Maxi Maths

Hicham BOUKHABZA

Exercices résolus

MATHEMATIQUES

Sc Math

2ème année du baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale

(Tome 2)

- Résumés de cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

Auteurs:

Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Tous droits réservés

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Maxi.Maths - SC MATH 2BAC TOME (2) - Exercices résolus

Édition 2020

Dépôt légal: 2020MO3628

ISBN: 978-9920-670-22-7

Avant - propos

Chèr (e) élève,

Ce livre a été conçu pour permettre aux élèves un travail régulier et continu tout au long de l'année de la classe terminale. Il a été préparé pour vous aider à acquérir la rigueur nécessaire à la réussite aux contrôles continus durant toute l'année scolaire et à l'examen national du baccalauréat, en vous proposant des exercices et des problèmes conformes au programme officiel.

Ce livre contient les chapitres suivants :

1- Fonctions exponentielles

2- Calcul intégral

3- Équations différentielles

4- Structures algébriques

5- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

6- Calcul de probabilités

Le contenu de chaque chapitre est conçu de la façon suivants :

- Des résumés de cours organisés suivant chaque paragraphe.
- Des exercices préparatoires pour mieux aborder le programme et en faire un point de départ pour l'élaboration d'une base solide en la matière.
- Des exercices classés, ordonnés et progressifs de chaque partie du cours.
- Des exercices de renforcement et de synthèse pour l'enrichissement personnel; ils combinent méthodes, outils et contenus mathématiques.
- Des extraits des sujets d'examens du baccalauréat.

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à vos attentes et participe à votre réussite au baccalauréat...

Les auteurs

Leçon 1

Fonctions exponentielles

Maxi

Résumé

I Fonction exponentielle népérienne

1) Définitions:

La fonction réciproque de la fonction $\ln$ s'appelle la fonction exponentielle népérienne et on la note exp.

2) Conséquences:

- La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- $(\forall x \in \mathbb{R});\ \exp(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ ;\ (y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$
- La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \exp(x) > \exp(y) \Leftrightarrow x > y$

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$$

1) Prpriétés algébriques:

Pour tous x et y de $\mathbb{R}$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Exercices d'application

Exercice 1

1) Simplifier: $a = \ln\sqrt{e^3}\ ;\ b = e^{1-\ln 2}\ ;\ c = \dfrac{2 - \ln\sqrt[3]{e}}{1 + \ln(e^2)}$

2) Simplifier expressions suivantes :

a) $x \in]0;+\infty[\ ;\ a = e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}\ ;\ b = \ln\left(\dfrac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

c) $x \in]0;+\infty[\ ;\ c = \ln(e^{3x}) - 2e^{\ln(2x)} + 3\ln(\ln e)$

d) $x \in]0;+\infty[\ ;\ d = e^{\ln(x+1)}e^{-\ln(x)}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $e^{3x} = 4e^{x}$

2) $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-3} = 4$

3) $\dfrac{5e^{x}}{3-10e^{x}} = 2$

4) $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e$

5) $\ln(e^{2x} - 2e^{x} + 1) = 3$

6) $\ln(2e^{x} - 3) = x$

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$; $x \in \mathbb{R}$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(2x) = 2(f(x))^{2} - 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{4x^{2}+4x-9} \leqslant (e^{3})^{-3}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^{2}$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} e^{x} - \dfrac{1}{2}e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$;

2) $\begin{cases} e^{4x} \cdot e^{y} = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{1-x} - 2 < 0$

2) $\dfrac{2e^{x}+1}{e^{x-3}-1} > 0$

3) $(2e^{x} - 1)(e^{x} - 2) \leqslant 0$

4) $e^{x+2} > \dfrac{3}{e^{x}}$

5) $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5$

6) $\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} < \dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$

Solutions

Exercice 1

1) On a : $a = \ln(\sqrt{e^{3}}) = \dfrac{1}{2}\ln e^{3} = \dfrac{3}{2}\ln e = \dfrac{3}{2}$

$b = e^{1-\ln 2} = \dfrac{e^{1}}{e^{\ln 2}} = \dfrac{e}{2}$

$c = \dfrac{2 - \ln\sqrt[3]{e}}{1 + \ln e^{2}} = \dfrac{2 - \frac{1}{3}\ln e}{1+2} = \dfrac{2-\frac{1}{3}}{3} = \dfrac{5}{9}$

Info :

$(\forall a \in \mathbb{R}^{+*})$; $\ln(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{1}{n}\ln(a)$

$e^{\ln(a)} = a$

2) a) Soit $x \in]0; +\infty[$; $a = e^{\ln(x)} - \ln(2e^{x}) - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = x - \ln 2 - \ln e^{x} + \ln 2$

$= x - \ln 2 - x + \ln 2 = 0$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$;

$b = \ln\left(\dfrac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{e^{x}}\right) = \ln(e^{1-x}) - \ln(e) - \ln e^{x} = 1 - x - 1 - x = -2x$

c) Soit $x \in]0; +\infty[$; $c = \ln(e^{3x}) - 2e^{\ln(2x)} + 3\ln(\ln(e)) = 3x - 2(2x) + 3\ln(1) = -x$

d) Soit $x \in]0;+\infty[$; $d = e^{\ln(x+1)} \cdot e^{-\ln(x)}$

$$= (x+1)\left(\frac{1}{e^{\ln x}}\right) = \frac{x+1}{x}$$

Exercice 2

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x} = 4e^{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

On a : $e^{3x} = 4e^{x} \iff e^{x}(e^{2x} - 4) = 0$

$\iff e^{2x} = 4$ (car $(\forall x \in \mathbb{R})\,; e^{x} > 0$)

$\iff 2x = \ln 4$

$\iff x = \ln 2$

Donc : $S = \{\ln 2\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $\frac{e^{-x}}{e^{-x} - 3} = 4$

Soit D l'ensemble de définition de cette équation et S son ensemble de solutions

Soit $x \in \mathbb{R}$; On a : $x \in D \iff e^{-x} \neq 3$

$\iff x \neq -\ln 3$

Donc : $D = \mathbb{R} - \{-\ln 3\}$

Soit $x \in D$; $\frac{e^{-x}}{e^{-x} - 3} = 4 \iff e^{-x} = 4e^{-x} - 12$

$\iff 3e^{-x} = 12$

$\iff e^{-x} = 4$

$\iff x = -\ln 4$

$\iff x = -2\ln 2$

Donc : $S = \{-2\ln 2\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{5e^{x}}{3 - 10e^{x}} = 2$

Cette équation est définie si et seulement si : $x \in \mathbb{R}$ et $3 - 10e^{x} \neq 0$

c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \ln\left(\frac{3}{10}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{\ln\frac{3}{10}\right\}$;

On a : $\frac{5e^x}{3-10e^x} = 2 \iff 5e^x = 6 - 20e^x$

$\iff 25e^x = 6$

$\iff e^x = \frac{6}{25}$

$\iff x = \ln\left(\frac{6}{25}\right)$

Donc : $S = \left\{\ln\left(\frac{6}{25}\right)\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

On a : $e^{2x+1} - 2e^{x+1} = 3e \iff e.e^{2x} - 2e.e^x - 3e = 0$

$\iff (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$

$\iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4 = 0$

$\iff (e^x - 1)^2 - 4 = 0$

$\iff (e^x - 1 - 2)(e^x - 1 + 2) = 0$

$\iff e^x = 3$

$\iff x = \ln(3)$

Donc : $S = \{\ln 3\}$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation, $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3$

Soit un élément x de $\mathbb{R}$; on a : $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$

Donc, l'équation est définie si et seulement si ($x \in \mathbb{R}$ et $e^x \neq 1$)

si et seulement si ($x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$)

si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3 \iff \ln(e^x - 1)^2 = 3$

$\iff 2\ln|e^x - 1| = 3$

$\iff \ln|e^x - 1| = \frac{3}{2}$

$\iff |e^x - 1| = e^{\frac{3}{2}}$

$\iff e^x - 1 = e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x - 1 = -e^{\frac{3}{2}}$

$\iff e^x = 1 + e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^x = 1 - e^{\frac{3}{2}}$

(Puisque $e > 1$; donc : $1 - e^{\frac{3}{2}} < 0$; d'où l'équation $e^x = 1 - e^{\frac{3}{2}}$ n'a pas de solutions)

Donc : $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3 \iff e^x = 1 + e^{\frac{3}{2}}$

$\iff x = \ln(1 + e^{\frac{3}{2}})$; d'où : $S = \left\{\ln(1 + e^{\frac{3}{2}})\right\}$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation, $\ln(2e^x - 3) = x$

Soit D l'ensemble de définition de cette équation :

$x \in D \iff x \in \mathbb{R}$ et $2e^x - 3 > 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $x > \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Donc : $D = \left]\ln\left(\frac{3}{2}\right); +\infty\right[$

Soit $x \in D$; on a : $\ln(2e^x - 3) = x \iff 2e^x - 3 = e^x$

$\iff e^x = 3$

$\iff x = \ln 3$

Puisque $3 > \frac{2}{3}$; donc $\ln(3) > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$; ainsi $\ln(3) \in D$

Donc : $S = \{\ln 3\}$

Exercice 3

1) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$2(f(x))^2 - 1 = 2\left(\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x.e^{-x}) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + 1 - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = f(2x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(2x) = 2(f(x))^2 - 1$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0 \iff 2(f(x))^2 - 1 - 6f(x) + 5 = 0$

$\iff 2(f(x))^2 - 6f(x) + 4 = 0$

$\iff (f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$

$\iff f(x) = 1$ *ou* $f(x) = 2$

$\iff \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1$ *ou* $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2$

$\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2$ *ou* $e^x + \frac{1}{e^x} = 4$

$\iff e^{2x} + 1 = 2e^x$ *ou* $e^{2x} + 1 = 4e^x$

$\iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ *ou* $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

$\iff (e^x - 1)^2 = 0$ *ou* $e^x = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $e^x = 2 + \sqrt{3}$

$\iff e^x = 1$ *ou* $e^x = 2 - \sqrt{3}$ *ou* $e^x = 2 + \sqrt{3}$

$\iff x = \ln 1$ *ou* $x = \ln(2 - \sqrt{3})$ *ou* $x = \ln(2 + \sqrt{3})$

Donc : $S = \{0; \ln(2-\sqrt{3}); \ln(2+\sqrt{3})\}$

2) Résolvons l'inéquation $e^{4x^2+4x-9} \leqslant (e^3)^{-3}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $e^{4x^2+4x-9} \leqslant (e^3)^{-3} \iff e^{4x^2+4x-9} \leqslant e^{-9}$

$$\iff 4x^2+4x-9 \leqslant -9$$
$$\iff 4x^2+4x \leqslant 0$$
$$\iff 4x(x+1) \leqslant 0$$
$$\iff -1 \leqslant x \leqslant 0$$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = [-1;0]$

Exercice 4

1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$; on pose $e^x = X$ et $Y = e^y$ avec $X > 0$ et $Y > 0$

Le système devient: $\begin{cases} X - \frac{1}{2}Y = 1 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$

Donc : $X = \frac{3}{2} + \frac{e}{4}$ et $Y = 1 + \frac{e}{2}$, d'où : $e^x = \frac{3}{2} + \frac{e}{4}$ et $e^y = 1 + \frac{e}{2}$

Ainsi : $x = \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{e}{4}\right)$ et $y = \ln\left(1 + \frac{e}{2}\right)$

Donc : $S = \left\{\left(\ln\left(\frac{3}{2} + \frac{e}{4}\right); \ln\left(1 + \frac{e}{2}\right)\right)\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système: $\begin{cases} e^{4x} \cdot e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$;

On a : $\begin{cases} e^{4x} \cdot e^y = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 4x + y = -2 \\ xy = -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4x + y = -2 \\ (4x) \cdot y = -8 \end{cases}$$

On pose $4x = X$ et $Y = y$ le système dévient : $\begin{cases} X + Y = -2 \\ XY = -8 \end{cases}$

Donc X et Y sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $t^2 + 2t - 8 = 0$

On a : $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=9$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=-4$

Donc : $\begin{cases} X=-4 \\ Y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X=2 \\ Y=-4 \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} 4x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x=2 \\ y=-4 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-4 \end{cases}$

Conclusion : $S=\left\{(-1;2);\left(\frac{1}{2};-4\right)\right\}$

Exercice 5

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{1-x}-2<0$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a :

$$e^{1-x}-2<0 \Leftrightarrow e^{1-x}<2$$
$$\Leftrightarrow 1-x<\ln(2)$$
$$\Leftrightarrow 1-\ln(2)<x$$
$$\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

Donc : $S=\left]\ln\left(\frac{e}{2}\right);+\infty\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{2e^x+1}{e^{x-3}-1}>0$

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 2e^x+1>0$

Donc : $\frac{2e^x+1}{e^{x-3}-1}>0 \Leftrightarrow e^{x-3}-1>0$

$\Leftrightarrow e^{x-3}>1$

$\Leftrightarrow x-3>0$

$\Leftrightarrow x>3$

Donc : $S=]3;+\infty[$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $(2e^x-1)(e^x-2)\leqslant 0$

Méthode 1 :

$e^x - 2 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 2$ et $2e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant \frac{1}{2}$

$\iff x \geqslant \ln(2)$ $\iff x \geqslant -\ln(2)$

Donc, le tableau de signe de $(2e^x - 1)(e^x - 2)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2e^x - 1)(e^x - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [-\ln(2); \ln(2)]$

Méthode 2 :

On a : $(2e^x - 1)(e^x - 2) \leqslant 0 \iff 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) \leqslant 0$

$\iff \frac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$

$\iff -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2$

Donc : $S = [-\ln 2; \ln 2]$

Info :
Soit : a et b de $\mathbb{R}$,
avec $a < b$
$(X - a)(X - b) \leqslant 0 \iff a \leqslant X \leqslant b$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{x+2} > \frac{3}{e^x}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $e^{x+2} > \frac{3}{e^x} \iff e^{x+2} \cdot e^x > 3$

$\iff e^{2x+2} > 3$

$\iff 2x + 2 > \ln(3)$

$\iff x > \frac{\ln(3) - 2}{2}$

Donc : $S = \left]\frac{\ln(3) - 2}{2}; +\infty\right[$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $\frac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5 \iff e^{2x-1-5x} < 5$

$\iff e^{-3x-1} < 5$

$\iff -3x - 1 < \ln(5)$

$\iff x > -\frac{1 + \ln 5}{3}$

Donc : $S = \left]-\frac{1 + \ln 5}{3}; +\infty\right[$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $e^x > 0$ d'où $e^{2x} + 1 > 0$ et $e^x + 2 > 0$

Donc : $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^x-2}{e^x+2} \Leftrightarrow (e^x-1)(e^x+2) < (e^{2x}+1)(e^x-2)$

$\Leftrightarrow e^{3x}-3e^{2x} > 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}(e^x-3) > 0$

$\Leftrightarrow e^x-3 > 0$

$\Leftrightarrow e^x > 3$

$\Leftrightarrow x > \ln 3$

Donc : $S =]\ln 3; +\infty[$

II Exponentielle de $a(a > 0 \text{ et } a \neq 1)$

Définitions

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$ et $a \neq 1$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto e^{x\ln a}$ s'appelle la fonction exponentielle de base a notée $\exp_a$

- Le nombre $e^{x\ln a}$ se note aussi a^x , et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

Propriétés:

Pour tous x et y de $\mathbb{R}$; on a:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$
- $\ln a^x = x\ln a$
- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Dérivation:

- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a: $\forall x \in \mathbb{R}$; $(a^x)' = \ln a.a^x$

Monotonie de la fonction exp:

- $a > 1$ alors: $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a^x < a^y \Leftrightarrow x < y)$
- Si $0 < a < 1$ alors : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; a^y < y \Leftrightarrow x > y)$

- Fonction exponentielle de base 10
- La fonction $x \mapsto 10^x$ s'appelle fonction exponentielle de base 10 notée $\exp_{10}$ ou encore 10^x

On a:

- $10^x = e^{x\ln 10}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\forall y \in]0; +\infty[) \ ; 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

Exercices d'application

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0$; 2) $100^x - 10^x = 2$; 3) $2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} - 7 = 0$; 4) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 7

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(m+1)2^x + (m-1) \cdot 2^{-x} = 0$ où m est un paramètre réel

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$

2) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \geqslant 0$

3) $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0$

4) $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leqslant 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

Solutions

Exercice 6

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $7^{2x} - 5^{3x+1} = 0 \Longleftrightarrow 7^{2x} = 5^{3x+1}$

$$\Longleftrightarrow 2x \ln 7 = (3x+1)\ln 5$$

$$\Longleftrightarrow (2\ln 7 - 3\ln 5)x = \ln 5$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2\ln 7 - 3\ln 5}$$

Donc : $S = \left\{\frac{\ln 5}{2\ln 7 - 3\ln 5}\right\}$

2) Résolvons l'équation : $100^x - 10^x = 2$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$;

$$100^x - 10^x = 2 \iff (10^x)^2 - (10)^x - 2 = 0$$
$$\iff (10^x + 1)(10^x - 2) = 0$$
$$\iff 10^x = -1 \text{ ou } 10^x = 2$$
$$\iff 10^x = 2$$
$$\iff x = \log(2)$$

Donc : $S = \{\log(2)\}$

3) Résolvons l'équation : $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x} - 7 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$$2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x} - 7 = 0 \iff 2^x \times 2 + \frac{3}{2^x} - 7 = 0$$
$$\iff 2 \cdot (2^x)^2 + 3 - 7 \cdot 2^x = 0$$
$$\iff 2(2^x - 3)\left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\iff 2^x = 3 \text{ ou } 2^x = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = \log_2(3) \text{ ou } x = -1$$
$$\iff x = \log_2(3) \text{ ou } x = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc : $S = \{-1; \log_2(3)\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : (\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

- On remarque que 1 est une solution car $(\sqrt{1})^1 = 1^{\sqrt{1}}$
- L'équation (E) est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

Résolution de l'équation :

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

$$\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}} \iff e^{x \ln \sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln(x)}$$
$$\iff \frac{1}{2} x \ln(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$
$$\iff \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x}\right)\ln(x) = 0$$
$$\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{x}$$
$$\iff x = 1 \text{ ou } x^2 = 4x$$

$\Longleftrightarrow x = 1$ ou $x(x-4) = 0$

$\Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = 4$ $\qquad (x \neq 1$ et $x > 0)$

$\Longleftrightarrow x = 4$

Donc : $S = \{1;4\}$

Exercice 7

Résolvons l'équation: $(m+1)2^x + (m-1)\cdot 2^{-x} = 0$ où $m \in \mathbb{R}$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $2^{-x} \neq 0$

Donc : $(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0 \Longleftrightarrow 2^{-x}\left((m+1)\times 2^{2x} + (m-1)\right) = 0$

$\Longleftrightarrow (m+1)2^{2x} + (m-1) = 0$

$\Longleftrightarrow (m+1)2^{2x} = 1 - m$

On a les cas suivants :

• Si $m = -1$ alors : $0 \cdot (2^x)^2 = 2$; d'où $0 = 2$ impossible

ainsi $S = \phi$

• Si $m \neq -1$ alors $2^{2x} = \dfrac{1-m}{m+1}$

Cette équation admet dans $\mathbb{R}$ des solutions si $\dfrac{1-m}{1+m} > 0$

c'est-à-dire si: $-1 < m < 1$

Donc: si $m \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$; alors : $S = \phi$

si $m \in]-1;1[$; on a : $(2^x)^2 = \dfrac{1-m}{1+m} \Longleftrightarrow 2^x = \sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$

$\Longleftrightarrow x = \log_2\left(\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}\right)$

alors : $S = \left\{\log_2\left(\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}\right)\right\}$

Exercice 8

1) Résolvons l'inéquation : $1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 5$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $1+\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$\iff e^{-x\ln 3} > 4$

$\iff -x\ln 3 > \ln 4$

$\iff x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$; l'inéquation: $4^x - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $4^x - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0 \iff (2^x)^2 - 3\cdot 2^x + 2 \geqslant 0$

$\iff (2^x - 1)(2^x - 2) \geqslant 0$

$\iff 2^x \geqslant 2$ ou $2^x \leqslant 1$

$\iff x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$

Donc : $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0 \iff \frac{1}{2}4^x - 9\cdot 3^x + 2\cdot 4^x + 3^x < 0$

$\iff \frac{5}{2}\cdot 4^x - 8\cdot 3^x < 0$

$\iff \frac{5}{2}\cdot 4^x < 8\cdot 3^x$

$\iff 5\cdot 4^x < 16\cdot 3^x$

$\iff \ln 5 + x\ln 4 < \ln 16 + x\ln 3$

$\iff (\ln 4 - \ln 3)x < \ln\left(\frac{16}{5}\right)$

$\iff x < \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3}$ (car : $\ln 4 > \ln 3$)

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln 4 - \ln 3}\right[$

4) Résolvons l'inéquation : $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leqslant 2\cdot 5^{\frac{1}{2}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $5^{\cos x} + 5^{\cos(\pi - x)+1} \leqslant 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5^{\cos x} + 5 \cdot 5^{-\cos x} \leqslant 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (5^{\cos x})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 5^{\cos x} + 5 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (5^{\cos x} - \sqrt{5})^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{\cos x} - \sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

III Limites usuelles

en $+\infty$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}$	en $-\infty$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ où $n \in \mathbb{N}$
en 0		$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

Exercices d'application

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - e^{2x+1}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x}$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2 - x}}{2x + 1}$ 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2 + 1}$ 7) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{3x}$ 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - 1)e^{3x}$

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to (\ln 2)^+}\dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(e^x-1)-x$ 8) $\lim\limits_{|x|\to +\infty}x-\ln|2e^x-1|$ 9) $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}$

Exercice 11

1) Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;0])\ ;\ |e^x-1|\leqslant|x|$

et que : $(\forall x\in[-1;0])\ ;\ |2x^2+3e^x-3|\leqslant 5|x|$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-}\left|\dfrac{2x^2+3e^x-3}{\sqrt{-x}}\right|$

Exercice 12

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^+}{2}}\dfrac{1}{2+2^{\tan x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^-}{2}}\dfrac{1}{2+2^{\tan x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x-m}\right)^x$ avec $m>0$ 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

Solutions

Exercice 9

1) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$

Méthode 1 :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\dfrac{e^{2x}}{x}=\dfrac{e^x}{x}\cdot e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty$

Méthode 2 :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; $\dfrac{e^{2x}}{x}=2\cdot\dfrac{e^{2x}}{2x}$

Posons $2x=X$; $x\longrightarrow+\infty\iff X\longrightarrow+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{X\to +\infty}2\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - e^{2x+1}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; $x^3 - e^{2x+1} = x^3\left(1 - \frac{e^x}{x^3}.e^{x+1}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{e^x}{x^3}.e^{x+1}\right) = -\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - e^{2x+1} = -\infty$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{2e^x - 1}{x^2 + x} = \frac{2e^x}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 + x}$

$$= \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2 + x}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2 + x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 1}{x^2 + x} = +\infty$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 8} \cdot \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \cdot e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^2 - 2x + 8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = +\infty$

Méthode 2 :

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a :

$$\frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = \frac{(e^x)^3}{x^2} \cdot \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \cdot e^x \cdot \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} = 4$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^{3x}}{x^2 - 2x + 8} = +\infty$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{2x + 1}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $\frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = \frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} \cdot \frac{x^2-x}{2x+1}$

Pour $\frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}$; posons $x^2-x=t$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{x^2-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = +\infty$

Méthode 2 :

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{e^{x^2-x}}{2x+1} = \frac{e^{x^2-x}}{e^{\ln(2x+1)}} = e^{x^2-x-\ln(2x+1)}$

Et on a : $x^2-x-\ln(2x+1) = (2x+1)\cdot\left(\frac{x^2-x}{2x+1} - \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x-\ln(2x+1) = +\infty$

Par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x^2-x)-\ln(2x+1)} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}-x}{2x+1} = +\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $\frac{e^{2x+1}}{x^2+1} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \cdot \frac{e}{1+\frac{1}{x^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2+1} = +\infty$

7) Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{3x}$

Méthode 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $x^2e^{3x} = (xe^x)^2 \times e^x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{3x} = 0$

Méthode 2 :

On pose $3x = t$, donc : $x^2 e^{3x} = \left(\frac{t}{3}\right)^2 e^t = \frac{1}{9} t^2 e^t$

Puisque : $\lim\limits_{t \to -\infty} t^2 e^t = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{3x} = 0$

Méthode 3 :

On pourra pose $3x = 2t$

$$x^2 e^{3x} = \left(\frac{2}{3} t\right)^2 e^{2t} = \frac{4}{9} (te^t)^2$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{3x} = \lim_{t \to -\infty} \frac{4}{9} (te^t)^2 = 0$$

8) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{e^x - x}{2e^x + 3} = \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(2 + \frac{3}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$)

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}} = \frac{1}{2}$; Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3} = \frac{1}{2}$

9) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - 1)e^{3x}$

Méthode 1 :

Soit $x \in]-\infty; 0[$; on a : $(4x^2 - 1)e^{3x} = 4x^2 e^{3x} - e^{3x}$

Puisque: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{3x} = 0$ (voir limite 7) et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - 1)e^{3x} = 0$

Méthode 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $(4x^2 - 1)e^{3x} = \frac{4x^2 - 1}{x^3} x^3 e^{3x} = \frac{4x^2 - 1}{x^3} (xe^x)^3$

Et on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)^3 = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2 - x)e^{3x} = 0$

Exercice 10

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=\dfrac{e^{2x}(e^x-1)}{x}=e^{2x}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}=1$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=1$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$ et $x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$;ona: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\sin x}=2e^{-x}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}2e^{-x}=2$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a : $\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$ (avec $X=x^2$; $x\longrightarrow 0\Longleftrightarrow X\longrightarrow 0$)

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{2x^2}=\dfrac{3}{4}$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; on a : $(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)=(x+1)\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$

On pose : $\dfrac{1}{x-1}=t$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)(e^{\frac{1}{x-1}}-1)=+\infty$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}\dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$:

On a : $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} 2e^x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} e^x-2=0^+$ (car $x\to \ln 2^+ \Rightarrow x>\ln 2 \Rightarrow 2^x-2>0$)

Donc: $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} \dfrac{2e^x+1}{e^x-2}=+\infty$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; on a : $(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\dfrac{1}{x-1}}$

Posons: $\dfrac{1}{x-1}=X$; $x\to 1^+ \Longleftrightarrow X\to+\infty$, d'où: $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

7) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x$

Méthode 1: Soit $x>0$; on a : $\ln(e^x-1)-x=\ln(e^x-1)-\ln e^x$

$$=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)=\ln(1-\frac{1}{e^x})$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{e^x})=1$; et la fonction $\ln$ est continue en 1

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-\dfrac{1}{e^x})=\ln 1=0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x=0$

Méthode 2:

Soit $x>0$;

on a $\ln(e^x-1)-x=\ln\left(e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right)-x$

$$=\ln e^x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)-x \qquad \text{(car } \forall x>0\,;e^x>0$$

$$=x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)-x=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) \qquad \text{et } 1-\frac{1}{e^x}>0\ )$$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{e^x}=1$ et $\ln$ est continue en 1,

alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-1)-x=0$

8) Calculons: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x-\ln|2e^x-1|$

- Calculons: $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\ln|2e^x-1|$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}|2e^x-1|=1$

Et $\ln$ est continue en 1, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|2e^x-1|=\ln 1=0$,

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\ln|2e^x-1|=-\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln|2e^x-1|$

Soit $x>0$; on a : $2e^x-1>0$

et $x-\ln(2e^x-1)=x-\ln\left(e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)\right)$

$$=x-\ln e^x-\ln\left(2-\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=-\ln\left(2-\frac{1}{e^x}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{e^x}=2$ et la fonction $\ln$ est continue en 2

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2-\frac{1}{e^x}\right)=\ln 2$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2-\frac{1}{e^x}\right)=-\ln 2$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(2e^x-1)=-\ln 2$

9) Calculons $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}$

On pose $e^x=t$; on a alors:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-3t+4}{2t-3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2}=+\infty$$

• Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-3e^x+4}{2e^x-3}=-\frac{4}{3}$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

Exercice 11

1) Montrons que : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $|e^x-1|\leqslant|x|$

Soit $x\in]-\infty;0]$; on a : $x\leqslant 0\iff e^x\leqslant 1$

$$\iff e^x-1\leqslant 0$$

Donc : $|e^x-1|=1-e^x$ et on a: $|x|=-x$

Montrons donc que : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $1-e^x\leqslant -x$

On considère la fonction u définie sur $]-\infty;0]$ par : $u(x)=e^x-x-1$

La fonction u est dérivable sur $]-\infty;0]$ et $(\forall x\in]-\infty;0])$; $u'(x)=e^x-1$

On a donc : $(\forall x\in]-\infty;0[)$; $u'(x)<0$

D'où: la fonction u est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;0])\ ; u(x) \geqslant u(0)$

C'est-à-dire : $u(x) \geqslant 0$ (car $u(0) = 0$)

Ainsi : $e^x - x - 1 \geqslant 0$

Donc : $1 - e^x \leqslant -x$

Conclusion : $(\forall x \in]-\infty;0])\ ;\ |e^x - 1| \leqslant |x|$

• Montrons que : $(\forall x \in [-1;0])\ ;\ |2x^2 + 3e^x - 3| \leqslant 5|x|$

Soit $x \in [-1;0]$, on a : $|2x^2 + 3e^x - 3| = |2x^2 + 3(e^x - 1)| \leqslant 2x^2 + 3|e^x - 1|$

Et on a : $|e^x - 1| \leqslant |x|$ et $x^2 = |x|^2 \leqslant |x|$ (car $|x| \in [0;1]$)

Donc : $|2x^2 + 3e^x - 3| \leqslant 2x^2 + 3|e^x - 1| \leqslant 2|x| + 3|x|$

Ainsi : $|2x^2 + 3e^x - 3| \leqslant 5|x|$ pour tout x de $[-1;0]$

2) Déduisons $\lim\limits_{x \to 0^-} \left| \dfrac{2x^2 + 3e^x - 3}{\sqrt{-x}} \right|$

On a : $(\forall x \in [-1;0[)\ ;\ |2x^2 + 3e^x - 3| \leqslant 5|x|$

Donc : $\left| \dfrac{2x^2 + 3e^x - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant \dfrac{5|x|}{\sqrt{-x}}$; $(|x| = -x = (\sqrt{-x})^2)$

Ainsi : $\left| \dfrac{2x^2 + 3e^x - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant 5\sqrt{-x}$

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in [-1;0[)\ ;\ \left| \dfrac{2x^2 + 3e^x - 3}{\sqrt{-x}} \right| \leqslant 5\sqrt{-x} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 5\sqrt{-x} = 0 \end{cases}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0^-} \left| \dfrac{2x^2 + 3e^x - 3}{\sqrt{-x}} \right| = 0$

Exercice 12

1) Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}}$

On a : $2^{\tan x} = e^{\ln(2)\tan x}$ et puisque : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$ et $\ln 2 > 0$

Alors : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \ln 2 \cdot \tan x = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} e^{\ln 2 \cdot \tan x} = 0$ (car $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$) ainsi : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} 2^{\tan x} = 0$

Par suite : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \left(\dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}} \right) = \dfrac{1}{2}$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{2+2^{\tan x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ et $2>1$, donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}2^{\tan x}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}2+2^{\tan x}=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{2+2^{\tan x}}=0$

3) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Soit $x>0$; on a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

Posons $\frac{1}{x}=t$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

Et la fonction: $x\longmapsto e^x$ est continue en 1

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^1=e$

4) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-m}\right)^x$ où $m>0$

On a : $\left(\frac{x}{x-m}\right)^x=e^{x\ln\left(\frac{x}{x-m}\right)}$

et on a : $x\ln\left(\frac{x}{x-m}\right)=-x\ln\left(\frac{x-m}{x}\right)=-x\ln\left(1-\frac{m}{x}\right)$

On pose : $t=-\frac{m}{x}$

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x}{x-m}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln\left(1-\frac{m}{x}\right)$

$=\lim\limits_{t\to0}m\frac{\ln(1+t)}{t}=m$ (en posant: $t=-\frac{m}{x}$)

Puisque: la fonction $x\longmapsto e^x$ est continue en m

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-m}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{x}{x-m}\right)}=e^m$

5) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}}$

On a : $(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}}=e^{\frac{1}{\tan 4x}\ln(\tan x)}=e^{\frac{\ln(\tan x)}{\tan 4x}}$

On pose : $t=x-\frac{\pi}{4}$; on a donc :

$$\frac{\ln(\tan x)}{\tan 4x} = \frac{1}{\tan(4t+\pi)}\ln\left(\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\tan 4t}\ln\left(\frac{1+\tan t}{1-\tan t}\right)$$
$$= \frac{1}{\tan(4t)}\cdot((\ln(1+\tan t)-\ln(1-\tan t))$$
$$= \frac{\tan t}{\tan(4t)}\cdot\left(\frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}+\frac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t}\right)$$

On pose $\tan t = h$; on a : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan t)}{\tan t} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

de même : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t} = 1$

et on a : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{\tan(4t)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\tan t}{t}}{\frac{\tan 4t}{t}} = \dfrac{1}{4}$

D'où : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{\tan 4t}\left(\dfrac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}+\dfrac{\ln(1-\tan t)}{-\tan t}\right) = \dfrac{1}{4}(1+1) = \dfrac{1}{2}$

Et la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en $\dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\tan 4x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan x)}{\tan 4x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

6) Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$

On pose : $t = x-1$

On a donc : $x^x - x = x(x^{x-1}-1) = x(e^{(x-1)\ln x}-1)$
$$= (t+1)(e^{t\ln(1+t)}-1) = \frac{e^{t\ln(1+t)}-1}{t\ln(1+t)}\cdot t(\ln(1+t))\cdot(t+1)$$

Et on a : $\ln(1+\sqrt{x^2-1}) = \ln(1+\sqrt{t^2+2t}) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})}{\sqrt{t^2+2t}}\cdot\sqrt{t^2+2t}$

Donc : $\dfrac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = \dfrac{e^{t\ln(1+t)}-1}{t\ln(1+t)}\cdot\dfrac{t(t+1)\ln(1+t)}{\sqrt{t^2+2t}}\cdot\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})}$

On pose : $h = t\ln(1+t)$

On a : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^{t\ln(1+t)}-1}{t\ln(1+t)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$

On pose : $y = \sqrt{t^2+2t}$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t^2+2t}}{\ln(1+\sqrt{t^2+2t})} = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

Et on a : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t(t+1)\ln(1+t)}{\sqrt{t^2+2t}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(t+1)(\ln(1+t))\sqrt{t^2+2t}}{(t+2)}=0$

Donc : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(t+1)(e^{t\ln(1+t)}-1)}{\ln\left(1+\sqrt{\sqrt{t^2+2t}}\right)}=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}=0$

7) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)}$

Calculons tout d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)$; on a:

$$x\ln x(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)=-x\ln x\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)=-x\ln x\cdot\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$

$$=-x\ln x\cdot\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)=-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left[\frac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right]$$

On pose : $t=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$; on a donc : $x\longrightarrow+\infty\Longleftrightarrow t\longrightarrow 0^+$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x).\ln\left(\dfrac{\ln x}{\ln(1+x)}\right)=-1$; par suite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln(x)}=e^{-1}$

8) Calculons $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

On pose $t=x-1$; on a : $e^{x^2+x}-e^{2x}=e^{t^2+3t+2}-e^{2t+2}$

$$=e^{2t+2}\cdot\frac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}\cdot t(t+1)$$

et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

Donc : $\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}\cdot\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\cdot(t+1)e^{2t+2}$

Comme : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$ (en posant $h = t^2+t$)

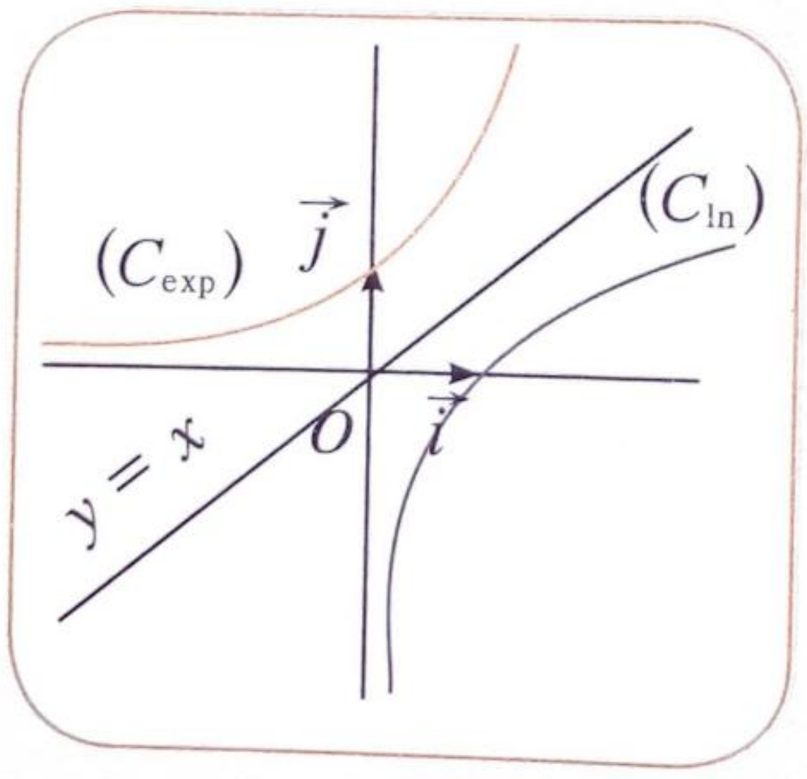
de plus : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = -\dfrac{2}{\pi}$ et $\lim\limits_{t\to 0}(t+1)e^{2t+2} = e^2$

Donc : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t^2+t}-1}{t^2+t}\cdot\dfrac{-t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}(t+1)e^{2t+2} = -\dfrac{2e^2}{\pi}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\dfrac{2e^2}{\pi}$

IV Dérivation - Courbe de la fonction exp

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de la courbe de la fonction ln par rapport à la droite d'équation: $y = x$



- La fonction: $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(e^x)' = e^x$

Conséquence:

- Si une fonction u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction: $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a: $(\forall x \in I)$; $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

Si u est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; alors les fonctions primitives de la fonction: $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions définies sur I par: $x \mapsto e^{u(x)} + k$; avec k un nombre réel.

Exercices d'application

Exercice 13

Étudier la dérivabilité de f, puis calculer sa dérivée dans chaque cas :

1) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

2) $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$

3) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$

4) $f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$

5) $f(x) = \ln(|e^x - 1|) + x$

6) $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2+1}}$

7) $f(x) = \ln(e^x - e^{\frac{1}{x}})$

8) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$

Exercice 14

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$

1) Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$; $h'(x)$ et $h''(x)$ et déterminer $h(0)$ et $h'(0)$

2) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$

3) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $[e; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1) Montrer que f est une bijection de $[e; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera

2) Montrer que : $\forall a$; b et c de $[e; +\infty[$; $b < c \iff a^{c^b} < a^{b^c}$

Exercice 16

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; on a : $e^x > \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ où $x > 0$

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^x$ et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Calculer les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$

b) Déterminer les branches infinies de (C_f)

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$

b) Étudier la concavité de (C_f)

4) Tracer la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 18

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-1}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations

2) a) Étudier la concavité de (C_f)

b) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{-1}{1+e^x} + x + \ln(1+e^{-x})$

c) Étudier les branches infinies de (C_f)

3) Soit h la fonction définie par : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $h(x) = f(x) - x$

a) Étudier les variations de h

b) En déduire la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

4) Construire (C_f) en mettant en évidence la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

Et soit (Γ) la courbe de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 1 + f(x)$

2) Déduire:

a) Le tableau de variations de g

b) La concavité de (Γ)

c) Les branches infinies de (Γ)

d) Tracer (Γ)

Solutions

Exercice 13

1) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

• Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; comme produit de deux fonctions dérivables et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

2) $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$

• Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x(e^x)}{(e^x+3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

3) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$

• Ensemble de définition : $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

• La fonction f est dérivable en chaque point de D_f

Et on a : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} e^{\frac{x-1}{x+2}}$

4) $f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$

• Ensemble de définition : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ ; \ f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x+1) \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

5) $f(x) = \ln(|e^x - 1|) + x$

• Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$

• La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} + 1 = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

6) $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$
- La fonction f est dérivable en tout point de D_f

Et on a : $(\forall x \in D_f)\ ;\ f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}} + x \cdot \dfrac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$

$$= \frac{(x^2-1)^2 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

7) $f(x) = \ln\left(e^x - e^{\frac{1}{x}}\right)$

- Ensemble de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $x \in D_f \iff x \neq 0$ et $e^x - e^{\frac{1}{x}} > 0$

$\iff x \neq 0$ et $e^x > e^{\frac{1}{x}}$

$\iff x \neq 0$ et $x > \dfrac{1}{x}$

$\iff x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} > 0$

$\iff x \neq 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$

Le tableau de signe de $\dfrac{x^2-1}{x}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-1;0[\cup]1;+\infty[$

La fonction f est dérivable en tout point de D_f et on a :

$$(\forall x \in D_f)\ ;\ f'(x) = \frac{e^x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}} = \frac{x^2 e^x + e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(e^x - e^{\frac{1}{x}}\right)}$$

8) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$

• Ensemble de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $x \in D_f \iff e^{2x} - e^x \geqslant 0$

$$\iff e^x(e^x - 1) \geqslant 0$$

$$\iff e^x - 1 \geqslant 0$$

$$\iff e^x \geqslant 1$$

$$\iff x \geqslant 0$$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

• La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \ ; \ f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}}$$

• Dérivabilité de f à droite en 0

Soit $x \in]0; +\infty[$; $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{e^{2x} - e^x}}{x} = \sqrt{\dfrac{e^x(e^x - 1)}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x}}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x}} = +\infty$; ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivabilité à droite en 0

Exercice 14

1) Déterminons h' et h''

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $h'(x) = -1 + x + e^{-x}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $h''(x) = 1 - e^{-x}$

Et on a : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$

2) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

On a : $(\forall t \in \mathbb{R})$; $e^t \geqslant 1 + t$ (à vérifier)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $1 + (-x) \leqslant e^{-x} \Longrightarrow 1 - x \leqslant e^{-x}$

$$\Longrightarrow 1 - e^{-x} \leqslant x$$

et on a : $-x \leqslant 0 \iff e^{-x} \leqslant 1$

$$\iff 0 \leqslant 1 - e^{-x}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant x$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leqslant h''(x) \leqslant x$

b) Déduction

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(x) = h'(x) - \frac{x^2}{2}$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \varphi'(x) = h''(x) - x$

D'après la question 2) a) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \varphi'(x) \leqslant 0$

d'où la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ; \varphi(x) \leqslant \varphi(0)$, or $\varphi(0) = 0$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ;\ h'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

Et on a d'après 2) a) $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ;\ 1 - x \leqslant e^{-x}$ c'est-à-dire $0 \leqslant h'(x)$

Donc : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ;\ 0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

• On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = h(x) - \frac{x^3}{6}$

La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \psi'(x) = h'(x) - \frac{x^2}{2}$$

d'après ce qui précède on a: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \psi'(x) \leqslant 0$

d'où la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \psi(x) \leqslant \psi(0)$

Or : $\psi(0) = 0$ d'où : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ;\ h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ h'(x) \geqslant 0$

d'où la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ h(x) \geqslant h(0)$ et $h(0) = 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ h(x) \geqslant 0$

ainsi : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ ;\ 0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$

3) Montrons que la fonction f est dérivable à droite en 0

• Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - 1\right) = \frac{1 - e^{-x} - x}{x^2}$

et on a : $0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$; d'où : $0 \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leqslant \frac{x^3}{6}$

D'où : $-\frac{x^2}{2} \leqslant 1 - x - e^{-x} \leqslant \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$

Ainsi : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} \leqslant \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant \frac{x}{6}-\frac{1}{2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\frac{1}{2}$

Exercice 15

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[e;+\infty[$ et, on a :

$$(\forall x\in[e;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

On a : $x>e \iff \ln(x)>1$

$\iff 1-\ln(x)<0$

Donc : $(\forall x\in[e;+\infty[)\ ;\ f'(x)\leqslant 0$

D'où la fonction f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

ainsi la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

D'où f est une bijection de $[e;+\infty[$ vers J tel que :

$J=f([e;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(e)\right]=\left]0;\frac{1}{e}\right]$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

2) Soit a ; b et c des éléments de l'intervalle $[e;+\infty[$

Puisque f une bijection de $[e;+\infty[$ vers $\left]0;\frac{1}{e}\right]$

et f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$; on a :

$$b<c \iff f(b)>f(c)$$
$$\iff \frac{\ln(b)}{b}>\frac{\ln(c)}{c}$$
$$\iff c\ln(b)>b\ln(c)$$
$$\iff e^{c\ln(b)}>e^{b\ln(c)}$$
$$\iff b^c>c^b$$

Et puisque la fonction $x\longmapsto a^x$ est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car $a>1$ alors $b^c>c^b \iff a^{b^c}>a^{c^b}$

Exercice 16

- Initialisation: Pour $n = 0$

L'inégalité proposée est vérifiée pour $n = 0$ car $\forall x > 0$, $e^x > 1$

- Héridité: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que: $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

et montrons que $e^x > \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$; $x \in \mathbb{R}^+$

On a : $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$; $f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$; $f'(x) > 0$

alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

d'où $\forall x > 0$; $f(x) > f(0)$ ainsi : $e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} > 0$

donc : $e^x > \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$

La propriété est vraie pour $n+1$

D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ où $x>0$.

Exercice 17

1) a) Calculons les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$;

- Calculons $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$; donc : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

- Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Calculons $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

On a : $\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} e^x = 1$; donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

- Calculons $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

On a : $\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$; donc : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) Les branches infinies de la courbe (C_f)

• On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; donc la courbe (C_f) admet une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; donc : la courbe (C_f) admet une asymptote d'équation: $x = 0$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; donc la courbe (C_f) admet une branche infinie

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{e^x}{x}$

Puisque: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc: la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2) a) La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) = \frac{1}{x^2}e^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot e^x = e^x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}\cdot e^x$$

b) Tableau de variations :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}$; d'où $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

Ainsi, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
f	0	↗	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

c) Équation de la tangente (T)

On a : $f(1) = 0$ et $f'(1) = e$; d'où l'équation de la tangente (T) est :

$$y = e(x - 1) = ex - e$$

3) a) La fonction f est deux fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ (à vérifier)

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)' = \left(1 - \dfrac{1}{x} + x^{-2}\right)' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x - 2}{x^3}$

Donc :

$$f''(x) = \left(\frac{x-2}{x^3}\right)e^x + \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^x = e^x\left(\frac{x-2+x^3-x^2+x}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3}\right)\cdot e^x$$

$$= \frac{(x^2(x-1)+2(x-1))}{x^3}\cdot e^x = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}\cdot e^x$$

b) Étude de la concavité de (C_f).

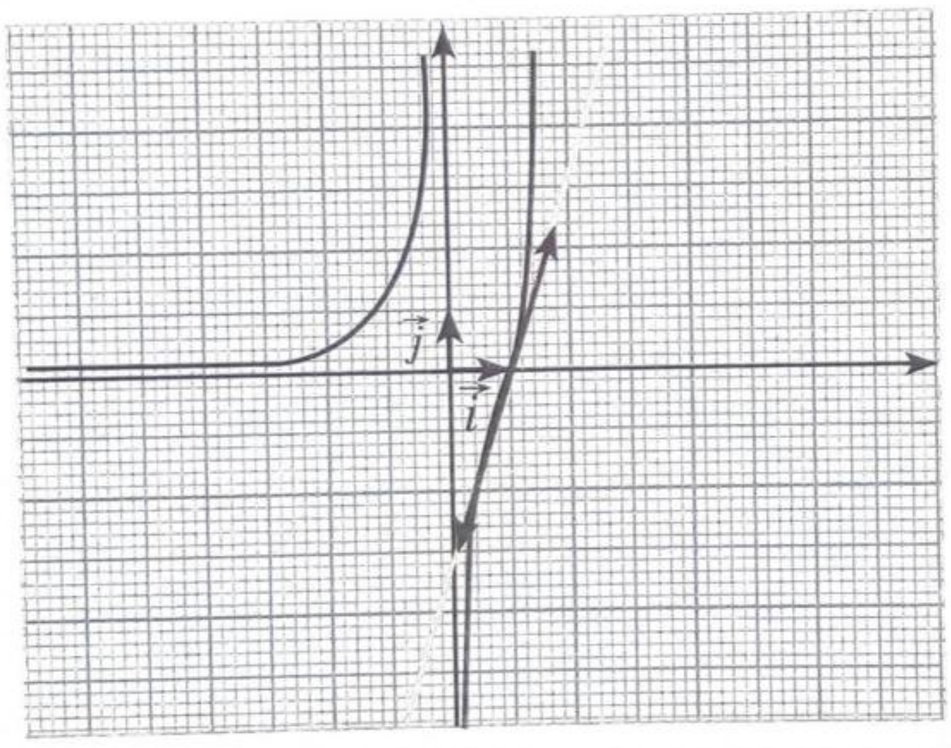
Le signe de $f''(x)$ est celui de $x(x-1)$

D'où le tableau de concavité de C_f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$	0	$+$		
Concavité de (C)	∪		∩		∪		

4) Construction de la courbe de f

Le point $A(1;0)$ est un point d'inflexion



Exercice 18

Partie A : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{-1}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$

1) Étude des variations de f

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- Les limites :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x) = +\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+e^x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1$ et la fonction ln est continue en 1

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1) = 0$; et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{1+e^x} = -1$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

• Fonction dérivée

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x + e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x}{(e^x+1)^2}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f'(x) > 0$

D'où: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi : le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	↗	$+\infty$

2) a) Étudions la concavité de (C_f)

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f''(x) = \frac{(2e^{2x}+2e^x)(e^x+1)^2 - (e^{2x}+2e^x)(2)(e^x+1)(e^x)}{(e^x+1)^4}$$

$$= \frac{2e^x[(e^x+1)^2 - (e^{2x}+2e^x)]}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^3}(e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}-2e^x)$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x+1)^3}$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f''(x) > 0$

D'où : la courbe (C_f) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives ((C_f) est convexe)

b) Vérifions que pour tout x de $\mathbb{R}$; $f(x) = \frac{-1}{e^x+1} + x + \ln(1+e^{-x})$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x) = \frac{-1}{e^x+1} + \ln(e^x(e^{-x}+1))$

$$= \frac{-1}{e^x+1} + \ln e^x + \ln(e^{-x}+1)$$

(car $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; e^x > 0$ et $e^{-x}+1 > 0$)

$$= \frac{-1}{e^x+1} + x + \ln(e^{-x}+1)$$

c) Étudions les branches infinies de (C_f)

•On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; donc la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$ et la fonction $\ln$ est continue en 1;

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+e^{x}} + \ln(1+e^{-x})\right) = 0$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Étudions les variations de h

• L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$

• Les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ (d'après 2)c))

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = +\infty$

• Fonction dérivée

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{(1+e^{x})^2}$$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

• Tableau de variations :

Le tableau de variations de h est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	
h	$+\infty$	↘	0

b) Déterminons la position de courbe (C_f) avec la droite $(\Delta) : y = x$

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,

donc : $J = h(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x); \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right[=]0; +\infty[$

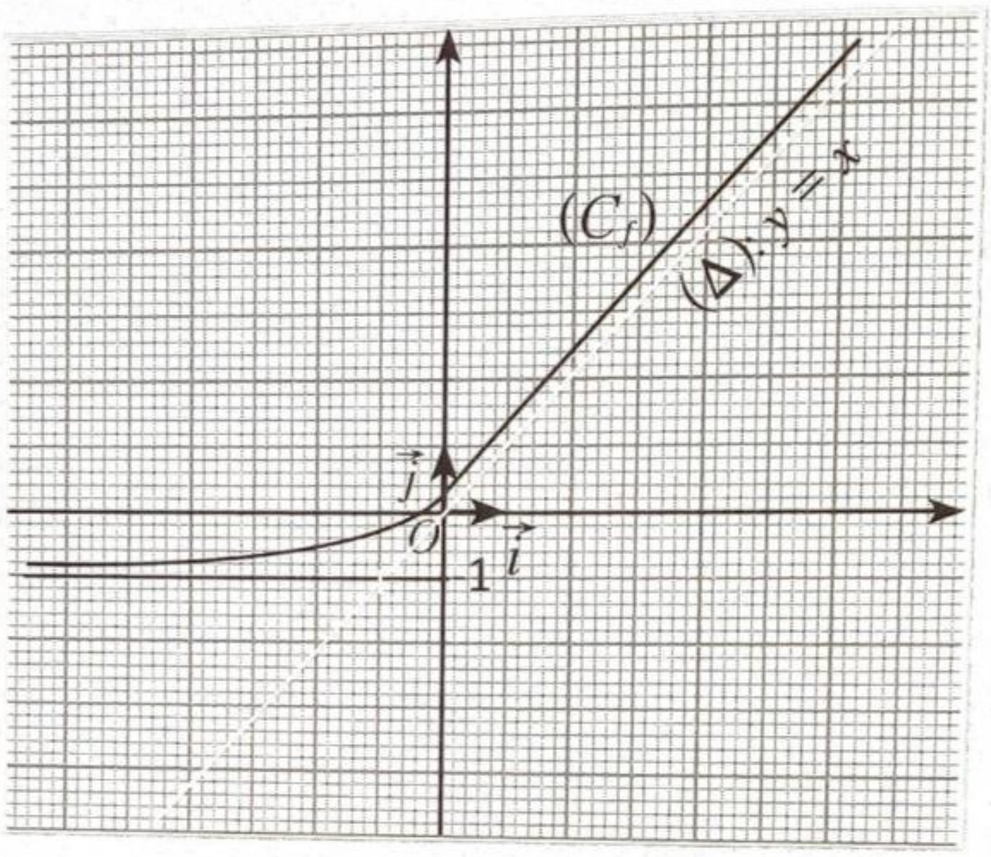
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) > 0$, d'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) > x$

c'est-à-dire la courbe (C) est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$

4) Constructions

La tangente au point d'abscisse 0 est : $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$;

c'est-à-dire : $(T) : y = \frac{3}{4}x + \ln(2) - \frac{1}{2}$



Partie B :

1) Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 1 + f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$f(x) + 1 = 1 - \frac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \ln(e^x+1) = g(x)$$

2) Déduction

a) Le tableau de variations de g

On a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc g et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g'(x)$)

Les limites

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 1) = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 1) = +\infty$$

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\longrightarrow$	$+\infty$

b) Concavité de (Γ)

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g''(x) = f''(x)$

Donc : (C) et (Γ) ont la même concavité

leurs concavités respectives sont dirigées vers les ordonnées positives

c) Branches infinies

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, donc l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $-\infty$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x - 1) = 0$

Donc : la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$

d) Construction de (Γ) (voir figure précédente)

Exercices de synthèse

Exercice 19

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

1) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I et que : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

b) Déduire le signe de $g(x)$.

II/ Soit f la fonction définie par $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x \in I)\ ; f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) En déduire les variations de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que : $(\forall x \in I)\ ; \ln(f(x)) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

c) Déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; puis dresser le tableau de variations de f.

3) a) Montrer que : $(\forall t \in [0;1])\ ; 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

b) Montrer que : $(\forall x \in [0;1])\ ; 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

c) Déduire que : $(\forall x \in [2;+\infty[)\,;0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$

4) Soit φ la fonction définie sur I par: $\varphi(x) = \sqrt{2x}$

a) Déterminer le signe de $f-\varphi$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f-\varphi)(x)$

b) Donner une interprétation géométrique à ce résultat.

5) Tracer la courbe de φ et de f dans le même repère.

(On admet que $\frac{1}{\alpha} \simeq 1,3$ et que : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \simeq 2,5$)

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^x\,;x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Étudier la continuité de f à droite en 0.

3) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}.\ln x$

b) En déduire la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

4) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;f'(x) = f(x)(1+\ln x)$

b) Déduire les variations de la fonction f.

5) Déterminer la branche infinie de la courbe (C).

6) Tracer la courbe (C).

Exercice 21

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\,;x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{e} \end{cases}$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter les deux résultats.

2) a) Montrer que f est continue au point $x_0 = 0$.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a : $f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x).g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

b) Construire la courbe (C_f).

Exercice 22

Partie 1:

On considère la fonction g définie sur $I = [0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln|x-1| + \frac{2x}{x-1}$$

et soit (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$.

b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C).

2) a) Dresser le tableau de variations de g, puis déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de I.

b) Étudier la concavité de la courbe (C) et préciser son point d'inflexion.

c) Tracer la courbe (C).

Partie 2:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie pas :

$$\begin{cases} f(x) = |x^2-1|^{2x} ; x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

et (Γ) la courbe de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que f est continue en 1.

c) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de D.

2) Déterminer les branches infinies de la courbe (Γ).

3) a) Montrer que : $(\forall x \in D - \{1\}) ; f'(x) = 2f(x) \times g(x^2)$

b) Déterminer le sens de variations de la fonction f sur D.

4) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{2x \ln|x-1|}}{x-1} = 0$; puis montrer que f est dérivable en 1.

b) Dresser le tableau de variations de f, puis tracer la courbe (Γ).

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

2) Montrer que : $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2};1\right]$

3) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis déduire que :

$$\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) ; 0 \leq f'(x) \leq k \text{ avec } k = \frac{\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^2}$$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} k^n$ puis déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 24

Soit n un entier naturel non nul, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $f_n(0)$.

2) Étudier les variations de f_n.

3) Calculer $f_n(n)$ puis déduire le signe de $f_n(n)$.

4) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{n+1} > 2n+1$

b) En déduire le signe de $f_n(n+1)$

c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

avec $n < \alpha_n < n+1$

d) La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente?

Exercice 25

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

On pose : $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Déduire les variations de (u_n).

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = e^{-S_n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 26

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq 1 + x$

b) En déduire que : $(\forall t \in]-\infty; 1[) ; e^t < \frac{1}{1-t}$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < e - u_n < \frac{e}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 27

Partie A:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.

2) a) Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

c) Construire la courbe (C).

Partie B:

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = e^x - x - \frac{5}{4}$

1) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right); e^x > x + \frac{5}{4}$

Partie C:

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \\ v_n = u_n + 2e^{-\frac{n^2}{4}} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n = 2\left(\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

2) Déduire en utilisant **la partie B** que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n < 0$

3) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et soit ℓ leur limite commune.

4) Montrer que : $|u_7 - \ell| < 10^{-4}$ (c'est-à-dire : u_7 est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près).

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 2$ et (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β tels que : $1 < \alpha < 2$ et $-2 < \beta < -1$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \in [-2; -1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in [-2; -1]); |f'(x)| \leq e^{-1}$

b) En déduire que : $(\forall x \in [-2; -1]); |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{e}|x - \beta|$

4) a) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 29

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\,ln(x)$, et soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) Étudier les branches infinies de (C_n).

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;1+(x-1)e^x\geq 0$

b) Déterminer les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4) Étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}).

5) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe B dont on donnera les coordonnées.

6) a) Montrer qu'il existe un unique réel α_1 de l'intervalle $[0,2;0,9]$ tel que : $f_1(\alpha_1)=0$

b) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}))\,;f_n(\alpha_1)<0$

c) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}));(\exists!\alpha_n\in[\alpha_1;1])\,;f_n(\alpha_n)=0$

7) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;1])\,;\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$

c) Déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

8) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_1) et (C_2).

Exercice 30

Partie 1;

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x^3e^{-x}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet deux solutions α et β, telles que $1<\alpha<3<\beta$

4) Tracer la courbe (C) ; (on prend $\alpha\simeq 1,9$ et $\beta\simeq 4,5$)

Partie 2:

Soit n un entier naturel tel que : $n \geqslant 4$

et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n suivant la parité de n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n.

telles que $1 < u_n < n < v_n$

3) a) Montrer $(\forall n \geqslant 5)\,; f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1})$

b) En déduire que $(\forall n \geq 5)\,; f_n(u_{n-1}) < 0$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose $u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

a) Montrer que $(\forall n \geqslant 4)\,; 1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

b) On suppose que $u > 1$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u^n e^{-u}$

c) Déduire la valeur de u.

Exercice 31

Partie A: On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}}\,; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}\,; \vec{j})$ (unité $2cm$)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $(\forall t \geqslant 0)\,; 0 \leqslant e^{-t} + t - 1 \leqslant \frac{t^2}{2}$

c) En déduire que : $(\forall x > 0)\,; -\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

d- En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation

3) Tracer (C_f) et (Δ)

Partie B: Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + \frac{2}{n})e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3) a) Montrer que : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis montrer qu'elle est convergente.

On pose $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$.

e) Montrer que $a = 0$

Exercice 32

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - n}{x}$

et soit (Γ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Calculer les limites de la fonction f_n aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2- Soit c_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $c_n(x) = n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

a) Dresser le tableau de variations de c_n

b) Montrer que : $\left(\exists! x_n \in]0, +\infty[\right) ; c_n(x_n) = 0$

c) Déterminer le signe de $c_n(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^*$

b) Montrer que : $f_n(x_n) < 0$ et déduire que : $\left(\exists! \alpha_n \in]0, x_n[\right) ; f_n(\alpha_n) = 0$

4) a) Montrer que : $x_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1 + x_n}\right)}$.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n>1}$ est décroissante qu'elle est convergente

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

5) Déterminer la position relative des courbes (Γ_2) et (Γ_3).

Solutions

Exercice 19

I/ 1) Étudions les variations de g sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle I comme somme de deux fonctions dérivables sur I $(x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto -e^{-2x})$

Et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ ; g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

Soit $x \in I$

- $g'(x) = 0 \iff e^{-2x} = \frac{1}{2}$
  $\iff x = \frac{\ln 2}{2}$
- $g'(x) > 0 \iff e^{-2x} > \frac{1}{2}$
  $\iff x < \frac{\ln 2}{2}$

D'où le tableau de variations de g est le suivant:

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	$\nearrow$	$\frac{1-\ln 2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

On a:
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I :

- Sur l'intervalle $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$, la fonction g est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$ vers $\left]0; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]\right)\ ; g(x) > 0$

Ainsi : l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right]$.

- Sur l'intervalle $\left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$, la fonction g est continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de $\left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right[$ et puisque : $0 \in \left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right[$; donc l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$

- Montrons que : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

On a : $g(1) = -e^{-2}$ et $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1-\ln 2}{2}$

Donc : $g(1) \times g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) < 0$ ainsi : $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$

b) Déduisons le signe de $g(x)$ sur l'intervalle I :

On a la fonction g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$

- Si $\frac{\ln 2}{2} < x < \alpha$ alors : $g(x) > g(\alpha)$

d'où : $g(x) > 0$ (car $g(\alpha) = 0$)

- Si $x > \alpha$ alors : $g(x) < g(\alpha)$

d'où : $g(x) < 0$

D'où le tableau de signe de g est le suivant :

x	0		α	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$

II/ 1) a) Montrons que f est dérivable sur I :

- La fonction $u: x \mapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur I, donc : $x \mapsto e^{\frac{2}{x}}$ est dérivable sur I.
- La fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}} - 1$ est continue sur I et strictement positive sur l'intervalle I.

donc la fonction : $x \xrightarrow{h} \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$ est dérivable sur I. Et puisque $w: x \mapsto x$ est dérivable sur l'intervalle I alors : $f = w.h$ est dérivable sur I.

Soit $x \in I$; calculons $f'(x)$

$$f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + x.\frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1 - \frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}.g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Déduisons les variations de f :

On a : $(\forall x \in I)$; $\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même signe de $g\left(\frac{1}{x}\right)$ d'après la question 2)b)

- $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \alpha$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\alpha}$

- $g\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$

Donc f est strictement croissante sur $[\frac{1}{\alpha};+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{\alpha}]$.

2) a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x\in]0;+\infty[$; on a : $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}=\sqrt{\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}.2x}$

• On pose : $\frac{2}{x}=X$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}\times 2x=+\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que : $(\forall x\in I)\,;\ln(f(x))=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})$

Soit $x\in I$; on a :

$$\ln(f(x))=\ln\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)$$
$$=\ln x+\frac{1}{2}\ln(e^{\frac{2}{x}}-1)\ \text{(car } x>0 \text{ et } e^{\frac{2}{x}}-1>0 \text{ pour tout } x \text{ de } I\text{)}$$
$$=\ln x+\frac{1}{2}\ln[e^{\frac{2}{x}}(1-e^{-\frac{2}{x}})]$$
$$=\ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})\ \text{(car } e^{\frac{2}{x}}-1>0 \text{ et } e^{\frac{2}{x}}>0 \text{ donc } 1-e^{-\frac{2}{x}}>0\text{)}$$

Donc : $(\forall x\in I)\,;\ln(f(x))=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})$

d) Déduisons $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$:

Calculons $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(f(x))$:

• On a : $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x\ln x)=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}(1+x\ln x)\right)=+\infty$

• On a : $\lim\limits_{x\to0^+}-\dfrac{2}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{2}{x}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-\frac{2}{x}})=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(f(x))=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ (car $f(x)=e^{\ln f(x)}$)

Le tableau de variations de f :

D'après les questions II/1)b) et 2)a) et c)

On a : le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↗	$+\infty$

3) a) Montrons que : $(\forall t \in [0;1]) ; 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

Soit $t \in [0;1]$; on a : $t \geq 0$ donc : $e^t - 1 \geq 0$ (1)

On pose : $(\forall t \in [0;1]) ; h(t) = e^t - 1 - et$

• $(\forall t \in [0;1]) ; h'(t) = e^t - e$

• $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq e^t \leq e$

$\Leftrightarrow h'(t) \leq 0$

Donc la fonction h est décroissante sur $[0;1]$

Ainsi $(\forall t \in [0;1]) ; h(t) \leq h(0)$; et donc : $h(t) \leq 0$ (2) (car $h(0) = 0$)

d'après (1) et (2) on en déduit que : $(\forall t \in [0;1]) ; 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

b) Déduisons que : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

• Montrons que : $(\forall x \in [0;1]) ; e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$ (3)

On pose : $(\forall x \in [0;1]) ; k(x) = e^x - 1 - x - \frac{e}{2}x^2$

La fonction k est dérivable sur $[0;1]$ et on a :

$$(\forall x \in [0;1]) ; k'(x) = e^x - 1 - ex$$

Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; k'(x) \leq 0$ d'après la question 3)a)

Ainsi k est décroissante sur $[0;1]$; d'où $((\forall x \in [0;1]) ; k(x) \leq k(0))$

Par suite : $(\forall x \in [0;1]) ; k(x) \leq 0$ (car $k(0) = 0$)

Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

On démontre de même que : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x$ (4)

d'après (3) et (4) on a : $(\forall x \in [0;1]) ; 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$

c) Déduisons que : $(\forall x \in [0;1]) ; 0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$

On a d'après la question b)

$(\forall t \in [0;1]) ; 1+t \leq e^t \leq 1+t+\frac{e}{2}t^2$

Soit x un élément de $[2;+\infty[$; on a : $x \geq 2$, donc : $0 \leq \frac{2}{x} \leq 1$

On peut remplacer $\frac{2}{x}$ par t dans la relation précédente

on obtient : $1+\frac{2}{x} \leq e^{\frac{2}{x}} \leq 1+\frac{2}{x}+\frac{e}{2}\cdot\frac{4}{x^2}$ d'où : $2x \leq x^2(e^{\frac{2}{x}}-1) \leq 2x+2e$

par suite : $0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$ pour tout x de $[2;+\infty[$

4) a) Déduisons le signe de $f-\varphi$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$; on a : $0 \leq (f(x))^2 - (\varphi(x))^2$, d'après la question précédente donc $(f(x))^2 \geq (\varphi(x))^2$

et puisque f et φ sont positives; alors : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; f(x) \geq \varphi(x)$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f-\varphi)(x)$:

On a d'après II)3)c) $(\forall x \in [2;+\infty[) ; 0 \leq (f(x)-\varphi(x))(f(x)+\varphi(x)) \leq 2e$

et puisque : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; f(x)+\varphi(x) > 0$

alors : $(\forall x \in [2;+\infty[) ; 0 \leq f(x)-\varphi(x) \leq \frac{2e}{f(x)+\varphi(x)}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+\varphi(x)) = +\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e}{f(x)+\varphi(x)} = 0$

D'après les propriétés des limites et l'ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\varphi(x)) = 0$

b) Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\varphi(x)) = 0$ donc la courbe de f s'approche de la courbe de φ au voisinage de $+\infty$.

On dit que la courbe de φ est une courbe asymptotique de celle de la courbe de f.

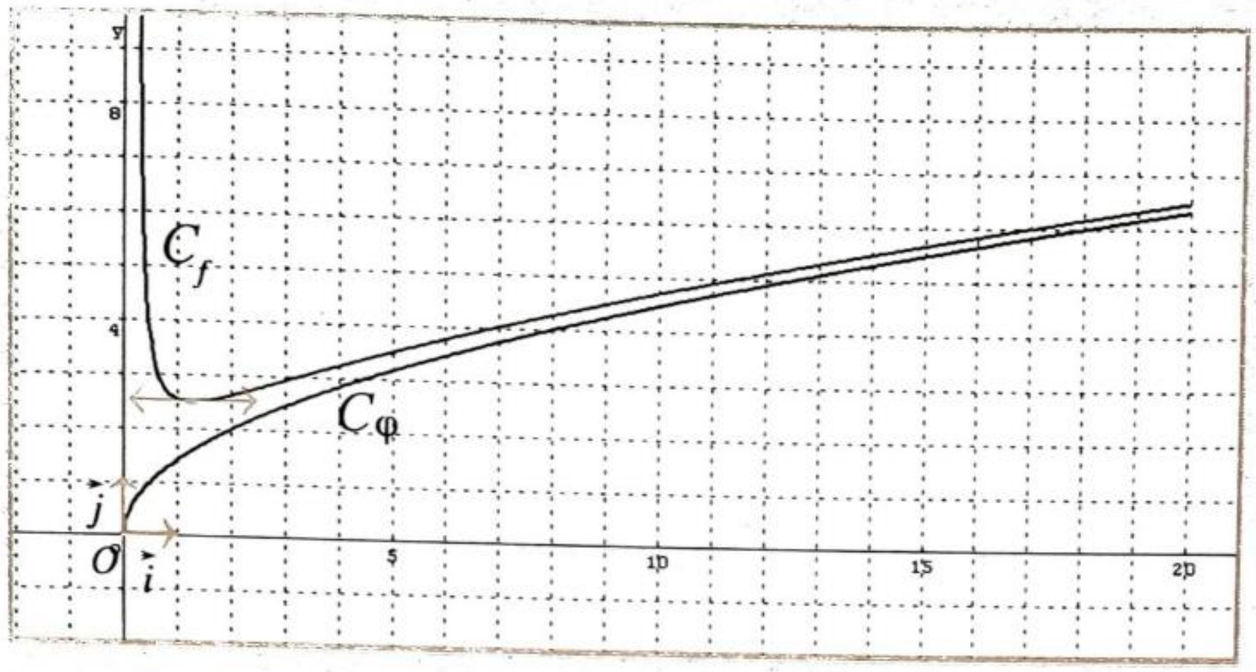
5) Le tracé de la courbe de f et de φ :

• On a l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f.

• La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisse au voisinage de $+\infty$. (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} = 0$)

• La fonction $\varphi: x \mapsto \sqrt{2x}$ est une fonction usuelle.

d'où les courbes de φ et f.



Exercice 20

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $(\forall x > 0)$; $x^x = e^{x\ln x}$; d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}$

On pose : $X = x\ln x$; puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

2) Étudions la continuité de f à droite en 0:

On a : $f(0) = 1$; calculons $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x}$:

On pose : $X = x\ln x$, puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{X\to 0} e^X = e^0 = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$; donc f est continue à droite en 0.

3) a) Vérifions l'égalité demandée :

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\dfrac{x\ln x}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x$

b) Étudions la dérivabilité de f à droite en 0:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X} = 1$

et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\ln x = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

La courbe de la fonction f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) au point $A(0;1)$.

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $f(x) = e^{x\ln x}$

La fonction $u: x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc la fonction $f = \exp ou$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,; f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

on a : $u'(x) = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

d'où : $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)f(x)$

ainsi : $(\forall x > 0)\,; f'(x) = (\ln x + 1).\, f(x)$

Puisque : $(\forall x > 0)\,; f(x) > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x)+1$

- $f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0$
  $\iff \ln x = -1$
  $\iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

- $f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0$
  $\iff \ln x > -1$
  $\iff x > e^{-1}$
  $\iff x > \frac{1}{e}$

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

5) Déterminons la branche infinie de (C) :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]0;+\infty[$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x\ln x}}{x} = \frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}.\ln x$

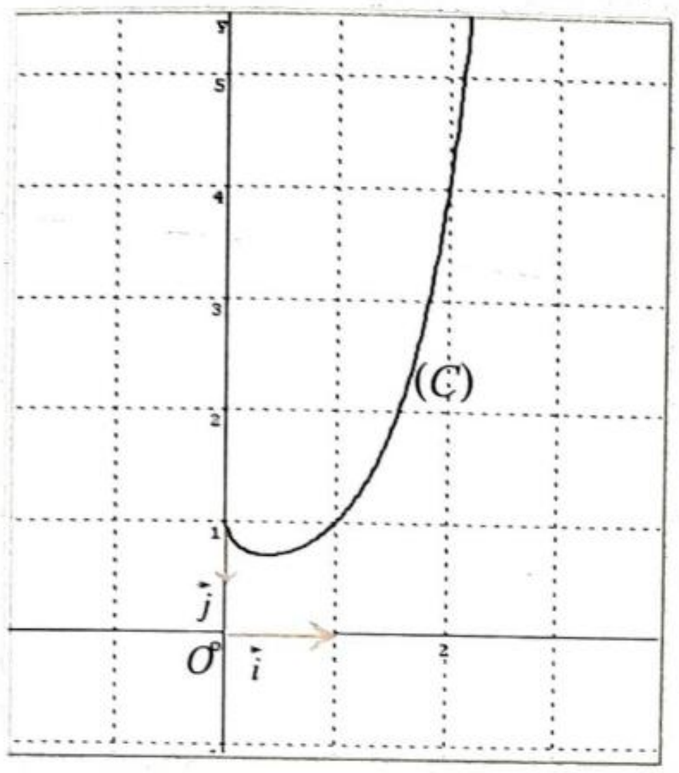
On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln x}}{x\ln x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (avec $X = x\ln x$ et $x \to +\infty \iff X \to +\infty$)

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Ainsi : la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

6) Le tracé de (C) :

On a: $\frac{1}{e} \simeq 0,4$ et $e^{-\frac{1}{e}} \simeq 0,7$



Exercice 21

Partie A:

1) Étudions les variations de la fonction g ; où $g(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right); x \in \mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x+xe^x) - xe^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^x + xe^x + e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} - e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}$$

Ainsi : le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de x.

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

2) Le signe de la fonction g :

- La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$;

ainsi : $(\forall x \in]-\infty;0]) ; g(x) \geq g(0)$

Or : $g(0) = 0$; donc : $(\forall x \in]-\infty;0]) ; g(x) \geq 0$

- La fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$;

donc : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; g(x) \geq g(0)$

D'où : $(\forall x \in [0;+\infty[)\,;\, g(x) \geq 0$

En résumé : pour tout x de $\mathbb{R}$; • $g(x) = 0 \iff x = 0$

$g(x) > 0 \iff x \in \mathbb{R}^*$

Partie B:

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Soit $x \in [0;+\infty[$; on a : $f(x) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$:

On a :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x(e^{-x}+1)}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$ et la fonction $\ln$ est continue en $\frac{1}{2}$; alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 1$; et la fonction exponentielle néperienne est continue en 1; Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^1 = e$

• Calculons de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

Soit $x \in]-\infty;0[$, on a : $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+e^x}{2} = \frac{1}{2}$ et la fonction $\ln$ est continue en $\frac{1}{2}$;

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$; d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 0$

Et la fonction exponentielle néperienne est continue en 0;

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$; donc la droite d'équation : $y = e$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation : $y = 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

2) a) Montrons que la fonction f est continue en $x_0 = 0$:

Soit x un réel non nul; on a : $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)}{\dfrac{1+e^x}{2}-1} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^x-1}{x}$

En posant : $t = \dfrac{1+e^x}{2}$; on a : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)}{\dfrac{1+e^x}{2}-1} = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$

et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$; donc; par produit on a : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ *

Et puisque la fonction exponentielle est continue en $\dfrac{1}{2}$;

on a alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = f(0)$

Par conséquent : f est continue en $x_0 = 0$.

b) Montrons que f est dérivable en 0:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)} - e^{\frac{1}{2}}}{x} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x}$$

On pose : $t = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}$, on a $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ (d'après «*» de la question 2)a))

d'où : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-1}}{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$

Et on a : $\dfrac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x} = \dfrac{2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x}{2x^2} = \dfrac{\ln\left(\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right)-\ln(e^x)}{2x^2}$

$$= \frac{\ln(e^x-e^{-x}+2)-\ln 4}{2x^2}$$

$$= \left(\frac{\ln(e^x-e^{-x}+2)-\ln 4}{(e^x-e^{-x}+2)-4}\right) \times \left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}\right)$$

On pose : $t = e^x + e^{-x} + 2$; on a alors : $x \to 0 \iff t \to 4$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^x + e^{-x} + 2) - \ln(4)}{(e^x + e^{-x} + 2) - 4} = \lim\limits_{t\to 4} \dfrac{\ln(t) - \ln(4)}{t - 4} = (\ln)'(4) = \dfrac{1}{4}$

On a : $\dfrac{(e^x + e^{-x} - 2)}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1)}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}(e^x - 1)^2}{2x^2} = \dfrac{e^{-x}}{2}\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^2$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$; d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{e} \times 1 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

Donc : la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

3) a) Déterminons la fonction dérivée :

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \times \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + \frac{1}{x} \times \frac{e^x}{1 + e^x}\right) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{xe^x}{1 + e^x} - \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)\right) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{x^2} g(x) \times f(x)$$

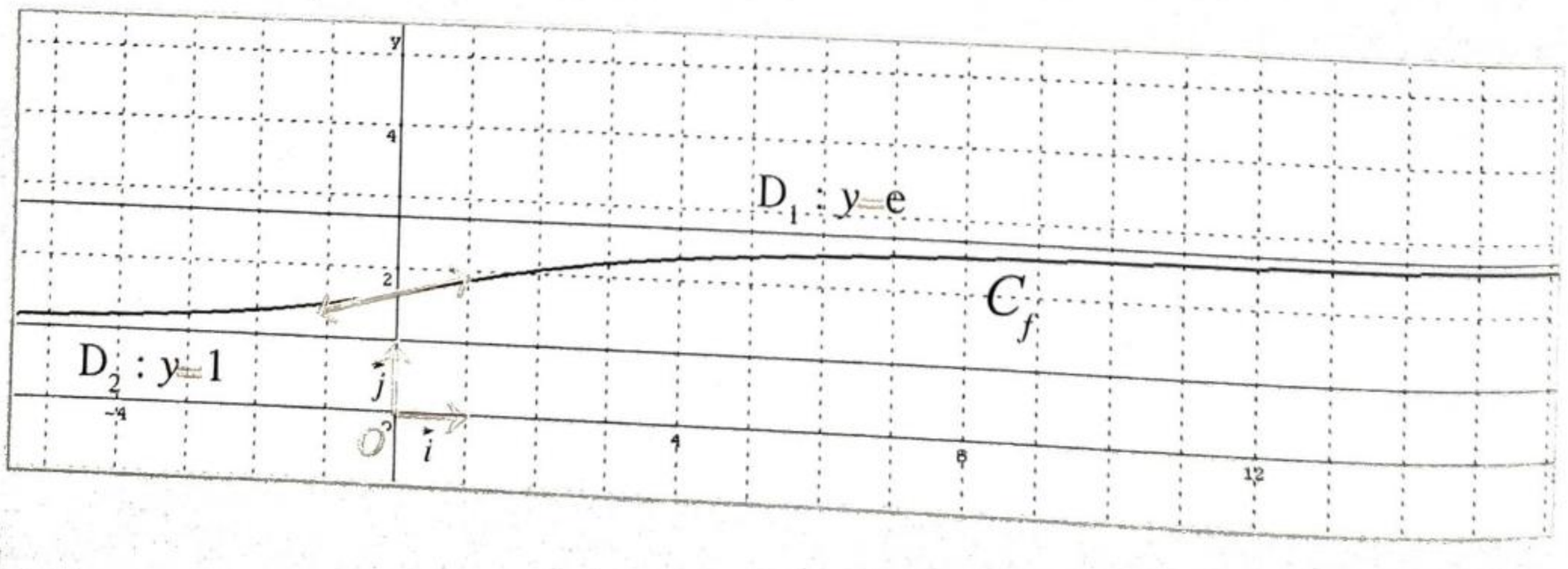
• Tableau de variations de f :

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a : $g(x) > 0$ et $f(x) > 0$; d'où : $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Ainsi le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	1	↗	e

b) La courbe (C_f)



Exercice 22

Partie 1:

1) a) • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}|x-1|=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$;

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x-1|=+\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2=2$;

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x-1|+\dfrac{2x}{x-1}=+\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$:

Soit $x\in]1;+\infty[$; on a : $x-1>0$; d'où : $g(x)=\dfrac{(x-1)\ln(x-1)+2x}{x-1}$

On pose : $x-1=t$; on a alors : $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln(t)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)+2x=2$, et puisque : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

on a alors : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)\ln(x-1)+2x}{x-1}=+\infty$; ainsi : $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=+\infty$

• Calculons $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to1^-}|x-1|=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X)=-\infty$; d'où : $\lim\limits_{x\to1^-}\ln|x-1|=-\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{x-1}=-\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to1^-}\ln|x-1|+\dfrac{2x}{x-1}=-\infty$

b) Déterminons les branches infinies de la courbe (C) :

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=-\infty$, donc la courbe (C) admet une asymptote d'équation : $x=1$.

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; donc (C) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Soit $x\in]1;+\infty[$; on a : $x-1>0$

donc : $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{\ln(x-1)}{x}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{2}{x-1}$

On pose : $t=x-1$; on a : $x\to+\infty\iff t\to+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

Par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) Calcul de $g'(x)$:

La fonction g est dérivable en tout point de I ; et on a :

$$(\forall x\in I)\,;\,g'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

• Tableau de variations de g :

Le signe de $g'(x)$ sur I est celui de $x-3$; d'où le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$		0	$+$	
g	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$3+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$					

• Le signe de g :

- La fonction g est strictement décroissante sur $[0;1[$

donc : $\forall x\in[0;1[\,;\,g(x)\le g(0)$

ainsi : $\forall x\in[0;1[\,;\,g(x)\le 0$

- La fonction g est strictement décroissante sur $]1;3]$

donc : $\forall x\in]1;3]\,;\,g(x)\ge g(3)$

et puisque $g(3)>0$, alors : $\forall x\in]1;3]\,;\,g(x)>0$

- La fonction g est strictement croissante sur $[3;+\infty[$

donc : $(\forall x\in[3;+\infty[)\,;\,g(x)\ge g(3)$; d'où : $g(x)>0$ pour tout x de $[3;+\infty[$

ainsi le tableau de signe de g est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	$+$	$\|$	$\|$	$+$	

b) Concavité de la courbe (C) :

La fonction g est deux fois dérivable en tout point de I ; et on a :

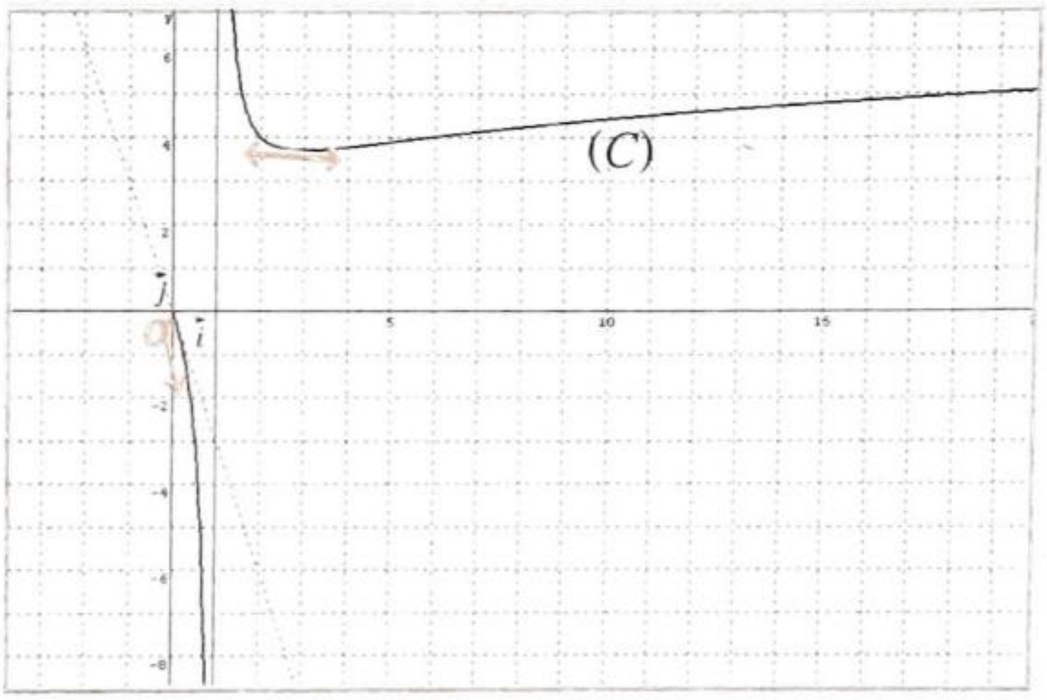
$$(\forall x \in I)\,; g''(x) = \frac{-x^2+6x-5}{(x-1)^4} = \frac{-(x-5)(x-1)}{(x-1)^4}$$

Donc on a le tableau suivant :

x	0		1		5	$+\infty$
$g''(x)$	-	‖	+		0	-
Concavité de la courbe de g	∩	‖	∪		∩	

La fonction g'' s'annule en changeant de signe en 5; donc le point d'abscisse 5 et d'ordonnée $\frac{5}{2}+\ln(4)$ est le point d'inflexion pour (C).

c) La courbe (C) :



Partie 2:

1) a) Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $x \in D \iff |x^2-1| > 0$ ou $x = 1$

$\iff |x^2-1| \neq 0$ ou $x = 1$

$\iff (x \neq 1$ et $x \neq -1)$ ou $x = 1$

$\iff x \neq -1$

Ainsi : $D =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

b) Continuité de f en 1:

On a : $\lim\limits_{x\to 1}|x^2-1| = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln(X) = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x^2-1| = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1} 2x\ln|x^2-1| = -\infty$, et puisque : $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$,

Alors : $\lim\limits_{x\to 1} e^{2x\ln|x^2+1|} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{2x\ln|x^2-1|} = 0 = f(1)$

Donc : f est continue en 1.

c) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to+\infty}|x^2-1| = \lim_{x\to+\infty}(x^2-1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$;

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln|x^2-1|} = +\infty$

• Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to-\infty}|x^2-1| = \lim_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$;

Alors : $\lim_{x\to-\infty} \ln|x^2-1| = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} 2x\ln|x^2-1| = -\infty$, et on a : $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$;

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x\ln|x^2-1|} = 0$

• Calculons $\lim_{x\to-1} f(x)$:

Puisque : $\lim_{x\to-1}|x^2-1| = 0^+$ et $\lim_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty$, alors : $\lim_{x\to-1} \ln|x^2-1| = -\infty$

Ainsi : $\lim_{x\to-1} 2x\ln|x^2-1| = +\infty$; et on a : $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$;

Donc : $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} e^{2x\ln|x^2-1|} = +\infty$

2) Déterminons les branches infinies de la courbe (Γ) :

• On a : $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$, donc : la courbe (Γ) admet une asymptote d'équation : $x = -1$

• On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $-\infty$

• On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc (Γ) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Calculons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

Soit $x \in]1;+\infty[$; on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{x} = \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{2x\ln(x^2-1)} \times 2\ln(x^2-1)$

Posons $2x\ln(x^2-1) = t$; on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x\ln(x^2-1)}}{2x\ln(x^2-1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-1)=+\infty$

d'où, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$; ainsi la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrons que : $(\forall x\in D-\{1\})\,;\,f'(x)=2f(x)\times g(x^2)$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$; posons $u(x)=2x\times\ln|x^2-1|$

On a : $u'(x)=2\ln|x^2-1|+2x\dfrac{2x}{x^2-1}=2\ln|x^2-1|+\dfrac{4x^2}{x^2-1}=2g(x^2)$

Ainsi : $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=u'(x)f(x)=2g(x^2)f(x)$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\})\,;\,f'(x)=2g(x^2)f(x)$

b) Déterminons le signe de f' :

On a : $(\forall x\in D)\,;\,f(x)>0$; ainsi le signe de $f'(x)$ sur $D-\{-1;1\}$ est le signe de $g(x^2)$;

et d'après le signe de g déterminé dans la partie I ; on a :

• si $-1<x<1$, alors : $0\le x^2<1$; d'où : $g(x^2)\le 0$, donc : $f'(x)\le 0$, pour tout x de $]-1;1[$

• si $x>1$ ou $x<-1$, alors : $x^2>1$, ainsi : $g(x^2)>0$

donc : $(\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[)\,;\,f'(x)>0$

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-1;1]$ et strictement croissante sur les deux intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;-1[$

4) a) Soit $x\in]1;+\infty[$:

On a : $\dfrac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1}=\dfrac{e^{2x\ln(x-1)}}{e^{\ln(x-1)}}=e^{2x\ln(x-1)-\ln(x-1)}=e^{x\ln(x-1)+(x-1)\ln(x-1)}$

On pose : $t=x-1$; donc : $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$

Et on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x\ln(x-1)=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+}x\ln(x-1)+(x-1)\ln(x-1)=-\infty$

Et puisque : $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$; alors : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x\ln|x-1|}{x-1}=0$

et $\lim\limits_{x\to1^-}x\ln(1-x)=-\infty$; d'où : $\lim\limits_{x\to1}e^{x\ln(x-1)+(1-x)\ln(1-x)}=0$

Soit $x \in]0;1[$; on a : $\dfrac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1} = \dfrac{e^{2x\ln(1-x)}}{-e^{\ln(1-x)}} = -e^{2x\ln(1-x)-\ln(1-x)}$

$$= -e^{x\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-x)}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} t\ln t = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x\ln(1-x) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-x)} = 0$ ainsi : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{2x\ln(x-1)}}{x-1} = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1} = 0$

- Dérivabilité de f en 1:

Soit $x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$; on a :

$$\ln|x^2-1| = \ln(|x-1||x+1|) = \ln|x-1|+\ln|x+1|$$

d'où : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{e^{2x\ln(|x-1|+\ln|x-1|)}}{x-1} = \dfrac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1}.e^{2x\ln|x+1|}$

et on a : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x\ln|x-1|}}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} e^{2x\ln|x+1|} = e^{2\ln 2} = 4$

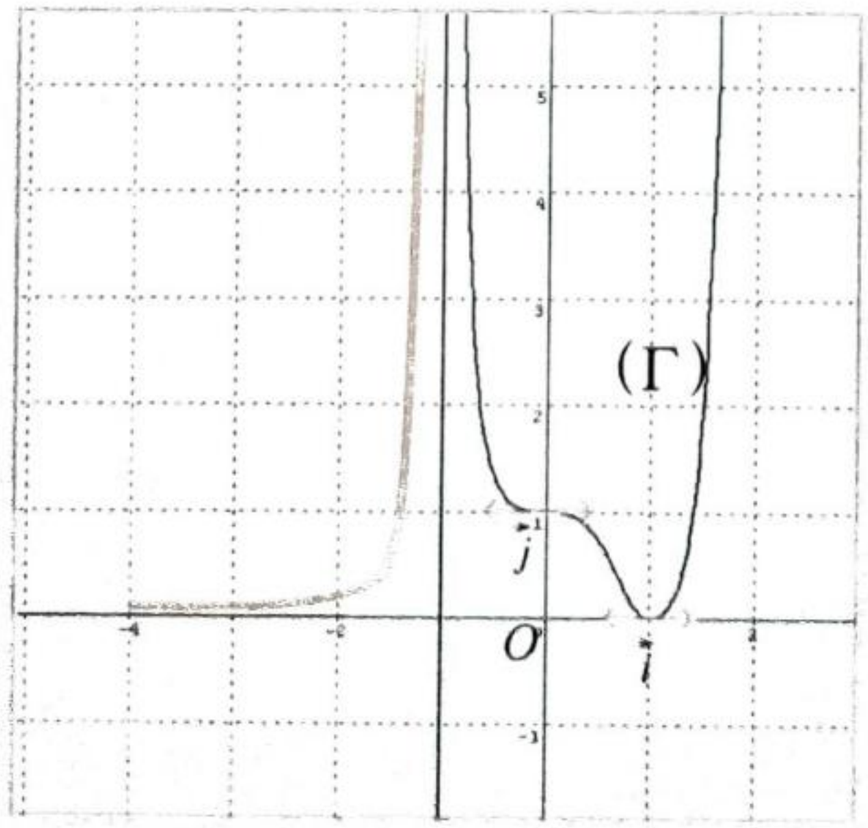
Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$

Ainsi la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	0	-	0	+	
f	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘ 1		↘ 0	↗	$+\infty$

d) La courbe (Γ) :



Exercice 23

1) Montrons $(\exists!\alpha \in \mathbb{R}) : f(\alpha) = 0$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et la fonction $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$; (somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

De la même manière on montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x+1)^2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) < 0$; ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où : g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R})$

On a : $\lim_{-\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim_{-\infty} e^x = 0$) et $\lim_{+\infty} g(x) = -\infty$

(car $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$)

Donc : $g(\mathbb{R}) = \left]\lim_{+\infty} g(x); \lim_{-\infty} g(x)\right[=]-\infty; +\infty[$

Or $0 \in \mathbb{R}$; donc : $(\exists!\alpha \in \mathbb{R})$ tel que : $g(\alpha) = 0$ d'où : $(\exists'!\alpha \in \mathbb{R}) : f(\alpha) = \alpha$

et on a : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-1}{2(\sqrt{e}+1)}$ et $g(1) = \frac{-1}{1+e}$; d'où : $g(1) < 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

$$g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{2}\right)$$

D'où : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (car g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$)

2) Montrons que : $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) > 0$

Ainsi : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc : $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(1)\right] = \left[\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}; \frac{e}{1+e}\right]$

Or : $e < e+1 \Longleftrightarrow \frac{e}{e+1} < 1$ et $1 < \sqrt{e} \Longleftrightarrow 1+\sqrt{e} < 2\sqrt{e}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$$

ainsi : $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1} < \frac{e}{e+1} < 1$

Donc : $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};1\right]$

3) Calculons $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

et: $$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)[e^x+1-2e^x]}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});f''(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

- Déduction :

Le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $1-e^x$

- $1-e^x=0\Longleftrightarrow x=0$
- $1-e^x>0\Longleftrightarrow e^x<1$
$\Longleftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Donc : $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);f''(x)<0$; ainsi f' est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Donc : $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);f'(1)\le f'(x)\le f'\left(\frac{1}{2}\right)$

Puisque : $f'(1)=\frac{e}{(e+1)^2}$ $(f'(1)>0)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$

alors : $0\le f'(x)\le\frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$ pour tout x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$

4) a) Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

- Initialisation: Pour $n=0$; on a : $u_0=\frac{1}{2}$, donc : $\frac{1}{2}\le u_0\le 1$
- Héridité: Soit $n\in\mathbb{N}$; on suppose que : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$ et on montre que $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$

On a : $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ et $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};1\right]$ d'où : $f(u_n)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} k^n$

Soit a et b deux éléments de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

La fonction f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $I' =]a;b[$

d'après le théorème des accroissement finis :

$(\exists c \in I) / \ f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$(\exists c \in I) / |f(b) - f(a)| = |b-a||f'(c)|$

On a : $c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ car $I \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ d'où : $|f'(c)| \leq k$ (d'après la question 3)

donc : $|b-a||f'(c)| \leq k|b-a|$

ainsi : $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose : $a = \alpha$ et $b = u_n$

(car : α et u_n sont des éléments de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$)

On a alors : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$

c'est-à-dire : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_1 - \alpha| \leq k|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq k|u_1 - \alpha|$

$\bullet \quad \bullet$

$\bullet \quad \bullet$

$\bullet \quad \bullet$

$|u_n - \alpha| \leq k|u_{n-1} - \alpha|$

En multipliant les inégalités (de termes strictement positifs) membre à membre et après simplification:

on obtient : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$

On a : $|u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

Donc : $\left|\frac{1}{2}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}$ d'où : $k^n\left|\frac{1}{2}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}k^n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^n$

• Déduction :

On a : $-1 < k < 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

ainsi : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}k^n = 0 \end{cases}$

D'après un critère de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Exercice 24

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $f_n(0)$:

• On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2n}{x+n} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$

• $f_n(0) = 1 - 2 - 1 = -2$

2) Étudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$:

f_n est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$;

qui sont : $\left(x \mapsto 1 - \frac{2n}{x+n}\right.$ et $\left. x \mapsto -e^{-x}\right)$., donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$

D'où le tableau de variations de f_n est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	
f_n	-2	↗	1

3) Calculons $f_n(n)$ et déterminons le signe de $f_n(n)$:

On a : $f_n(n) = 1 - 1 - e^{-n} = -e^{-n}$;

de plus $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{-n} > 0$; d'où : $f_n(n) < 0$

4) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); e^{n+1} > 2n + 1$

- Initialsation:

Pour $n = 1$; on a : $e^2 > 3$ (c'est une proposition vraie pour $n = 1$ car $e^2 \simeq 7,3$)

- Héridité:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $e^{n+1} > 2n + 1$ et montrons que $e^{n+2} > 2n + 3$

On a : $e^{n+1} > 2n + 1$ et $e > 2$, d'où : $ee^{n+1} > 2(2n + 1)$

ainsi : $e^{n+2} > 4n + 2$

et puisque : $(4n + 2) - (2n + 3) = 2n - 1$

et $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2$

$\Rightarrow 2n - 1 \geq 1$

$\Rightarrow 2n - 1 > 0$

donc : $4n + 2 > 2n + 3$

par suite : $e^{n+2} > 2n + 3$

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $e^{n+1} > 2n + 1$

b) Déduisons le signe de $f_n(n + 1)$:

On a : $f_n(n + 1) = 1 - \frac{2n}{2n + 1} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{e^{n+1}}$

et puisque : $e^{n+1} > 2n + 1$, alors : $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n + 1}$; d'où : $f_n(n + 1) > 0$

c) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n avec $n < \alpha_n < n + 1$

On a : f_n est une fonction continue sur $[n; n + 1]$ et $f_n(n) \times f_n(n + 1) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Il existe au moins α_n de l'intervalle $]n; n + 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

et puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n avec $n < \alpha_n < n + 1$

d) Déduisons la convergence de (α_n) :

On a : $n < \alpha_n < n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$

Ainsi : la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

Exercice 25

1) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

• Initialisation: Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 1$ donc : $u_0 > 0$

• Héridité: Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$

on a : $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$; donc : $u_n e^{-u_n} > 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} > 0$

• D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

b) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$

et puisque : $-u_n < 0 \Rightarrow e^{-u_n} < 1$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

comme $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_n > 0$; alors : $u_{n+1} < u_n$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

D'où : la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Convergence de (u_n) :

On a la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

• Déterminons $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

On a : - La fonction f est continue sur $[0;1]$, comme produit de deux fonctions continues : $u \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$

- $f([0;1]) \subset [0;1]$

(car $\forall x \in [0;1] : 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1)$$

- la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq 1$ et (u_n) est convergente.

Donc sa limite est une solution dans l'intervalle $[0;1]$ de l'équation : $f(x) = x$

Soit $x \in [0;1]$; $f(x) = x \Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_{n+1} = e^{-S_n}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $(\forall k \in \{0;1;2;...;n\})\,; \frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{-u_k}$

D'où : $\prod_{k=0}^{n} e^{-u_k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times ... \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$

d'où : $\frac{u_{n+1}}{u_0} = \prod_{k=0}^{n} e^{-u_k}$ et $\prod_{k=0}^{n} e^{-u_k} = e^{-\sum_{k=0}^{n} u_k} = e^{-S_n}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_0} = e^{-S_n}$; d'où : $u_{n+1} = u_0 . e^{-S_n}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_{n+1} = e^{-S_n}\ (u_0 = 1)$

Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = e^{-S_n}$; d'où : $-S_n = \ln(u_{n+1})$

Ainsi : $S_n = \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; S_n = \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

et on a : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,; u_{n+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Exercice 26

1) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})\,; e^x \geq 1 + x$:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle est somme de deux fonctions dérivables $(x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1)$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; f'(x) = e^x - 1$

• Soit $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

• Soit $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow x > 0$

Donc : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) : f(x) \geq f(0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-) : f(x) \geq f(0)$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) : f(x) \geq 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-) : f(x) \geqslant 0$

Puisque : $f(0) = 0$, alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq 0$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$

b) Montrons que $(\forall t \in]-\infty ; 1[) : e^t < \frac{1}{1-t}$:

Soit $t \in]-\infty ; 1[$; on a d'après la question précédente.

$1 - t < e^{-t}$; et puisque $1 - t > 0$, alors : $\frac{1}{1-t} > \frac{1}{e^{-t}}$

Donc : $\frac{1}{1-t} > e^t$

Donc : $(\forall t \in]-\infty ; 1[) : e^t < \frac{1}{1-t}$

2) a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : 1 + x < e^x$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$; d'où : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ (1)

et on a : $(\forall t \in]-\infty ; 1[) : e^t < \frac{1}{1-t}$

on prend : $t = \frac{1}{1+n}$; on a : $t < 1$

Donc : $e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$; ainsi : $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$

Donc : $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (2)

D'après (1) et (2); on a alors : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

b) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a d'après la question précédente : $u_n < e < u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

D'où : $0 < e - u_n < \frac{u_n}{n}$

D'autre part, d'après la question 1)a): $1 < 1 + x < e^x$ pour tout x de $]0; +\infty[$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; 0 < \ln(1 + x) < x$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

d'où : $0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Ainsi : $0 < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ d'où : $1 < e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < e$ ainsi : $1 < e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < e$

c'est-à-dire : $1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Donc : $1 < u_n < e$

par suite : $\frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$ donc : $0 < e - u_n < \frac{e}{n}$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < e - u_n < \frac{e}{n}$

• Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

On a : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < e - u_n < \frac{e}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0 \end{cases}$

d'après un critère de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e - u_n) = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Exercice 27

Partie A:

1) • Étudions les variations de la fonction f :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = xe^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

On pose : $X = \frac{x^2}{4}$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

et on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$; d'où : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

La fonction : $x \mapsto -\frac{x^2}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4}}$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{4}}$

$$= (2-x^2)\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Et puisque : $e^{-\frac{x^2}{4}} > 0$; alors le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x^2$.

Tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	0	↘	$-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

2) a) Équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 0:

(Δ): $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ et $f(0)=0$; $f'(0)=1$

Donc : (Δ): $y = x$

b) Étudions la position relation de la courbe (C) avec la droite (Δ):

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x)-x = xe^{-\frac{x^2}{4}} - x = x\left(e^{-\frac{x^2}{4}} - 1\right)$

On a : $-\frac{x^2}{4} \leq 0$, d'où : $e^{-\frac{x^2}{4}} \leq 1$, ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; e^{-\frac{x^2}{4}} - 1 \leq 0$

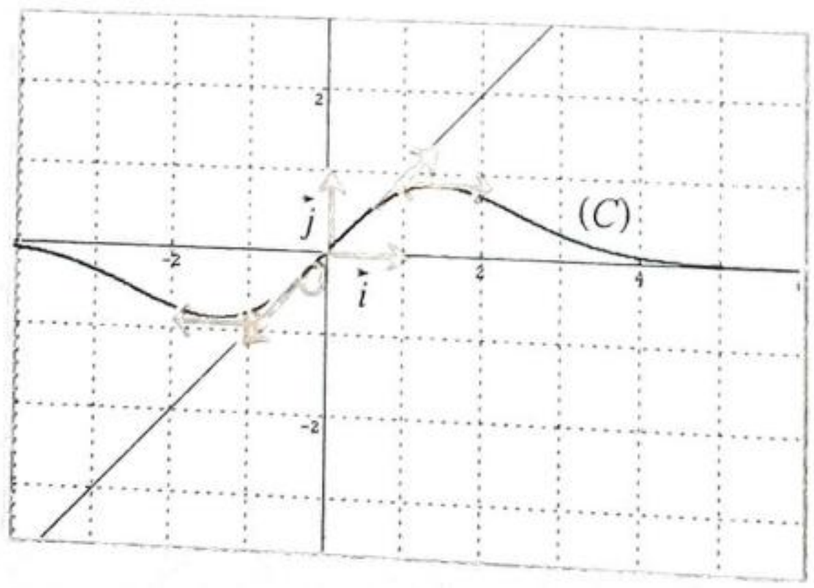
Donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		+	0	-	

Cela veut dire que (C) est au dessus de la droite (Δ) sur $]-\infty;0[$

et (C) est au dessous de la droite (Δ) sur $]0;+\infty[$

c) La courbe (C) :D'après a qui précède le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).



Partie B:

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = e^x - x - \frac{5}{4}$

1) Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}^+$:

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,; g(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{5}{4x}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(-1-\frac{5}{4x}\right) = -1$

alors : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{5}{4x}\right) = +\infty$

et on a : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; d'où : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$: $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - \frac{5}{4}$) et $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $g'(x) = e^x - 1$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $e^x > 1$, alors : $g'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
g	-1	$+\infty$

2) Montrons que $\left(\forall x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[\right)$; $e^x > x + \frac{5}{4}$:

Soit $x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$; on a : $g\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = e^{\frac{3}{4}} - 2 \ (> 0,12)$

d'où : $g\left(\frac{3}{4}\right) > 0$; et puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

alors : $\left(\forall x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[\right)$; $g(x) > g\left(\frac{3}{4}\right)$ ainsi : $\left(\forall x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[\right)$; $g(x) > 0$

Par suite : $\left(\forall x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[\right)$; $e^x > x + \frac{5}{4}$

Partie C:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ et $v_n = 2e^{\frac{n^2}{4}} + u_n$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrons que : $v_{n+1} - v_n = 2\left(n + \frac{3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$

On a : $v_{n+1} = u_{n+1} + 2e^{\frac{(n+1)^2}{4}} = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) + 2e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) + 2e^{\frac{(n+1)^2}{4}} - 2e^{\frac{n^2}{4}} = (n+1)e^{\frac{(n+1)^2}{4}} + 2e^{\frac{(n+1)^2}{4}} - 2e^{\frac{n^2}{4}}$$
$$= \left(n + 1 + 2 - 2e^{\frac{n^2}{4} - \frac{(n+1)^2}{4}}\right)e^{\frac{(n+1)^2}{4}} = \left(n + 3 - 2e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} - v_n = 2\left(n + \frac{3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$

2) Déduction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $n \geq 1 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Or : $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[\right) : e^x > x + \frac{3}{4}$ et $\frac{2n+1}{4} \geq \frac{3}{4}$

Donc : $e^{\frac{2n+1}{4}} > \frac{2n+1}{4} + \frac{3}{4}$

D'où : $e^{\frac{2n+1}{4}} > \frac{n+3}{2}$; ainsi : $\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}} < 0$

Par suite : $2\left(\frac{n+3}{2} - e^{\frac{2n+1}{4}}\right)e^{-\frac{n^2}{4}} < 0$ C'est-à-dire : $v_{n+1} - v_n < 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - v_n < 0$

3) Montrons que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = f(n+1)$ et on a : $f(n+1) = (n+1)e^{-\frac{(n+1)^2}{4}}$

ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - u_n > 0$

d'où: la suite (u_n) est croissante. d'autre part ; $v_n - u_n = 2e^{-\frac{n^2}{4}}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n - u_n > 0$ ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n > u_n$

Et puisque : $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (en posant : $x = -\frac{n^2}{4}$)

alors : $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

et d'après la question précédente $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Donc : (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) Montrons que $|u_n - \ell| < 10^{-4}$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq \ell \leq v_n$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |u_n - \ell| \leq 2e^{-\frac{n^2}{4}}$

Il suffit de déterminer n tel que : $2e^{-\frac{n^2}{4}} \leq 10^{-4}$

On a : $2e^{-\frac{n^2}{4}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^{-\frac{n^2}{4}} \leq \frac{10^{-4}}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{n^2}{4} \leq \ln\left(\frac{10^{-4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq -4\ln\left(\frac{10^{-4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \geq 4\ln(2\times 10^4)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 2\sqrt{\ln(2\times 10^4)}$$

Par suite : $|u_7 - \ell| \leq 10^{-4}$; ainsi u_7 est une valeur ap

à 10^{-4} près.

Exercice 28

1) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x) - x$

Les deux fonctions f et $u: x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,

donc $g = f + u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = e^x - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$; • $g(x) = 0 \iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

• $g'(x) > 0 \iff e^x > 1$

$\iff x > 0$

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

(vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$)

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

donc : g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ vers $g(]-\infty; 0]) = [-1; +\infty[$

Puisque $0 \in [-1; +\infty[$; donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\infty; 0]$.

Et puisque : $g(-1) < 0$ et $g(-2) > 0$; alors : $-2 < \beta < -1$

• De la même manière on montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ et que : $1 < \alpha < 2$ et puisque :

$f(x) = x \iff g(x) = 0$

Alors l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

2) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \in [-2; -1]$

• Initialisation : pour $n = 1$; on a : $u_1 = f(u_0) = e^0 - 2 = -1$

Donc : $u_0 \in [-2;-1]$

• Héridité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $u_n \in [-2;-1]$ et on montre que $u_{n+1} \in [-2;-1]$

On a : $u_n \in [-2;-1] \Rightarrow -2 \leq u_n \leq -1$

$\Rightarrow f(-2) \leq f(u_n) \leq f(-1)$ (car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, du fait que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

de plus : $f(-1) = e^{-1} - 2 \simeq -1.6$

$f(-2) = e^{-2} - 2 \simeq -1.86$

Donc : $f(-2) > -2$ et $f(-1) < -1$

d'où : $-2 < f(-2) \leq f(u_n) \geq f(-1) < -1$

ainsi : $-2 \leq u_{n+1} \leq -1$ (car : $u_{n+1} = f(u_n)$)

D'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : -2 \leq u_n \leq -1$

b) Montrons par récurrence que (u_n) est strictement décroissante:

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < u_n$

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$; donc : $u_1 < u_0$

• Héridité: Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $u_{n-1} < u_n$ et on montre que $u_{n+2} < u_{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{n-1} < u_n$

et on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc : $f(u_{n-1}) < f(u_n)$ d'où : $u_{n-2} < u_{n-1}$ Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n-1} < u_n$

Donc : (u_n) est strictement décroissante.

3) a) Montrons que $(\forall x \in [-2;-1]) : |f'(x)| \leq e^{-1}$:

Soit $x \in [-2;-1]$ on a : $f'(x) = e^x$

$-2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow e^{-2} \leq e^x \leq e^{-1}$

Donc : $(\forall x \in [-2;-1]); |f'(x)| \leq e^{-1}$

b) Déduisons que : $(\forall x \in [-2;-1]) : |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{e}|x - \beta|$

Soit $x \in [-2;-1]$ et on a : $\beta \in [-2;-1]$. On suppose que $x < \beta$

La fonction f est continue sur $[x;\beta]$ et dérivable sur $]x;\beta[$

D'après le théorème des accroissements finis,

$\exists c \in]x;\beta[\,;\, f(x)-f(\beta)=(x-\beta)f'(c)$

Or $|f'(c)| \leq \frac{1}{e}$ et $f(\beta)=\beta$

Donc : $|f(x)-\beta| \leq \frac{1}{e}|x-\beta|$

Cette inéquation est vérifiée dans le cas où $x=\beta$ et on obtient le même résultat si $x > \beta$.

Donc : $(\forall x \in [-2;-1])\,;|f(x)-\beta| \leq \frac{1}{e}|x-\beta|$

4) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\,;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n \in [-2;-1]$

Donc, d'après la question 3)b) : $|f(u_n)-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_n-\beta|$

D'où : $|u_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_n-\beta|$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N})\,;|u_{k+1}-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_k-\beta|$

En remplaçant k par les valeurs respectives : 0; 1; 2; ...; $n-1$

On obtient : $|u_1-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_0-\beta|$

$$|u_2-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_1-\beta|$$
$$\vdots$$
$$|u_n-\beta| \leq \frac{1}{e}|u_{n-1}-\beta|$$

En multipliant membre à membre les inégalités de termes strictement positifs précédentes on obtient : $|u_n-\beta| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n|u_0-\beta|$

Or $u_0=0$; donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

b) Déterminons la limite de la suite (u_n) :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;|u_n-\beta| \leq \beta\left(\frac{1}{e}\right)^n$

Puisque : $-1 < \frac{1}{e} < 1$; alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n.\beta = 0$

D'après un critère de convergence (u_n) est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.

Exercice 29

1) • Calculons $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$:

On a : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc : $\lim_{x\to+\infty} n\ln(x) = +\infty$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

et on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x - 1}{x} + n\ln x\right) = +\infty$; d'où: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

• Calculons $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$:

On a : $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim_{x\to 0^+} n\ln(x) = -\infty$

et on a : $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; donc : $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$

2) Étudions les branches infinies de la courbe de la fonction f_n :

• On a : $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$; donc l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe (C_{f_n}).

• On a : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$; on calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$; on a : $\frac{f_n(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + n\frac{\ln(x)}{x}$

Et puisque : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$

Ainsi la courbe de la fonction f_n admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 + (x-1)e^x \geq 0$

On pose : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = 1 + (x-1)e^x$; et $g'(x) = xe^x$

Ainsi le signe de $g'(x)$ est celui de x.

Le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g		↘	0	↗	

On a : 0 est une valeur minimale absolue de g sur $\mathbb{R}$.

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

ainsi : $1+(x-1)e^x \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Étudions les variations de f_n :

On a : f_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;

Et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'_n(x) = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2} + \dfrac{n}{x}$

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall x \in]0;+\infty[) ; \dfrac{n}{x} > 0$

et d'après la question a): $(\forall x \in]0;+\infty[) ; 1+(x-1)e^x \geq 0$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'_n(x) > 0$

Ainsi : f_n est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations f_n :

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$		+	
f_n	$-\infty$	↗	$+\infty$

4) Étudions la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in]0;+\infty[$; on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		-	0	+	
Position relative de (C_n) et (C_{n+1})	(C_n) est au dessus de (C_{n+1})			(C_n) est au dessous de (C_{n+1})	

5) Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe B :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in]0;+\infty[$; on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$; donc :

$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Longleftrightarrow x = 1$.

De plus $f_n(1) = e - 1$; donc le point $H(1; e-1)$ est un point commun aux courbes (C_n) et (C_{n+1}) ; et comme les coordonnées de H sont indépendantes de n alors toutes les courbes (C_n) passent par le point H.

6) a) Montrons que $\exists! \alpha_1 \in]0,2 ; 0,9[$ tel que : $f_n(\alpha_1) = 0$;

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur l'intervalle $]0,2 ; 0,9[$

et on a : $f_n(0,2) \times f_n(0,9) < 0$ (vérifier ce résultat).

Donc; il existe un seul réel α_1 de $]0,2 ; 0,9[$ tel que : $f_n(\alpha_1) = 0$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; f_n(\alpha_1) < 0$:

Méthode 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a : $f_n(\alpha_1) = \dfrac{e^{n\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + n \ln(\alpha_1)$

Donc : $f_n(\alpha_1) = -\ln \alpha_1 + n \ln \alpha_1 = (n-1) \ln \alpha_1$ et que $0,2 < \alpha_1 < 0,9$,

alors : $\ln(\alpha_1) < 0$

Et on a : $n - 1 > 0$ (car $n \geq 2$); donc : $f_n(\alpha_1) < 0$

Méthode 2 :

D'après la question 4), on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);(\forall x \in]0; 1[) ; f_{n+1}(x) < f_n(x)$

Donc : $(\forall x \in]0; 1[) ; f_n(x) < f_{n-1}(x) < \ldots < f_1(x)$

et puisque : $\alpha_1 \in]0; 1[$, alors : $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$, par suite : $f_n(\alpha_1) < 0$ (car : $f_1(\alpha_1) = 0$)

c) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\});(\exists! \alpha_n \in]\alpha_1; 1[) ; f_n(\alpha_n) = 0$:

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on a : la fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$; donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $f_n(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

Et puisque : $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n sur $]0; +\infty[$.

Montrons que $\alpha_1 < \alpha_n < 1$:

Méthode 1:

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f_n(\alpha_1) < 0 < f_n(1)$; donc : $\alpha_1 < \alpha_n < 1$ (on rappelle que : $f_n(\alpha_n) = 0$)

Méthode 2:

(on utilise un raisonnement par l'absurde)

On suppose que $\alpha_1 \geq \alpha_n$ et puisque f_n est croissante sur $\mathbb{R}$,

alors : $f_n(\alpha_1) \geq f_n(\alpha_n)$

Or $f_n(\alpha_1) < 0$; d'où : $f_n(\alpha_n) < 0$ ceci est en contradiction avec $f_n(\alpha_1) < f_n(\alpha_n)$

ainsi notre hypothèse est fausse; par suite : $\alpha_1 < \alpha_n$

- On montre de plus que $\alpha_n < 1$; donc : $\alpha_1 < \alpha_n < 1$

Méthode 3:

On a : $f_n(\alpha_n) = 0$ et $f_n(\alpha_1) < 0$, donc : $f_n(\alpha_1) < f_n(\alpha_n)$

et puisque f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

et f_n est une bijection; alors sa bijection réciproque f_n^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

D'où : $f^{-1}{}_n(f_n(\alpha_1)) < f^{-1}{}_n(f_n(\alpha_n))$

Par suite : $\alpha_1 < \alpha_n$; et on montre de même que : $\alpha_n < 1$

7) a) Montrons que : $(\forall x \in]0;1]) ; \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

On considère la fonction h définie sur $]0;1]$ par : $h(x) = \frac{e^x - 1}{x} - e + 1$

On a : h est dérivable sur $]0;1]$ et $(\forall x \in]0;1]) ; h'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$

Donc : $(\forall x \in]0;1]) ; h'(x) \geq 0$, d'après la question 3)a)

ainsi la fonction h est croissante sur $]0;1]$; et puisque $h(1) = 0$

Alors : $(\forall x \in]0;1]) ; h(x) \leq 0$

D'où : $(\forall x \in]0;1]) ; \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

b) Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; ln(\alpha_n) \geq \frac{1 - e}{n}$

On a : $(\forall x \in]0;1]) ; \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

et puisque : $0 < \alpha_n < 1$; alors : $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} \leq e - 1$ de plus $f_n(\alpha_n) = 0$;

d'où : $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} = -n\,ln(\alpha_n)$

Donc : $-n\ln(\alpha_n) \leq e-1$ c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$

c) Déduisons la limite de la suite (α_n) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$; donc : $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

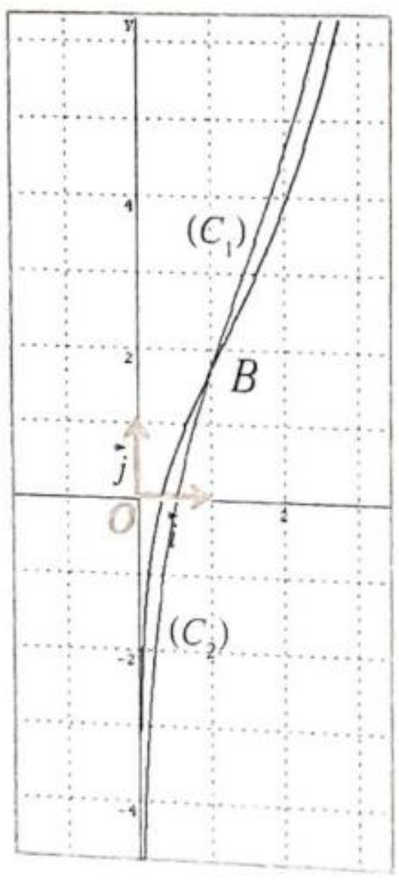
Et d'après la question 6)c); $\alpha_n \leq 1$; donc : $e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e}{n} = 0$; et la fonction $x \mapsto e^x$ est continue en 0.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = e^0 = 1$

et d'après un critère de convergence, la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente et de limite 1.

8) Tracé de (C_1) et (C_2) :



Exercice 30

Partie 1

1) a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

• On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,; f(x) = 1 - x^3 e^{-x} = 1 - \frac{x^3}{e^x}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

• On a : $(\forall x \in]-\infty;0[)\,; f(x) = 1 - x^3 e^{-x} = 1 - x^3\left(\frac{1}{e^x}\right)$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$; alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$; par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) Branches infinies de la courbe (C)

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - x^2\left(\frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

Ainsi: la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2) Étudions les variations de f

On a la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto -x^3$; $x \longmapsto e^{-x}$; $x \longmapsto 1$) et

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ; f'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(-3+x)$

et puisque $(\forall x \in \mathbb{R})\ ; x^2e^{-x} \geqslant 0$; alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x-3$

- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 0$ ou $-3+x = 0$

  $\Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

  $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x-3 > 0$

  $\Longleftrightarrow x > 3$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↘	$1-\frac{27}{e^3}$	↗	1

3) Montrons que l'équation: $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β et que $1 < \alpha < 3 < \beta$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$)

et on a : $f(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ et $f(3) = 1 - \frac{27}{e^3} = \frac{e^3-27}{e^3}$

et puisque $3 > e$, alors : $27 > e^3$; ainsi $f(3) < 0$

et puisque : $e > 1$ alors $e-1 > 0$; d'où $f(1) > 0$

f est continue sur $[1;3]$ et $f(1) \times f(3) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists \alpha \in]1;3[$ tel que :

$f(\alpha) = 0$

et puisque f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;3]$

alors : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;3]$ et que $1 < \alpha < 3$

D'autre part : f est continue et strictement croissante sur $[3;+\infty[$ et

$f([3;+\infty[) = [f(3);1[$

Donc f réalise une bijection de $[3;+\infty[$ vers $[f(3);1[$

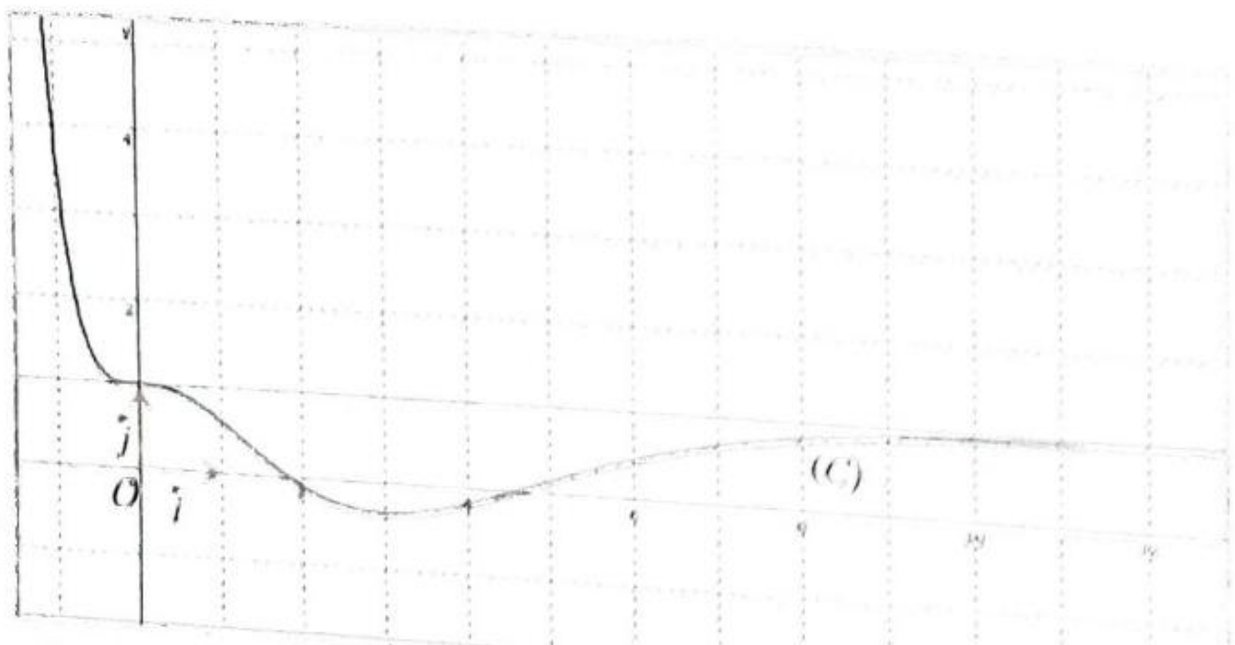
et puisque : $f(3) < 0$, alors : $0 \in [f(3);1[$

ainsi $\exists! \beta \in [3;+\infty[$ tel que : $f(\beta) = 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $1 < \alpha < 3 < \beta$

4) Le tracé de la courbe (C)

Remarquer que le point $A(0;1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) car $f'(0) = 0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de 0.



Partie 2

1) Tableau de variations de f_n suivant la parité de n.

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $f_n(x) = 1 - \frac{x^n}{e^x}$

et puisque : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; d'où $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$

On a : $(\forall x \in]-\infty;0[)$; $f_n(x) = 1 - x^n\left(\frac{1}{e^x}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$; alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est impair

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ si n est pair

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^n$: $x \longmapsto -e^{-x}$ et $x \longmapsto 1$)

et on a: $(\forall x \in \mathbb{R})\,; f'_n(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(x-n)$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; e^{-x} > 0$ et $x - n > 0 \iff x > n$

et le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n

Si n est pair alors $n-1$ est impair donc $x^{n-1} \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

Tableau de variations de f_n

• Si n est pair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	↗	1	↘	$f_n(n)$	↗	1

• Si n est impair

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	↘	1	↘	$f_n(n)$	↗	1

2) Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n tels que : $1 < u_n < n < v_n$

On a : $f_n(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ et on a : $f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{e^n - n^n}{e^n}$

Puisque : $n > 4 > e \Rightarrow n^n > e^n$

$\Rightarrow f_n(n) < 0$

• Cas où n est impair:

On a : f_n est continue sur $[1;n]$ et $f_n(1) \times f_n(n) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists u_n \in]1;n]\,;\, f_n(u_n) = 0$

et puisque f_n est strictement décroissante sur $]-\infty;n]$, alors : l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution u_n sur l'intervalle $]-\infty;n]$ avec $1 < u_n < n$

D'autre part la fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$

d'où f_n réalise une bijection de $[n;+\infty[$ $[f_n(n);1[$

et puisque $f_n(n) < 0$; alors : $0 \in]f_n(n);1[$

d'où $\exists! v_n \in]n;+\infty[\,;\, f_n(v_n) = 0$

Par suite l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que : $1 < u_n < n < v_n$:

• **Cas où n est pair** : On a le même résultat sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5$

a) Montrons que $f_n(u_{n-1}) = u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1})$

On a : $f_n(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}}$ et $f_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0$

donc $1 = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}}$; ainsi : $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}}$

Donc $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1})$

b) Déduisons que $f_n(u_{n-1}) < 0$:

On a : $1 < u_{n-1} < n-1$; donc $1 - u_{n-1} < 0$ et $(u_{n-1})^{n-1}\ e^{-u_{n-1}} > 0$

Par suite $f_n(u_{n-1}) < 0$

c) Déduisons que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est décroissante et que (u_n) est convergente

On a: $(\forall n \geqslant 5)$; $f_n(u_{n-1}) < 0$ et $f_n(u_n) = 0$

donc : $\forall n \geqslant 5 ; f_n(u_{n-1}) < f_n(u_n)$

et puisque : f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;n]$

On a alors : $(\forall n \geqslant 5) ; u_{n-1} > u_n$

C'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante

et puisque elle est minorée par 1 alors elle est convergente.

4) a) Montrons que : $(\forall n \geqslant 4); 1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

On a : $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante

donc : $\forall (n \geq 4) ; u \leq u_n$, et d'autre part : $u_n > 1$; d'où $u \geqslant 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N} ; n \geqslant 4)$; $1 \leqslant u \leqslant u_n$

et puisque $1 < u_n < n$ et f_n est strictement décroissante sur $[1:n]$ (dans les deux cas)

alors : $f_n(u) \geqslant f_n(u_n)$, et puisque $f_n(u_n) = 0$

Alors : $f_n(u) \geqslant 0$

C'est-à-dire $(\forall n \geqslant 4) ; 1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

b) On suppose que $u > 1$; calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n = +\infty$ (car $u > 1$) et $e^{-u} > 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u} = -\infty$

c) Déduisons la valeur de u

On a : $(\forall n \geqslant 4) ; u_n > 1$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 1$

Ainsi : $u \geqslant 1$; donc : $u > 1$ ou $u = 1$

On suppose que $u > 1$; D'après la question 4) b),

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u^n e^{-u} = -\infty$;

et ceci est en contradiction avec $(\forall n \geqslant 4) ; 1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

Donc : $u = 1$

EXERCICE 31

Partie A:

On a : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{2}{x}} ; x < 0 \text{ ; on pose : } X = \frac{2}{x} \text{ pour toutes les limi-} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

tes.

1) a) Montrons que f est continue à droite en 0

On a : $X = \frac{2}{x}$, donc : $x = \frac{2}{X}$

Ainsi : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{X \to -\infty} \left(\frac{2}{X} + 2\right)e^X = 0 = f(0)$

(car : $\lim_{X \to -\infty} \frac{2}{X} + 2 = 2$ et $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$)

D'où la fonction f est continue à droite en 0.

b) Montrons que f est dérivable à droite en 0

On a : $(\forall x < 0)$; $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x+2)e^{\frac{2}{x}}}{x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{\frac{2}{x}}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{X \to -\infty} (1 - X)e^X = \lim_{X \to -\infty} (e^X - Xe^X) = 0$

(car : $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ et $\lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$)

Donc: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

c) Montrons que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

On a : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f'(x) = e^{\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2}(x+2)e^{\frac{2}{x}} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

Donc: $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 3}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

D'où: $(\forall x > 0 ; f'(x) > 0)$; ainsi f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2) a) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

On pose $X = -\frac{2}{x}$; on a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to 0} \left(\frac{-2}{X} + 2\right)e^X = +\infty$

car : $\begin{cases} \lim_{X \to 0} e^X = 1 \\ \lim_{X \to 0} \frac{-2}{X} = +\infty \end{cases}$; ainsi : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrons que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq e^t + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$; on pose $u(t) = e^t + t - 1$ et $v(t) = e^t + t - 1 - \frac{t^2}{2}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; u'(t) = -e^t + 1$

et $v'(t) = -e^t + 1 - t = -u(t)$

or : $-t \leq 0 \Rightarrow e^t \leq 1$

$\Rightarrow -e^t + 1 \geq 0$

$\Rightarrow u'(t) \geq 0$

$\Rightarrow u$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; u(t) \geq u(0)$; donc $u(t) \geq 0$ (car : $u(0) = 0$)

et on a : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; v'(t) = -u(t)$

Donc : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; v'(t) \leq 0$

Ainsi : la fonction v est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $\forall t \in [0; +\infty[; v(t) \leq v(0)$

D'où : $(\forall t \in [0; +\infty[) ; v(t) \leq 0$ (car $v(0) = 0$)

Et on a : $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

Par suite : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) \begin{cases} e^t + t - 1 \geq 0 \\ e^t + t - 1 - \frac{t^2}{2} \leq 0 \end{cases}$

Conclusion : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq e^t + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

c) Montrons que $(\forall x > 0)$; $-\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

On pose $t = \frac{2}{x}$; d'où $x = \frac{2}{t}$

donc : $f(x)$ s'écrit sous la forme : $\left(\frac{2}{t} + 2\right)e^t = 2.\frac{1+t}{t}e^t$

et puisque $x > 0$; alors $t > 0$, et d'après la question b) :

$$1 - t \leq e^t \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

et puisque $t + 1 > 0$; alors $1 - t^2 \leq (1+t)e^t \leq 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^2(1+t)$

D'où : $\frac{2(1-t^2)}{t} \leq \frac{2(1+t)}{t}e^t \leq \frac{2(1-t^2)}{t} + t(1+t)$

c'est-à-dire : $\frac{2}{t} - 2t \leq \frac{2(1+t)}{t}e^t \leq \frac{2}{t} - 2t + t + t^2$

Par suite : $-2t \leqslant \frac{2(1+t)}{t}e^{-t} - \frac{2}{t} \leqslant t^2 - t$

et en remplaçant t par $\frac{2}{x}$; on obtient :

$(\forall x > 0); -\frac{4}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

d) Déduisons que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ)

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $(\forall x > 0) : -\frac{2}{x} \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right) = 0$.

D'après les limites et l'ordre ; on a : $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - x) = 0$

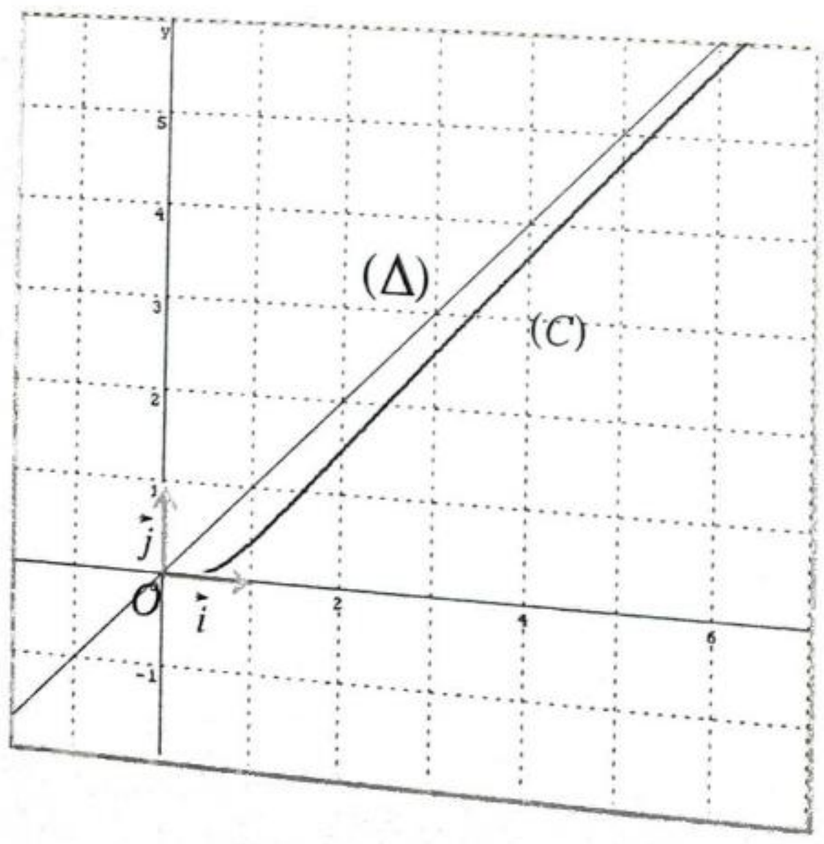
D'où la droite (Δ) d'équation : $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) Tableau de variations de f est le suivant (d'après 1) c) et 2) a)

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$

Le tracé de (C_f) :

On a la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f)



Partie B

1) Montrons que f_n est dérivable à droite en 0

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a : $\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

On pose : $X = -\frac{2}{x}$

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{X\to-\infty}\left(1-\frac{1}{n}X\right)e^X = \lim\limits_{X\to-\infty}\left(e^X - \frac{1}{n}Xe^X\right) = 0$

(car : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$)

Donc f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$

• Limites : On pose $X = -\frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to 0^-}\left(-\frac{2}{X}+\frac{2}{n}\right)e^X = +\infty$ (car : $\lim\limits_{X\to 0^-} -\frac{2}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0^-} e^X = 1$)

- Variations

Soit $x \in]0;+\infty[$; on a $f'_n(x) = e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}$

donc $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'_n(x) > 0$; par suite f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

- Tableau de variations de f_n est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'_n(x)$	0	$+$	
f_n	0	↗	$+\infty$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrons que l'équation : $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur $]0;+\infty[$

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$)

et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

donc : f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

et puisque $\frac{2}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc $\exists! a_n \in]0;+\infty[$; tel que $f_n(a_n) = \frac{2}{n}$

c'est-à-dire l'équation : $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur l'inter-

volle $]0;+\infty[$

b) Montrons que : $(\forall x \in]0;+\infty[):(\forall n \in \mathbb{N}^*): f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Soit $x > 0$; et $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{x}{2}}$ et $f_{n+1}(x) = \left(x + \frac{2}{n+1}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

D'où : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right)$

On a : $-\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{x}{2}} < 1$

Et : $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ (car : $n+1 > n$)

D'où : $\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} < 0$

Ainsi : $e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right) > \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$

Donc : $f_{n+1}(x) - f_n(x) > \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$

D'où : $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Conclusion $(\forall x > 0):(\forall n \in \mathbb{N}^*): f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) Déduisons que $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[):(\forall n \in \mathbb{N}^*): f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

Et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*): a_n > 0$

On peut remplacer x par le nombre a_n, et on obtient :

$f_{n+1}(a_n) - \frac{2}{n+1} > f_n(a_n) - \frac{2}{n}$

or $f_n(a_n) = \frac{2}{n}$ donc $f_{n+1}(a_n) > \frac{2}{n+1}$

et on a $f_{n+1}(a_{n+1}) = \frac{2}{n+1}$

On conclut que : $f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$

et puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

alors : $a_n > a_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où la suite (a_n) est décroissante.

On a : $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente

d) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f_n(a_n) = \frac{2}{n} \Longleftrightarrow (a_n + \frac{2}{n})e^{-\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}$

$$\Longleftrightarrow a_n + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow a_n = \frac{2}{n}(e^{\frac{2}{n}} - 1)$$

$$\Longleftrightarrow na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2$$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2$

a) Montrons que $a = 0$

On a $a \geq 0$ car $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $a_n \geq 0$ supposons que: $a > 0$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{a_n} = \frac{2}{a}$, et puisque la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en $\frac{2}{a}$;

alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{a_n}} = e^{\frac{2}{a}}$

or $a_n = \frac{2}{n}e^{\frac{2}{a_n}} - \frac{2}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc ; $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ contradiction avec $a > 0$

Donc: $a = 0$

Exercice 32

1) * Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, et la fonction exponentielle népérienne est continue en 0 ;

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$; d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} - n = 1 - n$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

par suite : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$

* Calculons : $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = +\infty$

* Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$

* Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, et la fonction exponentielle néperienne est continue en 0 ;

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Et puisque : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} - n = 1 - n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

2) a) Variations de c_n

La fonction c_n est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $c'_n(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x+1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

Donc le signe de $c'_n(x)$ dépend de celui de $x(2x+1)$

Et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} c_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} n - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = n - 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} c_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = n - 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} c_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} n - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} c_n(x) = \lim\limits_{x\to0^-} n - (1+1)\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = n$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0^-} Xe^X = 0$)

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$c'_n(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$c_n(x)$	$n-1$	↗	$n+e^{-2}$	↘	n ‖ $-\infty$	↗	$n-1$

b) Montrons que $\exists! x_n \in]0; +\infty[$, $c_n(x_n) = 0$

On a la fonction c_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc sa restriction sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; n-1[$

On a $n - 1 > 0$ car $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ d'où : $0 \in]-\infty, n-1[$, par suite 0 admet un

seul antécédent x_n d'où : $\left(\exists! x_n \in]0,+\infty[\right)$; $c_n(x_n)=0$

c) Déduisons le signe de $c_n(x)$; $x \in \mathbb{R}^*$

D'après le tableau de variations de c_n ; on en déduit que :

$\left(\forall x \in]-\infty,0[\right) c_n(x)>0$, (car ; $n-1>0$ et $n>0$)

et la fonction c_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$; donc elle est strictement croissante sur chaque des intervalles $]0,x_n[$ et $]x_n:+\infty[$

Donc : $\left(\forall x \in]0,x_n[\right) c_n(x)<c_n(x_n)$ et $\left(\forall x \in]x_n;+\infty[\right) c_n(x)>c_n(x_n)$

c'est-à-dire : $\left(\forall x \in]0,x_n[\right) c_n(x)<0$ et $\left(\forall x \in]x_n;+\infty[\right) c_n(x)>0$

Résumé :

- $c_n(x)>0$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]x_n;+\infty[$
- $c_n(x)<0$ pour tout x de $]0,x_n[$

3)a) Tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^*$

Et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f'_n(x)=\dfrac{x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)-e^{\frac{1}{x}}+n}{x^2}=\dfrac{-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}+n}{x^2}$

$$=\frac{n-\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{c_n(x)}{x^2}$$

D'après la question 2) c) , on en déduit que le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de $c_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

Tableau de variations de la fonction f_n est le suivant :

x	$-\infty$		0		x_n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f_n	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f_n(x_n)$	↗	0

b) Montrons que $f_n(x_n)<0$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[x_n;+\infty[$

Donc la restriction sur l'intervalle $[x_n ; +\infty[$ réalise une bijection de $[x_n ; +\infty[$ vers J tel que : $J = f_n([x_n ; +\infty[) = [f_n(x_n); \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [f_n(x_n); 0[$

Et puisque : $[x_n ; +\infty[\neq \phi$ alors $[f_n(x_n); 0[\neq \phi$; d'où : $f_n(x_n) < 0$

* Déduction : La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; x_n[$ donc la restriction sur l'intervalle $]0; x_n[$ est une bijection de $]0; x_n[$ vers un intervalle J tel que :

$$J = f_n(]0; x_n[) =]f_n(x_n); \lim_{x\to 0^+} f_n(x)[=]f_n(x_n) ; +\infty[$$

Et puisque $f_n(x_n) < 0$; alors $0 \in]f_n(x_n) ; +\infty[$; donc 0 admet un seul antécédent α_n sur l'intervalle $]0; x_n[$, d'où : $(\exists! \alpha_n \in]0; x_n[) ; f_n(\alpha_n) = 0$

4) a) Montrons que $x_n = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)}$

On a : $c_n(x_n) = 0 \iff n - \left(1+\frac{1}{x_n}\right)e^{\frac{1}{x_n}} = 0$

$$\iff n = \left(1+\frac{1}{x_n}\right)e^{\frac{1}{x_n}}$$

$$\iff \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right) + \frac{1}{x_n}$$

$$\iff \frac{1}{x_n} = \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{x_n}\right) = \ln n - \ln\left(\frac{x_n+1}{x_n}\right)$$

$$\iff \frac{1}{x_n} = \ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)$$

$$\iff x_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)}$$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $x_{n+1} \leq x_n$ en utilisant le raisonnement par l'absurde.

On suppose que : $(\exists n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; x_{n+1} > x_n$

La fonction c_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

donc : $x_{n+1} > x_n \Rightarrow c_n(x_{n+1}) > c_n(x_n)$

$$\Rightarrow n - \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} > 0$$

$$\Rightarrow n > \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} \qquad (1)$$

D'autre part ; on a : $c_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \Longleftrightarrow n+1-\left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} = 0$

$$\Longleftrightarrow n+1 = \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} \quad (2)$$

d'après (1) et (2) on déduit que : $n > n+1$ ce qui est absurde donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ \ x_{n+1} \leq x_n$, par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

on sait que : $(\forall n \in IN^* - \{1\})x_n > 0$; Donc la suite (x_n) est minorée par 0 ; d'où elle est convergente.

c) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

On a (x_n) est une suite convergente ; on pose $\lim x_n = \ell$ avec $\ell \geq 0$

On suppose que : $\ell > 0$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{\ell}{1+\ell}$ et la fonction $\ln$ est continue au point $\frac{\ell}{1+\ell}$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right) = \ln\left(\frac{\ell}{1+\ell}\right)$;

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n) + \ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)} = 0$

Donc $\ell = 0$ ce qui est en contradiction avec $\ell > 0$

Et puisque $\ell \geq 0$ alors $\ell = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

5- Position relative de (Γ_2) et (Γ_3):

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $f_3(x) - f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 3}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2}{x} = \frac{-1}{x}$

le tableau suivant résume la position relative de (Γ_2) et (Γ_3):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_3(x) - f_2(x)$	$+$	$-$	
Position relative de (Γ_2) et (Γ_3)	(Γ_3) est au dessus de (Γ_2)	(Γ_3) est au dessous de (Γ_2)	

D'autre part ; on a : $c_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \Longleftrightarrow n+1-\left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} = 0$

$$\Longleftrightarrow n+1 = \left(1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)e^{\frac{1}{x_{n+1}}} \quad (2)$$

d'après (1) et (2) on déduit que : $n > n+1$ ce qui est absurde donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ \ x_{n+1} \leq x_n$, par conséquent la suite (x_n) est décroissante.

on sait que : $(\forall n \in IN^* - \{1\})x_n > 0$; Donc la suite (x_n) est minorée par 0 ; d'où elle est convergente.

c) Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

On a (x_n) est une suite convergente ; on pose $\lim x_n = \ell$ avec $\ell \geq 0$

On suppose que : $\ell > 0$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{\ell}{1+\ell}$ et la fonction ln est continue au point $\frac{\ell}{1+\ell}$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right) = \ln\left(\frac{\ell}{1+\ell}\right)$;

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{nx_n}{1+x_n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)+\ln\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)} = 0$

Donc $\ell = 0$ ce qui est en contradiction avec $\ell > 0$

Et puisque $\ell \geq 0$ alors $\ell = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

5- Position relative de (Γ_2) et (Γ_3):

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a : $f_3(x) - f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-3}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}-2}{x} = \frac{-1}{x}$

le tableau suivant résume la position relative de (Γ_2) et (Γ_3):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_3(x)-f_2(x)$	$+$	$-$	
Position relative de (Γ_2) et (Γ_3)	(Γ_3) est au dessus de (Γ_2)	(Γ_3) est au dessous de (Γ_2)	