} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$

$M \mapsto \overrightarrow{f}(M) = 2\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$.

Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une fonction qui admet un vecteur constant que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$2ME^2 - MD^2 - MC^2 = -2 .$$

EXERCICE 2 :

Dans le plan on considère un triangle rectangle ABC d'hypoténuse [BC] de longueur 2a.

Soit $\overrightarrow{f} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$

$M \mapsto \overrightarrow{f}(M) = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ $(m \in IR)$.

1°) Déterminer m pour que $\overrightarrow{f}(M)$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{V_0}$; et calculer $\overrightarrow{V_0}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) On prend m = –1. Démontrer que le barycentre G des points (A,4) ; (B,–1) ; (C,–1) est le symétrique du milieu I de [BC] par rapport à A.

EXERCICE 3 :

On donne dans un plan affine euclidien un rectangle ABCD et un triangle rectangle en A et isocèle ADE ; (E ∈ [AB]) ; d(A ;B) = 2a ; d(B ;C) = a.

1°) Déterminer le barycentre de (A,1) ; (B,1) ; (C, 1) ; (D,1) ; (E,2).

2°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels q ue :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2ME^2 = ka^2$; $k \in IR$. Discuter suivant k .

EXERCICE 4 :

Dans le plan affine euclidien P on donne un triangle ABC rectangle en A avec AB = AC = a (a $>$0).

1°) a) Déterminer et construire le barycentre G des points (A,4) ; (B,–1) ; (C,–1).

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

2°) a) Soit $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{f} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{V}$$

$$M \mapsto \overrightarrow{f}(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que $\overrightarrow{f}$ admet un vecteur constant $\overrightarrow{V_0}$; que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

EXERCICE 5 :

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. A ; B ; C trois points de $\mathscr{P}$ tels que :

AB = 4a ; AC = 3a ; BC = 5a ; (a ∈ $\mathbb{R}^*$+).

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{V} \text{ ; (} \vec{V} \text{ un vecteur donné).}$$

2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

En déduire l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$.

EXERCICE 6 :

Dans le plan $\mathscr{P}$ on considère muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé, on considère les points $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1°) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que : $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$.

2°) Déterminer les réels m et n tels que D soit le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, m) ; (C, n).

3°) Trouver l'ensemble **E** des points M du plan tels que :

$$4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k \quad (k \in IR).$$

4°) Déterminer k tel que A (0 ; 3) appartiennent à l'ensemble **E** que vous représenterez.

EXERCICE 7 :

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A, tel que : AB = AC = 3a ; (a ∈ ℝ*+).

1°) Déterminer le barycentre G des points pondérés (A,4) ; (B, –3) ; (C,2). Construire G.

2°) Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans ℝ définie par :

$$f(M) = 4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 .$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = -36a^2$.

3°) Représenter cet ensemble.

EXERCICE 8 :

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que :

AB =8cm et AC = 4cm.

1°) Construire le barycentre G des points (A,3) ; (B, –1) ; (C,2).

2°) Déterminer et construire l'ensemble F des point s M du plan vérifiant :

$$\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| .$$

EXERCICE 9 :

Dans le plan $\mathcal{P}$,soit un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que :

AB = AC = a ; (a ∈ ℝ*+).

Soit m un paramètre réel.

1°) Donnez une condition nécessaire et suffisante s ur m pour que le système de points pondérés {(A, 2) ; (B, –1) ; (C, m)}admette un barycentre G_m.

2°) Construire G_0 puis G_2. Vérifier que : $G_0G_2 = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3°) Déterminer les ensembles suivants :

a) $\Gamma_1 = \left\{ M \in P / \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$.

b) $\Gamma_2 = \left\{ M \in P / \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$.

EXERCICE 10:

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 cm ; AC = 6 cm et **I** le milieu de [AB] .

1°) a) Construire le barycentre G des points pondé rés (A,5) ; (B, –3) ; (C,2) et le point **I**.

b) Calculer : GA^2 ; GB^2 ; GC^2 .

2°) Déterminer et construire l'ensemble $\mathbf{E_1}$ des points M du plan vérifiant :

$$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$$

3°) Déterminer et construire l'ensemble $\mathbf{E_2}$ des points M du plan vérifiant :

$$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\| .$$

4°) a) Déterminer et construire l'ensemble $\mathbf{E_3}$ des points M du plan vérifiant :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24 .$$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathbf{E_4}$ des points M du plan vérifiant :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72 .$$

EXERCICE 11:

Soient A ; B ; C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que : AB = AC = 5 cm ; BC = 6 cm.

1°) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

2°) Soit G le barycentre des points pondérés (A,2) ; (B, 3) ; (C,3). Construire G et calculer GA.

3°) Soit $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M) = 2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$$

a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG. ;

b) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

c) Déterminer et construire l'ensemble **E** des points M tels que : $f(M) = f(A)$.

EXERCICE 12:

Soit ABC un triangle de côtés respectifs BC = a ; AC = b et AB = c. On appelle A' ; B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC] ; [AC] et [AB] ; G le centre de gravité.

a) Faire une figure

b) Calculer en fonction de a , b et c les longueurs AA'^2 ; BB'^2 ; CC'^2 (On utilisera le théorème de la médiane sans justification).

c) En déduire que la somme $GA^2 + GB^2 + GC^2$ vaut $\frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

d) Si M est un point du plan, montrer que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\,MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

e) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + c^2.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LES APPLICATIONS AFFINES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O; i ; j), soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1-/ Déterminer l'ensemble D des points invariants par f

2-/ Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D et que le milieu de [MM'] appartient à D. Reconnaître f.

EXERCICE 2

Le plan étant muni d'un repère (O; I ; J). Donner l'expression analytique de :

1) L'homothétie h de centre A (–2 ; 3) ;
2) La translation t de vecteur $\vec{u}(-2\ ;\ 1)$;
3) La symétrie par rapport à la droite D d'équation : x + 2y = 0, parallèlement à la droite Δ d'équation : 2x – y = 0.
4) La projection p sur la droite d'équation D_1 : y = x parallèlement à la droite Δ_1 d'équation : x = 0.

EXERCICE 3

Le plan affine P est muni du repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ;y) le point M'(x' ; y') = f (M) défini par :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x \end{cases}$$

1) Montrer que f est une application affine.

2) Montrer que l'isobarycentre des points M, f (M) et f^2 (M)…($f^2 = f \circ f$) est indépendant de M.

EXERCICE 4

Le plan P étant muni d'un repère (O; I ; J). soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ;y) le point M'(x' ;y') défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une application affine et qu'elle admet un seul point invariant.
2) Quelle est la nature géométrique de l'application $f \circ f$?. Caractériser $f \circ f \circ f \circ f$.
3) Soit M un point quelconque de P, on note : f(M)= M_1 ; f(M_1)=M_2 ; f(M_2)= M_3. Démontrer que l'isobarycentre des points M ; M_1 ; M_2 ; M_3 est le point invariant par f.

EXERCICE 5

Le plan P est muni d'un repère $(O; I ; J)$. On considère l'application affine f de $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.
2) Etudier l'ensemble des points invariants par f.
3) Reconnaître la nature de l'application affine f.

EXERCICE 6

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O; I ; J)$. On considère l'application affine f de $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble (E)des points invariants par f.
2) Montrer que si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction dépendante de M que l'on précisera.
3) Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et(E).
4) Reconnaître f et donner une construction géométrique de M'.

EXERCICE 7

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O; I ; J)$; on donne la droite (D) d'équation : 2x + 3y +5 = 0.

1) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe (D).
2) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale p sur la droite (D).
3) Déterminer l'expression analytique de l'affinité f d'axe (D), dont la direction est orthogonale à celle de (D) et de rapport 5.

(on pourra remarquer que « $\overrightarrow{p(M)f(M)} = 5\overrightarrow{p(M)M}$ » équivaut à « le barycentre de (f(M),1) et (M,–5) appartient à (D) »).

EXERCICE 8

On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ;y ;z) de E le point M' (x';y';z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -2x + z - 1 \\ y' = -x - y + z - 1 \\ z' = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une projection affine et donner les éléments caractéristiques de f.
2) Trouver l'image de la droite de E d'équations : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$
3) Trouver l'image du plan (T) de E d'équation : x + y – z + 5 = 0.

EXERCICE 9

Soit (O ;I ;J ;K) un repère orthonormé direct de E. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ; y ; z) de E le point M' (x'; y' ; z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

1) Donner les images par f des quatre points A (2 ; 0 ; 0) ; B (–1 ; $\sqrt{3}$; 0) ; C (–1 ; $-\sqrt{3}$; 0) ; D (0 ; 0 ; 4).
2) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral. Quelle est l'application affine du plan (ABC) dans lui-même qui donne pour images de A ; B ; C respectivement B ;C et A ?
3) Trouver une application affine r, d'un type étudié en cours, telle que r(A)=f(A) ; r(B)=f(B) ; r(C)=f(C) ; r(D)=f(D). Reconnaître l'application f.

EXERCICE 10

Soit dans un plan P rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ les points A (1 ; 1) B(0 ; 2) ; C(–1 ; 2) ; A'(1 ; 1) ; B'(1 ; –1) ; C'(0 ; 3).

1°) Montrer qu'il existe une application affine f unique de P dans P telle que : f (A) = A' ; f (B) = B' ; f (C) = C'.

2°) Calculer les coordonnées x' et y' du point M' image de M(x; y) par l'application f.

EXERCICE 11

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. $\vec{E}$ l'espace vectoriel associé à E et rapporté à la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point M (x ; y ; z) associe le point M' (x' ; y' ; z') tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - y + 2 \\ z' = y + z - 3 \end{cases}$$

1-/ Montrer que f est une application affine bijective.

2-/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3-/ Soit P le plan d'équation : ax + by + cz + d = 0 (a ; b ; c) $\neq$ (0 ; 0 ; 0). Déterminer P' = f(P).

4-/ Déterminer les plans P invariants par f, (c'est à dire f (P) = P).

5-/ Soit la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Trouver une représentation paramétrique de f(D).

EXERCICE 12

Soit P un plan rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M (x ;y) associe le point M' (x' ;y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

1) Quelle est la nature de f ?

2) Donner les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 13

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ; y ; z) de E le point M' (x'; y'; z') tel que : $x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x + 2y + z)$

1) Quelle est la nature de f ?. Donner les éléments qui la caractérisent.

2) Quelle est l'image de la droite (D) d'équation : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

EXERCICE 14

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, soient les droites D et D_1

d'équations respectives : x + y –1 = 0 et 2x – y + 2 = 0.

Définir analytiquement les symétries $\mathcal{S}$ par rapport à D parallèlement à D_1 et $\mathcal{S}'$ par rapport à D_1 parallèlement à D. Étudier : $\mathcal{S}' \circ \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}'$.

EXERCICE 15

A-/ Soit E l'espace rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère f l'application de E dans E définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4z - 4 \\ y' = 2x - y - 2z - 2 \\ z' = 2x - 3z - 4 \end{cases}$$

1°) Quelle est la nature de f ?. Donner les élément s caractéristiques de f.

2°) Quelle est l'image de la droite passant par A(1 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\overrightarrow{U}\,(1\,;2\,;3)$?

3°) Quelle est l'image du plan d'équation : x – z + 2 = 0 ?

B-/ Soit le plan P d'équation : x + y – z + 2 = 0 .
On désigne par S la symétrie par rapport à P parallèlement à la droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{V}\,(1\,;2\,;1)$.

Calculer les coordonnées x' ; y' ; z' de S(M) en fonction des coordonnées x ; y ; z de M.

EXERCICE 16

Un plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. On considère dans ce plan l'application T, qui au point M(x ; y) associe le point

M'(x' ; y') défini par $\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+1 \\ y' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)+1 \end{cases}$

k et α sont des constantes données (on suppose k> 0 et 0 ≤ α ≤2π.

Partie I

Étudier suivant les valeurs de k et de α l'ensemble des points invariants par T. Cet ensemble peut-il être une droite ? Peut-il être vide ?

Partie II

On suppose maintenant l'étude de T dans le cas où k et α prennent des valeurs suivantes : k = 1 et $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

1°) Quel est l'ensemble des points invariants par T ?

2°) a) Quelle est l'image par T de la droite dont l 'équation est : x – $\sqrt{3}$ y = 0 ?

b) Quelle est l'image Δ' par T de la droite Δ passant par $I\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8};\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right)$ et dirigée par $\vec{u}\left(1\,;\sqrt{3}\right)$? Former les équations de Δ et de Δ' .

3°) On considère l'application linéaire φ associée à T.

a) Démontrer que φ est une bijection du plan vectoriel P associé à P dans lui-même ; étudier $\varphi \circ \varphi$.

b) Démontrer qu'il existe deux droites vectorielles globalement invariant par φ. Démontrer que $\vec{e_1}\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est une base normée de l'une de ces droites (que l'on appellera D_1). Déterminer une base normée $\vec{e_2}(b\,;c)$ de l'autre droite (Que l'on appellera (D_2) avec b >0.

c) Quels sont les transformées par φ respectivement des vecteurs de (D_1) et des vecteurs de (D_2) ?

- Écrire dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,)$ la matrice de φ
- En déduire les formules définissant T dans le plan P rapporté cette fois au repère $(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,)$.

d) Démontrer que T est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite, que l'on déterminera et d'une translation dont le vecteur admet la direction de l'axe de symétrie.

EXERCICE 17

Le plan affine euclidien étaient rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la transformation ponctuelle f, qui au point M(x ; y) fait correspondre le point M'(x' ; y') tel que $\begin{cases} x' = -x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha + 2\cos\alpha \\ y' = -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha + 2\sin\alpha \end{cases}$

1°) Déterminer l'ensemble (D) des points doubles de f

2°) En déduire la nature géométrique de f.

EXERCICES SUR LES ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tels que :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est une isométrie affine. f est-e lle un déplacement ? un antidéplacement ?

2°) Démontrer que l'ensemble des points I milieu des segments [MM'] est une droite D.

3°) Déterminer l'expression analytique de la symétr ie orthogonale S par rapport à D.

4°) Déterminer t tel que f = S_o t.

Exercice 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. Soit f l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéris tiques de f.

2°) Mettre sous la forme : z' = az + b ; (z = x + iy et z' = x' + iy' ; a et b sont des nombres complexes).

Exercice 3

A-/ Soit E l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère l'application f de E dans E qui à tout point M(x ;y ;z) associe le point M'(x';y';z') définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z) \\ y' = \frac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z) \\ z' = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z) \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie ;

2) Chercher l'ensemble des points invariants. En déduire que f est une rotation.

3) Déterminer l'angle de f.

B-/ Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation : 2x – y – z – 4 = 0.

Exercice 4

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ on donne la droite (D) d'équation : y = – $\sqrt{3}$x + 2.

1) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_D$ d'axe (D).

2) Soit S la similitude de centre A(0 ;2), d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

   a) Soit M le point d'affixe z = x + iy tel que S(M) = M' d'affixe z' = x' + iy'. Exprimer z' en fonction de z. Quelle est alors la nature de S ?

   b) En déduire l'expression analytique de S dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

3) Soit T l'application affine définie par : T = $S \circ \mathcal{S}_D$.

   a) Montrer que l'application affine T a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

   b) A-t-on $S \circ \mathcal{S}_D = \mathcal{S}_D \circ S$?

4) Montrer que T = $S_D \circ h_{(A,\sqrt{3})} = h_{(A,\sqrt{3})} \circ S_{D'}$ où $S_{D'}$ est la symétrie orthogonale d'axe (D') à déterminer et $h_{(A,\sqrt{3})}$ l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$. On vérifiera que le point A appartient à D.

5) a) Donner la nature de T tout en précisant ses éléments caractéristiques.

   b) Montrer que T est bijective et définir T^{-1}.

Exercice 5

L'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

1) Montrer que f est une rotation ; préciser son axe et son angle

2) On donne les quatre points A(2 ;0 ;0) ;B(–1;$\sqrt{3}$;0) ;C(–1;– $\sqrt{3}$;0) ;D(0;0; 0).

Soit $\mathcal{F}$ ={ A, B, C, D}.

   a) Montrer que $\mathcal{F}$ est globalement invariant par f ;

   b) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

3) Soit g une isométrie qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant

   a)Déterminer l'isobarycentre G des points A, B ,C, D puis calculer GA, GB, GC, GD.

   b)En déduire que g laisse invariant G et D.

4) Quels sont : la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine r du plan (ABC) dans lui-même telle que : r(A) = B ; r(B) = C ; r(C) =A ?
5) Sachant que r(A) = f(A), r(B) = f(B), r(C) = f(C), r(D) = f(D), préciser les éléments caractéristiques de r dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Justifier alors les résultats obtenus.

Exercice 6

Dans l'espace E orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ on considère l'application f qui au point M(x ;y ;z) associe le point M'(x';y';z') définie par :

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = z-1 \\ z' = -y+3 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Montrer que f est un vissage dont on déterminera l'axe (D), l'angle et le vecteur.

Exercice7

A-/ Soit un espace E orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère l'application f qui à tout point M(x ; y ; z) associe le point M'(x';y';z') de E tel que : $\begin{cases} x' = z \\ y' = x+1 \\ z' = y+2 \end{cases}$

Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

B-/ Soit (Δ) la droite de E dont un vecteur directeur est $\vec{i}$ et qui passe par le point H(0 ;0 ;2). On désigne par r la rotation d'axe (Δ) dans laquelle le point O a pour image le point A(0 ;–2 ;2) et par t la translation de vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $t_o r$?. Préciser ses éléments caractéristiques.
C-/ On considère la rotation R_1 d'axe (D_1) : y =0, z = 1 ; et transformant A(0 ;–1 ;1) en O, la rotation R_2 d'axe la droite D_2 : x = 0 ; z = –1 et transformant O en B(1 ;0 ; –1).

1) Calculer les coordonnées (x' ; y' ; z') de M' image de M(x ;y ;z) par l'application f = $R_2 o R_1$.

2) Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

D-/ On donne l'application f_α de E dans E qui au point M(x ;y ; z) associe M'(x'; y' ; z') définies par :

$$\begin{cases} x' = -z + \alpha \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases} \quad où \ \alpha \ est \ un \ réel \ donné$$

1) Montrer f_α est une isométrie.

2) Pour quelle valeur de α, f_α est-elle une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation

3) On suppose dans cette question que α = 1 .
Montrer que f1 est un vissage dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 8

A-/ Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ on considère le plan (P) d'équation : 2x + y – z + 3 = 0
Soit S la symétrie orthogonale par rapport au plan (P).

1) Soit M(a ;b ;c) déterminer les coordonnées (a' ;b' ;c') de M' image par S du point M.
2) On considère la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{U} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Déterminer les équations paramétriques de la droite (D') ensemble des images par S des points de (D).

B-/ On désigne par f l'application affine de E dans E qui à tout point M(x ; y ; z) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' (x'; y'; z') dans $\mathcal{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie de E.

2) Montrer que f est involutive.

3) Donner l'ensemble des points invariant par f.

4) Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 9

I– Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$direct, trouver la nature de l'application f , ses éléments caractéristiques, sa forme réduite éventuelle dans les cas suivants.

$$(1)\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = -x+2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

II– Dans le plan P on considère pour θ réel donné, l'application T_θ affine définie par $T_\theta(0)=0$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice dans la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

a) Calculer θ pour que T_θ soit une rotation ; préciser suivant θ le centre et l'angle de cette rotation.

b) Calculer θ pour que T_θ soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite ; préciser suivant θ l'axe de cette symétrie.

III– Soient R_1 , R_2 , R_3 les rotations de P de centres respectifs $A_1\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$; $A_2\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$; $A_3\begin{vmatrix}-2\\0\end{vmatrix}$ d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{\pi}{2}$ en radians. Soient S_1 ; S_2 ; S_3 les symétries orthogonales par rapport aux droites respectivement :

$$D_1 : y=0\ ;\ D_2 : x+y=2\ ;\ D_3 : -x+y=2\,.$$

– Définir analytiquement : $R_1 R_2\ R_3 S_1\ S_2\ S_3$.

– Définir analytiquement et géométriquement : $S_1 \circ S_2$; $S_2 \circ S_3$; $S_3 \circ S_1$;

– Déterminer $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

IV– Soient dans P les points A(1 ;0) et B(0 ;1) et R la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer $R \circ T \quad et \quad T \circ R$.

V– Soient A, B, A', B' quatre points de P tels que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \neq 0$.

Montrer qu'il existe un antidéplacement f unique tel que $f(A)=A' \ \ et \ \ f(B)=B'$.

Analyse Combinatoire – Probabilité

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1

Les élèves d'une classe sont choisis au hasard l'un après l'autre pour subir un examen.
Calculer la probabilité p pour que l'on ait alternativement un garçon et une fille sachant que :
1°) la classe est composée de 4 garçons et 3 filles
2°) la classe est composée de 3 garçons et 3 filles.

Exercice 2

Une boîte A contient 8 pièces détachées dont 3 sont défectueuses et une boîte B contient 5 pièces dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce détachée dans chaque boîte.
1°) Quelle est la probabilité p_1 pour que les deux pièces détachées ne soient pas défectueuses ?
2°) Quelle est la probabilité p_2 pour que l'une des pièces détachées soit défectueuse et l'autre ne l'est pas ?
3°) Si l'une des pièces est défectueuse et l'autre ne l'est pas, quelle est la probabilité p_3 pou que la pièce défectueuse provienne de l'urne A ?

Exercice 3

Les probabilités pour que trois tireurs atteignent une cible sont : $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. Chacun tire une seule fois sur la cible.
1°) Calculer la probabilité *p* pou que l'un d'eux atteigne exactement la cible.
2°) Si seulement un d'eux a atteint la cible, quelle est la probabilité q pour qu'il s'agisse du premier tireur ?

Exercice 4 (Bac SBT : Juin 1984)

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On jette ce dé et on note le chiffre obtenu sur la face supérieure.
La probabilité p(n) d'obtenir le chiffre n est donnée par les hypothèses suivantes :
P(1) = $\frac{1}{4}$ et les p(i) forment une progression arithmétique de raison a.

1°/ a) Calculer les p (i) , i parcourant l'univers Ω, et leur somme en fonction du premier terme et de la raison a.
b) En déduire les valeurs de la raison a et des probabilités des événements élémentaires.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 ?
2°/ On jette ce dé 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui au 5 jets du dé associe le nombre de fois où le 1 est sorti.
a) Donner la loi de probabilité de X ;
b) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 5 (Bac SBT Juin 1980)

Dans un centre d'examen un surveillant procède à un contrôle d'identité. On admet que 2% des élèves contrôlés ont oublié leur carte d'identité à la maison.
Le surveillant contrôle n élèves. On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'élèves ayant oublié leu carte d'identité à la maison.
1°/Exprimer en fonction de *n* la probabilité de l'événement : {X = 0}.
2°/ Exprimer en fonction de *n* la probabilité, pour qu'au cours du contrôle, il y ait au moins un élève ayant oublié sa carte d'identité
3°/ Calculer le nombre minimum N d'élèves à contrôler pour que la probabilité de l'événement {X≥1} soit supérieure ou égale à 0,95.
4°/ Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 6 (Bac SBT Juin 1982)

Un sac contient 10 jetons qui ont la même probabilité d'être tirés, n d'entre eux sont marqués 10 les autres sont marqués 50. n est un entier naturel vérifiant $3 \leq n \leq 7$.
On tire ensemble 3 jetons du sacs et on désigne par X la variable qui, à un tirage associe la somme des nombres marqués sur les 3 jetons.
1°/ Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2°/ Déterminer la loi de probabilité de X.
3°/ Montrer que l'espérance mathématique de X est /

$$E(X) = \frac{n(n-1)(n-2)}{24} + \frac{7n(n-1)(10-n)}{24} + \frac{11n(10-n)(9-n)}{24} + \frac{5(10-n)(9-n)(8-n)}{24}.$$

4°/ Calculer E(X).

5°/ Déterminer n pour que $60 \leq E(X) \leq 90$.

Exercice 7 (Bac SET Juin 1988)

On considère cubique dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé.
1°/ Lorsqu'on lance le dé une fois, déterminer la probabilité pi d'apparition de la face numérotée i sachant que : $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$ et $p_2 = 3p_1$.
2°/ On lance le dé 5 fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats pairs obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Exercice 8 (Bac SET Juin 1987)

On joue avec deux dés cubiques non pipés.
Les faces de l'un sont numérotées : $0 ; 0 ; \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}$
Les faces de l'autre sont numérotées $0 ; 0 ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}$.
On lance les deux dés simultanément. On note α et β les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures des dés et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le nombre $\sin(\alpha + \beta)$.
1°/ Détermine toutes les valeurs prises par X.
2) : Etablir la loi de probabilité de X.

Exercice 9 (Bac SHT Juin 1983)

Un sac contient 6 boules blanches dont 2 sont numérotées 1, 4 numérotées 2 et 4 boules noires dont 3 sont numérotées 1 et 1 numérotée 2.
1°/ On prélève au hasard et simultanément 3 boules de ce sac ; calculer les probabilités des événements suivants :
A : les 3 boules tirées sont blanches.
B : on a tiré 2 boules noires et une blanche.
C : les 3 boules tirées portent le numéro 1.
2°/ Au cours de la même expérience, on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires extraites lors d'un tirage de 3 boules.
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3°/ On tire maintenant une boule du sac et on appelle D l'événement : la boule tirée est blanche et E l'événement la boule tirée porte le N°2. Calculer les probabilités suivantes :
p(D) et p(E). Les événements D et E sont – ils indépendants ?

Exercice 10 (Bac SET Juin 1982)

Un paquet de 13 cartes à jouer comprend 6 as, 3 rois et 4 dames. Les valeurs des cartes sont les suivantes 1 as vaut 5 points, 1 roi vaut 2 points et 1 dame vaut 1 point. L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage associe la somme des valeurs tirées.
1°/ Déterminer la loi de probabilité de X.
2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 11 (Bac SET Juin 1984)

On dispose de 2 dés cubiques A et B. Le dé A porte sur 2 faces le nombre 6 et sur les autres faces : 0, 1, 2, 3. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le dé B, pipé, porte les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. La probabilité d'apparition de chaque face est inversement proportionnelle au nombre marqué su cette face.
1°/ Quelle set la probabilité d'amener un 6 en lançant une fois : a) le dé A ? b) le dé B ?
2°/ On lance simultanément les deux dés et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les faces.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X
b) Calculer p ({X = 1}) ; p ({x = 7})

Exercice 12 (Bac SBT Juin 1987)

Un sac contient 4 boules bleues numérotées 0, 1, 2, 3 et 3 boules jaunes portant toutes les trois le numéro 1.
On tire simultanément 2 boules du sac. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des nombres figurant sur les boules tirées.

1) Trouver la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X et représenter sa fonction de répartition.

Exercice12.
Soit E = $\{e_1, e_2, e_3\}$ un référentiel associé à une expérience aléatoire p.

1) Combien d'événements peut on envisager sur cet ensemble E ? Préciser ces événements.
2) Déterminer la probabilité de chacun des trois événements élémentaires $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_3\}$
   sachant que : $p(e_1 \cup e_2) = \frac{7}{12}$ et $p(e_2 \cup e_3) = \frac{9}{12}$.

Exercice 13

On considère une population composée de 45% d'hommes et 55% de femmes ; on suppose que 4% des hommes et 0,5% des femmes sont daltoniens : on choisit au hasard une personne dans cette population

1) Quelle est la probabilité que cette personne soit daltonienne ?
2) Sachant que cette personne est daltonienne, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ? Quelle soit une femme ?

Exercice 14 (Bac SHT Juin 1989)

Une urne contient 12 boules : 4 rouges et 8 noires.

1) On tire simultanément 4 boules, soit X le nombre de boules rouges obtenues lors du tirage.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules de la même couleur ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calculer son espérance mathématique.
2) On tire successivement 4 boules en remettant à chaque tirage la boule tirée dans l'urne. Un événement est donc un quadruplet de 4 boules distinctes ou non ; Soit Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'un événement.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
b) Calculer son espérance mathématique et vérifier que E(X) = E(Y).

Exercice 15 (Bac SHT Juin 1990)

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres. On désigne par x, y, z, t respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.
On suppose que les nombres x, y, z, t sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
1°) Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, déterminer les nombres x, y, z, t.
2°) Un voleur s'infiltre dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de vente des animaux est/ 100000F pour un cheval, 67000F pour une vache, 43000F pour un mouton et 12500F pour une chèvre, déterminer les probabilités des événements suivants :

a) La perte du fermier est minimale.
b) La perte du fermier est maximale.
c) La perte du fermier est 210 000F.

Exercice16 (Bac SBT Juin 1990)

Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une fléchette sur cette cible. Il atteint la partie 2 avec une probabilité $\frac{1}{6}$ et marque alors deux points. Il atteint la partie 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et marque alors un point.

1) Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ? Il ne marque alors rien.
2) Le tireur lance sa fléchette deux fois. Les deux lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points marqués. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 17

Oumar place dans une boite vide de craies, six boules bleues trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher

Pour jouer avec son ami, il tire simultanément et au hasard trois boules de la boite.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A « les boules tirées sont toutes de couleurs différentes »
   B « les boules tirées sont toutes de la même couleur »

2) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 18

Dans un sac sont placés dix jetons : 6 jetons portent le numéro 1 et les quatre autres portent le numéro 3 .On tire simultanément 6 jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobables.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros marqués sur les trois jetons.

1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) On appelle A l'évènement «la somme des numéros est strictement inférieure à 7 ».
   Calculer la probabilité de A.
4) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés. Quelle est la probabilité pour que l'évènement Ase réalise exactement trois fois ? au moins trois fois ?

Exercice 19 (Bac étrangers juin 2000).

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
      A= « les boules sont toutes de couleurs différentes »
      B= « les boules sont toutes de la même couleur ».
   b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de probabilité de X. calculer l'espérance mathématique de X.
2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On procède cette fois de la façon suivante ; on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs. Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?.

Exercice 20 (Bac Liban juin 2000)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 5boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. Dans les questions 1) et 2) on tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1) a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A = « les 3 boules sont rouges »
B = « les 3 boules sont de la même couleur ».
C = « les 3 boules sont chacune d'une couleur différente ».
b) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues
. Déterminer la loi de probabilité de X. calculer l'espérance mathématique de X.
2) Dans cette question on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc (n+5) boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D = « Tirer deux boules rouges » ; E = « Tirer deux boules de la même couleur » .
a) Montrer que la probabilité de l'évènement D est : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$;
b) Calculer la probabilité de l'évènement E, p(E) en fonction de n..
Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?.

Exercice 21

Un jeu de cartes comprend 16 cartes, dont 4 rois ; 4 as ; 4 dames et 4 valets.

1) On tire simultanément 3 cartes des 16 cartes. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A = « Avoir exactement 2 Rois » : B = « Avoir 2As et 1 Dame » ; C = « Avoir 2 Valets ou 1 Roi »
E = « Avoir au plus 1 Roi » ; F = « Avoir au moins 2 Dames » ; G = « Avoir 5 As ».

2) On tire successivement 3 cartes sans remise. Calculer la probabilité des évènements suivants :
H = « Avoir exactement 2 Rois » : I = « Avoir 2As et 1 Dame » ; J= « Avoir 2 Valets ou 1 Roi »
K= « Avoir au plus 1 Roi » ; L = « Avoir au moins 2 Dames » ; M = « Avoir 5 As ».

Exercice 22

On lance un dé cubique D1 et D2 dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a le nombre apparaissant sur la face supérieure de D1 et b le nombre apparaissant sur la face supérieure de D2.
Le résultat de l'expérience est le couple (a ; b). On admet l'équiprobabilité des résultats.
1) Donner tous les résultats possibles ;
2) A chaque couple (a ; b) on fait correspondre la valeur absolue de la différence (a–b). On définit ainsi une variable aléatoire X par X = | a – b|.
a) Déterminer les valeurs prises par X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X. Pour chaque réponse, on donnera la valeur exacte et une approximation décimale à 10^{-2} près.

Exercice 23

Un objet produit en série a un coût de production de 950F. Il peut représenter à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A ou le défaut B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant, avec le coût suivant :
100F pour un seul défaut A
150F pour le seul défaut B
250F pour les deux défauts A et B.

1°) On prélève un lot de 200 objets. Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B est observé sur objets et 180 objet n'ont aucun défaut. Reproduire et complèter le tableau suivant :

Nombre d'objets	Avec le défaut A	Sans le défaut A	TOTAL
Avec le défaut B	160	140	12
Sans le défaut B	12	180	188
Total	160	40	200

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90% des objets n'ont aucun défaut, 4% ont le seul défaut A, 2% ont le seul défaut B et 4% ont les défauts A et B.

2°) On note X la variable aléatoire qui à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation. Présenter cette variable aléatoire et sa loi de probabilité sous forme d'un tableau.

Valeurs de $X = x_i$				1200
$P(X = x_i)$				

3°)
a) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de cette variable aléatoire.
On admet pour l'usine que tous les objets produits sont vendus.

b) L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 960 F chaque objet produit ?

c) L'usine veut faire un bénéfice moyen de 100F par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun des eux ?.

EXERCICES SUR LA STATISTIQUE

*Site MathsTICE de **Adama Traoré** Lycée Technique Bamako*

EXERCICE 1

Le relevé des poids en kg des élèves des classes de seconde Technique Industrie est donné dans le tableau ci-dessous

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	83	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

1°) Procéder au dépouillement en dressant un tableau statistique comportant les effectifs, les effectifs cumulés croissants et décroissants. On regroupera les valeurs en classes d'amplitude 4 ; la première étant [50, 54[.

2°) Quel est le nombre d'élèves ayant :

- Un poids strictement inférieur à 78 kg ?
- Un poids supérieur ou égal à 62 kg ?
- Un poids compris entre 53 kg et 75 kg (inclusivement)

3°) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

EXERCICE 2

On donne la distribution de 33 élèves d'une classe selon le nombre de leurs frères et sœurs.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	9	13	7	3	0	1

1°) Établir le diagramme en bâtons de cette série

2°) Calculer les effectifs et fréquences cumulées

3°) Combien d'élèves ont moins de 2 frères ou sœurs ? 2 frères ou sœurs au moins ?

4°) Représenter graphiquement les effectifs cumulés

EXERCICE 3

Un fonctionnaire a un salaire mensuel qu'il utilise de la façon suivante : 20% du salaire sont consacrés au loyer. La moitié du montant du loyer sert à payer l'électricité et l'eau. Le montant du loyer représente 80% des frais de nourriture.

Les crédits qu'il doit rembourser représentent 30% des frais de nourriture et il épargne autant qu'il dépense en crédit.

Ses frais vestimentaires représentent les $\frac{3}{4}$ de son épargne. Le reste est consacré aux frais professionnels.

1°) Construire un diagramme circulaire représentant les dépenses du fonctionnaire.
2°) Sachant que son salaire est de 20 000 € , calculer la part consacrée à poste.

EXERCICE 4

1°) Construire le diagramme en bâtons de la série suivante :

Valeurs x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	7	15	28	40	35	25	13	13	2

2°) Calculer la moyenne de cette série.

3°) Construire l'histogramme et déterminer la moyenne de la série suivante

Classes	[0 ; 10]	[10 ; 20]	[20 ; 30]	[30 ; 40]
Effectifs	4	6	8	1

EXERCICE 5

On donne les notes de Amadou pendant l'année scolaire 2007
Au 1er trimestre il a eu : 10 ; 7 ; 14
Au 2ème trimestre il a eu : 12 ; 9 ; 7
Au 3ème trimestre il a eu : 10 ; 11 ; 13 ; 12 ; 15 ; 16.

1°) Calculer les moyennes $\overline{x_1}$; $\overline{x_2}$ et $\overline{x_3}$ lors des trois trimestres.

2°) Calculer la moyenne annuelle de Amadou (la moyenne de ses notes de l'année).

3°) Pour calculer la moyenne, le Censeur calcule la moyenne des trois moyennes trimestrielles. Amadou n'est pas content qu'en pensez-vous ?

4°) Quels coefficient $C_1 : C_2$ et C_3 faut-il affecter à chaque note du trimestre pour que la moyenne annuelle soit la moyenne pondérée des moyennes $\overline{x_1}$; $\overline{x_2}$ et $\overline{x_3}$ affectés de leurs coefficients ?

EXERCICE 6

Pour $i \in [1 ; 9]$ on donne $n_i = 2i$ et $x_i = 3(i - 1)$.

1°) Calculer $\sum_{i=1}^{9} n_i$; $\sum_{i=1}^{9} x_i$; $\sum_{i=1}^{9} n_i x_i$ étant donné n observations des valeurs x_i et

de moyenne $\overline{x}$.

2°) Calculer $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{x})$

** *Devoir* 1 **

EXERCICE I : (7 points)

On considère le nombre complexe Z = $(1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})$

1) Ecrire sous forme algébrique Z^2.

2) Trouver le module et un argument de Z^2, en déduire le module et un argument de Z

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

4) En utilisant ce résultat résoudre pour $x \in]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = 2.$$

EXERCICE II : (9 points)

1) Ecrire sous forme algébrique les solutions de l'équation: $Z^6 = -1$.
En déduire les solutions de l'équation :

$$(z - i\sqrt{3})^6 = i^2 (\sqrt{3}z - 2i)^6.$$

2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$.

EXERCICE III : (4 points)

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que: $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$

2) Démontrer que quels que soient les nombres complexes U et U' de module 1 vérifiant UU'+1 ≠ 0, le nombre Z = $\frac{u+u'}{1+uu'}$ est réel.

DEVOIR N°2

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - 4z + 8i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 qu'on déterminera.
2) Résoudre (E).
3) Déterminer l'ensemble (**Γ**) des points M, d'affixe t, tels que t^2 soit un réel.

EXERCICE 2 : (5 points)

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

1) Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 4 des nombres 7^n et 3^n.
   En déduire le reste de la division euclidienne de $7^n - 3^n$ par 4.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

EXERCICE 3 : (5 points)

Z est un nombre complexe différent de 1. On pose $z' = \frac{z-1}{\overline{z}-1}$ et $r = \frac{z'+1}{z-1}$

1) Comparer $|z-1|$ et $|\overline{z}-1|$
2) Déterminer $|z'|$
3) On appelle A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives 1, –1, z et z'.
Calculer r en fonction de z et $\overline{z}$. En déduire que r est un réel.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$? On justifiera la réponse.

EXERCICE 4 : (5 points)

1) Trouver les nombres complexes z et t tels que :
$$\begin{cases} (2+i)z + (3+i)\overline{t} = 6-\sqrt{3} + i(2\sqrt{3}-1) \\ (1+3i)\overline{z} + (1+2i)t = \sqrt{3}(3-i) + 6i \end{cases}$$
2) Écrire sous leurs formes trigonométriques z, t et $\frac{z}{t}$
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

DEVOIR N°3

EXERCICE 1 : (5 points)

1) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad et \quad z_2 = 1 - i$$

2) En déduire le module et l'argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2 - (9 + 2i)z + 26$$

1) Déterminer les nombres complexes U tels que $U^2 = -3 + 4i$ puis résoudre l'équation $f(z) = 0$.
2) On pose $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M(x ;y) du plan complexe, tels que f(z) soit un réel. Préciser la nature de cet ensemble.
3) Soit les nombres complexes a et b définis par :

a = $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et b = $-\sqrt{3} + i$. Écrire : a ; b ; $\frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.

Problème :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions (où z_1 est la solution complexe dont la partie imaginaire est positive).

3) Représenter dans le plan complexe les points M_0 ; M_1 ; M_2 d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_1$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

b) Calculer $(z_1)^{20}$.

DEVOIR N°4

EXERCICE 1 : (5 points)

Soient les nombres z et Z tels que $z \neq -3$ et $Z = \frac{z+1-i}{z+3}$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -3 ; $-1+i$ et z.

Déterminer et construire :

a) L'ensemble E_1 des points M tels que $|Z| = 1$

b) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit un réel négatif

c) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit imaginaire pure.

EXERCICE 2 : (5 points)

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans de l'équation : $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + iz^3 = 0$.

Placer les points images de ces solutions dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \sin^2 x$.

3) Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe :

$$z = -3 + 3i$$

4) Soit z_0 le complexe d'image ponctuelle M_0 tel que $z = 3\sqrt{2}\, z_0$ et u l'affixe d'un point M du plan ; tel que les images ponctuelles de z_0 et u soient les sommets d'un triangle rectangle en M_0. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u.

EXERCICE 4 : (5 points)

1) Soit k un réel positif non nul et un nombre complexe $z_k = k - 1 - 2i$.

Calculer $|z_k|$ en fonction de k.

Déterminer k pour zk vérifie : $|z_k| - z_k = 1 + 2i$.

2) Soient u un nombre complexe et l'équation d'inconnue z : $|z| - z = u$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de u telles que l'équation :

$|z| - z = u$ admette une solution ; puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Soit $u = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $r \in \mathbb{R}_+^*$; $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exprimer le module et l'argument de la solution de l'équation à l'aide de r et α.

3) Soient les complexes z et z' tels que :

$z = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$ et $z' = \cos 2\varphi' + \sin 2\varphi'$ avec $0 < \varphi < \pi$.

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u = \frac{1-z}{1-z'}$.

DEVOIR N°5

EXERCICE: (5 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient A le point d'affixe −2 + 3i, B le point d'affixe 1−3i, M le point d'affixe z, (z ≠ −2 + 3i), M' le point d'affixe z' tel que z' = $2i\times\left(\frac{z-1+3i}{z+2-3i}\right)$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que |z'|=2 ;

2) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

Problème : (15 points)

1) Déterminer les racines carrées δ_1 et δ_2 du complexe z=−18i ;
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4iz - 4 + 18i = 0$;

3) Soit le système d'inconnue b, $\begin{cases} b^4 - 12b^2 + 56b - 288 = 0 \\ 4b^3 - 18b^2 + 24b - 64 = 0 \end{cases}$
Montrer que 4 est une solution de chacune des équations du système.

4) Soit $f(z)= z^4 - 4z^3 + 6(2+3i)z^2 + 8(3-7i)z - 288 - 64i$
Montrer que l'équation f(z)=0 admet une solution imaginaire pure note z_A et une solution réelle note z_B.

5) Déterminer les complexes a ; b et c tels que :
$$f(z) = [\, z^2 - (4+4i)z + 16i]\,[az^2 + bz + c]$$
En déduire la résolution de f(z)=0. On notera z_C la solution non réelle et non imaginaire pur dont $\mathcal{R}_e(z_C) > 0$; puis z_D la quatrième solution dont $\mathcal{R}_e(z_D) < 0$.
6) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A ; z_B ; z_C et z_D puis calculer AB² ;AC² ;AD² ;BC² ;BD² ;CD².

7) Construire le barycentre G des points (A,1) ;(B,1) ;(C,1) ;(D,1).
8) Soit l'application f définie par $f(M)=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$.
   a) Déterminer et construire $(\Gamma_1)=\{M\in P / f(M)=140\}$
   b) Déterminer et construire $(\Gamma_2)=\{M\in P / f(M)=108\}$
   c) Quelle est la nature de l'ensemble ($\mathcal{A}$) des points M du plan tels que : $108\leq f(M)\leq 140$.
9) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du polygone ABCD.

DEVOIR N°6

EXERCICE1: (10 points)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)= z^3 -(2+i)z^2 +2(1+i)z- 2i$.

1) Calculer f(i) et en déduire une factorisation de f(z).

2) a) Résoudre dans, l'équation f(z)=0 ;
b) Calculer le module et l'argument de chaque solution de l'équation.

3) On désigne z_1 ; z_2 et z_3 les solutions de l'équation f(z)=0 ; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que : $-\frac{1}{2}Z_1Z_3 = Z_2$.

EXERCICE2: (10 points)

1) Linéariser : $\sin^6 x + \cos^6 x$.

2) Soit z et Z les nombres complexes définies par :

$$z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1} \qquad et \qquad Z = z^4$$

Déterminer les racines quatrième de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

DEVOIR N°7

EXERCICE 1: (5 points)

Soit le nombre complexe z= $-4(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

1) Ecrire z sous forme algébrique

2) a-/ L'écriture z = $-4(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ est-elle une forme trigonométrique ? justifier votre réponse.

b-/ Donner la forme trigonométrique de z utilisant l'argument principal.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$-{−5} dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=\frac{z+1+i}{z+5}$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives −5 ; −1−i ; z.

1- Donner une interprétation géométrique d'un argument de f(z).

2- Déterminer et construire :

a) L'ensemble (E_1) des points M tels que |f(z)|=1 ;

b) L'ensemble (E_2) des points M tels que f(z) soit un réel ;

c) L'ensemble (E_3) des points M tels que f(z) soit un imaginaire pur.

EXERCICE 3: (5 points)

Déterminer les solutions dans de l'équation : $z^4 = (1-i)^4$.
Construire les images dans le plan complexe.

EXERCICE 4: (5 points)

1- Linéariser l'expression : $\left[\cos^2(\frac{3}{2}\theta)-\sin^2(\frac{3}{2}\theta)\right]\times\cos 3\theta$

2- Déterminer le module et un argument du nombre complexe z tel que : z = (1+ cosx + cos2x) + i(sinx + sin2x)

** DEVOIR N°8 **

EXERCICE 1: (5 points)

1- Calculer le module et l'argument du nombre $U = \frac{1}{1+itg\theta}$

(on discutera suivant les valeurs de θ).

2- Linéariser : $\sin^3(2\theta)\cos^2(2\theta)$.

EXERCICE 2: (5 points)

Pour chaque réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, on défini l'application f_α de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :
$f_\alpha(z) = z^2\cos^2\alpha - 2z\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha$.
Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z telle qu'il existe
$\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, vérifiant $f_\alpha(z)=0$.

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z)=0$.
   b- Si le points M(z) appartient à E, que peut-on dire du point M' d'affixe $\overline{z}$?.

2) Pour fixé, on pose : $Z=\frac{1}{2}i\,(z'+z'')\cos\alpha$, où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z)=0$.
Déterminer les racines quatrièmes de Z et représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 3: (5 points)

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit M le point d'affixe z, on pose z = x+iy, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Soit A le point d'affixe −3i et M' d'affixe z' avec z'=x+3iy.
1) Quelle condition doit vérifier z pour que l'on ait M≠A et M'≠B ?
2) Cette condition étant vérifiée, démontrer que :

$$[(AM)//(BM')] \Leftrightarrow \left[\frac{z-i}{z'+3i}\in IR_+^*\right]$$

En déduire l'ensemble(E) des points M tels que (AM)//(BM').
3) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels B, M et le point d'affixe iz soient alignés.

EXERCICE 4: (5 points)

Soit le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$. On donne les points A(1 ;5) ; B(2 ;3) et C(4 ;4).

1) Déterminer le barycentre G_α des points A, B, C affectés respectivement des coefficients : 1 ; 1+ α ; 3–α , avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer α pour que G_α soit le point D(1 ;3).

3) Déterminer l'ensemble des points G_α quand $\boldsymbol{\alpha}$ décrit $\mathbb{R}$.

4) On prend α =5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 40$. Représenter cet ensemble.

EXERCICE 5: (5 points)

Soit ABCD un carré. Déterminer un triplet de nombres réels (α ;β ;γ) tel que A soit le barycentre du système (B, β) ; (C, α) ; (D, γ).
Déterminer ensuite l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$$

DEVOIR N°9

EXERCICE 1: (5 points)

A/- Soit le polynôme $f(x)=2x^3-10x^2-25x-21$.

1) Calculer f(7) et en déduire que :$f(x)=(x-7)(ax^2+bx+c)$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation f(x)=0.

B/- Un entier naturel N, s'écrit : $\overline{5531}$ dans le système de numération de base n et $\overline{3676}$ en base (n+1). Calculer n et donner l'écriture de N dans le système décimal.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit A ;B ;C trois point du plan P tels que AB=AC=5 et BC=6

1) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$;
2) Soit G barycentre de (A,2) ; (B,3) ; (C,3).
   construire G et calculer GA.
3) Soit f : $\mathcal{P}\rightarrow\mathbb{R}$

   M$\mapsto$ $f(M)=2(\overrightarrow{MB}\bullet\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MC}\bullet\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB})$

   a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG.
   b) Caculer f(A) et f(G).
   c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que : f(M)=f(A).

Problème : (10 points)

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$P(z)=z^3-(7+9i)z^2+(39i-14)z+50$

1) Montrer P(z)=0 admet une racine z_0 imaginaire pure.
2) Résoudre l'équation P(z)=0. On notera z_1 la racine non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle ; et z_2 la troisième racine.
3) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B , C d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$MA^2-MB^2+MC^2=4$.

DEVOIR N°10

EXERCICE 1: (4 points)

1/- Démontrer que ∀ x ∈ ℝ $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$

2/- Résoudre dans ℝ cos2x – sin2x + 1 =0.

EXERCICE 2: (8 points)

On considère l'application de ℂ dans ℂ définie par :

$f(z) = z^2 - (9+2i)z + 26$

1/- Résoudre dans ℂ l'équation f(z)=0. On notera z_1 la solution de f(z)=0 qui a la plus grande partie réelle et z_2 l'autre racine.

2/- Soit A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 2.$

3/- On pose z=x+iy. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que f(z) soit un réel. Préciser sa nature.

EXERCICE 3: (8 points)

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectifs :

$z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$; $z_B = 2 + 2\sqrt{3}i$; $z_C = 8$.

1/- Ecrire z_A ; z_B ; z_C sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C.

2/- Déterminer les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés {(A, $|z_A|$) ;(B, $|z_B|$) ; ;(C, $|z_C|$)} puis placer G.

3/- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right\|$.

DEVOIR N°11

EXERCICE 1: (4 points)

Démontrer par récurrence que :

1- ∀ n∈ ℕ, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2- ∀ n∈ ℕ*, $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+.....+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

EXERCICE 2: (4 points)

1/ Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit :

$\overline{abc}^{7}$ et $\overline{cba}^{9}$

2/ Résoudre dans $(Z/7Z)^2$ le système suivant : $\begin{cases}\dot{3}x+\dot{3}y=\dot{3}\\ \dot{2}x+y=\dot{5}\end{cases}$

EXERCICE 3: (4 points)

1/ En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer : 354 ∧ 25, et trouver deux entiers relatifs k et ℓ tels que : $354k + 25\ell = 1$.

2/ Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $(x \vee y) - 9(x \wedge y) = 13$.

EXERCICE 4 : (4 points)

1/ Déterminer l'ensemble des couples (x ;y) d'entiers naturels non nuls tels que : $\begin{cases}x\wedge y=7\\ x\vee y=84\end{cases}$

2/ a) Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.

b) Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient :

$$\begin{cases}m+3d=276\\ 10\prec d\prec 30\end{cases}$$

EXERCICE 5: (4 points)

1/- Déterminer selon les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n.

2/- En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N=22^{9n+2}- 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

DEVOIR N°12

EXERCICE 1: (5 points)

1-/ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul

$$2+6+12+.....+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2-/ Le Directeur du Lycée Technique de Bamako dispose 15 cahiers et 25 bics. A l'aide de ces fournitures, il veut faire des lots identiques pour récompenser les plus méritants de ses élèves.

a) Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut former ?

b) On suppose qu'il peut former 5 lots et qu'il a en tout 40 objets (bics et cahiers). Le nombre de cahiers étant inférieur au nombre de bic, déterminer le nombre de cahiers et de bics.

EXERCICE 2: (5 points)

1/- Trouver l'entier N du système décimal qui s'écrit : $\overline{ab7}^{(9)}$ *et* $\overline{a7b}^{(8)}$

2/- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.

b) Déterminer l'ensemble des couples (x ;y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que :

d = x $\wedge$ y et m = x $\vee$ y vérifient la relation $\begin{cases} m-4d=124 \\ 3 \prec d \prec 50 \end{cases}$

EXERCICE 3: (5 points)

Soit N un entier naturel tel que en numération décimale, N s'écrive $\overline{abcd}$, et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

1-/ Montrer que si a=7 alors $\overline{bcda}-10N$ soit divisible par 7.

En déduire que pour cette valeur de a, N est divisible par 7.

2-/ Montrer que 10N–3a est multiple de 7.

En déduire que si N est divisible par 7, alors a=7.

EXERCICE 4: (5 points)

La lettre a désigne un nombre réel strictement positif, on considère un triangle ABC tel que AB=3a ; AC=4a ; BC=5a.

1°) Déterminer le barycentre G des points (B,4) ;(C,3) ;(A,–5).

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que l'on ait :

$$4MB^2+3MC^2-5MA^2=12a^2.$$

DEVOIR N°13

EXERCICE 1: (5 points)

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $1+3+5+\ldots\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$.

2) $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

EXERCICE 2: (5 points)

1) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$

2) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système suivant

$$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$$

EXERCICE 3: (5 points)

Trouver le reste de la division par 13 du nombre $N = 100^{1000}$.

EXERCICE 4: (5 points)

1) Trouver l'écriture décimale des nombres suivants :

$$\overline{1A}^{16} \ ; \ \overline{FF0}^{16} \ ; \ \overline{1110}^{2} \ ; \ \overline{1010100}^{2}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ les équations suivantes

$\dot{3}x = \dot{4}$; $x^2 + x = \dot{0}$; $x^3 = \dot{0}$

DEVOIR N°14

EXERCICE 1: (10 points)

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'entier $n^2(n^2-1)$ est divisible 12.

2) a) Etudier les restes de la division par 7 des nombres 2^n et 3^n $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer t, entier positif tel que : $2^t + 3^t \equiv 0\ [7]$.

3) a) Montrer que $\forall\ \in \mathbb{R}\ x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$. Mettre le polynôme $P(x)= x^4 + 3x^2 + 4$, sous la forme d'un produit de facteurs du second degré.

b) Déduire de ce qui précède que si la base du système de numération est supérieure ou égale à cinq, le nombre 10304 est divisible 112. La base étant sept, exprimer le quotient de la division de 10304 par 112.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit (a ;b ;c) un triplet d'entiers naturels tels que :

$a = \overline{111}^{(n)}$; $b = \overline{114}^{(n)}$; $c = \overline{13054}^{(n)}$

a) Sachant que c=ab, déterminer la base n puis les écritures des nombres a, b, c dans le système décimal.

b) Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide que a et b sont étrangers.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation ax + by = 1.

d) Résoudre $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$.

$(x ;y) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $\begin{cases} \dot{2}x - y - \dot{2} = \dot{0} \\ \dot{3}x + \dot{2}y - \dot{1} = \dot{0} \end{cases}$

EXERCICE 3: (5 points)

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}$, on pose : $\mu = a \vee b$ et $\delta = a \wedge b$.

Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers naturels tels que :

a) $\mu - 9\delta = 13$

b) $\begin{cases} a + b = 96 \\ \mu = 180 \end{cases}$

DEVOIR N°15

EXERCICE 1: (6 points)

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de 4^n et de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$

b) Un nombre B du système de numération de base 4 s'écrit : $B=\overline{2103211}$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division de B par 7.

2) a) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} p\gcd(a,b)=42 \\ ppmc(a,b)=1680 \end{cases}$$

b) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tel que $8x\equiv 7[5]$

c) Résoudre dans l'équation $336x + 210y = 294$.

EXERCICE 2: (4 points)

On considère la famille de fonctions numériques f_m définie par :

$f_m(x)=\dfrac{(m-2)x^2+3x-5}{x+1}$ où m est un paramètre réel.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ on désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe de f_m.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_m$ de f_m.

2) Discuter suivant les valeurs de m, les limites de f_m aux bornes de $\mathcal{D}_m$.

3) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ de f_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

Problème : (10 points)

A] Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=z^3-(1+i)z^2-4+4i$.

1) Vérifier que l'équation f(z)=0 admet une solution réelle z_1 et un solution imaginaire pure z_2 que l'on déterminera.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z)=0 ;

b) Calculer le module et l'argument principal des trois solutions de l'équation f(z)=0. On désignera par z_3 la troisième solution.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé , on désigne par M_1 ; M_2 ; M_3 les points d'affixes z_1 ; z_2 ; z_3.

Placer ces points. Préciser la nature du triangle $M_1M_2M_3$.

B] On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $mz^2 - (m^2+4)z + 4m = 0$ (1) où m est un paramètre complexe.

1) Résoudre l'équation (1) pour m=1+i.
En désignant par z_1 et z_2 les solutions obtenues ; montrer que : $z_2 = \frac{4}{z_1}$.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?.

2) Donner la forme générale des solutions de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

3) On se place dans le cas où les deux solutions de l'équation (1) sont des nombres complexes conjugués. Déterminer leur module.

4) Montrer que si l'équation $z^2 - Sz + 4 = 0$ admet deux solutions conjuguées, alors S est un réel vérifiant ; $-4 \leq S \leq 4$.

5) Calculer les solutions z_0 et $\overline{Z_0}$ lorsque S=−2.
Donner leur forme trigonométrique. Représenter les solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

6) Calculer z_0^5 et $\overline{Z_0}^5$ puis montrer que : $\frac{Z_0^{\,5}}{16} = \overline{Z_0}$ *et* $\frac{\overline{Z_0}^5}{16} = Z_0$.

DEVOIR N°16

EXERCICE 1: (10 points)

Soient A ; B ; C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que AB=AC=5 ; BC=6.

1) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

2) Soit G le barycentre de (A,2) ; (B,3) ;(C,3).
Construire G et calculer GA.

3) Soit f l'application de $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M) = 2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$$

a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG.
b) Calculer f(A) et f(G).
c) Déterminer et construire l'ensemble E des points tels que f(M)=f(A).

EXERCICE 2: (10 points)

1) Vérifier que pour tout réel x : $x^2 - 1 = \dfrac{(2x-1)(2x+1)-3}{4}$.

En déduire $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{1-2\sin x}\,dx$.

2) On donne : $f(x) = \dfrac{1}{10} e^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln 2x \right)$.

En remarquant que f=hk' + kh' calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

3) Calculer $\int_0^{\pi} e^x \sin 3x\, dx$.

4) Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x\, dx$

a) Calculer I+J.
b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.

Calculer f'(x). En déduire I–J. Calculer I et J.

DEVOIR N°17

EXERCICE 1: (5 points)

Linéariser $\sin^5 x$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \, dx$.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit le polynôme complexe P tel que :

$$P(z)=\sqrt{6}\,(z^4+1)-2(1+2i)(z^3-z)-2\sqrt{6}\,z^2$$

Calculer P(1) et P(–1) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0.

EXERCICE 3: (10 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-2}$$

1) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la variation de f. Calculer f(1) et f(4).

c) Quelle est la limite de g(x)= f(x) –x +3 quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$. En déduire que la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f admet la droite (D) d'équation y=x–3 pour asymptote.

2) a) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes de coordonnées ?
Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en chacun de ces points. Construire ces tangentes dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le même repère.

**DEVOIR N°18 **

EXERCICE 1: (5 points)

Soit f la fonction définie par f(x) = |x -1| – $\frac{2}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2°) Ecrire f(x) sans valeur absolue.

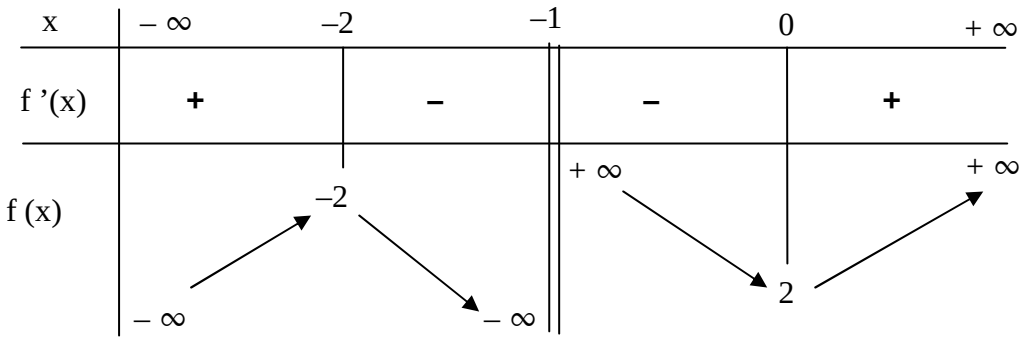
3°) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

4°) La fonction f est-elle continue au point 1 ?

5°) La fonction f est-elle dérivable au point 1 ? Que peut-on dire ?

EXERCICE 2: (5 points)

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant



La fonction f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ;b et c sont des réels.

1) Calculer f'(x) ;

2) Trouver les coefficients a, b, c en utilisant les donnés ci-dessus.

Problème: (10 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{x(x+1)}{(x+2)^2}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

1) a/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
b/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Etudier les variations de f.

3) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite d'équation y=1.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x=0.
Déterminer la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (T).

5) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T).

6) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\frac{|x^2+x|}{(x+2)^2}$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.
a/- Ecrire g(x) sans valeur absolue.
b/- Sans étudier g(x), tracer sa courbe $(\mathcal{C}')$.

7) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} h(x)=f(x) \;\; si \;\; x\geq -1 \\ h(x)=2x+a \;\; si \;\; x\prec -1 \end{cases}$

a/- Pour quelle valeur de a h est-elle continue au point –1 ?

b/- Pour cette valeur de a, étudier la dérivabilité de h au point –1.

DEVOIR N°19

EXERCICE 1: (5 points)

Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de chacune des fonctions suivantes définies ci-dessous :

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-3x} \quad ; \qquad g(x)=\sqrt{x^2+x-2}$$

EXERCICE 2: (5 points)

Calculer les limites suivantes :

a/- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2 x}$; b/- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$; c/- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

Problème: (10 points)

Soit f_m la famille de fonctions définie par $f_m(x)=\frac{mx^2-1}{x^2-m}$ où m est un paramètre réel. On désigne par ($\mathcal{C}_m$) la courbe de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1/ a- Donner, selon les valeurs de m, le domaine de définition de f_m.

b- Montrer que, pour toutes valeurs de m, f_m est paire.

c- Préciser selon les valeurs de m, sur quel ensemble f_m est dérivable. Calculer $f_m'(x)$ pour x élément de cet ensemble. Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle constante sur son domaine de définition ?

2/ Pour m≠1, calculer $f_m(1)$; en déduire qu'il existe deux points appartenant à toutes les courbes ($\mathcal{C}_m$) sauf ($\mathcal{C}_1$).

3/ Tracer ($\mathcal{C}_1$).

4/ Etudier les variations de f_{-2} et tracer ($\mathcal{C}_{-2}$).

5/ Faire l'étude complète de f_4 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé distinct du précédent.

DEVOIR N°20

EXERCICE 1: (4 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie de]2;+∞[sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-9}{x-2}$.

1) Montrer que f admet une réciproque f^{-1}, que l'on définira.
2) Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

EXERCICE 2: (6 points)

Dans le plan affine euclidien E, on considère trois points A, B et C tels que : AB=4 ; AC=3 ; BC=5 (en cm).

1) Trouver l'ensemble des points M de E vérifiant : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant un vecteur donné du plan vectoriel associé à E).
2) Le système $S=\{(A,1);(B,1);(C,-3)\}$ a-t-il un barycentre ? si oui trouver le puis le construire.
3) Déterminer alors l'ensemble (H) des points M de E vérifiant :
$MA^2+MB^2-3MC^2=5$ puis construire (H).

EXERCICE 3: (6 points)

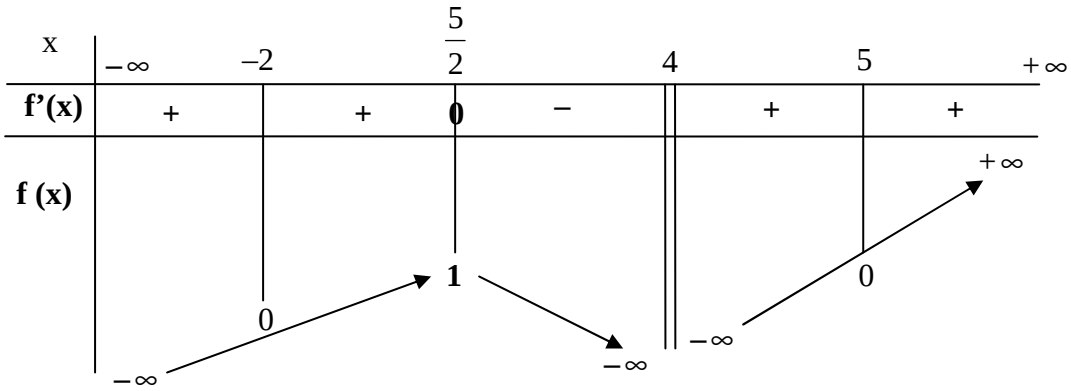
Soit E un espace affine rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère l'application f de E dans E définie par :∀ M(x ;y ;z), f(M)=M'(x' ;y' ;z')

avec $\begin{cases} x'=3x-4z-6 \\ y'=2x-y-2z-4 \\ z'=2x-3z-6 \end{cases}$

1) Montrer que f est une application affine.
2) Quelle est la nature de f ? En déduire ses éléments caractéristiques.
3) Trouver l'image du plan P d'équation : x+y–z+3=0 par f.

EXERCICE 4: (4 points)

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :



Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f sachant que la droite d'équation $y=\frac{1}{3}x+1$ est une asymptote à ($\mathcal{C}_f$).

DEVOIR N°21

EXERCICES: (8 points)

1) Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2) Soit $J = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

a-/ En intégrant par parties, montrer que $J = \frac{1}{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx$;

b-/ En déduire que $0 \leq J \leq \frac{1}{100\pi}$

3) a-/ Soit la fonction numérique f :

$$f :]1 ; +\infty[\to IR \qquad qui\ à \quad x \mapsto \quad f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad .$$

Calculer $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ pour x >1.

b-/ Soit la fonction numérique g :

$$g :]1;+\infty[\to IR \quad qui \quad à \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$

Trouver les réels a ; b ; c tels que : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

Calculer $G(x) = \int_2^x g(t)dt$ pour x > 1.

c-/ Calculer $H(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2-1)^2} dt$ pour x >1.

d-/ Déterminer $\lim_{x \to +\infty} H(x)$, (on pourra écrire que pour x >1 :

$\ln(x^2-1) = 2\ln x + \ln(1 - \frac{1}{x^2})$).

Problème: (12 points)

1) Soit f la fonction définie par f(x)=xlnx–x pour x >0 et f(0)=0.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}+$. Etudier f et tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$ pour x >0 et g(0)=a.

Quelle valeur faut-il donner à a pour que g soit continue en x_0=0 ?
a-/ Etudier la dérivabilité de g en x_0=0.
b-/ Etudier g et tracer sa courbe ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère que ($\mathcal{C}_f$).
3) Déterminer en cm^2, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathcal{C}_f$) et les droites d'équations : x=1 et x=e.
4) Après avoir dérivé la fonction h définie par $h(x)=x^3\ln x$, déterminer une primitive de g et l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine :

$\mathcal{D}_\alpha$={ M(x ;y)/ **α** ≤x ≤e$\sqrt{e}$ et 0≤–y ≤–g(x)} où **α** est un paramètre réel positif inférieur à e$\sqrt{e}$. Déterminer s'il existe $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

DEVOIR N°22

EXERCICE 1: (12 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{x^4+12x^3+40x^2+24x-44}{(x+3)^2}$$

1) Déterminer les réels a ; b ; c ; d tels que pour tout x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f : $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{(x+3)^2}$

2) Etudier les variations de la fonction f ;
3) Montrer que la parabole (P) d'équation $y=x^2+6x-5$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.
4) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (P).
5) Tracer (P) et ($\mathcal{C}_f$).
6) Trouver une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$.
7) Calculer $A=\int_0^{-2} f(x)dx$.

EXERCICE 2: (8 points)

Soit f définie par $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ et soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Etudier la fonction f ;

2) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique (Δ)
3) Montrer que $\forall$ x $\in$ [1,2] on a | f'(x)| $\leq \frac{3}{4}$.

4) En déduire qu'en appliquant l'inégalité des accroissements finis à [x,2] on a : $1+\frac{3}{4}x \geq f(x)$.

5) Montrer que la restriction g de f à [1, + ∞[réalise une bijection de [1,+ ∞[sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

DEVOIR N°23

I) Soit f la fonction définie par f(0)=1 et f(x)=−2x+1+xlnx.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

3) a) Calculer f'(x) si x $\geq$0.

b) Etudier les variations de f et la limite de f en +∞

4) Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 ?

5) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Déduisez-en le comportement asymptotique de la courbe représentative de f.

II) A)-On considère la fonction numérique g définie par $g(x)=e^x+x-5$

1) Etudier le sens de variation de g (on ne demande pas de déterminer les limites de g, ni de construire sa courbe représentative).

2) Calculer g(0) et g(2). Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et une seule.

3) Justifier l'encadrement 1.30< α <1.31.

B)-Soit la fonction numérique f définie sur]−∞,5[par f(x)=ln(5-x).

1) Etudier le sens de variation de f.

Préciser les limites de f en −∞ et en 5.

2) Vérifier l'égalité f (α)=α.

3) Montrer que, pour tout réel x de [0,3] on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout réel x de [0,3] on : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

4) a-/ Montrer que si 0 ≤x ≤3 alors 0 ≤ f(x) ≤ 3 .

b -/ On considère la suite (U_n) d'éléments de [0,3] en posant :

U_0=1 et U_{n+1}=f(U_n) pour tout entier naturel n.

Montrer que pour tout entier naturel n on a $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

En déduire que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0-\alpha|$ et que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c-/ Déterminer un entier naturel n_0 tel que :

Pour n $\geq n_0$ on a $|U_n-\alpha| \leq 10^{-3}$.

** DEVOIR N°24 **

EXERCICE 1: (5 points)

Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation

$\text{Cos}^3x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\cos^3 x$.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit la fonction f qui, à tout nombre réel x fait correspondre

$$f(x)=(x-3)\sqrt{x}$$

Construire dans un repère orthonormé la courbe de f.

Problème : (10 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $-z^3+(4+i)z^2+(8+6i)z+4+28i=0$.

1-/ Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2-/ Trouver les nombres complexes α et β tels que l'équation puisse s'écrire : $(z-z_0)(-z^2+\alpha z+\beta)=0$.
Déduisez-en les autres solutions z_1 et z_2 de cette équation.
(on désignera par z_1 la solution dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution).

3-/ On considère un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé. On désigne par A, B, C les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_0 , z_1 , z_2.
Placer les points A, B, C et déduire la nature triangle ABC.

4-/ Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(x ;y) du plan $\mathcal{P}$ tels que ; $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 3$.

DEVOIR N°25

EXERCICE 1: (4 points)

Après avoir déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions ci-dessous, calculer les fonctions dérivées.

1-/ $f(x)=\left(\frac{2x-3}{1-x}\right)^3$;2-/ $f(x)=\frac{3(2+x^2)}{6+x^2}$;3-/ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$;4-/ $f(x)=\cos^3 2x$.

EXERCICE 2: (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x+3}{(x-1)^3}$.

1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et trouver les réels a et b tels que pour tout x de $\mathcal{D}_f$: $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$.

2-/ Dresser le tableau de variation de f.

Problème : (12 points)

Pour tout entier n strictement positif on définit l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x, associe : $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe de f_n.

1-/ a) Calculer la fonction dérivée de f_n; en déduire que pour tout n ≥1, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}+$.

b) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n.

c) Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2-/ Etudier et tracer la courbe de f_1.

DEVOIR N°26

EXERCICE 1: (5 points)

Trouver sept termes d'une suite géométrique : u_1 ; u_2 ; … ; u_7 tels que

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=2 \\ u_5+u_6+u_7=1250 \end{cases}$$

On montrera d'abord que : $\frac{u_5}{u_1}=\frac{u_5+u_6+u_7}{u_1+u_2+u_3}$.

EXERCICE 2: (5 points)

1-/ Résoudre l'équation différentielle :3y''+48y=0
2-/ Déterminer la solution f de cette équation sachant que :

$f(\frac{\pi}{8})=2$ et $f'(\frac{\pi}{8})=2$.

EXERCICE 3: (5 points)

Soit la fonction f :$t \mapsto \frac{1}{t}$ pour t ∈ [n ;n+1] ; n>0.

1-/ Montrer que pour tout n ∈ ℕ, on a: $\frac{1}{n+1} \le \int_{n^2}^{n+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{n}$.

2-/ On considère la suite de terme général :

$U_n = 1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n} - \ln n$, n ≥ 1.

Montrer que (U_n) est monotone, à termes positifs ; conclure.

EXERCICE 4: (5 points)

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1-/ Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Etudier la continuité de f au point x=0.
2-/ Etudier les variations de f. Représenter graphiquement f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$.

DEVOIR N°27

EXERCICE 1: (5 points)

1-/ Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, on a :

$3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0\ [7]$.

2-/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$.

3-/ Résoudre le système $(a ; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \end{cases}$ avec $m = a \vee b$.

EXERCICE 2: (5 points)

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx \qquad où \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}.(on\ convient\ que\ x^0 = 1).$$

1-/ Calculer u_0 et u_1.

2-/ Comparer x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0 ; 1]$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

3-/ En observant que $u_{n-1}+u_n = \int_0^1 x^{n-1}.\sqrt{1+x}\ dx$, établir que $u_{n-1}+u_n < \frac{\sqrt{2}}{n}$.

4-/ A l'aide des résultats précédents, établir que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \le U_n \le \frac{\sqrt{2}}{2n}$.

En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème: (10 points)

1-/ Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2+1-\ln x$.

a/ Etudier les variations de g. Préciser les limites de g en 0 et $+\infty$.

b/ Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x. Calculer g(1).

2-/ Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.

a/ Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

b/ Démontrer que f(x)=0 admet deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$.

c/ on désigne par (Δ) la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x+1$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f. Etudier le signe de $d(x) = f(x)-(-\frac{1}{2}x+1)$ et en déduire la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

d/ Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.Tracer (Δ)et $(\mathcal{C}_f)$.

DEVOIR N°28-ESS-2004

EXERCICE 1: (7 points)

On considère la suite (U_n) de nombres réels définie par : $U_0=2$ et pour tout entier naturel n, $\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$.

1-/ Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

2-/ Montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = e$.

3-/ Exprimer U_n en fonction de n.

4-/ Préciser le sens de variation de la suite (U_n).

EXERCICE 2: (7 points)

1-/ a/ Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$$z_n=(1+i)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

b/ Pour quelles valeurs de n, z_n est-il un nombre réel ?

2-/ Dans le plan complexe, on désigne par A_n le point d'affixe z_n.

a/ Déterminer les nombres réels α et β tels que le barycentre des points A_1, A_2, A_3 et A_4 affectés des coefficients α, β, 1 et 1 soit le point d'affixe nulle.

b/ x étant un nombre réel, calculer en fonction de x le module du complexe $z=e^{-x} + ixe^{-x}$.

EXERCICE 3: (6 points)

1-/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation: $6x-13y=5$.

2-/ Une variable aléatoire x ne prend que les valeurs : –1 ; 1 et 2 avec les probabilités respectives. $A=\frac{x}{5}$; $B=\frac{3x-8y}{5}$; $C=\frac{2x-5y}{5}$.

a/ Montrer qu'il existe un couple unique (x ;y) d'entiers tel que ces données soient acceptables.

b/ Calculer alors l'espérance et la variance de x.

DEVOIR N°29

EXERCICE 1: (2 points)

On considère la suite (I_n) : $n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{4}} nx^n \cos 2x\, dx$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$.

En déduire que (I_n) converge.

EXERCICE 2: (6 points)

On considère la suite (U) de premier terme $U_0=0$ et définie pour tout entier positif par la relation de récurrence : $U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}$.

1-/ a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$.

b/ Etudier le sens de variation de la suite (U) et en déduire que la suite est convergente.

c/ Déterminer la limite ℓ de la suite (U).

2-/ a/ Montrer que pour tout nombre réel x de $[0 ; \pi]$ on a :

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

b/ Montrer alors que pour tout entier naturel n : $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

c/ Retrouver ainsi la limite ℓ de la suite (U).

Problème : (12 points)

A] Soit ($\mathcal{E}$) l'équation différentielle du second ordre : y''−3y'+2y=0.

1-/ a/ Quelles sont les solutions de ($\mathcal{E}$).

b/ Quelle est la solution de , dont la courbe représentative ($\mathcal{C}$) admet au point d'abscisse 0, la même tangente que la courbe ($\mathcal{C}'$) représentative de $y=e^{3x}$?. On dit que ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) sont tangentes.

2-/ Représenter dans un même repère orthonormé les courbes ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) dont on précisera les positions relatives.

3-/ α étant un nombre réel strictement positif, soit h_α les fonctions telles que : $h_\alpha(x) = -\alpha^2 e^x + 2\alpha e^{2x}$.
a/ Montrer h_α est solution de ($\mathcal{E}$).

b/ Soit ($\mathcal{C}_\alpha$) la courbe représentative de h_α.

Après avoir calculé en fonction de α les coordonnées du point commun à ($\mathcal{C}_\alpha$) et ($\mathcal{C}'$), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

c/ Préciser les positions relatives de ($\mathcal{C}_\alpha$) et ($\mathcal{C}'$).

B] Soit ($\mathcal{E}'$) l'équation différentielle du second ordre :

$$y''-3y'+2y=-x^2+x+2$$

1-/ Trouver trois nombres réels a ; b ; c pour que la fonction polynôme t : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ solution de ($\mathcal{E}'$).

2-/ On pose : $f(x)=g(x)-\frac{1}{2}x^2-x$. Montrer que f est solution de ($\mathcal{E}'$) si et seulement si g est solution de ($\mathcal{E}$). En déduire l'ensemble des fonctions f, solution de ($\mathcal{E}'$).

3-/ Déterminer la solution de ($\mathcal{E}'$) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

DEVOIR N°30

EXERCICE 1: (10 points)

On considère le nombre complexe $X = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

1-/ Mettre x sous la forme trigonométrique.

2-/ z étant un nombre complexe donné, on considère la suite (U_n) définie par : $U_1=z$ et $U_n= U_{n-1}.x$ pour $n \geq 2$.

a/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 sachant que : $U_1.U_2.U_3 = 2(1-i)$ on prendra $\arg(z) \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

b/ Montrer que U_1, U_2, U_3 forment une progression géométrique dont on déterminera la raison.

c/ Montrer que les arguments de U_1, U_2, U_3 forme un progression arithmétique dont on déterminera la raison.

EXERCICE 2: (10 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 2x+1+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

1-/ Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son domaine de définition. On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Préciser les asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$ en particulier, on établira l'existence d'une asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

2-/ Etudier le sens de variation de f et indiquer pour tout x de son domaine de définition la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3-/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

DEVOIR N°31

EXERCICE 1: (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et système d'équations suivants

1-/ $3^{2x+2}+26\times3^{x}-3=0$; 2/ $(\ln x)^2-7\ln x+6=0$

3/ $\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2$; 4/ $\begin{cases}2\ln x-3\ln y=9\\ \ln x+5\ln y=-2\end{cases}$

EXERCICE 2: (12 points)

On considère la fonction f définie par :$f(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x}$.

1-/ Etudier la fonction f.

2-/ Construire la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans le plan muni d'un repère orthormé (unité graphique=2cm).

3-/ On considère la fonction F définie par : $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

a/ Déterminer les réels a,b, c pour que F soit une primitive de f.

b/ En déduire l'aire A, en cm^2 de la partie du plan limitée par des abscisses, la courbe ($\mathcal{C}_f$) et les droites d'équations : x=0 et x=3.

NB : On prendra $e^3=20$; $e^{-3}=\frac{1}{e^3}=\frac{1}{20}$; $e^2=7$.

DEVOIR N°32

EXERCICE : (6 points)

1-/ Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel t (t$\in$$\mathbb{R}$−{−1 ;0}) on ait : $\frac{1}{t(t+1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$.

Calculer alors : $\int_1^2 \frac{dt}{t\ (t+1)}$.

2-/ Calculer : $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ et $\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$.

3-/ Calculer : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\ dx$.

Problème : (14 points)

Etant donné un réel m, on considère l'application f_m : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui à x associe $f_m(x)= (1-mx)e^{x+1}$.

1-/ Suivant les valeurs de m, dresser le tableau de variation de f_m.

2-/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$g(x)= (1-x)e^{x+1}$.

On désigne par ($\mathcal{C}_g$) la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

a/Dresser le tableau de variation de g ;

b/Ecrire l'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_g$) en son point $x_0=-1$.

c/ Déterminer la fonction dérivée seconde g'' de g et étudier le signe de g''(x).

d/ Construire (T) et ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère.

3-/ a/ En utilisant une intégration par parties, déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de g, qui s'annule pour x=−1.

b/ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par ($\mathcal{C}_g$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=−1 et x= 1,5.

4-/ Soit h la restriction de g à l'intervalle I=]0 ;+∞[.

a/ Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ On note h^{-1} l'application réciproque de h. Calculer le nombre dérivée de h^{-1} au point x=0.

5-/ Les coordonnées d'un point mobile M sont, à la date t et dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, x=−1+lnt et y=(2−lnt)t, avec t [2 ;+∞[.

a/ Déterminer la trajectoire de M.

b/ Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M à la date t.

DEVOIR N°33

EXERCICE : (7 points)

Soit f : [0 ;1] → $\mathbb{R}$

x ↦ $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

1-/ Déterminer les fonctions f' et f''.
2-/ Donnez le tableau de variation de f.
3-/ Démontrer que pour tout x de [0 ;1] , $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
4-/ Etablir que, l'équation f(x)=x admet une solution unique αϵ[0 ;1].
5-/ Démontrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :

∀ x ϵ[0 ;1] ; $|f(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

Problème : (13 points)

Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=1-x+e^{-2x}+xe^{-2x}$.
On appelle ($\mathcal{C}_f$) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.
1-/ Calculer la fonction f' dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f' sur [0 ;+∞[. En déduire le signe de f' sur [0 ;+∞[.

2-/ Dresser le tableau des variations de f sur [0 ;+∞[.

3-/ Montrer que ($\mathcal{C}_f$) admet une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) que l'on déterminera. Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).
4-/ Calculer le coefficient directeur de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) en $x_0=0$.
5-/ Etablir que l'équation f(x)=0 admet sur [0 ;+∞[une solution unique ℓ que l'on encadrera par deux entiers naturels consécutifs.

6-/ Construire ($\mathcal{D}$); (T) et ($\mathcal{C}_f$) sur un même graphique.

7-/ Calculer en cm^2 l'aire A du domaine limité par ($\mathcal{C}_f$) et les droites d'équations : y=1−x ; x=0 et x=1.

** DEVOIR N°34 **

EXERCICE 1: (5 points)

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad et, \quad pour \quad n \geq 1, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx .$$

1-/ a/ Soit f la fonction numérique définie sur [0 ;1] par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Calculer f' de f. En déduire U_0.

b/ Calculer U_1.

2-/ a/ Prouver que la suite (U_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer U_n).

b/ Montrer que pour tout nombre réel x ϵ [0 ;1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En déduire que pour tout entier n ≥ 1, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Déterminer la limite de (U_n).

EXERCICE 2: (5 points)

1-/ a/ Démontrer que ∀n ϵ$\mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ divisible par 11.

b/ Déterminer l'ensemble des entiers a tels que $3^{2n+1} + a \times 4^{3n+1}$ soit divisible par 11 pour tout entier n.

2-/ a/ Chercher le PGCD de 51366 et 2988 ;

b/ Soit l'équation(x ;y)ϵ$\mathbb{Z}^2$ (E) : 51966x+2988y=18.
Vérifier que le couple (23 ;–400) est solution de (E).

c/ Donner trois solutions particulières de (E).

3-/ a/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation 7x–4y=4

b/ Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}^x$ *et* $\overline{49}^y$;

Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}^x$ *et* $\overline{125}^y$. En utilisant les solutions de a/, déterminer x et y puis a et b.

Problème: (10 points)

A] Résolution de l'équation différentielle (E) :y' –2y= $\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

1-/ Déterminer la solution de l'équation y'–2y=0 qui prend la valeur 1 en 0.

2-/ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f(0)=ln2, et soit g la fonction définie par l'égalité : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

a/ Calculer g(0) ;

b/ Calculer f'(x) en fonction de g'(x) et de g(x).

c/ Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si : $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d/ En déduire l'expression de g(x), puis celle de f(x) de telle sorte que f soit solution de (E).

B] Etude sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x)=e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$.

1-/ On pose $h(x)=\ln(1+e^{-2x})-\frac{1}{e^{2x}+1}$.

a/ Etudier la limite de h en $+\infty$.
b/ Etudier le sens de variation de h.
c/ En déduire le signe de h(x), pour tout réel x.

2-/ Calculer f'(x) et montrer que f'(x) est du signe de h(x).

3-/ Etudier la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x)= e^{2x}[-2x+\ln(1+1e^{2x})]$.
En déduire la limite de f en $-\infty$ en admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$.

4-/ Dresser le tableau de variation de f.
5-/ Préciser la tangente au point d'abscisse x=0.
Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormal d'unité 5cm.

C] Calcul d'aire

1-/ En remarquant que $\frac{1}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

2-/Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire en cm^2 de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction f définie dans la partie B et les droites d'équations x=1 et x=0. On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D] Etude d'une suite

On définit la suite (U_n) par $u_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout $n\geq 0$
(où f est la fonction définie dans la partie B].)

1-/ Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$ et en déduire par récurrence que, pour tout $n\geq 0$, que on a $U_n \in [0;1]$.

2-/ Montrer, que par récurrence, que la suite (U_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.
3-/ Soit α sa limite. Montrer que $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha \in [0;1]$.
4-/ Grâce à la représentation graphique de f, donner une valeur approchée α de.

DEVOIR N°35

Partie A]

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et la fonction f_n pour nϵ $\mathbb{N}^*$ est définie par $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}$.

1-/ Etant donné un réel x, on considère la somme $S_n(x)$ des n premiers termes de la suite géométrique de raison (−x) et de premier terme 1.

a/ Montrer que pour tout $x \neq -1$, on a : $S_n(x)= f(x)-(-1)^n f_n(x)$.

b/ Montrer que si $|x|<1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. En est-il de même pour x=1 ?

2-/ Soit x un réel positif ou nul. On pose

$$\sigma_n(x)= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.....+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

a/ Montrer, sans calculer l'intégrale $\int_0^x f_n(t)dt$ que :

$\sigma_n(x)+ (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt - \ln(1+x)$ est une constante.

En déduire que pour tout x réel positif ou nul :

$$\ln(1+x)= \sigma_n(x)+ (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt .$$

b/ Montrer que : si n est pair, on a $\sigma_n(x) \leq \ln(1+x)$.

si n est impair, on a $\sigma_n(x) \geq \ln(1+x)$.

c/ Donner en fonction de n et x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant ln(1+x) par $\sigma_n(x)$. (on utilisera le fait que $\frac{1}{1+x} \leq 1 \quad si \ \ x \geq 0$).

d/ Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\ln\left(\frac{11}{10}\right)$.

Partie B] On considère que n=3.

1-/ a/ Etudier les variations de la fonction f_3.
b/ Montrer que la courbe de f_3 admet un point d'inflexion que l'on précisera.

2-/ Soit g la restriction de f_3 à l'intervalle $]-1,+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1}.

3-/ a/ Trouver les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}_g$) de g avec la droite d'équation y=x.

b/ Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de g puis celle de sa bijection réciproque g^{-1}.

c/ Trouver les équations des tangentes à la courbe de g^{-1} aux points d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$.

4-/ a/ Calculer $\int_0^x g(t)\,dt$.

b/ Pour $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, déterminer l'aire comprise entre les deux courbes.

Partie C]

Soit P le polynôme tel que, pour tout z complexe

$$P(z)= z^3 -(7+9i)z^2 -(14-39i)z + 50.$$

1-/ Montrer que l'équation P(z)=0, admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on calculera.

2-/ Résoudre alors P(z)=0, on note z_1 la solution non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle ; z_2 la troisième solution.

3-/ Soit A, B, C les points du plan euclidien d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2+MC^2=4$.

DEVOIR N°36

EXERCICE 1: (5 points)

1-/ Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}\,dx$.

a/ à l'aide d'une intégration par parties, calculer U_n en fonction de n.

b/ Etudier la convergence de la suite (U_n).

2-/ Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

a/ Calculer S_n en fonction de n et trouver $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

b/ Calculer une valeur approchée de S_{10}.

Problème : (15 points)

Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2}\ln x$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A :

1-/ Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur]0;+∞[par $g(x)=-8\ln x+x^2+4$. (les limites de f ne sont pas demandées).

2-/ Montrer que g passe par un minimum dont on calculera la valeur. En déduire le signe de g(x).

3-/ Etudier le sens de variation de f.

4-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Existe-t-il une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ parallèle à un axe de coordonnées ?

Partie B :

Soit $(\mathcal{F})$ la courbe de la fonction ln dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ précédent.

Soit h la fonction définie sur]0;+∞[par $h(x)=f(x)-\ln x$.

1-/ Formuler explicitement h(x) et étudier son signe.

Qu'en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{F})$?

2-/ Quelle est la limite de h en +∞ ?

Qu'en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{F})$?

3-/ Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{F})$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie C :

1-/ Soit α un réel strictement supérieur à 1.

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} h(x)dx$.

2-/ Montrer que, l'aire A(α) en cm^2 de la portion du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$;$(\mathcal{F})$ et les droites d'équations : x=1 et x=α est égale à A(α)=41α. Calculer la limite de A(α) quand α tend vers +∞.

DEVOIR N°37

Partie1

A) On considère la fonction polynôme p définie par $p(x)= x^2 (x - 1) - 2(7x - 12)$

1) Calculer p (2)

2) Résoudre $x \in IR$; $p(x) = 0$

3) En déduire les solutions de chacune des équations suivantes :

a) $e^{3x} - e^{2x} - 14e^x + 24 = 0$

b) $2\ln x + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln (7x - 12)$

c) $\dfrac{(\ln x)^3 + 24}{\ln x} = \ln x + 14$

B) Pour tout entier naturel, n, on pose $I_n = \int_1^2 x^n \left(\sqrt{2 - x}\right) dx$

1) Calculer I_0

2) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer I_1.

3) Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

C) 1) Déterminer une fonction paire u et une fonction impaire v telles que :
$\forall x \in IR$; $u(x) + v(x) = e^x$

2) Montrer que $u^2 - v^2$ est une fonction constante. En déduire que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{v'}{u'}$.

Partie2

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - (3 + \ln x)$

1) dresser le tableau de variation de g

2) démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\theta \in [0{,}45 \ ; \ 0{,}46]$.
En déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$

3) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$ .On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 4cm

a) Etudier les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$

b) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) préciser les asymptotes.

e) Montrer que $f(\theta) = \dfrac{e^{-\theta}}{\theta}$

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

4) a) Calculer $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\theta} \left(\dfrac{1}{x} - (3 + \ln x)\right) dx$ en fonction de θ.

b) Que représente I ?

DEVOIR N°38

EXERCICE 1: (5 points)

Dans le plan P orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure. (on choisira AB = AD = 4cm). On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

1°) Recherche géométriques des éléments de S

a) Donner le rapport et l'angle de S.

b) Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètre [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.

2°) Recherche du centre de S à l'aide des nombres complexes.

Le plan est rapporté au repère orthonormal directe $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) Donner les affixes des points A , C , I et K.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) En déduire les coordonnées du point Ω.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine de P dans P qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') définie par

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}\, x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}\, y + 3 \end{cases}$$

1°) Soit z l'affixe de M ; z' l'affixe de M'. trouver une relation simple entre z' et $\bar{z}$.

Montrer qu'il existe un réel k tel que, quelque soit A et B dans P d'images A' et B' on ait : $\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = k \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$. Déterminer k. Montrer que f n'est pas une similitude directe.

2°) Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.

3°) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que : $f = h \circ S_D = S_D \circ h$ où S_D est la réflexion d'axe D.

Problème: (10 points)

On considère la fonction f définie sur]0 , 1[par $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ $si\ t \in]0;1[$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le but du problème est d'étudier f et calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\, dt$.

A-/ Étude de *f*

1°) a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur]0 ; 1[. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le signe que $\varphi(t)$ où φ est la fonction définie sur]0 ; 1[par : $\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$

c) Étudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de $f'(t)$.

2°) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la tangente à (C) au point d'abscisse x = 0 ?

3°) a) Prouver que, pour tout élément u de [0 ; $\frac{1}{2}$] : $0 \le \frac{1}{1-u} - (1-u) \le u^2$.

En déduire que : $0 \le -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \le \frac{2u^2}{3}$.

b) Soit g la fonction définie sur]0 ;1[par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

Prouver que pour tout élément h de [-$\frac{1}{2}$; 0] :

$$0 \le g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \le \frac{2}{3}h^2$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1).

c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que : $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4°) Tracer la courbe (C) (Unité graphique 10cm).

B-/ Calcul de l'intégral I

Pour tout élément x de]0 ; 1[, on pose : $I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$ *et* $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales).

1°) Soit K la fonction définie sur]0 ; 1] par : $K(x) = J(x^2) - J(x)$

a) Montrer que K est dérivable sur]0 ;1] et que $K'(x) = \frac{1}{x}\left[f(x) - 2f(x^2)\right]$.

b) Prouver que pour tout élément x de]0 ;1], $f(x) - 2f(x^2) = -x f(x)$.

c) En déduire que pour tout élément x de]0 ;1[, $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$ **(1).**

2°) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur] 0;1[.

En déduire que pour tout élément x de]0;1[, $P = \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t} dt$ **(2).**

3°) Prouver que pour tout élément x de]0;1[et pour tout t de]0 ; x[:

$$0 \le -\frac{1}{\ln t} \le -\frac{1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de]0;1[: $0 \le \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \le -\frac{x}{\ln x}$ **(3)**.

4°) A partir des relations (1) ; (2) et (3), déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0

5°) Établir que pour tout élément x de]0 ;1] : $I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

En déduire que : $0 \le I - I(x) \le x$.

6°) Prouver finalement que $I = \ln 2$

Devoir 01

Exercice 1 : (10 points)

1°) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres c omplexes suivants :

$$Z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \qquad Z_1 = -\sqrt{3} + i \quad ; \qquad Z = \frac{Z_1}{Z_0}$$

2°) Calculer A = $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{36}$.

3°) Linéariser cos ^{6}x.

4°) Résoudre z $\epsilon \mathbb{C}$; l'équation : $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$. (On écrira les solutions sous forme trigonométrique).

Exercice 2 : (10 points)

Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (1+i)z^2 - 4 + 4i$.

1°) Vérifier que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 = a et une solution imaginaire z_1 = bi que l'on déterminera.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

3°) Calculer le module et un argument de chacune de s solutions de $f(z) = 0$.

Devoir 02

1°) a-/ Linéariser cos2xsinx

b-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = -i$.

2°) Soient a et b les nombres complexes définis par :

$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \quad et \quad b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

a-/ Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $q = \frac{b}{a}$.

b-/ Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes a, b, q.

c-/ Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3°) Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^3 + (4+8i)z^2 + (-26 + 32i)z - 60 + 32i$.

a-/ Calculer $f(-2)$. En déduire que f(z) peut s'écrire sous la forme :

$f(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera.

b-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On désigne par z_0 la solution réelle ; par z_1 la solution dont la partie réelle est positive et z_2 la solution dont la partie réelle est négative.

c-/ Soient A, B, et C les points d'affixes respectives z_0 ; z_1 et z_2.
On pose : $U = \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$. Calculer le module et l'argument principal de U, puis en déduire la nature du triangle ABC.

Devoir 03

EXERCICE

1°) a) Trouver les racines carrées du nombre complexe $Z = -8 - 6i$

b) En déduire la résolution de l'équation : $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$

c) Ecrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique et exponentielle.

2°) Linéariser : $Sin^4 \frac{x}{2}$

3°) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^2 - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{5 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 - 5x + 3x^2}{x + 2x^2 - 5}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

PROBLEME :

I°) 1°) On donne les nombres complexes $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; $z_2 = \frac{5i-1}{3-2i}$ et $z_3 = \sqrt{3} + i$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

b) Calculer z_3^{12}.

II°) Soit f (z) = $z^3 - (4+3i)z^2 + (5+8i)z - 7i + 4$

1°) Montrer que l'équation f(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.

2°) Trouver les nombres complexes a, b et c tels que:

f(z) = $(z - z_0)(az^2 + bz + c)$

3°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (4+2i)z + 7 + 4i = 0$

b) En déduire la résolution de l'équation f(z) = 0

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$; on donne les points A, B, C d'affixes respectives 2 – i, i, 2 + 3i

a) Placer les points A, B et C.

b) Calculer : AB, AC, BC. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

$AM^2 + BM^2 = 12$

Devoir 04

Exercice 1 : (5 points)

Calculer les limites suivantes :

a-/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-13x^2+16x-4}$; b-/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{\cos 2x}$; c-/ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})$.

Exercice 2 : (5 points)

Sur le segment $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} \\ f(0)=\sqrt{2} \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue au point $x_0 = 0$?

Exercice 3: (10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x-1| + \dfrac{2}{x+1}$.

1°) Etudier la continuité de f au point $x = 1$.

2°) f est-elle dérivable au point $x = 1$? ; étudier et représenter la fonction f.

3°) Discuter suivant les valeurs du paramètre m, l' existence du nombre de solutions de l'équation : $\sqrt{(x-1)^2}\ (x+1) = mx+m-2$.

Devoir 05

Exercice 1: (5 points)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$.

1°) Trouver les réels a ; b ; c tels que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on ait : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$.

2°) En déduire la primitive de f sur]1 ; +∞[qui s'annule en 2.

Exercice 2: (5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^2 \dfrac{x^3+1}{x+1}dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$ 3) $\int_{-4}^{1}(|x+3|+|1-2x|)dx$.

Problème : (10 points)

L e plan étant muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=3cm$.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=3x-1+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

1°) Etudier et représenter graphiquement la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.

2°) Déterminer l'aire du domaine ($\mathcal{D}$) limité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), et les droites d'équations respectives : y = 3x – 1 ; x = 2 ; x = 5.

Devoir 06

EXERCICES : (8 points)

I) Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ 2°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$

3°) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+7}{x^4+5}$ 4°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 5x - 8}{7x^3 + 2x + 1}$

II) Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies par

1°) $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x + 9$; 2°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x+1}$

3°) $f(x) = \dfrac{5}{3x+1}$; 4°) $f(x) = \sin 3x \cos^2 x$

PROBLEME: (12 points)

A) Soit $h(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x-1}$. Déterminer les réels a ; b ; c sachant que la courbe de h passe par les points A(0 ; 2) ; B(2 ; –2) et admet une tangente horizontale au point x = 2.

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 2}{x-1}$.

1°) Déterminer les réels a ; b ; c tels que : $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-1}$.

2°) Etudier la fonction f.

3°) Montrer que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation : $y = -x + 1$ est asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}_f$).

4°) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

5°) Donner une équation de la tangente T au point d'abscisse 0.

6°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique ℓ dans $[2\,;3]$.

(on ne cherchera pas à résoudre l'équation)

7°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Devoir 07

EXERCICES : (10 points)

1°) a°) Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx + c$.

Déterminer les réels a, b, et c sachant que f admet pour extremum 3 au point –1 et pour extremum –1 au point 1.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2°) Déterminer une primitive F de la fonction f dan s les cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ b) $f(x) = x(x^2 + 3)^4$ c) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2}$.

d) $f(x) = (\frac{1}{x} + x)^5(\frac{1}{x^2} - 1)$ e) $f(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$ f) $f(x) = cos(4x+\frac{\pi}{6})$

PROBLEME: (10 points)

Soit f la fonction définition par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-6}{x-2}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) Déterminer les réels a ; b ; et c tels que $f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x-2}$.

2°) Etudier la fonction f.

3°) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ que l'on précisera.

4°) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

5°) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f.

6°) Soit g la restriction de f à l'intervalle [0 ; 2[. Montrer que g réalise une bijection de [0 ; 2[sur un intervalle P que l'on précisera.

7°) Calculer $g(1)$; $g(-1+\sqrt{5})$; $(g^{-1})'(5)$.

8°) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}g^{-1})$ dans le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Devoir 08

EXERCICES : (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

1°) Montrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$: $f(x+2\pi) = f(x)$.

2°) Etudier f et construire sa courbe représentative dans [0 ; π]

3°) On pose $g(x) = 4x - tg^2 x$ avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Calculer g'(x) puis vérifier que $g'(x) = 2(1 - tgx)(tg^2 x + tgx + 2)$.

PROBLEME: (12 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

1°) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que pour tout x $\neq 1$;

$$f(x) = a\,x + \frac{b}{x-1}.$$

2°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble, puis son sens de variation. Dresser le tableau de variation de f.

3°) Quelles sont les droites asymptotes à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f ?

4°) Déterminer une équation de la tangente à la cou rbe ($\mathcal{C}_f$) au point x = $\frac{1}{2}$.

5°) Etudier les positions de la courbe par rapport à son asymptote oblique (D).

6°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $f(x) = m$ suivant les valeurs du réel m.

7°) Déterminer les coordonnées x_0 et y_0 du point I centre de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

8°) Soit (Δ) la droite d'équation : $y = 2x - 1$. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}_f$) et de la droite (Δ).

Devoir 09

EXERCICES : (8 points)

I-/ Déterminer une primitive F de f dans les cas suivants :

1°) $f(x) = (2x + 5)(x^2 + 5x + 3)^3$; 2°) $f(x) = \dfrac{4}{(3-2x)^5}$

3°) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(x^3 - 3x^2 + 6x + 1)^2}$; 4°) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$

II-/ Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Déterminer les réels a ; b et c sachant que f admet 1 pour extremum en x = 0 et – 3 pour extremum en x = 2.

PROBLEME: (12 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ et ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2°) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x – 1 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$).

3°) Etudier la fonction f ; et en déduire le signe de f(x).

4°) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (Δ).

5°) Montrer que la restriction de f à] $-\infty$; – 3] est une bijection g de] $-\infty$; – 3] sur un intervalle J que l'on précisera.

6°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f ainsi que ($\mathcal{C}'$) de g^{-1} dans le même repère.

7°) Calculer $g(-5)$; $g(-4)$; $(g^{-1})'(-7)$.

8°) Démontrer que pour tout x de [1 ; 3] on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.

En déduire que pour tout x de [1 ; 3] on a : $|x - 4 + \dfrac{4}{x+1}| \leq \dfrac{3}{4} |x - 3|$.

9°) résoudre et discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$x^2 - mx + 3 - m = 0.$$

Devoir 10

EXERCICE 1 : (10 points)

Soit la fonction f : $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{ax+b}{x+c}$ où a, b, c sont des réels.

On désigne par ($\mathcal{H}$) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) Déterminer les nombres réels a ; b ; et c pour que :

- ($\mathcal{H}$) passe par le point A(1 ; $\frac{1}{4}$)
- La tangente à ($\mathcal{H}$) au point B(1 ; $-\frac{3}{2}$) admet $-\frac{7}{4}$ pour coefficient directeur et la droite d'équation x = 3 est asymptote verticale.

2°) vérifier que le point Ω(3 ; 2) est centre de symétrie de ($\mathcal{H}$).

3°) Trouver la pente de la tangente à au ($\mathcal{H}$) point A.

4°) Calculer les coordonnées du point d'intersectio n des tangentes à ($\mathcal{H}$) respectivement aux points A et B.

EXERCICE 2 : (10 points)

Soient a, b et c des réels et f une fonction définie par $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ dans un repère . ($\mathcal{C}_f$) est la courbe représentative de *f* et A(1 ; $-\frac{1}{2}$) .

1°) Déterminer a, b et c pour que les trois conditi ons soient vérifiées.

a) $f(0) = f(2)$

b) La courbe passe par le point A

c) En ce point A la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2°) a) calculer la fonction dérivée de la fonction *g* définie sur [0 ; 2] par :

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 3x.$$

b) Vérifier que $g'(x) = (x-1)(4x^2 - 8x + 3)$. Etudier les variations de *g*.

c) Tracer la courbe représentative de *g* dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unités graphiques : *4cm* sur l'axe des abscisses et *16cm* sur l'axe des ordonnées).

Devoir 11

EXERCICE : (8 points)

1) Calculez en intégrant par parties $I = \int_0^1 (x+2)e^x dx$

2) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

a)Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

b) On pose $V_n = a\,U_n + 3$ où $a \in IR^*$. Calculer V_{n+1} en fonction de V_n .

Déterminer a pour que (V_n) soit une suite géométrique.

d) Exprimer Un en fonction de n puis calculer .$S_n = V_o + V_1 + \ldots + V_n$.

Problème : (12 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

1°) Etudier la fonction f ;

2°) montrer que la droite ($\mathcal{D}$) d' équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}$) de f.

3°) Etudier les positions de ($\mathcal{C}$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

4°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et la droite ($\mathcal{D}$).

5°) Calculer l' aire de la portion du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$) de f , l'asymptote ($\mathcal{D}$) et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

Devoir 12

EXERCICE 1 : (5 points)

1°) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin(\sqrt{x})$. Calculer $f'(x)$ et déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$ sur]0 ; 2].

2°) Déterminer le réel b tel que $x^2 + 3 = (x^2 + 1) + b$. Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ sur [-3 ; -2].

3°) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \frac{x}{\sin x}$. Calculer $f_1'(x)$ et déterminer une primitive de la fonction g_1 définie par : $g_1(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{1-\cos^2 x}$ $sur\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1°) Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_3^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin 2x\, dx$; $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x\sin x}{\cos^3 x}dx$ (Utiliser une intégration par parties).

2°) Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans]–1; 0[.

Problème : (10 points)

Soit la fonction f numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^3+3x}{ax^2+b}$ où a et b sont des réels.

1°) Trouver les réels a et b sachant que : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

Dans toute la suite a et b désignent les réels trouvés à la question 1°).

2°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet un centre de symétrie I à préciser.

3°) Etudier les variations de f.

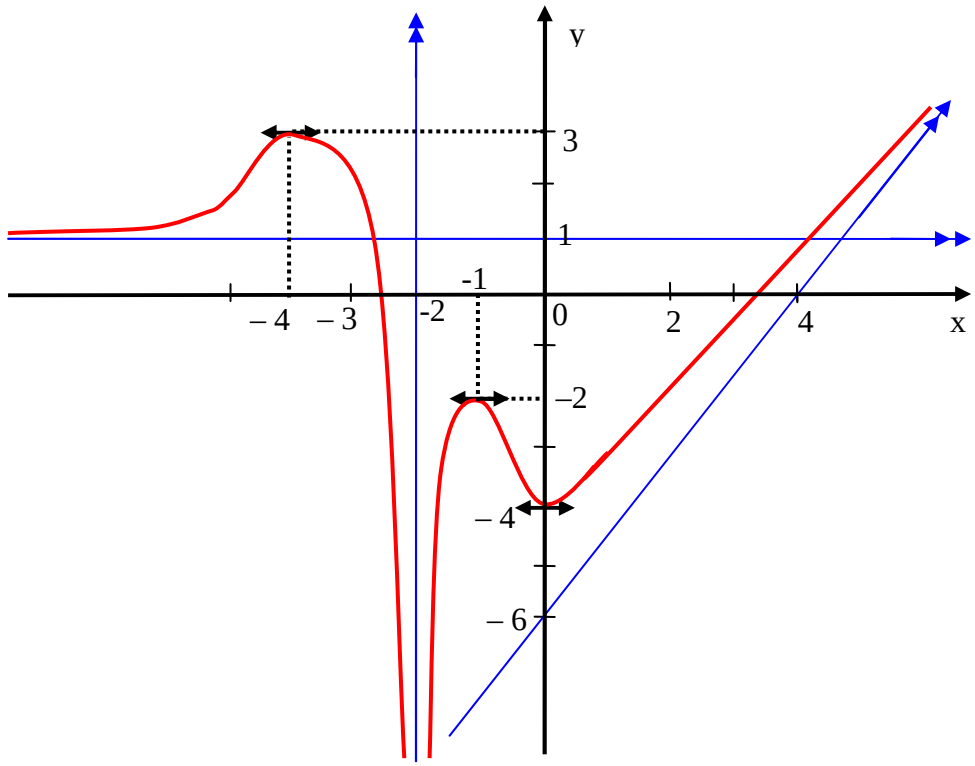
4°) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

5°) Tracer ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{D}$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Devoir 13

EXERCICE 1 : (10 points)

Soit f la fonction donnée par sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.



1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2°) Donner les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3°) Donner les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f.
4°) Dresser le tableau de variation de f.
5°) Donner l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$.
6°) Montrer que la restriction de f à $]-\infty; -4]$ réalise une bijection g de $]-\infty; -4]$ sur un intervalle P que l'on précisera.
7°) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de g^{-1}.

EXERCICE 2 : (10 points)

Soit la fonction f numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 3$
1°) Déterminer les réels a et b sachant que la cour be $(\mathcal{C}_f)$ de f admet un extremum égal à 2 au point d'abscisse x = 1.
2°) Dans la suite de l'exercice on prendra a = 1 et b = – 1.
a) Etudier les variations de f.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une solution et une seule notée α dans $[1;+\infty[$. Encadrer α par deux entiers consécutifs.
c) Calculer $f(0)$ et $(f^{-1})'(3)$.

Devoir 14

EXERCICE 1 : (5 points)

1°) Résoudre les équations et systèmes suivants :

a) $(x^2-1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{(x+1)}$; b) $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 = 0$; c) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ e^x = e^{5-y} \end{cases}$

2°) Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_1^2 (x \ln x^4)dx$; $J = \int_{-1}^0 (-2x+1)e^{-x}dx$; $K = \int_1^2 (\frac{e^x}{x} + e^x \ln x)dx$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Déterminer les intervalles de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions f ci-dessous puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1°) $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{2}{x-1}}$; 2°) $f(x) = ln(\frac{e^x - 1}{e^x + 1})$; 3°) $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$.

Problème : (10 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = 1 - x + e^{-2x} + xe^{-2x}$.

1°) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de f'.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ dans [0 ;+∞[.

2°) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f admet une asymptote oblique ($\mathcal{D}$) que l'on précisera. En déduire les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{D}$).

4°) Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) au point $x_0 = 0$?

5°) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur [0 ;+∞[une solution unique ℓ.
Montrer que $1 \leq \ell \leq 2$.

6°) Représenter la courbe ($\mathcal{C}_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique : 2cm.

7°) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par : ($\mathcal{C}_f$) , l'asymptote ($\mathcal{D}$) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Devoir 15

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère le trinôme : t(x) = $2x^2 - x - 1$.

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation t(x) = 0.
2- Factoriser $E(x) = 2(lnx)^2 - lnx - 1$.

3- Déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $2(lnx)^2 \leq lnx + 1$.
4- Résoudre : $lnx + ln(2x - 1) > 0$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1) n est un entier naturel non nul. Simplifier en une forme sans exposant :
Exemple : $ln(25.2^n) = 2ln5 + nln2$.

a) $ln(9.5^n) - ln(25^n)$; *b)* $ln(\frac{4}{2^{n-1}}) + ln(8^n)$.

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle I par: $f(x) = ln[g(x)]$.
a) Que peut-on dire de $g(x)$ lorsque $f(x)$ existe ?

b) Si g est croissante sur I ; pour tous réels a et b de I tels que a<b ; comparer $f(a)$ et $f(b)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f sur I ?.

Problème : (10 points)

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x}) \qquad et \qquad g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$$

1°) Montrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2°) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α , et que $0 < \alpha < 1$. (on ne cherchera pas à résoudre l'équation $g(x) = 0$).
3°) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4°) On désigne par ($\mathcal{C}_f$) la courbe de la fonction f ; par A le point de ($\mathcal{C}_f$) d'abscisse $x = -1$ et par B le point de ($\mathcal{C}_f$) d'abscisse $x = 1$.
a) Sachant que l'équation $y = ax + b$ est une équation de la droite (AB), déterminer les réels a et b.
b) Vérifier que la droite (AB) est tangente en B à ($\mathcal{C}_f$).
c) Déterminer une équation de la tangente (T) en A à ($\mathcal{C}_f$).
5°) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (T).

6°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solut ion unique ℓ dans]$-\infty$;0[.
6°) Utiliser les résultats précédents pour construi re la courbe ($\mathcal{C}_f$).

(on prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de α).

7°) Déterminer graphiquement le nombre et les signe s des solutions de l'équation : $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

Devoir 16

EXERCICES : (6 points)

1°) résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2\ln x = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

b) $ln(x-2) + ln(x+3) = 2ln(x+1)$.

2°) Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$$

Problème : (14 points)

A-/ soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{2x-1}{x^2}$; d'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$.

1°) Etudier les variations de h ;

2°) Tracer la courbe de h ;

3°) Trouver une primitive de h sur $\mathcal{D}_h$.

4° Montrer que la restriction de h à]0 ;1[admet une fonction réciproque que l'on déterminera.

B/- Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x$.

1°) Etudier les variations de f.

2°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solut ion unique ℓ dans [1 ;2].

3°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

Devoir 17

EXERCICE 1 : (4 points)

1°) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$;

2°) Déterminer les ensembles de définition de chacu ne des fonctions :

a) $f(x)=|\ln(x+3)|$; b) $g(x) = x^2 ln(-x^2 + 6x - 5)$; c) $h(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

EXERCICE 2 : (2 points)

Soit les fonctions f et g définies par :

$f : x \mapsto lnx$ et $g : x \mapsto ln(x+2) + 1$.

1°) Ecrire $g(x)$ en fonction de $f(x)$

2°) Quelle interprétation peut-on donner alors à ce tte expression de $g(x)$ pour tout $x \in]-2 ;+\infty[$. Déduisez du tableau de variation de f celui de g.

Problème : (14 points)

A-/ Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + x - 3xlnx$.

1°) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? si oui déterminer son prolongement g.

2°) Déterminer l'intervalle I de définition de g.

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.

4°) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que dans l'intervalle [1 ; 2], l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique que l'on notera α.

5°) Etudier $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et en déduire le comportement asymptotique de la courbe ($\mathcal{C}_g$) de g.

6°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_g$) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé.

N.B : on prendra : $\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}5$ *et* $e^{\frac{2}{3}} = 2$

B-/ Soit la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = x(\ln x)^2 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1°) Etudier le signe de h'(x).

2°) Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

3°) Quelle est la demi tangente en $x_0 = 0$?

4°) Donner l'équation de la tangente en $x_0 = e$.

5°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h.

Soit $g(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x(\ln x-1)$. Calculer g'(x) et en déduire une primitive de f.

6°) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre ($\mathcal{C}_h$) et les droites d'équations : $x = \lambda$, $(0 < \lambda < 1)$; x =1 et y = 0.

7°) Calculer $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)$.

Devoir 18

EXERCICES : (10 points)

1°) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 4} (1 - e^x)dx \quad ; \quad J = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx$$

2°) résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $ln(x^2 - 4) = ln(1 - 4x)$

b) $\ln^2 x - 4\ln x + 3 = 0$

c) $e^{2x} - 2e^x - 8 = 0$

d) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$;

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} \times e^y = e \end{cases}$.

Problème : (10 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

A-/ On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$.

1°) Soit g la fonction définie par g(x) = x^2 + 2 – 2lnx.

a) Dresser le tableau de variation de g ;

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x ;

2°) Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) Exprimer f'(x) en fonction de $g(x)$. En déduire le tableau de variation de f.

4°) Déterminer les asymptotes à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.

5°) Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à la droite ($\mathcal{D}$) d'équation : y = x – 1.

6°) Tracer ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{D}$).

B-/ Soit h la fonction définie par h(x) = $x - e^x$.

1°) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h admet une asymptote oblique (Δ) en $-\infty$.

3°) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

4°) Etudier la position de ($\mathcal{C}_h$) par rapport à la première bissectrice.

5°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_h$) dans $\mathcal{P}$.

Devoir 19

EXERCICE 1 : (6 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$

b) $e^{\sin x} - 2e^{-\sin x} = 1$.

2°) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = ?$

N.B : *sin 44° = sin(0,767rd) = 0,69.*

Problème : (14 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

1°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation ;

2°) Déterminer les asymptotes obliques à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f ;

3°) Trouver une équation de la tangente (T) à la co urbe $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = 0$;

4°) Montrer que le point O(0 ; 0) est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

5°) Tracer ($\mathcal{C}_f$) et (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

6°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

On prendra : *ln2 =0,69 et ln(1+e) = 1,31.*

Devoir 20

EXERCICES : (6 points)

Résoudre les équations et système suivants :

1°) $ln(lne^{2x} - e^{lnx}) = 2 - lnx;$

2°) $\begin{cases} \ln(x-1) + \ln(x+2) \prec 2\ln(2x+1) \\ e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 \prec 0 \end{cases}$

Problème : (14 points)

A-/ Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ d'unités graphiques : *4cm* sur l'axe des abscisses et *2cm* sur l'axe des ordonnées.
On considère la fonction f définie par $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$.

1°) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \dfrac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$

2°) Démontrer que, pour tout x réel : $f'(x) = \dfrac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$, f' désignant la dérivée de f.

En déduire le signe de f'(x).
3°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4°) Donner le tableau de variation de f.
5°) Représenter la fonction f dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

B-/ On injecte à l'instant t = 0 une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t ; (t positif exprimé en secondes), la concentration Y de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On appelle « *concentration* » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité de sang qui le contient.

1°) En utilisant les résultats de la partie A-/, do nner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t en secondes.

2°) Au bout de combien de temps la concentration es t-elle maximale ?

3°) Calculer au bout de combien de temps la concent ration retombe au quart de sa valeur maximale. Vérifier graphiquement en utilisant la question 5°) du A-/.

4°) Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t, $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3}.

Devoir 21

EXERCICE : (5 points)

Le prix d'une voiture Toyota est de 25 000€ à la date du 1er janvier 2002.
Ce prix augmente 10% l'an.

1°) On pose V_n le prix de cette voiture au 1er janvier $(2002 + n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Définir de façon récurrente la suite (V_n) ; préciser sa nature et donner sa raison.
b) Calculer V_{10} ; V_{11}.

2°) Le salaire mensuel d'un ouvrier de l'usine Toyo ta est supposé 1 500€ au 1er janvier 2002. Il est supposé augmenter de 15% par an.

On pose W_n le salaire de l'ouvrier au 1er janvier (2002 + n). Exprimer W_n en fonction de n. Préciser la nature de (W_n) et donner sa raison.

3°) A partir de quelle année et plus, 10 mois de sa laire de l'ouvrier seront suffisants à l'achat d'une voiture Toyota ?

On prendra : ln5 = 1,609 ; ln3 = 1,090 ; $\ln(1{,}15) = 0{,}139$; $\ln(1{,}10) = 0{,}095$.

Problème : (5 points)

Pour tout réel m, on considère la fonction numérique f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = (x+1)e^{mx}$.

1°) Montrer que toutes les courbes ($\mathcal{C}_m$) de f_m ($m \in \mathbb{R}$) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

2°) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1}.

3°) Tracer dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$, les courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_{-1}$)de f_1 et f_{-1}.

4°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_1$) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

5°) Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_{-1}$) et les droites d'équations : $x = -1$; $x = 0$.

Devoir 22

EXERCICE : (10 points)

1-/ Calculer en intégrant par parties : $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$.

2-/ Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

a/ Calculer u_1 ; u_2 ; u_3.

b/ On pose $V_n = a\,U_n + 3$ où a est un réel non nul.

Calculer V_{n+1} en fonction de V_n. Déterminer a pour que (V_n) soit une suite géométrique.

c/ Exprimer U_n en fonction de n puis calculer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n$.

Problème : (10 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$. et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1-/ Etudier la fonction f ;

2-/ Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3-/ Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4-/ Tracer $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé.

5-/ Calculer l'aire de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'asymptote oblique $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

Devoir 23

EXERCICE 1: (5 points)

Soit l'équation différentielle (E) : y'' – 4y' + 4y = 0.

1-/ Déterminer la solution *f* de dont la courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) passe apr le point A(0 ;1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à 3.

2-/ Etudier et représenter la fonction *f* déterminée ci-dessus.

3-/ Calculer $A = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n - 2n - 3}{2} \end{cases}$

1-/ Calculer V_1 ; V_2 ; V_3.
2-/ Soit (W_n) la suite définie sur par : $W_n = V_n + 2n - 1$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme W_0.

3-/ En déduire les expressions de W_n et V_n en fonction de n.

4-/ Calculer $K_n = W_0 + W_1 + \ldots.. + W_n$ en fonction de n ;

5-/ Calculer $\lim_{n \to +\infty} K_n$.

Problème : (10 points)

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
Soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé .

1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de *f* puis ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2-/ Calculer $f'(x)$ étudier son signe puis dresser le tableau de variation de *f* ;
3-/ Donner une équation de la tangente (T_1) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse x = – 2 ; puis une équation de la tangente (T_2) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse x = 0.
4-/ Calculer les ordonnées des points d'abscisse x = 1 de ($\mathcal{C}_f$) et (T_2).
5-/ Tracer ($\mathcal{C}_f$) et (T_2) dans le repère précédent (unité graphique 1cm).
6-/ Déterminer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par ($\mathcal{C}_f$) ; (T_2) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 4.

Devoir 24

Exercice : (8 points)

1°) Mettre sous forme trigonométrique les nombres c omplexes suivants :

$$T = \frac{-1+i}{2} \; ; \quad Z = \frac{-1-i}{2} \; ; \quad U = \frac{T}{Z}.$$

2°) Linéariser $Sin^3 x$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$.
On mettra les solutions sous forme trigonométrique.

Problème : (12 points)

1°) Soit le polynôme P(x) = $-x^3 - 6x + 20$. Calculer P(2) ;

2°) On considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - 6z + 20i$.
Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

3°) Trouver les nombres complexes P et Q tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + Pz + Q)$.
En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $f(z) = 0$.
(on désignera z_1 la solution non imaginaire pure dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution).

4°) Soient A ; B ; C les images respectives de z_0 ; z_1 ; z_2. Placer ces points dans le plan complexe et en déduire la nature du triangle ABC.

5°) Déterminer et construire l'ensemble (E) des poi nts M(x ; y) du plan tels que :

$BM^2 + CM^2 \leq 36$.

Devoir 25

Exercice I (5 points)

1°) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x^2 - 16|}{x-4}, \ si \quad x \neq 4 \\ f(4) = 3 \end{cases}$$; Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

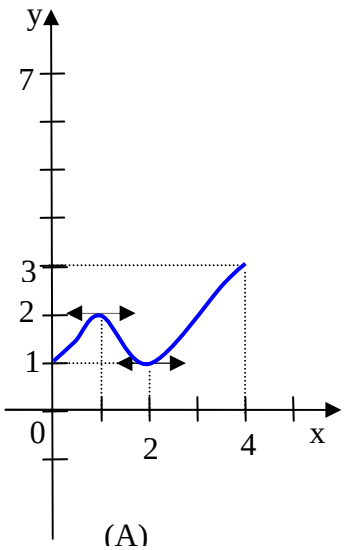
2°) Calculer les intégrales suivantes

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x \sin^4 x + \sin^4 x\right) dx$; b) $J = \int_0^1 (x+2)\sqrt{x+3}\ dx$.

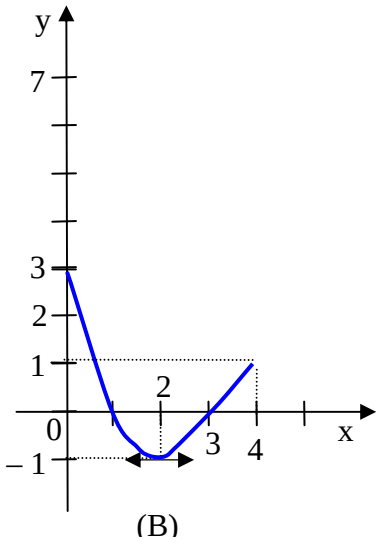
b)

Exercice II (5 points)

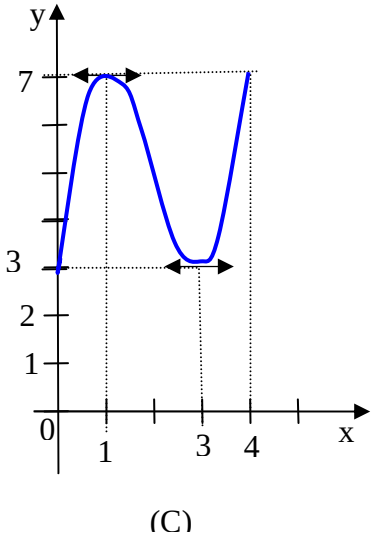
1°) Soit les fonctions définies sur [0 ; 4] données par leurs représentations graphiques ci-dessous :



(A)

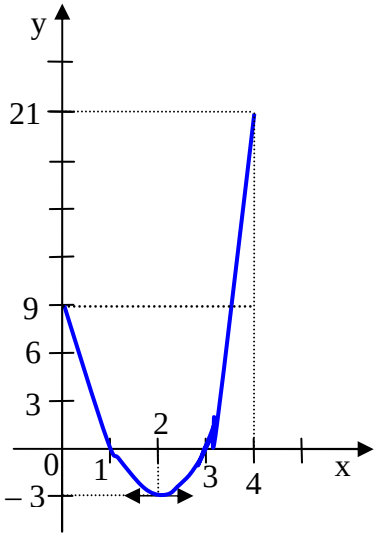


(B)



(C)

Des trois fonctions représentées précédemment,en (A) ; (B) ; (C) laquelle a pour fonction dérivée la fonction *f '* dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



2°) Donner le tableau de variation de *f*.

3°) Donner les équations des tangentes à la courbe de *f* aux points d'abscisses
x = 0 ; x = 2 et x = 4.
4°) On suppose que f(x) s'écrit sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Déterminer les réels *a , b , c et d* .

Problème : (10 points)

Soit *f* une fonction numérique de la variable réelle définie par le tableau ci-dessous
(Cf) est la courbe représentative de *f* dans le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$
La droite d'équation x = 2 est axe de symétrie à la courbe ***(Cf) .***

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f ' (x)		+	**0**	–	‖	–	
f (x)	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	3

1°) Compléter le tableau de variation de *f.*

2°) Tracer (***Cf).***

3°) On suppose que $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \gamma}$ *où* a, b, c, β *et* γ sont des réels.

a) Déterminer a , b , c , β *et* γ .

b) Soit I = [2 ; 4[et g la restriction de *f* à I . Montrer g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Donner une équation de la tangente à la courbe (***C'***) de g^{-1} au point d'abscisse x = 0.
d) Tracer (***C'***).

4°) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel *m* du nombre et du signe des solutions de l'équation $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$.

5°) Soit la fonction h : IR $\rightarrow$ IR

$$x \mapsto h(x) = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x|x-4|}.$$

a) Dresser le tableau de variation de *h* ;
b) Construire la courbe (***H***) de *h* .

Devoir 26

EXERCICE I : (5 points)

A°) Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1°) $f(x)=x^3-\frac{1}{x}+2\sqrt{x}+2\cos(2x+1)$ 2°) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$

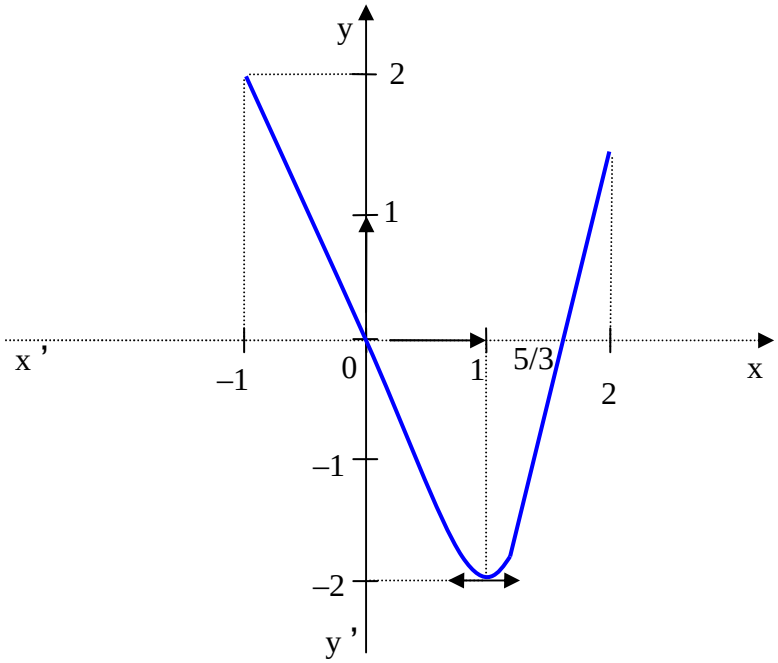
3°) $f(x)=\frac{2x-5}{2-x}$ 4°) $f(x)=(x^3+2x)^6$

B°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2}{|x+2|+3}$

Etudier la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = -2$, puis interpréter vos résultats.

EXERCICE II : (5 points)

On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $[-1;2]$ dont la courbe représentative est la suivante :



1°) Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs f (0) ; f (1) ; f '(1)
2°) Résoudre graphiquement : f (x) = 0 ; f (x) < 0
3°) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;2]$
4°) On suppose que f(x) est de la forme suivante : $f(x)=ax^3+bx+c$
A l'aide des valeurs mises en évidence a la question 1°),
calculer les nombres réels a ; b et c.

PROBLEME : (10 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-5}{3-x}$; et ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Etudier les variations de la fonction f.

2°) a°) Montrer qu'ils existent des nombres réels a ;b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{3-x}$.

En déduire une équation de l'asymptote oblique notée ($\mathcal{D}$).

b°) Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique ($\mathcal{D}$).

3°) Montrer que le point W intersection des asymptotes est centre de symétrie de ($\mathcal{C}_f$)

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) au point d'abscisse $x_0 = 2$

5°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 1]$

a°) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b°) Calculer g (-2) ; g(-3) ; $(g^{-1})'(\frac{2}{3})$.

6°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de *f*.

7°) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des solutions de l'équation $x^2 + mx - 5 - 3m = 0$.

Devoir 27

Exercice 1 : (5 points)

Soit la fonction f définie par f(x) = ln(ax + b) et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative.

1°) Déterminer les nombres a et b sachant que f (2) = 0 et f '(3) = $\frac{3}{4}$.

2°) Quel est alors l'ensemble de définition D_f de f ?.

3°) Déterminer les nombres a et b sachant que la courbe ($\mathcal{C}$) de f passe par le point A (2 ; 0) et la tangente en A a pour coefficient directeur – 2.

Exercice 2 : (5 points)

1°) Calculer les intégrales suivantes

$I = \int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{x+2} \right) dx$; $J = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \left(\frac{e^x}{e^x+2} \right) dx$; $K = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x (e^x - 3) dx$

2°) a) Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

c) On pose : $I = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} \right) dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{1}{e^x+4} \right) dx$.

Calculer : I – 3J et I + J. En déduire les valeurs exactes de I et J.

Problème : (10 points)

Soit f la fonction définie par f (x) = $-x^2 + 5x - 5\ln(x+1)$ et ($\mathcal{C}_\ell$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2°) Etudier les limites de f aux bornes de D_f.

3°) Calculer f '(x) puis dresser le tableau des variations de f.

4°) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet une solution unique ℓ dans [2 ; 3].
Donner une valeur approchée de ℓ à 0,01 près.

5°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_\ell$).

Devoir 28

Exercice 1…… (5 points)

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$

b) Mettre les solutions de cette équation sous forme exponentielle

2°) Intégrer les équations différentielles suivantes

a) $5y' - 4y = 0$; b) $y'' - 2y' - 3y = 0$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$; d) $y'' - 8y' + 16y$

3°) Calculer les réels suivants : $A = \int_0^1 (x-1)e^{2x}dx$; $B = \int_1^e \ln x\,dx$

Exercice 2…….(5 points)

A°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2-2e^x}{1+e^x}$

1°) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Préciser les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

2°) Étudier le sens de variation de f. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle **J** que l'on précisera.

3°) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

4°) a) Montrer que $f(x) = -2 + \dfrac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) En déduire le calcul du réel $I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx$.

B°) On note (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$

1°) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2°) Si $u_n \neq 0$ on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

En déduire l'expression de (v_n) en fonction n.

Problème

- Question préliminaire

Vérifier que le nombre $\alpha = -1 + \ln 125$ est solution de l'équation
(E) : $e^{x+1} - 10^4 e^{-(x+1)} - 45 = 0$
En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.
On admettra que α est la seule solution de (E).

- Offre et Demande

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit de prix unitaire x sont telles que : $f(x) = 100e^{x+1} - 45$; $g(x) = 10^6 e^{-(x+1)}$.
1°) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ sont positives ou nulles.
On désignera par I l'intervalle trouvé ; cet intervalle est appelé « Intervalle de validité du modèle ».
2°) Déterminer la valeur x pour laquelle $f(x) = g(x)$, appelé « prix d'équilibre »
3°) Étudier les variations de f et de g sur l'intervalle I.
4°) Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses , et 1cm pour 10 000 unités sur l'axe des ordonnées).
a) Tracer les courbes représentatives de f et de g dans le plan.
b) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 2°)
5°) On considère la fonction E_f définie sur I par :

$E_f(x) = x\,\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (où f' désigne la fonction dérivée de f)

Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « Élasticité de l'offre par rapport au prix x » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1% d'un prix x donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.

a) Calculer $E_f(x)$
b) On considère le prix $x = 3{,}8$. Pour un accroissement de 1% de ce prix, quel est le pourcentage de variation de l'offre ?