Mega MATHS

mathématiques

2ème Année Baccalauréat

Option

sciences mathématiques A&B

2ème BAC S-M

TOME 1



- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Exercices de devoirs surveillés
- Problèmes de synthèse
- extraits de sujets du bac

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

profsalm.blogspot.com

Mega

MATHS

TOME 1

Mathématiques

Option sciences mathématiques A et B

2ème année baccalauréat

Auteurs:

KACHANI Saïd
Inspecteur principal
de l'enseignement
secondaire qualifiant

ANSARI Azzeddine
Professeur principal
de l'enseignement
secondaire qualifiant

- Résumés de cours
- Exercices variés et progressifs
- Exercices de devoirs surveillés
- Problèmes de synthèse
- Extraits de sujets du bac

profsalm.blogspot.com

Tous droits réservés

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Mega maths

2éme Année baccalauréat

Option SM «A et B» Tome 1

1ère édition : 2019

Dépôt légal : 2019MO4909

ISBN : 978-9920-670-00-5

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est conforme au programme officiel , il est destiné aux élèves de la deuxième année du cycle du baccalauréat sciences mathématiques A et B, comme aux nouveaux admis en classes préparatoires scientifiques (MPSI, PCSI) et économiques (ECS).

Ce livre propose des résumés de cours, des exercices de synthèse et des examens nationaux qui visent à mieux préparer les devoirs surveillés et à se familiariser avec l'esprit de l'examen national.

Il est essentiel pour l'élève de fournir un effort de réflexion par rapport aux différents exercices, nous encourageons les utilisateurs de ce livre à effectuer un travail d'observation, d'expérimentation de méthodes, ou de tâtonnements avant de se reporter immédiatement aux corrigés qui doivent être soigneusement étudiés, le but étant de comparer les résultats et de trouver des axes d'amélioration.

Nous espérons que cet ouvrage servira de guide pour la préparation de l'examen du Baccalauréat.

Nous tenons à remercier la maison «EDITIONS PLUS» pour l'effort fourni pour l'édition de ce livre.

Nous aurons le plaisir de recevoir vos suggestions et remarques , afin de répondre au maximum aux besoins des lecteurs.

Les auteurs

01

LIMITES - CONTINUITÉ DÉRIVABILITÉ - LIMITE D'UNE SUITE ETUDE DES FONCTIONS

Mega

1 LIMITES :

1 Formes indéterminées :

$$\frac{0}{0} \; ; \; +\infty-\infty \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; \; 0\times\infty$$

2 Limite d'une fonction polynôme en ∞ :

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

3 Limite d'une fonction rationnelle en ∞ :

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

4 Limites usuelles des fonctions trigonométriques :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \; ; \; \lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1 \; ; \; \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$$

5 Limites et ordre :

Soient f, g et h des fonctions numériques définies sur un ensemble E de la forme $]a-r,a+r[-\{a\}$ où $a\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^{+*}$ et soit ℓ un nombre réel.

- si $(\forall x\in E)\, g(x)\le f(x)\le h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$ alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$
- si $(\forall x\in E)\, |f(x)-\ell|\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$
- si $(\forall x\in E)\, f(x)\ge g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$
- si $(\forall x\in E)\, f(x)\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Remarque :

Ces propriétés restent valables quand x tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$ ou tend vers a à droite ou tend vers a à gauche.

profsalm.blogspot.com

2 CONTINUITÉ :

1 Continuité d'une fonction en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un nombre réel a

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2 Continuité à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$

On dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3 Continuité à gauche :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r, a]$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$

On dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

4 Propriété :

Pour qu'une fonction f soit continue en a, il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en a

5 Prolongement par continuité :

Soient f une fonction numérique et a un nombre réel tel que : $a \notin D_f$

Si la fonction f admet une limite finie ℓ en a,

alors la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \; ; \; x \neq a \\ g(a) = \ell \end{cases}$ est continue en a

La fonction g s'appelle le prolongement par continuité de f en a

et on a : $D_g = D_f \cup \{a\}$

6 Continuité sur un intervalle :

- On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I
- On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a;b] (a < b)$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b

7 Continuité des fonctions usuelles :

- Les fonctions polynômes et les fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

8 Opérations sur les fonctions continues :

- Si f et g sont continues sur un intervalle I alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ sont continues sur I
- Si f et g sont continues sur un intervalle I telles que g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I

9 Continuité de la composée de deux fonctions :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ et a un élément de I

- Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors la fonction gof est continue en a
- Si f est continue sur I et g est continue sur J

alors la fonction gof est continue sur I

10 Continuité d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$:

Si f est continue et positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I

11 Composée d'une fonction ayant une limite finie et d'une fonction continue :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I pointé de centre a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre ℓ tel que : $f(I) \subset J$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et g est continue en ℓ

alors : $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\ell)$

12 L'image d'un intervalle par une fonction continue :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue f est un segment $[m,M]$ où $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} (f(x))$ et $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} (f(x))$

13 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

	L'image $f(I)$	
L'intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$

profsalm.blogspot.com

$[a,b[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
$]-\infty, a]$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(a)]$	$[f(a), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]a, +\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

14 Théorème des valeurs intermédiaires :

- Si f est continue sur $[a,b]$ alors pour tout nombre λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un nombre c de $[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$
- Si f est continue sur un segment $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$
- Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a,b[$

15 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :

- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et la fonction réciproque f^{-1} est définie, continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f
- Les représentations graphiques de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

16 Fonction Arctangente :

Définition :

- La restriction de la fonction $x \mapsto \tan x$ à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc c'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente et notée Arctan

Propriétés :

- La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Pour tous x de $\mathbb{R}$ et y de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a : $(Arctan(x) = y) \Longleftrightarrow (x = \tan(y))$
- La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \tan(Arctan(x)) = x$
- $\left(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)\ Arctan(\tan(x)) = x$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ Arctan(-x) = -Arctan(x)$
- $Arctan(0) = 0$; $Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$; $Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$; $Arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

17 Fonction racine n^{ième} :

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

et on a : $(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2)\ \sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$

Propriétés :

- Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a : $\sqrt[n]{x^n} = x$ et $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- Pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$, on a : $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$ et $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \iff x > y$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Opérations sur les radicaux :

Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ et a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$,

On a :

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

Continuité et limites de fonctions contenant des radicaux :

Soient u une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un nombre réel.

- si u est continue sur I alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I
- si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R}^+)$, alors : $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$
- si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

18 Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

Soient x un nombre réel strictement positif et $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tels que : $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Les opérations sur les puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif s'effectuent de la même façon que sur les puissances entières d'un nombre réel non nul.

3 DÉRIVABILITÉ :

profsalm.blogspot.com

1 Fonction dérivable en un point :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I

- On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une

limite finie ℓ en a

Le nombre réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$

• Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a

L'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

2 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche :

Définition 1:

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel ℓ_1 tel que :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_1$$

Le nombre ℓ_1 est appelé le nombre dérivé à droite de f en a et noté $f'_d(a)$

Définition 2:

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel ℓ_2 tel que :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_2$$

Le nombre ℓ_2 est appelé le nombre dérivé à gauche de f en a et noté $f'_g(a)$

Propriété :

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

3 Dérivabilité et continuité :

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

4 La fonction dérivée :

Définitions :

• On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ si f est dérivable en tout élément de $]a,b[$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur $]a,b[$ et se note f'

• On dit que f est dérivable sur le segment $[a,b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b

Tableau des dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante réelle)	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^r $(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	rx^{r-1}

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$

Opérations sur les fonctions dérivables :

• Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et k un nombre réel, alors les fonctions $u+v$, ku et $u.v$ sont dérivables sur I et on a :
$(u+v)'=u'+v'$ et $(ku)'=ku'$ et $(u.v)'=u'v+uv'$

• Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et si $v(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et on a :

$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Conséquences :

• Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

• Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

5 Dérivée de la composée de deux fonctions :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J telles que : $f(I)\subset J$

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors la fonction gof est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I)\,(gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

Conséquence :

Si f est dérivable sur l'intervalle I alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ la fonction f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)'=nf'f^{n-1}$

6 Dérivabilité d'une fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I si f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $J=f(I)$ et on a : $(\forall x\in J)\,(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

7 Dérivées des fonctions $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ et $x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$:

Soit n un nombre entier naturel supérieur à 1

• la fonction $f: x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a :

$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\,f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

profsalm.blogspot.com

• Si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I)\ f'(x) = \frac{1}{n}u'(x)[u(x)]^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$$

8 Dérivées des fonctions $x \mapsto x^r$ et $x \mapsto (u(x))^r$ où $r \in \mathbb{Q}^*$:

Soit r un nombre rationnel non nul.

• la fonction $f : x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = rx^{r-1}$

• si une fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto [u(x)]^r$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I)\ f'(x) = ru'(x)[u(x)]^{r-1}$$

9 Dérivée de la fonction Arctangente :

• La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (Arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

• si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto Arctan(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I)\ f'(x) = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

10 Théorème de Rolle :

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un élément c de $]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$

11 Théorème des accroissements finis :

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe au moins un élément c de $]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

12 Inégalité des accroissements finis :

Propriété :

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe deux nombres réels α et β tels que : $\alpha \leq f'(x) \leq \beta$ pour tout x de $]a,b[$

alors : $\alpha(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \beta(b-a)$

Conséquence :

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe un nombre réel positif k tel que $(\forall t \in]a,b[)\ |f'(t)| \leq k$

alors : $(\forall (x,y) \in [a,b]^2)\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

4 LIMITE D'UNE SUITE :

1 Suite convergente :

On dit qu'une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$, et on dit que la suite (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente.

2 Critères de convergence d'une suite :

Soient (u_n), (a_n) et (b_n) des suites numériques et ℓ un nombre réel.

C_1 : si à partir d'un certain rang, on a : $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$ alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

C_2 : si à partir d'un certain rang, on a : $|u_n - \ell| \leq a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

C_3 : si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ alors la suite (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

C_4 : si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

C_5 : Toute suite croissante et majorée est une suite convergente.

C_6 : Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente.

C_7 : Si (u_n) est une suite croissante et n'est pas majorée alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

C_8 : Si (u_n) est une suite décroissante et n'est pas minorée alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3 Limite de la suite géométrique (q^n) où $q \in \mathbb{R}$:

- Si $q > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

4 Limite d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique définie par : $u_{n_0} \in I$ et $(\forall n \geq n_0)\ u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente alors sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

5 Limite d'une suite de type $v_n = f(u_n)$:

Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est une fonction continue en ℓ

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

profsalm.blogspot.com

6 Suites adjacentes :

Définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si: (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

Propriété :

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite.

5 ETUDE DES BRANCHES INFINIES :

Soient f une fonction numérique d'une variable réelle x et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal et a et b deux nombres réels.

1) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x=a$

2) Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$

alors la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation : $y=b$

3) Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

4) Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

5) Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax=\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$

6) Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax=b$ alors la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$

Remarque:

Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)=0$ alors la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation: $y=ax+b$

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} ; x > 1 \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi \sin(x-1)}{x-1}\right) ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a- Montrer que f est continue en 1

b- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Solution

1) • On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty, 1[$

On a: $|\sin(x-1)| \leq 1$, donc : $\left|\dfrac{\pi \sin(x-1)}{x-1}\right| \leq \dfrac{\pi}{|x-1|}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi}{|x-1|} = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi \sin(x-1)}{x-1} = 0$

et puisque la fonction cos est continue en 0

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{\pi \sin(x-1)}{x-1}\right) = \cos(0) = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

2) a- • On a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x-1}{x+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(1)$

Par suite : f est continue à droite en 1

profsalm.blogspot.com

• On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\pi\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0^-}\pi.\dfrac{\sin t}{t}=\pi\times 1=\pi$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\left(\dfrac{\pi\sin(x-1)}{x-1}\right)=\cos(\pi)=-1$ (car la fonction cos est continue en π)

par suite : $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\dfrac{1}{2}=f(1)$

D'où : f est continue à gauche en 1

Conclusion : la fonction f est continue en 1 car elle est continue à droite et à gauche en 1

b- • La fonction $x\mapsto\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$ est une fonction rationnelle

Donc elle est continue en tout point de $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

D'où f est continue sur $]1,+\infty[$

• La fonction $u: x\mapsto\dfrac{\pi\sin(x-1)}{x-1}$ est une fonction continue sur $]-\infty;1[$, car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $]-\infty,1[$ et $(\forall x\in]-\infty,1[)\ x-1\neq 0$

Et puisque la fonction $x\mapsto\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Alors elle est continue sur $u(]-\infty,1[)$

Par suite la fonction $x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi\sin(x-1)}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty,1[$

D'où : f est continue sur $]-\infty,1[$

Conclusion :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue en 1 et sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) Montrer que l'équation $f(x)=1-x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$

3) a- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) On considère la fonction $g: x\longmapsto f(x)-(1-x^2)$

La fonction g est continue sur $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$

et on a : $g(0)=-1$ et $g(1)=\dfrac{1}{2}$

Donc : $g(0)\times g(1)<0$

Par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ c'est-à-dire l'équation $f(x)=1-x^2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$

3) a- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ 1+\sqrt{x}\neq 0$

et on a pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $f'(x)=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$ (f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x)>0$

Par suite, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

D'où f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers l'intervalle:

$$J=f(\mathbb{R}^+)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=[0,+\infty[=\mathbb{R}^+$$

b- Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^+$:

On a : $f^{-1}(x)=y\iff f(y)=x$

$$\iff\frac{y}{1+\sqrt{y}}=x$$

$$\iff(\sqrt{y})^2-x\sqrt{y}-x=0$$

Le discriminant de cette équation d'inconnue $\sqrt{y}$ est : $\Delta=x^2+4x$

Donc : $f^{-1}(x)=y\iff\sqrt{y}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$ ou $\sqrt{y}=\dfrac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}$

$$\iff\sqrt{y}=\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\ \left(\text{car }\frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}\leq 0\right)$$

$$\iff y=\frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+4x})^2$$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+4x})^2$

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0;2]$ telle que : $f(2)=f(0)$

Montrer qu'il existe au moins un élément c de l'intervalle $[0;1]$ tel que : $f(c+1)=f(c)$

profsalm.blogspot.com

Solution

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = f(x+1) - f(x)$
La fonction g est continue sur $[0;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$ (la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est la composée de la fonction $v: x \mapsto x+1$ qui est continue sur $[0;1]$ et la fonction f qui est continue sur $v([0;1]) = [1;2]$)

et on a : $g(0) \times g(1) = (f(1) - f(0))(f(2) - f(1))$
$= (f(1) - f(0))(f(0) - f(1))$
$= -(f(0) - f(1))^2$

Donc : $g(0) \times g(1) \leq 0$
Par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $(\exists c \in [0;1])\ g(c) = 0$
C'est-à-dire : $(\exists c \in [0;1])\ f(c+1) = f(c)$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 1} \ ; \ x > 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{2} \\ f(x) = \dfrac{3}{2} + (x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \ ; \ x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) a- Montrer que f est continue en 1

b- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$

a- Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

b- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

Solution

1) • On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2) a- • On remarque que : $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 2$
$= (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$

En déduire que f est continue à droite en 1

• Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\})\left|(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq |x-1|$

En déduire que f est continue à gauche en 1

Par suite : f est continue en 1

b- En utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions continues, montrer que f est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et continue sur l'intervalle $]-\infty;1[$

Et puisque f est continue en 1, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$

3) a- Pour tout x de $]1;+\infty[$, on a : $g(x)=\frac{x-1+\sqrt{x}-1}{x-1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Donc g est une bijection de $[1;+\infty[$ vers l'intervalle $J=g([1;+\infty[)$

$$=\left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right]$$

$$=\left]1;\frac{3}{2}\right]$$

b- Soient x un élément de $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ et y un élément de $]1;+\infty[$

On a : $g^{-1}(x)=y \Longleftrightarrow g(y)=x$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{y}+1}=x$$

$$\Longleftrightarrow y=\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$$

Et puisque : $g(1)=\frac{3}{2}$ alors : $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=1$

Par suite : $\begin{cases} g^{-1}(x)=\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2 ; 1<x<\frac{3}{2} \\ g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=1 \end{cases}$

Remarque: $(\forall x \in \left]1;\frac{3}{2}\right] g^{-1}(x)=\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$

Exercice 5

1) Calculer $Arctan\left(\tan\left(\frac{-25\pi}{7}\right)\right)$

2) Montrer que : $Arctan\left(\frac{2}{3}\right)-Arctan\left(\frac{1}{2}\right)=Arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xArctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$

profsalm.blogspot.com

Solution

1) On a : $Arctan\left(\tan\left(\frac{-25\pi}{7}\right)\right) = Arctan\left(\tan\left(\frac{-28\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}\right)\right)$

$= Arctan\left(\tan\left(-4\pi+\frac{3\pi}{7}\right)\right)$

$= Arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$

Or $\frac{3\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc : $Arctan\left(\tan\left(\frac{-25\pi}{7}\right)\right) = \frac{3\pi}{7}$

2)On a: $\tan\left(Arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}$ et $\tan\left(Arctan\left(\frac{1}{8}\right)+Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Donc : $Arctan\left(\frac{2}{3}\right) = Arctan\left(\frac{1}{8}\right)+Arctan\left(\frac{1}{2}\right)+k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

et puisque : $0 < \frac{2}{3} < 1$ et $0 < \frac{1}{8} < 1$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$

alors : $0 < Arctan\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < Arctan\left(\frac{1}{8}\right) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$

En déduire que : $-\frac{\pi}{2} < k\pi < \frac{\pi}{4}$ d'où : $k = 0$

Par suite : $Arctan\left(\frac{2}{3}\right) = Arctan\left(\frac{1}{8}\right)+Arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

3) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} xArctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\cdot\frac{Arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)} = \lim\limits_{t\to0^+}\frac{Arctan(t)}{t} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} xArctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1$

Exercice 6

1) Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ tel que :

$\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

2) On considère la fonction $f: x \mapsto x^3 - x^2 + 3x + 1$

a- Montrer que : $f(\alpha) = 0$

b- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

c- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ f^{-1}(x) < 0$

Solution

1) On considère la fonction $h: x \mapsto (x+1)\sqrt{x+1} + 2x$

Montrer que h est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$

et $h\left(-\frac{1}{2}\right) \times h(0) < 0$

Donc il existe un réel unique α de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ tel que : $h(\alpha) = 0$

C'est-à-dire : $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

2) a- On a : $f(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = (\alpha+1)^3 - 4\alpha^2$

et puisque : $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$, c'est -à-dire: $(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1} = -2\alpha$

alors : $(\alpha+1)^{\frac{3}{2}} = -2\alpha$ et donc : $(\alpha+1)^3 = 4\alpha^2$ d'où : $f(\alpha) = 0$

b- Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers :

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

c- Soit x un élément de $\mathbb{R}^-$ c'est-à-dire : $x \leq 0$

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par suite : $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(0)$

et puisque : $f(\alpha) = 0$ alors : $f^{-1}(0) = \alpha$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ f^{-1}(x) \leq \alpha$

et puisque : $\alpha < 0$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^-)\ f^{-1}(x) < 0$

Exercice 7

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ par:

$f(x) = \tan^2(x) - 2\sqrt{3}\tan(x)$

1) Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J que l'on déterminera.

2) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

profsalm.blogspot.com

Solution

1) La fonction f est continue et dérivable sur I et on a pour tout x de I :

$$f'(x) = 2(1+\tan^2(x))\tan(x) - 2\sqrt{3}(1+\tan^2(x))$$
$$= 2(1+\tan^2(x))(\tan(x) - \sqrt{3})$$

Et puisque : $(\forall x \in I)\ \tan(x) - \sqrt{3} \leq 0$ $\left(I = \left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]\right)$

Alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$

Par suite la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I

D'où f est une bijection de I vers l'intervalle :

$$J = f(I) = \left[f\left(\frac{7\pi}{3}\right), f(2\pi)\right] = [-3;0]$$

2) Soient x un élément de $J = [-3;0]$ et y un élément de $I = \left[2\pi, \frac{7\pi}{3}\right]$

On a : $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$$\iff \tan^2(y) - 2\sqrt{3}\tan(y) = x$$

$$\iff (\tan(y) - \sqrt{3})^2 = x + 3$$

$$\iff \tan(y) - \sqrt{3} = \sqrt{x+3} \text{ ou } \tan(y) - \sqrt{3} = -\sqrt{x+3}$$

$$\iff \tan(y) - \sqrt{3} = -\sqrt{x+3} \text{ (car } (\forall y \in I)\ \tan(y) - \sqrt{3} \leq 0)$$

$$\iff \tan(y) = \sqrt{3} - \sqrt{x+3}$$

$$\iff \tan(y - 2\pi) = \sqrt{3} - \sqrt{x+3}$$

$$\iff y - 2\pi = Arctan(\sqrt{3} - \sqrt{x+3}) \text{ (car } (y - 2\pi) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)$$

$$\iff y = 2\pi + Arctan(\sqrt{3} - \sqrt{x+3})$$

Donc : $(\forall x \in J)\ f^{-1}(x) = 2\pi + Arctan(\sqrt{3} - \sqrt{x+3})$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (E_1): $Arctan(2x) = \frac{4\pi}{7}$

2) (E_2): $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{\pi}{4}$

3) (E_3): $Arc\tan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2Arctan(x)$

Solution

1) On a : $\frac{4\pi}{7} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Donc l'équation (E_1) n'a pas de solution.

2) • On a : $(E_2) \Rightarrow \tan\left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{3}{2}x\right)\right) = 1$

$$\Rightarrow \frac{x + \frac{3}{2}x}{1 - x.\frac{3}{2}x} = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = \frac{1}{3}$

• Est-ce que le nombre (-2) est une solution de l'équation (E_2) ?

On a: $Arctan(-2) + Arctan\left(-\frac{6}{2}\right) = -(Arctan(2) + Arctan(3)) < 0$

Donc : $Arctan(-2) + Arctan\left(-\frac{6}{2}\right) \neq \frac{\pi}{4}$

Par suite, le nombre (-2) n'est pas une solution de l'équation (E_2)

• Est-ce que le nombre $\frac{1}{3}$ est une solution de l'équation (E_2) ?

On a : $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

et on a : $\tan\left(Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

et puisque : $0 < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < Arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$

Alors : $0 < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire : $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire : $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$

Et puisque : $k \in \mathbb{Z}$, alors : $k = 0$

Par suite : $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Donc le nombre $\frac{1}{3}$ est une solution de l'équation (E_2)

Conclusion :

L'ensemble de solutions de l'équation (E_2) est : $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

3) • Soit x un élément de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

On a : $(E_3) \Rightarrow \begin{cases} \tan\left(Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right) = \tan(2Arctan(x)) \\ -\frac{\pi}{2} < 2Arctan(x) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan(Arctanx)}{1-\tan^2(Arctanx)} \\ -\frac{\pi}{4} < Arctan(x) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

• Est-ce que tout nombre compris entre -1 et 1 est une solution de l'équation (E_3) ?

Soit x un élément de l'intervalle $]-1;1[$

On pose : $t = Arctan(x)$, on a : $t \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$

et $Arc\tan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = Arctan\left(\frac{2\tan(t)}{1-\tan^2(t)}\right)$

$= Arctan(\tan(2t))$

Et puisque : $t \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, alors : $2t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

Par suite : $Arctan(\tan(2t)) = 2t$

Donc : $Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2t = 2Arctan(x)$

D'où : $(\forall x \in]-1;1[)\ Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2Arctan(x)$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de l'équation (E_3) est : $S =]-1;1[$

Exercice 9

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ telle que : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ et $f(\pi) > 1$

Montrer qu'il existe un élément unique c de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que : $f(c) = (2c-1)\cos(c)$

Solution

profsalm.blogspot.com

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ par :

$g(x) = f(x) - (2x-1)\cos(x)$

La fonction g est continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle, d'autre part, pour tous a et b de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ on a :

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ (car f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$)

et: $a < b \Rightarrow 2a-1 < 2b-1$

et: $a < b \Rightarrow \cos(a) > \cos(b)$ (car la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$)

Donc : $a < b \Rightarrow f(a) - (2a-1)\cos(a) < f(b) - (2b-1)\cos(b)$

$\Rightarrow g(a) < g(b)$

D'où la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

par suite, g est une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ vers l'intervalle

$g\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(\pi)\right] = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi) + 2\pi - 1\right]$

et puisque : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

et $f(\pi)+2\pi-1>0$ (car $f(\pi)>1$)

Alors : $0\in g\left(\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\right)$

Par suite, il existe un élément unique c de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ tel que : $g(c)=0$

c'est-à-dire : $f(c)=(2c-1)\cos(c)$

d'autre part, on a : $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ et $g(\pi)\neq 0$

Donc : $c\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

Conclusion :

Il existe un élément unique c de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que : $f(c)=(2c-1)\cos(c)$

Exercice 10

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & ;x>3 \\ f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+3} & ;0\le x\le 3 \\ f(x)=\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} & ;x<0 \end{cases} \quad \text{où } (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction f soit continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=0 \text{ (car } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+2)=+\infty\text{)}$$

2) • En utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions continues, montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles :

$\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$; $[0;3]$ et $]3,+\infty[$

Par suite, f est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ si et seulement si elle est continue à gauche en 0 et à droite en 3

• On a : $f(0)=\dfrac{a\times 0+b}{0^2+3}=\dfrac{b}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan(x)-\tan(x)\cos(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan(x)}{x}\cdot\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Donc, f est continue à gauche en 0 si et seulement si : $\frac{b}{3}=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire, si et seulement si : $b=\frac{3}{2}$

• On a : $f(3)=\frac{3a+b}{12}=\frac{3a+\frac{3}{2}}{12}$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$

Donc, f est continue à droite en 3 si et seulement si : $\frac{3a+\frac{3}{2}}{12}=\frac{1}{4}$

C'est-à-dire, si et seulement si : $12a+6=12$

C'est-à-dire, si et seulement si : $a=\frac{1}{2}$

Conclusion :

f est continue sur $]-\frac{\pi}{2},+\infty[$ si et seulement si : $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{3}{2}$

Exercice 11

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x)=\sqrt{Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f

2) Montrer que f est continue sur D

3) a- Montrer que f est une bijection de D vers un intervalle I que l'on déterminera.

b- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de I

c- En déduire que : $(\forall x\in D)\ f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}-Arctan(x)}$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}$

Solution

1) On a : $D=\left\{x\in\mathbb{R}/\,1+x\neq 0 \text{ et } Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\geq 0\right\}$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}/\,x\neq -1 \text{ et } \frac{1-x}{1+x}\geq 0\right\}$$

Etudier le signe de $\frac{1-x}{1+x}$ et en déduire que : $D=]-1;1]$

2) La fonction $x\mapsto\frac{1-x}{1+x}$ est continue sur D

Donc la fonction $x\mapsto Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ est aussi continue sur D

Et puisque : $Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\geq 0$ pour tout x de D

Alors la fonction f est continue sur D

3) a- Soient a et b deux éléments de D, on a :

$a < b \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} > \frac{1-b}{1+b}$ (car la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$)

$\Rightarrow Arctan\left(\frac{1-a}{1+a}\right) > Arctan\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$ (car la fonction $x \mapsto Arctan(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow f(a) > f(b)$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur D, et puisque f est continue sur D alors f est une bijection de $D =]-1;1]$ vers l'intervalle :

$$I = f(]-1;1]) = \left[f(1), \lim_{x \to (-1)^+} f(x)\right[= \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$$

b- Soient x un élément de $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ et y un élément de $]-1;1]$

On a : $f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{Arc\tan\left(\frac{1-y}{1+y}\right)} = x$$

$$\Longleftrightarrow Arctan\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \tan(x^2) = \frac{1-y}{1+y}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{1-\tan(x^2)}{1+\tan(x^2)}$$

$$\Longleftrightarrow y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$$

Donc : $\left(\forall x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[\right)\ f^{-1}(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$

c- Soient x un élément de $]-1;1]$ et y un élément de $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$

On a : $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$\Longleftrightarrow x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right)$$

Et puisque : $0 \leq y < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ alors : $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - y^2 \leq \frac{\pi}{4}$

Par suite : $x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right) \Longleftrightarrow Arc\tan(x) = \frac{\pi}{4} - y^2$

$$\Longleftrightarrow y^2 = \frac{\pi}{4} - Arctan(x)$$

$$\Longleftrightarrow y = \sqrt{\frac{\pi}{4} - Arc\tan(x)}$$ (car $y \geq 0$)

profsalm.blogspot.com

Donc : $(\forall x \in]-1;1])\ f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4} - Arctan(x)}$

4) On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{4} - Arctan(x)}}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(-\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4} - Arctan(x)}{(1-x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{\frac{Arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} \cdot \frac{1}{1-x}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{Arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{Arctan(x) - Arctan(1)}{x-1}$

$$= Arctan'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -\infty$

Exercice 12

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\left]\frac{2n}{n+1}, 2\right[$

Solution

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $g'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1}$

$$= [(n+1)x - 2n]x^{n-1}$$

D'où le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		1		$\frac{2n}{n+1}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↘	$g\left(\frac{2n}{n+1}\right)$	↗	1	↗	$+\infty$

2) • La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}, 2\right]$

• On a : $\frac{2n}{n+1} > 1$ et g est strictement décroissante sur $\left[1, \frac{2n}{n+1}\right]$

Donc : $g\left(\frac{2n}{n+1}\right) < g(1)$

et puisque : $g(1) = 0$ alors : $g\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

et puisque : $g(2) > 0$ (car $g(2) = 1$) alors : $g\left(\frac{2n}{n+1}\right) \times g(2) < 0$

Par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]\frac{2n}{n+1}, 2\right[$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur le segment $[-1;1]$

Montrer qu'il existe au moins un élément c de $]-1;1[$ tel que : $f(c) = \frac{2c}{c^2-1}$

Solution

On remarque que : $f(c) = \frac{2c}{c^2-1} \Leftrightarrow (c^2-1)f(c) - 2c = 0$

Pour cela, on va considérer la fonction g définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par :

$g(x) = (x^2-1)f(x) - 2x$

La fonction g est continue sur $[-1;1]$ car les fonctions f et $x \mapsto x^2-1$ et $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[-1;1]$

et on a: $g(1) = -2$ et $g(-1) = 2$

donc : $g(1) \times g(-1) < 0$

Par suite d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un élément c de $]-1;1[$ tel que : $g(c) = 0$

Par suite : $(\exists c \in]-1;1[)\ f(c) = \frac{2c}{c^2-1}$

Exercice 14

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x| Arctan(2x)$

1) Etudier la parité de la fonction g

2) a- Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

b- Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

c- Montrer que la fonction réciproque g^{-1} est impaire.

3) On considère la fonction numérique h_n définie par :

$h_n(x) = \sqrt[n]{g^{-1}(1-x^2)} - x^n$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

a- Montrer que l'ensemble de définition de la fonction h_n est $[-1;1]$

b- Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $]0;1[$

4) a- Montrer que pour tout x de $]0;1[$ on a : $\sqrt[n+1]{x} > \sqrt[n]{x}$ et $g(1) > 1$

b- En déduire que : $h_{n+1}(x) > h_n(x)$ pour tout x de $]0;1[$

c- Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ x_n < x_{n+1}$

Solution

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (-x) \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$

Donc la fonction g est impaire

2) a- Montrer que : $(\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2)\ \ a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$

Et en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

b- • Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

• La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et puisqu'elle est impaire et continue sur $\mathbb{R}$ alors elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

• En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R})$, puis montrer que : $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

c- Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, on a :

$$g^{-1}(-x) = y \Longleftrightarrow -x = g(y)$$
$$\Longleftrightarrow x = -g(y)$$
$$\Longleftrightarrow x = g(-y) \text{ (car } g \text{ est impaire)}$$
$$\Longleftrightarrow g^{-1}(x) = -y$$
$$\Longleftrightarrow -g^{-1}(x) = y$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g^{-1}(-x) = -g^{-1}(x)$

Par suite, la fonction g^{-1} est impaire.

3) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$x \in D_{h_n} \Longleftrightarrow g^{-1}(1-x^2) \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow 1 - x^2 \geq g(0) \ (g \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R})$$
$$\Longleftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Donc : $D_{h_n} = [-1;1]$

b- • La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur $[-1;1]$ et g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction $x \mapsto g^{-1}(1-x^2)$ est continue sur $[-1;1]$

Et puisque cette fonction est positive sur $[-1;1]$

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{g^{-1}(1-x^2)}$ est continue sur $[-1;1]$

Donc : la fonction h_n est continue sur $[-1;1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle, par suite, la fonction h_n est continue sur $[0;1]$

• Montrer que $(\forall (a;b)\in([0;1])^2)\ a<b\Rightarrow h_n(a)>h_n(b)$

Et en déduire que h_n est strictement décroissante sur $[0;1]$

• On a : $h_n(0)=\sqrt[n]{g^{-1}(1)}$ et $h_n(1)=\sqrt[n]{g^{-1}(0)}-1=0-1=-1$

Donc : $h_n(0)\times h_n(1)<0$

Par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_n(x)=0$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $]0;1[$

4) a- • Soit x un élément de $]0;1[$, on a :

$(\sqrt[n]{x})^{n(n+1)}=((\sqrt[n]{x})^n)^{n+1}=x^{n+1}$

et $(\sqrt[n+1]{x})^{n(n+1)}=((\sqrt[n+1]{x})^{n+1})^n=x^n$

Et puisque : $x^{n+1}<x^n$ (car $x\in]0;1[$)

Alors : $(\sqrt[n]{x})^{n(n+1)}<(\sqrt[n+1]{x})^{n(n+1)}$

Par suite : $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n+1]{x}$

• On a : $g(1)=Arctan(2)$

Et puisque : $2>\sqrt{3}$ alors $Arctan(2)>Arctan(\sqrt{3})$

C'est-à-dire : $Arctan(2)>\frac{\pi}{3}$

Et puisque : $\frac{\pi}{3}>1$ alors $g(1)>1$

b- La fonction $u:x\mapsto g^{-1}(1-x^2)$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$

Donc : $u(]0;1[)=]u(1);u(0)[$

$=]g^{-1}(0);g^{-1}(1)[$

$=]0;g^{-1}(1)[$

Et puisque $1<g(1)$ alors : $g^{-1}(1)<1$

D'où : $u(]0;1[)\subset]0;1[$

C'est-à-dire : $(\forall x\in]0;1[)\ g^{-1}(1-x^2)\in]0;1[$

D'où : $(\forall x\in]0;1[)\ \sqrt[n+1]{g^{-1}(1-x^2)}>\sqrt[n]{g^{-1}(1-x^2)}$

et puisque : $(\forall x\in]0;1[)\ -x^{n+1}>-x^n$

alors : $(\forall x\in]0;1[)\ h_{n+1}(x)>h_n(x)$

c- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*-\{1\}$,

On a : $x_n\in]0;1[$ donc : $h_{n+1}(x_n)>h_n(x_n)$

C'est-à-dire : $h_{n+1}(x_n)>0$ (car $h_n(x_n)=0$)

D'où : $h_{n+1}(x_n)>h_{n+1}(x_{n+1})$ (car $h_{n+1}(x_{n+1})=0$)

Et puisque la fonction h_{n+1} est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$

Alors : $x_n<x_{n+1}$

profsalm.blogspot.com

Exercice 15

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$

1) Calculer u_2 et u_3

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

4) On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b- Calculer u_n en fonction de n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

c- Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n}$

5) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
$a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Solution

1) • On a : $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_0}\right)$

Et puisque $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$ alors $u_2 = \frac{2}{3}$

• Montrer que : $u_3 = \frac{4}{5}$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$

•On a : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ (car $u_0 = \frac{1}{2}$)

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• On a : $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1$ (car $u_1 = 1$)

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

On suppose que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ et montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq 1$

On a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ donc : $1 \leq \frac{1}{u_n} \leq 2$ et $1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq 2$

Par suite : $2 \leq \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \leq 4$ d'où : $1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right) \leq 2$

c'est-à-dire : $1 \leq \frac{1}{u_{n+2}} \leq 2$ d'où : $\frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq 1$

3) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

•Pour $n=0$ on a : $u_{0+1}=u_1=1$ et $\dfrac{2u_0}{4u_0-1}=\dfrac{1}{2-1}=1$

Donc : $u_{0+1}=\dfrac{2u_0}{4u_0-1}$, par suite, la propriété est vraie pour $n=0$

•Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On suppose que : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{4u_n-1}$ et montrons que : $u_{n+2}=\dfrac{2u_{n+1}}{4u_{n+1}-1}$

On a : $\dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}\right)$

Et puisque : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{4u_n-1}$ alors : $4u_nu_{n+1}-u_{n+1}=2u_n$

par suite : $(4u_{n+1}-2)u_n=u_{n+1}$ d'où : $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{4u_{n+1}-2}{u_{n+1}}$

donc : $\dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{4u_{n+1}-2}{u_{n+1}}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{4u_{n+1}-1}{2u_{n+1}}$$

D'où : $u_{n+2}=\dfrac{2u_{n+1}}{4u_{n+1}-1}$

4) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{4}{3}$

$$=\frac{4u_n-1}{2u_n}-\frac{4}{3}=2-\frac{1}{2u_n}-\frac{4}{3}=\frac{-1}{2u_n}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=-\dfrac{1}{2}$

b- • Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $v_n=\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{4}{3}$, donc : $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{4}{3}+v_n$

D'où : $u_n=\dfrac{3}{4+3v_n}$

Et puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de premier terme :

$v_0=\dfrac{1}{u_0}-\dfrac{4}{3}=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$

alors : $v_n=v_0q^n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

par suite : $u_n=\dfrac{3}{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

•On a : $u_n=\dfrac{3}{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et puisque : $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{4}$

c- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

$$= \left(v_1 + \frac{4}{3}\right) + \left(v_2 + \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(v_n + \frac{4}{3}\right)$$

$$= (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + \frac{4n}{3}$$

Et puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$

alors : $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = \frac{4n}{3} - \frac{2}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

5) • Remarquons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{2x}{4x-1}$

• Montrons par récurrence que : $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- On a : $a_0 = u_0 = \frac{1}{2}$ et $a_1 = u_2 = \frac{2}{3}$

Donc : $a_0 \leq a_1$

- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que $a_n \leq a_{n+1}$, et montrons que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

On a : $a_n \leq a_{n+1}$ et la fonction fof est croissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition

Donc : $(fof)(a_n) \leq (fof)(a_{n+1})$

Et puisque : $(fof)(a_n) = f(f(a_n)) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = a_{n+1}$

et $(fof)(a_{n+1}) = a_{n+2}$ alors : $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

par suite, la suite (a_n) est croissante.

• On utilise la même méthode pour montrer que la suite (b_n) est décroissante.

• Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n+1} - u_{2n})$

Et puisque la suite (u_n) est convergente $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{4}\right)$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$

par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

Conclusion :
les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes car (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

Exercice 16

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x)\,; 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1) a- Montrer que la fonction g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b- Montrer que la fonction g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2) Montrer que : $(\exists c \in]0; +\infty[)\ f'(c) = 0$ (on peut appliquer le théorème de Rolle sur la fonction g dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

3) On suppose que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $(\forall x \in [0, +\infty[)\ f''(x) \neq 0$

Montrer que le nombre c est unique.

Solution

profsalm.blogspot.com

1) a- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset [0, +\infty[$

Et puisque f est continue sur $[0, +\infty[$

alors la fonction $x \longmapsto f(\tan(x))$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, par suite la fonction g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

D'autre part, on a : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan(x)) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Donc la fonction g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

par suite, la fonction g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b- Écrire une rédaction similaire pour montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2) La fonction g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a: $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe α de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $g'(\alpha) = 0$ c'est-à-dire : $(1 + \tan^2(\alpha))f'(\tan(\alpha)) = 0$

donc : $\left(\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) f'(\tan(\alpha)) = 0$

par suite, si on pose $c = \tan(\alpha)$, il existe c de $]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

3) • On va utiliser un raisonnement par l'absurde

Supposons qu'il existe un autre nombre d de $]0; +\infty[$ tel que $d > c$ et $f'(d) = 0$

On a : f' est continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$ et $f'(c) = f'(d)$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe β de $]c, d[$ tel que $f''(\beta) = 0$, et ceci contredit le fait que $f''(x) \neq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

• On peut refaire la même démonstration dans le cas $d < c$

Conclusion :

Le nombre c est unique.

Exercice 17

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_{n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Monter que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$ et $0 < b_n < a_n$

2) Etudier la monotonie de chacune des deux suites (a_n) et (b_n)

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

4) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis en déduire qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite commune.

Solution

1) • Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n b_n}{a_{n+1}}$

$$= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)}$$

$$= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}$$

•Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < b_n < a_n$

* Pour $n = 0$ on a : $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$

Donc : $0 < b_0 < a_0$

* Soit n un élément de $\mathbb{N}$, supposons que $0 < b_n < a_n$ et montrons que $0 < b_{n+1} < a_{n+1}$

On a : $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}$ donc : $a_{n+1}-b_{n+1}>0$

D'où : $b_{n+1}<a_{n+1}$

et on a : $a_n>0$ et $b_n>0$ donc $\dfrac{a_n+b_n}{2}>0$ c'est-à-dire : $a_{n+1}>0$

et comme $b_{n+1}=\dfrac{a_nb_n}{a_{n+1}}$ donc $b_{n+1}>0$

par suite : $0<b_{n+1}<a_{n+1}$

2) • Etudions la monotonie de (a_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a : $a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_n-a_n}{2}$

Et puisque $b_n<a_n$ alors $\dfrac{b_n-a_n}{2}<0$ c'est-à-dire : $a_{n+1}-a_n<0$

par suite, la suite (a_n) est décroissante.

• Etudions la monotonie de (b_n)

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\dfrac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}$

Et puisque $0<b_n<a_n$ alors $\dfrac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}>0$

par suite, la suite (b_n) est croissante.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}\ (a_n-b_n)$

Et puisque $0<a_n-b_n<a_n+b_n$ alors : $\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}<1$

par suite : $\dfrac{1}{2}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}<\dfrac{1}{2}$

Donc : $a_{n+1}-b_{n+1}<\dfrac{1}{2}(a_n-b_n)$

4) • On a vu que la suite (a_n) est décroissante et la suite (b_n) est croissante

• Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0<a_n-b_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (utiliser le résultat de la question précédente)

Et en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$

par suite, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

donc elles sont convergentes et elles ont la même limite.

• On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\ell$

Et puisque : $(\forall n\in\mathbb{N})\ b_{n+1}=\dfrac{a_nb_n}{a_{n+1}}$ alors $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_{n+1}\,b_{n+1}=a_nb_n$

par suite (a_nb_n) est une suite constante de valeur $a_0b_0=2$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_nb_n=2$ et par suite : $\ell^2=2$

d'où : $\ell = \sqrt{2}$ (car $a_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{2}$

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}^* - \{-\sqrt{3}\}$ par :

$$f(x) = Arc\,tan\left(\frac{1}{x}\right) + Arc\,tan\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right)$$

1) Calculer $f(\sqrt{3})$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Vérifier que $(\forall x \in D)\ f'(x) = 0$

3) Montrer que :

$(\forall x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]0; +\infty[) f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $(\forall x \in]-\sqrt{3}; 0[)\ f(x) = \frac{-2\pi}{3}$

4) En déduire que : $Arctan\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right) + Arctan\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Solution

1) Vérifier que : $f(\sqrt{3}) = Arc\,tan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + Arc\,tan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

2) En utilisant la formule : $[Arctan(u(x))]' = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$, montrer que :
$(\forall x \in D)\ f'(x) = 0$

3) On a : $(\forall x \in D)\ f'(x) = 0$

donc la fonction f est constante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}; 0[$ et $]0; +\infty[$

par suite : $(\forall x \in]0; +\infty[)\ f(x) = f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ $\quad(\sqrt{3} \in]0; +\infty[)$

et $(\forall x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\ ) f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{3}$

et $(\forall x \in]-\sqrt{3}; 0[)\ \ f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{2\pi}{3}$

4) On a : $f(2) = Arc\,tan\left(\frac{1}{2}\right) + Arc\,tan\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)$

et $f(-2) = Arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}-1}{-2+\sqrt{3}}\right)$

$= -Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}\right)$

Donc : $f(2)+f(-2)=Arc\tan\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)+Arc\,tan\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}\right)$

or $f(2)=\frac{\pi}{3}$ car $2\in]0;+\infty[$ et $f(-2)=\frac{\pi}{3}$ car $-2\in]-\infty;-\sqrt{3}[$

donc : $Arc\,tan\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)+Arc\,tan\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{3}$

Exercice 19

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-1+\sqrt{x-Arc\,tan(x)}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ x-\frac{x^3}{3}\leqslant Arctan(x)\leqslant x$

2) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}^+$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

5) a- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b- Étudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur l'intervalle J

c- Soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$

Montrer que : $(f^{-1})'(0)=2\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$

Solution

1) Montrer que la fonction $u:x\longmapsto Arctan(x)-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en montrant que $(\forall x\in\mathbb{R})\ u'(x)\leqslant 0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ u(x)\leqslant u(0)$

c'est-à-dire : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)Arctan(x)-x\leq 0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ Arctan(x)\leqslant x$

- Montrer que la fonction $v:x\longmapsto Arctan(x)-x+\frac{x^3}{3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en montrant que $(\forall x\in\mathbb{R})v'(x)\geqslant 0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ v(x)\geqslant v(0)$

puis, en déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ Arctan(x)\geqslant x-\frac{x^3}{3}$

2) • Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a : $x \in D_f \Longleftrightarrow x - Arctan(x) \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow u(x) \leqslant 0$

$\Longleftrightarrow u(x) \leq u(0)$

$\Longleftrightarrow x \geqslant 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^+$

• Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) • On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x - Arctan(x)}}{x}$

Et puisque: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ 0 \leqslant x - Arctan(x) \leqslant \dfrac{x^3}{3}$ (d'après le résultat de la question 1)

alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ 0 \leqslant \dfrac{\sqrt{x - Arctan(x)}}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{3}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{3} = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x - Arc\tan x}}{x} = 0$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

par suite, la fonction f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = 0$

• **Interprétation géométrique :**

La représentation graphique de la fonction f admet à droite au point $A(0;-1)$ une demi-tangente horizontale.

4) La fonction $x \longmapsto x - Arc\tan(x)$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x - Arc\tan(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

par suite la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{x - Arc\,tan(x)}} = \dfrac{x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x - Arc\tan(x)}}$

5) a- Il est évident que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Et puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$, alors f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers l'intervalle : $J = f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= [-1; +\infty[$

b- • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) f'(x) \neq 0$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}^{+*}) =]-1; +\infty[$

• On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-1)}{x+1}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{f(t)-f(0)}$ (on a posé $f^{-1}(x)=t$)

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}}$$

$$=+\infty$$

(car $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=0^+$ d'après le résultat de la question 3)

donc la fonction f^{-1} n'est pas dérivable à droite en (-1)

c- On a : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

$$=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{2(1+\alpha^2)\sqrt{\alpha-Arc\tan(\alpha)}}{\alpha^2}$$

Et puisque $f(\alpha)=0$ alors $\sqrt{\alpha-Arc\,tan(\alpha)}=1$

par suite : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{2(1+\alpha^2)}{\alpha^2}=2\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

Exercice 20

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un segment $[a,b]$ telle que : $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

1) Montrer qu'il existe deux nombres c et d tels que : $a<c<\dfrac{a+b}{2}<d<b$ et $f'(c)=f'(d)$

2) En déduire qu'il existe au moins un nombre α de $]a,b[$ tel que $f''(\alpha)=0$

Solution

1) La fonction f est dérivable sur $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$

Donc elle est continue sur $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$

Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$\left(\exists c\in\left]a,\frac{a+b}{2}\right[\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)=\left(\frac{a+b}{2}-a\right)f'(c)$$

c'est-à-dire : $\left(\exists c\in\left]a,\dfrac{a+b}{2}\right[\right)f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

• De la même façon, on montre qu'il existe un nombre d de $\left]\dfrac{a+b}{2},b\right[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(d)$

donc il existe deux nombres c et d tels que $a<c<\dfrac{a+b}{2}<d<b$ et $f'(c)=f'(d)$

profsalm.blogspot.com

2) La fonction f' est continue et dérivable sur $[c,d]$ (car elle est deux fois dérivable sur $[a,b]$)
et on a : $f'(c) = f'(d)$
Donc d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]c,d[)\ f''(\alpha) = 0$
par suite $(\exists \alpha \in]a;b[)\ f''(\alpha) = 0$

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Arc\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{+*}) Arc\tan(t) + Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x)$

3) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$

a- Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle que l'on déterminera.

b- Montrer que la fonction g^{-1} est définie par : $\begin{cases} g^{-1}(x) = \frac{1}{\tan(2x)} ; x \in]0;\frac{\pi}{4}[\\ g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$

c- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} Arc\tan(x)$

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2} - x) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{t\to+\infty} Arc\tan(t) = \frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2} + x) = +\infty$)

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan(\sqrt{1+x^2} + x) = Artcan(0) = 0$ (car la fonction $Arc\,tan$ est continue en 0)

2) a- Soit t un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - Arctan(t)\right) = \frac{1}{\tan(Arctan(t))} = \frac{1}{t}$ (car $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$)

et comme $0 < \frac{\pi}{2} - Arctan(t) < \frac{\pi}{2}$ car : $0 < Arctan(t) < \frac{\pi}{2}$

alors $\frac{\pi}{2} - Arc\tan(t) = Arc\tan\left(\frac{1}{t}\right)$

c'est-à-dire : $Arc\,tan(t) + Arc\,tan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

b- Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $f(-x) = Arctan(\sqrt{1+x^2}+x)$

$$= Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$$

et puisque $1+x^2 > x^2$ alors : $\sqrt{1+x^2} > |x|$

et comme $|x| \geqslant x$ alors : $\sqrt{1+x^2} > x$

c'est-à-dire : $\sqrt{1+x^2}-x > 0$

donc : $f(-x) = \frac{\pi}{2} - Arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$ (d'après le résultat de **2) a-**)

$$= \frac{\pi}{2} - f(x)$$

3) a- • La fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$

donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

et par suite sa restriction g à $\mathbb{R}^+$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

• Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a : $a < b \Rightarrow \sqrt{1+a^2}+a < \sqrt{1+b^2}+b$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^2}+a} > \frac{1}{\sqrt{1+b^2}+b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^2}-a > \sqrt{1+b^2}-b$$

$$\Rightarrow Arc\tan(\sqrt{1+a^2}-a) > Arc\tan(\sqrt{1+b^2}-b)$$

$$\Rightarrow g(a) > g(b)$$

donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (on peut trouver le même résultat en calculant la derivée de g).

• De ce qui précède, on conclut que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers

$g(\mathbb{R}^+) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$

b- Soient x un élément de $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ et y un élément de $\mathbb{R}^+$, on a :

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$

$$\Leftrightarrow x = Arctan(\sqrt{1+y^2}-y)$$

$$\Leftrightarrow y + \tan(x) = \sqrt{1+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2y\tan(x) + \tan^2(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-\tan^2(x)}{2\tan(x)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{1}{\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{1}{\tan(2x)} \end{cases}$$

donc : $\begin{cases} g^{-1}(x) = \frac{1}{\tan(2x)} ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$

c- • Soient x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et y un élément de $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$,

on a : $f(x) = y \Leftrightarrow g(x) = y$

$\Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan(2y)}$

$\Leftrightarrow \tan(2y) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 2y = Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (car $2y \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$)

$\Leftrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$ (car $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$)

$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(x)$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(x)$

• Soit x un élément de $\mathbb{R}^{-*}$, on a : $f(x) = \frac{\pi}{2} - f(-x)$ (d'après **2) b-**)

$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(-x)\right)$ (car $(-x) \in \mathbb{R}^{+*}$)

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(x)$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}) f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(x)$

• On a : $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(0) = \frac{\pi}{4}$

donc : $f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(0)$

Conclusion :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Arctan(x)$

Exercice 22

On admet que : $(\forall (x;y;z) \in (\mathbb{R}^{+})^3)\ (x+y+z)^3 \geqslant 27xyz$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n)$

et $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$ et $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)$

et $0 < w_0 < v_0 < u_0$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n \leq v_n \leq u_n$

2) a- Montrer que les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes.

b- En déduire que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n \leq v_n \leq u_n$

- pour $n = 0$ on a : $w_0 \leq v_0 \leq u_0$
- Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on suppose que : $w_n \leq v_n \leq u_n$

et puisque : $(u_n + v_n + w_n)^3 \geqslant 27 u_n v_n w_n$

alors : $u_n + v_n + w_n \geqslant 3\sqrt[3]{u_n v_n w_n}$

par suite : $\frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \geqslant \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$

et puisque : $\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)^3 \geqslant \frac{27}{u_n v_n w_n}$

alors : $\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{u_n v_n w_n}}$, par suite : $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right) \geqslant \frac{1}{v_{n+1}}$

c'est-à-dire : $\frac{1}{w_{n+1}} \geqslant \frac{1}{v_{n+1}}$, d'où : $w_{n+1} \leq v_{n+1}$

par suite : $w_{n+1} \leq v_{n+1} \leq u_{n+1}$

2) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

- On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) - u_n$

$$= \frac{1}{3}((v_n - u_n) + (w_n - u_n))$$

Et puisque $v_n - u_n \leq 0$ et $w_n - u_n \leq 0$

alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$, par suite, la suite (u_n) est décroissante

- On a : $\frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{w_n} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{w_n}\right)$

Et puisque $w_n \leq u_n$ et $w_n \leq v_n$

alors : $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{w_n} \leq 0$ et $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{w_n} \leq 0$

par suite : $\frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} \leq 0$ donc : $w_{n+1} \geqslant w_n$

par suite, la suite (w_n) est croissante.

- On a : $u_{n+1} - w_{n+1} \leq u_{n+1} - w_n$ (car $w_n \leq w_{n+1}$)

et $u_{n+1}-w_n=\frac{1}{3}((u_n-w_n)+(v_n-w_n))$

et $v_n-w_n\leq u_n-w_n$ (car $w_n\leq v_n\leq u_n$)

Donc : $u_{n+1}-w_n\leq\frac{2}{3}(u_n-w_n)$, par suite, $u_{n+1}-w_{n+1}\leq\frac{2}{3}(u_n-w_n)$

• En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\leq u_n-w_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n(u_0-w_0)$

Et puisque $-1<\frac{2}{3}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(u_0-w_0)=0$, par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=0$

Conclusion :

La suite (u_n) est décroissante, la suite (w_n) est croissante

et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=0$, donc les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes, par suite, elles sont convergentes et ont la même limite ℓ

Et puisque $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n\leq v_n\leq u_n$ alors la suite (v_n) est aussi convergente et sa limite est égale à ℓ

Exercice 23

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\left(\exists!\ x_n\in\left]\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[\right)\tan(x_n)=x_n$

2) a- Déterminer la limite de la suite (x_n)

b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ x_n=(n+1)\pi+Arctan(x_n)$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_n=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-x_n$

a- Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$

Solution

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}$

•Montrer que la fonction $g:x\longmapsto\tan(x)-x$ est une bijection de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[$ vers $\mathbb{R}$

• Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique x_n dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[$

c'est-à-dire $\left(\exists!x_n\in\left]\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[\right)\tan(x_n)=x_n$

2) a- On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ x_n>\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $\tan(x_n) = x_n$

Donc : $\tan(x_n - (n+1)\pi) = x_n$

Et puisque : $(x_n - (n+1)\pi) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ car $\left(x_n \in]\frac{\pi}{2} + n\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[\right)$

alors : $x_n - (n+1)\pi = Arctan(x_n)$

par suite : $x_n = (n+1)\pi + Arctan(x_n)$

3) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - x_n$$

$$= \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - ((n+1)\pi + Arctan(x_n))$$

$$= \frac{\pi}{2} - Arctan(x_n)$$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Arc\tan(x_n) = \frac{\pi}{2}$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Donc la suite (u_n) est convergente et sa limite est égale à 0

b- On sait que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{+*})\ Arctan(t) + Arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $u_n = \frac{\pi}{2} - Arctan(x_n)$ et $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc : $u_n = Arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$

D'où : $nu_n = nArctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{Arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}} \cdot \frac{n}{x_n}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$)

et la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{Arctan(x)}{x}\ ,\ x \neq 0 \text{ est continue en } 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{x_n}\right) = f(0) = 1$

D'autre part, on a : $\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$, donc :

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\pi} < \frac{n}{x_n} < \frac{1}{\frac{\pi}{2n} + \pi}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2n} + \pi} = \frac{1}{\pi}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\pi} = \frac{1}{\pi}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{\pi}$

par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{Arc\tan\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{1}{x_n}}\cdot\frac{n}{x_n}=1\times\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}$

Exercice 24

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x+3-\sqrt{x^2+2x}\ ;\ x\leq -2 \\ f(x)=\dfrac{Arctan(x+2)}{x+2}\ ;\ x>-2 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

b- Montrer que la fonction f est continue en (-2)

2) a- Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en (-2), puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ t-\frac{t^3}{3}\leq Arctan(t)\leq t$

c- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en (-2), puis interpréter géométriquement le résultat.

3) a- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2\}$

b- Étudier les variations de la fonction $h:t\to\frac{t}{1+t^2}-Arctan(t)$ sur $\mathbb{R}$

c- Donner le tableau de variations de la fonction f

4) a- Étudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

b- Montrer que la droite d'équation $y=2x+4$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c- Construire la courbe (C)

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\leq u_n\leq 1$

b- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$

c- Montrer que : $(\forall x\in[0;1])\ |f'(x)\ |\leq\frac{1}{2}$ (On peut utiliser le résultat de la question **3)b-**)

d- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

e- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1) a- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Arctan(x+2)}{x+2}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}Arctan(x+2)=\frac{\pi}{2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3-\sqrt{x^2+2x})=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{x^2+2x}=-\infty$

b- On a : $f(-2)=1$

et $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}x+3-\sqrt{x^2+2x}=1=f(-2)$

Donc f est continue à gauche en (-2)

et on a : $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{Arctan(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{Arctan\,t}{t}=1=f(0)$

Donc f est continue à droite en (-2)

par suite, f est continue en (-2)

2) a- On a : $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{x+2-\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}1-\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}=+\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en (-2)

Interprétation géométrique : la courbe (C) admet au point $A(-2;1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

b- Étudier les variations de chacune des fonctions

$t\longmapsto Arc\tan(t)-t$ et $t\longmapsto Arc\tan(t)-t+\frac{t^3}{3}$ et en déduire que :

$(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ t-\frac{t^3}{3}\le Arctan(t)\le t$

c- On a : $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{Arctan(x+2)-(x+2)}{(x+2)^2}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{Arctant-t}{t^2}$$

Et puisque $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ t-\frac{t^3}{3}\le Arctan(t)\le t$

alors : $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\ -\frac{t}{3}\le\frac{Arctan(t)-t}{t^2}\le0$

par suite $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{Arctant-t}{t^2}=0$ car $\lim\limits_{t\to0^+}-\frac{t}{3}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=0$, donc la fonction f est dérivable à droite en (-2) et on a : $f'_d(-2)=0$

Interprétation géométrique : la courbe (C) admet à droite au point $A(-2;1)$ une demi-tangente horizontale.

3) a- Vérifier que : $\begin{cases} f'(x) = 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \; ; \; x < -2 \\ f'(x) = \dfrac{\dfrac{x+2}{1+(x+2)^2} - Arctan(x+2)}{(x+2)^2} \; ; \; x > -2 \end{cases}$

b- Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R})\; h'(t) = \dfrac{-2t^2}{(1+t^2)^2}$

Donc la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c- On remarque que $(\forall x \in]-2;+\infty[)\; f'(x) = \dfrac{h(x+2)}{(x+2)^2}$

Et puisque $(\forall x \in]-2;+\infty[)\; x+2 > 0$

alors : $(\forall x \in]-2;+\infty[)\; h(x+2) < h(0)$ (car h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$)
par suite : $(\forall x \in]-2;+\infty[)\; f'(x) < 0$

•On a : $(\forall x \in]-\infty;-2[)\; f'(x) = 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Et puisque : $(\forall x \in]-\infty;-2[)\; \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} < 0$

alors $(\forall x \in]-\infty;-2[)\; f'(x) > 0$

d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+\infty \parallel 0$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

4) a- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Donc la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

b- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (2x+4) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+2x} - (x+1)$

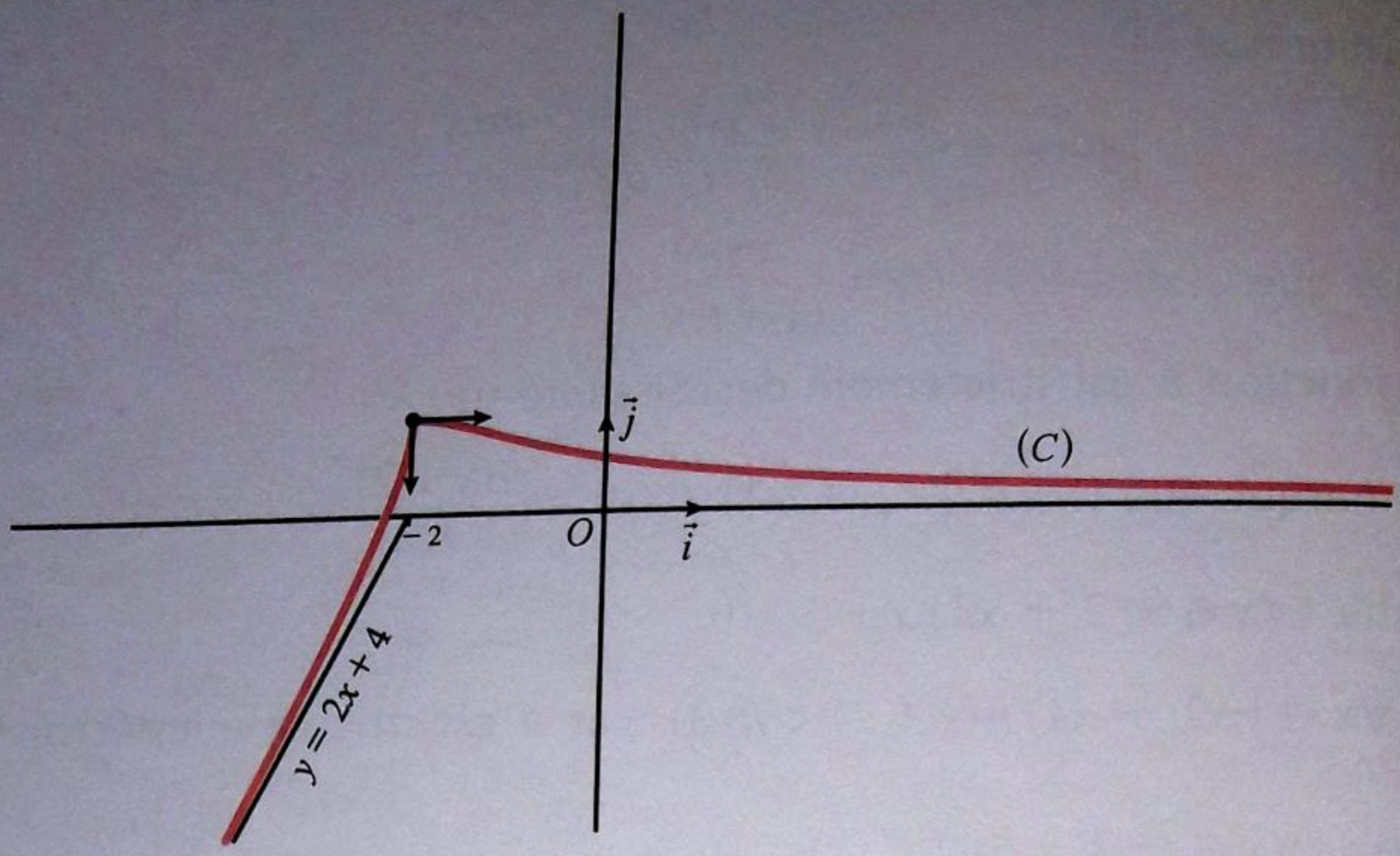
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1-\sqrt{x^2+2x}} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+2x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $y = 2x+4$ est une asymptote oblique à la courbe

profsalm.blogspot.com

(C) au voisinage de $-\infty$



5) a- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$ en utilisant la monotonie de la fonction f sur $[0;1]$

b- Considérer la fonction $g: x \longmapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle est continue et strictement monotone sur $[0;1]$, et puisque $g(0) \times g(1) < 0$ alors l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$ (on a $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ car $g(0) \times g(1) \neq 0$)

c- Soit x un élément de $[0;1]$

On a :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x+2 \leq 3$$

$$\Rightarrow h(3) \leq h(x+2) \leq h(2) \text{ et } \frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{10} - Arctan(3)\right) \leqslant h(x+2) \leqslant \left(\frac{2}{5} - Arctan(2)\right) \text{et } \frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\left(Arctan(2) - \frac{2}{5}\right) \leq -f'(x) \leq \frac{1}{4}\left(Arctan(3) - \frac{3}{10}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant -f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

d- La fonction f est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$

et $(\forall x \in]0;1[) |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

et puisque $\alpha \in [0;1]$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in [0;1]$

alors d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

e- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

et puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$

alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

par suite, la suite (u_n) est convergente et sa limite est égale à α

Exercice 25

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + Arctan(x) - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $0 < x_n < 1$

2) a- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f_{n+1}(x_n) = (x_n)^n(x_n - 1)$

b- En déduire que la suite $(x_n)_{n>0}$ est croissante

3) a- Montrer que la suite $(x_n)_{n>0}$ est convergente

b- On pose : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n \leq \ell$

c- En déduire que : $\ell = 1$

Solution

1) Soit n élément de $\mathbb{N}^*$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $f_n(\mathbb{R}^+) = [-1, +\infty[$

Et puisque $0 \in f_n(\mathbb{R}^+)$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}^+$

Et puisque $f_n(0) \times f_n(1) < 0$ ($f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = \frac{\pi}{4}$)

alors $0 < x_n < 1$

2) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} + Arctan(x_n) - 1$

Et puisque $f_n(x_n) = 0$ alors $Arctan(x_n) - 1 = -(x_n)^n$

Par suite; $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} - (x_n)^n = (x_n)^n(x_n - 1)$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $x_n - 1 < 0$ et $(x_n)^n > 0$ (car $0 < x_n < 1$)

Donc $f_{n+1}(x_n) < 0$ c'est-à-dire $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$

Et puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

alors $x_n < x_{n+1}$, Donc la suite $(x_n)_{n>0}$ est croissante

3) a- La suite $(x_n)_{n>0}$ est croissante et majorée (par le nombre 1)
Donc elle est convergente

b- Démonstration par l'absurde

Supposons qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $x_p > \ell$
Donc $(\forall n \geqslant p)\quad x_n \geqslant x_p > \ell$ (car la suite $(x_n)_{n>0}$ est croissante)
D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq x_p$ c'est-à-dire $\ell \geq x_p$
Et puisque $x_p > \ell$ alors $\ell > \ell$ ce qui est faux
Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n \leq \ell$

c- On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 < x_n < 1$
Donc $0 \leq \ell \leq 1$
Supposons que : $\ell \neq 1$ donc $0 \leq \ell < 1$
Et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 \leq x_n \leq \ell$
alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 \leq (x_n)^n \leq \ell^n$
Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$ car $0 \leq \ell < 1$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - Arctan(x_n)) = 0$ car $(x_n)^n + Arctan(x_n) - 1 = 0$
c'est-à-dire : $1 - Arctan(\ell) = 0$ car la fonction $Arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$
c'est-à-dire : $Arctan(\ell) = 1$
Et puisque $0 \leq \ell < 1$ alors $0 \leq Arctan(\ell) < \frac{\pi}{4}$
Par suite $0 \leq 1 < \frac{\pi}{4}$ ce qui est faux, Donc $\ell = 1$

Exercice 26

On considère la fonction numérique f_n telle que : $f_n(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} x^k$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1) a- Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$

b- Montrer que, pour tout n supérieur à 1, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0;1[$ puis déterminer α_2

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_{n+1}) + (\alpha_{n+1})^{n+1}$ et en déduire que : $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, puis étudier sa convergence

c- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})\ f_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$ et en déduire que :
$(\forall n \geq 2)\ (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

d- Montrer que : $(\forall n \geq 2)\quad \alpha_n \leq \alpha_2 < 1$ et $0 < 2\alpha_n - 1 < (\alpha_2)^{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

Solution

1) a- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (Restriction d'une fonction polynôme à $\mathbb{R}^+$)

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ f'_n(x) = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\quad f'_n(x) > 0$

D'où, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

et on a : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1$

b- • Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ et $f_n(1) \times f_n(0) < 0$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0;1[$

• On a : $f_2(\alpha_2) = 0$ et $\alpha_2 \in]0;1[$

c'est-à-dire : $(\alpha_2)^2 + \alpha_2 - 1 = 0$ et $\alpha_2 \in]0,1[$

D'où : $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} (\alpha_{n+1})^k$

$$= -1 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{n+1})^k + (\alpha_{n+1})^{n+1} = f_n(\alpha_{n+1}) + (\alpha_{n+1})^{n+1}$$

Et puisque $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, alors $f_n(\alpha_{n+1}) = -(\alpha_{n+1})^{n+1}$

Par suite $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$ c'est-à-dire $f_n(\alpha_{n+1}) < f_n(\alpha_n)$

Et puisque la fonction f_n est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, par suite, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

Et puisqu'elle est minorée (par 0) alors elle est convergente

c- • Soit x un élément de $\mathbb{R} - \{1\}$

On a : $(\forall n \geq 2) \sum_{k=1}^{n} x^k = x\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$ ($\sum_{k=1}^{n} x^k$ est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x)

Donc : $(\forall n \geq 2)\ f_n(x) = -1 + \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$

• On a : $(\forall n \geq 2)\ f_n(\alpha_n) = 0$

Donc : $\dfrac{(\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1}{\alpha_n - 1} = 0$

Par suite, $(\forall n \geq 2)\ (\alpha_n)^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

d- • Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, donc $\alpha_n \leq \alpha_2$, et on a : $\alpha_2 \in]0,1[$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ \alpha_n \leq \alpha_2 < 1$

• On a : $(\alpha_n)^{n+1} = 2\alpha_n - 1$

Et puisque $\alpha_n \leq \alpha_2$, alors $0 < (\alpha_n)^{n+1} \leq (\alpha_2)^{n+1}$

Par suite, $0 < 2\alpha_n - 1 \leq (\alpha_2)^{n+1}$

• On a : $0 < \alpha_2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_2)^{n+1} = 0$

Et puisque $\dfrac{1}{2} < \alpha_n \leq \dfrac{1 + (\alpha_2)^{n+1}}{2}$, car $0 < 2\alpha_n - 1 \leq (\alpha_2)^{n+1}$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$

Exercice 27

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \pi - 2Arctan(x)\ ;\ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{\pi x}{Arctan(x)}\ ;\ x < 0 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est continue en 0

2) a- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $Arctan$, montrer que : $(\forall x < 0)\ x < Arctan(x) < \dfrac{x}{1+x^2}$

b- Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0, et interpréter géométriquement les résultats

3) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ Arctan(|x|) + Arctan\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi + 2Arctan(x)) = -2$

d- Étudier les branches infinies de la courbe (C)

4) a- Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

b- Donner la tableau de variations de f et construire la courbe (C)

5) On considère la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kf(k)$

a- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = 2\sum_{k=1}^{n} k\ Arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n \geq (n+1)Arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution

1) On a : $f(0) = \pi$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \pi$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pi = f(0)$, par suite, f est continue en 0

2) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{-*}$

La fonction $Arctan$ est continue sur l'intervalle $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c \in]x, 0[) \quad Arctan(x) - Arctan(0) = (x-0)(Arctan)'(c)$

c'est-à-dire : $(\exists c \in]x, 0[\ Arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$

Et puisque $x < c < 0$, montrer que : $x < Arctan(x) < \frac{x}{1+x^2}$

b- • On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} -2\frac{Arctan(x)}{x} = -2$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -2$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{\pi x}{Arctan(x)} - \pi}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} (-\pi)\frac{Arctan(x)-x}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{Arctan(x)}{x}}$$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ x < Arctan(x) < \frac{x}{1+x^2}$

alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ 0 < \frac{Arctan(x)-x}{x^2} < \frac{-x}{1+x^2}$

En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{Arctan(x)-x}{x^2} = 0$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{Arctan(x)}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

Et puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

Interprétation géométrique :

La courbe (C) admet au point $A(0, \pi)$ deux demi-tangentes, l'une à droite de coefficient directeur (-2) et l'autre à gauche horizontale

3) a- Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b- Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

On a : $\tan\left(Arctan\frac{1}{|x|}\right)=\frac{1}{|x|}$

et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-Arctan|x|\right)=\frac{1}{\tan(Arctan|x|)}=\frac{1}{|x|}$

Et puisque : $0<Arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)<\frac{\pi}{2}$ (car $\frac{1}{|x|}>0$)

et $0<\frac{\pi}{2}-Arctan|x|<\frac{\pi}{2}$ (car $0<Arctan|x|<\frac{\pi}{2}$)

alors : $Arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}-Arctan|x|$

Par suite, $Arctan|x|+Arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}$

c- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\pi+2Arctan(x))=\lim\limits_{t\to+\infty}-t(\pi-2Arctan(t))$ (On a posé : $t=-x$)

$$=\lim_{t\to+\infty}-2t\left(\frac{\pi}{2}-Arctan(t)\right)=\lim_{t\to+\infty}-2tArctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}-2\frac{Arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{y\to0^+}-2\frac{Arctan(y)}{y}=-2$$

d- • On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y=0$

• On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\pi}{Arctan(x)}=-2$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\pi+2Arctan(x))}{Arctan(x)}=\frac{-2}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

Donc la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=-2x+\frac{4}{\pi}$

4) a- Vérifier que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ et que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$

et que $(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\ f'(x)=\frac{\pi}{(Arctan(x))^2}\left(Arctan(x)-\frac{x}{1+x^2}\right)$

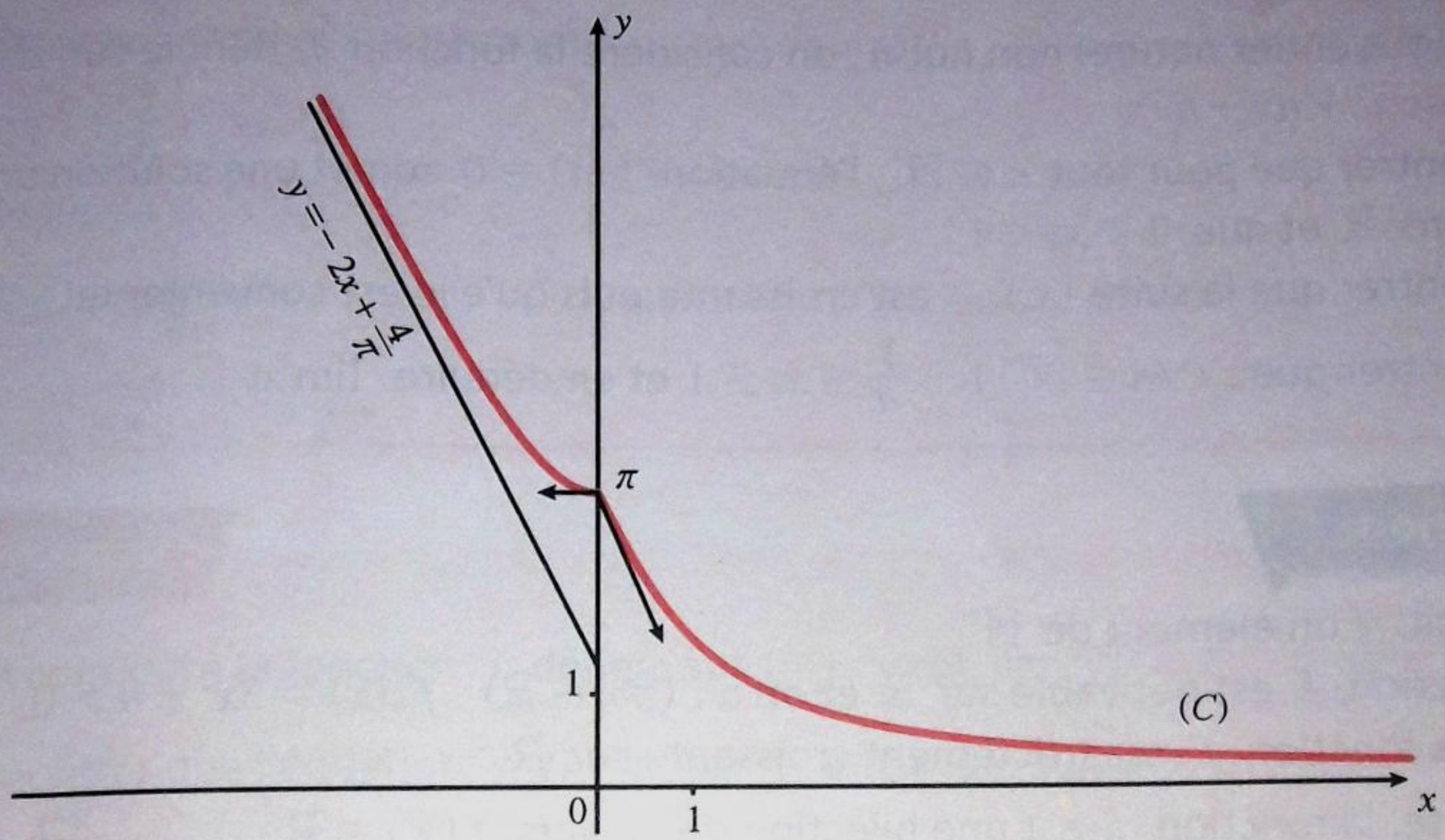
et en déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f'(x)<0$

Donc la fonction f est décroissante sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$

b- • Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 ‖ (-2)	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	π	↘	0

• Construction de la courbe (C) :



5) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} kf(k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(\pi - 2Arctan(k)) = \sum_{k=1}^{n} 2k\left(\frac{\pi}{2} - Arctan(k)\right) = \sum_{k=1}^{n} 2kArctan\left(\frac{1}{k}\right)$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = 2\sum_{k=1}^{n} k\ Arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a : $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{n}$

Donc : $Arctan\left(\frac{1}{k}\right) \geq Arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire : $kArc\tan\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant kArc\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc : $u_n \geq 2\sum_{k=1}^{n} k\ Arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire : $u_n \geq 2Arctan\left(\frac{1}{n}\right).\sum_{k=1}^{n} k$

c'est-à-dire : $u_n \geq 2Arctan\left(\frac{1}{n}\right).\frac{n(n+1)}{2}$

D'où : $u_n \geq n(n+1)Arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)Arctan\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 28

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = x^3 + nx - n$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}$ et que $0 < x_n < 1$

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante puis qu'elle est convergente

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq 1$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Solution

1) • Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'_n(x) = 3x^2 + n > 0$

donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

par suite, la fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Or $0 \in f_n(\mathbb{R})$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $f_n(x_n) = 0$, $f_n(0) = -n$ et $f_n(1) = 1$

Donc : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$

Or la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $0 < x_n < 1$

2) • Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $]0;1[$

On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^3 + (n+1)x - (n+1)) - (x^3 + nx - n)$

$= x - 1$

Donc $(\forall x \in]0;1[)\quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$

et comme $x_{n+1} \in]0;1[$ on a : $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_n(x_{n+1})$

c'est-à-dire : $0 < f_n(x_{n+1})$

donc : $f_n(x_n) < f_n(x_{n+1})$

Or la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $x_n < x_{n+1}$

D'où, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante

• La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée car $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n < 1$, donc elle est convergente

3) • Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $f_n(x_n) = 0$ et $f_n(1) = 1$

et $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^3 + n\left(1-\frac{1}{n}\right) - n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^3 - 1$, d'où : $f_n(1-\frac{1}{n}) < 0$

Donc : $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n(1)$

Or f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $1-\frac{1}{n} < x_n < 1$

• On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1-\frac{1}{n} < x_n < 1$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Exercice 29

1) On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$

a- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

b- Montrer que $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) |f'(x)| \leq \frac{1}{8}$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = f(u_n)$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$ puis que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite

d- Vérifier que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3}

Solution

1) a- On considère la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$

La fonction g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ car somme de deux fonctions continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

profsalm.blogspot.com

La fonction g est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et on a :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)\ g'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1+x}}}{(1+\sqrt{1+x})^2}-1=-\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})^2}+1\right)$$

donc la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, et comme $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

Alors l'équation $g(x)=0$, qui est l'équation $f(x)=x$, admet une solution unique α dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

b- On a : $\left(\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\ f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})^2}$

Soit $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $1\le\sqrt{x+1}\le\sqrt{\frac{3}{2}}$

donc : $4\le(1+\sqrt{1+x})^2\le 9$

par suite : $\frac{1}{9\sqrt{6}}\le\frac{1}{2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^2}\le\frac{1}{8}$

C'est-à-dire : $|f'(x)|\le\frac{1}{8}$

2) a- Montrons par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

- On a : $u_0=\frac{1}{2}$ donc $u_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que : $u_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

donc $f(u_n)\in f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ c'est-à-dire que $u_{n+1}\in f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$

Or f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

donc : $u_{n+1}\in\left[f\left(\frac{1}{2}\right);f(0)\right]$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right]$

Donc : $u_{n+1}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

b- La fonction f est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et on a $\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)|f'(x)|\le\frac{1}{8}$

et comme $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$(\forall n\in\mathbb{N})\ |f(u_n)-f(\alpha)|\le\frac{1}{8}|u_n-\alpha|$

C'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{8}|u_n-\alpha|$

c- • **Montrons par récurrence que :** $(\forall n \in \mathbb{N})\,|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

- On a : $|u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| = \frac{1}{2} - \alpha$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\times 0+1} = \frac{1}{2}$

et comme : $\frac{1}{2} - \alpha < \frac{1}{2}$

donc : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3\times 0+1}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

On a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

C'est-à-dire : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1}$

• **Montrons que la suite (u_n) est convergente**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc la suite (u_n) est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

d- • On a : $|u_3 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3\times 3+1}$ donc : $|\alpha - u_3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

par suite, $|\alpha - u_3| \leq 10^{-3}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \leq 10^{-3}$

donc u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3}

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = Arctan(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x})$

1) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera son domaine de définition J

4) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J

5) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

6) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}^{+*}$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < x_n < 1$

c- Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

d- En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{Arctan(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}{(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}\cdot\dfrac{(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{Arctan(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}{(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{\sqrt[6]{x^5}}\right)\right)$$

et comme : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arctan(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Arctan(t)}{t}=1$

et : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$ et : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt[6]{x^5}}=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

par suite, la fonction f n'est pas dérivable à droite en zéro

2) • Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

La fonction $x\longmapsto\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

et comme la fonction $x\longmapsto Arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

• Calculons $f'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{6}x^{-\frac{5}{6}}}{1+(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})^2}$$

$$=\frac{x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{5}{6}}}{3[1+(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x})^2]}$$

3) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x)>0$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $J=f(\mathbb{R}^+)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

On a : $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}Arctan(t)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $J=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) • On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x)\neq 0$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}^{+*})=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

• D'autre part on a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{-1}(x)}{x}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{f(t)} \qquad \text{(on a posé } t = f^{-1}(x)\text{)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\frac{f(t)-f(0)}{t-0}} = 0$$

$$\text{(car } \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = +\infty \text{ d'après 1)}$$

Donc f^{-1} est dérivable à droite en zéro et $(f^{-1})'_d(0) = 0$

Conclusion :

f^{-1} est dérivable sur $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

5) • Soient $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $y \in [0, +\infty[$, on a :

$$f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$$

$$\iff x = Arctan(\sqrt[3]{y} + 2\sqrt[6]{y})$$

$$\iff \sqrt[3]{y} + 2\sqrt[6]{y} = \tan(x)$$

$$\iff (\sqrt[6]{y})^2 + 2\sqrt[6]{y} + 1 = \tan(x) + 1$$

$$\iff (\sqrt[6]{y} + 1)^2 = 1 + \tan(x)$$

$$\iff \sqrt[6]{y} + 1 = \sqrt{1 + \tan(x)} \qquad \text{(car } \sqrt[6]{y} + 1 > 0\text{)}$$

$$\iff y = (\sqrt{1 + \tan(x)} - 1)^6$$

Donc : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) f^{-1}(x) = (\sqrt{1 + \tan(x)} - 1)^6$

6) a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Comme f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{1}{n} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}^+$

or $f(0) = 0$ donc $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$

b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$f(0) = 0$, $f(x_n) = \frac{1}{n}$ et $f(1) = Arctan(3)$

et comme : $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < Arctan(3)$

Donc: $f(0) < f(x_n) < f(1)$

Or f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $0 < x_n < 1$

c- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ c'est-à-dire : $f(x_{n+1}) < f(x_n)$

Or f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $x_{n+1} < x_n$

par suite, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante (strictement)

d- • La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée (car $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n > 0$)

Donc elle est convergente

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $f(x_n) = \frac{1}{n}$, donc $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \left(\sqrt{1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)^6$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et la fonction tan est continue en 0

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \tan(0) = 0$, et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue à droite en 0

3) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ 2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{1+x^2}$

b- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et dresser le tableau de variations de f

5) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq 1$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c- Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Solution

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x.\frac{Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{Arctan(t)}{t} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Or : $\lim\limits_{x\to 0^+} Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} Arctan(t) = \frac{\pi}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0 = f(0)$

par suite, f est continue à droite en 0

3) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

La courbe représentative de la fonction f admet à droite au point $O(0;0)$ une demi-tangente horizontale

4) a- Considérons la fonction $g : x \longmapsto 2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad g'(x) = 2\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,

Donc : $g(\mathbb{R}^{+*}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right[=]0;\pi[$

par suite, $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g(x) > 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ 2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{1+x^2}$

b- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = 2xArctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= x\left(2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}\right)$$

Or $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ 2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{1+x^2}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) > 0$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

5) a- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_n \le 1$

- On a : $u_0 = 1$ donc $0 \le u_0 \le 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$

et comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$

Or $\frac{\pi}{4} \leq 1$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

b- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq u_n$

• On a : $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{\pi}{4}$

Donc : $u_1 \leq u_0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_{n+1} \leq u_n$

et comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

C'est-à-dire : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

c- • La suite (u_n) est décroissante, et elle est minorée (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 0$)

Donc elle est convergente

• On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in [0;1]$

et comme f est continue sur $[0,1]$ et $f([0,1]) \subset [0,1]$ (car $f([0,1]) = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$) et la suite (u_n) est convergente

Alors la limite de (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0,1]$

On a : $f(x) = x \iff x = 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = x \end{cases}$

$\iff x = 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Or l'équation $Arctan(t) = t$ admet une solution unique qui est $t = 0$

Donc : $f(x) = 0 \iff x = 0$

par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{Arctan(x)}{x^2+1} \ ; \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 Arctan\left(\frac{1}{x}\right) \ ; \ x < 0 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

Partie 1 :

1) Montrer que f est continue en zéro

2) Étudier la dérivabilité de f en zéro et interpréter le résultat géométriquemen

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) a- Soit $t \in]-\infty, 0[$, en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $t < Arctan(t) < \dfrac{t}{1+t^2}$

b- En déduire que $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{Arctan(t) - t}{t^2} = 0$

c- Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

partie 2 :

1) a- Étudier les variations de la fonction $u : x \longmapsto 1 - 2xArctan(x)$ sur $\mathbb{R}^+$

b- Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$

2) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x^2+1)^2}$

b- En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ 2Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{x}{1+x^2}$

b- En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$

4- Dresser le tableau de variations de f

5) a- Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

b- Construire la courbe (C)

Partie 3 :

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 \leq u_n \leq 0$

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

2) a- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$

Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $[0, \alpha]$

b- Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 5}$ est décroissante

c- En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite

Solution

Partie 1 :

1) • On a : $f(0) = \dfrac{Arctan(0)}{0^2+1} = 0$

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

par suite, f est continue en 0

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{Arctan(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\right)=1\times 1=1$

Donc f est dérivable à droite en zéro et $f'_d(0)=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}xArctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

Donc f est dérivable à gauche en zéro et $f'_g(0)=0$

et comme $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en zéro

La courbe (C) admet au point $O(0;0)$ deux demi-tangentes, une à gauche horizontale et l'autre à droite de coefficient directeur 1

3) • On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Arctan(x)}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}Arctan(x)=0\times\dfrac{\pi}{2}=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\dfrac{Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{Arctan(t)}{t}=1$

4) a- Soit t un élément de $]-\infty,0[$

La fonction $Arc\tan$ est continue sur $[t,0]$ et dérivable sur $]t,0[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c\in]t,0[)\ Arctan(t)-Arctan(0)=(t-0)Arctan'(c)$

C'est-à-dire : $(\exists c\in]t,0[)\ Arc\tan(t)=\dfrac{t}{1+c^2}$

On a : $t<c<0$, donc $\dfrac{1}{1+t^2}<\dfrac{1}{1+c^2}<1$

D'où : $t<\dfrac{t}{1+c^2}<\dfrac{t}{1+t^2}$ (car $t<0$)

et par suite : $t<Arctan(t)<\dfrac{t}{1+t^2}$

b- De l'inégalité précédente on déduit que :

$(\forall t\in]-\infty;0[)\quad 0<\dfrac{Arctan(t)-t}{t^2}<\dfrac{-t}{1+t^2}$

et comme $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-t}{1+t^2}=0$ alors $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{Arctan(t)-t}{t^2}=0$

c- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{Arctan(t) - t}{t^2} = 0 \text{ (on a posé } t = \frac{1}{x}\text{)}$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

Partie 2 :

1) a- Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ u'(x) = -2\left(Arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right)$

Or $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\quad Arctan(x) \geq 0$ et $\frac{x}{1+x^2} \geq 0$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\quad u'(x) \leq 0$

par suite, la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

b- La fonction u est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc u est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $u(\mathbb{R}^+) = u([0, +\infty[) = \left]\lim_{x \to +\infty} u(x), u(0)\right]$

par suite, u est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty, 1]$

et comme $0 \in]-\infty, 1]$, alors l'équation $u(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}^+$

D'autre part on a : $u\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ et $u(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$

Donc : $u(1) < 0 < u\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ c'est-à-dire : $u(1) < u(\alpha) < u\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

et comme u est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Alors : $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$

2) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\quad f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^2)^2}$

b- Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est celui de $u(x)$

et d'après les résultats des questions **1) a-** et **1) b-**, on a pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$u(x) = 0 \iff x = \alpha$

$u(x) > 0 \iff u(x) > u(\alpha)$

$\iff x < \alpha$

$u(x) < 0 \iff u(x) < u(\alpha)$

$\iff x > \alpha$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{-*}$, donc $\frac{1}{x} < 0$

D'après le résultat de la question **4) a-** (Partie 1),on a :

profsalm.blogspot.com

$$Arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

c'est-à-dire : $Arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{x}{1+x^2}$

et comme : $2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) < Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ car $Arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

Alors : $2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{x}{1+x^2}$

Autre méthode :

Étudier les variations de la fonction : $x \longmapsto 2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}$

b- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ f'(x) = x\left(2Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}\right)$

et d'après le résultat de la question précédente on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ f'(x) > 0$

et par suite, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

4) D'après tout ce qui précède on obtient le tableau suivant des variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 ‖ 1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5) a- • On a : $f(\alpha) = \frac{Arctan(\alpha)}{1+\alpha^2}$

Or : $u(\alpha) = 0$ donc $1 - 2\alpha Arctan(\alpha) = 0$

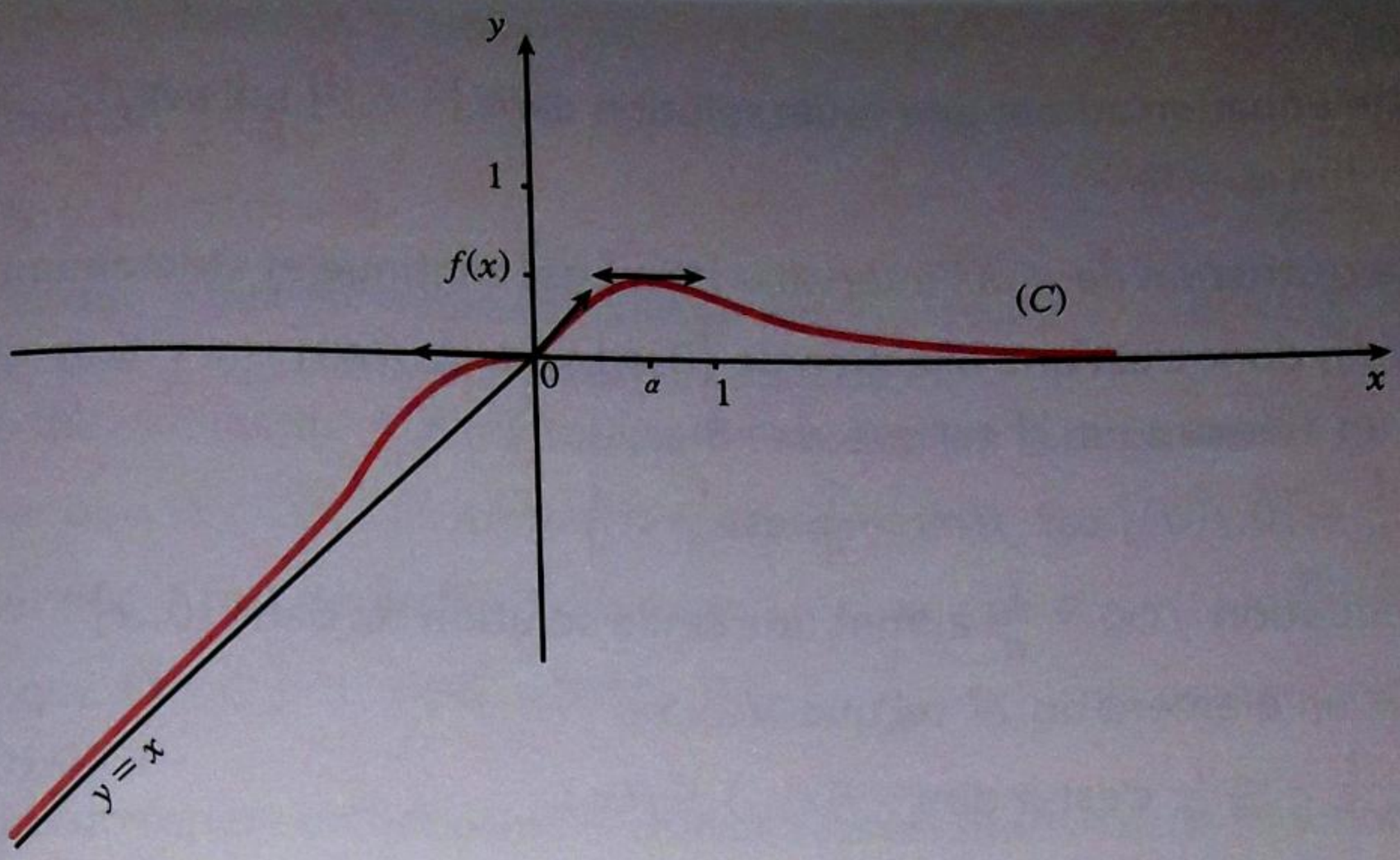
par suite, $Arctan(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$

Donc : $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2\alpha}}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$

• On a : $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$, en déduire que : $\frac{1}{4} < \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4} < f(\alpha) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b-



Partie 3 :

1) a- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 \leq u_n \leq 0$

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = -1$ donc : $-1 \leq u_0 \leq 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $-1 \leq u_n \leq 0$

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

Donc $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{4} \leq u_{n+1} \leq 0$

et comme $-1 < -\frac{\pi}{4}$ donc $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

b- • Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_{n+1}$

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = -1$ et $u_1 = f(u_0) = -\frac{\pi}{4}$

Donc $u_0 \leq u_1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n \leq u_{n+1}$

Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

• Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_{n+1}$

D'où la suite (u_n) est croissante

c- • La suite (u_n) est croissante et majorée (par 0), donc elle est convergente

• On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in [-1,0]$

et comme f est continue sur $[-1,0]$

et $f([-1,0]) = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \subset [-1,0]$

et la suite (u_n) est convergente

Alors la limite de (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervall

$[-1,0]$

Or cette équation admet une seule solution dans $[-1,0]$ qui est 0

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) a- La restriction de f à l'intervalle $[0,\alpha]$ est continue et strictement croissante sur $[0,\alpha]$, donc c'est une bijection de $[0,\alpha]$ vers $[0,f(\alpha)]$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$

On a : $\frac{1}{n} \in [0,f(\alpha)]$ car $f(\alpha) > \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}$

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution x_n dans $[0,\alpha]$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$

On a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ c'est-à-dire : $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$

et comme f est continue et strictement croissante sur $[0,\alpha]$

alors $x_{n+1} \leq x_n$

D'où la suite $(x_n)_{n\geq 5}$ est décroissante

c- • La suite $(x_n)_{n\geq 5}$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$

Comme la restriction g de f à $[0,\alpha]$ est une bijection de $[0,\alpha]$ vers $[0,f(\alpha)]$ et $g(x_n) = \frac{1}{n}$

Alors : $x_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et g^{-1} est continue à droite en 0

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = g^{-1}(0) = 0$

Exercice 33

I) 1) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+)\quad t - \frac{t^3}{3} \leq Arctan(t) \leq t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$

2) En déduire que : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{Arctan(t) - t}{t^2} = 0$

II) On considère la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$g(x) = \frac{x}{2x^2+2x+1} - Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1) Dresser la tableau de variations de la fonction g

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

III) On considère la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x}Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right)-1;\ x>-1\ et\ x\neq 0 \\ f(-1)=\frac{\pi}{2}-1\ et\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) a- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$

b- Montrer que f est continue en zéro et à droite en (-1)

2) Étudier la dérivabilité de f en 0 (utiliser le résultat de la question I) 2))

3) a- Montrer que $(\forall t\in\mathbb{R}^{-*})\quad Arctan(t)+Arctan\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{\pi}{2}$

b- Montrer que f est dérivable à droite en (-1) et que $f'_d(-1)=\frac{\pi}{2}-1$

4- Montrer que $(\forall x\in]-1,+\infty[-\{0\})\quad f'(x)=\frac{1}{x^2}g(x)$ puis dresser le tableau de variations de f

5- Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f (on prend : $\alpha=-0,75$ et $f(\alpha)=0,7$)

Solution

I) 1) • Considérer la fonction $u:t\longmapsto Arctan(t)-t+\frac{t^3}{3}$ et montrer qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$ en calculant sa dérivée

Donc : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad u(t)\geq u(0)$

c'est-à-dire : $Arctan(t)-t+\frac{t^3}{3}\geq 0$

et par suite : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ Arctan(t)\geq t-\frac{t^3}{3}$

• Considérer la fonction $v:t\longmapsto Arctan(t)-t+\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}$ et montrer qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ v(t)\leq v(0)$

et en déduire donc que $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ Arctan(t)\leq t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}$

2) On a : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ t-\frac{t^3}{3}\leq Arctan(t)\leq t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}$

Donc $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\quad -\frac{t}{3}\leq\frac{Arctan(t)-t}{t^2}\leq-\frac{t}{3}+\frac{t^3}{5}$

et comme $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{t}{3}\right)=0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{t}{3}+\frac{t^3}{5}\right)=0$

Alors : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{Arctan(t)-t}{t^2}=0$

II) 1) • La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$

Montrer que : $(\forall x\in]-1,+\infty[)\ g'(x)=\frac{-2x(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$

• Vérifier que $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^+} g(x)=\frac{\pi}{2}-1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=-\frac{\pi}{4}$

D'où le tableau de variations de la fonction g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $\frac{\pi}{2}-1$	↘	$\frac{\pi}{4}-1$	↗	0	↘	$-\frac{\pi}{4}$

2) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$

Donc sa restriction à cet intervalle est une bijection de $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ vers $\left]\frac{\pi}{4}-1,\frac{\pi}{2}-1\right[$

et comme $0\in\left]\frac{\pi}{4}-1,\frac{\pi}{2}-1\right[$

Alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$

3) Du tableau de variations de la fonction g, on déduit que pour tout élément x de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ on a : $g(x)\leq 0$ et $g(x)=0\Longleftrightarrow x=0$

et pour tout x de $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$ on a : $g(x)>0\Longleftrightarrow x\in\left]-1,\alpha\right[$

$$g(x)<0\Longleftrightarrow x\in\left]\alpha,-\frac{1}{2}\right]$$

$$g(x)=0\Longleftrightarrow x=\alpha$$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x :

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$-$	

III) 1) a- La fonction $x\longmapsto\frac{x}{x+1}$ est dérivable sur chacun des intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

Donc la fonction $x\longmapsto Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur chacun de ces deux intervalles

par suite, la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $\left]-1,0\right[$ et sur $\left]0,+\infty\right[$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur chacun de ces deux intervalles

b- • On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-1\right) = 1\times 1-1=0$

Car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{Arctan(t)}{t} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

D'où la fonction f est continue en zéro.

• On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x}Arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-1 = -1\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-1 = \dfrac{\pi}{2}-1$

Car $\lim\limits_{x\to(-1)^+} Arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} Arctan(t) = -\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1)$

par suite, f est continue à droite en (-1)

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}Arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{1}{x}$

On pose $t = \dfrac{x}{x+1}$ donc $x = \dfrac{t}{1-t}$

par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(1-t)^2}{t^2}Arctan(t)-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{Arctan(t)-t}{t^2}-2\cdot\frac{Arctan(t)}{t}+Arctan(t)+1\right)$$

$$= 0-2\times 1+0+1 = -1$$

Donc la fonction f est dérivable à droite en zéro et $f'_d(0) = -1$

Montrer, en posant $t = \dfrac{-x}{x+1}$, que : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$

par suite, f est dérivable en zéro et $f'(0) = -1$

3) a- Considérer la fonction $w: t \longmapsto Arctan(t)+Arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$

et montrer que $(\forall t\in\mathbb{R}^{-*})\ w'(t) = 0$

Donc la fonction w est constante sur $\mathbb{R}^{-*}$

et par suite $(\forall t\in\mathbb{R}^{-*})\ w(t) = w(-1)$

C'est-à-dire : $(\forall t\in\mathbb{R}^{-*})\ Arctan(t)+Arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

b- On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\frac{1}{x}Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{2}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\frac{1}{x}\left(-\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{2}}{x+1}$$

car $(\forall x\in]-1,0[)\ \frac{x}{x+1}<0$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x+1}-\frac{1}{x^2}\frac{Arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}-\frac{\pi}{2x}-\frac{1}{x^2}\frac{Arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}=\frac{\pi}{2}-1$$

Car $\lim\limits_{x\to(-1)^+}-\dfrac{\pi}{2x}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{Arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{Arctan(t)}{t}=1$

Donc f est dérivable à droite en (-1) et $f'_d(-1)=\dfrac{\pi}{2}-1$

4) • Soit x un élément de $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

On a : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}Arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+\dfrac{1}{x}\dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{2x^2+2x+1}-Arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

C'est-à-dire : $(\forall x\in]-1,+\infty[-\{0\})\quad f'(x)=\dfrac{1}{x^2}g(x)$

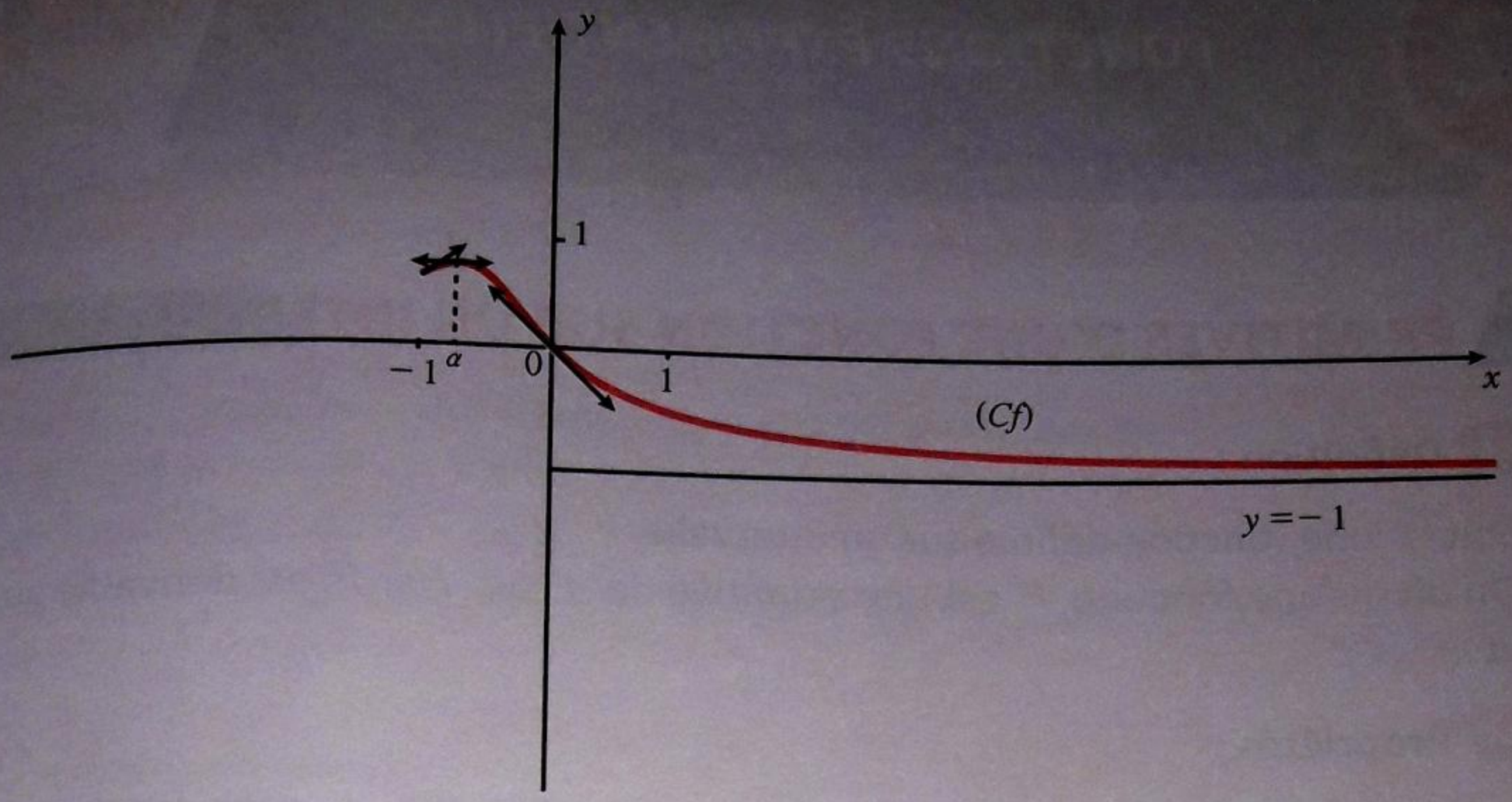
• La signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $\dfrac{1}{x^2}>0$

et en utilisant le résultat de la question **II. 3)** on obtient le tableau suivant des variations de f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{\pi}{2}-1$	$+$	0	$-$	-1	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}-1$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↘	-1

5) La courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote «horizontale» d'équation $y=-1$, admet au point $A(\alpha,(f(\alpha))$ une tangente «horizontale», admet au point $O(0,0)$ une tangente de coefficient directeur (-1) et admet à droite

au point $B\left(-1, \frac{\pi}{2}-1\right)$ une demi-tangente de coefficient directeur $\frac{\pi}{2}-1$



02

FONCTIONS LOGARITHMES FONCTIONS EXPONENTIELLES

1 PRIMITIVES D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE:

1 Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$

2 Propriétés :

- Les primitives d'une fonction f sur un intervalle I sont les fonctions $x \longmapsto F(x) + c$ où F est une primitive de f sur I et c est une constante réelle
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I

Pour tout $(a,b) \in I \times \mathbb{R}$ il existe une seule primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = b$

2 LOGARITHME NÉPÉRIEN:

1 Définition :

La fonction logarithme Népérien, notée $\ln$, est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1

2 Conséquences :

- L'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $\mathbb{R}^{+*}$
- $\ln(1) = 0$
- La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Pour tous a et x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$\ln(x) = \ln(a) \Longleftrightarrow x = a$
$\ln(x) > \ln(a) \Longleftrightarrow x > a$
$\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$
$\ln(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$

3 Propriétés :

Pour tous x et y de $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$ on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \; ; \; \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \; ; \; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^r) = r\ln(x) \; ; \; \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x) \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$$

[redacted]

- Si a_1, a_2, ... et a_n sont des nombres réels strictement positifs alors $\ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$
- Pour tous x et y de $\mathbb{R}^{-*}$ on a :

$$\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y), \; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(-x) - \ln(-y), \; \ln(x^2) = 2\ln(-x)$$

4 Limites usuelles :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$		$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$		$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

5 Le nombre e :

e est le nombre qui vérifie $\ln(e) = 1$

e est un nombre irrationnel et on a : $e \simeq 2,7$

6 Dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \ln|u(x)|$:

Propriété :

Si u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I) f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Conséquence :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I

Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur l'intervalle I sont les fonctions $x \longmapsto \ln|u(x)| + c$ où c est une constante réelle

profsalm.blogspot.com

7 Fonction logarithme de base a

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1

La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Cas particulier :

Pour $a = 10$, la fonction logarithme de base 10 s'appelle la fonction logarithme décimal, on la note $\log$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

3 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE:

1 Définition :

La fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est la fonction exponentielle népérienne, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^x$

2 Conséquences :

- La fonction $x \longmapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto e^x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0$
- pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}^{+*}$ on a : $e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \ln(e^x) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad e^{\ln(x)} = x$

3 Propriétés :

Pour tous x et y de $\mathbb{R}$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $e^x.e^y = e^{x+y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y$
- $(e^x)^r = e^{rx}$
- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $e^x > e^y \Longleftrightarrow x > y$

4 Limites usuelles :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$		$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$		

5 Dérivée de la fonction $f: x \longmapsto e^{u(x)}$

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f: x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I On a : $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Conséquence :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \longmapsto e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle

6 Fonction exponentielle de base a $(a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\})$

Définition :

La fonction réciproque de la fonction $\log_a$ est la fonction exponentielle de base a, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto a^x$

Conséquences :

Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}^{+*}$ on a : $a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad a^x = e^{x\ln(a)}$
- La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto (\ln(a)).a^x$

Exercice 1

On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_m(x) = 1 + x - mx\ln|x| \ ; \ x \neq 0 \\ f_m(0) = 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel non nul, et soit (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Étudier la continuité de la fonction f_m en 0

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f_m en 0

3) Montrer que le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_m)

4) Étudier les branches infinies de la courbe (C_m) suivant les valeurs de m

5) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes

6) Étudier les variations de la fonction f_m suivant les valeurs de m

7) **a-** Donner le tableau de variations de la fonction f_1

b- Montrer que la courbe (C_1) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que : $3 < \alpha < 4$

c- Tracer la courbe (C_1)

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x - m(x\ln(x))$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = 1 + 0 - (m\times 0) = 1 = f_m(0)$

Donc la fonction f_m est continue à droite en 0

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 + x + m(-x)\ln(-x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x)\ln(-x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$

alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f_m(x) = 1 + 0 + (m\times 0) = 1 = f_m(0)$

Donc la fonction f_m est continue à gauche en 0

Par suite, la fonction f_m est continue en 0 quel que soit m appartenant à $\mathbb{R}^*$

2) Si $m > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} (1 - m\ln|x|) = +\infty$

et si $m < 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} (1 - m\ln|x|) = -\infty$

Par suite, la fonction f_m n'est pas dérivable en 0, quel que soit m appartenant à $\mathbb{R}^*$

Par suite, la fonction f_m n'est pas dérivable en 0, quel que soit m appartenant à $\mathbb{R}^*$

3) Montrons que le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_m)

Pour cela , montrons que, pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$(2\times 0 - x) \in \mathbb{R}$ et $f_m(2\times 0 - x) = 2\times 1 - f_m(x)$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

On a : $(-x) \in \mathbb{R}^*$

et $f_m(-x) + f_m(x) = 1 - x + mx\ln|-x| + 1 + x - mx\ln|x|$

$= 2 + mx\ln|x| - mx\ln|x| = 2$

Et puisque : $f_m(-0) + f_m(0) = 2$

alors : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f_m(-x) + f_m(x) = 2$

Par suite, le point $A(0;1)$ est bien un centre de symétrie de la courbe (C_m)

4) Si $m > 0$, alors :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (1 + x(1 - m\ln(x))) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1 - m\ln(x)\right) = -\infty$

Et si $m < 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = +\infty$

Par suite, la courbe (C_m) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Et puisque la courbe (C_m) admet un centre de symétrie, alors la courbe (C_m) admet aussi une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

5) • On a : $f_m(0)=1$ pour tout m de $\mathbb{R}^*$

Donc toutes les courbes (C_m) passent pas le point $A(0,1)$

• Soit $M(x,y)$ un point du plan tel que $x\in\mathbb{R}^*$

Le point $M(x,y)$ appartient à toutes les courbes (C_m) si est seulement si $mx\ln|x|+y-1-x=0$ pour tout m de $\mathbb{R}^*$

C'est-à-dire : $x\ln|x|=0$ et $y-1-x=0$

C'est-à-dire : $(x=1$ et $y=2)$ ou $(x=-1$ et $y=0)$

Donc toutes des courbes (C_m) passent par les points : $A(0,1)$, $B(1,2)$ et $C(-1,0)$

6) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad f'_m(x)=m\left(\frac{1-m}{m}-\ln|x|\right)$

Si $m>0$, alors le tableau de variations de f_m est :

x	$-\infty$		$-e^{\frac{1-m}{m}}$		0		$e^{\frac{1-m}{m}}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$1-me^{\frac{1-m}{m}}$	↗	1	↗	$1+me^{\frac{1-m}{m}}$	↘	$-\infty$

Et si $m<0$, alors le tableau de variations de f_m est :

x	$-\infty$		$-e^{\frac{1-m}{m}}$		0		$e^{\frac{1-m}{m}}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$1-me^{\frac{1-m}{m}}$	↘	1	↘	$1+me^{\frac{1-m}{m}}$	↗	$+\infty$

7) a- Le tableau de variations de la fonction f_1 est :

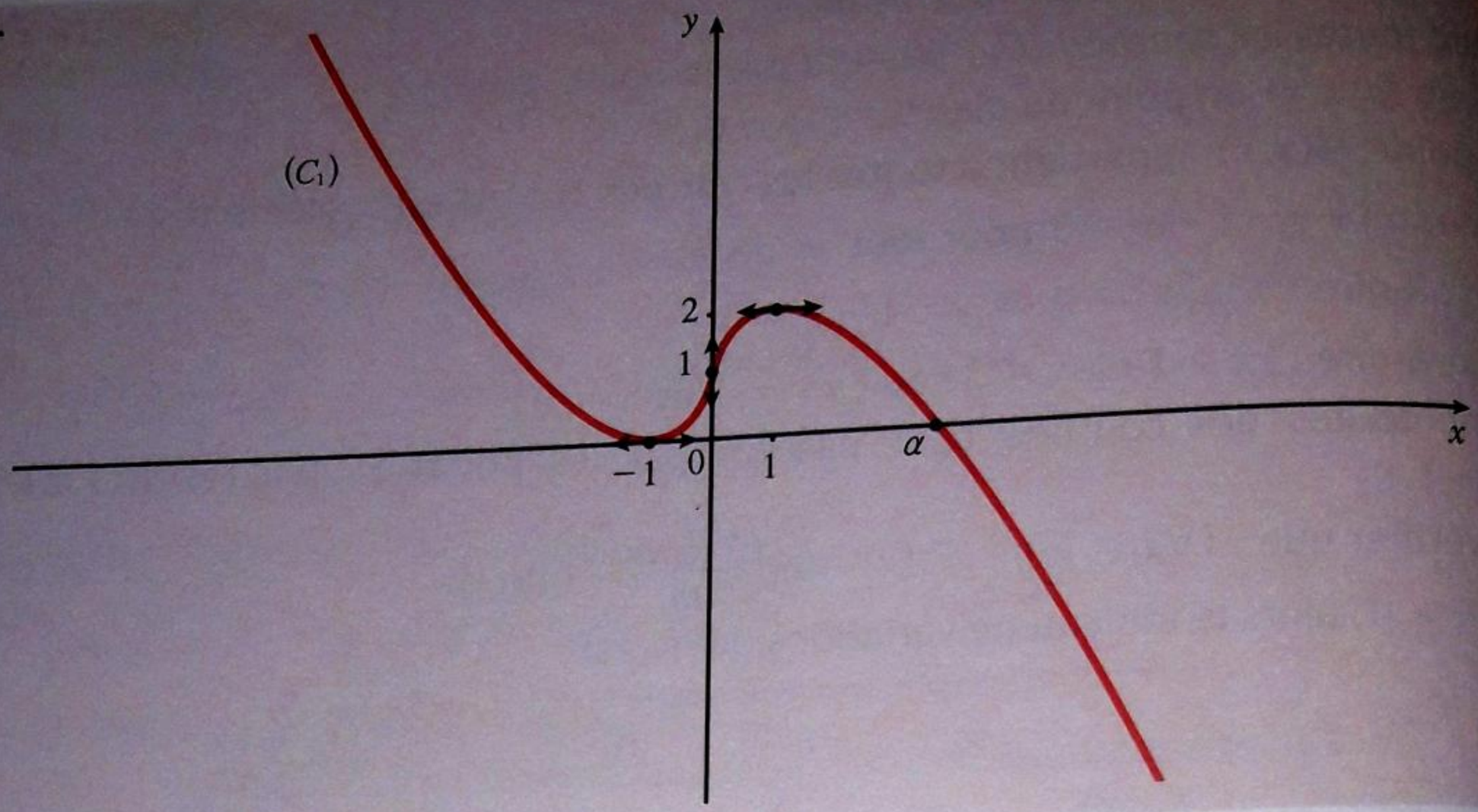
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↗	2	↘	$-\infty$

b- La fonction f_1 est continue sur l'intervalle $[3,4]$ et on a :

$f_1(3)=4-3\ln(3)$ et $f_1(4)=5-4\ln(4)$

Et puisque $f_1(3)>0$ et $f_1(4)<0$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la courbe (C_1) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α compris entre 3 et 4

c-



Exercice 2

I) 1) a- Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{2}{3}\right]$; $-x-\frac{x^2}{2}-x^3 \leq \ln(1-x) \leq -x-\frac{x^2}{2}$

et $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

b- En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

2) On considère les fonctions u et v définies par :

$u(x) = x-1-x\ln(x)$ et $v(x) = 1-x+x\ln(-x)$

a- Donner le tableau de variations de chacune des fonctions u et v

b- Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-4,-3[$

c- En déduire le signe de $u(x)$ et le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x

II) 1) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x-1}, x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

a- Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

b- Donner le tableau de variations de la fonction f

c- Montrer que : $-\frac{2}{3} < f(\alpha) < -\frac{1}{2}$

d- Tracer la courbe (C_f)

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x^2)}{x+1}, x \neq -1 \\ g(-1) = -2 \end{cases}$

et soit (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a- Comparer $f(x)$ et $g(-x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

b- Étudier la position relative des courbes (C_f) et (C_g), puis tracer (C_g)

Solution

I) 1) a- • **Montrons que : $\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$ pour tout x de $\left[0, \frac{2}{3}\right]$**

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ par :

$h(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}$

La fonction h est dérivable sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ et pour tout x de $\left]0, \frac{2}{3}\right[$ on a :

$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + x = \frac{-1+1-x^2}{1-x} = \frac{-x^2}{1-x}$

D'où le tableau de variations de la fonction h :

x	0	$\frac{2}{3}$
$h'(x)$	0	$-$
$h(x)$	0 ↘	

En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right)\ \ h(x) \leq 0$

par suite, $\left(\forall x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]\right)\ \ \ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$

• En procédant de même, montrer que : $-x - \frac{x^2}{2} - x^3 \leq \ln(1-x)$

et que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour tout x de $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

b- Soit x un élément de $\left]0, \frac{2}{3}\right]$

• D'après le résultat de la question précédente, on a :

$-\frac{x^2}{2} - x^3 \leq \ln(1-x) + x \leq -\frac{x^2}{2}$

D'où : $-\frac{1}{2} - x \leq \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

• On a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Donc : $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

D'où : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)=-\frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

2- •On a : $D_u =]0,+\infty[$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1-x\ln(x))$

$= 0-1-0=-1$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{x}-\ln(x)\right)\right)=-\infty$

• La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$u'(x) = 1-\left(\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

D'où le tableau de variations de la fonction u :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

• Pour tout x de $\mathbb{R}^{-*}$ on a :

$v'(x) = -1+\ln(-x)+1=\ln(-x)$

D'où le tableau de variations de la fonction v :

x	$-\infty$		-1		0
$v'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$v(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1

b- La fonction v est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-4,-3]$ et on a : $v(-4)=5-8\ln(2)$ et $v(-3)=4-3\ln(3)$

Donc : $v(-4)<0$ et $v(-3)>0$

Par suite, l'équation $v(x)=0$ admet une solution unique α dans $]-4,-3[$

c- • **Signe de $u(x)$:**

Du tableau de variations de la fonction u, on déduit le tableau de signe de $u(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$-$	

• **Signe de $v(x)$:**

Du tableau de variations de la fonction v, on déduit le tableau de signe de $v(x)$:

x	$-\infty$		α		0
$v(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1) a- • On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln(x)}{x-1} = 2\times 1 = 2 = f(1)$

Donc f est continue en 1

• On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\ln(x)-2(x-1)}{(x-1)^2}$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} 2.\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2} = 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ (On a posé: $t = x-1$)

Donc f est dérivable à droite en 1 est $f'_d(1) = -1$

et on a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2(\ln(x)+1-x)}{(1-x)^2}$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{2(\ln(1-t)+t)}{t^2} = 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \quad (t = 1-x)$

Donc f est dérivable à gauche en 1 est $f'_g(1) = -1$

Et puisque, $f'_d(1) = f'_g(1)$ alors la fonction f est dérivable en 1 et on a : $f'(1) = -1$

b- Tableau de variations de f :

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\cdot\dfrac{\ln(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

$= 2\times 0\times 1 = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\cdot\dfrac{\ln(-x)}{(-x)}\cdot\dfrac{1}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$= 2\times 0\times(-1) = 0$

• Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{2u(x)}{x(x-1)^2}$ pour tout x de $]0,1[\cup]1,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{2v(x)}{-x(x-1)^2}$ pour tout x de $]-\infty,0[$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	(-1)	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	0

c- On a : $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha^2}{\alpha-1} = \dfrac{2\ln(-\alpha)}{\alpha-1}$

Et puisque : $v(\alpha)=0$ alors $1-\alpha+\alpha\ln(-\alpha)=0$

Par suite : $\ln(-\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$

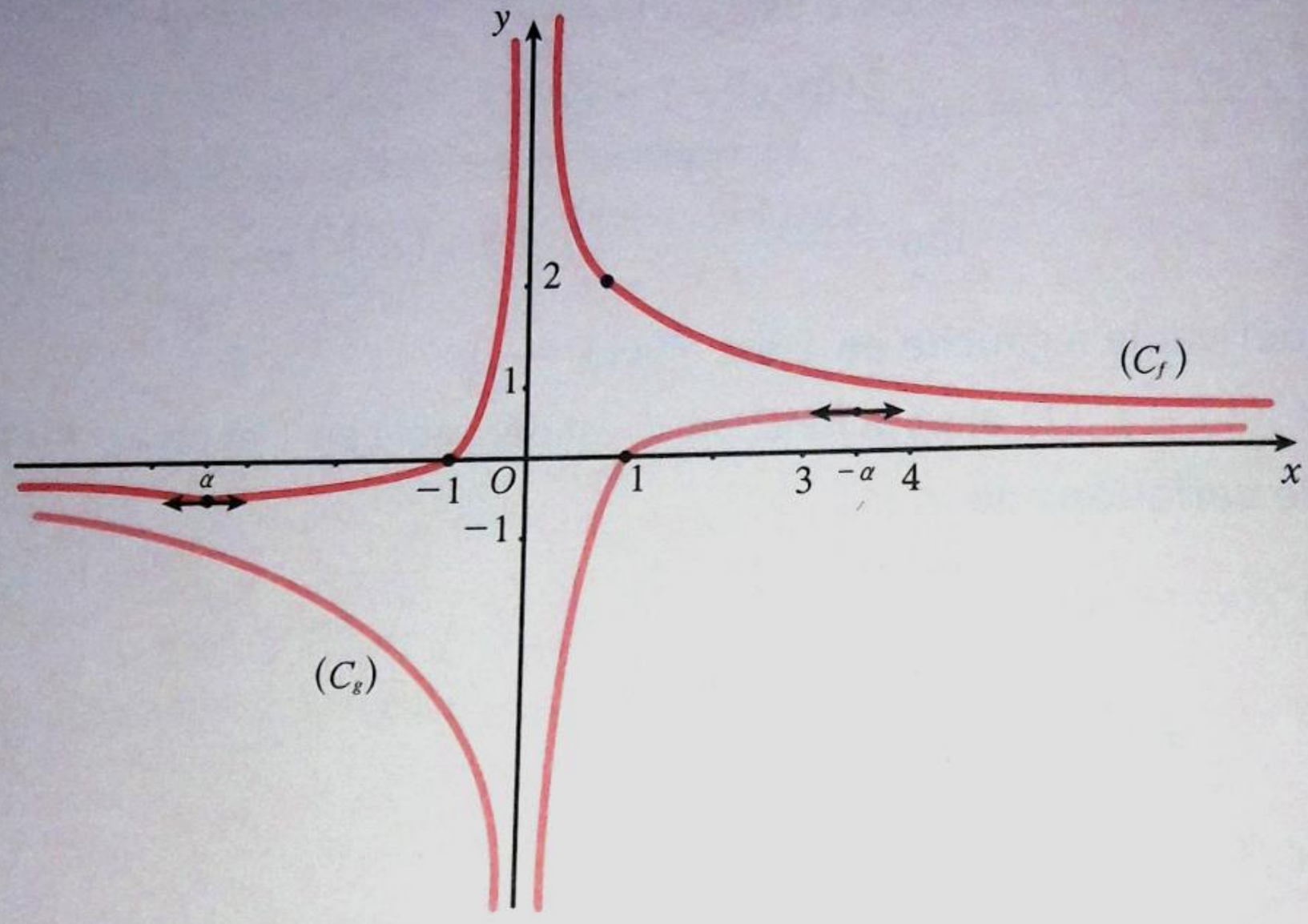
D'où : $f(\alpha)=\dfrac{2\cdot\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}{\alpha-1}=\dfrac{2}{\alpha}$

Et puisque $-4<\alpha<-3$ alors $-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\alpha}<-\dfrac{1}{4}$

Par suite, $-\dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{\alpha}<-\dfrac{1}{2}$

D'où : $-\dfrac{2}{3}<f(\alpha)<-\dfrac{1}{2}$

d-



2) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}^*-\{1\}$

On a : $g(-x)=\dfrac{\ln((-x)^2)}{-x+1}$

$=\dfrac{\ln(x^2)}{1-x}=-f(x)$

Et puisque $g(-1)=-f(1)$

alors $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ g(-x)=-f(x)$

Par suite, les courbes (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport au point O l'origine du repère

b- Soit x un élément de $\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$

On a : $f(x)-g(x)=\dfrac{4\ln|x|}{x^2-1}$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f(x)-g(x)$ et la position relative de (C_f) et (C_g) :

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\parallel$	$-$	$\emptyset$	$+$	
x^2-1	$+$	$\emptyset$	$-$	$\parallel$	$-$	$\emptyset$	$+$	
$f(x)-g(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$+$	

Et puisque $f(1) > g(1)$ et $f(-1) > g(-1)$

alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (voir figure)

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1} \ , \ x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a- Montrer que f est continue en 1

b- Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

2) On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$h_a(x) = (1-a+\ln(a))(x-1)^2 - (1-x+\ln(x))(a-1)^2$ où $a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

a- Calculer $h_a(a)$ et $h_a(1)$, puis en déduire qu'il existe un nombre b compris entre 1 et a tel que : $\dfrac{1-a+\ln(a)}{(a-1)^2} = \dfrac{-1}{2b}$

b- En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

3- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 - x\ln(x)$$

a- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \leq 0$

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\})\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f

c- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

d- Tracer la tangente (T) et la courbe (C)

4) a- Montrer que la fonction f est une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera

b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $(f^{-1})'(1)$

c- Tracer, dans le même repère, la courbe de la fonction f^{-1}

profsalm.blogspot.com

Solution

1) a- On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1 = f(1)$

Donc f est continue en 1

b- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = +\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

2) a- Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

- Vérifier que : $h_a(a) = 0$ et $h_a(1) = 0$
- Supposons que : $a > 1$

La fonction h_a est continue sur le segment $[1,a]$ et dérivable sur l'intervalle $]1,a[$

et on a : $h_a(a) = h_a(1)$

Donc, d'après le théorème de Rolle : $(\exists b \in]1,a[) \quad h'_a(b) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists b \in]1,a[) \quad 2(1-a+\ln(a))(b-1) - (a-1)^2\left(-1+\dfrac{1}{b}\right) = 0$

D'où : $\dfrac{1-a+\ln(a)}{(a-1)^2} = \dfrac{-1}{2b}$

- On obtient le même résultat dans le cas où $a < 1$

b- On a : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

D'après le résultat de la question précédente, il existe b compris entre x et 1 tel que : $\dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{2b}$

Et puisque $\dfrac{-1}{2b}$ est compris entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1}{2x}$

alors : $\dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$ est compris entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1}{2x}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$

Par suite, f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

3) a- On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad g'(x) = -\ln(x)$

D'où la tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	0	↘	

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad g(x) \leq 0$

b- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad g(x) < 0$

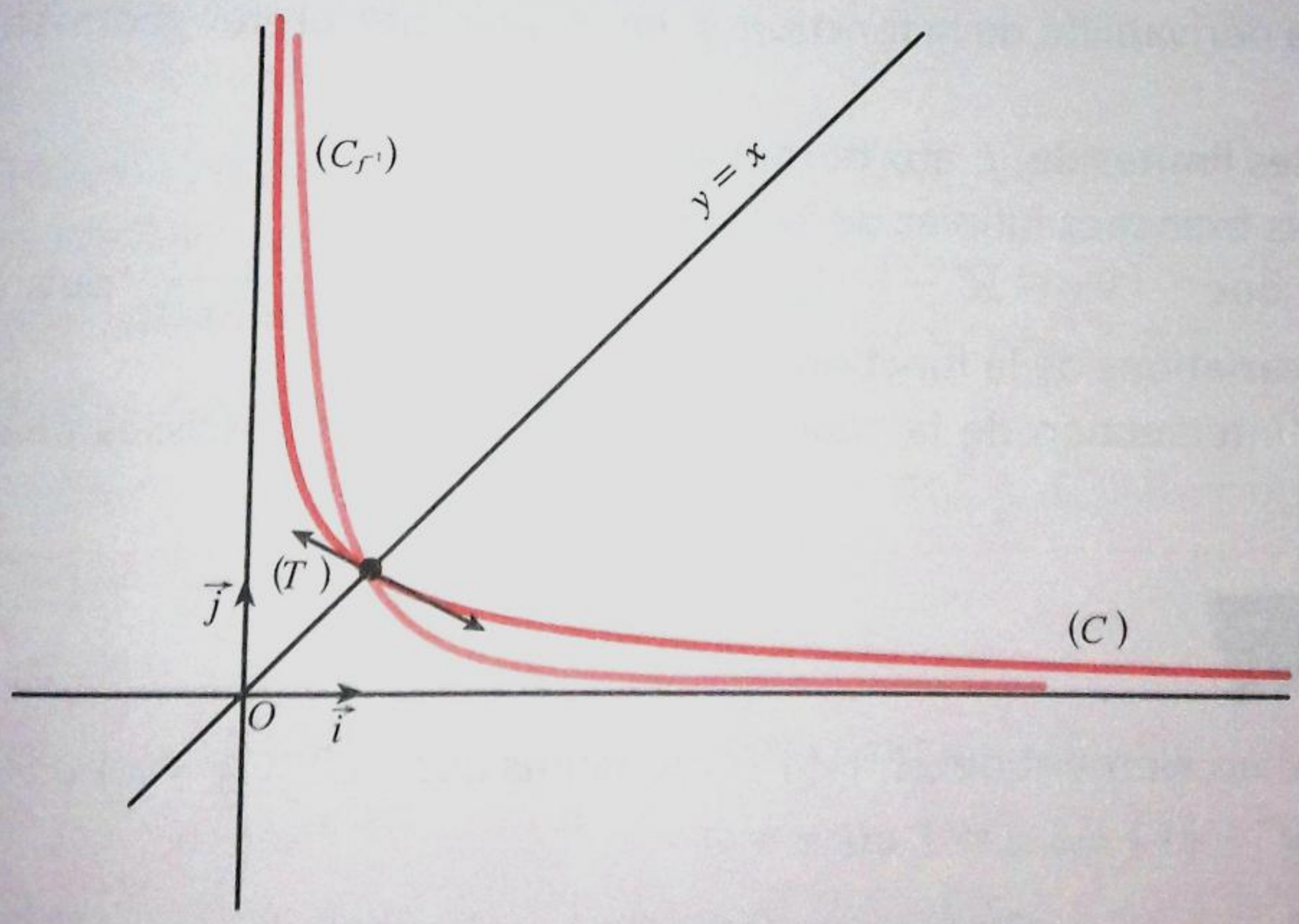
alors: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad f'(x) < 0$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	1	↘	0

c- $(T) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

d-



4) a- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers l'intervalle $J = f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$

b- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) \neq 0$

Donc la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$

et on a : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{f'(1)} = -2$

c- Les courbes $(C_{f^{-1}})$ et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir figure)

Exercice 4

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x\ln|x| - (x-1)\ln|x-1| \ , \ x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \\ g(0) = g(1) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_g) et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g en 1

3) Donner le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le signe de $g(x)$

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} \ , \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) Étudier la continuité de la fonction f en 0

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0, puis interpréter géométriquement le résultat

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

4) Étudier les branches infinies de la courbe (C)

5) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f

6) Étudier l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis tracer la courbe (C)

Solution

I. 1) • Soit x un élément de $\mathbb{R}^* - \{1\}$, montrons que : $\left(2 \times \dfrac{1}{2} - x\right) \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

On a : $x \notin \mathbb{R}^* - \{1\} \iff x = 1$ ou $x = 0$

$$\iff 2 \cdot \frac{1}{2} - x = 0 \text{ ou } 2 \cdot \frac{1}{2} - x = 1$$

$$\iff \left(2 \cdot \frac{1}{2} - x\right) \notin \mathbb{R}^* - \{1\}$$

Donc : $x \in \mathbb{R}^* - \{1\} \iff \left(2 \times \dfrac{1}{2} - x\right) \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

et on a : $g\left(2\times\frac{1}{2}-x\right)=g(1-x)=(1-x)\ln|1-x|-(1-x-1)\ln|1-x-1|$

$=-(x-1)\ln|x-1|+x\ln|x|=g(x)$

Et puisque $g(1-0)=g(0)$ et $g(1-1)=g(1)$,

alors : $g\left(2.\frac{1}{2}-x\right)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Par suite, la droite (Δ) d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_g)

• Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-\frac{(1-x)}{x}\frac{\ln\left(1+\left(-\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{x}\right)}=+\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\left(-\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to0^-}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

2) • On a : $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x\ln(x)-(x-1)\ln(x-1)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to1^+}x\ln(x)=0$

et $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{t\to0^+}t\ln(t)=0$

alors $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=0=g(1)$

Donc la fonction g est continue à droite en 1

et on a : $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to1^-}x\ln(x)=0$

et $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=\lim\limits_{u\to0^+}u\ln(u)=0$

alors $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=0=g(1)$

Donc la fonction g est continue à gauche en 1

Par suite, la fonction g est continue en 1

• Vérifier que : $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x\frac{\ln(x)}{x-1}-\ln|x-1|\right)=+\infty$

Donc la fonction g n'est pas dérivable en 1

3) • Vérifier que : $g'(x)=\ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$ pour tout x de $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

Et on a : $g'(x)=0\iff\frac{x}{|x-1|}=1$

$\iff|x-1|=x$

$\iff x-1=x$ ou $x-1=-x$ (car $x>0$)

$\iff x=\frac{1}{2}$

et $g'(x)>0\iff\frac{x}{|x-1|}>1$

$\iff|x-1|<x$

$\iff-x<x-1<x$

$\iff x>\frac{1}{2}$

D'où $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[\right)\ \ g'(x) \geq 0$

et en tenant compte du fait que la droite $(\Delta): x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_g), on dresse le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

• Du tableau de variations de g, on déduit le tableau suivant qui donne le signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II. 1) On a : $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x-1| = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Par suite, f est continue en 0

2) On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x\ln|x|}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\ln|x|} \cdot \frac{\ln(1-x)}{(-x)}$$

Et puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\ln|x|} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$)

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{-x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Par suite, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ et la courbe (C) admet au point $O(0,0)$ une tangente horizontale

3) • Vérifier que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x)}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$

• On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(-x)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\ln(-x)}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=1$$

4) • On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=1$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=1$

• On a : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

• On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$

5) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\})\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$	+		+	0	−	0	+		
$x(x-1)$	+		+	0	−	0	+		
$f'(x)$	+		+	0	+		+		
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	$-\infty$	↗ 0	↗ $+\infty$		$-\infty$	↗ 1	

6) Soit x un élément de $\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$

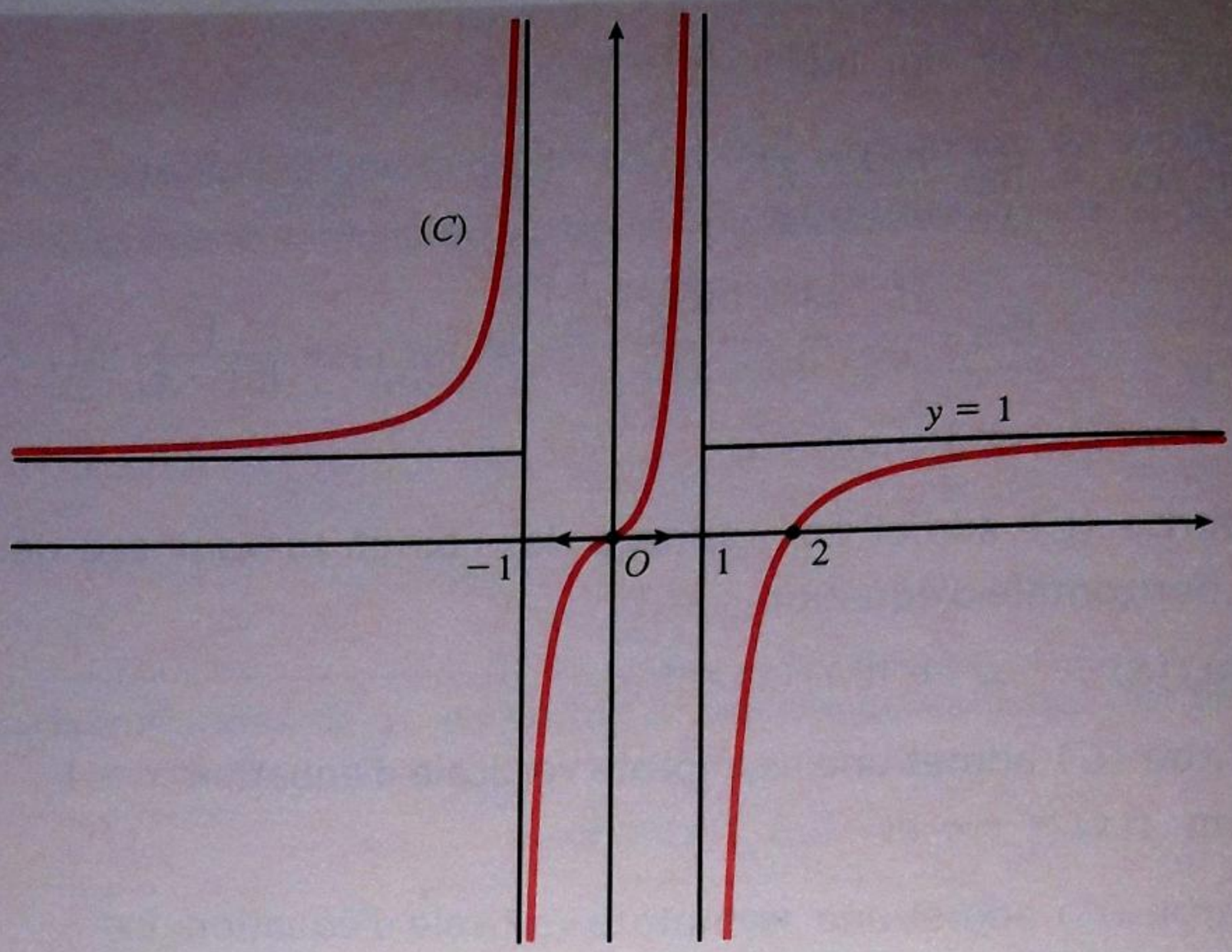
On a : $f(x)=0\iff\ln|x-1|=0$

$\iff|x-1|=1$

$\iff x-1=1$ ou $x-1=-1$

$\iff x=2$

Et puisque $f(0)=0$, alors la courbe (C) coupe l'axe des abscisses aux points $A(2;0)$ et $O(0;0)$



Exercice 5

I. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=2x-(1+x)\ln(1+x)$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]-1;+\infty[$, puis donner le tableau de variations de la fonction g

3) a- Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle $]e-1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$ et $\frac{15}{4}<\alpha<4$

b- En déduire le signe de $g(x)$

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a- Montrer que f est continue à droite en 0

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis donner le tableau de variations de f

4) Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

5) Tracer la courbe (C) (On prend : $f(\alpha)\simeq 0,8$)

III. 1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*-\{1\}$

Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans $[0;1]$

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a- Montrer que : $(\forall x\in[0;1])\ \dfrac{x}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

b- En déduire que : $(\forall n\geqslant 2)\ \dfrac{1}{n^2}\leq \alpha_n\leq \dfrac{4}{n^2}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

Solution

I. 1) On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=\lim\limits_{t\to 0^+} 2(t-1)-t\ln(t)=-2$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)=0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-(1+x)\ln(1+x)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x)\right)=-\infty \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$$

2) Vérifier que : $(\forall x\in\,]-1;+\infty[)\ g'(x)=1-\ln(1+x)$

D'où le tableau de variations de g :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ -2	↗	$e-2$	↘	$-\infty$

3) a- La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[e-1;+\infty[$

Donc sa restriction à cet intervalle est une bijection de $[e-1;+\infty[$ vers $]-\infty;e-2]$

Et puisque $0\in\,]-\infty;e-2]$

alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]e-1;+\infty[$

D'autre part, on a : $g\left(\dfrac{15}{4}\right)>0$ et $g(4)<0$

Donc : $g(4)<g(\alpha)<g\left(\dfrac{15}{4}\right)$

Et puisque g est continue et strictement décroissante sur $[e-1;+\infty[$

alors : $\dfrac{15}{4}<\alpha<4$

b- Du tableau de variations de g et en remarquant que $g(0)=0$, on déduit le tableau suivant qui donne le signe de $g(x)$:

x	-1		0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

II. 1) a- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}\sqrt{x} = 1\times 0 = 0 = f(0)$$

Donc : f est continue à droite en 0

b- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} = 0+0=0$$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (car } \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1)$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe (C) admet au point $O(0;0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}(1+x)}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

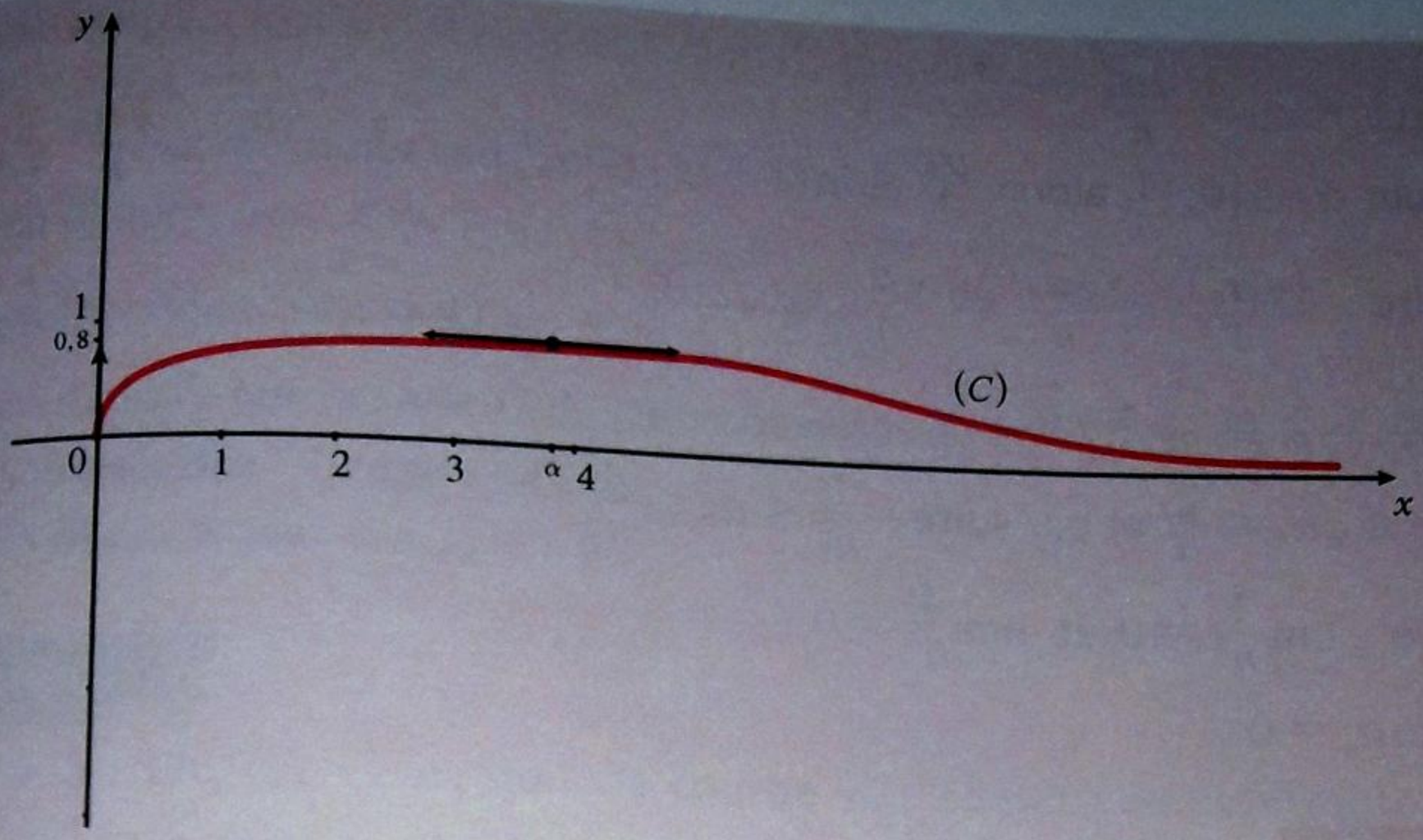
D'où le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) On a : $g(\alpha)=0$, donc $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$

par suite, $f(\alpha) = \dfrac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$

5)



III. 1) Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < f(1)$ (car $f(1) = \ln(2)$), donc: $\frac{1}{n} \in [0; f(1)]$ c'est-à-dire: $\frac{1}{n} \in f([0;1])$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$, donc sa restriction à $[0;1]$ est une bijection de $[0;1]$ vers $f([0;1])$

alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $[0;1]$

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ Donc $f(\alpha_{n+1}) \leq f(\alpha_n)$

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$

alors : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

Et puisqu'elle est minorée (par 0) alors elle est convergente.

3) a- Considérer les fonctions $u: x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et $v: x \longmapsto \ln(1+x) - \frac{x}{2}$

• Montrer que la fonction u est strictement décroissante sur $[0;1]$

Donc : $(\forall x \in [0;1])\ u(x) \leq u(0)$

En déduire que : $(\forall x \in [0;1])\ \ln(1+x) \leq x$

• Montrer que la fonction v est strictement croissante sur $[0;1]$

Donc : $(\forall x \in [0;1])\ v(x) \geqslant v(0)$

En déduire que : $(\forall x \in [0;1])\ \frac{x}{2} \leq \ln(1+x)$

Conclusion : $(\forall x \in [0;1])\ \frac{x}{2} \leq \ln(1+x) \leqslant x$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On a : $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ c'est-à-dire : $\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = \frac{1}{n}$

D'où : $\ln(1+\alpha_n)=\dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{n}$

Et puisque: $\alpha_n \in [0;1]$, alors: $\dfrac{\alpha_n}{2} \le \ln(1+\alpha_n) \le \alpha_n$, par suite: $\dfrac{\alpha_n}{2} \le \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{n} \le \alpha_n$

c'est-à-dire : $\dfrac{(\sqrt{\alpha_n})^2}{2} \leqslant \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{n}$ et $\dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{n} \leqslant (\sqrt{\alpha_n})^2$

D'où : $\sqrt{\alpha_n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{\alpha_n}$

Donc : $\dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{\alpha_n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ et par suite : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \alpha_n \leqslant \dfrac{4}{n^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{n^2}=0$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

Exercice 6 Juin 2003

I - On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{4\ln(x)}{x^2}-\dfrac{1}{2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis étudier les branches infinies de (C)

2) a- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{4(1-2\ln(x))}{x^3}$

b- Donner le tableau de variations de f

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes α et β telles que : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

5) Tracer la courbe (C)

II. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$

III. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x)=\dfrac{n\ln(x)}{x^2}-\dfrac{1}{2}$ où $n\in\mathbb{N}^*-\{1;2;3\}$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier les variations de la fonction f_n

2) Etudier la concavité de la courbe (C_n) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$

3) a- Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ suivant les valeurs de x

b- En déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

4) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes u_n et v_n telles que : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

5) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 4}$ est décroissante (utiliser le résultat de **III. 3)**).

6) a- En utilisant le résultat de la question II , montrer que :

$(\forall n \geqslant 4)\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$

b- En déduire que : $(\forall n \geqslant 4)\ \dfrac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leqslant \dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

c- Montrer que : $(\forall n \geqslant 4)\ \dfrac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{e}{n}$

d- En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est convergente en déterminant sa limite.

7) a- Montrer que : $(\forall n \geqslant 4)\ e^{\frac{5}{6}} < v_n$

b- En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Solution

I. 1) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$, donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$

2) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) f'(x) = \dfrac{4(1-2\ln(x))}{x^3}$

b- • Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2\ln(x)$

• On a : $1-2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

et on a : $1-2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < \sqrt{e}$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

3) • Montrer que la restriction de f à $]0;\sqrt{e}]$ est une bijection de $]0;\sqrt{e}]$ vers $\left]-\infty;\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{2}\right]$

et puisque $0 \in \left]-\infty;\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{2}\right]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;\sqrt{e}]$

et puisque $f(1) < 0$ et $f(\sqrt{2}) > 0$

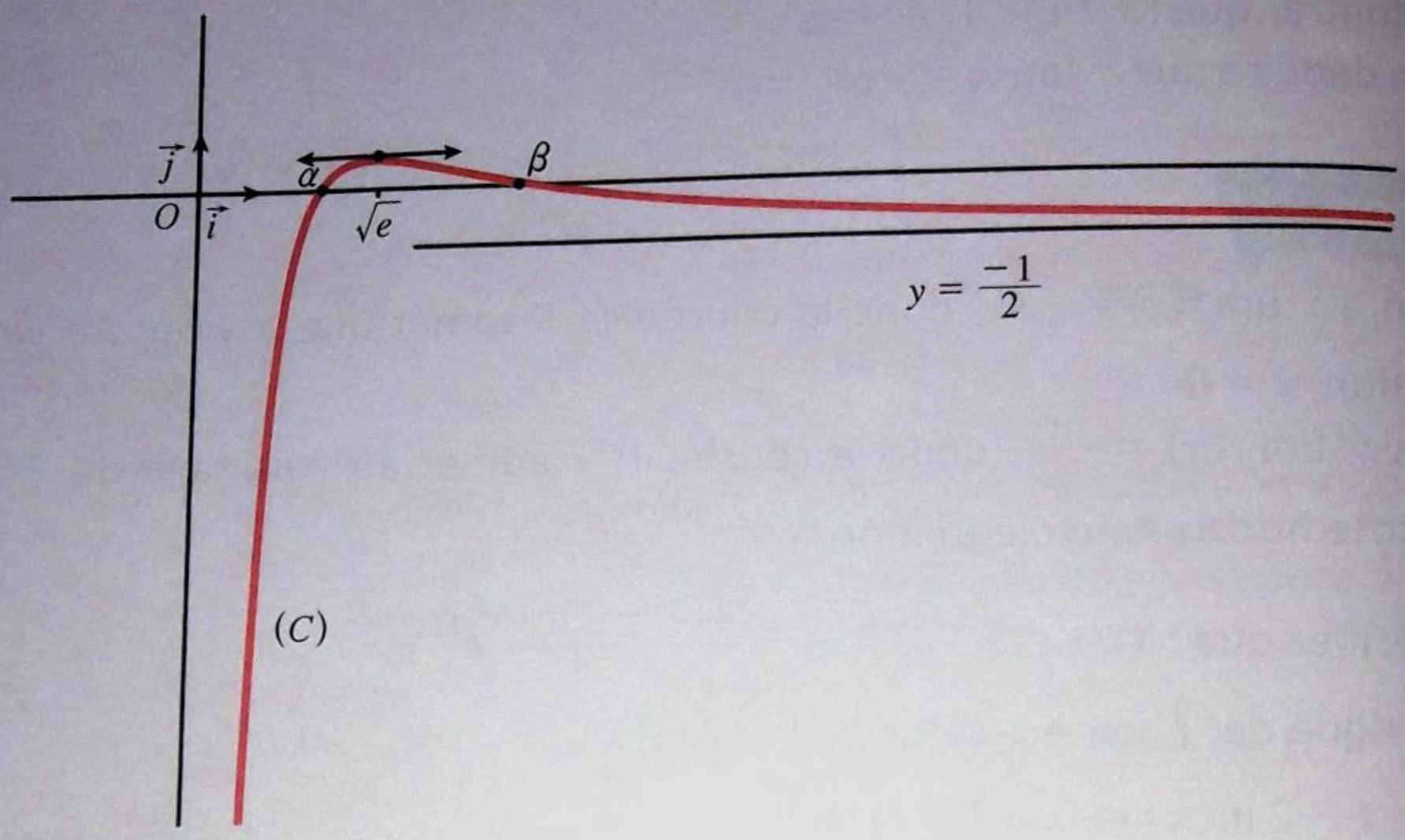
alors $1 < \alpha < \sqrt{e}$

•Montrer de même que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $[\sqrt{e}, +\infty[$ et que $\sqrt{e} < \beta < 3$

par suite, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$

4) $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ c'est-à-dire, $(T): y = 4x - \frac{9}{2}$

5)



II. Etudier les variations des fonctions $u : x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $v: x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

et en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\, u(x) \geqslant 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\, v(x) \geqslant 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\, x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

III. 1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\, f'_n(x) = \frac{n(1-2\ln(x))}{x^3}$

d'où le tableau de variations de la fonction f_n :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{n-e}{2e}$	↘	$-\frac{1}{2}$

2) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\, f''_n(x) = \frac{n(-5+6\ln(x))}{x^4}$

et on a : $f''_n(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$

et $f''_n(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{6}}$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f''_n(x)$ et la concavité de (C_n) :

x	0		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$f''_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Concavité de (C_n)	‖	∩		∪	

La fonction f_n'' s'annule en changeant de signe en $e^{\frac{5}{6}}$

Donc la courbe (C_n) admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{5}{6}}$

3) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$ et soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)\frac{\ln(x)}{x^2} - n\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$

si $x \in]0;1[$ alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$, par suite $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

si $x \in]1;+\infty[$ alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$, par suite $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

si $x = 1$ alors $f_{n+1}(1) = f_n(1) = -\frac{1}{2}$

b- Le tableau suivant donne la position relative de (C_n) et (C_{n+1})

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
position relative de (C_{n+1}) et (C_n)	‖	(C_{n+1}) est au-dessous de (C_n)	(C_{n+1}) et (C_n) se coupent au point $E\left(1;-\frac{1}{2}\right)$		(C_{n+1}) est au-dessus de (C_n)

4) En procédant de même que pour **I. 3)**, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes u_n et v_n telles que : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

5) Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$

On a : $u_n > 1$, donc $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$ (d'après **III .3) a-**).

par suite $f_{n+1}(u_n) > 0$ (car $f_n(u_n) = 0$)

D'où : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ (car $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$)

Et puisque u_n et u_{n+1} sont deux éléments de l'intervalle $]1;\sqrt{e}[$ et f_{n+1} est continue et strictement croissante sur cet intervalle

alors $u_n > u_{n+1}$

donc, la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est strictement décroissante.

6) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$

On a : $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$

par suite : $u_n - 1 - \dfrac{(u_n-1)^2}{2} \leq \ln(1+u_n-1) \leq u_n - 1$ (d'après **II**)

D'où : $\dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$

On a : $f_n(u_n) = 0$, donc $\dfrac{n\ln(u_n)}{u_n^2} - \dfrac{1}{2} = 0$

D'où : $\ln(u_n) = \dfrac{(u_n)^2}{2n}$

et d'après le résultat de la question précédente on a :

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1$$

d'où : $\dfrac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1$ et $u_n - 1 \leq \dfrac{\frac{u_n^2}{2n}}{\frac{3-u_n}{2}}$ (on a $3-u_n > 0$ car $u_n < \sqrt{e} < 3$)

Donc : $\dfrac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$

c- On a : $1 < u_n < \sqrt{e}$

Donc : $1 < u_n^2 < e$ et $\dfrac{1}{n(3-u_n)} \leq \dfrac{1}{n(3-\sqrt{e})}$

par suite : $\dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)} \leq \dfrac{e}{n}$ et $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{u_n^2}{2n}$, et puisque : $\dfrac{u_n^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)}$

alors : $\dfrac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{e}{n}$

d- On a : $(\forall n \geqslant 4)\ \dfrac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{e}{n}$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$

alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est convergente et sa limite est égale à 1

7) a- On a : $f_n(v_n) = 0$ et $f_n(e^{\frac{5}{6}}) = \dfrac{5n - 3e^{\frac{5}{3}}}{6e^{\frac{5}{3}}}$

et puisque $n \geqslant 4$ alors $f_n(e^{\frac{5}{6}}) > 0$

par suite : $f_n(v_n) < f_n(e^{\frac{5}{6}})$

Et puisque f_n est continue et strictement décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$

alors $v_n > e^{\frac{5}{6}}$

b- On a : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$, donc $\ln(v_n) > \dfrac{5}{6}$

et puisque : $v_n^2 = 2n\ln(v_n)$ (car $f_n(v_n) = 0$)

alors : $v_n^2 > 2n.\dfrac{5}{6}$ c'est-à-dire : $v_n > \sqrt{\dfrac{5n}{3}}$

et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{5n}{3}}=+\infty$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

Exercice 7

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x-2-\frac{4}{e^x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est impaire.

2) Donner le tableau de variations de f

3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) et étudier la position relative de (C) et (Δ)

4) Montrer que la droite (Δ') d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ et étudier la position de (C) et (Δ')

5) Tracer (Δ), (Δ') et (C)

Solution

1) Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a : $(-x)\in\mathbb{R}^*$

et $f(-x)+f(x)=-x-2-\frac{4}{e^{-x}-1}+x-2-\frac{4}{e^x-1}$

$$=-4-\frac{4}{\frac{1}{e^x}-1}-\frac{4}{e^x-1}=-4-\frac{4e^x}{1-e^x}-\frac{4}{e^x-1}$$

$$=\frac{-4+4e^x-4e^x+4}{1-e^x}$$

Donc $f(-x)+f(x)=0$ et par suite $f(-x)=-f(x)$

Donc f est impaire

2) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f'(x)=1+\frac{4e^x}{(e^x-1)^2}$

d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) • On a : $f(x)=x-2-\frac{4}{e^x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{e^x-1}=0$

alors la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x - 2$

• On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ f(x) - (x-2) = \dfrac{4}{1-e^x}$

d'où le tableau suivant qui donne le signe de $f(x) - (x-2)$ et la position relative de (C) et (Δ) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x-2)$	$+$	$\|\|$	$-$
position relative de (C) et (Δ)	(C) est au-dessus de (Δ)	$\|\|$	(C) est au-dessous de (Δ)

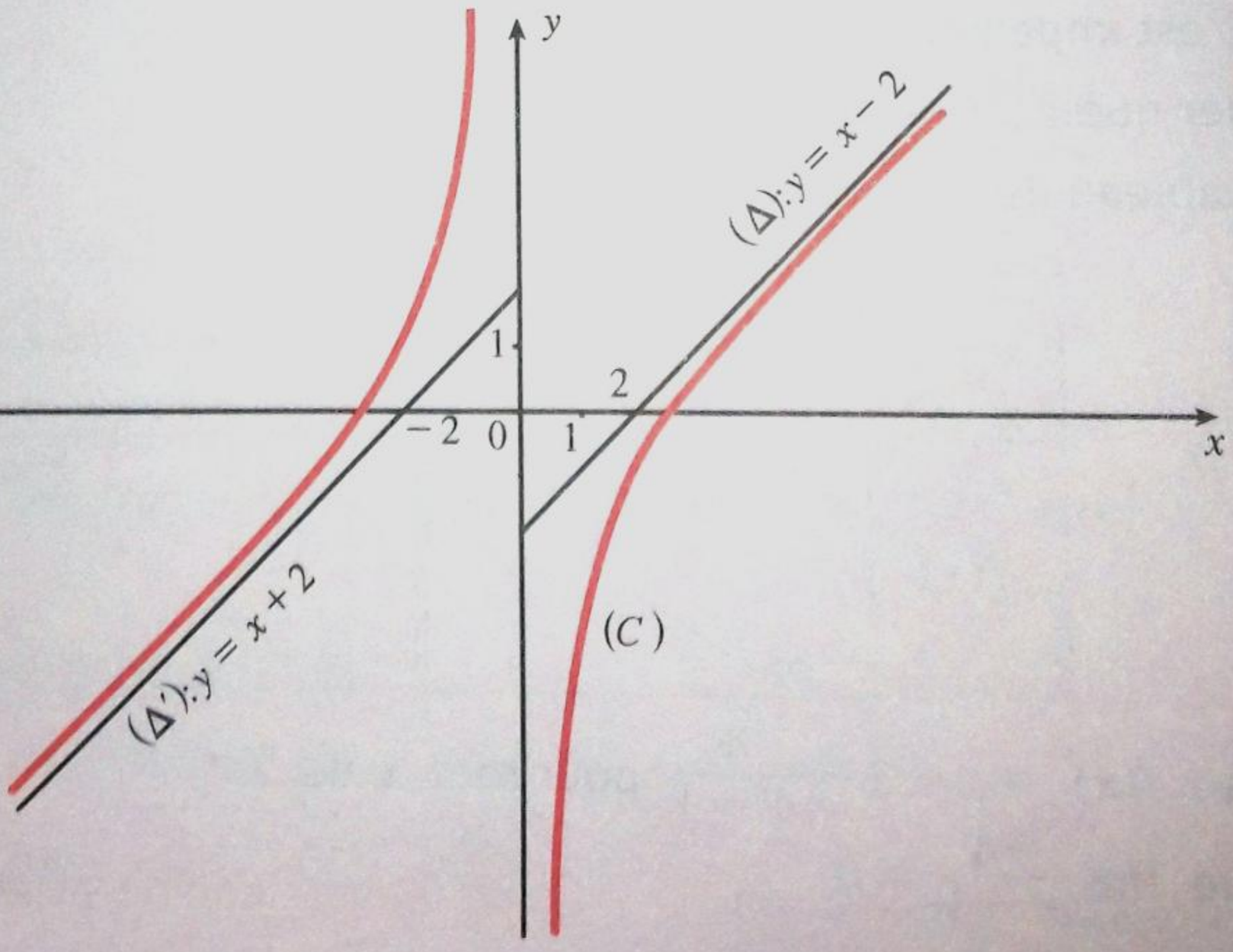
4) Vérifier que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$

et $f(x) - (x+2) = \dfrac{4e^x}{1-e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f(x) - (x+2)$ et la position relative de (C) et (Δ') :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x+2)$	$+$	$\|\|$	$-$
position relative de (C) et (Δ')	(C) est au-dessus de (Δ')	$\|\|$	(C) est au-dessous de (Δ')

5)



Exercice 8

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par: $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonromé.

1) Déterminer D_f et montrer que la fonction f est paire.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f sur D_f

4) Etudier les branches infinies de la courbe (C), puis tracer (C)

5) Soit g la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}^{+*}$

a- Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$

b- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

Solution

1) • Soit x un nombre réel

On a : $x\in D_f \Leftrightarrow e^x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow e^x\neq 1$

$\Leftrightarrow x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

• Montrons que f est paire

pour tout x de D_f on a : $(-x)\in D_f$

et $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}$

$$=\frac{\frac{1}{e^x}}{\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^2}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{(1-e^x)^2}{(e^x)^2}}=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=f(x)$$

Donc f est paire.

2) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-2+e^{-x}}=0$

et puisque f est paire alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

3) Vérifier que $(\forall x\in D_f)\ f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)(1-e^x)}{(e^x-1)^4}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-e^x)$, d'où le tableau de variations de f :

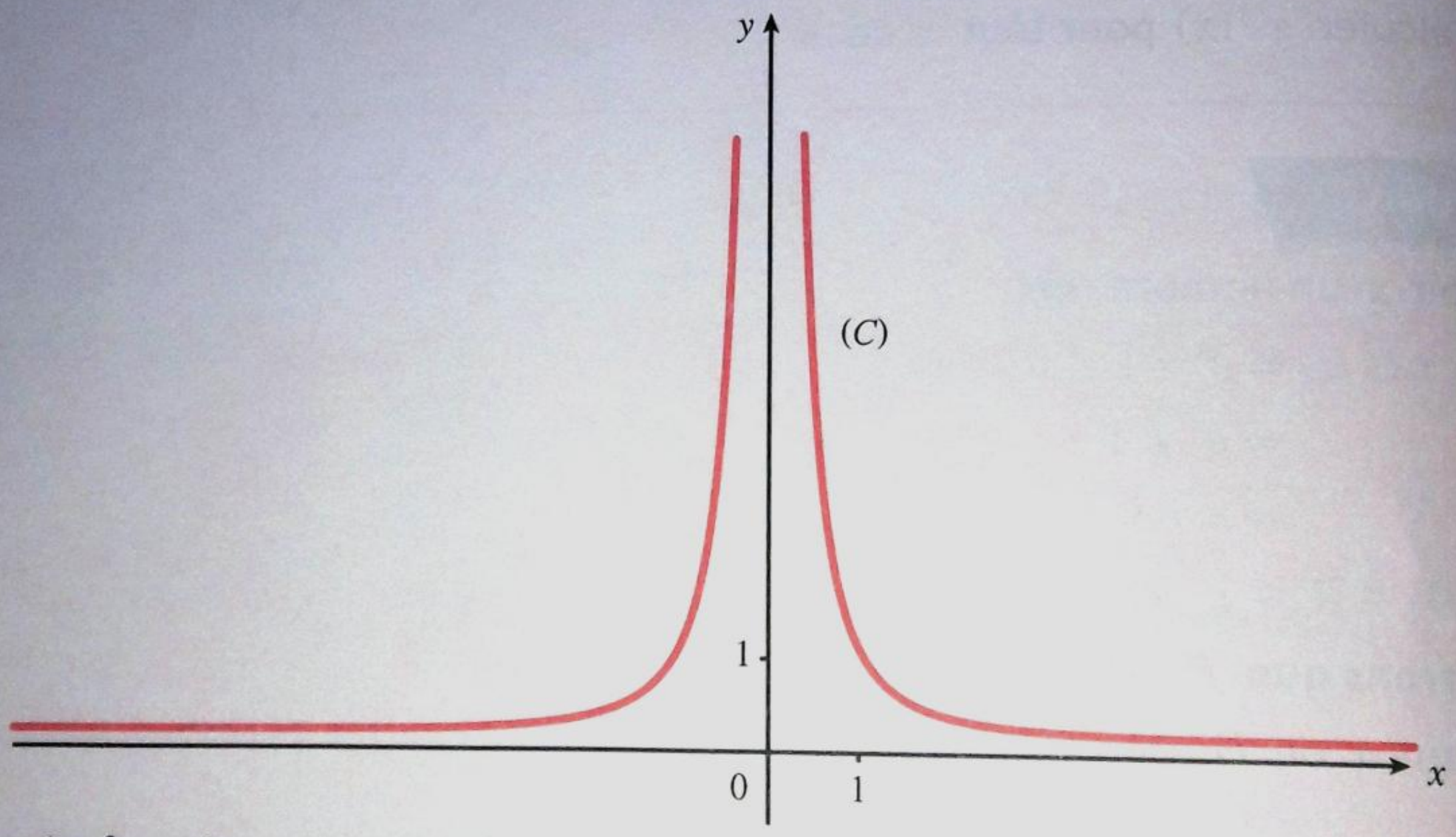
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0

4) on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

et on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$



5) a- La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $g(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$

Donc la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$

b- Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$

on a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y}{(e^y-1)^2} = x$$

$$\Leftrightarrow x(e^y)^2 - (2x+1)e^y + x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{2x+1+\sqrt{4x+1}}{2x} \; ou \; e^y = \frac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2x}$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{2x+1+\sqrt{4x+1}}{2x}\right) ou \;\; y = \ln\left(\frac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2x}\right)$$

car $((\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\, 2x+1 > \sqrt{4x+1})$

Et puisque $g(\ln(2)) = 2$ alors $g^{-1}(2) = \ln(2)$
Et en remplaçant x par la valeur 2 dans chacune des expressions précédentes, on déduit que :

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{2x+1+\sqrt{4x+1}}{2x}\right)$$

Conclusion :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2x+1+\sqrt{4x+1}}{2x}\right)$$

Exercice 9

I. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x) = \frac{-1}{x} + e^{\frac{1}{x}}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

2) Donner le tableau de variations de g puis en déduire le signe de $g(x)$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{x} - \ln(x) + xe^{\frac{1}{x}}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) Montrer que : $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f

3) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) Tracer la courbe (C_f)

Solution

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et on a :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{t\to+\infty} -t + e^t = \lim_{t\to+\infty} t(-1 + \frac{e^t}{t}) = +\infty$$

(on a posé $t = \frac{1}{x}$)

2) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - e^{\frac{1}{x}})$

Et puisque $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) e^{\frac{1}{x}} > 1$ alors $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g'(x) < 0$
d'où le tableau de variations de la fonction g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1

En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g(x) > 0$

II. 1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x}\right] = +\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$)

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t + \ln(t) + \frac{1}{t}e^t\right)$ (on a posé $t = \frac{1}{x}$)

$$= \lim_{t\to+\infty} t(-1 + \frac{\ln(t)}{t} + \frac{e^t}{t^2})$$

$$= +\infty$$

car : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$

2) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x}$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$e-1$	↗	$+\infty$

3) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

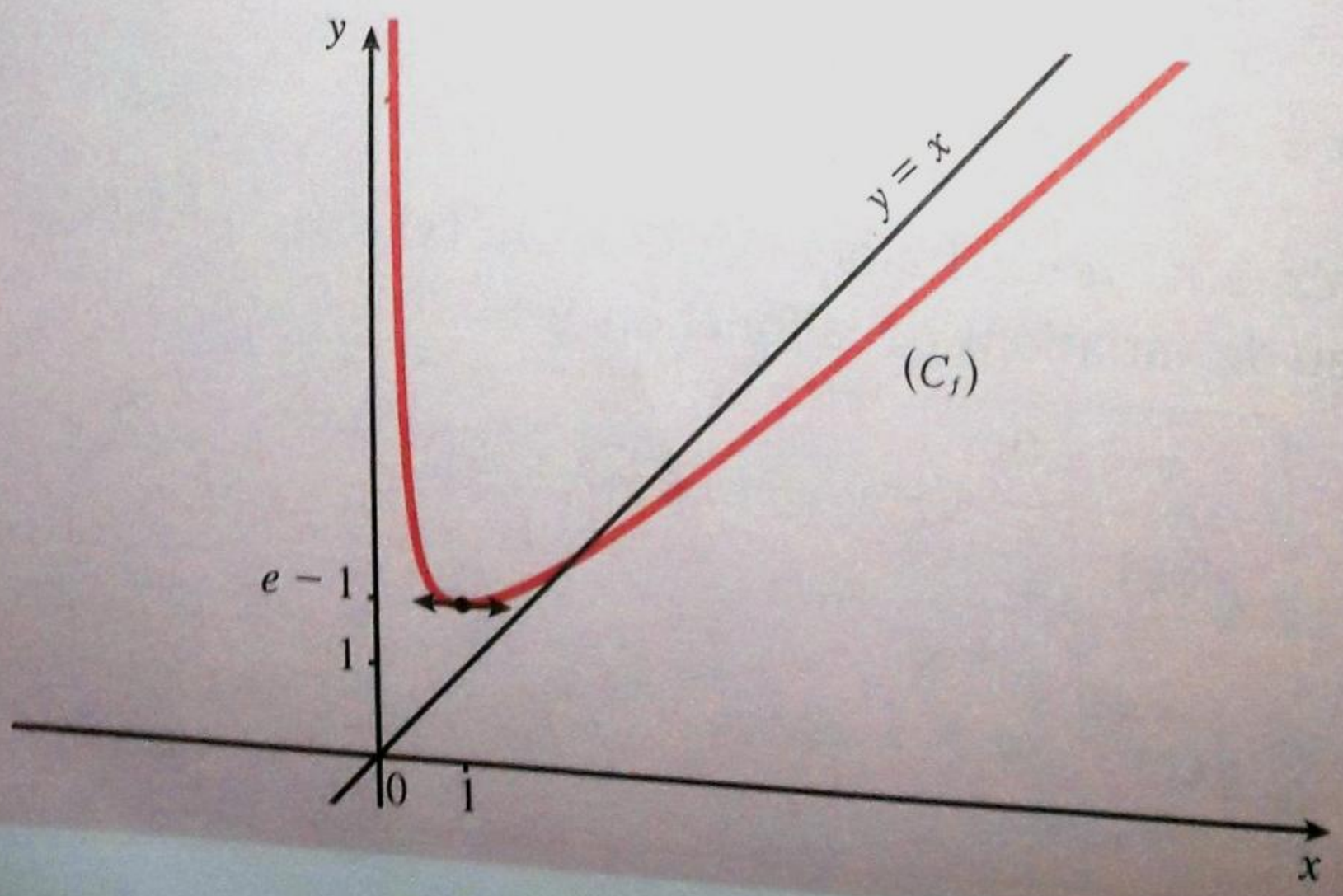
Donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - \ln(x)\right) = -\infty$

(car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$)

Donc la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique d
direction la droite d'équation $y = x$

4)



Exercice 10

I. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{1+e^x}$
et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que f est impaire.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b- Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que :
$(\forall x \in \mathbb{R}^+) 1 - \frac{2}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}x$

4) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$
puis interpréter géométriquement le résultat.

5) Tracer la courbe (C)

II. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{1+e^{u_n}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$

b- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution

1) Montrer que :
pour tout x de D_f on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) + f(x) = 0$

2) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b- • Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\emptyset$	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$

• **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R}^+) 1 - \frac{2}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}x$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$

à partir du tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que $f(x) \leq 0$

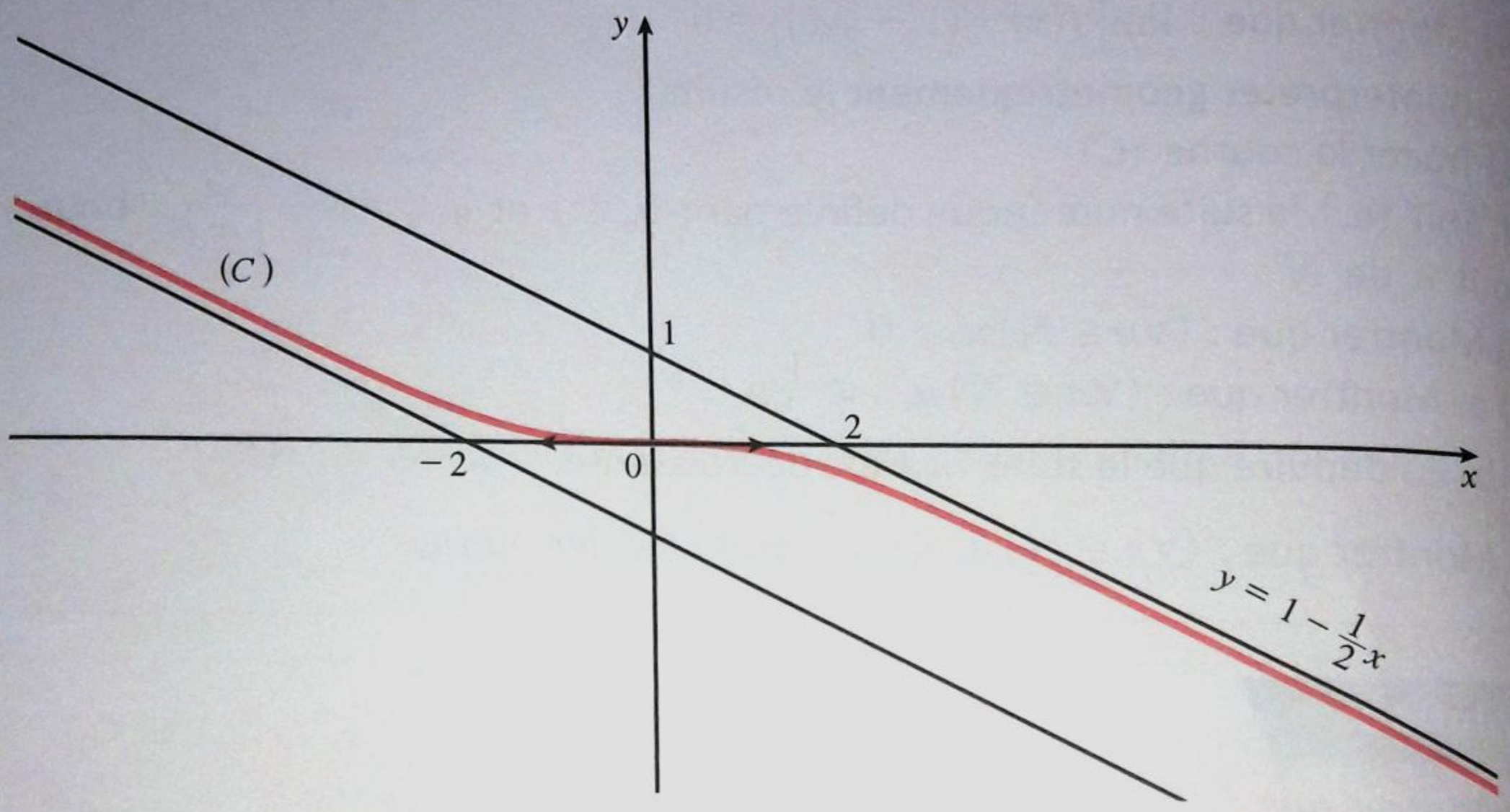
c'est-à-dire : $1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{1+e^x} \leq 0$

d'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \, 1 - \frac{2}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}x$

4) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1+e^x} = 0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation : $y = 1 - \frac{1}{2}x$

5) Puisque la fonction f est impaire alors la courbe de f sur $\mathbb{R}^-$ et la courbe de f sur $\mathbb{R}^+$ sont symétriques par un rapport au point O l'origine du repère (voir figure).



II. 1) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \, u_n > 0$

•On a : $u_0 > 0$ (car $u_0 = 1$)

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que : $u_{n+1} > 0$

On a : $u_n > 0$ donc $e^{u_n} > 1$

c'est-à-dire : $e^{u_n} + 1 > 2$ d'où : $\frac{1}{1+e^{u_n}} < \frac{1}{2}$

par suite : $\frac{-2}{1+e^{u_n}} > -1$

D'où : $1 - \frac{2}{1+e^{u_n}} > 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} > 0$

2) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

puisque $u_n > 0$ alors d'après le résultat de la question **(3) b-**) on a :

$1 - \frac{2}{1+e^{u_n}} \leqslant \frac{1}{2}u_n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $u_n > 0$ et $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$

Et puisque $\frac{1}{2} \leqslant 1$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

par suite : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3) • Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- On a : $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Donc : $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a vu que : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n \qquad (\alpha)$

et puisque: $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $\frac{1}{2} u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad (\beta)$

et d'après (α) et (β), on déduit que $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

• Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 11

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Etudier la continuité de f en 0

2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) donner le tableau de variations de f

5) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

6) Etudier l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

7) Tracer la courbe (C)

8) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = e^{\frac{1}{x}+\ln|2x-1|}\,;\, x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} \\ g(0) = 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité de g en 0 puis en $\frac{1}{2}$

b- Tracer la courbe (C_g) dans le même repère.

Solution

1) On a : $\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

par suite, f est continue à gauche en 0

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to +\infty} e^t = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

par suite, f n'est pas continue à droite en 0

Conclusion : la fonction f n'est pas continue en 0

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$

car $\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} te^t = 0$

Donc la fonction f est dérivable à gauche en 0 et on a : $f'_g(0) = 0$

Remarque : la courbe (C) admet à gauche au point $O(0;0)$ une demi-tangente horizontale.

3) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

4) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\, f'(x) = \dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) 2x^2-2x+1 > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$

d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

5) On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

et on a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = 2 \times 1 = 2$

et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 2\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\left(\frac{1}{x}\right)} - e^{\frac{1}{x}} = 2 \times 1 - 1 = 1$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = 2x + 1$

6) Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

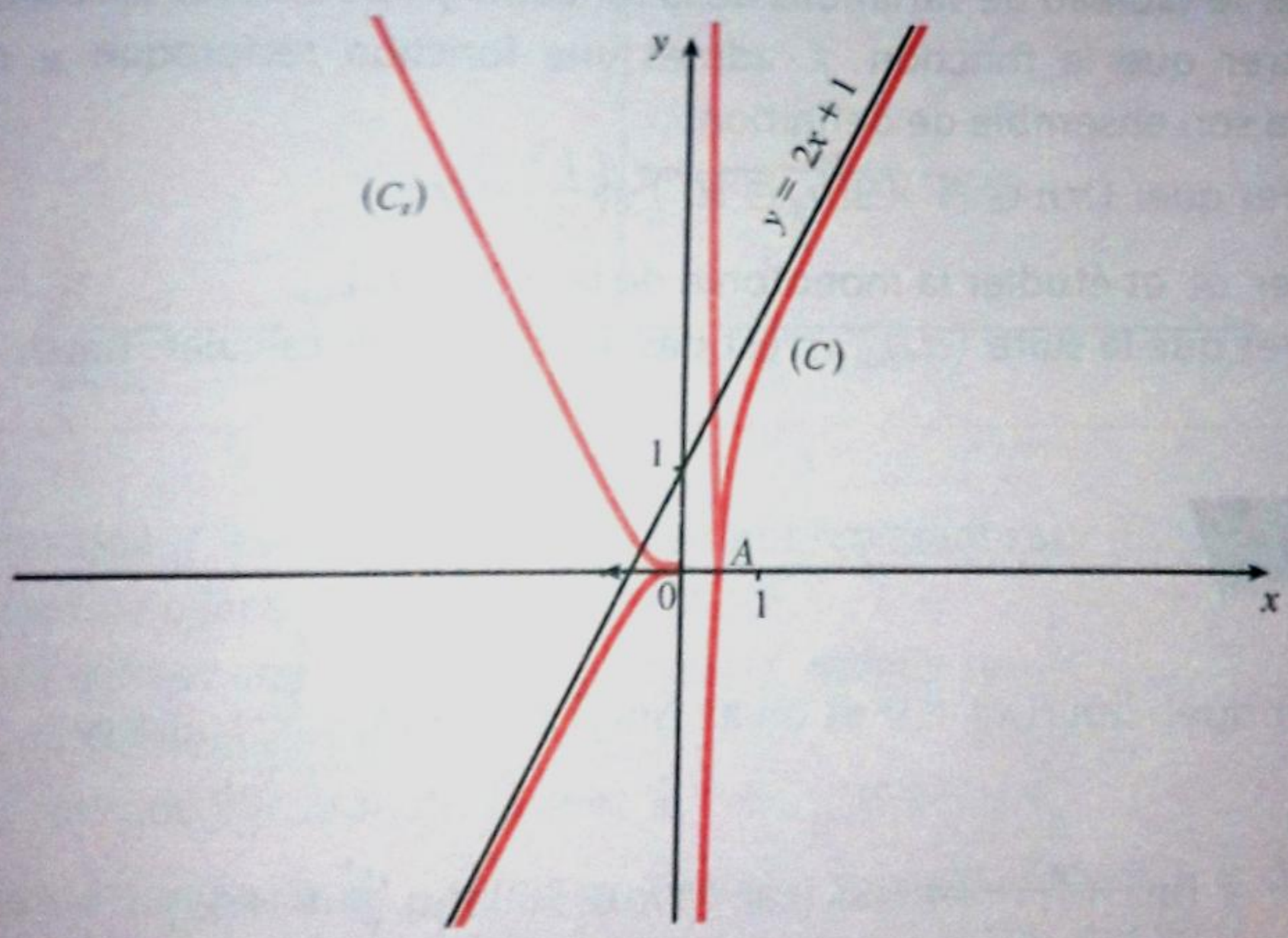
On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

et puisque $f(0) = 0$ alors la courbe (C) coupe l'axe des abscisses aux points $O(0;0)$ et $A\left(\frac{1}{2};0\right)$

7)



8) a- • $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}.e^{\ln|2x-1|}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}.|2x - 1| = \lim\limits_{x\to 0^+} |f(x)| = +\infty$

Donc g n'est pas continue à droite en 0

et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} |f(x)| = 0 = g(0)$

Donc g est continue à gauche en 0

Conclusion : la fonction g n'est pas continue en 0 car elle n'est pas continue à droite en 0.

• On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} |f(x)| = 0 = g\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc g est continue en $\frac{1}{2}$

b- On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) = |f(x)|$, donc les courbes (C) et (C_g) sont confondues dans les intervalles où (C) est au-dessus de l'axe des abscisses, et (C) et (C_g) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses dans les intervalles où (C) est au-dessous de l'axe des abscisses (voir figure).

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géometriquement les résultats.

b- Donner le tableau de variations de la fonction f, puis tracer la courbe (C)

2) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g dont on determinera son ensemble de definition.

b- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^{-*})\ g\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$

c- Calculer α_1 et étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

d- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ n'est pas minorée, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Solution

1) a- Vérifier que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+1} = +\infty$ (car $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$)

Donc la courbe (C) admet voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équatio $y = 0$ et admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'ax des ordonnées.

b- Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$

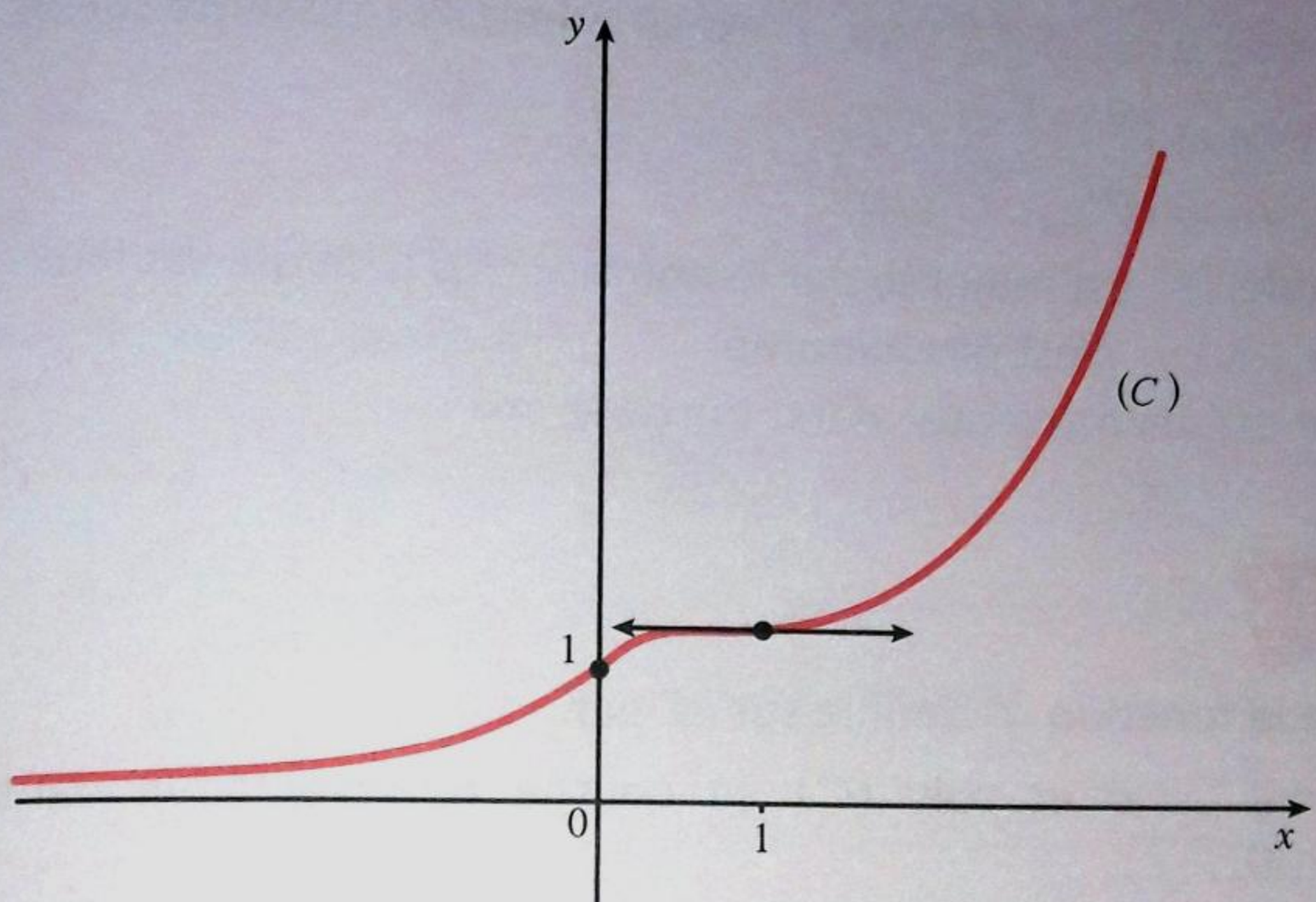
D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

Remarque:

La fonction dérivée f' s'annule en 1 sans changer de signe

Donc le point $A\left(1, \frac{e}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)



2) a- La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$

Par suite, f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

Puisque f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^{+*}$

alors il existe un nombre unique α_n de $\mathbb{R}$ tel que: $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ c'est-à-dire: $g\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$

Et puisque $\frac{1}{n} < 1$ alors $f(\alpha_n) < f(0)$

Par suite: $\alpha_n < 0$ (car f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc, il existe un nombre unique α_n de $\mathbb{R}^{-*}$ tel que: $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ c'est-à-dire: $g\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$

c- • pour $n = 1$ on a: $f(\alpha_1) = 1$

Et puisque $f(0)=1$ alors $\alpha_1=0$

- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

On a: $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

Donc $g\left(\frac{1}{n+1}\right)<g\left(\frac{1}{n}\right)$ car g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

c'est-à-dire: $\alpha_{n+1}<\alpha_n$

D'où la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

d- Montrons par l'absurde que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ n'est pas minorée

Supposons que cette suite est minorée.

Donc il existe un nombre β tel que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\alpha_n\geq\beta$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ f(\alpha_n)\geq f(\beta)$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c'est-à-dire: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{1}{n}\geq f(\beta)$

c'est-à-dire: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ n\leq f(\beta)$

D'où l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est majorée par le nombre $f(\beta)$, ce qui est faux

Donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ n'est pas minorée

Et puisqu'elle est décroissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=-\infty$

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}-x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

I. 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) Donner le tableau de variations de la fonction f

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que: $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}<\beta<1$

4) a- Etudier la concavité de la courbe (C)

b- Etudier les branches infinies de la courbe (C)

c- Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y=-x$

d- Tracer la courbe (C)

II. On considère l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$ et on pose: $g(x)=f(x)+x$

1) a- Montrer que: $g(I)\subset I$

b- Montrer que: $(\forall x\in I)\ |g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) On considère la suite (u_n) définie par: $u_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=g(u_n)$

a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

b- En déduire que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite.

Solution

I. 1) Vérifier que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

et on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{2x}}\left(2e^x - 1 - \frac{1}{2}.2xe^{2x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{2x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 0$

2) • Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = \frac{-(e^{2x} + 2e^x - 2)}{e^{2x}}$

$$= \frac{-1}{e^{2x}}(e^x - (\sqrt{3} - 1))(e^x + 1 + \sqrt{3})$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(\sqrt{3} - 1 - e^x)$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln(\sqrt{3}-1)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3}-1)$	↘	$-\infty$

3) Montrer que la restriction de f à $]-\infty, \ln(\sqrt{3}-1)]$ est une bijection de $]-\infty, \ln(\sqrt{3}-1)]$ vers $\left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3}-1)\right]$

Et puisque $0 \in \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(\sqrt{3}-1)\right]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty, \ln(\sqrt{3}-1)]$

Verifier que: $f(-1) < 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

Et en déduire que: $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

De même montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $[\ln(\sqrt{3}-1), +\infty[$ et $\frac{1}{2} < \beta < 1$

Conclusion: l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que: $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \beta < 1$

4) a- Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f''(x) = 2e^{-2x}(e^x - 2)$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f''(x)$ et la concavité de (C):

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
concavité de (C)		∩		∪	

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $\ln(2)$

Donc le point $A\left(\ln(2), \frac{3}{4} - \ln(2)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

b- On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} - e^{-2x} = 0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = -x$

et on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{2e^{-x} - e^{-2x}}{x} - 1\right) = \left[\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)}(-2 + e^{-x}) - 1\right] = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

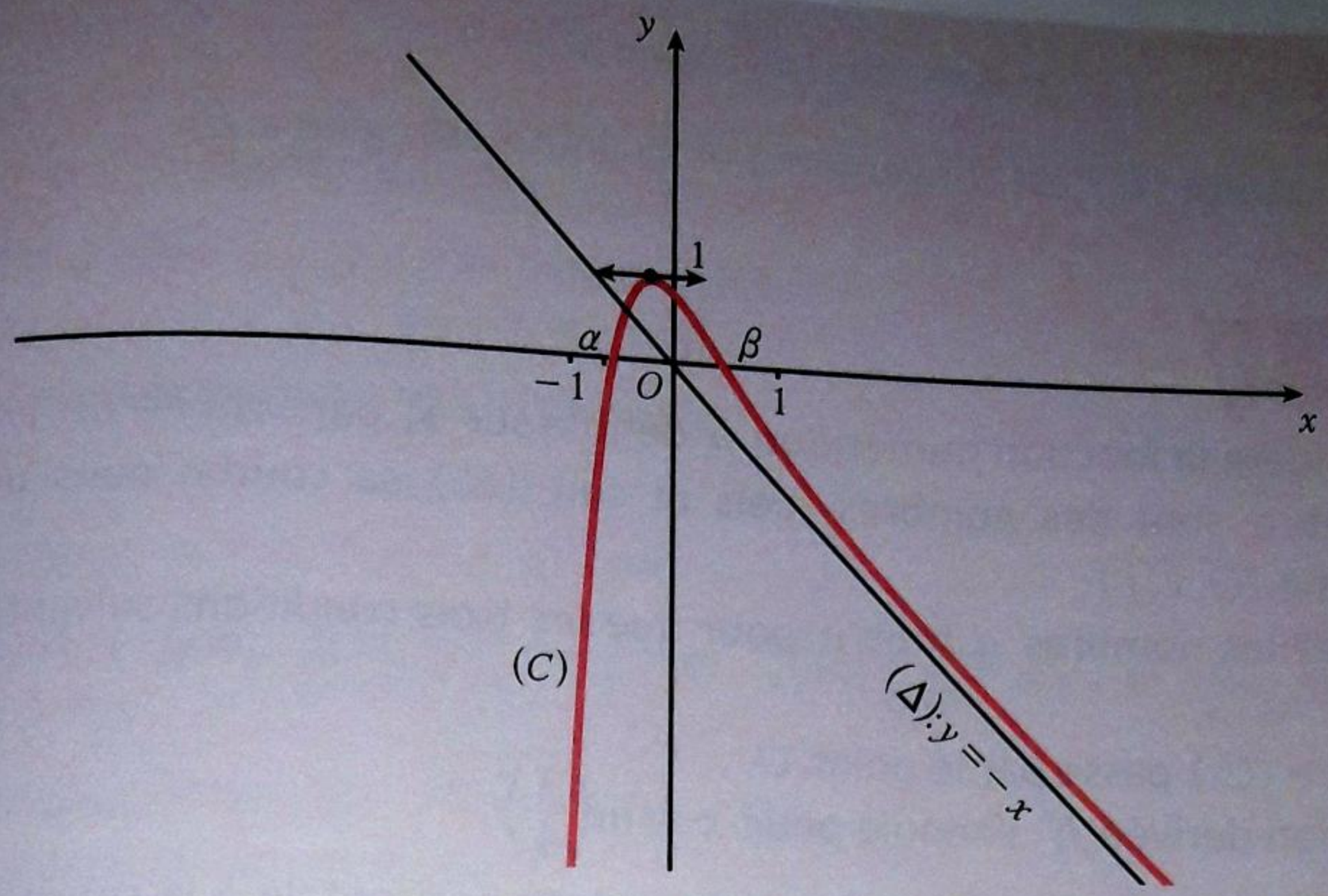
Donc la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

c- Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a: $f(x) + x = 2e^{-x} - e^{-2x} = \frac{2e^x - 1}{e^{2x}}$

D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f(x) + x$ et la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ):

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f(x) + x$		$-$	0	$+$	
position relative de (C) et (Δ)	(C) est au-dessous de (Δ)		(Δ) coupe (C) au point $B(-\ln(2), \ln(2))$		(C) est au-dessus de (Δ)

d-



II- 1) a) La fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et ona :

$\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\ g'(x)=2e^{-2x}(1-e^{x})<0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$

D'où $g(I)=\left[g(1),g\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{2e-1}{e^2},\frac{2\sqrt{e}-1}{e}\right]$

Et puisque $\frac{1}{2}<\frac{2e-1}{e^2}$ et $\frac{2\sqrt{e}-1}{e}<1$ alors $g(I)\subset I$

b) Vérifier que $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right)-\frac{1}{2}\leqslant g'(x)<0$

On peut dresser le tableau de variations de g' en calculant $g''(x)$

D'où $(\forall x\in I)\ |g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) a- La fonction g est continue et dérivable sur I et $(\forall x\in I)|g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

Et puisque $\beta\in I$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I$ (utiliser un raisonnement par récurrence) alors d'après l'inégalité des accroissements finis on a:

$(\forall n\in\mathbb{N})\ |g(u_n)-g(\beta)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\beta|$

Et puisque $g(u_n)=u_{n+1}$ et $g(\beta)=f(\beta)+\beta=\beta$

alors $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\beta|\leq\frac{1}{2}|u_n-\beta|$

b- Montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_n-\beta|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\beta|$

Et puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \beta| = 0$

Par suite, la suite (u_n) est convergente et sa limite est égale à β

Exercice 14

I. On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = ae^{2x} + be^x + c$ où a, b et c sont des nombres réels et soit (C_h) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer les nombres a, b et c pour que les trois conditions suivantes soient vérifiées:

- La courbe (C_h) passe par le point O
- La fonction derivée h' s'annule pour $x = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$
- La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$

1) Calculer $f\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$, $f\left(\ln\left(\frac{3}{8}\right)\right)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Donner le tableau de variations de la fonction f

3) Etudier l'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

4) Determiner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0

5) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

6) Etudier la concavité de la courbe (C_f)

7) Tracer la courbe (C_f) (on donne: $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$)

III. On considère la fonction numérique g définie par: $g(x) = \ln(f(x))$

1) Déterminer D_g et calculer les limites de g aux bornes de D_g

2) Donner le tableau de variations de g

3) Etudier les branches infinies de la courbe (C_g)

4) Etudier l'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

5) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère.

Solution

I. • La courbe (C_h) passe par le point O signifie que $h(0) = 0$ c'est-à-dire $a + b + c = 0$

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a: $h'(x) = 2ae^{2x} + be^x$

La fonction h' s'annule pour $x = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$ signifie que $h'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0$

c'est-à-dire $2a \cdot \frac{9}{16} + b \cdot \frac{3}{4} = 0$ c'est-à-dire $3a + 2b = 0$

• La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$ signifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$

c'est-à-dire $a \times 0 + b \times 0 + c = 1$ c'est-à-dire $c = 1$

Et en résolvant le système $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

On trouve que: $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$

II. 1) Vérifier que: $f\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -\frac{1}{8}$ et $f\left(\ln\left(\frac{3}{8}\right)\right) = \frac{5}{32}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = (4e^x - 3)e^x$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$+\infty$

3) On a: $f(x) = 0 \iff (e^x - 1)(2e^x - 1) = 0$

$\iff e^x = 1 \ ou \ e^x = \frac{1}{2}$

$\iff x = 0 \ ou \ x = -\ln(2)$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses aux points $O(0,0)$ et $A(-\ln(2), 0)$

4) Vérifier qu'une équation de la tangente (T) est $y = x$

5) On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Donc la courbe (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

et on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \left(2e^x - 3 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

Donc la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

6) Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f''(x) = (8e^x - 3)e^x$

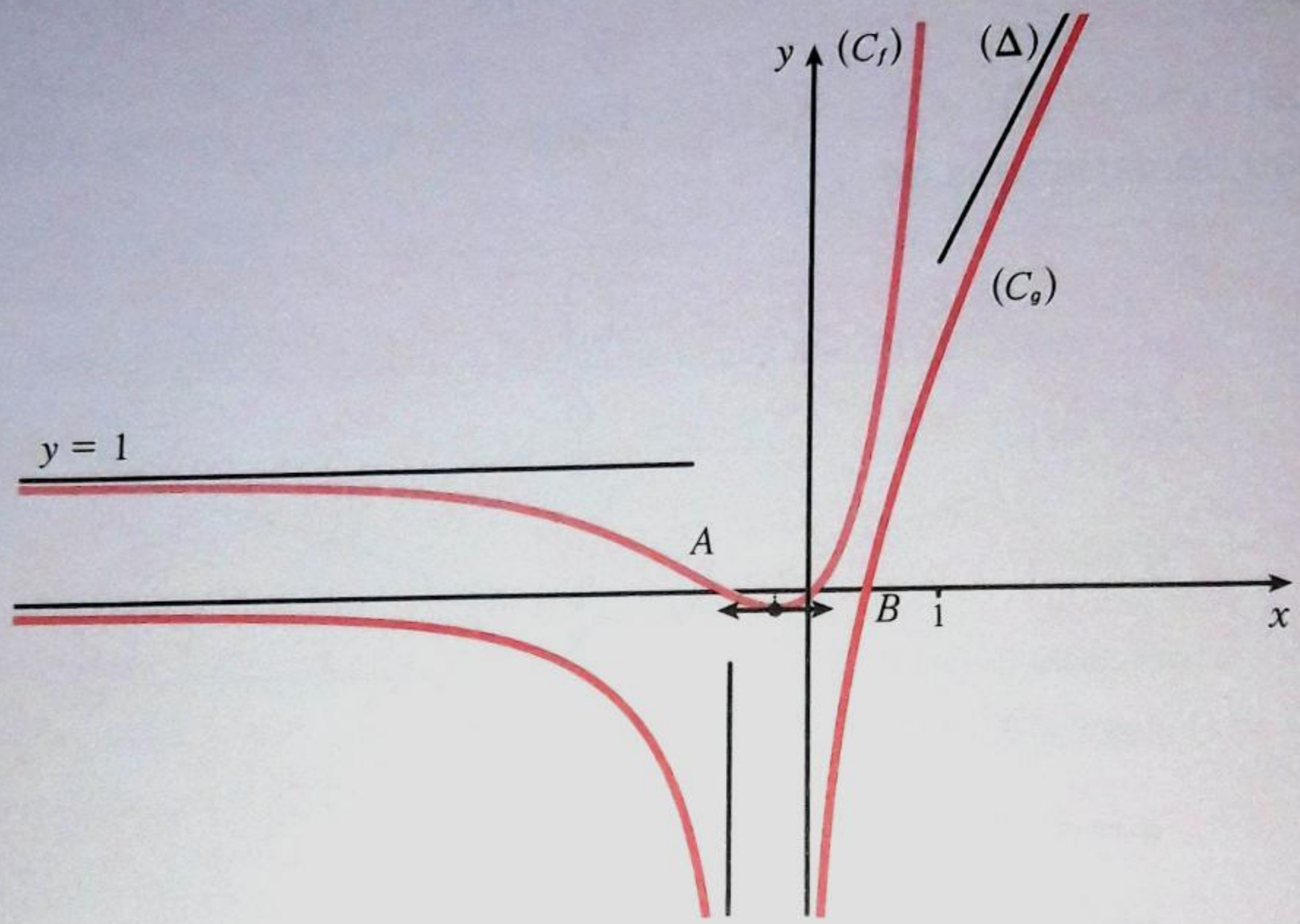
D'où le tableau suivant qui donne le signe de $f''(x)$ et la concavité de (C_f) :

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{8}\right)$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
concavité de (C_f)	∩		∪

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

Donc (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$ et d'ordonnée $\frac{5}{32}$

7)



III. 1) Vérifier que: $D_g =]-\infty, -\ln(2)[\cup]0, +\infty[$

et $\lim\limits_{x\to(-\ln 2)^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

2) On a: $(\forall x \in D_g)\ g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

D'où le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	

3) • On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

Donc la courbe (C_g) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

• On a: $\lim\limits_{x\to(-\ln(2))^-} g(x)=-\infty$

Donc la courbe (C_g) admet une asymptote verticale d'equation $x=-\ln(2)$

• On a: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

Donc la courbe (C_g) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$

• On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[e^{2x}\left(2-\frac{3}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right]}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{\ln\left(2-\frac{3}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}=2$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2-\frac{3}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=\ln(2)$

Donc la courbe (C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y=2x+\ln(2)$

4) On a: $g(x)=0\iff\ln(f(x))=0$

$\iff f(x)=1$

$\iff(2e^x-3)e^x=0$

$\iff e^x=\frac{3}{2}$

$\iff x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Et puisque $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\in D_g$ alors la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses au point $B\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right),0\right)$

5) Voir la figure précédente.

Exercice 15

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} & ;x>0\\ f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}} & ;x<0\\ f(0)=0\end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

b- Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

2) a- Montrer que la fonction f est continue en 0

b- Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

3) a- Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\ f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ (x^2-x-2)$

b- Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ x\ln(x)-(1+x)\ln(1+x)<0$

c- Donner le tableau de variations de f

4) a- Montrer que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$

b- Etudier les branches infinies de la courbe (C)

c- Tracer la courbe (C) (Remarquer que $f(-2)=0$ et on prend $\frac{1}{e}\simeq 0,4$)

5) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]1,+\infty[$ et que $1,76<\alpha<1,78$

6) On considère la suite (u_n) definie par: $u_0=\frac{3}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_{n+1}=f(u_n)$

a- En utilisant la courbe de f sur $]1,+\infty[$, représenter sur l'axe des abscisses les nombres u_0, u_1, u_2 et u_3

b- Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par le nombre α

c- Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et determiner une propriété de sa limite.

Solution

1) a- Vérifier que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

b- On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}=1$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

2) a- on a: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=0$

car: $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)=2$

Donc $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$

D'où f est continue à gauche en 0

et on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}=0$

car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0+}\ln(x)=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

D'où f est continue à droite en 0, par suite f est continue en 0

b- On a: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln(x)}=1\times 0=0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

et on a: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)\cdot\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{t\to -\infty}\left(\frac{1}{t}+2\right).te^t=(0+2)\times 0=0$$

Donc f est derivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$

et puisque $f'_d(0)=f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

3) a- Vérifier que: $(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\ \ f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x^2-x-2)$

b- On considère la fonction $u:x\longmapsto x\ln(x)-(1+x)\ln(1+x)$

On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ u'(x)=\ln(x)-\ln(x+1)$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ u'(x)<0$

Par suite, la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}u(x)=0$

alors $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ u(x)<0$

c- On a: $(\forall x\in\mathbb{R}^{-*})\ \ f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x^2-x-2)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

et verifier que: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ f'(x)=\dfrac{x\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln(x))^2}$

$$=\frac{u(x)}{x(x+1)(\ln(x))^2}$$

En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ f'(x)<0$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$-$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↘	$+\infty$	↘ 1

4) a- On a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x-3$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)}+2e^{\frac{1}{x}}-3$$

$$=1+2-3=0 \quad (\text{car } \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^-}\frac{e^t-1}{t}=1)$$

b- On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=1$

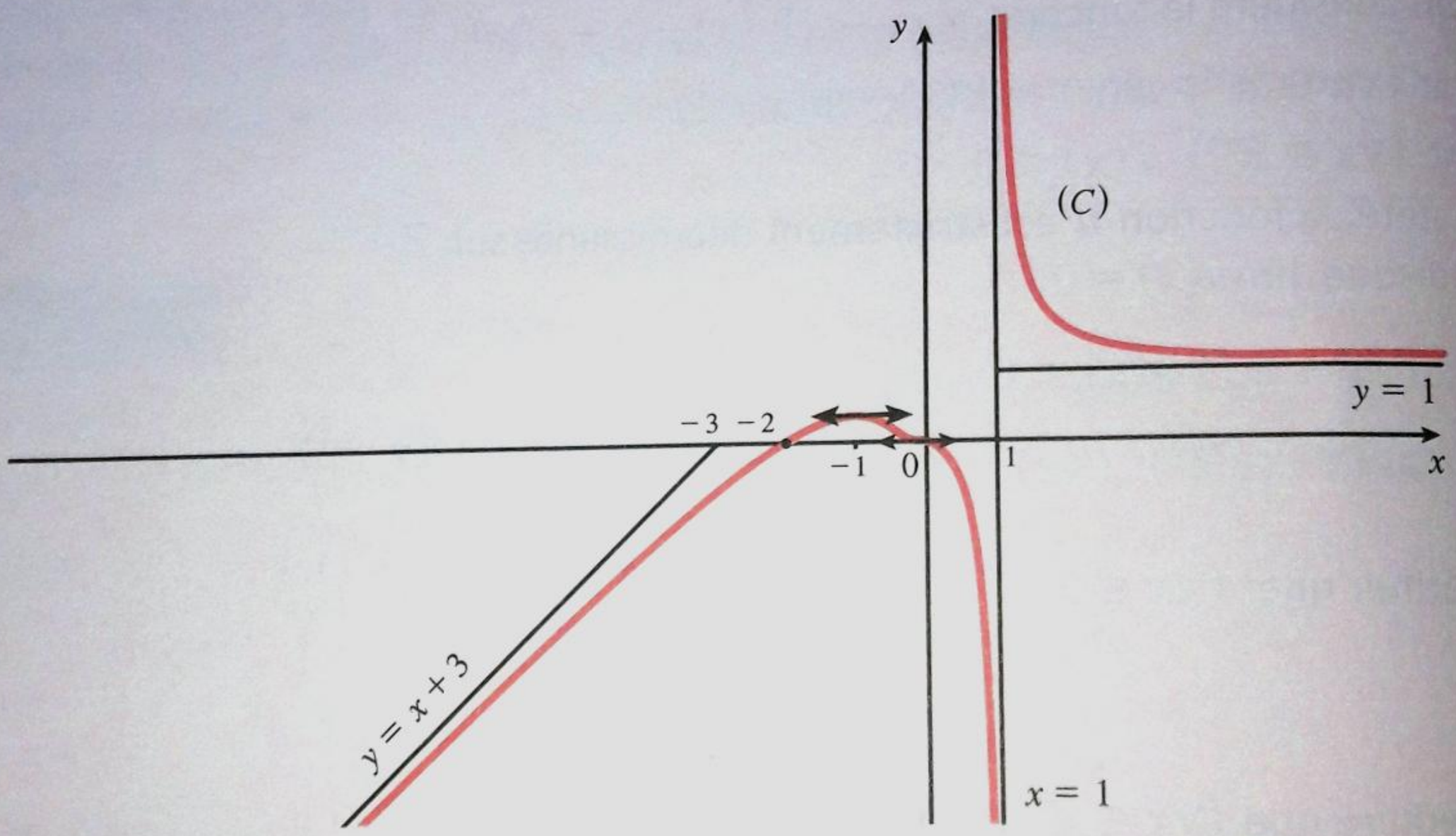
et on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=x+3$

et on a: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

Donc la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=1$

c-



5- Considèrer la fonction $g: x \longmapsto f(x)-x$

et montrer qu'elle est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

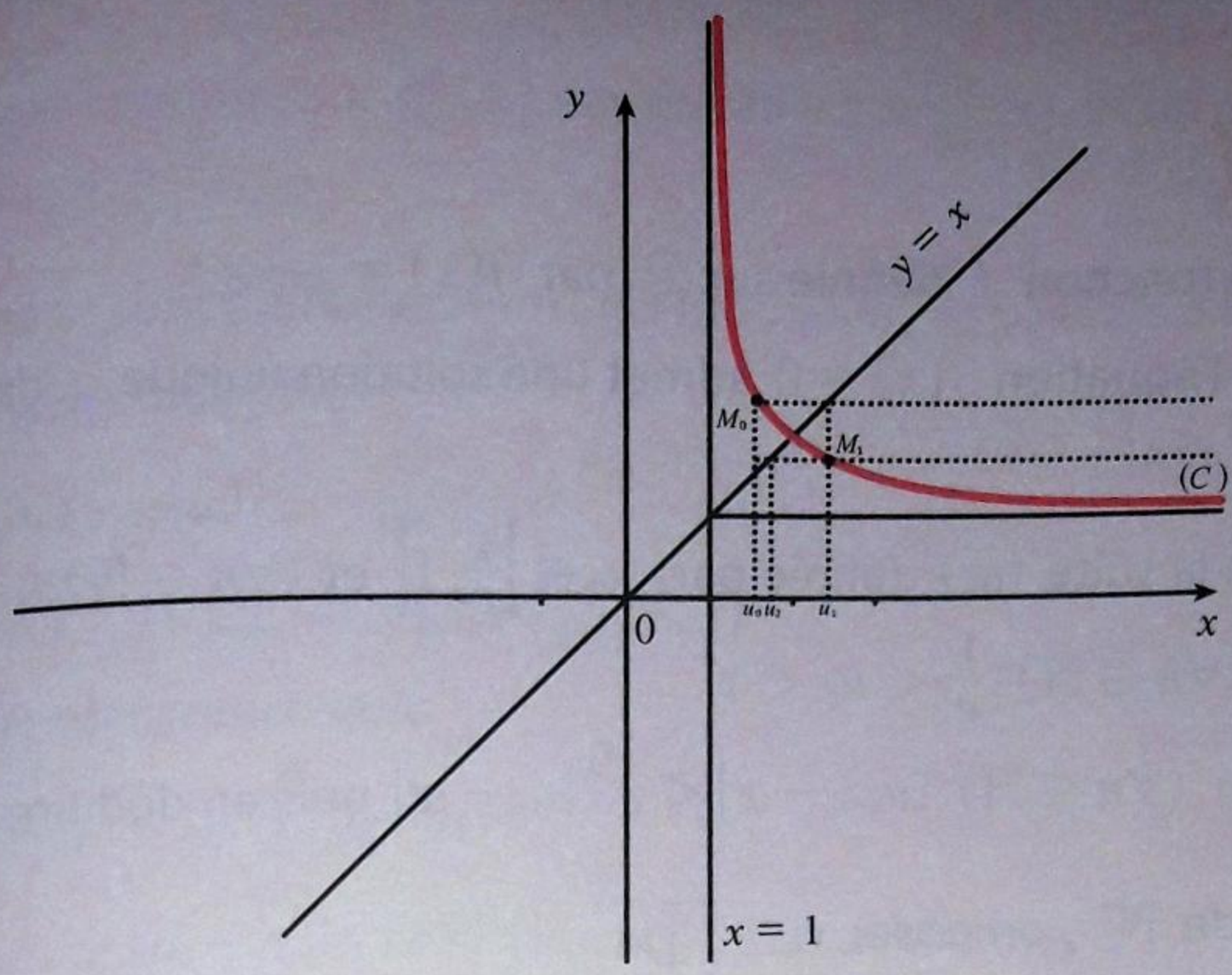
Par suite, la fonction g est une bijection de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

Donc l'équation $g(x)=0$ c'est-à-dire l'équation $f(x)=x$ admet une solutio unique α dans l'intervalle $]1,+\infty[$

Vérifier que: $f(1,76)>0$ et $f(1,78)<0$ et en déduire que: $1,76<\alpha<1,78$

6) a- On a : $u_0=\frac{3}{2}$ et $u_1=f(u_0)$

On détermine sur la courbe (C) le point $M_0(u_0, u_1)$
La parallèle à l'axe des abscisses qui passe par M_0 coupe la droite d'équation $y = x$ au point $M'_0(u_1, u_1)$ ainsi on représente u_1 sur l'axe des abscisses et on pocède de même pour représenter les nombres u_2, et u_3 sur l'axe des abscisses



b- • On a: $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$ et vérifier que: $u_2 \geq u_0$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$, supposons que $u_{2n} \leq u_{2n+2}$

On a: f est croissante sur $]1, +\infty[$ et $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$

Donc la fonction fof est croissante sur $]1, +\infty[$

par suite: $fof(u_{2n}) \leq fof(u_{2n+2})$

c'est-à-dire: $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$

Et d'après le principe de récurrence, on a: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n} \leq u_{2n+2}$

Donc la suite (u_{2n}) est croissante.

• On a: $u_0 \leq \alpha$ car $u_0 = 1,5$ et $\alpha > 1,76$

• soit n un élément de $\mathbb{N}$, supposons que $u_{2n} \leq \alpha$

Donc $fof(u_{2n}) \leq fof(\alpha)$

c'est-à-dire $u_{2n+2} \leq \alpha$ car $fof(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$

donc d'après le principe de récurrence, on a: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{2n} \leq \alpha$

par suite, (u_{2n}) est majorée par le nombre α

c- La suite (u_{2n}) est croissante et majorée

Donc elle est convergente.

• On a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{2n+2} = fof(u_{2n})$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{2n} \in]1, +\infty[$

Et puisque la fonction fof est continue sur $]1,+\infty[$
et $fof(]1,+\infty[\subset)]1,+\infty[$ et la suite (u_{2n}) est convergente
alors la limite de la suite (u_{2n}) est une solution de l'équation $fof(x)=x$ dans l'intervalle $[1,+\infty[$

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-e^{-x}$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e},1\right[$

2) On considère la suite (u_n) définie par: $u_0\in\left]\frac{1}{e},1\right[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=e^{-u_n}$

Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{e}<u_n<1$

3) Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-\alpha|<e^{-\frac{1}{e}}|u_n-\alpha|$ puis en déduire la limite de la suite (u_n)

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $v_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$

Montrer que $v_n=e^{-\sum_{k=0}^{n-1}u_k}$ puis en déduire la limite de la suite (v_n)

Solution

1) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)
et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a: $f'(x)=1+e^{-x}$
Donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)>0$
par suite, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Et puisque $f(1)>0$ et $f\left(\frac{1}{e}\right)<0$
alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e},1\right[$

2) Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{e}<u_n<1$

- pour $n=0$ on a: $\frac{1}{e}<u_0<1$
- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que: $\frac{1}{e}<u_n<1$ et montrons que: $\frac{1}{e}<u_{n+1}<1$
On a: $\frac{1}{e}<u_n<1$ donc $-1<-u_n<-\frac{1}{e}$ par suite $e^{-1}<e^{-u_n}<e^{-\frac{1}{e}}$ c'est-à-dire $\frac{1}{e}<u_{n+1}<e^{-\frac{1}{e}}$

Et puisque $e^{-\frac{1}{e}} < 1$ alors $\frac{1}{e} < u_{n+1} < 1$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{e} < u_n < 1$

3) * On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$

La fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ et on a:

$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right)\ |g'(x)| \leq e^{-\frac{1}{e}}$

Et puisque u_n et α sont deux éléments de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors d'après l'inégalité des accroissements finis on a:

$(\forall n \in \mathbb{N})\ |g(u_n) - g(\alpha)| \leq e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha|$

c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha|$

*** Montrons par récurrence que:**

$(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^n |u_0 - \alpha|$

- Pour $n = 0$ on a: $|u_0 - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^0 |u_0 - \alpha|$, car $(e^{-\frac{1}{e}})^0 = 1$
- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

Supposons que: $|u_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^n |u_0 - \alpha|$ et montrons que:

$|u_{n+1} - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^{n+1} |u_0 - \alpha|$

On a vu que: $|u_{n+1} - \alpha| < e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha|$

Et puisque $|u_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^n |u_0 - \alpha|$

alors $e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^{n+1} |u_0 - \alpha|$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^{n+1} |u_0 - \alpha|$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leq (e^{-\frac{1}{e}})^n |u_0 - \alpha|$

- Et puisque $-1 < e^{-\frac{1}{e}} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{-\frac{1}{e}})^n = 0$

par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{-\frac{1}{e}})^n |u_0 - \alpha| = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

4) • Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_n = e^{-u_{n-1}}$, Donc $\ln(u_n) = -u_{n-1}$

par suite, $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = -\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

c'est-à-dire : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = -\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

c'est-à-dire : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

D'où : $\prod_{k=1}^{n} u_k = e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$

c'est-à-dire : $v_n = e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $(\forall k \in \{0,...,n-1\})\frac{1}{e} \leq u_k \leq 1$, Donc: $\frac{n}{e} \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq n$

D'où: $e^{-n} \leq e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k} \leq e^{-\frac{n}{e}}$

c'est-à-dire: $e^{-n} \leq v_n \leq e^{-\frac{n}{e}}$

Et puisque : $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{n}{e}} = 0$

alors : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$\begin{cases} f(x) = x^{\frac{x+1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $x \neq 0$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier la continuité de f à droite en 0

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

4) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par: $g(x) = 1 + x - \ln(x)$

Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$

5) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ $f'(x) = \frac{f(x)g(x)}{x^2}$ puis donner le tableau de variations de f

6) Etudier la position relative de (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$, puis tracer la courbe (C)

Solution

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a: $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x}\ln(x) = -\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0

2) On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$

Et puisque: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(x) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$)

alors: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$

par suite , f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

et la courbe (C) admet à droite au point $O(0,0)$ une demi-tangente horizontale

3) On a: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)-\ln x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$

et $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)\cdot \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\frac{\ln(x)}{x}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{e^t-1}{t} = 1$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$

4) Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g'(x) = \frac{x-1}{x}$

D'où le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

Et en déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

5) Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ f'(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{x^2}$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) On a : $f(0) = 0$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$f(x) - x = x^{1+\frac{1}{x}} - x = x(x^{\frac{1}{x}} - 1)$$

Donc : $f(x) = x \iff x^{\frac{1}{x}} = 1$

$$\iff e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = 1$$

$$\iff \ln(x) = 0$$

$$\iff x = 1$$

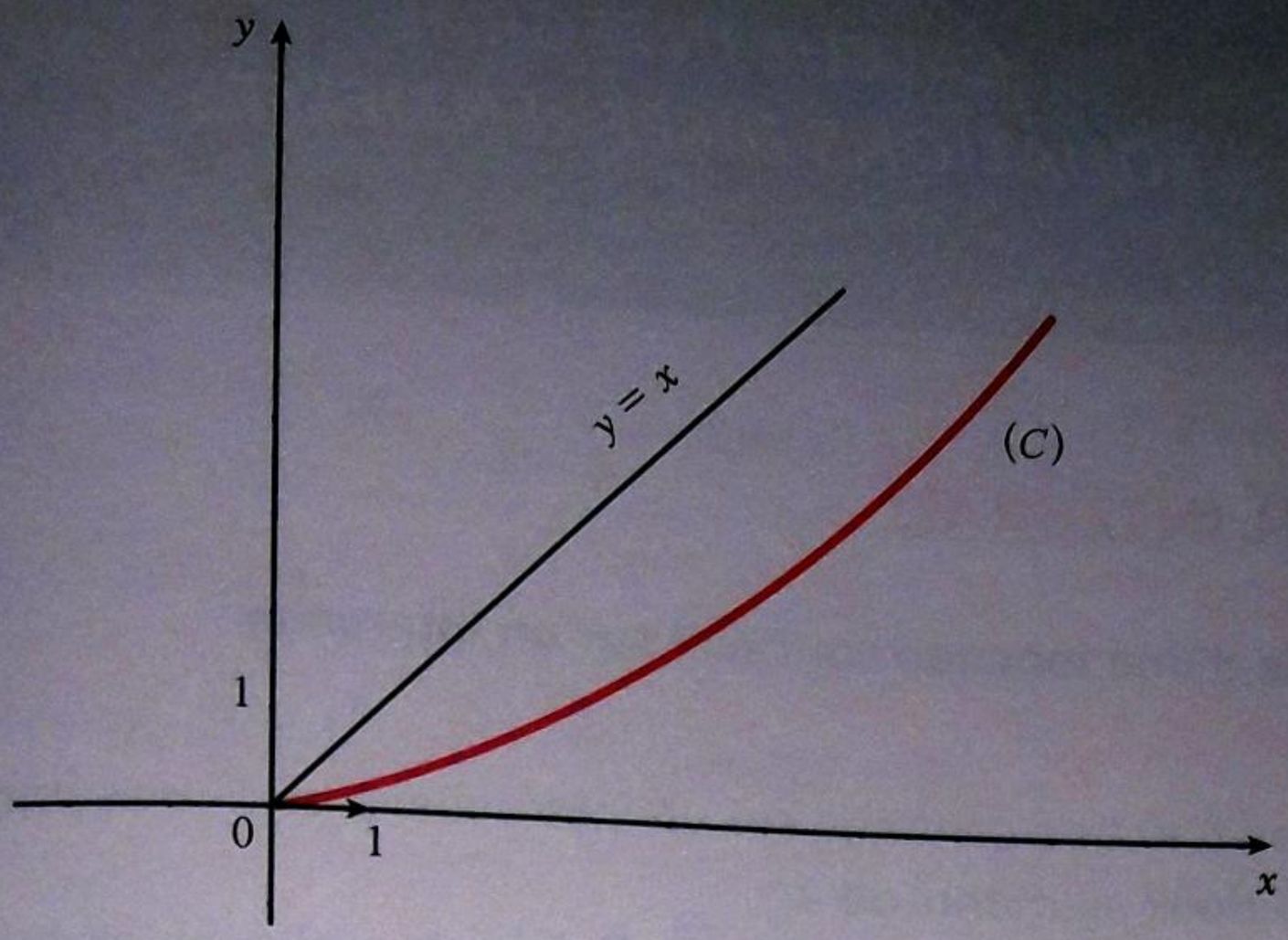
et $f(x) > x \iff e^{\frac{1}{x}\ln(x)} > 1$

$$\iff \frac{1}{x}\ln(x) > 0$$

$$\iff \ln(x) > 0$$

$$\iff x > 1$$

Alors, la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur $]1, +\infty[$, au dessous de (Δ) sur $]0, 1[$, et (C) et (Δ) se coupent oux points $O(0;0)$ et $A(1;1)$


y
y = x
(C)
1
0
1
x

03

CALCUL INTÉGRAL EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 CALCUL INTÉGRAL:

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle :

Définition:

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I et a et b deux élements de I

Le nombre réel $F(b)-F(a)$ noté $\int_a^b f(x)dx$ s'appelle intégrale de f de a à b

et on écrit: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

2 Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a,b et c trois éléments de I et α une constante réelle, on a:

- $\int_a^a f(x)dx=0$
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ **(Relation de Chasles)**

3 Tableau des primitives usuelles :

La fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I :

$f(x)$	$F(x)$	I
0	c (constante réelle)	$\mathbb{R}$
a	ax	$\mathbb{R}$
$x^n(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n(n\in\mathbb{Z}^{-*}-\{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$x^r(r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0,+\infty[$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$
$\cos(ax+b)\ (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)\ (a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)}$	I est l'intervalle où la fonction u est dérivable et ne s'annule pas
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$	I est l'intervalle où la fonction u est dérivable et strictement positive
$u'(x)(u(x))^r\ (r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$\frac{(u(x))^{r+1}}{r+1}$	I est l'intervalle où la fonction u et derivable et strictement positive
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\text{Arctan}(u(x))$	I est l'intervalle où la fonction u est dérivable
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	I est l'intervalle où la fonction u est dérivable et ne s'annule pas
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	I est l'intervalle où la fonction u est dérivable

4 Intégrale et ordre :

Propriété 1:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$

- Si $f(x)\geq 0$ pour tout x de $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f(x)\geq g(x)$ pour tout x de $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Propriété 2:

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que $a < b$

On a: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

5 Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a < b)$ alors il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$

6 Fonction définie par une intégrale :

Propriété:

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I,

la fonction $g: x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et pour tout x de I

on a: $g'(x) = f(x)$

Remarque : La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a

7 Intégration par parties :

Propriété:

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I, et soit $(a,b) \in I^2$

On a: $\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx$

8 Intégration par changement de variable

Propriété :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telle que g' est continue sur J et $g(J) \subset I$

Pour tous a et b de J on a: $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$

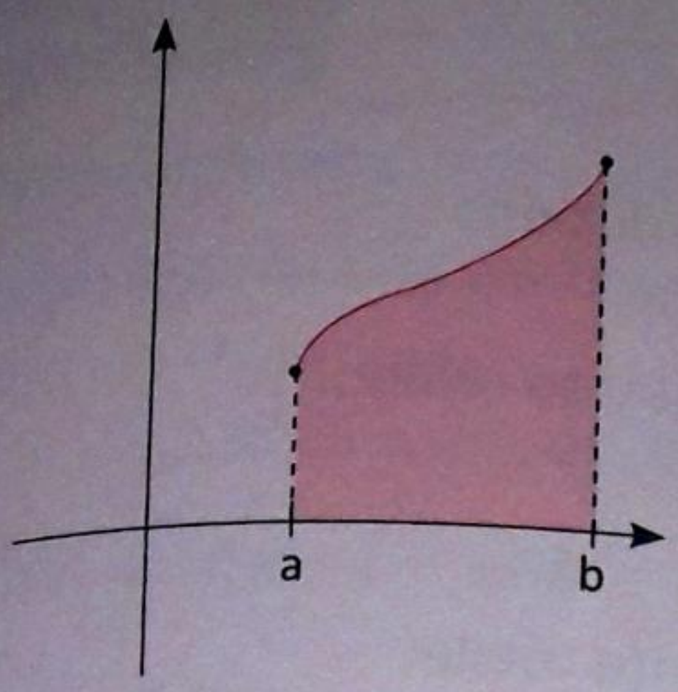
9 Calcul d'aires :

Propriété:

Le plan est rapporté à un repère orthogonal

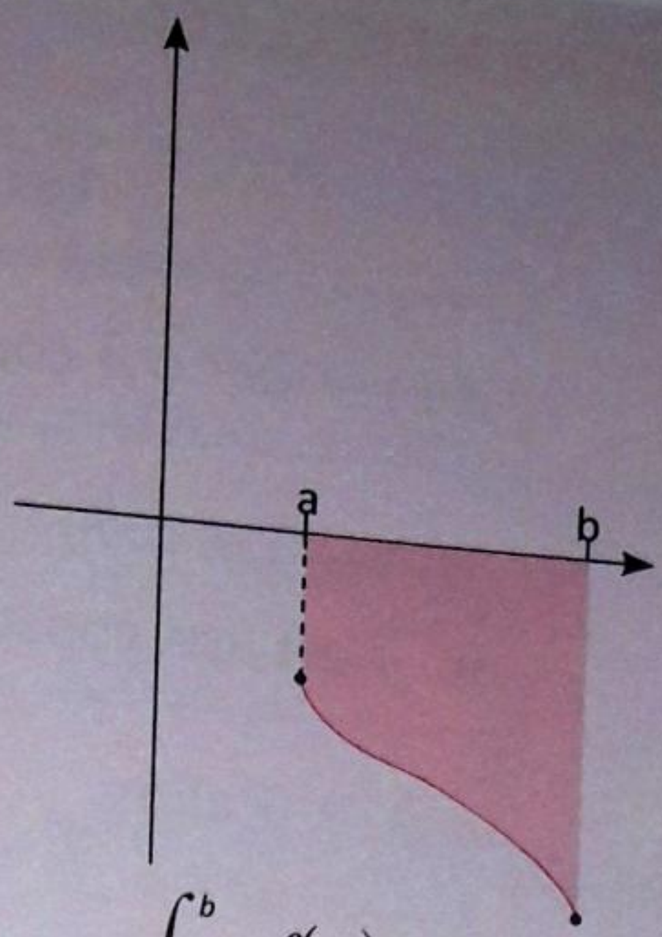
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b](a < b)$

l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b |f(x)|dx$ en unité d'aire

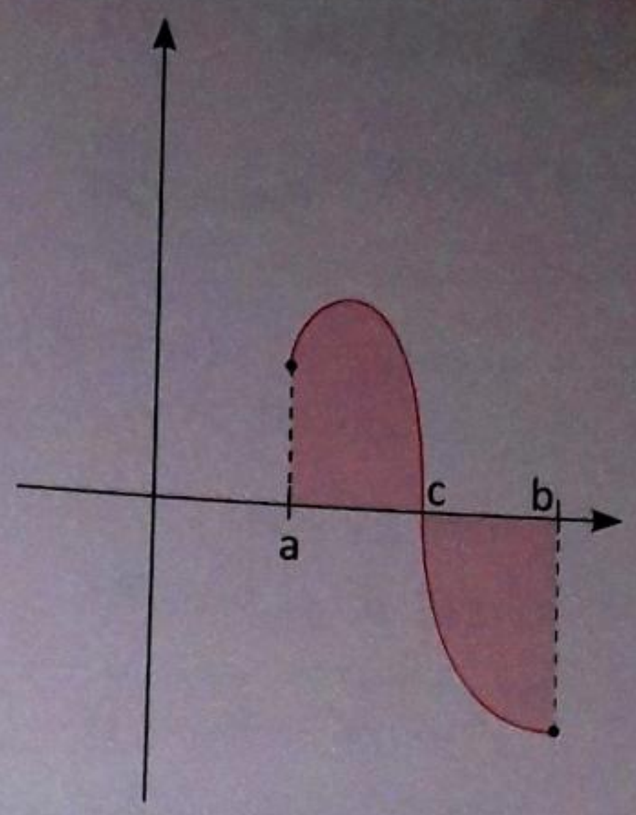


En unité d'aire, l'aire est:

$$\int_a^b f(x)dx$$



$$\int_a^b -f(x)dx$$



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$$

10 Calcul de volumes

Propriété 1:

Soient f une fonction continue sur un segment $[a,b](a<b)$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C) (un tour complet) autour de l'axe des abscisses est: $\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$ en unité de volume.

Propriété 2:

Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b](a<b)$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C) (un tour complet) autour de l'axe des ordonnées est: $V = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} \pi(f^{-1}(t))^2 dt \right|$ en unité de volume

et si de plus , f est dérivable sur $[a,b]$

alors $V = \pi \int_a^b x^2 |f'(x)| dx$ en unité de volume.

11 Suite dont la limite est une intégrale :

Propriété:

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ ou pose:

$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et $v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

Les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont convergentes et ont la même limite égale à l'integrale $\int_a^b f(x)dx$

2 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES:

Equation	Les solutions f
$y' = ay \qquad (a \in \mathbb{R})$	$f(x) = \lambda e^{ax}$ (λ constante réelle)
$y' = ay + b$ $(a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R})$	$f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ où λ est une constante réelle
$y'' + ay' + by = 0$ • L'equation caractéristique associée est: $r^2 + ar + b = 0$ • Le discriminant de l'equation caractéristique est : $\Delta = a^2 - 4b$	Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = \alpha e^{n_1 x} + \beta e^{n_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les solutions reélles de l'equation caractéristique et α et β sont deux constantes réelles.
	Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ où $p + qi$ est une solution complexe de l'équation caractéristique
	Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$ où r est la solution de l'équation caractéristique

Remarque :

Dans le cas où $\Delta < 0$, on peut écrire les solutions sous la forme:

$x \longmapsto Ae^{px} \cos(qx + B)$ où A et B sont deux constantes réelles.

Exercice 1

1) Soient f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et a et b deux éléments de I

Montrer que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

2) On considère les intégrales:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}dx \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}dx$$

a- Montrer que: $A = B$

b- Calculer $A + B$

c- En déduire les valeurs de A et B

Solution

1) Pour montrer que $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$, on utilise une intégration par changement de variable en posant: $t = a+b-x$

Donc $dt = -dx$

Pour $x = a$ on a $t = b$ et pour $x = b$ on a $t = a$

Donc : $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(t)(-dt)$

$$= \int_a^b f(t)dt$$

2) a- Pour montrer que $A = B$, on utilise le résultat de la question précédente

On a: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^3\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^3\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

Et puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

alors $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}dx$

par suite $A = B$

b- On a: $A+B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)+\sin^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0$$

Donc $A+B = \frac{\pi}{2}$

c- Pour déterminer les valeurs de A et B, on résout le système: $\begin{cases} A = B \\ A+B = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

on trouve alors: $A = \frac{\pi}{4}$ et $B = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

On considère les intégrales suivantes:

$I = \int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$, $J = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$ et $K = \int_1^2 \frac{x}{1+x}dx$

1) Calculer K

2) Montrer que: $J = 2K$ (poser: $\sqrt{t} = x$)

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que: $I = 4\ln(3) - 2\ln(2) - J$, puis en déduire la valeur de I

Solution

1) On a: $K=\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx=\int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$$=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=[x-\ln(x+1)]_1^2$$

Donc $K=1+\ln(2)-\ln(3)$

2) On a: $J=\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$

On pose: $x=\sqrt{t}$

On a: $t=1\Longrightarrow x=1$ et $t=4\Longrightarrow x=2$

et $\sqrt{t}=x\Longrightarrow t=x^2$

$\Longrightarrow dt=2xdx$

Donc : $J=\int_1^2 \frac{1}{1+x}.2xdx=2\int_1^2 \frac{x}{1+x}dx=2K$

3) • On a: $I=\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$

On pose: $u(t)=\ln(1+\sqrt{t})$ et $v'(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

$u'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}$; $v(t)=2\sqrt{t}$

Donc $I=[u(t)v(t)]_1^4-\int_1^4 u'(t)v(t)dt$

$=[2\sqrt{t}\ln(1+\sqrt{t})]_1^4-\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$

par suite: $I=4\ln(3)-2\ln(2)-J$

• On a: $J=2K$ et $I=4\ln(3)-2\ln(2)-J$

Donc : $I=4\ln(3)-2\ln(2)-2K=4\ln(3)-2\ln(2)-2(1+\ln(2)-\ln(3))$

par suite: $I=6\ln(3)-4\ln(2)-2$

Exercice 3

1) Résoudre l'équation différentielle suivante :

(E): $4y''+4y'+y=0$

2) a- déterminer la solution f de l'équation (E) telle que : $f(0)=-4$ et $f'(0)=4$

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)dx$

3) pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-2n)e^{-\frac{k}{2n}}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente en déterminant sa limite.

Solution

1) L'équation caractéristique de l'équation différentielle (E) est : $4r^2+4r+1=0$

Cette équation admet une solution unique $r=-\frac{1}{2}$

Donc les solutions de l'equation (E) sont les fonctions:

$x \longmapsto (\alpha x+\beta)e^{-\frac{x}{2}}$ où α et β sont deux constantes réelles

2) a- On a: $f(x)=(\alpha x+\beta)e^{-\frac{1}{2}x}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $f'(x)=\alpha e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(\alpha x+\beta)e^{-\frac{1}{2}x}$

Et puisque: $f(0)=-4$ et $f'(0)=4$

alors: $\beta=-4$ et $\alpha-\frac{1}{2}\beta=4$, par suite : $\alpha=2$ et $\beta=-4$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f(x)=(2x-4)e^{\frac{-x}{2}}$

b- On a: $I=\int_0^1 f(x)dx$

$$=\int_0^1(-4f''(x)-4f'(x))dx=[-4f'(x)-4f(x)]_0^1 \text{ (car } 4f''+4f'+f=0)$$

$$=-4[(4-x)e^{-\frac{x}{2}}+(2x-4)e^{-\frac{x}{2}}]_0^1=-4[xe^{-\frac{x}{2}}]_0^1$$

Donc: $I=\frac{-4}{\sqrt{e}}$

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_n=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-2n)e^{-\frac{k}{2n}}$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-2\right)e^{-\frac{k}{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2.\frac{k}{n}-4\right)e^{\frac{\left(-\frac{k}{n}\right)}{2}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(0+(1-0)\frac{k}{n}\right)$$

Et puisque f est continue sur $[0,1]$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on a:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{-4}{\sqrt{e}}$$

Exercice 4

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $u_n=\int_0^1\left(\frac{t}{1+t}\right)e^{\frac{t}{n}}\,dt$

1) a- Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 0\leq u_n\leq\frac{n}{2}(e^{\frac{1}{n}}-1)$

b- En déduire que, si $(u_n)_{n>0}$ est convergente alors sa limite ℓ Vérifie:

$0\leq\ell\leq\frac{1}{2}$

2) Calculer l'intégrale: $I=\int_0^1\frac{t}{1+t}dt$

3) a- Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ I\leq u_n\leq I\,e^{\frac{1}{n}}$

b- En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Solution

1) a- Vérifier que: $(\forall t \in [0,1]) 0 \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{1}{2}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall t \in [0,1])\ 0 \leq \frac{te^{\frac{t}{n}}}{1+t} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{t}{n}}$

par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq \int_0^1 \frac{te^{\frac{t}{n}}}{1+t}dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\frac{t}{n}}dt$

c'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq u_n \leq \frac{n}{2}[e^{\frac{t}{n}}]_0^1$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq u_n \leq \frac{n}{2}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$

Remarque: Une fonction primitive de la fonction $x \longmapsto e^{ax}\ (a \neq 0)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax}$

b- On suppose que $(u_n)_{n>0}$ est convergente de limite ℓ

puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq u_n \leq \frac{n}{2}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2}(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ (car $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)

alors: $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

2) On a: $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = [t - \ln(t+1)]_0^1$

Donc $I = 1 - \ln(2)$

3) a- On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall t \in [0,1])\ 1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall t \in [0,1])\ \frac{t}{1+t} \leq \frac{t}{1+t}e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{t}{1+t}e^{\frac{1}{n}}$

par suite, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt \leq \int_0^1 \frac{t}{1+t}e^{\frac{t}{n}}dt \leq e^{\frac{1}{n}}\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ I \leq u_n \leq Ie^{\frac{1}{n}}$

b- on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (1 - \ln(2)) \leq u_n \leq (1 - \ln(2))e^{\frac{1}{n}}$ (d'après le résultat de la question précèdente)

Et puisque $\lim_{n \to +\infty}(1 - \ln(2))e^{\frac{1}{n}} = 1 - \ln(2)$ (car $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$)

alors la suite $(u_n)_{n>0}$ est convergente et on a: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 - \ln(2)$

Exercice 5

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer le signe de $f(x)$

3) On considère les intégrales: $I(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)dx$ et $J(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+e^x}dx$

où α est un nombre réel strictement positif

a- Déterminer le signe de $I(\alpha)$

b- Calculer $J(\alpha)$ en fonction de α

c- Calculer $f(x)+f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $I(\alpha)$ en fonction de α

Solution

1) On a: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+e^x>0\}$

Et puisque: $(\forall x\in\mathbb{R})\ 1+e^x>0$ alors $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit x un nombre réel

On a: $e^{-x}>0$ et $\ln(1+e^x)>0$ car $1+e^x>1$

Donc $e^{-x}\ln(1+e^x)>0$

par suite $f(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) a- On a: $f(x)>0$ pour tout x de $[0,\alpha]$ et $0<\alpha$

Donc $\int_0^{\alpha} f(x)dx>0$ c'est-à-dire $I(\alpha)>0$

b- Soit x un nombre réel.

On a: $\frac{1}{1+e^x}=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

Donc $J(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=[x-\ln(1+e^x)]_0^{\alpha}=\alpha-\ln(1+e^{\alpha})-0+\ln(2)$

par suite, $J(\alpha)=\alpha+\ln\left(\frac{2}{1+e^{\alpha}}\right)$

c- • Vérifier que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\frac{1}{1+e^x}-e^{-x}\ln(1+e^x)=\frac{1}{1+e^x}-f(x)$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$

• Calcul de $I(\alpha)$ en fonction de α :

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=\frac{1}{1+e^x}-f'(x)$

D'où :

$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{1+e^x}-f'(x)\right)dx$

$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+e^x}dx-\int_0^{\alpha}f'(x)dx=J(\alpha)-[f(x)]_0^{\alpha}=\alpha+\ln\left(\frac{2}{1+e^{\alpha}}\right)-f(\alpha)+f(0)$

par suite , $I(\alpha)=\alpha+\ln\left(\frac{4}{1+e^{\alpha}}\right)-e^{-\alpha}\ln(1+e^{\alpha})$

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par: $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1) Calculer u_1

2) Soit n un élement de $\mathbb{N}^* - \{1,2\}$

a- En utilisant une intégration par parties, montrer que: $nu_n = \sqrt{2} - (n-1)u_{n-2}$

b- En déduire la valeur de u_3

3) Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

a- Montrer que: $(\forall x \in [0,1])\ \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$

b- En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

et montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente en determinant sa limite.

Solution

1) On a: $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

Donc: $u_1 = \sqrt{2} - 1$

2) a- On a: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x^{n-1}dx$

On pose : $u(x) = x^{n-1}$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$u'(x) = (n-1)x^{n-2}\ ;\ v(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Donc : $u_n = [u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)dx$

$$= [x^{n-1}\sqrt{x^2+1}]_0^1 - (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\cdot\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \left(\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$= \sqrt{2} - (n-1)u_n - (n-1)u_{n-2}$$

D'où : $u_n + (n-1)u_n = \sqrt{2} - (n-1)u_{n-2}$

C'est-à-dire: $(1+n-1)u_n = \sqrt{2} - (n-1)u_{n-2}$

D'où : $(\forall n \geq 3)\ nu_n = \sqrt{2} - (n-1)u_{n-2}$

b- En utilisant l'égalite précédente pour $n = 3$, on obtient: $3u_3 = \sqrt{2} - 2u_1$

D'où: $u_3 = \dfrac{\sqrt{2} - 2(\sqrt{2}-1)}{3}$

par suite: $u_3 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

3) a- Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élement de $[0,1]$

On a : $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, Donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$

par suite : $\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$ (car $x^n \geq 0$)

Donc : $(\forall x \in [0,1])\ \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $(\forall x \in [0,1])\ 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$

Donc : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

C'est-à-dire : $0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) Calculer u_0 (calculer la dérivée de la fonction $f: x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$)

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente et determiner sa limite.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\})\ u_n + u_{n-2} = I_n$

b- En déduire que: $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$ et que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \leq (2n-1)u_{n-2}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1,2\}$ (on peut utiliser une intégration par parties)

c- Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geq 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a:

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Donc: $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

2) • Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Et puisque: $(\forall x\in[0,1])\ -1\le x-1\le 0$

alors: $(\forall x\in[0,1])\ \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\le 0$

D'où: $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx\le 0$

c'est-à-dire: $u_{n+1}-u_n\le 0$

Alors la suite (u_n) est décroissante.

• D'autre part, on a: $(\forall x\in[0,1])\ \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\ge 0$

Donc: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}}\ge 0$

par suite: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n\ge 0$

Et puisque: $u_0\ge 0$ alors: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\ge 0$

Donc , la suite (u_n) est minorée (par 0)

• La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

• Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

On a: $(\forall x\in[0,1])\ \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\le x^n$

D'où: $0\le\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx\le\int_0^1 x^n dx$ c'est-à-dire: $0\le u_n\le\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

C'est-à-dire: $0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

3) a- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*-\{1,2\}$

On a: $u_n+u_{n-2}=\int_0^1 \frac{x^n+x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Donc: $(\forall n\ge 3)\ u_n+u_{n-2}=I_n$

b- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*-\{1,2\}$

On a: $u_n=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x^{n-1}dx$

On pose: $g(x)=x^{n-1}$ et $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$g'(x)=(n-1)x^{n-2}$; $h(x)=\sqrt{1+x^2}$

Donc: $u_n=[g(x)h(x)]_0^1-\int_0^1 g'(x)h(x)dx$

$$=[x^{n-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$$

C'est-à-dire: $u_n=\sqrt{2}-(n-1)I_n$ C'est-à-dire: $u_n+(n-1)(u_n+u_{n-2})=\sqrt{2}$

donc: $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$

Et puisque la suite (u_n) est décroissante alors : $u_{n-2} \geq u_n$

par suite: $nu_n + (n-1)u_{n-2} \geq nu_n + (n-1)u_n$

D'où: $(\forall n \geq 3)\ \sqrt{2} \geq (2n-1)u_n$

de la même façon , on montre que $(\forall n \geq 3)\ \sqrt{2} \leq (2n-1)u_{n-2}$ en remarquant que: $nu_n + (n-1)u_{n-2} \leq nu_{n-2} + (n-1)u_{n-2}$

c- Soit n un élement de $\mathbb{N}^* - \{1,2\}$

De $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$, on déduit que: $nu_n \leq \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

et de $\sqrt{2} \leq (2n-1)u_{n-2}$, on déduit que: $(n-2)u_{n-2} \geq \dfrac{\sqrt{2}(n-2)}{2n-1}$

et en posant le changement d'indice $p = n-2$

on trouve: $(\forall p \geq 1)pu_p \geq \dfrac{\sqrt{2}p}{2(p+2)-1}$ c'est-à-dire: $(\forall p \geq 1)\ \ pu_p \geq \dfrac{\sqrt{2}p}{2p+3}$

Conclusion:

Alors: $(\forall n \geq 3)\ \ \dfrac{n\sqrt{2}}{2n+3} \leq nu_n \leq \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

Et puisque: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2}n}{2n+3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

alors la suite $(nu_n)_{n \geq 3}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}\,dt$

1) pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose: $k(x) = \int_{1}^{x} e^{-t^2}\,dt$

a- Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ g(x) = -k(\sqrt{x})$

b- Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, puis en déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

2) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

En déduire que la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Solution

1) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$

On a: $-k(\sqrt{x}) = -\int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = \int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}\,dt = g(x)$

b- On a: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ g(x) = -k(\sqrt{x})$

• La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et k est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction $x \longmapsto k(\sqrt{x})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par suite , la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$

• La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et k est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$

Donc la fonction $x \longmapsto k(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Par suite, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a:

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} k'(\sqrt{x}) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g'(x) < 0$)

2) Soit x un élement de $\mathbb{R}^{+*}$

La fonction g est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis:

$$(\exists c \in]0,x[)\ \ g(x) - g(0) = xg'(c) = \frac{-x}{2\sqrt{c}} e^{-c}$$

Et puisque: $0 < c < x$ alors: $\frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $e^{-c} > e^{-x}$

D'où: $\frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}} > \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$

et en déduire que: $\frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$

et puisque: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x} = -\infty$

alors: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\infty$

Par suite, la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe (C_g) admet à droite au point $A(0, g(0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

Exercice 9

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx$

1) Calculer u_1 et u_2

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_n \geq 0$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est décroissante.

3) a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$

b- En déduire que: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $v_n = u_{n+4} - u_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_{4k-2}$

a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ v_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

b- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ S_n = u_{4n+2} - u_2$

c- En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right)$

Solution

1) On a: $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$

Donc $u_1 = \frac{1}{2}\ln(2)$

et on a: $u_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1+\tan^2(x))-1)dx = [\tan(x)-x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

Donc: $u_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

2) a- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

On a: $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)\ \tan(x) \geq 0$, Donc: $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)\ \tan^n(x) \geq 0$

Par suite, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \geq 0$ c'est-à-dire: $u_n \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b- On a: $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)\ 0 \leq \tan(x) \leq 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)\ \tan^{n+1}(x) \leq \tan^n(x)$

Par suite, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$

C'est-à-dire: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_{n+1} \leq u_n$

Ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n>0}$ est décroissante.

3) a- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+2} + u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+2}(x) + \tan^n(x))dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(\tan^2(x)+1)dx = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_n - \frac{1}{n+1} = -u_{n+2}$ et $-u_{n+2} \leq 0$

Donc: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Et puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $v_n = u_{n+4} - u_n$

$$= (u_{n+4} + u_{n+2}) - (u_{n+2} + u_n)$$

$$= \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$$ (d'après le résultat de la question **(3) (a)**)

b- • Pour $n = 1$ on a: $s_1 = v_2 = u_6 - u_2 = u_{4\times1+2} - u_2$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

Supposons que $s_n = u_{4n+2} - u_2$ et montrons que: $s_{n+1} = u_{4n+6} - u_2$

On a: $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} v_{4k-2} = s_n + v_{4(n+1)-2}$

$$= s_n + v_{4n+2} = (u_{4n+2} - u_2) + (u_{(4n+2)+4} - u_{4n+2}) = u_{4n+6} - u_2$$

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ s_n = u_{4n+2} - u_2$ (Principe de récurrence)

c- On a: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}$

$$= 1 - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+3} - \frac{1}{6+1} + \frac{1}{6+3} - \cdots - \frac{1}{(4n-2)+1} + \frac{1}{(4n-2)+3}$$

$$= 1 + v_2 + v_6 + \cdots + v_{4n-2} = 1 + s_n = 1 + u_{4n+2} - u_2$$

$$= 1 + u_{4n+2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + u_{4n+2}$$

Et puisque: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{4n+2} = 0$

alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 10

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \ ; x \neq 0 \\ f(0) = \ln(2) \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Montrer que la fonction f est paire

2) a- Montrer que: $(\forall t \in [1, +\infty[)\ e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b- Montrer que: $(\forall x \in [1, +\infty[)\ 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) a- Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq x + 1$

b- En déduire que: $(\forall t \in \mathbb{R}^{+*})\ \frac{1}{t} - t \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \leq \frac{1}{t}$

c- Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ln(2) - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln(2)$, puis en déduire que la fonction f est continue et dérivable en 0

4) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

b- Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = \frac{(1 - e^{3x^2}) e^{-4x^2}}{x}$

c- En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}$

d- Tracer la courbe (C)

Solution

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$

On a: $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

et si on pose $u = -t$

alors: $f(-x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-u^2}}{-u}(-du) = \int_x^{2x} \frac{e^{-u^2}}{u} du = f(x)$

Et puisque $f(-0)=f(0)$

alors $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f(-x)=f(x)$

par suite, la fonction f est paire

2) a- Soit t un élément de $[1,+\infty[$

On a: $t\leq t^2$, donc $-t^2\leq -t$, par suite $e^{-t^2}\leq e^{-t}$

b- Soit x un élément de $[1,+\infty[$

• On a: $x<2x$ et $(\forall t\in[x,2x])\ \ \dfrac{e^{-t^2}}{t}>0$

Donc: $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt\geq 0$ c'est-à-dire: $f(x)\geq 0$

• On a: $(\forall t\in[x,2x])\ \ \dfrac{e^{-t^2}}{t}\leq\dfrac{e^{-t}}{t}$

Donc: $\displaystyle f(x)\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$

Et puisque: $x\leq t\leq 2x\Longrightarrow\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{x}$

$$\Longrightarrow\frac{e^{-t}}{t}\leq\frac{1}{x}e^{-t}$$

alors: $\displaystyle f(x)\leq\frac{1}{x}\int_x^{2x}e^{-t}dt$ c'est-à-dire: $f(x)\leq\dfrac{1}{x}[-e^{-t}]_x^{2x}$

D'où: $\displaystyle f(x)\leq\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

par suite: $(\forall x\in[1,+\infty[)\ \ 0\leq f(x)\leq\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

Et puisque: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}=0$ alors: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) a- Etudier les variations de la fonction $x\longmapsto e^x-x-1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que:

$(\forall x\in\mathbb{R})\ \ e^x\geq x+1$

b- Soit t un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a: $e^{-t^2}\leq 1$

et on a: $e^{-t^2}\geq -t^2+1$ (d'après le résultat de la question précédente)

Donc: $-t^2+1\leq e^{-t^2}\leq 1$

D'où: $\dfrac{1}{t}-t\leq\dfrac{e^{-t^2}}{t}\leq\dfrac{1}{t}$

c- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a: $(\forall t\in[x,2x])\ \dfrac{1}{t}-t\leq\dfrac{e^{-t^2}}{t}\leq\dfrac{1}{t}$

Donc: $\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-t\right)dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$

C'est-à-dire: $\left[\ln(t)-\dfrac{t^2}{2}\right]_x^{2x}\leq f(x)\leq[\ln(t)]_x^{2x}$

par suite, $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ \ln(2)-\dfrac{3}{2}x^2\leq f(x)\leq\ln(2)$

Et puisque: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2)-\frac{3}{2}x^2\right)=\ln(2)$

alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\ln(2)=f(0)$

par suite , f est continue à droite en 0

Et puisque f est paire alors f est continue en 0

d'autre part on a: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ -\frac{3}{2}x \leq \frac{f(x)-\ln(2)}{x} \leq 0$

Et puisque: $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{3}{2}x = 0$

alors: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

par suite, f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = 0$

Et puisque f est paire et $f'_d(0) = 0$ alors elle est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

Et puisque $f'_d(0) = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0 et on a: $f'(0) = 0$

4) a- La fonction $h: t \longmapsto \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f(x) = H(2x) - H(x)$

où H est une fonction primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}^{+*}$

Et puisque la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la fonction $v: x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $v(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$

alors la fonction H est dérivable sur $v(\mathbb{R}^{+*})$, par suite , la fonction $x \longmapsto H(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

b- Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a:

$$f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2h(2x) - h(x) = 2 \cdot \frac{e^{-4x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{x}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2})$

c- Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est celui de $(1 - e^{3x^2})$

pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a: $3x^2 > 0$

Donc: $e^{3x^2} > 1$ D'où: $1 - e^{3x^2} < 0$

par suite, $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ f'(x) < 0$

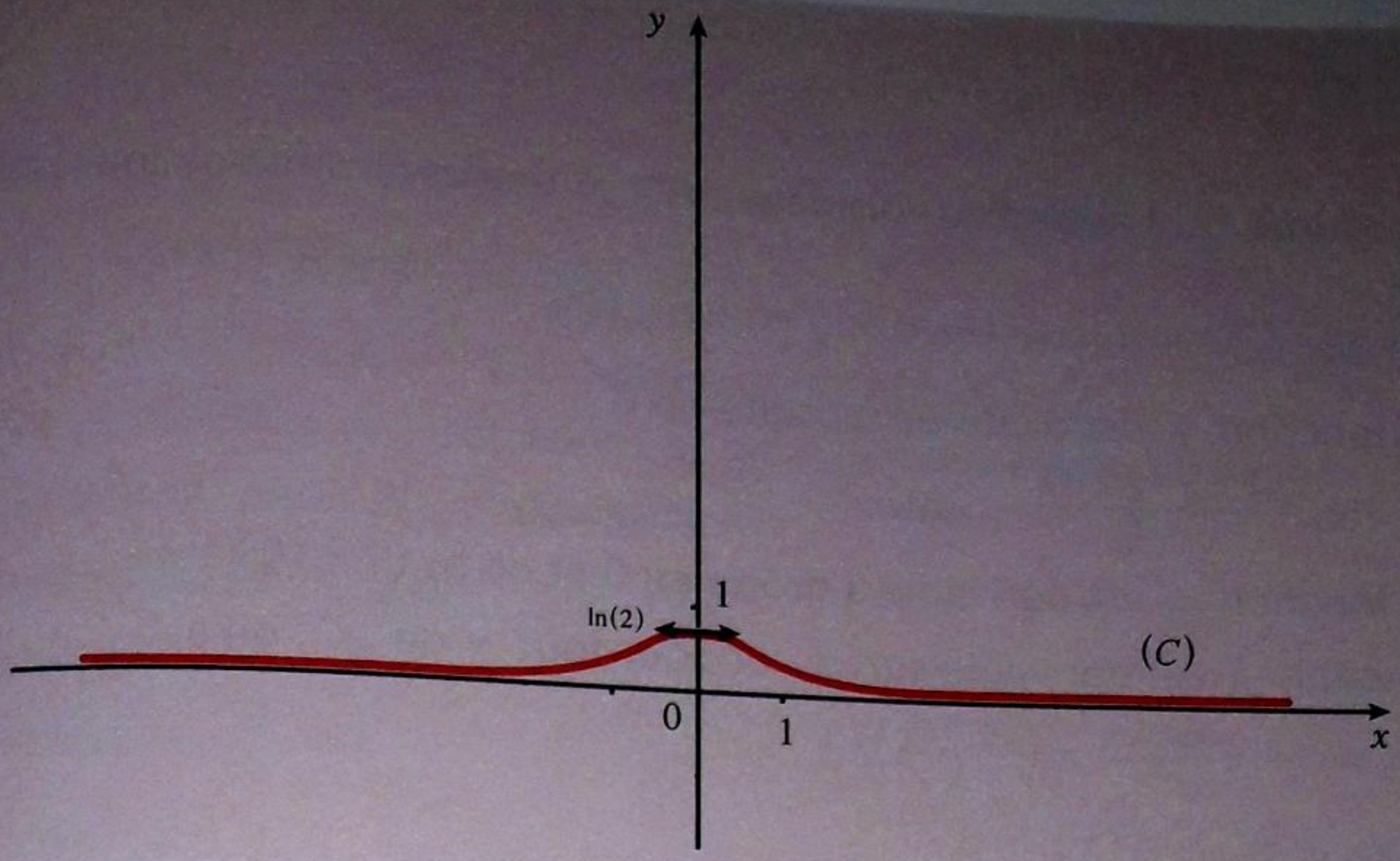
D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+}$

Et puisque f est paire alors elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-}$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\ln(2)$	↘	0

d-



Exercice 11

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ f_n(x)=xe^{\frac{-n}{x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Etudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite en 0

c- Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$, puis donner son tableau de variations.

d- Tracer la courbe (C_1)

2) a- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un nombre réel unique α_n de $\mathbb{R}^+$ tel que: $f_n(\alpha_n)=1$

b- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est croissante.

c- Montrer que: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose: $I_n=\dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx$

a- Vérifier que: $(\forall n\geq 1)\ \ \alpha_{n+1}\,e^{\frac{-n}{\alpha_{n+1}}}=e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

b- Montrer que: $(\forall n\geq 1)\ \ 1\leq I_n\leq e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$ et en déduire que la suite $(I_n)_{n>0}$ est convergente en déterminant sa limite.

Solution

1) a- On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{-n}{x}}=+\infty$ car: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{n}{x}}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-n}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{-n}{x}}-1}{\left(\frac{-n}{x}\right)}(-n)=-n$

car: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{-n}{x}}-1}{\frac{-n}{x}}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

Donc la courbe (C_n) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=x-n$

b- On a: $\lim\limits_{x\to0+}f_n(x)=\lim\limits_{x\to0+}xe^{\frac{-n}{x}}=0\times0=0=f_n(0)$

Donc la fonction f_n est continue à droite en 0

et on a: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{-n}{x}}=0$

Donc la fonction f_n est dérivable à droite en 0 et on a: $(f_n')_d(0)=0$

c- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a:

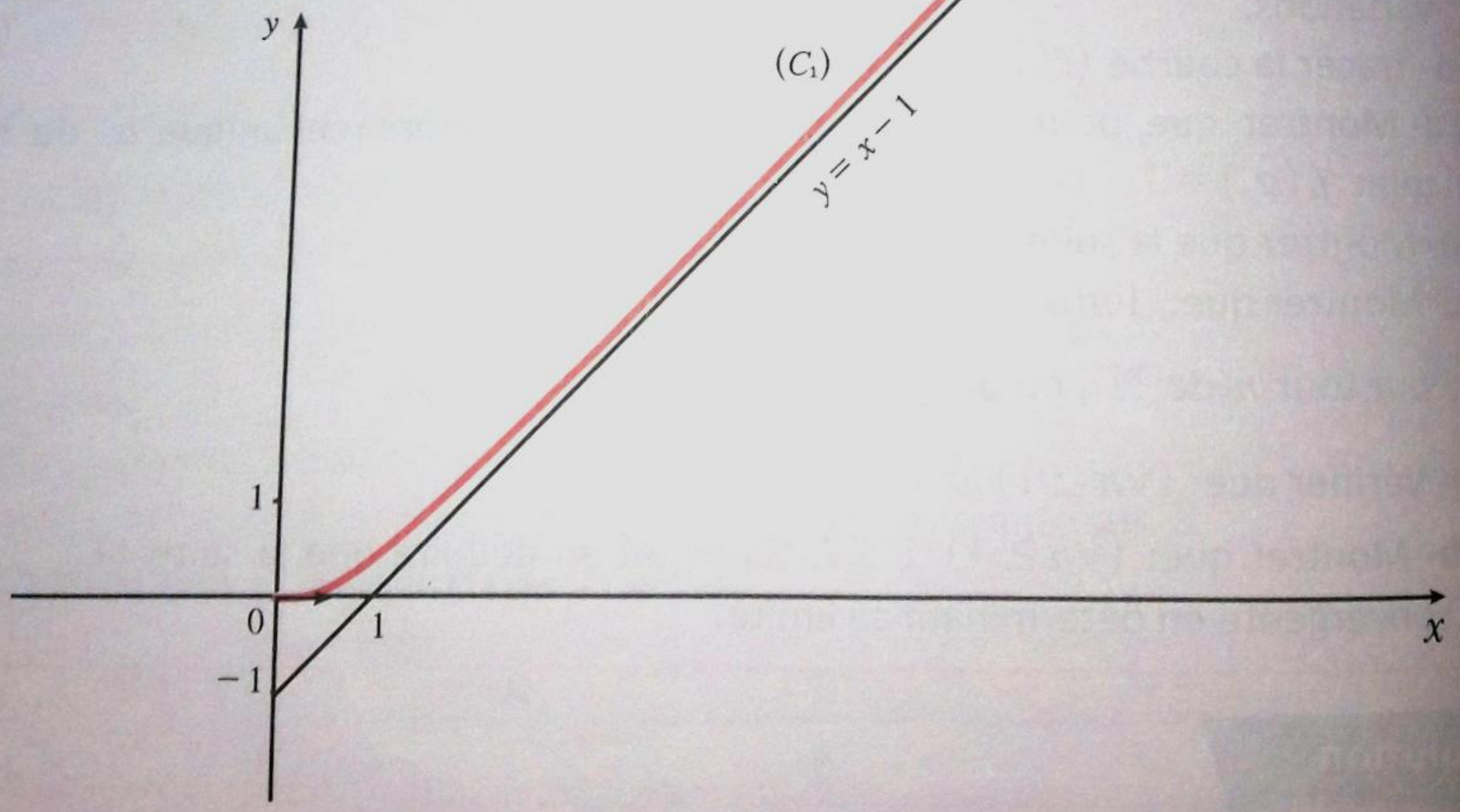
$$f_n'(x)=e^{\frac{-n}{x}}+x\frac{n}{x^2}e^{\frac{-n}{x}}=\left(\frac{x+n}{x}\right)e^{\frac{-n}{x}}$$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \ f_n'(x)>0$

D'où le tableau de variations de la fonction f_n :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↗	$+\infty$

d-



2) a- La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $f_n(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$

et puisque : $1\in f_n(\mathbb{R}^+)$, alors il existe un nombre réel unique α_n de $\mathbb{R}^+$ tel qu

$f_n(\alpha_n) = 1$

b- soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

on a $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n e^{\frac{-n-1}{\alpha_n}} = \alpha_n e^{\frac{-n}{\alpha_n}} . e^{\frac{-1}{\alpha_n}} = f_n(\alpha_n) . e^{\frac{-1}{\alpha_n}}$

et puisque : $f_n(\alpha_n) = 1$ alors $f_{n+1}(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{\alpha_n}}$

par suite, $f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant 1$ car $e^{\frac{-1}{\alpha_n}} \leqslant 1$ donc $f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

et puisque la fonction f_{n+1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ donc la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante

c- soit n un élément $\mathbb{N}^*$, on a : $f_n(\alpha_n) = 1$

Donc $\alpha_n e^{\frac{-n}{\alpha_n}} = 1$

par suite $\ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} = 0$

d'où $n = \alpha_n \ln(\alpha_n)$

supposons que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée

Et puisqu'elle croissante alors elle est convergente, posons $\ell = \lim(\alpha_n)$

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \alpha_n \geq \alpha_1$ Donc: $\ell \geq \alpha_1$ D'où: $\ell > 0$

et on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n = \alpha_n \ln(\alpha_n)$

Et puisque: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n \ln(\alpha_n) = \ell \ln(\ell)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ alors l'égalite $\ln(\alpha_n) = \ell$ est impossible

Donc la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ n'est pas majorée

Et puisqu'elle est croissante alors: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$

3) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $\alpha_{n+1} e^{\frac{-n}{\alpha_{n+1}}} = \alpha_{n+1} . e^{-\frac{n+1}{\alpha_{n+1}}} . e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

$= f_{n+1}(\alpha_{n+1}) . e^{\frac{1}{\alpha_n + 1}} = 1 \times e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

Donc: $\alpha_{n+1}\, e^{\frac{-n}{\alpha_{n+1}}} = e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

b- Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$

Pour tout x de $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ on a:

$\alpha_n e^{\frac{-n}{\alpha_n}} \leq f_n(x) \leq \alpha_{n+1} e^{\frac{-n}{\alpha_{n+1}}}$ (car f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

C'est-à-dire: $1 \leq f_n(x) \leq e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

D'où: $\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} 1dx \leq \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx \leq e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} 1dx$

C'est-à-dire: $\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq (\alpha_{n+1} - \alpha_n) I_n \leq (\alpha_{n+1} - \alpha_n) e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

Donc: $(\forall n \geq 1) 1 \leq I_n \leq e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}$

Et puisque: $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} = 1$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_{n+1} = +\infty$)

alors la suite $(I_n)_{n>0}$ est convergente et sa limite est égale à 1

Exercice 12

On considère la fonction numérique F définie par : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt \ , \ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1) Vérifier que la fonction F est définie sur chacun des intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $]1, +\infty[$

2) a- Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[\right) \ \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$

b- Étudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0 ,puis interpréter géométriquement le résultat.

c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$

3) Montrer que : $(\forall t \in [1, +\infty[) \ \ln(t) \leq t - 1$, puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$

4) On considère la fonction numérique v définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$v(t) = 2 - 2t + \ln(t)$

a- Montrer qu'il existe un nombre unique α de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $v(\alpha) = 0$

b- Montrer que $\left(\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right[\right) \ F(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$ puis calculer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$

5) a- Montrer que F est dérivable sur chacun des intervalles $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $]1, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$

b- Donner le tableau de variations de la fonction F, puis tracer la courbe (C_F) (on prend : $F(2) \simeq 2,1$)

Solution

1) • La fonction F est définie en 0

• Si $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ alors $[x, 2x] \subset]0, 1[$

Et puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$

alors elle est continue sur $[x, 2x]$, par suite l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$ est bien définie,

donc F est définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

• Si $x \in]1, +\infty[$ alors $[x, 2x] \subset]1, +\infty[$

Et puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]1, +\infty[$

alors elle est continue sur $[x, 2x]$, par suite l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$ est bien définie,

donc F est définie sur $]1, +\infty[$

Conclusion : La fonction F est définie sur chacun des intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et

$]1,+\infty[$

2) a- Soit x un élément de $\left]0,\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$

On a : $x \leq t \leq 2x \Longrightarrow \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(2x)}dt \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(x)}dt$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$$

b- • On a : $(\forall x \in D_F - \{0\})\ \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(2x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$

Par suite, F est continue à droite en 0

• On a : $(\forall x \in D_F - \{0\})\ \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(2x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0$

Donc F est dérivable à droite en 0 est on a : $F'_d(0) = 0$

Par suite, la courbe (C_F) admet à droite au point $O(0,0)$ une demi-tangente horizontale.

c- • On a : $(\forall x \in D_F - \{0\})\ \frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\cdot\frac{\ln(2x)}{2x}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

• On a : $(\forall x \in D_F - \{0\})\ \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(2x)} = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

Par suite, la courbe (C_F) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3) • La courbe de la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ est concave et l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1 est $y = t - 1$

Donc : $(\forall t \in [1;+\infty[)\ \ \ln(t) \leq t - 1$

Deuxième méthode : étudier les variations de la fonction $t \longmapsto \ln(t) - t + 1$

• Soit x un élément de $]1,+\infty[$

On a : $(\forall t \in [x;2x])\ \ \ln(t) \leq t - 1$

donc $(\forall t \in [x, 2x])\quad \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t-1}$

Par suite, $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} dt$ (car $x \leq 2x$)

D'où : $(\forall x \in]1, +\infty[)\quad F(x) \geq \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = +\infty$

4) a- • On a : $(\forall t \in \mathbb{R}^{+*})\quad v'(t) = \frac{1-2t}{t}$

D'où le tableau de variations de la fonction v :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$v'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$v(t)$	‖ $-\infty$	↗	$1-\ln(2)$	↘	$-\infty$

• La fonction v réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ vers $]-\infty, 1-\ln(2)[$

Et puisque $0 \in]-\infty, 1-\ln(2)[$

alors l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

b- • Du tableau de variations de la fonction v, on déduit que :

$$v([\alpha, 1]) = v\left(\left[\alpha, \tfrac{1}{2}\right]\right) \cup v\left(\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right)$$
$$= [0; 1-\ln(2)] \cup [0; 1-\ln(2)]$$
$$= [0; 1-\ln(2)]$$

donc $(\forall t \in [\alpha, 1])\quad v(t) \geq 0$

D'où : $(\forall t \in [\alpha, 1[)\quad \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{2t-2}$

• Soit x un élément de $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right[$

On a : $2x \in [2\alpha, 1[$, donc $[x, 2x] \subset [\alpha, 1[$, par suite $(\forall t \in [x, 2x])\quad \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{2t-2}$

D'où, $\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{2t-2}$

Alors : $\left(\forall x \in \left[\alpha, \tfrac{1}{2}\right[\right)\quad F(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$

• On a : $\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} = \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

Donc : $\left(\forall x \in \left[\alpha, \tfrac{1}{2}\right[\right)\quad F(x) \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} F(x) = -\infty$

5) a- • La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$, donc elle admet une fonction primitive G sur $]0,1[$

D'où $\left(\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\right)\quad F(x) = G(2x) - G(x)$

• La fonction $h : x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left(\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\right)\ h(x) \in]0;1[$ et G est dérivable sur $]0,1[$, donc la fonction $x \longmapsto G(2x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ par suite, la fonction F est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

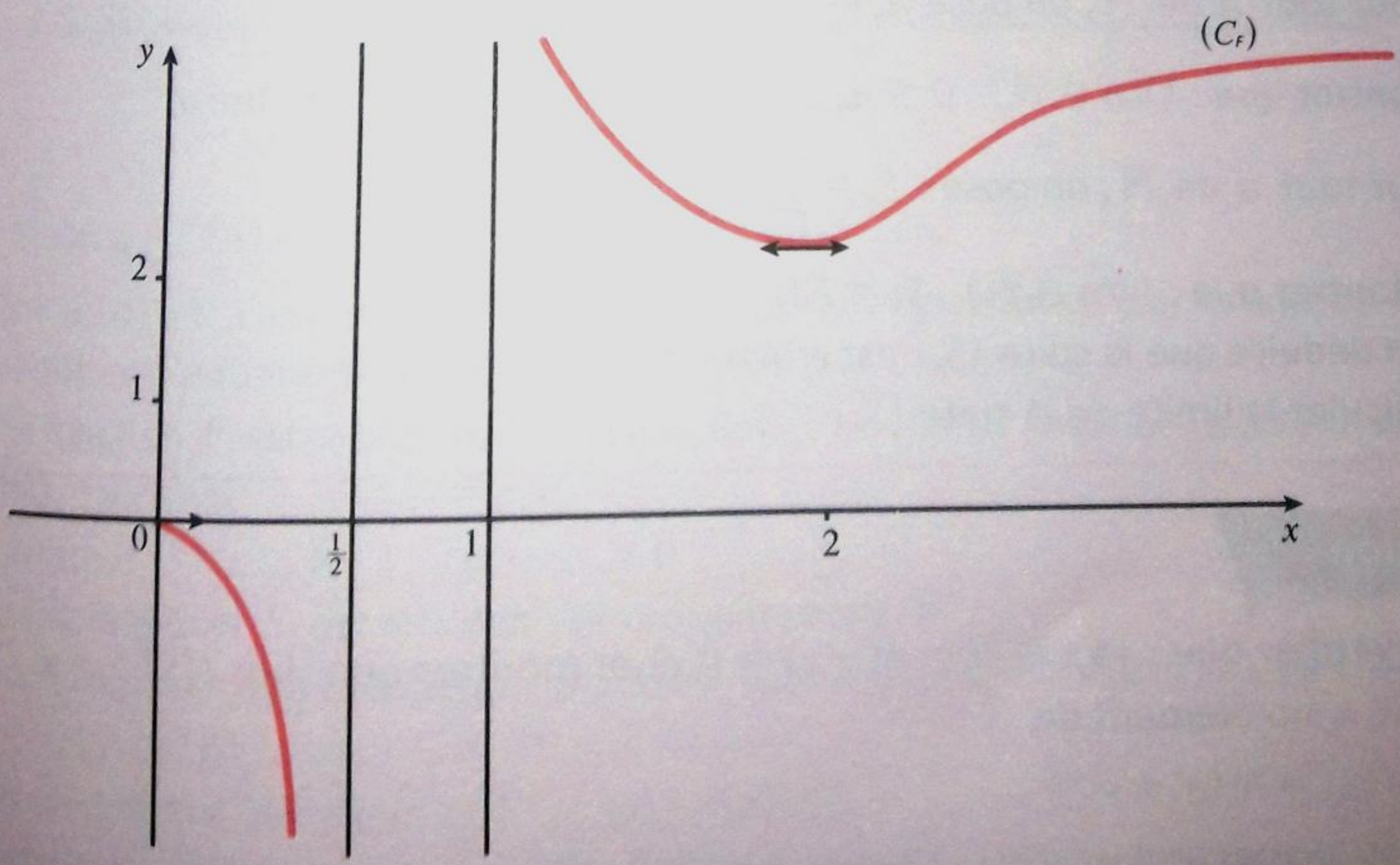
• De la même façon, on montre que F est dérivable sur $]1,+\infty[$

• Pour tout x de $D_F - \{0\}$ on a :

$$F'(x) = h'(x).G'(h(x)) - G'(x) = 2\frac{1}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x).\ln(2x)}$$

b- •

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x}{2}\right)$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$\ln(2x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$F'(x)$	$\emptyset$	$-$	‖	‖	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0 ↘		$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘		$F(2)$	↗	$+\infty$



Exercice 13

I. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ est soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Vérifier que la fonction f est paire, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ puis en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $+\infty$

2) a- Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$

b- Tracer la courbe (C)

II. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\,dt$

1) En utilisant le résultat de la question **I. 1) b-**, Donner une interprétation géométrique du nombre $F(a)$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$

2) Étudier les variations de la fonction F

3) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$

b- En déduire que : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\,dt$ et que

$\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

c- On admet que la fonction F admet un limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$

Montrer que : $\frac{1}{2}\ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

4) a- Étudier la concavité de la courbe (C_F)

b- Tracer la courbe (C_F) dans un repère différent (préciser la demi-tangente à (C_F) au point d'abscisse 0).

III. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\,dt$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = F(n+1)$

b- En déduire que la suite (S_n) est croissante et majorée.

c- Calculer la limite de la suite (S_n)

Solution

I. 1) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b- • Soit x un élément de $\mathbb{R}$

On a : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

$= \ln(e^x(1 + e^{-2x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x})=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$)

Donc la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

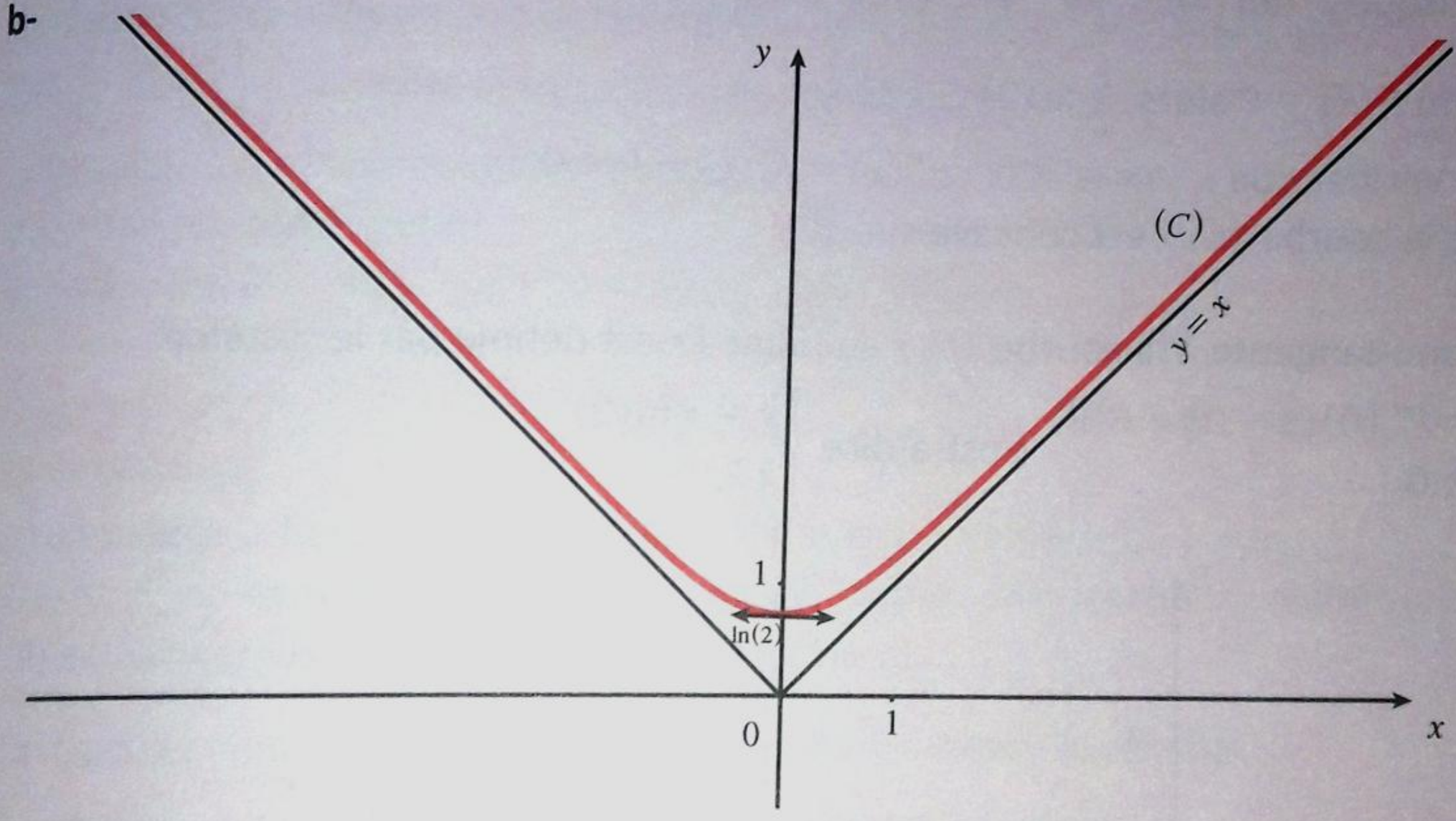
2) a- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	$\ln(2)$ ↗	$+\infty$

b-



II. 1) On a : $F(a)=\int_0^a \ln(1+e^{-2t})dt=\int_0^a (f(t)-t)dt$

Donc $F(a)$ est l'aire (en unité d'aire) du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y=x$ et $x=0$ et $x=a$

2) La fonction F est la primitive de la fonction $x\longmapsto f(x)-x$ sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad F'(x)=f(x)-x$

Et puisque : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad f(x)-x>0$

alors la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3) a- • Montrer que la fonction $u:x\longmapsto\ln(1+x)-x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad u(x)\leq u(0)$

Puis en déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \ln(1+x)\leq x$

• Montrer que la fonction $v:x\longmapsto\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ v(x) \geq v(0)$

Puis en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$

b- On a : $(\forall t \in \mathbb{R})\ e^{-2t} \in \mathbb{R}^+$

Donc, d'après le résultat de la question précédente on a :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$$

Par suite, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ on a :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq \int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt \leq \int_0^x e^{-2t}dt$$

c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}[\ln(1+e^{-2t})]_0^x \leq F(x) \leq -\frac{1}{2}[e^{-2t}]_0^x$

c'est-à-dire : $\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

c- On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$ alors $\frac{1}{2}\ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

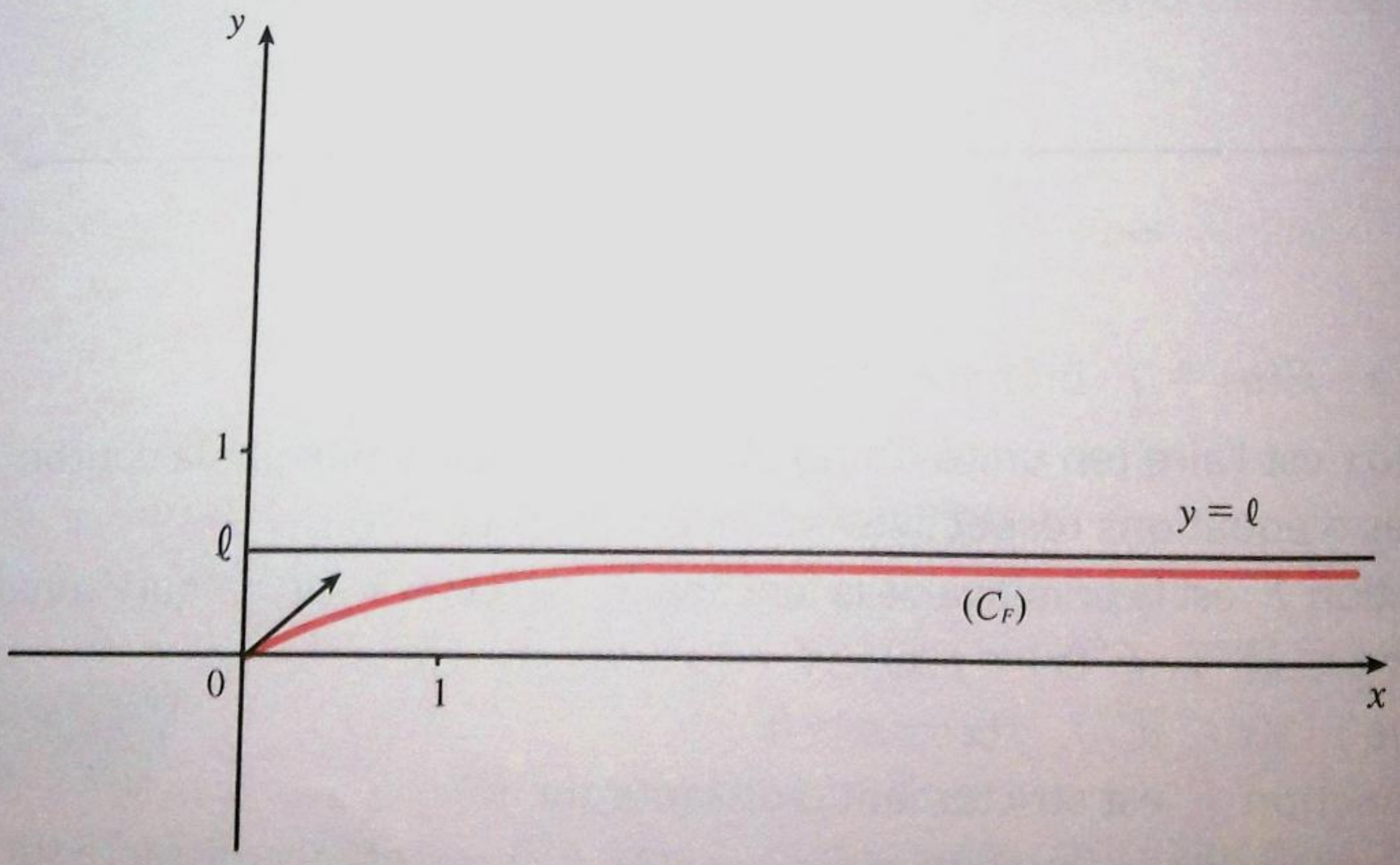
4) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ F''(x) = f'(x) - 1 < 0$

Donc la courbe (C_F) est concave sur $\mathbb{R}^+$

b-

La demi-tangente à la courbe (C_F) au point O est définie par le système

$$\begin{cases} y = F'_d(0)(x-0) + F(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} y = x\ln(2) \\ x \geq 0 \end{cases}$$



III. 1) Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $(\forall t \in \mathbb{R})\ \ (n \leq t \leq n+1 \Longrightarrow 0 \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n}))$

Donc : $0 \leq \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt \leq \ln(1+e^{-2n}) \int_n^{n+1} 1dt$

c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$

Et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+e^{-2n}) = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) a- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \ln(1+e^{-2t})dt$

$= \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$ (Relation de CHASLES)

Donc : $S_n = F(n+1)$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $n+1 \leq n+2$ donc $F(n+1) \leq F(n+2)$ (car F est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

D'où : $S_n \leq S_{n+1}$

Donc la suite (S_n) est croissante.

Et d'après le résultat de la question **II. 3) b-** on a : $F(n+1) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(n+1)}$

Donc : $S_n \leq \frac{1}{2}$, par suite la suite (S_n) est majorée.

c- La suite (S_n) est croissante et majorée

Donc elle est convergente

et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = \ell$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$)

Exercice 14

On considère la fonction numérique f définie sur $D = \mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x-2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

I. 1) a- Calculer les limites de f aux bornes de D

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

2) a- Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f

b- Montrer que : $(\forall x \in D)\ f''(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-2)^3}e^{-x}$

c- Montrer que l'équation $x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et en déduire que la courbe (C) admet un point d'inflexion puis tracer (C)

II. On considère la fonction F définie sur $E =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ par $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

1) a- Montrer que la fonction F est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ et que pour tout x de E on a : $F'(x) = \frac{x^3(1-2x)e^{-x} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$

b- Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, 0[) \quad F'(x) > 0$ et que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[\right) \quad F'(x) < 0$

2- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{te^{-t} - 2e^{-2}}{t-2} \ , \ t \neq 2 \\ g(2) = -e^{-2} \end{cases}$$

a- Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[\right) \quad \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = F(x) - 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{x(x-2)}{1-2x}\right)$.

b- sans calcul, montrer que la fonction g admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$

c- En déduire que : $\lim\limits_{x \to 2^-} \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)dt$

d- En déduire : $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$ (le calcul de $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)dt$ n'est pas demandé)

3) On suppose que $x > 1$

a- Montrer que : $F(-x) = -\int_{1}^{x} \dfrac{ue^u}{u+2}du + \int_{1}^{\frac{1}{x}} \dfrac{ue^u}{u+2}du$

b- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{1}^{\frac{1}{x}} \dfrac{ue^u}{u+2}du = \int_{1}^{0} \dfrac{ue^u}{u+2}du$ (remarquer que la fonction $u \longmapsto \dfrac{ue^u}{u+2}$ admet une fonction primitive sur $[0;1]$)

c- Montrer que $\int_{1}^{x} \dfrac{ue^u}{u+2}du \geq \dfrac{e^x - 2}{x+2}$ et en déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \dfrac{ue^u}{u+2}du = +\infty$

d- En déduire que : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

4) Vérifier que : $(\forall x \in E) \quad F\left(\dfrac{1}{x}\right) = -F(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} F(x)$

Solution

I. 1) a- Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b- On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} \cdot \dfrac{1}{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in D) \quad f'(x) = \dfrac{(-x^2 + 2x - 2)e^{-x}}{(x-2)^2}$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	0
			$-\infty$		

b- Montrer que : $(\forall x \in D) \quad f''(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-2)^3} e^{-x}$

c- • On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$

Montrer que la fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

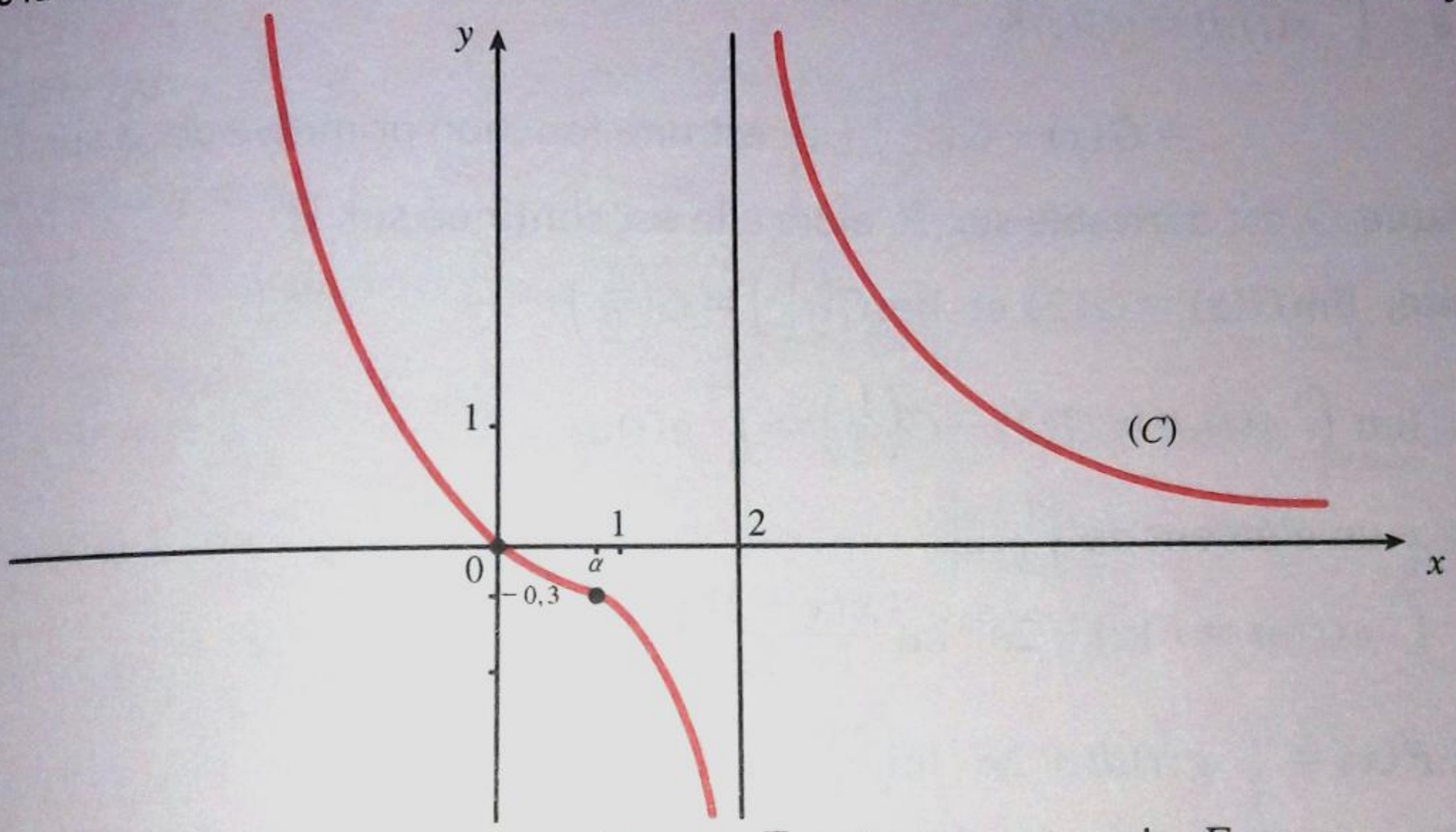
Et puisque $0 \in h(\mathbb{R})$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

et puisque : $h\left(\frac{1}{2}\right)h(1) < 0$ ($h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8}$ et $h(1) = 1$)

alors $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

• La fonction f'' s'annule en changeant de signe pour $x = \alpha$

Donc la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse α et d'ordonnée $f(\alpha)$



II. 1) a- Montrer que F est dérivable sur E et pour tout x de E on a :

$F'(x) = \dfrac{x^3(1-2x)e^{-x} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$

b- • Si $x \in]-\infty, 0[$ alors $x^3 < 0$ et $1 - 2x > 0$ et $e^{-x} > 0$ et $x - 2 < 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ et $x^2 > 0$

Par suite $F'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty, 0[$

• De la même façon, on montre que $F'(x) < 0$ pour tout x de $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$

2) a- Soit x un élément de $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$

On a : $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{te^{-t}}{t-2}\,dt - 2e^{-2}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{t-2}\,dt$

$= F(x) - 2e^{-2}\left[\ln|t-2|\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = F(x) - 2e^{-2}\left[\ln(2-x) - \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right]$

$= F(x) - 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{2-x}{2-\frac{1}{x}}\right) = F(x) - 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{x(x-2)}{1-2x}\right)$

b- • La fonction g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ (quotient de deux fonctions continues)

• Montrons que g est continue en 2

On a : $\lim\limits_{t\to 2} g(t) = \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{te^{-t}-2e^{-2}}{t-2}$

$= \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{k(t)-k(2)}{t-2} = k'(2)$ où $k(t) = te^{-t}$

Et puisque $k'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$

alors : $k'(2) = -e^{-2} = g(2)$

Par suite, g est continue en 2

Conclusion : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc elle admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$

c- On a : $\int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = [G(t)]_{\frac{1}{x}}^{x}$

$= G(x) - G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (G est une fonction primitive de g sur $\mathbb{R}$)

Et puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$

par suite, $\lim\limits_{x\to 2^-} G(x) = G(2)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} G\left(\dfrac{1}{x}\right) = G\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^-} \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = G(2) - G\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)dt$

d- Soit x un élément de $\left]\dfrac{1}{2},2\right[$

On a : $\int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = F(x) - 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{x(x-2)}{1-2x}\right)$

Donc : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt + 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{x(x-2)}{1-2x}\right)$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 2^-} \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)dt$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} 2e^{-2}\ln\left(\dfrac{x(x-2)}{1-2x}\right) = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = -\infty$

3) a- Soit x un élément de $]1,+\infty[$

On a : $F(-x) = \int_{-\frac{1}{x}}^{-x} f(t)dt$

$= \int_{-\frac{1}{x}}^{-x} \dfrac{te^{-t}}{t-2}dt$

et si on pose $u = -t$

alors $F(-x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \dfrac{-ue^{u}(-du)}{-u-2}$

$= -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \dfrac{ue^{u}}{u+2}du = -\left[\int_{\frac{1}{x}}^{1} \dfrac{ue^{u}}{u+2}du + \int_{1}^{x} \dfrac{ue^{u}}{u+2}du\right]$

$= \int_{1}^{\frac{1}{x}} \dfrac{ue^{u}}{u+2}du - \int_{1}^{x} \dfrac{ue^{u}}{u+2}du$

b- Soit x un élément de $]1,+\infty[$

On a : $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{ue^u}{u+2}du = [H(t)]_1^{\frac{1}{x}} = H\left(\frac{1}{x}\right) - H(1)$

Où H est une fonction primitive de la fonction $u \longmapsto \frac{ue^u}{u+2}$ sur $[0,1]$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et H est continue en 0 (car H est dérivable en 0)

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} H\left(\frac{1}{x}\right) = H(0)$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{ue^u}{u+2}du = H(0) - H(1)$

$$= [H(x)]_1^0 = \int_1^0 \frac{ue^u}{u+2}du$$

c- Soit x un élément de $]1,+\infty[$

Montrer que : $\frac{ue^u}{u+2} \geq \frac{e^u}{x+2}$ pour tout u de $[1,x]$

et en déduire que : $\int_1^x \frac{ue^u}{u+2}du \geq \frac{1}{x+2}\int_1^x e^u du$

Et puisque : $\int_1^x e^u du = [e^u]_1^x = e^x - e$

alors : $\int_1^x \frac{ue^u}{u+2}du \geq \frac{e^x - e}{x+2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}}{1+\frac{2}{x}} = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{ue^u}{u+2}du = +\infty$

d- On pose $x = -t$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} F(-t)$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\int_1^t \frac{ue^u}{u+2}du + \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{ue^u}{u+2}du = -\infty$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{ue^u}{u+2}du = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{ue^u}{u+2}du = \int_1^0 \frac{ue^u}{u+2}du$ (c'est un nombre)

4) • Soit x un élément de E

On a : $\frac{1}{x} \in E$ et $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_x^{\frac{1}{x}} f(t)dt$

$$= -\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt = -F(x)$$

• On a : $\lim\limits_{x\to0^-} F(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} F\left(\frac{1}{t}\right)$ (on a posé : $x = \frac{1}{t}$)

$$= \lim_{t\to-\infty} -F(t) = +\infty$$

• On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} F(x) = \lim\limits_{t\to2^-} -F(t) = +\infty$

Exercice 15

I. 1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ et en déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose : $I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$

a- Sans Calculer $I(x)$, Montrer que :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad 0\le I(x)\le\dfrac{x^3}{6}e^x$ et $(\forall x\in\mathbb{R}^-)\quad |I(x)|\le\dfrac{|x|^3}{6}$

b- En utilisant deux intégrations par parties, montrer que : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

c- En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$

Étudier les variations de la fonction f et en déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f(x)\ge 0$

(on admet que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad e^x\ge 1+x$)

II. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases}F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\frac{dt}{\ln(t)}\ ,\ x>0\\ F(0)=0\end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad \dfrac{e^x-1-x}{x}\le F(x)\le\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2) Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et donner le tableau de variations de F

5) Étudier la branche infinie de la courbe de la fonction F au voisinage de $+\infty$

Solution

I. 1) • On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}-1$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}=0$

• On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1-x}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

2) a- • Soient x un élément de $\mathbb{R}^+$ et t un élément de $[0,x]$

Donc : $1\le e^t\le e^x$

D'où : $0\le\dfrac{(x-t)^2}{2}e^t\le\dfrac{(x-t)^2}{2}e^x$

Par suite, $0\le\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt\le\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}e^x\,dt$

c'est-à-dire : $0\le I(x)\le\dfrac{1}{2}e^x\displaystyle\int_0^x(x-t)^2\,dt$

Et puisque : $\displaystyle\int_0^x(x-t)^2\,dt=-\int_0^x(x-t)'(x-t)^2\,dt=-\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x=\frac{x^3}{3}$

alors : $0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} e^x$

• **Montrons que :** $(\forall x \in \mathbb{R}^-) \quad |I(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$

Soient x un élément de $\mathbb{R}^-$ et t un élément de $[x, 0]$

Donc : $e^x \leq e^t \leq 1$

D'où : $0 \leq \frac{(x-t)^2 e^t}{2} \leq \frac{(x-t)^2}{2}$

Par suite, $0 \leq \int_x^0 \frac{(x-t)^2 e^t}{2} dt \leq \int_x^0 \frac{(x-t)^2}{2} dt$

c'est-à-dire : $0 \leq -I(x) \leq \int_x^0 \frac{(x-t)^2}{2} dt$

c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\int_x^0 (x-t)^2 dt \leq I(x) \leq 0$

Et puisque : $-\frac{1}{2}\int_x^0 (x-t)^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_x^0 = \frac{x^3}{6}$

alors : $\frac{x^3}{6} \leq I(x) \leq 0$

Par suite, $\frac{x^3}{6} \leq I(x) \leq -\frac{x^3}{6}$

Donc : $|I(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$

b- Calculons l'intégrale : $I(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt$

On pose : $u(t) = \frac{(x-t)^2}{2}$ et $v'(t) = e^t$

$u'(t) = -(x-t)$; $v(t) = e^t$

Donc : $I(x) = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt$

$= \left[\frac{(x-t)^2}{2} e^t\right]_0^x + \int_0^x (x-t)e^t dt = -\frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)e^t dt$

Calculons l'intégrale $J = \int_0^x (x-t)e^t dt$

On pose : $w(t) = x - t$ et $v'(t) = e^t$

$w'(t) = -1$; $v(t) = e^t$

Donc : $J = [(x-t)e^t]_0^x + \int_0^x e^t dt$

$= -x + [e^t]_0^x = -x + e^x - 1$

Par suite, $I(x) = -\frac{x^2}{2} - x + e^x - 1$

c- • Soit x un élément de $]0, +\infty[$

On a : $0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} e^x$

c'est-à-dire : $0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6} e^x$

c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{x}{6} e^x + \frac{1}{2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{6}e^x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$ (α)

• Soit x un élément de $]-\infty,0[$

On a : $|I(x)|\leq\frac{|x|^3}{6}$

c'est-à-dire : $\left|e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right|\leq\frac{|x|^3}{6}$

D'où : $\left|\frac{e^x-1-x}{x^2}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{|x|}{6}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{6}=0$

alors : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$ (β)

Et d'après (α) et (β), on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

• **Montrons que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$**

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x^2}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$f'(x)=e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{1+x}-1$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $e^x\geq 1+x$, donc : $\frac{e^x}{1+x}\geq 1$ (car $1+x>0$)

D'où : $\frac{e^x}{1+x}-1\geq 0$

d'autre part, on a $1+x\geq 1$, donc $\ln(1+x)\geq 0$

Par suite, $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad f'(x)\geq 0$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

D'où $f(x)\geq f(0)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

Et puisque $f(0)=0$ alors $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f(x)\geq 0$

II. 1) Soient x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et t un élément de $[1+x,e^x]$

Donc : $\ln(1+x)\leq\ln(t)\leq x$

D'où : $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\ln(t)}\leq\frac{1}{\ln(1+x)}$ (car $\ln(1+x)>0$)

Par suite, $\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{x}dt\leq F(x)\leq\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln(1+x)}dt$

Et puisque : $\int_{1+x}^{e^x} \frac{1}{x} dt = \left[\frac{1}{x}t\right]_{1+x}^{e^x} = \frac{e^x - 1 - x}{x}$

et : $\int_{1+x}^{e^x} \frac{1}{\ln(1+x)} dt = \left[\frac{1}{\ln(1+x)}t\right]_{1+x}^{e^x} = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$

Alors : $\frac{e^x - 1 - x}{x} \leq F(x) \leq \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

2) • Soit x un élément de $]0, +\infty[$

On a : $\frac{e^x - 1 - x}{x} \leq F(x) \leq \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$

D'où F est continue à droite en 0

• **Montrons que F est dérivable à droite en 0**

Soit x un élément de $]0, +\infty[$

On a : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x\ln(1+x)}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x\ln(1+x)} = \frac{1}{2}$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$

Par suite, F est dérivable à droite en 0 et on a $F'_d(0) = \frac{1}{2}$

3) • La fonction $t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]1, +\infty[$

Donc elle admet une fonction primitive G sur $]1, +\infty[$

Par suite, $F(x) = G(e^x) - G(1+x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

• La fonction $h : x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $h(\mathbb{R}^{+*}) =]1, +\infty[$

Et puisque la fonction G est dérivable sur $]1; +\infty[$ alors la fonction Goh est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

de même, montrer que la fonction Gok est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ où k est la fonction $x \longmapsto 1 + x$

Par suite, la fonction $F = Goh - Gok$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$F'(x) = h'(x)G'(h(x)) - k'(x)G'(k(x))$

$= e^x \cdot \frac{1}{\ln(e^x)} - 1 \cdot \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} = \frac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4) • Soit x un élément de $]0, +\infty[$

On a : $F(x) \geq \frac{e^x - 1 - x}{x}$ c'est-à-dire : $F(x) \geq \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1 = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

- Tableau de variations de F :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$F(x)$	0	↗	$+\infty$

5) Soit x un élément de $]0, +\infty[$

On a : $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ c'est-à-dire : $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = +\infty$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe de la fonction F admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exercice 16

Première partie :

1) a- Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R})\quad e^t \geq 1 + t$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\quad e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\quad e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Deuxième partie :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} & , x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2} - \frac{e^{-3x} + 3x - 1}{x^2}$

b- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = -\frac{5}{2}$ (on pourra utiliser le résultat de la première partie)

4) a- Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = (x+1)e^{-x}$

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) = \frac{g(3x) - g(2x)}{x^2}$$

c- Donner le tableau de variations de la fonction f

5) Tracer la courbe (C)

Troisième partie :

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

1) Montrer que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$

2) a- Montrer que pour tous a et x de $\mathbb{R}^{+*}$ on a : $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}}{t}dt$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$

3) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad e^{-3x}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-2x}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

b- En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt$ et que : $F(0) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4) Soit $A(\lambda)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 0$ et $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda > 0$

Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

Solution

Première partie :

1) a- Étudier les variations de la fonction $u : t \longmapsto e^t - t - 1$

et en déduire qu'elle admet une valeur minimale absolue égale à 0 atteinte en 0

Donc : $(\forall t \in \mathbb{R})\ u(t) \geq 0$

D'où : $(\forall t \in \mathbb{R})\ e^t \geq t + 1$

b- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{-*}$

Puisque $(\forall t \in \mathbb{R})\ e^t \geq t + 1$

alors : $\int_x^0 e^t dt \geq \int_x^0 (t+1)\,dt$ c'est-à-dire : $[e^t]_x^0 \geq \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_x^0$

D'où : $1 - e^x \geq -\frac{x^2}{2} - x$

Donc : $e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{-*}$

2- Pour tout t de $\mathbb{R}^{-*}$ on a : $e^t - t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$ (d'après le résultat de la question précédente)

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^{-*}$ on a :

$$\int_x^0 (e^t - t - 1)dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{2}dt$$

c'est-à-dire : $\left[e^t - \frac{t^2}{2} - t\right]_x^0 \leq \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^0$

D'où : $e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{-*}$

3- On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ \frac{1}{2} + \frac{x}{6} \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

Et puisque $\lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right) = \frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Deuxième partie :

1) Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

2) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$)

et on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{(-2x)} \times (-2) - \frac{e^{-3x} - 1}{(-3x)} \times (-3)$

$$= 1 \times (-2) - 1 \times (-3) = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0, par suite, f est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) a- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-3x} - x}{x^2}$

$$= \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2} - \frac{e^{-3x} + 3x - 1}{x^2}$$

b- On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2} - \frac{e^{-3x} + 3x - 1}{x^2}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} + 2x - 1}{x^2} = \lim\limits_{t \to 0^-} 4.\frac{e^t - t - 1}{t^2}$ (On a posé $t = -2x$)

$$= 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

et : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-3x} + 3x - 1}{x^2} = \lim\limits_{t \to 0^-} 9.\frac{e^t - t - 1}{t^2}$ (On a posé $t = -3x$)

$$= 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$

Par suite, la fonction f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = -\frac{5}{2}$

4) a- Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, puis en déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ $((\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g'(x) = -xe^{-x})$

b- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) = \dfrac{g(3x) - g(2x)}{x^2}$

c- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $3x > 2x$

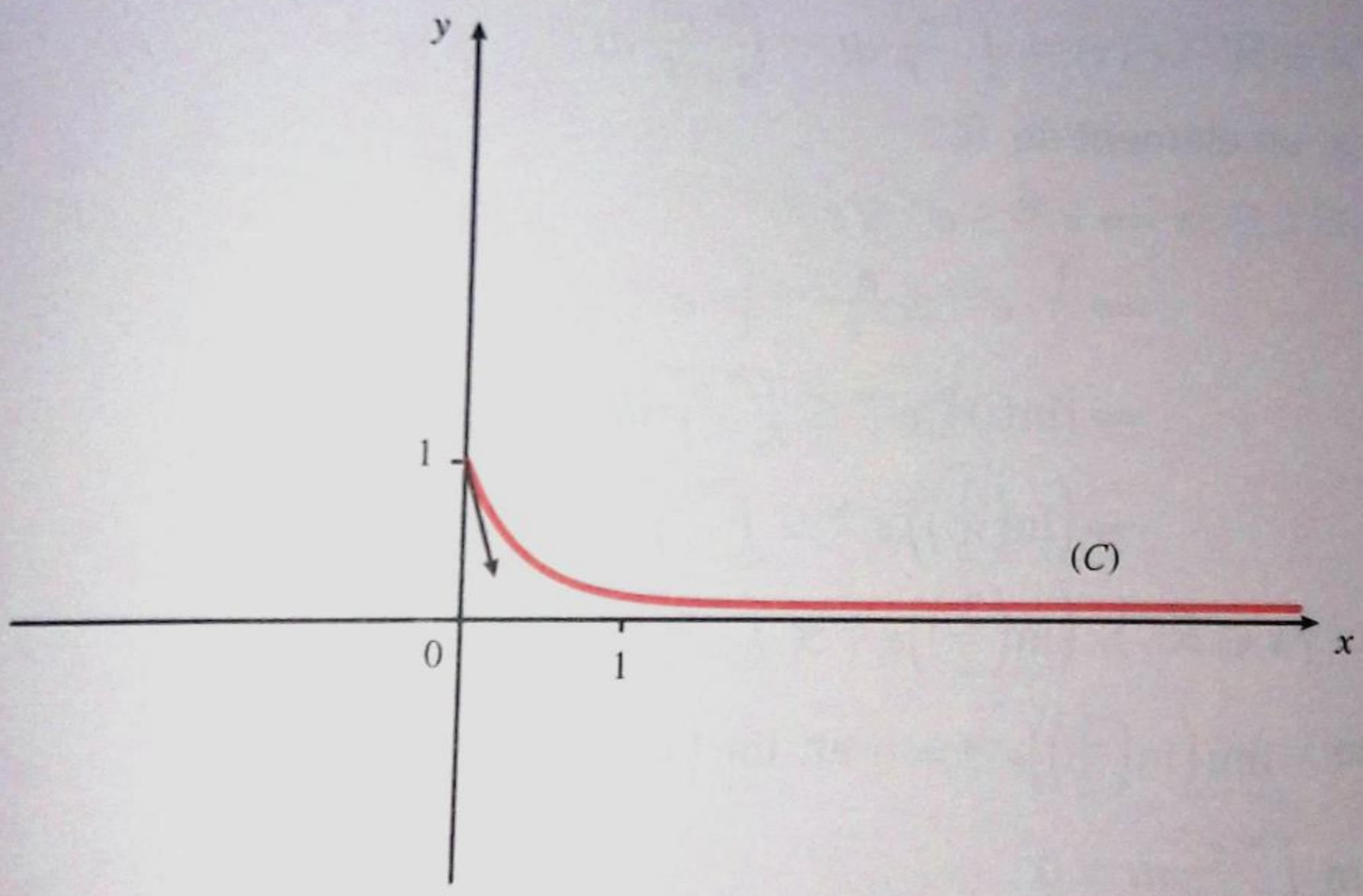
Donc : $g(3x) < g(2x)$ (car g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad f'(x) < 0$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{5}{2}$	$-$	
$f(x)$	1	↘	0

5)



Remarque :

La demi-tangente à la courbe (C) au point $A(0;1)$ a pour coefficient directeur $\left(-\frac{5}{2}\right)$

Troisième partie :

1) • Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc f est continue sur tout intervalle fermé d'extrémités 1 et x

Ce qui signifie que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}^+$

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $1 \in \mathbb{R}^+$

Donc la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, car c'est la fonction primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 1

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ F'(x) = f(x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x}$

2) a- Soient a et x deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt = \int_a^{ax} \frac{ae^{-u}}{u}\cdot\frac{1}{a}du$ (On a posé $u = at$)

$$= \int_a^{ax} \frac{e^{-u}}{u}du = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

b- Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}dt = \int_1^x \frac{e^{-2t}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-3t}}{t}dt$

$$= \int_2^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_3^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$$ (d'après le résultat de la question précédente)

$$= \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_3^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{3x}^3 \frac{e^{-t}}{t}dt$$ (Relation de CHASLES)

$$= \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{3x}^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt$$ (Relation de CHASLES)

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ F(x) = \displaystyle\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$

3) a) Soit x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$

On a : $2x \le t \le 3x \Longrightarrow e^{-3x} \le e^{-t} \le e^{-2x}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{t}\cdot e^{-3x} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{1}{t}\cdot e^{-2x}$$

$$\Longrightarrow [\ln(t)]_{2x}^{3x} e^{-3x} \le \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le [\ln(t)]_{2x}^{3x}.e^{-2x}$$

$$\Longrightarrow \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-3x} \le \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-2x}$$

b) • On a $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ $\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)e^{-3x} \le \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-2x}$

Et puisque : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)e^{-3x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-2x} = 0$

alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt = 0$

et puisque: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ F(x) = \displaystyle\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$

Alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt$

• La fonction F est continue à droite en 0

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ F(x) = \displaystyle\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$

et $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-3x} \leq \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).e^{-2x}$

et $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \cdot e^{-3x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \cdot e^{-2x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Par suite : $F(0) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4) On a : $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\lambda f(x)\,dx$

Donc : $A(\lambda) = F(\lambda) - F(0)$

D'où : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \left(\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

interprétation géométrique :

L'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les deux axes du repère est $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (en unité d'aire)