02 LES NOMBRES COMPLEXES

ProfSalmi

1 L'ensemble $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $a+bi$ où a et b sont deux nombres réels et i un nombre non réel vérifiant : $i^2 = -1$

2 Forme algébrique d'un nombre complexe :

- Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme algébrique $z = a+bi$ où a et b sont deux nombres réels.
- Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z et on le note $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z et on le note $\mathrm{Im}(z)$
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$
- $(\forall z \in \mathbb{C})\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ et $(\forall z \in \mathbb{C})\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

3 Egalité de deux nombres complexes :

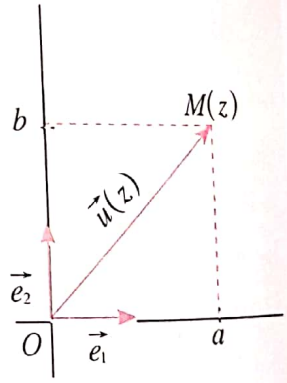
$(\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2)\quad z = z' \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'))$

$(\forall z \in \mathbb{C})\quad z = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0)$

4 Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe où a et b sont deux nombres réels.



- Le point $M(a,b)$ s'appelle l'image de z et le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M et on écrit $M(z)$ ou $z = aff(M)$
- Le nombre z s'appelle aussi l'affixe du vecteur $\vec{u}(a,b)$ et on écrit $\vec{u}(z)$ ou $z = aff(\vec{u})$
- Le plan (P) s'appelle le plan complexe.
- L'axe $(O\vec{e}_1)$ s'appelle l'axe réel et l'axe $(O\vec{e}_2)$ s'appelle l'axe imaginaire.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

5 Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Le conjugué du nombre z est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$

Propriétés :

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

6 Module d'un nombre complexe :

Définition :

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Le module du nombre z est le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés :

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$

$|z^n| = |z|^n$

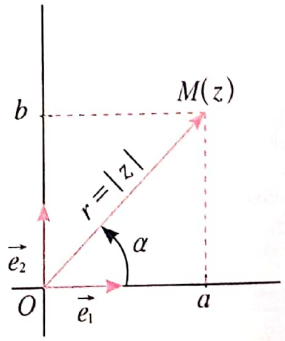
$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

7 Forme trigonométrique et écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Soient $z = a + bi$ un nombre complexe non nul où $(a;b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$ et M son image dans le plan complexe et soit α une mesure (en radian) de l'angle $(\overrightarrow{e_1, OM})$

- Une forme trigonométrique du nombre z est: $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ où $r = |z|$ et $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$



ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

- L'écriture exponentielle du nombre z est : $z = re^{i\alpha}$
- Tout nombre de la forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle un argument de z et on le note : $\arg(z)$ et on écrit : $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$ et on lit: $\arg(z)$ est congru à α modulo 2π

Cas particuliers :

Soit a un nombre réel non nul.

si $a > 0$ alors : $a = ae^{i0}$ et $ai = ae^{i\frac{\pi}{2}}$

si $a < 0$ alors : $a = -ae^{i\pi}$ et $ai = -ae^{-i\frac{\pi}{2}}$

Propriétés :

Pour tous z et z' de $\mathbb{C}^*$ et n de $\mathbb{Z}^*$ on a :

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$$

$$\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

8 Formules d'Euler :

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha) \quad ; \quad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin(\alpha)$$

9 Nombres complexes et géométrie :

Notion géométrique	Ecriture complexe
La distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$
I milieu du segment $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
A, B et C trois points alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \quad (A \neq B)$
Mesures de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
$(AB) // (CD)$	$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$
$(AB) \perp (CD)$	$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}$
A, B, C et D quatre points cocycliques (A, B et C ne sont pas alignés)	$\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} : \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) \in \mathbb{R}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

10 Expressions complexes de certaines transformations :

Soit $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par une transformation:

Transformation	Expression complexe
Translation de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + aff(\vec{u})$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Remarques :

Soit f une application dans le plan complexe dont l'expression complexe est $z' = az + b$ où $(a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

- si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors f est l'homothétie de rapport a et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
- si $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$, alors f est la rotation d'angle α et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$

11 Racines n^{ièmes} d'un nombre complexe non nul :

Définition :

Soient t un nombre complexe non nul et n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

On dit que le nombre complexe z est une racine n^{ième} du nombre t si $z^n = t$

Propriétés:

- Soit t un nombre complexe non nul, de module r et d'argument α

Les racines n^{ièmes} du nombre t sont les nombres $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

- La somme des racines n^{ièmes} d'un nombre complexe est égale à 0

Remarques :

- Les racines nièmes de 1 sont appelées racines nièmes de l'unité

ce sont les nombres $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

- Les racines carrées de l'unité sont : 1 et -1
- Les racines cubiques de l'unité sont : 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- Les racines 4^{ième} de l'unité sont : 1, -1, i et $-i$
- Pour déterminer les racines n^{ièmes} d'un nombre complexe non nul, il suffit de multiplier l'une de ces racines par chacune des racines n^{ièmes} de l'unité.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 1

Pour tout z de $\mathbb{C}-\{3\}$ on pose : $f(z)=3+\dfrac{2i}{z-3}$

1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $f(2-i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=z$

3) Dans le plan complexe, déterminer les deux ensembles suivants :

$E=\{M(z)/f(z)\in\mathbb{R}\}$ et $F=\{M(z)/f(z)\in i\mathbb{R}\}$

4) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2-i$ et $6+i$

a- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Déterminer le point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c- Calculer les distances AB, BC et AC

d- En déduire que $ABCD$ est un rectangle.

Solution

1) On a : $f(2-i)=3+\dfrac{2i}{2-i-3}=3-\dfrac{2i}{1+i}$

$$=\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i+i+1}{1+1}=\frac{4-2i}{2}$$

Donc : $f(2-i)=2-i$

2) Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{3\}$

On a : $f(z)=z\Leftrightarrow 3+\dfrac{2i}{z-3}=z$

$$\Leftrightarrow 3(z-3)+2i=z(z-3)$$

$$\Leftrightarrow z^2-6z+9-2i=0$$

Le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta'=9-9+2i=2i=(1+i)^2$

Donc les solutions de cette équation sont : $z_1=\dfrac{3+1+i}{1}$ et $z_2=\dfrac{3-1-i}{1}$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{4+i\,,2-i\}$

3) • Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{3\}$, on pose : $z=x+yi$ où $(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(3;0)\}$

On a : $f(z)=3+\dfrac{2i}{x+yi-3}=3+\dfrac{2i(x-3-yi)}{(x-3)^2+y^2}$

$$=\frac{3(x-3)^2+3y^2+2y}{(x-3)^2+y^2}+i\frac{2(x-3)}{(x-3)^2+y^2}$$

• On a : $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{2(x-3)}{(x-3)^2+y^2}=0$

$$\Leftrightarrow x=3$$

Donc E est la droite d'équation $x=3$ privée du point $A(3)$

• On a : $f(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow 3(x-3)^2+3y^2+2y=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+\frac{2}{3}y=0$$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Donc F est le cercle de centre $\Omega\left(3;-\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{1}{3}$ privé du point $A(3)$

4) a- On a : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{6+i-1-i}{2-i-1-i}=\frac{5}{1-2i}=\frac{5(1+2i)}{1+4}=1+2i$

Et puisque : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\notin\mathbb{R}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- On a : ($ABCD$ est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

$$\Leftrightarrow z_D-z_C=z_A-z_B$$
$$\Leftrightarrow z_D=z_A+z_C-z_B$$
$$\Leftrightarrow z_D=1+i+6+i-2+i$$
$$\Leftrightarrow z_D=5+3i$$

Donc : $z_D=5+3i$ est l'affixe du point D

c- $AB=|z_B-z_A|=|2-i-1-i|=|1-2i|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$BC=|z_C-z_B|=|6+i-2+i|=|4+2i|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$AC=|z_C-z_A|=|6+i-1-i|=|5|=5$

d- On a : $AC^2=AB^2+BC^2$

Donc le triangle ABC est rectangle en B, par suite $\widehat{ABC}$ est un angle droit

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors : $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(3+i)z+4=0$

1) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que : $|z_1|<|z_2|$

2) a- Ecrire chacune des solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b- En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation : $z^6-(3+i)z^3+4=0$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(i)$

a- Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

b- Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ADBC$ soit un carré.

c- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $\frac{z-3}{iz+1}$ est un nombre réel strictement positif.

Solution

1) Vérifier que : $\Delta=-8+6i=-9+6i+1=(3i+1)^2$ et en déduire que : $z_1=1-i$ et $z_2=2+2i$

2) a- On a : $z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

et $z_2 = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b- On pose : $t = z^3$

Donc l'équation proposée est équivalente à l'équation : $t^2-(3+i)t+4=0$

C'est-à-dire : $t = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $t = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (d'après le résultat de la question précédente)

C'est-à-dire : $z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $z^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

C'est-à-dire : $z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}$ ou $z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}$ où $k\in\{0;1;2\}$

C'est-à-dire : $z = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{-\pi+8k\pi}{12}\right)}$ ou $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right)}$ où $k\in\{0;1;2\}$

Par suite, les solutions de l'équation : $z^6-(3+i)z^3+4=0$ sont les nombres :

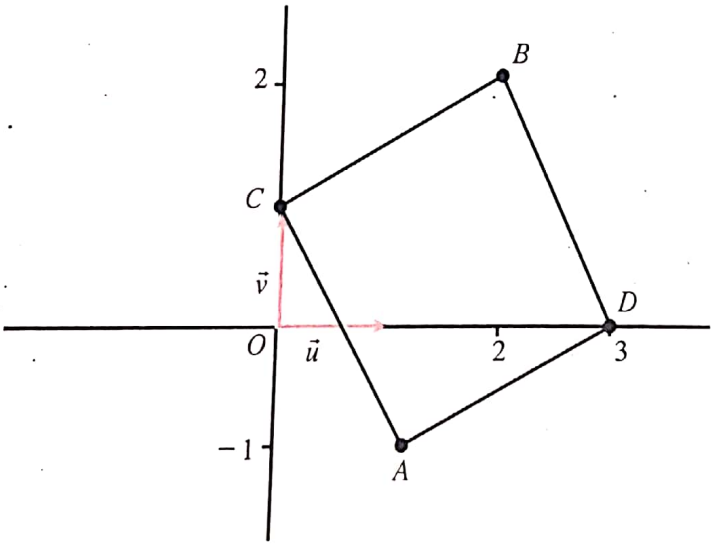
$\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

3) a- On a : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{i(1-2i)}{1-2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $|z_B-z_C| = |z_A-z_C|$ et $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

C'est-à-dire : $CB = CA$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où, le triangle ABC est isocèle et rectangle en C



b- Puisque $ADBC$ est un carré et vu la position du point D (voir figure)

Alors le point D est l'image du point C par la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

C'est-à-dire : $z_D - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A)$

C'est-à-dire : $z_D = -i(-1+2i)+1-i$

D'où : $z_D = 3$

c- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{3,i\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

On a : $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{z-3}{iz+1} \in \mathbb{R}^{+*}$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3}{iz+1}\right) \equiv 0[2\pi]$

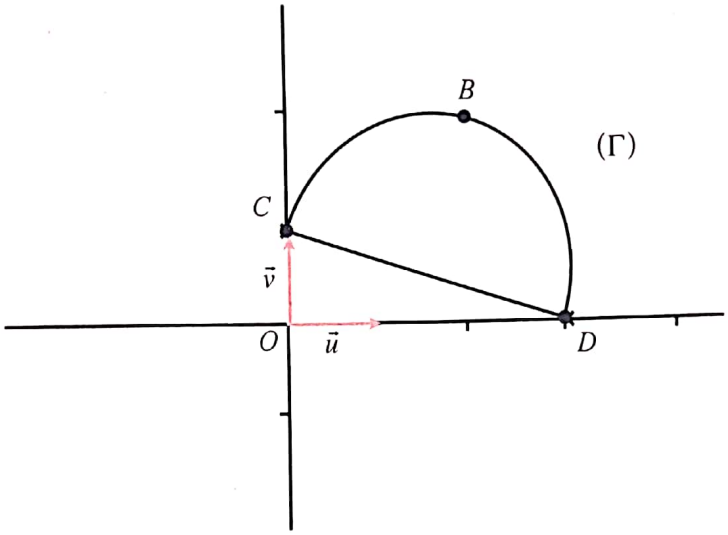
$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{i} \times \frac{z-3}{z-i}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(-i) + \arg\left(\frac{z-3}{z-i}\right) \equiv 0\,[2\pi\,]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi\,]$ $\qquad \left(\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi\,]$

Donc : (Γ) est le demi-cercle de diamètre $[CD]$ qui passe par B privé des points C et D (voir figure).



Exercice 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points $A(4+i)$, $B(4-i)$, $C\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i\right)$ et $\Omega(2-i)$

1) Déterminer l'affixe du point A' l'image de A par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) Soit h la transformation du plan dont l'expression complexe est :

$z' = -\frac{3}{2}z + 5 - \frac{5}{2}i$

a- Déterminer l'affixe du point B' l'image de B par h

b- Montrer que h est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

3) On pose $C' = hor(C)$, montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) Puisque : $r(A) = A'$, alors: $z_{A'} - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_\Omega)$

Donc : $z_{A'} = i(4+i-2+i)+2-i$

Par suite : $z_{A'} = i$

2) a- On a : $h(B) = B'$, donc : $z_{B'} = -\frac{3}{2}z_B + 5 - \frac{5}{2}i$

Par suite : $z_{B'} = -1-i$

b- On a : $-\frac{3}{2}z+5-\frac{5}{2}i = z \iff \frac{5}{2}z = 5-\frac{5}{2}i$

$$\iff z = 2-i$$

Donc le point $\Omega(2-i)$ est le seul point invariant par la transformation h

Par suite, $z' = -\frac{3}{2}z+5-\frac{5}{2}i \iff z'-(2-i) = -\frac{3}{2}z+3-\frac{3}{2}i$

$$\iff z'-(2-i) = -\frac{3}{2}(z-(2-i))$$

Donc h est l'homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et de rapport $\left(-\frac{3}{2}\right)$

3) L'écriture complexe de la rotation r est :

$z'-(2-i) = i(z-(2-i))$ c'est-à-dire : $z' = iz+1-3i$

et l'expression complexe de l'homothétie h est : $z' = -\frac{3}{2}z+5-\frac{5}{2}i$

Donc l'expression complexe de hor est : $z' = -\frac{3}{2}(iz+1-3i)+5-\frac{5}{2}i$

c'est-à-dire : $z' = -\frac{3}{2}iz+\frac{7}{2}+2i$

Et puisque $hor(C) = C'$ alors : $z_{C'} = -\frac{3}{2}iz_C+\frac{7}{2}+2i$

Par suite : $z_{C'} = 1+3i$

Et on a : $\frac{z_{C'}-z_{A'}}{z_{B'}-z_{A'}} = \frac{1+3i-i}{-1-i-i} = \frac{1+2i}{-1-2i} = -1$

Donc : $\frac{z_{C'}-z_{A'}}{z_{B'}-z_{A'}} \in \mathbb{R}$

Par suite, les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice 4 Juin 2006

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{C}^*$, on suppose que l'équation $x^2+ax+b=0$ admet dans $\mathbb{C}$-deux solutions distinctes x_1 et x_2

1) Montrer que : $|x_1| = |x_2| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} |b| = 1 \\ |a| \le 2 \\ 2\arg(a) \equiv \arg(b)\,[2\pi] \end{cases}$

2) Montrer que : $\begin{cases} |b| = 1 \\ |a| \le 2 \\ 2\arg(a) \equiv \arg(b)\,[2\pi] \end{cases} \Longrightarrow |x_1| = |x_2| = 1$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

Rappel : x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation : $x^2+ax+b=0$

Donc : $x_1+x_2=-a$ et $x_1x_2=b$

1) • Supposons que : $|x_1|=|x_2|=1$

Donc : $|b|=|x_1x_2|=|x_1|\times|x_2|=1\times1=1$

et comme : $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$

Donc : $|-a|\leq 1+1$, par suite : $|a|\leq 2$

• On a : $2\arg(a)\equiv\arg(b)[2\pi]\iff\arg(a^2)-\arg(b)\equiv 0[2\pi]$

$$\iff\arg\left(\frac{a^2}{b}\right)\equiv 0[2\pi]$$

$$\iff\frac{a^2}{b}\in\mathbb{R}^{+*}$$

Donc pour montrer que: $2\arg(a)\equiv\arg(b)[2\pi]$, il suffit alors de montrer que : $\frac{a^2}{b}\in\mathbb{R}^{+*}$

On a : $\frac{a^2}{b}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2$

Posons : $x_1=e^{i\alpha}$ et $x_2=e^{i\beta}$ (car $|x_1|=|x_2|=1$)

Donc : $\frac{a^2}{b}=e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}+2$

$$=2(1+\cos(\alpha-\beta))$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

par suite: $\frac{a^2}{b}\in\mathbb{R}^{+*}$ ($a\neq 0$ car $a\in\mathbb{C}^*$)

2) Supposons que : $|b|=1$, $|a|\leq 2$ et $\arg(b)\equiv 2\arg(a)[2\pi]$

donc : $a=re^{i\alpha}$ et $b=e^{i2\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $r\in]0;2]$

L'équation : $x^2+ax+b=0$ est donc équivalente à l'équation $x^2+re^{i\alpha}x+e^{i2\alpha}=0$

Le discriminant de cette équation est :

$\Delta=(re^{i\alpha})^2-4e^{i2\alpha}=e^{i2\alpha}(r^2-4)=(i\sqrt{4-r^2}\,e^{i\alpha})^2$

donc ses solutions sont :

$x_1=\frac{1}{2}e^{i\alpha}(-r+i\sqrt{4-r^2})$ et $x_2=\frac{1}{2}e^{i\alpha}(-r-i\sqrt{4-r^2})$

On a alors : $|x_1|=\frac{1}{2}|e^{i\alpha}|\times|-r+i\sqrt{4-r^2}|=\frac{1}{2}\times1\times2=1$

et: $|x_2|=\frac{1}{2}|e^{i\alpha}|\times|-r-i\sqrt{4-r^2}|=\frac{1}{2}\times1\times2=1$

Exercice 5

Soit a un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E): $z^2-2z+1+a^2=0$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

1) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E)

2) On pose : $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Déterminer en fonction de α une forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2

3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points $A(1+ai)$ et $B(1-ai)$

a- Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a \in i\mathbb{R}$

b- Montrer que le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si $|a| = 1$

Solution

1) Le discriminant réduit de l'équation (E) est : $\Delta' = 1-(1+a^2) = -a^2 = (ai)^2$

Donc : $z_1 = 1+ai$ et $z_2 = 1-ai$

2) • On a : $z_1 = 1+ai = 1+e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha} = e^{i0} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

$$= e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}\left(e^{-i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

Et puisque : $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ alors : $0 < \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

Par suite : $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

Donc : $z_1 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

• Vérifier que : $z_2 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) a- • On a : (O, A et B sont alignés) $\Leftrightarrow B = O$ ou $\begin{cases} B \neq O \\ \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a = -i \text{ ou } \begin{cases} a \neq -i \\ \frac{1+ai}{1-ai} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Soit a un élément de $\mathbb{C}-\{-i\}$

On a : $\frac{1+ai}{1-ai} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\overline{\frac{1+ai}{1-ai}}\right) = \frac{1+ai}{1-ai}$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\overline{a}i}{1+\overline{a}i} = \frac{1+ai}{1-ai}$$

$$\Leftrightarrow (1-\overline{a}i)(1-ai) = (1+\overline{a}i)(1+ai)$$

$$\Leftrightarrow ai + \overline{a}i = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{a} = -a$$

$$\Leftrightarrow a \in i\mathbb{R}-\{-i\}$$

Donc : (O, A et B sont alignés) $\Leftrightarrow a = -i$ ou $a \in i\mathbb{R}-\{-i\}$

$$\Leftrightarrow a \in i\mathbb{R}$$

b- On a : (OAB est rectangle en O) $\Leftrightarrow (OA) \perp (OB)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \frac{1+ai}{1-ai} \in i\mathbb{R}$ (on a : $a \neq -i$ car les points O, A et B ne sont pas alignés)

$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1+ai}{1-ai}\right)} = -\frac{1+ai}{1-ai}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\overline{a}i}{1+\overline{a}i} = \frac{-1-ai}{1-ai}$

$\Leftrightarrow (1-\overline{a}i)(1-ai) = (1+\overline{a}i)(-1-ai)$

$\Leftrightarrow a\,\overline{a} = 1$

$\Leftrightarrow |a|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |a| = 1$

Donc le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si $|a| = 1$ et $a \neq -i$

Exercice 6 Juin 2003

On considère l'application : $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto f(z) = \frac{\overline{z}+i}{z}$$

I. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|f(z)| = 1$

II. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $f\left(\frac{1}{z}\right) = z\,\overline{z}$

III. On pose : $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ $\left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

1) Représenter les points $B(i)$, $M(z)$ et $N(\overline{z})$ dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

2) Soit P le point d'affixe $\overline{z}+i$

a- Vérifier que le quadrilatère $ONPB$ est un losange.

b- Montrer que : $\arg(\overline{z}+i) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$

c- En déduire un argument de $f(z)$ en fonction de θ

3) Calculer $|f(z)|$ en fonction de θ

Solution

I. On pose $z = x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$

On a : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |\overline{z}+i| = |z|$

$\Leftrightarrow |x + i(1-y)| = |x+iy|$

$\Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|f(z)| = 1$ est la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Autre méthode :

On a : $|f(z)|=1 \Leftrightarrow |\overline{z}+i|=|z|$

$\Leftrightarrow |\overline{z-i}|=|z|$

$\Leftrightarrow |z-i|=|z|$

$\Leftrightarrow MB=MO$ où $B(i)$ et $O(0)$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|f(z)|=1$ est la médiatrice du segment $[OB]$

II. Soit z un élément de $\mathbb{C}^*$, On a : $f\left(\frac{1}{z}\right)=z\,\overline{z} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\overline{z}}+i}{\frac{1}{\overline{z}}}=z\,\overline{z}$

$\Leftrightarrow 1+i\,\overline{z}=(\overline{z})^2$

$\Leftrightarrow (\overline{z})^2-i\,\overline{z}-1=0$

On a : $\Delta=(-i)^2+4=3$

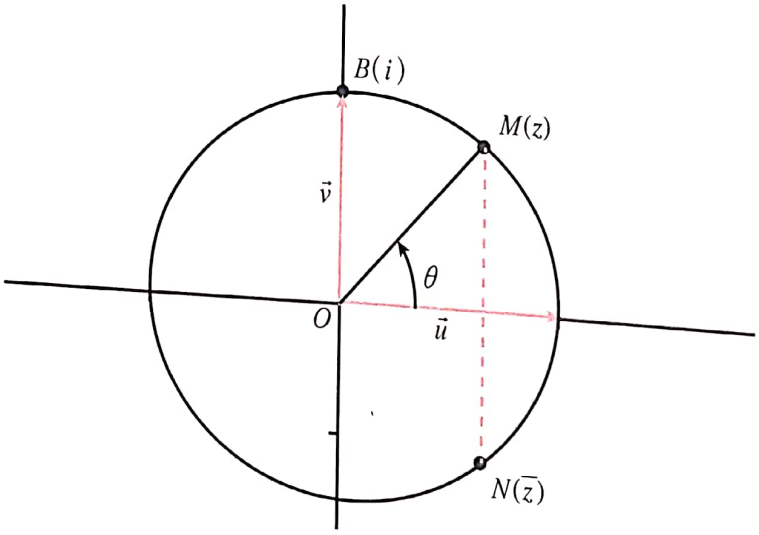
Donc: $f\left(\frac{1}{z}\right)=z\,\overline{z} \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $\overline{z}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ou $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Par suite, l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

III. 1) Comme $|i|=|z|=|\overline{z}|=1$, alors les points B, M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1



2) a- On a : $aff(\overrightarrow{ON})=\overline{z}$ et $aff(\overrightarrow{BP})=(\overline{z}+i)-i=\overline{z}$

Donc : $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{BP}$

Ce qui signifie que le quadrilatère $ONPB$ est un parallélogramme.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque : $ON = NP$ car $|\overline{z} - 0| = 1$ et $|(\overline{z} + i) - \overline{z}| = 1$
Alors le quadrilatère $ONPB$ est un losange.

b- On rappelle que : $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

On a : $\overline{z} + i = \cos(\theta) - i\sin(\theta) + i$

$$= \cos(\theta) + i(1 - \sin(\theta)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

et puisque : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ alors : $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

Par suite : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$

Donc : $|\overline{z} + i| = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(\overline{z} + i) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$

c- On a : $\arg(f(z)) \equiv \arg\left(\frac{\overline{z} + i}{z}\right)[2\pi]$

$$\equiv (\arg(\overline{z} + i) - \arg(z))\,[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} - \theta\,[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{3\theta}{2}\,[2\pi]$$

3) On a : $|f(z)| = \left|\frac{\overline{z} + i}{z}\right| = \frac{|\overline{z} + i|}{|z|} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

Exercice 7 Juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.
Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation $z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$

1) a- Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$

b- En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

2) Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe réel.

3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle α où α est un réel de $]0, \pi[$

a- Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0,\pi[$

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation :

$6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$

a- Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b- Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z

Solution

1) a- On a : $z_1-z=z_1-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\dfrac{z_1(z_1-z_2)}{z_1+z_2}$ et $z_2-z=z_2-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=-\dfrac{z_2(z_1-z_2)}{z_1+z_2}$

Donc : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{z_1(z_1-z_2)}{-z_2(z_1-z_2)}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

b- On a : O, M_1 et M_2 sont des points distincts deux à deux et ne sont pas alignés

et $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2-0}{z_1-0}=-1\in\mathbb{R}$

Donc les points O, M_1, M_2 et M sont cocycliques.

Par suite, le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

2) Si $z_2=\overline{z_1}$

alors : $z=\dfrac{2z_1\overline{z_1}}{z_1+\overline{z_1}}=\dfrac{2|z_1|^2}{2\,\mathrm{Re}(z_1)}$

Donc : $z\in\mathbb{R}$

Par suite, le point M appartient à l'axe réel.

3) a- Vérifier que : $z_2=e^{i\alpha}z_1$

b- On a : $\dfrac{z_2}{z_1}=e^{i\alpha}$ et $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

Donc : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}e^{i\alpha}=-1$ c'est-à-dire : $z_1-z=(z-z_2)e^{-i\alpha}$

Par suite: $|z_1-z|=|z_2-z|$ c'est-à-dire : $MM_1=MM_2$

D'où : M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4) a- On rappelle que lorsque l'équation : $at^2+bt+c=0\quad(a\in\mathbb{C}^*)$ admet deux racines, distinctes ou non, alors leur somme est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$

Donc : $z_1+z_2=\dfrac{e^{i\theta}+1}{6}$ et $z_1z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{6}$

Par suite, $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b- On a : $e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})=e^{i\frac{\theta}{2}}.2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

et $e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})=e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $z = 2.\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = 2i\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\pi}{2}}$

Et puisque : $0 < \theta < \pi$ alors : $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ par suite : $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$

Donc : $z = 2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout nombre complexe z distinct de 1, on pose : $f(z) = \dfrac{iz^2}{z-1}$

1) a- Déterminer les racines carrées du nombre $(1-4i\sqrt{3})$

b- Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c- Montrer que le nombre $z_1^6 + z_2^6$ est réel.

2) a- Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}-\{1\}$ on a :

$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ ou $|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z)$

b- Déterminer dans le plan complexe l'ensemble E des points $M(z)$ pour lesquels $f(z)$ est un nombre imaginaire pur

3) a- Déterminer dans le plan complexe les deux ensembles :

$(\Delta) = \{M(z)/|f(z)| = |z|\}$ et $(C) = \{M(z)/\arg f(z) \equiv \arg z\,[2\pi]\}$

b- Déterminer $(\Delta)\cap(C)$

Solution

1) a- On a : $1-4i\sqrt{3} = 4-4i\sqrt{3}-3$

$= 2^2 - 2.2.i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2$

$= (2-i\sqrt{3})^2$

Donc, les racines carrées de $1-4i\sqrt{3}$ sont $2-i\sqrt{3}$ et $-2+i\sqrt{3}$

b- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{1\}$

On a : $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\,iz^2 - z + 1 = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 1-4i\sqrt{3} = (2-i\sqrt{3})^2$

Donc les solutions de l'équation $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sont :

$z_1 = \dfrac{1+2-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,i}$ et $z_2 = \dfrac{1-2+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,i}$

C'est-à-dire : $z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c- On a : $z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

et $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc : $z_1^6 + z_2^6 = (e^{i\frac{4\pi}{3}})^6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6$

$= e^{i8\pi} + \frac{1}{27}e^{i\pi}$

$= 1 - \frac{1}{27}$

par suite : $z_1^6 + z_2^6 = \frac{26}{27}$, d'où $(z_1^6 + z_2^6) \in \mathbb{R}$

2) a- Soit z un élément de $\mathbb{C} - \{1\}$

On a : $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{f(z)} = -f(z)$

$\Leftrightarrow \frac{-i\overline{z}^2}{\overline{z} - 1} = \frac{-iz^2}{z - 1}$

$\Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 - z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z}) - z\overline{z}(z - \overline{z}) = 0$

$\Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z} - z\overline{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0$ ou $z + \overline{z} - z\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z$ ou $2\,\mathrm{Re}(z) - |z|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z$ ou $|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z)$

b- Posons : $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1;0)\}$ (on a: $(x,y) \neq (1;0)$ car $z \neq 1$)

On a : $M(z) \in E \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z$ ou $|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

Donc l'ensemble E est la réunion du cercle de centre $A(1)$ et de rayon 1 et l'axe réel privé du point A

3) a- Soit z un élément de $\mathbb{C} - \{1\}$

• On a : $M(z) \in (\Delta) \Leftrightarrow |f(z)| = |z|$

$\Leftrightarrow \frac{|z|^2}{|z - 1|} = |z|$

$\Leftrightarrow |z|(|z| - |z - 1|) = 0$

$\Leftrightarrow |z| = 0$ ou $|z - 1| = |z|$

$\Leftrightarrow M = O$ ou $MA = MO$

Donc l'ensemble (Δ) est la réunion de la médiatrice du segment $[OA]$ et le singleton $\{O\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

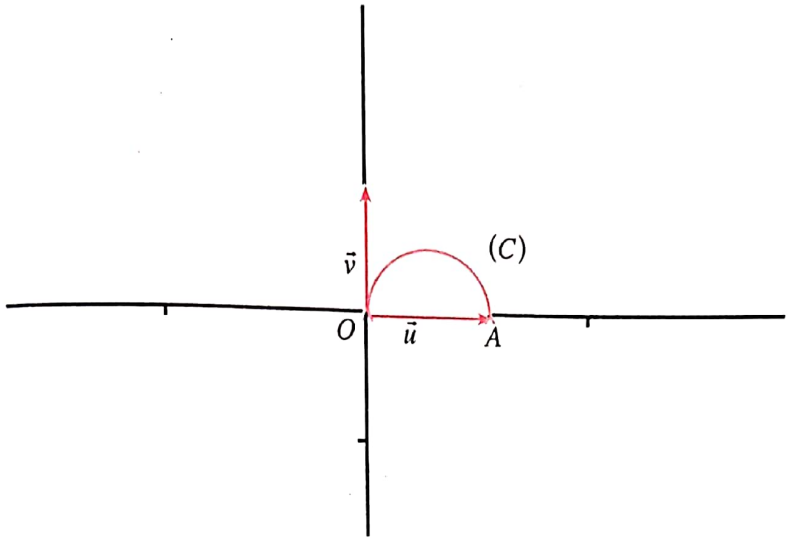
• On a : $M(z) \in (C) \Leftrightarrow \arg f(z) \equiv \arg(z)\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\arg z - \arg(z-1) \equiv \arg(z)\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Donc l'ensemble (C) est le demi-cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A (voir figure).



b- Soit z un élément de $\mathbb{C}^* - \{1\}$

On a : $M(z) \in (C) \cap (\Delta) \Leftrightarrow |f(z)| = |z|$ et $\arg(f(z)) \equiv \arg(z)\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{f(z)}{z}\right) \equiv 0\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{f(z)}{z} = 1e^{io}$

$\Leftrightarrow f(z) = z$

$\Leftrightarrow (1-i)z^2 - z = 0$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{1-i}$ (car $z \neq 0$)

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc : $(C) \cap (\Delta) = \left\{B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right\}$

Exercice 9

Pour tout nombre complexe z distinct de i, on pose : $f(z) = \frac{iz-1}{z-i}$

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on a : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = iz$ et écrire les solutions sous forme

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

trigonométrique.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

a- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels $f(z)$ est un nombre imaginaire pur.

b- Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$\arg f(z) \equiv \pi\,[2\pi]$

4) Soit α un nombre réel tel que : $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $f(z) = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$, puis déterminer les solutions de l'équation : $(iz-1)^3 = (z-i)^3$

Solution

1) Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on a : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{f(z)} = f(z)$

$$\Leftrightarrow \frac{-i\,\bar{z}-1}{\bar{z}+i} = \frac{iz-1}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow iz\,\bar{z} - z - \bar{z} - i = -iz\,\bar{z} - z - \bar{z} + i$$

$$\Leftrightarrow z\,\bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

2) Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on a :

$f(z) = iz \Leftrightarrow iz^2 + (1-i)z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (1+i)z - i = 0$ (on a multiplié par $(-i)$)

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 6i = 3(1+i)^2$

Donc : $f(z) = iz \Leftrightarrow z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ ou $z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$

Par suite, l'ensemble de solutions de l'équation $f(z) = iz$ est :

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i), \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\right\}$$

et on a : $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

et $\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

3) a- Soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ est un nombre imaginaire pur, on a :

$M(z) \in E \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$ et $z \neq i$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \overline{f(z)} = -f(z)$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow \dfrac{-i\,\overline{z}-1}{\overline{z}+i} = \dfrac{-iz+1}{z-i}$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow -iz\,\overline{z} - z - \overline{z} + i = -iz\,\overline{z} + \overline{z} + z + i$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -z$ et $z \neq i$

$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} - \{i\}$

Donc l'ensemble E est l'axe imaginaire privé du point $A(i)$

b- Soit F l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\arg f(z) \equiv \pi\,[2\pi]$

On a : $M(z) \in F \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{iz-1}{z-i}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$ et $z \neq i$ et $z \neq -i$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{i(z+i)}{z-i}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$ et $z \neq i$ et $z \neq -i$

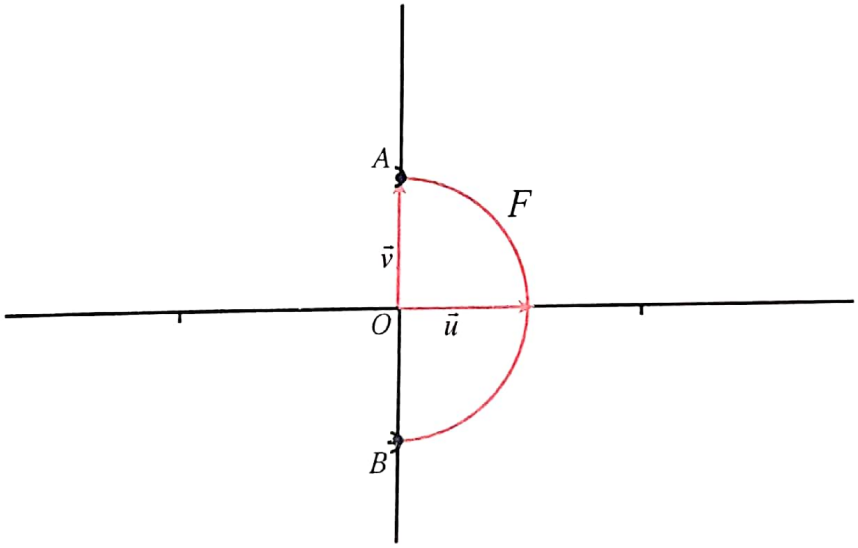
$\Leftrightarrow \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$ et $z \neq i$ et $z \neq -i$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $z \neq i$ et $z \neq -i$ (car $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$)

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

où A est le point d'affixe i et B est le point d'affixe $(-i)$

Donc l'ensemble F est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B (voir figure)



4) • Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $(\forall k \in \mathbb{Z})\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

On a : $f(z) = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{iz-1}{z-i} = e^{i\alpha}$

$\Leftrightarrow ze^{i\alpha} - ie^{i\alpha} = iz - 1$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{ie^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\pi}}{e^{i\alpha} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow z=\frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\pi}\times\frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \qquad \left(\text{Rappel : } \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow z=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

- On a : $(iz-1)^3=(z-i)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{iz-1}{z-i}\right)^3=1$ (i n'est pas solution de l'équation)

$$\Leftrightarrow (f(z))^3=1$$

$$\Leftrightarrow f(z)=1 \text{ ou } f(z)=j \text{ ou } f(z)=\overline{j}$$

car 1, j et $\overline{j}$ sont les racines cubiques de 1 où $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc : $(iz-1)^3=(z-i)^3 \Leftrightarrow f(z)=e^{i0}$ ou $f(z)=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $f(z)=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Et, d'après le résultat de la question précédente, on a:

$$(iz-1)^3=(z-i)^3 \Leftrightarrow z=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{0}{2}\right) \text{ ou } z=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$$

$$\text{ou } z=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } z=-\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ ou } z=\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } z=2+\sqrt{3} \text{ ou } z=2-\sqrt{3}$$

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, on pose :

$f(z)=\frac{iz}{z-i}$ pour tout z de $\mathbb{C}-\{i\}$

1) Ecrire le nombre $f(1+2i)$ sous la forme algébrique.

2) a- Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\})\ f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|^2=\text{Im}(z)$

b- Déterminer (E) l'ensemble des points $M(z)$ pour que $f(z)$ soit un nombre réel.

3) On considère les ensembles :

$(C)=\{M(z)/|f(z)-i|=2\}$ et $(\Delta)=\left\{M(z)/\arg(f(z)-i)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

a- Montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b- Montrer que (Δ) est une demi-droite privée du point $A(i)$

c- Tracer (C) et (Δ), puis déterminer leur intersection.

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

4) Pour tout θ de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, on pose : $z=e^{i\theta}$

a- Déterminer, suivant les valeurs de θ, la forme trigonométrique de $f(z)$

b- Déterminer θ pour que le triangle OMN soit isocèle de sommet O où $M(z)$ et $N(f(z))$

Solution

1) Vérifier que : $f(1+2i)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

2) a- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

On a : $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{f(z)}=f(z)$

$$\Leftrightarrow\frac{-i\,\overline{z}}{\overline{z}+i}=\frac{iz}{z-i}$$
$$\Leftrightarrow-\overline{z}(z-i)=z(\overline{z}+i)$$
$$\Leftrightarrow 2z\,\overline{z}=-i(z-\overline{z})$$
$$\Leftrightarrow 2|z|^2=-i.2i.\mathrm{Im}(z)$$
$$\Leftrightarrow|z|^2=\mathrm{Im}(z)$$

b- On a : $M(z)\in(E)\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow|z|^2=\mathrm{Im}(z)$$

On pose : $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0;1)\}$ (on a:$(x,y)\neq(0;1)$ car $z\neq i$)

On a : $M(z)\in(E)\Leftrightarrow x^2+y^2=y$

$$\Leftrightarrow(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc, (E) est le cercle de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point $A(i)$

3) a- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

On a : $f(z)-i=\frac{iz}{z-i}-i=\frac{-1}{z-i}$

Donc : $M(z)\in(C)\Leftrightarrow|f(z)-i|=2$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{-1}{z-i}\right|=2$$
$$\Leftrightarrow|z-i|=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow AM=\frac{1}{2}\quad(A\text{ est le point d'affixe }i)$$

Par suite, (C) est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$

b- Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que : $z\neq i$

On a : $M(z)\in(\Delta)\Leftrightarrow\arg(f(z)-i)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow\arg\left(\frac{-1}{z-i}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \arg(-1) - \arg(z-i) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

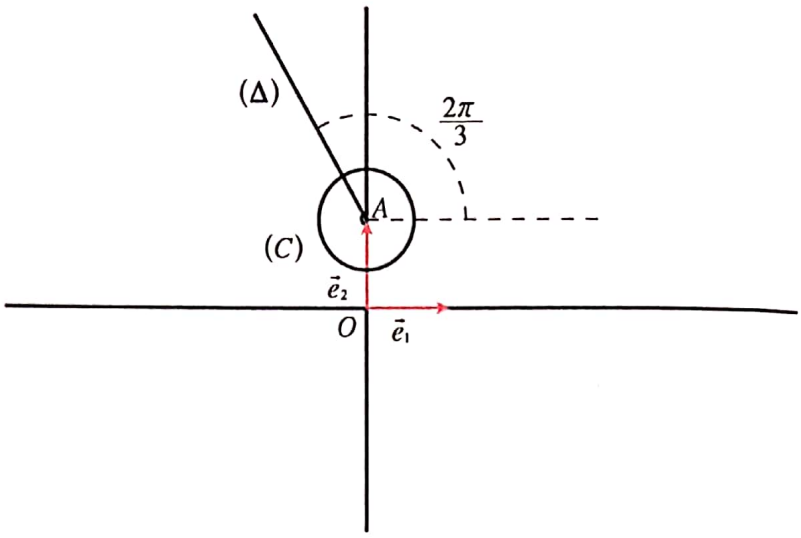
$$\Leftrightarrow \pi - \arg(z-i) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z-i) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

Donc : (Δ) est une demi-droite d'origine $A(i)$ privée du point A (voir figure)

c-



Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que : $z \neq i$

On a : $M(z) \in (C) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} |f(z)-i| = 2 \\ \arg(f(z)-i) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(z) - i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{z-i} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+i\sqrt{3}} + i$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Donc : (C) et (Δ) se coupent au point d'affixe $-\frac{1}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

4) a- • On rappelle que : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

• On a : $f(z) = \frac{iz}{z-i} = \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ (car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$)

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)}$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

• On a : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

Donc : $0 < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi$ et $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$

1er cas : si $0 < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Alors : $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

Par suite : $f(z) = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

2ème cas : si $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

Alors : $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Par suite : $f(z) = \frac{-1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}+\pi\right)}$

$$= \frac{-1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \quad \left(\frac{7\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]\right)$$

$$= \frac{-1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

b- Le triangle OMN est isocèle de sommet O si et seulement si $OM = ON$

On a : $OM = |z| = |e^{i\theta}| = 1$

et $ON = |f(z)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|}$

Donc : $OM = ON \Leftrightarrow \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \text{ (car } 0 < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \pi\text{)}$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Conclusion : Pour que le triangle OMN soit isocèle de sommet O, il faut et il suffit que : $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Exercice 11

Soit $u = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

On pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_1 = uj$ et $z_2 = ui$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) On pose : $Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$

a- Ecrire le nombre $\overline{j} - i$ sous forme trigonométrique.

b- En déduire l'écriture exponentielle du nombre Z en fonction de r et θ

3) a- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le nombre Z est un nombre réel strictement positif

b- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le nombre Z est un nombre imaginaire pur.

4) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - ujz^2 + u^2z - u^3j = 0$

a- Montrer que le nombre $-iu$ est une solution de l'équation (E)

b- Résoudre l'équation (E)

c- Montrer que les images des solutions de (E) dans le plan complexe appartiennent à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Solution

1) On a : $z_1 = uj = re^{i\theta}.e^{i\frac{2\pi}{3}} = re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$

Donc : $z_1 = r\left(\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

et on a : $z_2 = ui = re^{i\theta}.e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

Donc : $z_2 = r\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

2) a- On a : $\overline{j} - i = e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{11\pi}{12}} + e^{-i\frac{11\pi}{12}}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}} = -2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}$ $\left(\frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}\right)$

$= -2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Et puisque : $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ alors : $\overline{j} - i = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- On a : $Z=\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\dfrac{uj+ui}{u^2ij}=\dfrac{i+j}{uij}=\dfrac{(j+i)(\overline{j}-i)}{uij(\overline{j}-i)}=\dfrac{(\overline{j}-i)(\overline{\overline{j}-i})}{uij(\overline{j}-i)}$

$$=\frac{|\overline{j}-i|^2}{uij(\overline{j}-i)}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2}{re^{i\theta}.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}.2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}}=\frac{2}{r}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\theta+\frac{7\pi}{12}\right)}$$

et c'est l'écriture exponentielle de Z car $\dfrac{2}{r}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)>0$

3) a- On a : $Z\in\mathbb{R}^{+*}\Leftrightarrow\theta+\dfrac{7\pi}{12}=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow\theta=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

b- On a : $Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\theta+\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow\theta=\frac{-\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

4) a- On a : $(-iu)^3-uj(-iu)^2+u^2(-iu)-u^3j=iu^3+ju^3-iu^3-u^3j=0$.

Donc le nombre $(-iu)$ est une solution de l'équation (E)

b- En effectuant la division euclidienne du polynôme: $z^3-ujz^2+u^2z-u^3j$ par $z+iu$, on déduit que :

$z^3-ujz^2+u^2z-u^3j=(z^2-(ui+uj)z+u^2ij)(z+iu)$

Par suite : $(E)\Leftrightarrow z+iu=0$ ou $z^2-u(i+j)z+u^2ij=0$

$\Leftrightarrow z=-iu$ ou $z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=0$

$\Leftrightarrow z=-iu$ ou $z=z_1$ ou $z=z_2$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S=\{-iu,uj,ui\}$

c- Les solutions de l'équation (E) sont : ui, $-ui$ et uj

et comme : $|ui|=|u|\times|i|=r\times1=r$ $\quad(|u|=|re^{i\theta}|=r)$

et $|-ui|=|-u|\times|i|=r\times1=r$

et $|uj|=|u|\times|j|=r\times1=r$

Alors les images des solutions de l'équation (E) dans le plan complexe appartiennent au cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soit m un nombre complexe distinct de $(1-i)$

On considère les deux nombres complexes $z_1=(1+i)m-2i$ et $z_2=(1-i)m+2$

1) a- Montrer que : $|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow|m-1-i|=|m+1+i|$

b- En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels $|z_1|=|z_2|$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) Dans cette question on pose : $m = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

a- Donner l'écriture exponentielle de z_1

b- Vérifier que : z_1^{40} est un nombre imaginaire pur.

3) a- Vérifier que : $\dfrac{z_1 - m}{z_1 - z_2} = \dfrac{m-2}{2(m-1+i)}$

b- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels les points $M(m)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont alignés.

4) Soient I le milieu du segment $[M_1M_2]$ et Ω le point d'affixe $(2-2i)$

a- Donner l'expression complexe de la translation t qui transforme M en I

b- Vérifier que : $(\Omega I) \perp (M_1M_2)$ et $I\Omega = IM_1$

c- Dire comment construire M_1 et M_2 à partir du point M ?

Solution

1) a- On a : $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |(1+i)m - 2i| = |(1-i)m + 2|$

$$\Leftrightarrow \left|(1+i)\left(m - \frac{2i}{1+i}\right)\right| = \left|(1-i)\left(m + \frac{2}{1-i}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow |1+i||m-1-i| = |1-i||m+1+i|$$

$$\Leftrightarrow |m-1-i| = |m+1+i| \ (\text{car} |1+i| = |1-i| = \sqrt{2})$$

b- On considère les points $A(1+i)$, $B(-1-i)$ et $M(m)$

On a : $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |m-(1+i)| = |m-(-1-i)|$

$$\Leftrightarrow MA = MB$$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels $|z_1| = |z_2|$ est la médiatrice du segment $[AB]$, son équation est : $y = -x$

2) a- On a : $z_1 = (1+i)m - 2i = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}.\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}} + 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$= 2(e^{i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$= 2e^{i(\frac{-\pi}{16})}(e^{i\frac{7\pi}{16}} + e^{-i\frac{7\pi}{16}})$$

$$= 4\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)e^{-i\frac{\pi}{16}}$$

Et puisque $\cos\left(\dfrac{7\pi}{16}\right) > 0$ (car $0 < \dfrac{7\pi}{16} < \dfrac{\pi}{2}$)

Alors l'écriture exponentielle du nombre z_1 est : $z_1 = 4\cos\left(\dfrac{7\pi}{16}\right)e^{-i\frac{\pi}{16}}$

b- On a : $z_1^{40} = \left(4\cos\left(\dfrac{7\pi}{16}\right)\right)^{40} e^{-i\frac{40\pi}{16}} = \left(4\cos\left(\dfrac{7\pi}{16}\right)\right)^{40} e^{-i\frac{5\pi}{2}}$

$$= \left(4\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)^{40} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \left(-\frac{5\pi}{2} + 2\pi = \frac{-\pi}{2}\right)$$

$$= -\left(4\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)^{40} i$$

Donc : $z_1^{40} \in i\mathbb{R}$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

3) a- Vérifier que : $\dfrac{z_1 - m}{z_1 - z_2} = \dfrac{m-2}{2(m-1+i)}$

Remarque : On a : $z_1 \neq z_2$ car $m \neq 1-i$

b- • Pour que M, M_1 et M_2 soient alignés, il faut et il suffit que : $\dfrac{z_1 - m}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}$

• On a : $\dfrac{z_1 - m}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2(m-1+i)} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{m-2}{2(m-1+i)}\right)} = \frac{m-2}{2(m-1+i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{m}-2}{2(\overline{m}-1-i)} = \frac{m-2}{2(m-1+i)}$$

$$\Leftrightarrow i(m+\overline{m}) - (m-\overline{m}) - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Re}(m) - 2i\,\mathrm{Im}(m) - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m) - \mathrm{Im}(m) - 2 = 0$$

Donc l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels M, M_1 et M_2 sont alignés est la droite d'équation $x - y - 2 = 0$ privée du point d'affixe $(1-i)$ (car $m \neq 1-i$)

4) a- On a : $t(M) = I$, donc le vecteur de la translation t est $\overrightarrow{MI}$ et on a :

$$aff(\overrightarrow{MI}) = z_I - m = \frac{z_1 + z_2}{2} - m = \frac{2m + 2 - 2i}{2} - m = 1 - i$$

Donc l'expression complexe de la translation t est : $z' = z + 1 - i$

b- On a : $\dfrac{z_\Omega - z_I}{z_2 - z_1} = \dfrac{2 - 2i - m - 1 + i}{-2mi + 2 + 2i}$

$$= \frac{-m + 1 - i}{2i(-m + 1 - i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Donc : $\arg\left(\dfrac{z_\Omega - z_I}{z_2 - z_1}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $|z_\Omega - z_I| = \dfrac{1}{2}|z_2 - z_1|$

C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{I\Omega}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $I\Omega = \dfrac{1}{2}M_1M_2$

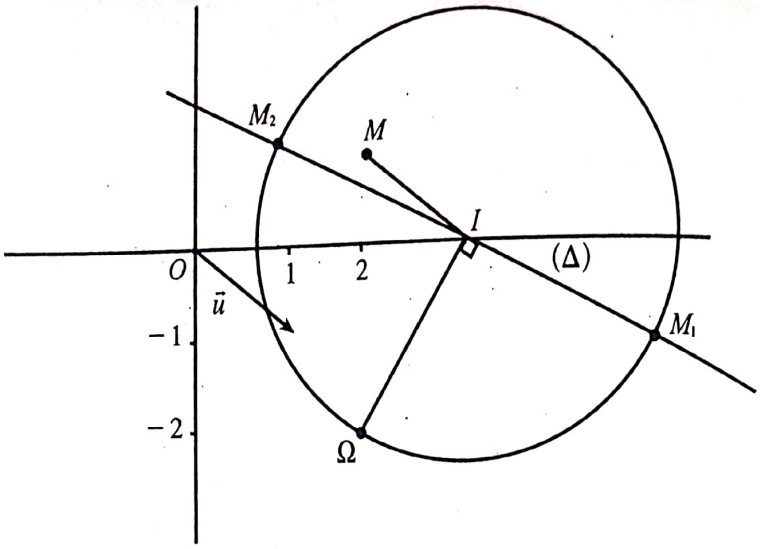
D'où : $(M_1M_2) \perp (\Omega I)$ et $\Omega I = IM_1$ (I est le milieu de $[M_1M_2]$)

c- Soit M un point du plan complexe.

On construit tout d'abord le point I l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}(1-i)$, puis on construit la droite (Δ) passant par I et perpendiculaire à la droite $(I\Omega)$

Les points M_1 et M_2 sont les points d'intersection de la droite (Δ) avec le cercle de centre I et de rayon $I\Omega$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner



Exercice 13

I. 1) Calculer $(\sqrt{3}-3i)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(\sqrt{3}+i)z+2(1+i\sqrt{3})=0$

3) On considère les nombres complexes : $a=-2i$, $b=-\sqrt{3}+i$ et $c=1+i\sqrt{3}$

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{Z})\ b^{12n}+c^{12n}=2a^{12n}$

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$

1) Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Soit H le point d'affixe $(1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$

Montrer que les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

3) Soit r la rotation de centre O et qui transforme C en B

a- Déterminer l'expression complexe de la rotation r

b- Montrer que le point $H'=r(H)$ appartient à la droite (AB)

Solution

I. 1) Vérifier que : $(\sqrt{3}-3i)^2=-6-6\sqrt{3}\,i$

2) Vérifier que : $\Delta=-6-6\sqrt{3}\,i$, donc : $\Delta=(\sqrt{3}-3i)^2$

et en déduire que : $S=\{-\sqrt{3}+i,-2i\}$

3) Soit n un élément de $\mathbb{Z}$

On a : $b^{12n}+c^{12n}=(2e^{i\frac{5\pi}{6}})^{12n}+(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{12n}$

$=2^{12n}e^{i10n\pi}+2^{12n}e^{i4n\pi}$

$=2^{12n}e^{i.0}+2^{12n}e^{i.0}=2^{12n}+2^{12n}=2\times 2^{12n}$

$=2^{12n+1}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

et on a : $2a^{12n} = 2(2e^{-i\frac{\pi}{2}})^{12n}$

$= 2 \times 2^{12n} \times e^{-i6n\pi} = 2^{12n+1}.e^{i.0} = 2^{12n+1}$

Donc : $b^{12n} + c^{12n} = 2a^{12n}$

II. 1) On a : $OA = |a| = |-2i| = 2$ et $OB = |b| = |-\sqrt{3} + i| = 2$

et $OC = |c| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$

Donc : $OA = OB = OC$

Par suite, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) On a : $\frac{z_H - z_C}{z_B - z_A} = \frac{(1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1) - 1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i + 2i}$

$= \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + 3i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{i(-1 + i\sqrt{3})}{-1 + i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}i$

Donc : $\frac{z_H - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

Par suite, $(CH) \perp (AB)$

3) a- On a : $r(C) = B$

Donc : $z_B - z_O = e^{i\theta}(z_C - z_O)$ où θ est l'angle de la rotation r

par suite : $e^{i\theta} = \frac{z_B}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Donc l'expression complexe de la rotation r est : $z' - 0 = i(z - 0)$ c'est-à-dire : $z' = iz$

b- On a : $r(H) = H'$

Donc : $z_{H'} = iz_H$ c'est-à-dire : $z_{H'} = 1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

Et on a : $\frac{z_{H'} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) + 2i}{-\sqrt{3} + i + 2i}$

$= \frac{(1-\sqrt{3}) + i(3-\sqrt{3})}{-\sqrt{3} + 3i}$

$= \frac{(1-\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{-\sqrt{3}(1 - i\sqrt{3})}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$

Donc : $\frac{z_{H'} - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Par suite, les points H', A et B sont alignés, d'où : $H' \in (AB)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 14 juin 2017

Soit m un nombre complexe non nul

Partie 1 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (2im)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

On suppose que : $m \in \mathbb{C}^* - \{1, i\}$ et on pose : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$

et $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i, m, z_1 et z_2

1) a- Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$

b- Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

2) a- Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$

b- Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

c- Déterminer l'ensemble des points M pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques (remarquer que : $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Solution

Partie 1 :

1) Le discriminant de l'équation (E) est :

$\Delta = 4(m+1+i)^2 - 4 \times 2 \times (m^2 + (1+i)m + i)$

Vérifier que : $\Delta = -4m^2$

Donc : $\Delta = (2im)^2$

2) Les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{2(m+1+i) + 2mi}{4} = \frac{(m+1)(1+i)}{2}$

et $z_2 = \frac{2(m+1+i) - 2mi}{4} = \frac{(m+i)(1-i)}{2}$

par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{z_1, z_2\}$

Partie 2 :

1) a- On a : $i\,z_2 + 1 = i \times \frac{1-i}{2}(m+i) + 1 = \frac{1+i}{2}(m+i) + 1$

$= \frac{1+i}{2}m + \frac{i-1}{2} + 1 = \frac{1+i}{2}m + \frac{1+i}{2}$

$= \frac{1+i}{2}(m+1)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $i\,z_2 + 1 = z_1$

b- On a : $z_1 = iz_2 + 1$

Donc : $z_1 - \frac{1+i}{2} = iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2}$

par suite : $z_1 - \frac{1+i}{2} = i\left(z_2 - \frac{1+i}{2}\right)$

D'où : $z_1 - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_2 - \omega)$

Ce qui signifie que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a- On a : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = \frac{\frac{1-i}{2}(m+i) - m}{\frac{1+i}{2}(m+1) - m}$

$$= \frac{(1-i)(m+i) - 2m}{(1+i)(m+1) - 2m}$$

$$= \frac{1+i-m(1+i)}{1+i+m(i-1)} = \frac{(1+i)(1-m)}{1+i+i(1+i)m}$$

$$= \frac{1-m}{1+im} = \frac{-i(1-m)}{-i(1+im)}$$

Donc : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = \frac{i(m-1)}{m-i}$

b- Si M, M_1 et M_2 sont alignés

alors : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R}$

par suite : $i\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

D'où : $\frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire: $\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}$

ce qui signifie que $(AM) \perp (BM)$

Donc M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

c- Soit (E) l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques

• si $m = i$ alors $M = M_1 = B$, dans ce cas il s'agit de trois points Ω, M_1 et M_2 qui ne sont pas alignés (car $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \notin \mathbb{R}$), donc ils sont cocycliques

• si $m \neq i$

On a : $M(m) \in (E) \Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} : \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}\right) \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \times \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(i\frac{m-1}{m-i} \times i\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$ (M, A et B sont alignés)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow M \in (AB) - \{B\}$

Conclusion : l'ensemble (E) est la droite (AB)

Exercice 15

I. Soit a un nombre complexe non nul. on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E): 2z^2 - (3+i\sqrt{3})az + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $(-1+i\sqrt{3})^2 a^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B et M d'affixes respectives a, $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose : $A_1 = r^{-1}(A)$ et $B_1 = r(B)$ où r^{-1} est la rotation réciproque de la rotation r

Soient a_1 et a_2 les affixes respectives des points A_1 et B_1

1) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral

2) a- Montrer que : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

et $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b- Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3) On suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$

a- Montrer que $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$

b- Montrer que les points M, A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si les points M, O, A et B sont cocycliques.

Solution

I. 1) Le discriminant de l'équation (E) est :

$$\Delta = [(3+i\sqrt{3})a]^2 - 4 \times 2 \times (1+i\sqrt{3})a^2$$
$$= (3+i\sqrt{3})^2 a^2 - 8(1+i\sqrt{3})a^2$$
$$= a^2(9 + 6i\sqrt{3} - 3 - 8 - 8i\sqrt{3}) = a^2(-2 - 2i\sqrt{3})$$

et on a : $(-1+i\sqrt{3})^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$

Donc : $\Delta = (-1+i\sqrt{3})^2 a^2$

2) Les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{(3+i\sqrt{3})a + a(-1+i\sqrt{3})}{4} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

et $z_2 = \frac{(3+i\sqrt{3})a - a(-1+i\sqrt{3})}{4} = a$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est $S=\left\{a,\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\right\}$

II. 1) On a : $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{b}{a}=\frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc : $|z_B-z_O|=|z_A-z_O|$ et $\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

c'est-à-dire $OB=OA$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ce qui signifie que le triangle OAB est équilatéral.

2) a- • On a : r est la rotation de centre $M(z)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Donc r^{-1} est la rotation de centre $M(z)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

Et puisque $r^{-1}(A)=A_1$ alors $a_1-z=e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)$

par suite, $a_1=z+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a-z)$

D'où : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

• On a : $r(B)=B_1$

Donc : $b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)$

par suite : $b_1=z+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b-z)$

D'où : $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b- On a : $aff(\overrightarrow{OA_1})=a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

et $aff(\overrightarrow{B_1M})=z-b_1=z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Donc : $aff(\overrightarrow{OA_1})=aff(\overrightarrow{B_1M})$

ce qui signifie que : $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{B_1M}$

Donc le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3) a- On a : $\frac{z-b_1}{z-a_1}=\frac{z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}{z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a}{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a}$

$=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z-e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot be^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}z-ae^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{(z-b)e^{i\frac{\pi}{3}}}{(z-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{z-b}{z-a}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque : $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{ae^{i\frac{\pi}{3}}}=-e^{-i\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}\right)$

alors : $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

b- • Les points M, A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si $\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$

• On a : $\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{z-b}{z-a}\times\frac{0-a}{0-b}\right)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{z-b}{z-a}:\frac{0-b}{0-a}\right)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ (les points M, O, A et B sont cocycliques)

Conclusion :

Les points M, A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si les points M, O, A et B sont cocycliques.

Exercice 16

On considère les deux nombres complexes $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$

1) a- Écrire chacun des nombres a et b sous forme trigonométrique.

b- Montrer que le nombre $a^{2019}+b^{1440}$ est réel

c- Déterminer les nombres n de $\mathbb{N}$ pour lesquels $a^n=b^n$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A(a)$ et $B(b)$ et l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $z=\frac{1}{2}a\overline{z}$

Montrer que l'ensemble (Δ) est une droite qui passe par O et B

3) Soit $M(z)$ un point du plan distinct de B et soit $M'(z')$ le point tel que $z'=a\overline{z}-b$

a- Montrer que $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2}\in\mathbb{R}^{+*}$

b- En déduire que (Δ) est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}\right)$

4) Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $az=bz'$

a- Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

b- Déterminer l'image de (Δ) par la rotation f

Solution

1) a- On a : $a=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

et on a : $b=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

b- On a : $a^{2019}+b^{1440}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{2019}+(2e^{i\frac{\pi}{6}})^{1440}$

$=2^{2019}e^{i673\pi}+2^{1440}e^{i240\pi}$

$=2^{2019}e^{i\pi}+2^{1440}e^{i\cdot 0}$

$=-2^{2019}+2^{1440}$

Donc $(a^{2019}+b^{1440})\in\mathbb{R}$

c- Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $a^n=b^n\iff 2^ne^{i\frac{n\pi}{3}}=2^ne^{i\frac{n\pi}{6}}$

$\iff e^{i\frac{n\pi}{3}}=e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$\iff \frac{n\pi}{3}=\frac{n\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{N})$

$\iff n=12k \quad (k\in\mathbb{N})$

Donc l'ensemble des nombres n de $\mathbb{N}$ pour lesquels $a^n=b^n$ est l'ensemble $12\mathbb{N}$ (l'ensemble des multiples positifs du nombre 12)

2) • Soit $M(z)$ un point du plan complexe et posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

On a : $M(z)\in(\Delta)\iff z=\frac{1}{2}a\overline{z}$

$\iff x+iy=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)$

$\iff x+iy=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$

$\iff x=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$ et $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$

$\iff x-\sqrt{3}y=0$ et $\sqrt{3}x-3y=0$

$\iff y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Donc l'ensemble (Δ) est la droite d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

• Il est évident que $O\in(\Delta)$

et on a : $B\in(\Delta)$ car $1=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}$ $(B(\sqrt{3},1))$

Donc (Δ) passe par O et par B

3) a- On a : $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2}=\frac{(z-b)(a\overline{z}-2b)}{b^2}$

$=\frac{a}{b^2}|z|^2-\frac{2}{b}z-\frac{a}{b}\overline{z}+2$

Or : $\frac{a}{b^2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{b}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\frac{a}{b}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

donc : $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2}=\frac{1}{2}|z|^2-e^{-i\frac{\pi}{6}}z-e^{i\frac{\pi}{6}}\overline{z}+2$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{2}|z|^2 - (e^{-i\frac{\pi}{6}}z + \overline{e^{-i\frac{\pi}{6}}z}) + 2$$

$$= \frac{1}{2}|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(ze^{-i\frac{\pi}{6}}) + 2$$

Par suite, $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \in \mathbb{R}$

Et puisque $\mathrm{Re}(ze^{-i\frac{\pi}{6}}) \leq |ze^{-i\frac{\pi}{6}}|$ et $|ze^{-i\frac{\pi}{6}}| = |z|$

alors $-2\,\mathrm{Re}(ze^{-i\frac{\pi}{6}}) \geq -2|z|$

par suite, $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \geq \frac{1}{2}(|z|^2 - 4|z| + 4)$

c'est-à-dire : $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \geq \frac{1}{2}(|z| - 2)^2$

Donc : $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \in \mathbb{R}^+$

Et puisque $z \neq b$ alors $z' \neq b$

par suite, $\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \in \mathbb{R}^{+*}$

b- Pour montrer que (Δ) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}\right)$, il suffit de montrer que $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM'}) \equiv 0[2\pi]$ (car $O \in (\Delta)$ et $B \in (\Delta)$)

En effet, On a : $(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM'}) \equiv \arg\left(\frac{z-b}{-b}\right) + \arg\left(\frac{z'-b}{-b}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{(z-b)(z'-b)}{b^2}\right)[2\pi]$$

$$\equiv 0[2\pi], \text{ car } \frac{(z-b)(z'-b)}{b^2} \in \mathbb{R}^{+*}$$

4) a- L'expression complexe de l'application f est : $z' = \frac{a}{b}z$

c'est-à-dire : $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 0)$

Donc f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

b- On a vu que la droite (Δ) passe par O et par B

Donc l'image de la droite (Δ) par la rotation f est la droite (Δ') passant par $f(O)$ et par $B' = f(B)$

On a : $f(O) = O$

et on a : $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = a$

Donc : $f(B) = A$

par suite, l'image de la droite (Δ) par la rotation f est la droite (OA)

Exercice 17

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 6 + 3\sqrt{3}\,i = 0$

1) a- Vérifier que le discriminant de (E) est $(1 - i\sqrt{3})^2$

b- Résoudre l'équation (E), on note a et b les solutions (b est la solution réelle)

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les deux points $A(a)$ et $B(b)$ et la rotation R_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation R_2 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Soient $M(z)$ un point du plan et $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ les images respectives de M par R_1 et R_2

a- écrire z_1 et z_2 en fonction de z

b- Donner l'expression complexe de $R_2 o R_1$ et en déduire la nature de $R_2 o R_1$ et ses éléments caractéristiques

c- Montrer que: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

d- Soit C un point du cercle circonscrit au triangle OAB distinct de A et de O Déterminer un argument de $\frac{c}{c-a}$

Solution

1) a- Vérifier que $\Delta = (5+i\sqrt{3})^2 - 4(6+3\sqrt{3}\,i) = (1-i\sqrt{3})^2$

b- Montrer que les solutions de (E) sont: $a = 2+i\sqrt{3}$ et $b = 3$

2) a- On a : $M_1(z_1) = R_1(M(z))$

donc : $z_1 - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ c'est-à-dire : $z_1 = a + i(z-a)$

et on a : $M_2(z_2) = R_2(M(z))$

donc : $z_2 - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-b)$ c'est-à-dire : $z_2 = b + i(z-b)$

b- • On a : $\underbrace{M(z) \xrightarrow{R_1} M_1(z_1) \xrightarrow{R_2} M'(z')}_{R_2 o R_1}$

par suite : $z_1 = a + i(z-a)$ et $z' = b + i(z_1 - b)$

donc : $z' = b + i(a + i(z-a) - b)$

c'est-à-dire : $z' = -z + ia + a + b - ib$ et c'est l'expression complexe de $R_2 o R_1$

• De l'expression complexe de $R_2 o R_1$ on déduit que :

$z + z' = 5 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

donc : $\frac{z+z'}{2} = \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

c'est-à-dire que le milieu de $[MM']$ (où M' est l'image de M par $R_2 o R_1$) est un point fixe I d'affixe $\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Par suite, $R_2 o R_1$ est la symétrie de centre I

c- On a : $\frac{b}{b-a} = \frac{3}{1-i\sqrt{3}}$

$= \frac{3}{4}(1+i\sqrt{3})$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

donc : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

d- Le point C appartient au cercle circonscrit au triangle OAB et $C \neq O$ et $C \neq A$ donc les points O, A, B et C sont cocycliques

Par suite, $\left(\frac{c-0}{c-a} : \frac{b-0}{b-a}\right) \in \mathbb{R}$

donc : $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv 0[\pi]$

et par suite : $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{b-a}\right)[\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

Exercice 18 juin 2009

m est un nombre complexe différent de 1

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$

1) a- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = ((1+i)(m-1))^2$

b- Résoudre l'équation (E)

c- Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs de m pour lesquelles le produit des deux racines de (E) est égal à 1

2) On pose $z_1 = 1 - mi$ et $z_2 = m - i$

Dans le cas $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

II. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives m, $z_1 = 1 - mi$ et $z_2 = m - i$

1) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M_1 et M_2 sont alignés.

2) a- Montrer que la transformation R qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 1 - iz$ est une rotation qu'on déterminera l'affixe de son centre et une mesure de son angle

b- Montrer que le nombre $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(m) + \mathrm{Im}(m) = 1$

c- En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Solution

I. 1) a- On a : $\Delta = ((1-i)(m+1))^2 + 4i(m^2+1) = 2i(m-1)^2$

et $((1+i)(m-1))^2 = 2i(m-1)^2$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

donc : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

b- Vérifier que $S = \{m-i, 1-mi\}$

c- On pose $m = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$

On a : $(m-i)(1-mi) = 1 \iff -i(m^2+1) = 1$

$$\iff m^2 = -1+i$$

$$\iff (x+iy)^2 = -1+i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

Donc : $(m-i)(1-mi) = 1 \iff m = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ou

$$m = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

2) • On a : $z_1 = 1 - im = 1 + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$

$$= e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Et puisque $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, alors: $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

par suite, $z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

• Vérifier que : $z_2 = -2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

II. 1) • On a : $M_2 = M \iff m - i = m$

$$\iff i = 0, \text{ ce qui est faux}$$

Donc $M \neq M_2$

• Posons $m = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ (car $m \neq 1$)

On a : (M, M_1 et M_2 sont alignés) $\iff \dfrac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R}$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow (i+m-im)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow [(x+y)+i(1+y-x)]\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1+y-x=0$

$\Leftrightarrow y=x-1$

Donc l'ensemble des points M pour lesquels M, M_1 et M_2 sont alignés est la droite d'équation $y=x-1$ privée du point $A(1)$

2) a- L'expression complexe de la transformation R est : $z'=1-i\,z$

et on a : $z=1-i\,z\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

(Le point $\Omega\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ est le seul point invariant par la transformation R)

Donc : $z'=1-iz\Leftrightarrow z'-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-iz+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow z'-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-i\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)$

$\Leftrightarrow z'-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)$

par suite, R est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b- Posons $m=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(1,0)\}$

On a : $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow (mi+1-i-m)\in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (xi-y+1-i-x-iy)\in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x-y+1=0$

$\Leftrightarrow -\mathrm{Re}(m)-Im(m)+1=0$

Donc : $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m)+Im(m)=1$

c- On a : $z_1=1-im$ c'est-à-dire $z_{M_1}=1-i\,z_M$

Donc : $R(M)=M_1$

par suite, $(\Omega M)\perp(\Omega M_1)$ (car une mesure de l'angle de la rotation R est $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$)

D'où le point Ω appartient au cercle (C) de diamètre $[MM_1]$

par suite, la points M, M_1, M_2 et Ω sont cocycliques si et seulement si M_2 appartient au cercle (C)

c'est-à-dire si et seulement si $(M_1M_2)\perp(MM_2)$

c'est-à-dire si et seulement si $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in i\mathbb{R}$

c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Re}(m)+Im(m)=1$

Conclusion :

L'ensemble des points M pour lesquels les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques est la droite d'équation $y=-x+1$ privée du point $A(1)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 19 juillet 2011

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$

1) Vérifier que le nombre $(-2i)$ est une solution de l'équation (E)

2) Déterminer les nombres complexes α et β tels que :

$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$

3) a- Déterminer les racines carrées du nombre $5-12i$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-1+3i$, $b=-2i$ et $c=2+i$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C

2) On considère la rotation R_1 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre A et d'angle $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Soient M un point du plan complexe d'affixe z et $M_1=R_1(M)$ et $M_2=R_2(M)$

a- Vérifier que l'expression complexe de la rotation R_1 est

$$z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

b- Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z

c- En déduire que le point I milieu du segment $[M_1M_2]$ est fixe

Solution

Partie 1 :

1) Vérifier que : $(-2i)^3-(1+2i)(-2i)^2+3(1+i)\times(-2i)-10(1+i)=0$

Donc $(-2i)$ est bien une solution de l'équation (E)

2) En utilisant le développement et l'identification on trouve: $\alpha=-1-4i$ et $\beta=-5+5i$

(on peut effectuer la division euclidienne de $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)$ par $(z+2i)$)

3) a- On a : $5-12i=9-12i-4=3^2-2\times3\times2i+(2i)^2=(3-2i)^2$

Donc les racines carrées du nombre $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$

b- On a : $(E)\iff z=-2i$ ou $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$

le discriminant de l'équation $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$ est:

$\Delta=(1+4i)^2-4(-5+5i)=5-12i=(3-2i)^2$

Donc ses solutions sont : $\frac{1+4i+3-2i}{2}=2+i$ et $\frac{1+4i-3+2i}{2}=-1+3i$

par suite, l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$S=\{-2i,2+i,-1+3i\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Partie 2 :

1) On a : $\frac{b-c}{a-c}=\frac{-2i-2-i}{-1+3i-2-i}=\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{i(3-2i)}{3-2i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

donc $|b-c|=|a-c|$ et $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c'est-à-dire $CB=CA$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Par suite, le triangle ABC est isocèle et rectangle en C

2) a- On a : $R_1(M)=M_1\Leftrightarrow z_1-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b)$

$$\Leftrightarrow z_1=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2i)-2i$$

$$\Leftrightarrow z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

Donc l'expression complexe de la rotation R_1 est $z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

b- On a : $R_2(M)=M_2\Leftrightarrow z_2-a=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-a)$

$$\Leftrightarrow z_2=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+1-3i)-1+3i$$

$$\Leftrightarrow z_2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{9-\sqrt{3}}{2}\right)$$

c- Le point I est le milieu du segment $[M_1M_2]$

donc : $z_I=\frac{z_1+z_2}{2}$

$$=\frac{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{9-\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$=\frac{-5\sqrt{3}-3}{4}+\frac{7-\sqrt{3}}{4}i$$

Donc le point I est fixe

Exercice 20 juillet 2010

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a- Vérifier que le nombre $a=1+i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

b- En déduire la deuxième solution b

2) a- Montrer que : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

b- En déduire la forme trigonométrique du nombre a

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(2i+2e^{i\frac{\pi}{7}})$ et le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

a- Déterminer l'affixe du point Ω le centre du cercle (Γ)

b- Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ)

c- Montrer que $\frac{c-a}{c-b}$ est un nombre imaginaire pur

d- Déterminer l'angle de la rotation r de centre O et le rapport de l'homothétie h de centre O tels que $hor(A)=B$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) a- On a :

$$a^2 - 4ia - 2 + 2i\sqrt{3} = (1 + i(2-\sqrt{3}))^2 - 4i(1 + i(2-\sqrt{3})) - 2 + 2i\sqrt{3}$$
$$= 0$$

Donc a est une solution de l'équation (E)

b- Rappel : Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \ (\alpha \neq 0)$

alors : $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

On a : $a + b = 4i$

Donc : $b = 4i - a = 4i - 1 - i(2-\sqrt{3}) = -1 + (2+\sqrt{3})i$

2) a- On a : $a^2 = (-6 + 4\sqrt{3}) + i(4 - 2\sqrt{3})$

et on a : $4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}} = 4(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

$$= 2(2\sqrt{3} - 3) + 2(2-\sqrt{3})i$$
$$= (-6 + 4\sqrt{3}) + i(4 - 2\sqrt{3})$$

Donc : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

b- On a : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc : $a = \sqrt{4(2-\sqrt{3})}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = -\sqrt{4(2-\sqrt{3})}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Et puisque $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $Im(a) > 0$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$

alors: $a = \sqrt{4(2-\sqrt{3})}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

par suite, $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

3) a- On a : Ω est le centre du cercle (Γ) dont $[AB]$ est un diamètre

Donc Ω est le milieu du segment $[AB]$

par suite, $z_\Omega = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1 + i(2-\sqrt{3}) - 1 + (2+\sqrt{3})i}{2} = 2i$

b- le rayon du cercle (Γ) est :

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |1 + i(2-\sqrt{3}) - 2i| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$

et on a : $\Omega O = |2i| = 2$, Donc $O \in (\Gamma)$

et on a: $\Omega C = |2e^{i\frac{\pi}{7}}| = 2$, Donc $C \in (\Gamma)$

c- On a : $[AB]$ est un diamètre du cercle (Γ)

Donc le triangle CAB est rectangle en C

par suite $(CA) \perp (CB)$

D'où : $\dfrac{c-a}{c-b}$ est un nombre imaginaire pur

d- L'expression complexe de la rotation r de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$ et l'expression complexe de l'homothétie h de centre O et de rapport k est $z' = kz$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc l'écriture complexe de la composée hor est: $z' = ke^{i\theta}z$
Et puisque $hor(A) = B$, alors: $b = ke^{i\theta}a$

par suite, $ke^{i\theta} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}} = (2+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$

D'où : $\begin{cases} k = 2+\sqrt{3} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ou $\begin{cases} k = -2-\sqrt{3} \\ \theta \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Exercice 21

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct
Soit A le point d'affixe 2 et f l'application qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) Montrer que A est le seul point invariant par f

2) Soit $M(z)$ un point de (P) distinct de A et $M'(z')$ son image par f

a- Vérifier que: $z' - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$ et $z' - z = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-2)$

b- En déduire que le triangle AMM' est rectangle en M' et $AM' = \frac{\sqrt{3}}{2}AM$

3) Soient h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$

a- Montrer que $f = hor$

b- Déterminer par f l'image du cercle (C) de centre O et de rayon 1

4) On pose $f_1 = f$ et $f_{n+1} = fof_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Soit M_n l'image de O par f_n et soit z_n l'affixe de M_n

a- Calculer z_1 et vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ M_{n+1} = f(M_n)$

b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ z_n - 2 = \frac{\sqrt{3^n}}{2^{n-1}}e^{i\left(\pi + \frac{n\pi}{6}\right)}$

c- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_nM_{n+1}$

Solution

1) Soit ω l'affixe d'un point invariant par f

Donc : $\omega = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\omega + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est-à-dire : $\left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

En déduire que: $\omega = 2$

Donc $A(2)$ est le seul point invariant par f

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) a- On a : $z'-2=\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z-2\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z-2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$

et on a : $z'-z=\left(\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-z$

$=\left(-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}z+1\right)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-2)=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-2)$

b- On a : $\frac{z'-2}{z'-z}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)}{\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-2)}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $\arg\left(\frac{z'-z_A}{z'-z_M}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

par suite, le triangle AMM' est rectangle en M'

D'autre part, on a : $z'-2=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$

Donc : $|z'-2|=\frac{\sqrt{3}}{2}|e^{i\frac{\pi}{6}}||z-2|$

par suite : $AM'=\frac{\sqrt{3}}{2}AM$

3) a- On a : $M(z)\xrightarrow{r}M_1(z_1)\xrightarrow{h}M'(z')$ (hor)

On a : $z_1-2=e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)$ et $z'-2=\frac{\sqrt{3}}{2}(z_1-2)$

Donc :

$z'-2=\frac{\sqrt{3}}{2}(z_1-2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z-2)=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite : $z' = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et c'est l'expression complexe de hor

D'où : $f = hor$

b- On a : $(C) = \mathscr{C}(O,1)$

Donc : $r((C)) = (C') = \mathscr{C}(O',1)$ où $O' = r(O)$

par suite, $f((C)) = h((C')) = \mathscr{C}\left(O'', \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

où $O'' = h(O') = h(r(O)) = f(O)$ d'affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) a- • Le nombre z_1 est l'affixe de $M_1 = f_1(O) = f(O) = O''$

Donc : $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $M_{n+1} = f_{n+1}(O) = f((f_n(O)) = f(M_n)$

b- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $M_{n+1} = f(M_n)$

Donc : $z_{n+1} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}(z_n - 2)$

et si on pose $u_n = z_n - 2$ alors on obtient : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}u_n$

$(u_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

par suite : $u_n = u_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} e^{i\frac{(n-1)}{6}\pi}(z_1 - 2)$

D'où: $z_n - 2 = \frac{\sqrt{3^{n-1}}}{2^{n-1}} \cdot e^{i\frac{(n-1)\pi}{6}} \cdot \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-\sqrt{3^n}}{2^{n-1}} e^{\frac{i(n-1)\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{3^n}}{2^{n-1}} e^{i\left(\frac{(n-1)\pi}{6} + \pi\right)} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{\sqrt{3^n}}{2^{n-1}} e^{i\left(\frac{n\pi}{6} + \pi\right)}$

c- On a : $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

$= \left|\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - z_n\right|$

$= \left|\left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$= \left|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \cdot \frac{1}{2}|z_n - 2|$

$= 1 \times \frac{1}{2} \times \left|\frac{\sqrt{3^n}}{2^{n-1}}\right| |e^{i\left(\frac{n\pi}{6} + \pi\right)}| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque : $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$

par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} M_nM_{n+1} = 0$

Exercice 22 juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) a- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3+4i$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) telle que $\text{Re}(a) < 0$ et les points A et B images respectives des nombres a et b dans le plan complexe

a- Vérifier que $\frac{b}{a} = 1 - i$

b- En déduire que le triangle AOB est isocèle et rectangle en A

3) Soit C un point d'affixe c, distinct du point A et soit D l'image du point B par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit L l'image du point D par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AO}$

a- Déterminer, en fonction de c, le nombre complexe d l'affixe du point D

b- Déterminer, en fonction de c, le nombre complexe ℓ l'affixe du point L

c- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{\ell - c}{a - c}$ puis en déduire la nature du triangle ACL

Solution

1) a- On a : $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = 4 + 4i + i^2 = (2+i)^2$

Donc les racines carrées du nombre $3+4i$ sont $2+i$ et $-2-i$

b- Le discriminant réduit de l'équation (E) est :

$$\Delta' = -25 - 4(-7-i) = 3 + 4i = (2+i)^2$$

Donc ses solutions sont : $z_1 = \frac{5i+2+i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et $z_2 = \frac{5i-2-i}{4} = -\frac{1}{2} + i$

par suite, son ensemble de solutions est : $S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, -\frac{1}{2} + i\right\}$

2) a- On a : $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{-\frac{1}{2} + i} = \frac{1+3i}{-1+2i} = \frac{(1+3i)(-1-2i)}{1+4} = \frac{-1-2i-3i+6}{5}$

Donc : $\frac{b}{a} = 1 - i$

b- On a : $\frac{b}{a} = 1 - i \iff 1 - \frac{b}{a} = i$

$$\iff \frac{a-b}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

D'où : $\left|\frac{a-b}{a-0}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{a-b}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c'est-à-dire : $AB = AO$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc le triangle AOB est isocèle et rectangle en A

3) a- On a : $R(B) = D \iff d - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c)$

$\iff d = i(b-c) + c$

$\iff d = ib + c(1-i)$

Donc : $d = \frac{-3+i}{2} + (1-i)c$

b- On a : $t(D) = L \iff \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO}$

$\iff \ell - d = -a$

$\iff \ell = d - a$

$\iff \ell = \frac{-3+i}{2} + (1-i)c + \frac{1-2i}{2}$

Donc : $\ell = -1 - \frac{1}{2}i + (1-i)c$

c- On a : $\frac{\ell - c}{a-c} = \frac{-1-\frac{1}{2}i-ic}{-\frac{1}{2}+i-c} = \frac{i\left(-\frac{1}{2}+i-c\right)}{-\frac{1}{2}+i-c} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc le triangle ACL est isocèle et rectangle en C

Exercice 23

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : \frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$

1) a- Vérifier que le nombre $2i$ est une solution de l'équation (E)

b- Déterminer les autres solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) $(\text{Im}(z_1) > 0)$

c- Écrire chacune des deux solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

d- Déterminer les nombres entiers n pour que le nombre z_1^n soit un nombre réel

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$ et $C(2i)$

a- Montrer que le triangle OAC est isocèle

b- Déterminer l'affixe du point D milieu du segment $[AC]$

c- Montrer que $\frac{5\pi}{12}$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OD}}\right)$, puis en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

d- Déterminer l'affixe du point O' l'image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et déterminer l'affixe du point B' l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

e- Soit I le milieu du segment $[OB]$
Montrer que les droites (AI) et $(O'B')$ sont perpendiculaires.

Solution

1) a- Vérifier que : $\frac{1}{2}(2i)^3-(1+i)(2i)^2+2(1+i)2i-4i=0$

b- Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation
$(z-2i)\left(\frac{1}{2}z^2-z+2\right)=0$
et en résolvant l'équation $\frac{1}{2}z^2-z+2=0$, on trouve que les solutions de l'équation (E) sont : $2i$ et $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$

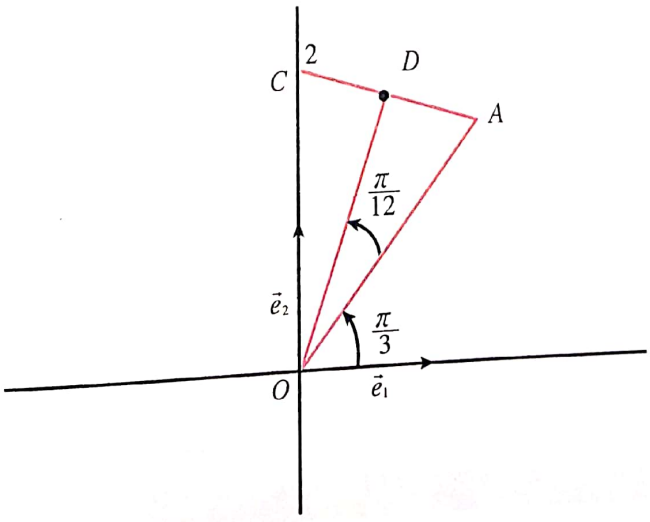
c- Vérifier que : $z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

d- Soit n un élément de $\mathbb{Z}$
On a : $z_1^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$
Donc : $z_1^n\in\mathbb{R}\iff\frac{n\pi}{3}=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$
$\iff n=3k\ \ (k\in\mathbb{Z})$
par suite, l'ensemble des nombres entiers n pour que le nombre z_1^n soit un nombre réel est l'ensemble $3\mathbb{Z}$ (l'ensemble des multiples du nombre 3)

2) a- On a : $OA=|z_A|=|1+i\sqrt{3}|=2$
et $OC=|z_C|=|2i|=2$
Donc : $OA=OC$, par suite, le triangle OAC est isocèle de sommet O

b- On a : D est le milieu du segment $[AC]$
Donc : $z_D=\frac{1}{2}(z_A+z_C)$
par suite, $z_D=\frac{1}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

c- • On a : $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OD})\equiv(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$
$\equiv\arg(z_A)+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$



ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque le triangle OAC est isocèle de sommet O et D est le milieu de $[AC]$ alors $[OD)$ est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ qui a pour mesure $\frac{\pi}{6}$

par suite : $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OD}) \equiv \arg(z_A) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\,[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$$

• On a : $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ et on sait que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OD}) \equiv \arg(z_D)[2\pi]$

Donc : $\arg(z_D) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

Et on a : $|z_D| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

d- On a : O' est l'image de O par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Donc : $z_{O'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_A)$

par suite, $z_{O'} = z_A + iz_A = 1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})$

et on a : B' est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc : $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

par suite, $z_{B'} = z_A + i(z_B - z_A) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

e- On a : I est le milieu du segment $[OB]$

Donc : $z_I = \frac{1}{2}(0 + z_B) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

par suite, $\frac{z_{B'} - z_{O'}}{z_A - z_I} = \frac{(1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))}{(1+i\sqrt{3}) - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -2i$

donc : $\frac{z_{B'} - z_{O'}}{z_A - z_I} \in i\mathbb{R}$

par suite : $(O'B') \perp (AI)$

Exercice 24 juin 2011

Partie 1 :

Soit m un nombre complexe non nul

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

1) Vérifier que le nombre $z_1 = -m+2$ est une solution de l'équation (E_m)
2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)
a- Montrer que $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$
b- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1 z_2 = 1$

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
On considère l'application S qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'-1 = -(z-1)$ et la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit z'' l'affixe du point M'' l'image de M par la rotation R
1) a- Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1
b- Montrer que $z'' = iz+2$
2) On suppose que $M \neq O$ et soit A le point d'affixe 2
a- Calculer $\frac{z''-2}{z'-2}$, puis en déduire la nature du triangle $AM'M''$
b- Déterminer l'ensemble des points M pour que les points A, Ω, M' et M'' soient cocycliques

Solution

Partie 1 :

1) Vérifier que $z_1^2 + [(1-i)m-4]z_1 - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

2) a- • On rappelle que l'équation $az^2+bz+c=0 \quad (a \in \mathbb{C}^*)$ admet des racines distinctes ou non, et leur somme est $-\frac{b}{a}$ et leur produit est $\frac{c}{a}$

Donc $z_1 z_2 = -im^2 - 2(1-i)m + 4$

• On a : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$

$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

b- Le discriminant de l'équation $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$ est :

$\Delta = 4i = 2(2i) = 2(1+i)^2 = (\sqrt{2}(1+i))^2$

En déduire que: $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow m = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou

$$m = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Partie 2 :

1) a- On a : $M'(z') = S(M(z)) \Leftrightarrow z'-1 = -(z-1)$

$\Leftrightarrow z'-1 = e^{i\pi}(z-1)$

Donc l'application S est la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle π, c'est-à-dire S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- On a : $R(M(z)) = M''(z'') \Longleftrightarrow z'' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))$

$\Longleftrightarrow z'' = i(z-1-i)+1+i$

$\Longleftrightarrow z'' = iz+2$

2) a- • On a : $\frac{z''-2}{z'-2} = \frac{iz+2-2}{-z+1+1-2} = \frac{iz}{-z}$

Donc : $\frac{z''-2}{z'-2} = -i$

• On a : $\frac{z''-2}{z'-2} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $\left|\frac{z''-2}{z'-2}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z''-2}{z'-2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

par suite $AM'' = AM'$ et $\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ce qui signifie que le triangle $AM'M''$ est isocèle et rectangle en A

b- Soit (C) le cercle circonscrit au triangle $AM'M''$

$[M'M'']$ est un diamètre du cercle (C) car le triangle $AM'M''$ est rectangle en A

Donc :

(A, M', M'' et Ω sont cocycliques)

$\Longleftrightarrow I\Omega = IA$ (I milieu de $[M'M'']$)

$\Longleftrightarrow \left|\frac{-z+2+iz+2}{2} - (1+i)\right| = \left|\frac{-z+2+iz+2}{2} - 2\right|$

$\Longleftrightarrow |(i-1)(z-2)| = |(i-1)z|$

$\Longleftrightarrow |z-2| = |z|$

$\Longleftrightarrow MA = MO$

Donc l'ensemble des points M pour lesquels les points A, Ω, M' et M'' sont cocycliques est la médiatrice du segment $[OA]$ qui est la droite d'équation $x = 1$

Exercice 25 juillet 2013

I. Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

1) Montrer que : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les solutions de l'équation (E)

2) On pose $a = e^{i\theta}$ où $0 < \theta < \pi$

a- Montrer que $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

b- En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on suppose que $\mathrm{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

1) Déterminer en fonction de a les affixes des points J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$

2) Soient r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose : $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soit c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

3) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$, puis en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$

Solution

I. 1) Le discriminant réduit de l'équation (E) est :

$\Delta' = (a-1)^2 - 2(a-1)^2 = -(a-1)^2 = [i(a-1)]^2$

Donc ses solutions sont :

$z_1 = \frac{a-1+i(a-1)}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(1+i)$ et $z_2 = \frac{a-1-i(a-1)}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(1-i)$

2) a- On a : $a-1 = e^{i\theta} - 1$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})$

$= e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc : $a-1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

b- • On a : $z_1 = \frac{a-1}{2}(1+i)$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \cdot \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$

Et puisque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ (car $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$)

alors : $z_1 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

• On a : $z_2 = \left(\frac{a-1}{2}\right)(1-i)$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \cdot \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Donc : $z_2 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

II. 1) On a : J est le milieu de $[AC]$ et K est le milieu de $[AB]$

Donc : $aff(J) = \frac{a+i}{2}$ et $aff(K) = \frac{a-i}{2}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) • On a : $A' = r_2(A)$ et r_2 est la rotation de centre $K\left(\frac{a-i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc : $a' - \frac{a-i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{a-i}{2}\right)$

D'où : $a' = \frac{a-i}{2} + i\left(\frac{a+i}{2}\right)$

$= \frac{a}{2}(1+i) - \frac{1}{2}(1+i) = \left(\frac{a-1}{2}\right)(1+i)$

par suite : $a' = z_1$

• On a : $C' = r_1(C)$ et r_1 est la rotation de centre $J\left(\frac{a+i}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc : $c' - \frac{a+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(c - \frac{a+i}{2}\right)$

D'où : $c' = \frac{a+i}{2} + i\left(i - \frac{a+i}{2}\right) = \left(\frac{a-1}{2}\right)(1-i)$

par suite : $c' = z_2$

3) On a : $\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{a-1}{2}((1+i)-(1-i))}{a-1} = i$

Donc : $\frac{z_{A'} - z_{C'}}{z_A - z_{B'}} \in i\mathbb{R}$

ce qui signifie que : $(A'C') \perp (B'A)$

Donc la droite $(B'A)$ est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$

Exercice 26 juin 2018

Soit m un nombre complexe.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

1) a- Vérifier que $\Delta = (im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b- Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectives $a = -1-i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

a- Vérifier que Ω est le centre de R

b- Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que: $A = R(B)$

2) a- Vérifier que: $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

b- En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c- Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Solution

I. 1) a- On a: $\Delta = (im+2)^2 - 4(im+2-m)$

$= -m^2 + 4mi + 4 - 4im - 8 + 4m = -m^2 - 4 + 4m$

et $(im-2i)^2 = i^2(m-2)^2$

$= -(m^2 - 4m + 4) = -m^2 - 4 + 4m$

Donc : $\Delta = (im-2i)^2$

b- • si $m = 2$ alors l'équation (E_m) admet une solution unique z telle que

$z = \dfrac{-im-2}{2} = \dfrac{-2i-2}{2} = -1-i$

• si $m \neq 2$ alors l'équation (E_m) admet deux solutions z_1 et z_2 telles que:

$z_1 = \dfrac{-im-2+im-2i}{2} = -1-i$

et $z_2 = \dfrac{-im-2-im+2i}{2} = -1+i-im$

2) pour $m = i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

On a: $z_1 = -1-i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

et $z_2 = \sqrt{2} - 1 + i$

$= \sqrt{2}\,e^{i0} + \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(e^{i0} + e^{i\frac{3\pi}{4}})$

$= \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}(e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}})$

Donc: $z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}}$ (car $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) > 0$)

II. 1) a- On a: $z_{M'} - z_{\Omega'} = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_{\Omega'})$ où Ω' est le centre de la rotation R

Donc: $z_{\Omega'} = \dfrac{z_{M'} - e^{-\frac{i\pi}{2}}z_M}{1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{-im-1+i+im}{1+i} = \dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{i(1+i)}{1+i} = i$

par suite $z_{\Omega'} = z_\Omega$, ce qui signifie que Ω est le centre de la rotation R

b- On a: $R(B) = A$

Donc: $z_A - z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_\Omega)$

par suite: $z_B = \dfrac{z_A - z_\Omega + e^{-i\frac{\pi}{2}}z_\Omega}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{-1-i-i-i\times i}{-i} = 2$

D'où: L'affixe de B est 2

2) a- On a: $m' - a = -im - 1 + i + 1 + i = -im + 2i$

et $\dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m-b) = \dfrac{i+1+i}{i-2}(m-2)$

$= \dfrac{1+2i}{-2+i}(m-2) = \dfrac{1+2i}{i(1+2i)}(m-2) = \dfrac{1}{i}(m-2)$

$= -i(m-2) = -im + 2i$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc $m'-a=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

b- • si $m=a$ alors $M=A$

par suite, les points A,M et M' sont alignés et les points A,B et Ω sont cocycliques

• si $m\neq a$ (c'est-à-dire $m\neq -1-i$)

et si A,M et M' sont alignés alors $\dfrac{m'-a}{m-a}\in\mathbb{R}$

par suite $(\exists k\in\mathbb{R})\ m'-a=k(m-a)$

D'où: $m'=k(m-a)+a$

Donc: $\dfrac{\omega-a}{\omega-b}=\dfrac{m'-a}{m-b}=\dfrac{k(m-a)+a-a}{m-b}=k\dfrac{m-a}{m-b}$

D'où: $\dfrac{\omega-a}{\omega-b}:\dfrac{m-a}{m-b}=k\in\mathbb{R}$

Ce qui signifie que les points A,B,Ω et M sont cocycliques

• Réciproquement, si A,B,Ω et M sont cocycliques

alors: $\dfrac{m-a}{m-b}:\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\in\mathbb{R}$

par suite $\dfrac{m-a}{m-b}:\dfrac{m'-a}{m-b}\in\mathbb{R}$

D'où: $\dfrac{m-a}{m'-a}\in\mathbb{R}$

Ce qui signifie que les points A,M et M' sont alignés .

Conclusion:

Les points A,M et M' sont alignés si et seulement si les points A,B,Ω et M sont cocycliques.

c- On a: (A,M et M' sont alignés)

$\Leftrightarrow$ (A,B,Ω et M sont cocycliques)

$\Leftrightarrow M\in(C)$ où (C) est le cercle circonscrit au Triangle $AB\Omega$

Donc l'ensemble des points M tels que les points A,M et M' sont alignés est le cercle (C) circonscrit au triangle $AB\Omega$

Or A est l'image de B par la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

Donc le triangle ΩAB est rectangle en Ω

par suite , le centre du cercle (C) est le point I milieu du segment $[AB]$

D'où: $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-1-i+2}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

et le rayon du cercle (C) est: $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{1}{2}|2+1+i|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Exercice 27 juillet 2008

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère l'application r qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, et l'application h qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que $z_2 = -2z + 3i$

On pose $F = hor$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications r et h

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ où $a \in \mathbb{C} - \{i\}$, et on pose: $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$

a- Montrer que si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$

b- Montrer que Ω est l'unique point qui vérifie $F(M) = M$

3) a- Déterminer, en fonction du nombre complexe a, les affixes b, c et d respectivement des points B, C et D

b- Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.

c- Montrer que Ω est le barycentre du système $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

d- Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels le point D appartient à l'axe réel.

Solution

1) * L'expression complexe de l'application r est: $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

cherchons les points invariants par r :

on a: $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2} \iff z = i$, donc $\Omega(i)$ est le seul point invariant par r

par suite : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2} \iff z_1 - i = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2} - i$

$$\iff z_1 - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\iff z_1 - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i)$$

$$\iff z_1 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

donc r est la rotation de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

* L'expression complexe de l'application h est: $z_2 = -2z + 3i$

Et on a: $z = -2z + 3i \iff z = i$ ($\Omega(i)$ est le seul point invariant par h)

Donc: $z_2 = -2z + 3i \iff z_2 - i = -2z + 2i$

$$\iff z_2 - i = -2(z - i)$$

par suite, h est l'homothétie de centre $\Omega(i)$ et de rapport (-2)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) a- On a: $M(z) \xrightarrow{r} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z')$, $F = hor$

On a: $z_1 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$ et $z' - i = -2(z_1 - i)$

Donc: $z' - i = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)}(z-i) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

b- Soit ω l'affixe d'un point invariant par F

Donc: $\omega - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(\omega - i)$

c'est-à-dire : $(\omega - i)(1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 0$

c'est-à-dire: $\omega = i$ (car $1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \neq 0$)

Donc $\Omega(i)$ est l'unique point qui verifie $F(M) = M$

3) a- On a: $B = F(A)$, donc: $b - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i)$

En déduire que: $b = (-1 - i\sqrt{3})a - \sqrt{3} + 2i$

De même vérifier que: $c = (-2 + 2i\sqrt{3})a + 2\sqrt{3} + 3i$ et $d = 8a - 7i$

b- On a: $\frac{d-i}{a-i} = \frac{8(a-i)}{a-i} = 8$

Donc: $\frac{d-i}{a-i} \in \mathbb{R}$

Par suite, les points Ω, A et D sont alignés.

c- soit G le barycentre du système $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

Donc: $z_G = \frac{4b + 2c + d}{4+2+1}$

Vérifier alors que: $z_G = i$, donc: $G = \Omega$

Par suite, Ω est le barycentre du système $\{(B,4),(C,2),(D,1)\}$

d- On pose: $a = x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$ (car $a \neq i$)

Donc: $D \in (O\vec{u}) \Leftrightarrow (8a - 7i) \in \mathbb{R}$ ($(O\vec{u})$ est l'axe réel)

$\Leftrightarrow (8x + (8y-7)i) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 8y - 7 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{7}{8}$

Par suite, l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels le point D appartient à l'axe réel est la droite d'équation $y = \frac{7}{8}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 28

I. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+i=0$

(a désigne la solution de cette équation qui vérifie $\mathrm{Re}(a)>0$)

2) a- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1+a$

b- En déduire que: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c- Vérifier que: $(1+a)(1-a)=1+i$, puis en déduire la forme trigonométrique du nombre $1-a$

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B,M et M' d'affixes respectives a, $-a$, z et z' et on suppose que $z\,z'+i=0$

1) Soit N le point d'affixe $\overline{z}$ le conjugué de z. Montrer que: $(ON)\perp(OM')$

2) a- Montrer que: $z'-a=i\frac{z-a}{a\,z}$

b- Montrer que si $z\neq -a$ alors $z'\neq -a$ et $\frac{z'-a}{z'+a}=-\frac{z-a}{z+a}$

3) On suppose que les points A,B et M ne sont pas alignés.

Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM

Solution

I. 1) On a: $z^2+i=0 \iff z^2=-i$

$\iff z^2=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\iff z=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $z=-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\iff z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $z^2+i=0$ est:

$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Remarque: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $\mathrm{Re}(a)>0$)

2) a- On a: $1+a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=1+e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}$

Et puisque: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$

alors: $|1+a|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg(1+a)\equiv-\frac{\pi}{8}[2\pi]$

b- On a: $1+a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $|1+a|=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc: $2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

C'est-à-dire: $2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D'où: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c- • On a: $(1+a)(1-a)=1-a^2$

$=1-(-i)$ (car a est une solution de l'équation $z^2+i=0$)

$=1+i$

• On a: $1-a=\frac{1+i}{1+a}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}}$

Donc: $1-a=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}e^{i\frac{3\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$

II. 1) On a: $\frac{z_N-z_O}{z_{M'}-z_O}=\frac{\overline{z}}{\left(\frac{-i}{z}\right)}=i\,z\,\overline{z}$

Et puisque: $z\overline{z}=|z|^2\in\mathbb{R}^+$

alors: $i\,z\,\overline{z}\in i\mathbb{R}$

par suite: $(ON)\perp(OM')$

2) a- On a: $a\,z(z'-a)=a\,z\,z'-a^2z$

$=-ai+iz\quad(car\ a^2=-i)$

$=i(z-a)$

D'où : $z'-a=\frac{i(z-a)}{az}$

b- On suppose que: $z\neq-a$

• si $z'=-a$ alors: $-az=a^2$ (car $zz'=-i=a^2$)

par suite: $z=-a$ ce qui est faux

Donc $z'\neq-a$

• On a: $\frac{z'-a}{z'+a}=\frac{zz'-az}{zz'+az}=\frac{-i-az}{-i+az}=\frac{a^2-az}{a^2+az}=-\frac{z-a}{z+a}$

3) On suppose que les points A,B et M ne sont pas alignés

On a: $\frac{z'-a}{z-a}:\frac{z'+a}{z+a}=\frac{(z'-a)(z+a)}{(z'+a)(z-a)}$

$=\frac{-(z-a)}{z+a}\cdot\frac{z+a}{z-a}$ (car $\frac{z'-a}{z'+a}=-\frac{z-a}{z+a}$)

$=-1$

Donc: $\frac{z'-a}{z-a}:\frac{z'+a}{z+a}\in\mathbb{R}$

par suite, les points A,B,M et M' sont cocycliques

Ce qui signifie que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 29

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

(E_m): $z^2-(2m+1)z+2m^2+m+im=0$ où $m\in\mathbb{R}^*$

1) a- Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta=(1-2mi)^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation telles que $\mathrm{Re}(z_1)>\mathrm{Re}(z_2)$

c- Donner l'écriture exponentielle de chacune des solutions z_1 et z_2 pour $m=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

d- Déterminer, suivant les valeurs de m, les écritures exponentielles des racines cubiques de z_2

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives $a=1+m-mi$, $b=m+mi$ et $c=1$

a- Montrer que: $OB=AC$ et $(OB)\perp(AC)$

b- Ecrire sous forme algébrique le nombre p l'affixe du point E l'image du point A par la rotation r de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

c- Déterminer le nombre q l'affixe du point F l'image du point B par la translation t de vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{4m+5}{5}-\dfrac{2m}{5}i\right)$

3) a- Montrer que $\dfrac{p-q}{a-q}$ est un nombre imaginaire pur

b- Montrer que les points A,C,E et F sont cocycliques

c- Déterminer les valeurs de m pour que la droite (BC) soit tangente au cercle passant par A,C,E et F

Solution

1) a- On a: $\Delta=(2m+1)^2-4(2m^2+m+im)$

$=4m^2+4m+1-8m^2-4m-4mi$

$=1-4mi-4m^2=(1-2mi)^2$

b- Vérifier que: $z_1=1+m-mi$ et $z_2=m+mi$

c- • Pour $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ on a:

$z_1=1+m-mi=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$=e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)=2i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Et puisque $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$ alors l'écriture exponentielle du nombre z_1 est

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$z_I = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}}$

• Vérifier que: $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

d) On a: $z_2 = m + mi$

* si $m \in \mathbb{R}^{+*}$ alors: $z_2 = m\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

par suite, les racines cubiques du nombre z_2 sont les nombres $z'_k = \sqrt[3]{m\sqrt{2}}\;e^{i\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right)}$ où $k \in \{0,1,2\}$

* si $m \in \mathbb{R}^{-*}$ alors: $z_2 = -m\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

par suite, les racines cubiques du nombre z_2 sont les nombres $z''_k = \sqrt[3]{-m\sqrt{2}}\;e^{i\left(\frac{5\pi+8k\pi}{12}\right)}$ où $k \in \{0,1,2\}$

2) a- On a: $\frac{b-0}{a-c} = \frac{m+mi}{m-mi} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc: $|b| = |a-c|$ et $\arg\left(\frac{b-0}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

C'est-à-dire: $OB = AC$ et $(OB) \perp (AC)$

b- On a: $r(A) = E$, donc $p - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-c)$

par suite, $p = i(a-c) + c = i(m-mi) + 1$

d'où: $p = 1 + m + mi$

c- On a: $t(B) = F$, donc $q = b + \frac{4m+5}{5} - \frac{2m}{5}i$

par suite, $q = 1 + \frac{9m}{5} + \frac{3m}{5}i$

3) a- Vérifier que: $\frac{p-q}{a-q} = -\frac{1}{2}i$

Donc $\frac{p-q}{a-q}$ est un nombre imaginaire pur.

b- On a: $\frac{p-q}{a-q} \in i\mathbb{R}$, donc $(FE) \perp (FA)$

par suite, le point F appartient au cercle de diamètre $[AE]$

Et on a: $r(A) = E$ et r est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc $(CE) \perp (CA)$

par suite, le point C appartient aussi au cercle de diamètre $[AE]$

Conclusion: Les points A, C, E et F sont cocycliques.

c- Soient I le milieu de $[AE]$ et (Γ) le cercle passant par les points A, C, E et F

On a: $z_I = \frac{(1+m-mi)+(1+m+mi)}{2} = 1 + m$

et on a vu que $[AE]$ est un diamètre du cercle (Γ) , donc:

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

(BC) tangente au cercle $(\Gamma) \Leftrightarrow (BC) \perp (IC)$

$$\Leftrightarrow \frac{b-c}{z_I - c} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+mi-1}{m} \in i\mathbb{R} \quad (\text{car } m \in \mathbb{R}^*)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(1-\frac{1}{m}\right)+i\right) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{m}=0$$

$$\Leftrightarrow m=1$$

Donc: (BC) est tangente au cercle (Γ) si est seulement si $m=1$

Exercice 30 juin 2004

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2-Z+1=0$
puis écrire ses solutions Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique $(\text{Im}(Z_1)>0)$

b- En déduire dans $\mathbb{C}^2$ les solutions du système: $\begin{cases} z^3+t^3=1 \\ z\,t=1 \end{cases}$ où $\text{Im}(t^3) \leq 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^3-3Z-1=0$ et soient z et t deux nombres complexes tels que: $z\,t=1$

a- Montrer que $z+t$ est une racine de l'équation (E) si et seulement si $z^3+t^3=1$

b- En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S=\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right\}$$

Solution

1) a- $Z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

et $Z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b- Soient z et t deux éléments de $\mathbb{C}$

On a: $\begin{cases} z^3+t^3=1 \\ z\,t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^3+t^3=1 \\ z^3\times t^3=1 \end{cases}$

Donc z^3 et t^3 sont les solutions de l'équation $Z^2-Z+1=0$ dans $\mathbb{C}$

Et puisque $I_m(t^3) \leq 0$ alors $t^3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d'après **(1) a-**) c'est à dire: $t^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

par suite, t est une racine cubique de $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc: $t = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ où $k \in \{0;1;2\}$

D'où: $t = e^{-i\frac{\pi}{9}}$ ou $t = e^{i\frac{5\pi}{9}}$ ou $t = e^{i\frac{11\pi}{9}}$

Et puisque $z\,t = 1$ alors $z = \frac{1}{t}$

par suite: $\begin{cases} z^3 + t^3 = 1 \\ z\,t = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = e^{-i\frac{\pi}{9}} \\ z = e^{i\frac{\pi}{9}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} t = e^{i\frac{5\pi}{9}} \\ z = e^{-i\frac{5\pi}{9}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} t = e^{i\frac{11\pi}{9}} \\ z = e^{-i\frac{11\pi}{9}} \end{cases}$

Conclusion:

L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} z^3 + t^3 = 1 \\ z\,t = 1 \\ \mathrm{Im}(t^3) \le 0 \end{cases}$ est:

$\left\{\left(e^{-i\frac{\pi}{9}}, e^{i\frac{\pi}{9}}\right), \left(e^{i\frac{5\pi}{9}}, e^{-i\frac{5\pi}{9}}\right), \left(e^{i\frac{11\pi}{9}}, e^{-i\frac{11\pi}{9}}\right)\right\}$

2) a- Soient z et t deux nombres complexes tels que $z\,t = 1$ et S l'ensemble de solutions de l'équation (E)

On a: $(z+t) \in S \Longleftrightarrow (z+t)^3 - 3(z+t) - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow z^3 + 3z^2 t + 3z\,t^2 + t^3 - 3(z+t) - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow z^3 + t^3 + 3(z+t)(z\,t - 1) - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow z^3 + t^3 = 1$ (car $zt = 1$)

b- On a: $Z \in S \Longleftrightarrow Z = z + t$ et $z^3 + t^3 = 1$ et $z\,t = 1$

$\Longleftrightarrow Z = z_0 + t_0$ ou $Z = z_1 + t_1$ ou $Z = z_2 + t_2$

Et puisque $z_0 + t_0 = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ et $z_1 + t_1 = 2\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$

et $z_2 + t_2 = 2\cos\left(-\frac{11\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

alors $S = \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right\}$

Exercice 31 juin 2005

Pour tout z de $\mathbb{C} - \{-1\}$, on pose: $f(z) = \frac{iz - 1}{(z+1)^2}$

1) a- Déterminer le nombre réel y tel que: $f(iy) = iy$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $f(z) = z$

On désigne par z_0, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que: $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ et $\mathrm{Re}(z_1) > \mathrm{Re}(z_2)$

2) a- Vérifier que: $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ et $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

b- En déduire la forme trigonométrique de chacun des nombres z_1 et z_2

3) Dans cette question, on suppose que $z = e^{i\alpha}$ où $0 \le \alpha < \pi$

a- Montrer que: $\overline{f(z)} = i\,z\,f(z)$

b- Déterminer α sachant que: $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

c- Ecrire $f(z)$ sous la forme $f(z) = re^{i\beta}$ où $(r, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

4) Déterminer z sachant que: $\begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Solution

1) a- Soit y un élément de $\mathbb{R}$

On a: $f(iy) = iy \Leftrightarrow \dfrac{-y-1}{(iy+1)^2} = iy$

$\Leftrightarrow -y-1 = iy(-y^2+2iy+1)$

$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 + i(y^3 - y) = 0$

$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$ et $y^3 - y = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0$ et $y(y-1)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$

Donc: $f(i) = i$

b- Soit z un élément de $\mathbb{C} - \{-1\}$

On a: $f(z) = z \Leftrightarrow \dfrac{iz-1}{(z+1)^2} = z$

$\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z-i)(z^2 + (2+i)z + i) = 0$ (Effectuer la division euclidienne de $z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1$ par $z - i$)

Vérifier que: $z_0 = i$ et $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \dfrac{1}{2}i$ et $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \dfrac{1}{2}i$

2) a- On a:

$$z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

Donc: $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

et on a: $z_2 + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

Donc: $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

b- On rappelle que: $1 - \cos(a) = 2\sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right)$ et $\sin(a) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)$

On a:

$$z_1 = e^{i\frac{11\pi}{6}} - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= -2\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\left(-\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$= 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

Donc: $z_1 = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right).\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$ (car $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)>0$)

et vérifier que $z_2 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

3) a- On rappelle que: si $|z|=1$ alors $\bar{z}=\frac{1}{z}$ (car $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$)

On a: $\overline{f(z)} = \frac{-i\bar{z}-1}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2} = \frac{-i\frac{1}{z}-1}{\frac{(1+z)^2}{z^2}} = \frac{z^2\left(-i\frac{1}{z}-1\right)}{(1+z)^2}$

$$= \frac{-iz-z^2}{(1+z)^2} = iz\frac{iz-1}{(z+1)^2} = iz\,f(z)$$

b- On a: $f(z)+\overline{f(z)}=0 \Leftrightarrow f(z)+iz\,f(z)=0$

$\Leftrightarrow (1+iz)f(z)=0$

$\Leftrightarrow 1+iz=0$ ou $f(z)=0$

$\Leftrightarrow 1+iz=0$ ou $iz-1=0$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z=-i$

$\Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc: $\alpha=\frac{\pi}{2}$ car $0\le\alpha<\pi$

c- Ecriture de $f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$ sous la forme $f(z)=re^{i\beta}$

On rappelle que: $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x)$ et $e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin(x)$ **(Formules d'Euler)**

On a: $f(z)=\frac{ie^{i\alpha}-1}{(1+e^{i\alpha})^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}-1}{\left[e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\right]^2}$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-1}{\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}.2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{i\alpha}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{i\alpha}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Et puisque $0\le\alpha<\pi$, alors $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$, par suite $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)>0$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Conclusion: $f(z)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

4) On rappelle que: $(\forall t\in\mathbb{C})\ t+\overline{t}=2\mathrm{Re}(t)$

On a: $\begin{cases}|z|=1\\ \mathrm{Re}(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ f(z)+\overline{f(z)}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ f(z)+iz\,f(z)=1\end{cases}$ (d'après **(3) a-**)

$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \frac{iz-1}{(z+1)^2}+iz\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ z^2+z+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 32

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit A le point d'affixe i, à tout point $M(z)$ distinct de A on fait correspondre le point $M'(z')$ tel que: $z'=\dfrac{\overline{z}}{1-i\overline{z}}$

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z'=\frac{1}{\overline{z}}$

b- Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $\mathrm{Re}(z_1)<0$

Montrer que $z_1^{2016}+z_2^{2022}=0$

2) a- Vérifier que: $z'-i=\dfrac{1}{\overline{z}+i}$

b- En déduire que $AM'\times AM=1$ et que les points A,M et M' sont alignés.

c- Comment construire le point M' à partir d'un point M appartenant au cercle de centre A et de rayon 2?

3) a- Montrer que: $\mathrm{Re}(z')=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|1+iz|^2}$ et $\mathrm{Im}(z')=\dfrac{|z|^2-\mathrm{Im}(z)}{|1+iz|^2}$

b- Déterminer les ensembles $(E_1)=\{M(z)/z'\in\mathbb{R}\}$ et $(E_2)=\{M(z)/z'\in i\mathbb{R}\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) a- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

On a: $z'=\frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{1-i\overline{z}}=\frac{1}{\overline{z}}$

$\Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}-1=0$

$\Leftrightarrow z^2-iz-1=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ $(\Delta=i^2+4=3)$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est: $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

b- On a: $z_1^{2016}+z_2^{2022}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{2016}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{2022}$

$=\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2016}+\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2022}$

$=e^{i1680\pi}+e^{i(336\pi+\pi)}=e^{i\times 0}+e^{i\pi}=1-1$

Donc: $z_1^{2016}+z_2^{2022}=0$

2) a- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

On a: $z'-i=\frac{\overline{z}}{1-i\overline{z}}-i$

$=\frac{\overline{z}-i-\overline{z}}{1-i\overline{z}}=\frac{-i}{-i(\overline{z}+i)}$

Donc: $z'-i=\frac{1}{\overline{z}+i}$

b- • D'après le résultat de la question précédente on a: $(z'-i)(\overline{z}+i)=1$

Donc: $|z'-i|\times|\overline{z-i}|=1$

Par suite: $|z'-i|\times|z-i|=1$

D'où $AM'\times AM=1$

• On a: $\frac{z'-i}{z-i}=\frac{\frac{1}{\overline{z}+i}}{z-i}$

$=\frac{1}{(z-i)(\overline{z-i})}$

$=\frac{1}{|z-i|^2}$

Donc: $\frac{z'-i}{z-i}\in\mathbb{R}$

Ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c- On a: $AM' \times AM = 1$

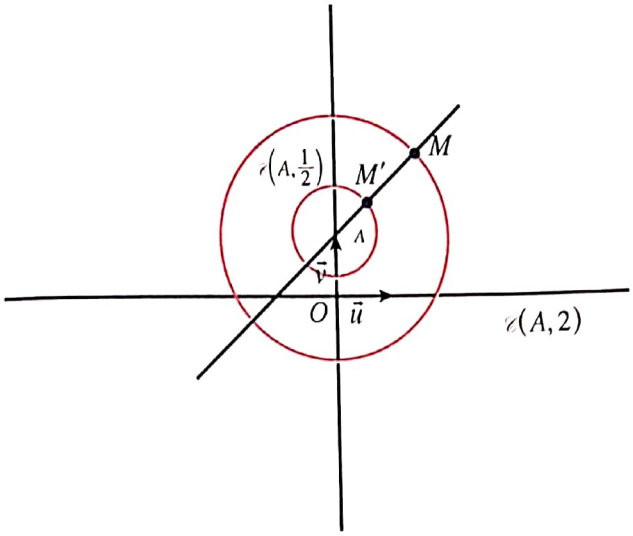
Donc: $2AM' = 1$ (car M appartient au cercle de centre A et de rayon 2)

par suite: $AM' = \frac{1}{2}$

Et puisque $M' \in (AM)$

alors M' est le point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle de centre A

et de rayon $\frac{1}{2}$



3) a- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

• On a: $z' + \overline{z'} = 2\,\mathrm{Re}(z')$

Donc : $\frac{\overline{z}}{1-i\,\overline{z}} + \frac{z}{1+i\,z} = 2\,\mathrm{Re}(z')$

par suite, $\frac{\overline{z}+i\,z\,\overline{z}+z-i\,z\,\overline{z}}{(1+i\,z)(1+i\,z)} = 2\,\mathrm{Re}(z')$

D'où: $\mathrm{Re}(z') = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|1+iz|^2}$

• On a: $2i\,\mathrm{Im}(z') = z' - \overline{z'}$

$$= \frac{\overline{z}}{1-i\,\overline{z}} - \frac{z}{1+i\,z}$$

$$= \frac{\overline{z}+i\,z\,\overline{z}-z+i\,z\,\overline{z}}{|1+i\,z|^2}$$

$$= \frac{2i|\,z|^2 - 2i\,\mathrm{Im}(z)}{|1+i\,z|^2}$$

Donc: $\mathrm{Im}(z') = \frac{|\,z|^2 - \mathrm{Im}(z)}{|1+iz|^2}$

b- Soit z un élément de $\mathbb{C}-\{i\}$

On pose $z = x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

• On a: $M(z) \in (E_1) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0$

$\Leftrightarrow |z|^2 = \text{Im}(z)$ (d'après **(3) a-**)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Donc (E_1) est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point $A(i)$

• On a: $M(z) \in (E_2) \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0$

$\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ (d'après **(3) a-**)

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc (E_2) est l'axe imaginaire privé du point $A(i)$

Exercice 33 juillet 2012

Les parties I et II sont indépendantes.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

1) a- Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

b- Montrer que l'autre solution est $z_2 = 3z_1$

2) Soit θ un argument de z_1

Ecris le nombre $\frac{5}{3} + 4i$ sous forme trigonométrique en fonction de θ

II. On considère trois points A, B et Ω distincts deux à deux d'affixes respectives a, b et ω.

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose $P = r(A)$, $B = r(Q)$, p l'affixe de P et q l'affixe de Q

1) a- Montrer que: $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$

b- Montrer que: $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

c- Montrer que: $\frac{p-a}{q-b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2) On suppose que $\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

a- Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

b- Montrer que $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ puis en déduire que $APQB$ est un rectangle.

Scanned with CamScanner

Solution

I. 1) a- Vérifier que: $z_1^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z_1 + \frac{5}{3} + 4i = 0$

b- On a: $z_1 + z_2 = 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)$

Donc: $z_2 = 4\left(1+\frac{2}{3}i\right) - z_1$

$= 4\left(1+\frac{2}{3}i\right) - 1 - \frac{2}{3}i = 3 + 2i = 3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$

D'où: $z_2 = 3z_1$

2) On a: $z_1 \times z_2 = \frac{5}{3} + 4i$

Donc: $\frac{5}{3} + 4i = 3z_1^2$ (car $z_2 = 3z_1$)

par suite: $\arg\left(\frac{5}{3} + 4i\right) \equiv \arg(3z_1^2)\,[2\pi]$

$\equiv \arg(3) + 2\arg(z_1)\,[2\pi]$

$\equiv 0 + 2\theta\ [2\pi]$

$\equiv 2\theta\ [2\pi]$

D'autre part, $\left|\frac{5}{3} + 4i\right| = \sqrt{\frac{25}{9} + 16} = \sqrt{\frac{169}{9}} \equiv \frac{13}{3}$

par suite, $\frac{5}{3} + 4i = \frac{13}{3}(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$

II. 1) a- On a: $r(A) = P$, Donc $p - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$

par suite, $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$

et on a: $r(Q) = B$, Donc $r^{-1}(B) = Q$

où r^{-1} est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

par suite, $q - \omega = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$

D'où: $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$

b- On a: $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)}$

Donc: $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

c- On a: $\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega) - a}{\omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega) - b}$

$= \frac{(\omega - a)(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})}{(\omega - b)(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc: $\frac{p-a}{q-b}=\frac{\omega-a}{\omega-b}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ (d'après **II. 1) b-**)

2) a- On a: $\frac{p-a}{q-b}=\frac{\omega-a}{\omega-b}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i2\pi}=e^{i0}=1$

Donc : $p-a=q-b$

par suite, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

Ce qui signifie que le quadrilatère $APQB$ est un parallélogramme.

b- On a: $\frac{b-a}{p-a}=\frac{b-\omega+\omega-a}{p-\omega+\omega-a}$

$=\frac{b-\omega+(\omega-b)e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(a-\omega)e^{i\frac{\pi}{3}}+\omega-a}$

$=\frac{\omega-b}{a-\omega}\cdot\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}=\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\cdot\frac{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}$

$=\frac{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}{-1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}+1}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$

$=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc: $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c'est-à-dire: $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, Donc $(AP)\perp(AB)$

par suite, le parallélogramme $APQB$ est un rectangle .

Exercice 34 Février 1998

Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$

1) Résoudre l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m=1+i$

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $|z_1|<|z_2|$

a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

b- Vérifier que $(-z_1)$ est une racine cubique de z_2

c- En déduire les deux autres racines cubiques de z_2 sous forme algébrique.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soient A,B et C les points d'affixes respectives $i,2m$ et $m-2i$ et on suppose que le nombre m n'est pas imaginaire pur.

a- Montrer que les points A,B et C ne sont pas alignés.

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- On construit à l'extérieur du triangle ABC un point D pour que le triangle BCD soit rectangle et isocèle en D. Soit d l'affixe de D

Montrer que: $d=\dfrac{3m-im+2-2i}{2}$ ou $d=\dfrac{3m+im-2-2i}{2}$

c- Déterminer m pour que le quadrilatère $ABDC$ soit un carré.

Solution

1) Le discriminant de l'équation (E) est:

$\Delta=(3m-2i)^2-4(2m^2-4mi)=m^2+4mi-4=(m+2i)^2$

Donc les solutions de l'équation (E) sont:

$\dfrac{3m-2i+m+2i}{2}=2m$ et $\dfrac{3m-2i-m-2i}{2}=m-2i$

par suite, l'ensemble de solutions de l'équation (E) est $S=\{2m,m-2i\}$

Remarque: Si $m=-2i$ alors $S=\{-4i\}$

2) a- pour $m=1+i$ on a:

$z_1=1+i-2i=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

et $z_2=2(1+i)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

b- On a: $(-z_1)^3=(-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}})^3=-2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

$=-2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+2i=z_2$

Donc $(-z_1)$ est une racine cubique de z_2

c- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

et $(-z_1)$ est une racine cubique de z_2

Donc les racines cubiques de z_2 sont: $-z_1\times 1$, $-z_1\times j$ et $-z_1\times\overline{j}$

C'est-à-dire: $-1+i$ et $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

3) a- Pour montrer que les points A,B et C ne sont pas alignés, il suffit de montrer que $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\notin\mathbb{R}$

On a: $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(\overline{\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}}\right)=\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)$

$\Leftrightarrow\left(\overline{\dfrac{2m-i}{m-2i-i}}\right)=\dfrac{2m-i}{m-2i-i}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2\overline{m}+i}{\overline{m}+3i}=\dfrac{2m-i}{m-3i}$

$\Leftrightarrow 2m\overline{m}-6\overline{m}i+mi+3=2m\overline{m}-i\overline{m}+6mi+3$

$\Leftrightarrow 5i(m+\overline{m})=0$

$\Leftrightarrow\overline{m}=-m$

$\Leftrightarrow m\in i\mathbb{R}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque $m \notin i\mathbb{R}$ alors $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \notin \mathbb{R}$

par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Pour que le triangle BCD soit rectangle et isocèle en D, il faut et il suffit que C soit l'image de B par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou par la rotation de centre D et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

C'est-à-dire il faut et il suffit que: $\frac{z_C - d}{z_B - d} = i$ ou $\frac{z_C - d}{z_B - d} = -i$

C'est-à-dire il faut et il suffit que: $\frac{m - 2i - d}{2m - d} = i$ ou $\frac{m - 2i - d}{2m - d} = -i$

c'est-à-dire: $d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2}$ ou $d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$

c- $ABDC$ est un carré si et seulement si $A \neq D$ et les deux triangles ABC et DBC sont rectangles et isocèles respectivement en A et en D

Donc $ABDC$ est un carré $\Leftrightarrow \begin{cases} z_A = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \\ z_D = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_A = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2} \\ z_D = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} = i$ ou $d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2} = i$

$\Leftrightarrow m = -1 + i$ ou $m = 1 + i$

Exercice 35 juin 2019

Soit m un nombre complexe non réel $(m \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$

I. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par:

(E): $z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$

1) a- Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b- Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a- Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

b- Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants:

A le point d'affixe $a = 1 + i$, B le point d'affixe $b = (1+i)m$, C le point d'affixe $c = 1 - i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$

1) a- Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

b- Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

c- En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a- Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b- En déduire h en fonction de m

Solution

I. 1) a- Le discriminant de l'équation (E) est:

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+i)^2(1+m)^2 - 8mi \\ &= 2i(1+m)^2 - 8mi \\ &= 2i(1-m)^2\end{aligned}$$

et puisque $m \neq 1$ car $m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Alors: $\Delta \neq 0$

b- On a: $\Delta = 2i(1-m)^2 = (1+i)^2(1-m)^2 = ((1+i)(1-m))^2$

Donc les solutions de l'équation (E) sont:

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+m)+(1+i)(1-m)}{2} = 1+i$$

et $z_2 = \frac{(1+i)(1+m)-(1+i)(1-m)}{2} = m(1+i)$

2) On suppose que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a- On a: $z_1 + z_2 = (1+i)(1+m)$

et on a: $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

et : $1+m = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc: $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

et puisque $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ car $0 < \theta < \pi$

Alors: $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_1+z_2) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}[2\pi]$

b- Supposons que: $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$

Donc: $2im \in \mathbb{R}$, par suite: $m \in i\mathbb{R}$

et puisque $m = e^{i\theta}$ et $0 < \theta < \pi$

alors: $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc: $m = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Donc: $z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) = (1+i)^2 = 2i$

II. 1) a- Puisque D est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

alors: $z_D - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_O)$ c'est-à-dire: $z_D = ib = (-1+i)m$

et puisque Ω est le milieu de $[CD]$, alors son affixe est:

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\omega = \frac{c + z_D}{2} = \frac{1 - i + (-1 + i)m}{2} = \frac{(1 - i)(1 - m)}{2}$

b- On a: $\frac{b - a}{\omega} = \frac{(1 + i)m - (1 + i)}{\frac{(1 - i)(1 - m)}{2}} = \frac{2(1 + i)(m - 1)}{(1 - i)(1 - m)}$

Donc: $\frac{b - a}{\omega} = \frac{-2(1 + i)}{1 - i} = -2i$

c- • On a: $\frac{b - a}{\omega - 0} = -2i$

Donc: $\frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_O} \in i\mathbb{R}$

par suite, les droites $(O\Omega)$ et (AB) sont perpendiculaires.

• On a: $b - a = -2i(\omega - 0)$

Donc: $|b - a| = |-2i||\omega - 0|$

par suite: $AB = 2O\Omega$

2) a- • Le point H appartient à la droite (AB)

Donc les points A, B et H sont alignés

C'est-à-dire: $\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire: $\frac{h - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

• On a: $(O\Omega) \perp (AB)$ et $H \in (O\Omega)$

donc: $(OH) \perp (AB)$

par suite: $\frac{z_H - z_O}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{h}{b - a} \in i\mathbb{R}$

b- On a: $\frac{h - a}{b - a} \in \mathbb{R}$ et $\frac{h}{b - a} \in i\mathbb{R}$

Donc: $\frac{\overline{h} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{h - a}{b - a}$ et $\frac{\overline{h}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{-h}{b - a}$

d'où: $\frac{\overline{h} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} + \frac{\overline{h}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{h - a}{b - a} - \frac{h}{b - a}$

C'est-à-dire: $\frac{2\overline{h} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{-a}{b - a}$, par suite: $\overline{h} = \frac{a\overline{b} - \overline{a}b}{2(a - b)}$

Or $a\bar{b} - \bar{a}b = (1 + i)(1 - i)\overline{m} - (1 - i)(1 + i)m = 2(\overline{m} - m)$

et $2(a - b) = 2(1 + i)(1 - m)$

Donc: $\overline{h} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\frac{\overline{m} - m}{1 - m}$, d'où: $h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\frac{m - \overline{m}}{1 - \overline{m}}$

Exercice 36 juillet 2019

Soit α un nombre complexe non nul.

I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z:

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$(E_\alpha): z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

1) a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2) Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II. On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orhtonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectivement α, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

1) a- Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2) a- Vérifier que: $z_1 - z_2 = \alpha$

b- Montrer que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont perpendiculaires.

c- En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

3) Montrer que pour tout réel θ, le nombre: $Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

Solution

I. 1) a- On a: $\Delta = (-i\alpha\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-\alpha^2)$

$= -3\alpha^2 + 4\alpha^2$

Donc: $\Delta = \alpha^2$

b- L'ensemble de solutions de l'équation (E_α) est:

$S = \left\{\dfrac{(1+i\sqrt{3})\alpha}{2}, \dfrac{(-1+i\sqrt{3})\alpha}{2}\right\}$

2) • On a: $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)|\alpha|e^{i\lambda}$

$= e^{i\frac{\pi}{3}}|\alpha|e^{i\lambda}$

Donc: $\dfrac{(1+i\sqrt{3})\alpha}{2} = |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}$

• On a: $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)|\alpha|e^{i\lambda}$

$= e^{i\frac{2\pi}{3}}|\alpha|e^{i\lambda}$

Donc: $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})\alpha}{2} = |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})}$

II. 1) a- • L'expression complexe de la rotation R est:

$z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 0)$,c'est-à-dire: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

et puisque: $e^{i\frac{\pi}{3}} z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = z_1$

Alors: $R(\Omega) = M_1$

• On a: $e^{i\frac{\pi}{3}} z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha = e^{i\frac{2\pi}{3}}\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = z_2$

Donc: $R(M_1) = M_2$

b- • On a: $R(\Omega) = M_1$

Donc: $O\Omega = OM_1$ et $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

par suite, le triangle $O\Omega M_1$ est équilatéral.

• On a: $R(M_1) = M_2$

Donc: $OM_1 = OM_2$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

par suite , le triangle OM_1M_2 est équilatéral

2) a- On a: $z_1 - z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$

Donc: $z_1 - z_2 = \alpha$

b) On a: $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Donc: $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0} = \frac{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

c'est-à-dire : $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0} = \sqrt{3}\,i$

Par suite, $\frac{z_2-\alpha}{z_1-0} \in i\mathbb{R}$

Donc: $(\Omega M_2) \perp (OM_1)$

c) On a: $z_1 - z_2 = \alpha$, c'est-à-dire: $z_{M_1} - z_{M_2} = z_\Omega - z_O$

Donc: $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{O\Omega}$

par suite, $O\Omega M_1M_2$ est un parallélogramme

D'autre part, les diagonales (OM_1) et (ΩM_2) sont perpendiculaires

Donc $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

3) Soit θ un nombre réel

On a: $\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} = \frac{(-3+i\sqrt{3})\alpha}{(-1+i\sqrt{3})\alpha} = \frac{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{3}\,\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

Donc: $\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

et on a: $\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}} = \frac{|\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-|\alpha|e^{i\theta}}{|\alpha|e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}-|\alpha|e^{i\theta}} = \frac{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Par suite: $\dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\div\dfrac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\dfrac{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$

$$=\sqrt{3}\,\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}-e^{i\theta}}$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}-e^{-i\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{-i\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)}$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{2i\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{2i\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Donc: $\left(\dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\div\dfrac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}\right)\in\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

03 ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

a- Définition

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $a \neq 0$

On dit que a divise b et on écrit $a|b$, s'il existe un nombre entier relatif k tel que : $b = ka$

$$a|b \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad b = ka$$

On dit aussi que a est un diviseur de b ou b est divisible par a ou b est un multiple de a

b- Propriétés

Pour tous a, b, c et d de $\mathbb{Z}^*$:

- 1, (-1), a et $(-a)$ sont des diviseurs de a

Un diviseur de a autre que ces quatre nombres s'appelle un diviseur propre de a

- Tout nombre entier non nul est un diviseur de zéro
- Si $d|a$ alors : $|d| \leq |a|$
- Si $a|b$ et $b|c$ alors : $a|c$
- Si $a|b$ alors : $(\forall n \in \mathbb{Z}^*) \quad a|nb$ et $na|nb$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a^n|b^n$
- Si $d|a$ et $d|b$ alors : $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2) \quad d|(\alpha a + \beta b)$
- Si $a|b$ et $c|d$ alors : $ac|bd$

2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soient a et b deux entiers tels que $a \neq 0$

Il existe un couple unique (q,r) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $b = qa + r$ et $0 \leq r < |a|$

L'opération qui permet de déterminer q et r s'appelle la division euclidienne de b par a

b est le dividende, a le diviseur, q le quotient et r est le reste.

3 Congruence modulo n

a- Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

On dit que a est congru à b modulo n et on écrit $a \equiv b[n]$ si n divise $(a-b)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|(a-b)$$

b- Propriétés

Soit n un nombre entier naturel non nul

- $(\forall a \in \mathbb{Z})\quad a \equiv a[n]$
- $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\quad a \equiv b[n] \Longrightarrow b \equiv a[n]$
- $(\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3)\quad (a \equiv b[n] \text{ et } b \equiv c[n]) \Longrightarrow a \equiv c[n]$
- $(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4)\quad (a \equiv b[n] \text{ et } c \equiv d[n]) \Longrightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d[n] \\ ac \equiv bd[n] \end{cases}$
- $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)\quad a \equiv b[n] \Longrightarrow a^p \equiv b^p[n]$
- $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)(\forall p \in \mathbb{N}^*)\quad pa \equiv pb[pn] \Longrightarrow a \equiv b[n]$
- $(\forall a \in \mathbb{Z})\quad a \equiv r[n]$ où r est le reste de la division euclidienne de a par n
- Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$; $a \equiv b[n]$ si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

c- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On considère la congruence modulo n $(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$

Pour tout $a \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, on note $\bar{a}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z}/x \equiv a[n]\}$

$\bar{a}$ s'appelle la classe d'équivalence de a modulo n

L'ensemble $\{\overline{0},\overline{1},\cdots,(\overline{n-1})\}$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\left(\forall (\overline{a},\overline{b}) \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^2\right)\quad \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ et $\overline{a \times b} = \overline{a} \times \overline{b}$

4 Plus grand diviseur commun

a- Définition

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

Le plus grand diviseur commun de a et b noté $a \wedge b$ est le plus grand élément de l'ensemble $D_a \cap D_b$: $a \wedge b = \max(D_a \cap D_b)$

b- Remarques

- $a \wedge b$ est un nombre entier naturel
- $a \wedge b$ divise a et divise b
- Si $c|a$ et $c|b$ alors $c \leq a \wedge b$
- $a \wedge b = |a| \wedge |b|$
- Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \wedge a = a$, $a \wedge b = a \Leftrightarrow a|b$

c- Algorithme d'Euclide

Propriété

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que b ne divise pas a

Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors : $a \wedge b = b \wedge r$

Scanned with CamScanner

Corollaire

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que b ne divise pas a

$a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans «les divisions successives de a par b»

d- Propriétés

Pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$

- Si $a \wedge b = d$ alors : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) \quad d = au + bv$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, si $\alpha \mid a$ et $\alpha \mid b$ alors : $\alpha \mid a \wedge b$
- $ca \wedge cb = |c|(a \wedge b)$
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

5 Nombres premiers entre eux

a- Définition

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

On dit que a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

b- Théorème de Bezout

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) \quad au + bv = 1$

c- Théorème de Gauss

Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{Z}^*$

Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$

d- Corollaires

- Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}^*$ et d un élément de $\mathbb{N}^*$

On a : $a \wedge b = d \Leftrightarrow \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$

- Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{Z}^*$

Si $a \mid c$ et $b \mid c$ et $a \wedge b = 1$ alors : $ab \mid c$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$

Si $ab \equiv ac\,[n]$ et $a \wedge n = 1$ alors : $b \equiv c\,[n]$

- Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$

Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors : $a \wedge bc = 1$

- Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

Si $a \wedge b = 1$ alors : $(\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2) \quad a^m \wedge b^n = 1$

6 Équations $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si : $a \wedge b \mid c$

7 Plus petit multiple commun

a- Définition

Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Le plus petit multiple commun de a et b noté $a \vee b$ est le plus petit élément de l'ensemble $(|a|\mathbb{N}^*) \cap (|b|\mathbb{N}^*)$:

$$a \vee b = \min(|a|\mathbb{N}^* \cap |b|\mathbb{N}^*)$$

Remarques

$a \vee a = |a|$; $a \vee b = |a| \vee |b|$; $a \vee b = |a| \Leftrightarrow b|a$

b- Propriétés

• Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et soit $m = a \vee b$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, si α est un multiple commun de a et b

alors α est un multiple de m

Autrement dit: $(a|\alpha$ et $b|\alpha) \Longrightarrow m|\alpha$ ou $\alpha \in (a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \Longrightarrow \alpha \in m\mathbb{Z}$

Corollaires

• $(\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2)$ $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |a| \times |b|$

• $(\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2)$ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |a| \times |b|$

• $(\forall (a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3)$ $ca \vee cb = |c|(a \vee b)$

8 Nombres premiers

a- Définition

Soit $p \in \mathbb{Z}^* - \{-1,1\}$

On dit que le nombre p est premier s'il admet exactement quatre diviseurs:

$1, -1, p$ et $-p$

Autrement dit: p est premier s'il n'admet pas de diviseur propre.

Remarque

Si le nombre p est premier alors le nombre $(-p)$ est premier

b- Propriétés

• Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que n n'est pas premier

Le plus petit diviseur positif de n différent de 1 est un nombre premier

• Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$ tel que n n'est pas premier

Il existe un nombre premier positif p tel que : $p|n$ et $p \leq \sqrt{n}$

• Si p et q sont deux nombres premiers positifs distincts Alors : $p \wedge q = 1$

• Soit $n \in \mathbb{Z}^*$

Si p est un nombre premier qui ne divise pas n alors $p \wedge n = 1$

• Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$

Si $p|ab$ et p premier alors $p|a$ ou $p|b$

• Soient $a \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si $p|a^n$ et p premier alors $p|a$

• Soient $p_1, \cdots$ et p_n des nombres premiers

Si p est un nombre premier tel que $p|p_1 p_2 \cdots p_n$

Alors il existe i tel que $p = p_i$

profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c- Théorème de Fermat

Si p est un nombre premier positif

Alors $(\forall n \in \mathbb{Z})\ \ n^p \equiv n[p]$, et si p ne divise pas n, alors $n^{p-1} \equiv 1[p]$

9 Systèmes de numération

Soit b un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$

Tout nombre entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme : $n = a_m b^m + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ où $a_0, a_1, \cdots$ et a_m sont des nombres entiers tels que $0 \leq a_i \leq b-1$ pour tout i de $\{0,1,\cdots,m\}$ et $a_m \neq 0$

On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0}^{(b)}$

et on dit qu'on a écrit le nombre n dans le système de numération de base b

Exercice 1 Juin 2003

On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation suivante :

$$(E) : x^2(x^2+7) = y(2x+y)$$

Soit (x,y) un élément de $(\mathbb{N}^*)^2$ et soit d le plus grand diviseur commun de x et y

On pose : $x = da$ et $y = db$

1) On suppose que (x,y) est une solution de l'équation (E)

a- Vérifier que : $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$

b- En déduire qu'il existe un nombre entier naturel k tel que : $d^2a^2+7 = kb$ et $2a+b = ka^2$

c- Montrer que : $a = 1$

d- En déduire que : $(b+1)^2 = d^2+8$

2) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E)

Solution

1) a- On a : (x,y) est une solution de l'équation (E)

Donc : $x^2(x^2+7) = y(2x+y)$ c'est-à-dire $d^2a^2(d^2a^2+7) = db(2da+db)$

D'où : $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$

b- On a : $x \wedge y = d$ et $x = da$ et $y = db$, Donc : $a \wedge b = 1$

Et puisque $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$ alors $b \mid a^2(d^2a^2+7)$

Et puisque $b \wedge a^2 = 1$ (car $b \wedge a = 1$)

alors : $b \mid (d^2a^2+7)$ (d'après le théorème de Gauss)

par suite, il existe un nombre entier naturel k tel que: $d^2a^2+7 = kb$

Donc : $a^2 \times bk = b(2a+b)$ (d'après le résultat de la question 1) a))

D'où : $2a+b = a^2k$

c- On a : $2a+b = ka^2$, Donc $b = a(ka-2)$

par suite, $a \mid b$, D'où : $a \wedge b = a$

Et puisque : $a \wedge b = 1$, alors : $a = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

d- On a : $a^2(d^2a^2+7)=b(2a+b)$ et $a=1$

Donc : $d^2+7=2b+b^2$ c'est-à-dire : $d^2+7+1=b^2+2b+1$

D'où : $(b+1)^2=d^2+8$

2) On a : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge y = d \\ x = da \\ y = db \\ a^2(d^2a^2+7)=b(2a+b) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ (b+1)^2=d^2+8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ (b+1-d)(b+1+d)=8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-d+1=1 \\ b+d+1=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=1 \\ b-d+1=2 \\ b+d+1=4 \end{cases}$ (car $b+d+1>b-d+1$)

$\Rightarrow a=1$ et $b=2$ et $d=1$

$\Rightarrow x=1$ et $y=2$

et on vérifie que le couple $(1;2)$ est bien une solution de l'équation (E)

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est $S=\{(1;2)\}$

Exercice 2 Juin 2006

On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation $(E): x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$

1) Soit (x,y) une solution de l'équation (E)

On pose : $d=x\wedge y$, $x=ad$ et $y=bd$

a- Vérifier que : $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$

b- En déduire que : $b=1$

c- Montrer que : $a\neq 1$ et que $(a-1)$ divise $(a+1)$

d- En déduire que : $a=2$ ou $a=3$

2) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E)

Solution

1) a- On a : $x^2(x+y)=y^2(x-y)^2 \Leftrightarrow a^2d^2(ad+bd)=b^2d^2(ad-bd)^2$

$\Leftrightarrow a^2d^3(a+b)=b^2d^4(a-b)^2$

$\Leftrightarrow a^2(a+b)=b^2d(a-b)^2$ (car $d\neq 0$)

b- On a : $a^2(a+b)=b^2d(a-b)^2$, Donc : $b\,|\,a^2(a+b)$

et puisque : $x\wedge y=d$, alors : $a\wedge b=1$, par suite : $a^2\wedge b=1$

Donc : $b\,|\,(a+b)$ (d'après le théorème de Gauss)

Et puisque : $b\,|\,b$ alors : $b\,|\,(a+b-b)$ c'est-a-dire : $b\,|\,a$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

d'où : $a \wedge b = b$

Et puisque : $a \wedge b = 1$ alors : $b = 1$

c- • On a : $d(a-1)^2 = (a+1)a^2$ car $b = 1$

Supposons que : $a = 1$, Donc : $0 = 2$ ce qui est faux

Donc : $a \neq 1$

• On a : $d(a-1)^2 = (a+1)a^2$ et $a \neq 1$

Donc : $(a-1) | a^2(a+1)$

Et puisque : $(a-1) \wedge a = 1$ (car $a-(a-1) = 1$)

alors : $(a-1) \wedge a^2 = 1$

par suite, $(a-1) | (a+1)$ (d'après le théorème de Gauss)

d- On a : $(a-1) | (a+1)$

et on a : $(a-1) | (a-1)$

Donc : $(a-1) | (a+1)-(a-1)$

c'est-à-dire : $(a-1) | 2$

par suite, $a-1 = 1$ ou $a-1 = 2$ c'est-à-dire : $a = 2$ ou $a = 3$

2) • Soit (x,y) une solution de l'équation (E) dans $(\mathbb{N}^*)^2$

Si on pose : $x \wedge y = d$

Alors d'après ce qui précède ($x = 2d$ et $y = d$) ou ($x = 3d$ et $y = d$)

c'est-à-dire : $x = 2y$ ou $x = 3y$

si $x = 2y$ alors : $4y^2 \times 3y = y^2 \times y^2$ c'est-à-dire : $y = 12$ D'où : $x = 24$

si $x = 3y$ alors : $9y^2 \times 4y = y^2 \times 4y^2$ c'est-à-dire : $y = 9$ D'où : $x = 27$

• Réciproquement, vérifier que les couples $(24;12)$ et $(27;9)$ sont des solutions de l'équation (E)

Donc: $S = \{(24;12),(27;9)\}$

Exercice 3 Juin 2004

1) Soit n un élément de $\mathbb{N}$

a- Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$

b- Montrer que si n est pair alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$

2) Soient a, b et c des nombres entiers naturels impairs

a- Montrer que : $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait

b- Montrer que : $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$

(Remarquer que : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$)

c- En déduire que $2(ab+bc+ac)$ n'est pas un carré parfait

d- Montrer que $(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait

Solution

1) a- Soit n un nombre entier naturel impair

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $n \equiv 1[8]$ ou $n \equiv 3[8]$ ou $n \equiv 5[8]$ ou $n \equiv 7[8]$
par suite, $n^2 \equiv 1[8]$ ou $n^2 \equiv 9[8]$ ou $n^2 \equiv 25[8]$ ou $n^2 \equiv 49[8]$
Dans tous ces cas: $n^2 \equiv 1[8]$
b- Soit n un nombre entier naturel pair
Donc : $n \equiv 0[8]$ ou $n \equiv 2[8]$ ou $n \equiv 4[8]$ ou $n \equiv 6[8]$
par suite, $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$ ou $n^2 \equiv 16[8]$ ou $n^2 \equiv 36[8]$
Dans tous ces cas: $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$
Remarque : à partir des résultats de ces deux questions, un carré parfait est congru soit à 0 ou à 1 ou à 4 modulo 8
2) a- Soient a, b et c des nombres entiers naturels impairs
supposons que $a^2+b^2+c^2$ est un carré parfait
D'après le résultat de la question 1) a) On a : $a^2 \equiv 1[8]$ et $b^2 \equiv 1[8]$ et $c^2 \equiv 1[8]$
Donc : $a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]$ $\quad (*)$
Et d'après les résultats des questions 1) a) et 1) b), la proposition $(*)$ est fausse
par suite, $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait.
b- On a : $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$
Et on sait que la somme de trois nombres entiers naturels impairs est un nombre impair
Donc : $a+b+c$ est un nombre impair
par suite : $(a+b+c)^2 \equiv 1[8]$
Et on a vu que : $a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]$
Donc : $2(ab+bc+ca) \equiv (1-3)[8]$ c'est-à-dire : $2(ab+bc+ca) \equiv -2[8]$
par suite: $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$
c- Supposons que $2(ab+bc+ca)$ est un carré parfait
Donc : $(\exists n \in \mathbb{N})\ \ 2(ab+bc+ca) = n^2$
Le nombre n^2 est pair, d'où n est pair
et d'après **1) b-** on a : $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$
cette proposition est fausse car d'après 2) b) on a : $n^2 \equiv 6[8]$
Conclusion : $2(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait.
d- Supposons que $ab+bc+ca$ est un carré parfait
Donc : $(\exists n \in \mathbb{N})\ \ ab+bc+ca = n^2$
par suite, $2(ab+bc+ca) = 2n^2$
Et puisque : $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$ alors $2n^2 \equiv 6[8]$
Et puisque : $ab+bc+ca$ est un nombre impair alors n^2 est impair
par suite n est impair
Et d'après 1) a) on a : $n^2 \equiv 1[8]$, donc : $2n^2 \equiv 2[8]$
On a : $2n^2 \equiv 6[8]$ et $2n^2 \equiv 2[8]$, donc : $0 \equiv 4[8]$, ce qui est faux
Par suite, $(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait.

Scanned with CamScanner

Exercice 4 Juin 2005

I. Soit p un nombre entier naturel premier tel que $p \geq 5$

1) Montrer que $p^2 \equiv 1[3]$

2) a- Montrer qu'il existe un entier naturel q tel que: $p^2 - 1 = 4q(q+1)$

b- En déduire que $p^2 \equiv 1[8]$

3) Montrer que $p^2 \equiv 1[24]$

II. Soit a un nombre entier naturel tel que $a \wedge 24 = 1$

1) Montrer que $a^2 \equiv 1[24]$

2) Existe-t-il des entiers naturels $a_1, \cdots, a_{23}$ tels que $a_1^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$ et $(\forall k \in \{1, \cdots, 23\})\ a_k \wedge 24 = 1$?

Solution

I. 1) p est un nombre premier tel que $p \geq 5$

donc le nombre p n'est pas divisible par 3

et puisque 3 est un nombre premier

Alors d'après, le théorème de Fermat: $p^{3-1} \equiv 1[3]$ c'est-à-dire $p^2 \equiv 1[3]$

2) a- Le nombre p est impair

Donc : $(\exists q \in \mathbb{N})\ \ p = 2q + 1$

D'où : $p^2 - 1 = (2q+1)^2 - 1 = 4q^2 + 4q = 4q(q+1)$

b- On sait que le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair

Donc : $(\exists k \in \mathbb{N})\ \ q(q+1) = 2k$

par suite : $p^2 - 1 = 8k$, d'où : $p^2 \equiv 1[8]$

3) On a : $p^2 \equiv 1[3]$ et $p^2 \equiv 1[8]$

Donc : $3 \mid (p^2 - 1)$ et $8 \mid (p^2 - 1)$

et comme $3 \wedge 8 = 1$, alors $(3 \times 8) \mid (p^2 - 1)$ c'est-à-dire $24 \mid (p^2 - 1)$

par suite, $p^2 \equiv 1[24]$

II. 1) Soit a un nombre entier naturel tel que $a \wedge 24 = 1$

et soit $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ la décomposition de a en facteurs premiers

Et puisque : $a \wedge 24 = 1$

Alors : $(\forall i \in \{1, \cdots, n\})\ \ p_i \wedge 24 = 1$ et $p_i \geq 5$ (2 et 3 sont des diviseurs de 24)

Donc, d'après le résultat de la partie I): $p_i^2 \equiv 1[24]$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$

et par suite : $a^2 \equiv (p_1^2)^{\alpha_1} \cdots (p_n^2)^{\alpha_n}[24]$

$\equiv 1 \times 1 \times \cdots \times 1[24]$

D'où : $a^2 \equiv 1[24]$

2) Supposons qu'il existe des entiers naturels $a_1, \cdots, a_{23}$ tels que

$a_1^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$ et $a_k \wedge 24 = 1$ pour tout $k \in \{1, \cdots, 23\}$

D'après la résultat de la question précèdente: $(\forall k \in \{1, \cdots, 23\})\ \ a_k^2 \equiv 1[24]$

Donc : $a_1^2 + \cdots + a_{23}^2 \equiv 23[24]$

c'est-à-dire : $23997 \equiv 23[24]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c'est-à-dire : $23974 \equiv 0[24]$
donc : 24 divise 23974, ce qui est faux
par suite, il n'existe pas des nombres $a_1, \cdots, a_{23}$ tels que :
$a_1^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$ et $(\forall k \in \{1, \cdots, 23\})\ \ a_k \wedge 24 = 1$

Exercice 5 Juin 2010

1) Déterminer les nombres entiers naturels m tels que : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$
2) Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ où $k \in \mathbb{N}$
et soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$
a- Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$
b- Montrer que les nombres n et p sont premiers entre eux.
c- En déduire que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p]$
d- En déduire, de ce qui précède, qu'il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

Solution

1) Pour déterminer les nombres entiers naturels m tels que $m^2 + 1 \equiv 0[5]$, on va utiliser le tableau suivant de la congruence modulo 5 :

$m \equiv$	0	1	2	3	4
$m^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$m^2 + 1 \equiv$	1	2	0	0	2

D'où : $m^2 + 1 \equiv 0[5] \iff m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$
$\iff m = 2 + 5k$ ou $m = 3 + 5k \quad (k \in \mathbb{N})$

Autre méthode :
On a : $m^2 + 1 \equiv 0[5] \iff m^2 - 4 \equiv 0[5]$
$\iff 5 \mid (m-2)(m+2)$
$\iff 5 \mid (m-2)$ ou $5 \mid (m+2)$ (car 5 est un nombre premier)
$\iff m \equiv 2[5]$ ou $m \equiv 3[5]$
$\iff m = 2 + 5k$ ou $m = 5k + 3 \quad (k \in \mathbb{N})$

2) a- On a : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$
Donc : $n^2 \equiv -1[p]$
D'où : $(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)^{1+2k}[p]$
par suite, $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$
b- On a : $n^2 + 1 \equiv 0[p] \iff (\exists k \in \mathbb{N})\ \ n^2 + 1 = kp$
$\iff (\exists k \in \mathbb{N})\ \ kp - n^2 = 1$
$\iff (\exists k \in \mathbb{N})\ \ k \times p - n \times n = 1$
Donc : $p \wedge n = 1$ (d'après le théorème de Bezout)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Autre méthode :

On a : $n^2 \equiv -1\,[p]$, donc p ne divise pas n^2, par suite p ne divise pas n et comme p est un nombre premier, alors $p \wedge n = 1$

c- On a : p est premier et $p \wedge n = 1$, donc d'après le théorème de Fermat on a : $n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Et puisque : $p = 3 + 4k$

alors : $n^{3+4k-1} \equiv 1\,[p]$

par suite, $n^{2(1+2k)} \equiv 1\,[p]$

D'où : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$

d- S'il existe un nombre entier naturel n tel que $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

alors : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$ et $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

par suite, $1 \equiv -1\,[p]$

D'où : $2 \equiv 0\,[p]$

Donc : $p \mid 2$ ce qui est faux car p est de la forme $(4k+3)$

Conclusion : Donc, il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

Remarque :

Un nombre premier est soit de la forme $(4k+1)$ ou de la forme $(4k+3)$

Dans la question 1), le nombre premier 5 est de la forme $(4k+1)$ et on a vu qu'il existe des entiers n tels que $n^2 + 1 \equiv 0\,[5]$

Exercice 6 Juillet 2011

Soit x un nombre entier naturel qui vérifie $10^x \equiv 2\,[19]$

1) a- Vérifier que $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$

b- Montrer que $10^{18} \equiv 1\,[19]$

2) Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $(x+1)$

a- Montrer que : $10^d \equiv 1\,[19]$

b- Montrer que : $d = 18$

c- En déduire que : $x \equiv 17\,[18]$

Solution

1) a- On a : $10^x \equiv 2\,[19]$

Donc : $10 \times 10^x \equiv 10 \times 2\,[19]$

c'est-à-dire : $10^{x+1} \equiv 20\,[19]$

Et puisque : $20 \equiv 1\,[19]$

alors : $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$

b- On a : $10 \wedge 19 = 1$ et 19 est un nombre premier

Donc d'après le théorème de Fermat on a : $10^{19-1} \equiv 1\,[19]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite, $10^{18} \equiv 1[19]$

2) a- On a : $(x+1) \wedge 18 = d$

Donc : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) \quad (x+1)u + 18v = d$

Et puisque les nombres $(x+1)$ et 18 sont positifs

et d est leur plus grand diviseur commun

alors u et v ont des signes contraires

1er cas : $u \geq 0$ et $v \leq 0$ c'est-à-dire $u \geqslant 0$ et $-v \geqslant 0$

On a : $10^{(x+1)u} = 10^{d-18v} = 10^d \times (10^{18})^{-v}$

Donc : $10^{(x+1)u} \equiv 10^d \times 1[19]$

Et puisque : $10^{(x+1)u} \equiv 1[19]$

alors : $10^d \equiv 1[19]$

2ème cas : $u \leq 0$ et $v \geq 0$

En utilisant la même méthode, on montre que : $10^d \equiv 1[19]$

b- On a : $10^d \equiv 1[19]$ et d est un diviseur de 18

donc : $d = 1$ ou $d = 2$ ou $d = 3$ ou $d = 6$ ou $d = 9$ ou $d = 18$

et on a :

$10^1 \equiv 10[19]$ et $10^2 \equiv 5[19]$ et $10^3 \equiv 12[19]$ et $10^6 \equiv 11[19]$ et $10^9 \equiv 18[19]$

donc : $d = 18$

c- On a : 18 divise $(x+1)$

Donc : $x + 1 \equiv 0[18]$ c'est-à-dire : $x \equiv -1[18]$

Et puisque : $-1 \equiv 17[18]$

alors : $x \equiv 17[18]$

Exercice 7 Juin 2011

Soit N le nombre entier naturel dont l'écriture dans le système décimal est :

$N = \underbrace{111\cdots11}_{2010 \text{ uns}}$

1) Montrer que le nombre N est divisible par 11

2) a- Vérifier que le nombre 2011 est premier et que: $10^{2010} - 1 = 9N$

b- Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

c- En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N

3) Montrer que le nombre N est divisible par 22121

Solution

1) On a : $N = \underbrace{111\cdots11}_{2010 \text{ uns}}$

$$= 11 + 11 \times 10^2 + 11 \times 10^4 + \cdots + 11 \times 10^{2008}$$

$$= 11 \times (1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2006} + 10^{2008})$$

Donc le nombre N est divisible par 11

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Autre méthode : Utiliser le critère de divisibilité par 11

On a : $\underbrace{(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)}_{1005 \text{ fois } (1-1)}=0$

donc le nombre N est divisible par 11

2) a- • On a : $\sqrt{2011}\simeq 44,8$ et les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{2011}$ sont $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41$ et 43

Et puisque 2011 n'est divisible par aucun de ces nombres

Alors le nombre 2011 est premier

• On a : $N=1+10+10^2+\cdots+10^{2009}$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 10)

$$=1\times\frac{10^{2010}-1}{10-1}$$

$$=\frac{10^{2010}-1}{9}$$

Donc : $9N=10^{2010}-1$

b- On a : 2011 est premier et $2011\wedge 10=1$

Donc : $10^{2010}\equiv 1[2011]$ (d'après le théorème de Fermat)

par suite, $10^{2010}-1\equiv 0[2011]$

D'où : 2011 divise $(10^{2010}-1)$

c'est-à-dire 2011 divise $9N$

c- On a : $2011\,|\,9N$ et $2011\wedge 9=1$ (car 2011 est premier)

Donc : 2011 divise N (d'après le théorème de Gauss)

3) On remarque que $22121=2011\times 11$

On a : $11\,|\,N$ et $2011\,|\,N$ et $2011\wedge 11=1$

Donc : $11\times 2011\,|\,N$

par suite, 22121 divise N

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E):3x^2+3x+7=y^3$

1) Montrer que l'équation $x^2+x+\overline{2}=\overline{0}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

2) Soit (a,b) une solution de l'équation (E)

Montrer qu'il existe un entier k tel que : $b=3k+1$ et que : $a^2+a+2\equiv 0[3]$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

Solution

1) Le tableau suivant donne la valeur de $x^2+x+\overline{2}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$x^2+x+\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

donc : $(\forall x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\ \ x^2+x+\overline{2} \neq \overline{0}$

par suite, l'équation $x^2+x+\overline{2}=\overline{0}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

2) • Soit (a,b) une solution de l'équation (E)

donc: $3a^2+3a+7=b^3$

par suite, $b^3 \equiv 1[3]$ c'est-à-dire $3 \mid (b-1)(b^2+b+1)$

et comme 3 est un nombre premier, donc: $3 \mid b-1$ ou $3 \mid b^2+b+1$

c'est-à-dire : $b-1 \equiv 0[3]$ ou $b^2+b+1 \equiv 0[3]$

c'est-à-dire : $b \equiv 1[3]$ ou $b^2+b-2 \equiv 0[3]$

c'est-à-dire : $b \equiv 1[3]$ ou $(b-1)(b+2) \equiv 0[3]$

donc: $b \equiv 1[3]$ ou $b-1 \equiv 0[3]$ ou $b+2 \equiv 0[3]$ (car 3 est un nombre premier)

c'est-à-dire : $b \equiv 1[3]$

d'où : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ \ b=3k+1$

• On a : $3a^2+3a+7=b^3$, c'est-à-dire : $3a^2+3a+6=(b-1)(b^2+b+1)$

donc : $3(a^2+a+2)=3k(b^2+b+1)$

par suite, $a^2+a+2=k(b^2+b+1)$

or : $b \equiv 1[3]$, donc: $b^2+b+1 \equiv 0[3]$

par suite, $a^2+a+2 \equiv 0[3]$

3) D'après le résultat de la question 2), si (a,b) est une solution de l'équation (E)

alors : $a^2+a+2 \equiv 0[3]$

or d'après le résultat de la question 1), l'équation $x^2+x+2 \equiv 0[3]$ n'admet pas de solution

donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 9

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $(2n+1) \wedge n^2 = 1$

2) Déterminer l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}^*$ tels que $(2n+1) \wedge 5 = 5$

3) Soient a, b, c et d des entiers relatifs non nuls

a- Montrer que : si $a \wedge c = 1$ et $d \mid c$ alors $a \wedge d = 1$

b- Montrer que : si $a \wedge c = 1$ alors $ab \wedge c = b \wedge c$

4) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ n^2(n^2+1) \wedge (2n+1) = (2n+1) \wedge 5$

b- En déduire l'ensemble des entiers naturels non nuls n pour lesquels le nombre $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2n+1}$ est irréductible.

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $d=(2n+1) \wedge n^2$

On a : $d \mid (2n+1)$ et $d \mid n^2$

donc : $d \mid n(2n+1)-2n^2$ c'est-à-dire : $d \mid n$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite, $d|(2n+1)-2n$ c'est-à-dire : $d|1$

donc : $d=1$

c'est-à-dire : $(2n+1)\wedge n^2=1$

Autre méthode :

On a : $4n^2-(2n+1)(2n-1)=1$

Donc d'après le théorème de Bezout : $n^2\wedge(2n+1)=1$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$(2n+1)\wedge 5=5 \iff 5|(2n+1)$$
$$\iff 2n+1\equiv 0[5]$$
$$\iff 2n\equiv 4[5]$$
$$\iff n\equiv 2[5] \text{ (car } 2\wedge 5=1)$$

Donc l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}^*$ pour lesquels $(2n+1)\wedge 5=5$ est $E=\{5k+2/k\in\mathbb{N}\}$

3) a- Supposons que : $a\wedge c=1$ et $d|c$

On a : $a\wedge c=1$, donc : $(\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2)\quad au+cv=1$

et puisque $d|c$, alors $(\exists k\in\mathbb{Z}^*)\quad c=kd$

donc : $au+d(kv)=1$

par suite, d'après le théorème de Bezout : $a\wedge d=1$

b- Supposons que : $a\wedge c=1$

posons : $d=ab\wedge c$ et $d'=b\wedge c$

• On a : $d|ab$ et $d|c$

or : $a\wedge c=1$ et $d|c$

Donc : $a\wedge d=1$ (d'après **3) a-**)

et puisque $d|ab$ alors : $d|b$ (d'après le théorème de Gauss)

On a : $d|b$ et $d|c$, donc : $d|(b\wedge c)$ c'est-à-dire $d|d'$

• On a : $d'|b$ et $d'|c$

donc : $d'|ab$ et $d'|c$

et par suite, $d'|(ab\wedge c)$ c'est-à-dire : $d'|d$

• On a : $d|d'$ et $d'|d$, donc $d=d'$

Conclusion : si $a\wedge c=1$ alors $ab\wedge c=b\wedge c$

4) a- Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On a: $n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=(n^2+1)\wedge(2n+1)$ (d'après **3) b-**) car $(2n+1)\wedge n^2=1)$

Et en posant : $\alpha=(n^2+1)\wedge(2n+1)$ et $\beta=(2n+1)\wedge 5$, montrer que : $\alpha|\beta$ et $\beta|\alpha$, donc : $\alpha=\beta$

D'où : $(n^2+1)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge 5$

et par suite, $n^2(n^2+1)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge 5$

b- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2n+1}\right.$ irréductible) $\Leftrightarrow n^2(n^2+1) \wedge (2n+1) = 1$

$\Leftrightarrow (2n+1) \wedge 5 = 1$

$\Leftrightarrow (2n+1) \wedge 5 \neq 5$

$\Leftrightarrow n \not\equiv 2[5]$ $\quad (2n+1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow n \equiv 2[5])$

$\Leftrightarrow n \notin E$ $\quad (E = \{5k+2 / k \in \mathbb{N}\})$

Exercice 10

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls vérifiant $a^2 = 2b^2 + 1$

1) Montrer que : $a \wedge b = 1$

2) Montrer que : $(a-1) \wedge (a+1) = 2$

3) En déduire que l'un des deux nombres $(a-1)$ ou $(a+1)$ n'est pas divisible par 4

4) On suppose que $(a-1)$ n'est pas divisible par 4

a- Montrer que les nombres $\left(\frac{a-1}{2}\right)$ et $(a+1)$ sont premiers entre eux

b- En déduire que $\sqrt{\frac{a-1}{2}}$ et $\sqrt{a+1}$ sont des nombres entiers qui divisent le nombre b

Solution

1) On a : $a^2 = 2b^2 + 1$, Donc : $a \times a + (-2b) \times b = 1$

Et d'après le théorème de Bezout, on a : $a \wedge b = 1$

2) On a : $a^2 = 2b^2 + 1$, Donc : $a^2 - 1 = 2b^2$

c'est-à-dire : $(a-1)(a+1) = 2b^2$

On pose : $d = (a-1) \wedge (a+1)$

D'où : $d \mid (a+1) - (a-1)$ c'est-à-dire : $d \mid 2$

par suite, $d = 1$ ou $d = 2$

Et puisque : $(a-1)(a+1) = 2b^2$, alors $(a-1)(a+1)$ est un nombre pair

par suite, $(a-1)$ et $(a+1)$ sont tous les deux pairs ou l'un d'eux est pair et l'autre est impair

Et puisque : $(a-1) + (a+1) = 2a$

alors : $(a-1)$ et $(a+1)$ ont la même parité

par suite, $(a-1)$ et $(a+1)$ sont pairs

D'où : $d = 2$ c'est-à-dire : $(a-1) \wedge (a+1) = 2$

3) Si les deux nombres $(a-1)$ et $(a+1)$ sont divisibles par 4

alors : $(a-1) \wedge (a+1) \geq 4$, Et ceci contredit le fait que $(a-1) \wedge (a+1) = 2$

Donc l'un des deux nombres $(a-1)$ ou $(a+1)$ n'est pas divisible par 4

4) On suppose que $(a-1)$ n'est pas divisible par 4

a- Le nombre $(a-1)$ est pair et n'est pas divisible par 4

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $(\exists k \in \mathbb{N})\ \ a-1=2(2k+1)$
par suite : $a+1=2(2k+1)+2=4(k+1)$
D'où : $\left(\frac{a-1}{2}\right)\wedge(a+1)=(2k+1)\wedge 4(k+1)$
Et puisque : $(2k+1)\wedge 4=1$ (car $2k+1$ est un nombre impair)
et : $(2k+1)\wedge(k+1)=1$ (car $2(k+1)-(2k+1)=1$)
alors : $(2k+1)\wedge 4(k+1)=1$ c'est-à-dire : $\left(\frac{a-1}{2}\right)\wedge(a+1)=1$
b- On a : $\left(\frac{a-1}{2}\right)(a+1)=b^2$
On pose : $x=\frac{a-1}{2}$ et $y=a+1$
On a : $xy=b^2$ et $x\wedge y=1$
On pose : $x\wedge b=\alpha$
Donc il existe x' et b' de $\mathbb{N}$ tels que : $x=\alpha x'$ et $b=\alpha b'$ et $x'\wedge b'=1$
On a : $\alpha x'y=(\alpha b')^2$ c'est-à-dire : $x'y=\alpha b'^2$
Donc : $\alpha \mid x'y$ et $x' \mid \alpha b'^2$
Et puisque : $\alpha\wedge y=1$ (car $\alpha \mid x$ et $x\wedge y=1$) et $x'\wedge b'^2=1$
alors : $\alpha \mid x'$ et $x' \mid \alpha$
D'où : $\alpha=x'$
Donc : $\alpha y=\alpha b'^2$, D'où : $y=b'^2$ et $x=\alpha x'=\alpha^2$
par suite, x et y sont deux carrés parfaits
Et puisque : $xy=b^2$ alors : $\sqrt{x}.\sqrt{y}=b$
c'est-à-dire : $\sqrt{\frac{a-1}{2}}.\sqrt{a+1}=b$
Donc $\sqrt{\frac{a-1}{2}}$ et $\sqrt{a+1}$ sont deux nombres entiers qui divisent b

Exercice 11

Soient p et q deux nombres premiers positifs et distincts
1) Montrer que : $q^{p-1}\equiv 1[p]$ et $p^{q-1}\equiv 1[q]$
2) Montrer que : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[pq]$
3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation: $(71^{60}+61^{70})x+4330y\equiv x+y[4331]$

Solution

1) Les nombres p et q sont deux nombres premiers positifs distincts, donc $p\wedge q=1$
Et d'après le théorème de Fermat on a : $p^{q-1}\equiv 1[q]$ et $q^{p-1}\equiv 1[p]$
2) On a : $q^{p-1}\equiv 1[p]$ et $p^{q-1}\equiv 0[p]$
Donc : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[p]$
et on a : $p^{q-1}\equiv 1[q]$ et $q^{p-1}\equiv 0[q]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[q]$

par suite, $p\,|\,(p^{q-1}+q^{p-1}-1)$ et $q\,|\,(p^{q-1}+q^{p-1}-1)$

Et puisque : $p\wedge q=1$ alors : $pq\,|\,(p^{q-1}+q^{p-1}-1)$

par suite : $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[pq]$

3) On considère les deux nombres premiers distincts 61 et 71

D'après le résultat de la question précèdente on a : $71^{60}+61^{70}\equiv 1[71\times 61]$

c'est-à-dire : $71^{60}+61^{70}\equiv 1[4331]$

par suite, $(71^{60}+61^{70})x+4330y\equiv x+y[4331]\Leftrightarrow x+4330y\equiv x+y[4331]$

$\Leftrightarrow 4329y\equiv 0[4331]$

Et puisque : $4331\wedge 4329=1$

(car $4331=71\times 61$ et 71 et 61 ne divisent pas 4329)

alors l'équation proposée est équivalente à l'équation $y\equiv 0[4331]$

c'est-à-dire : $y=4331k$ où $k\in\mathbb{Z}$

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation est donc:

$$S=\{(x,4331k)/(x,k)\in\mathbb{Z}^2\}$$

Exercice 12

Pour tout entier naturel n, on pose $A_n=6n^2-3n-2$ et $B_n=2n+1$ et on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_n): A_nx+B_ny=1$

1) a- Montrer que l'équation (E_n) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_n)

2) Montrer que 113 est un nombre premier

3) a- Montrer que : $A_n-B_n\equiv 113[n+4]$

b- Déterminer les entiers naturels n tels que $(n+4)$ divise (A_n-B_n)

Solution

1) a- Soit $n\in\mathbb{N}$

On a : $6n^2-3n-2=(2n+1)(3n-3)+1$

Donc : $A_n-(3n-3)B_n=1$

par suite, d'après le théorème de Bezout : $A_n\wedge B_n=1$

Donc l'équation (E_n) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ (une solution particulière de (E_n) est $(1,3-3n)$)

b- Soit $n\in\mathbb{N}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

On a : $(E_n) \Leftrightarrow A_n x + B_n y = A_n - (3n-3)B_n$

$\Leftrightarrow A_n(x-1) = (3-3n-y)B_n$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n(x-1) = (3-3n-y)B_n \\ B_n \mid A_n(x-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n(x-1) = (3-3n-y)B_n \\ B_n \mid (x-1) \qquad (car\ A_n \wedge B_n = 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n k B_n = (3-3n-y)B_n \\ x-1 = kB_n \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + kB_n \\ y = 3 - 3n - kA_n \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc : $S = \{(1+kB_n, 3-3n-kA_n) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) On a : $\sqrt{113} \simeq 10,63$

Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{113}$ sont 2 ; 3 ; 5 et 7

Aucun de ces nombres ne divise 113

Donc 113 est un nombre premier

3) a- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $A_n - B_n - 113 = (6n^2 - 3n - 2) - (2n+1) - 113$

$= 6n^2 - 5n - 116$

$= (n+4)(6n-29)$

donc : $(n+4)$ divise $(A_n - B_n - 113)$

par suite, $A_n - B_n \equiv 113[n+4]$

b- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $(n+4) \mid (A_n - B_n) \Leftrightarrow A_n - B_n \equiv 0[n+4]$

$\Leftrightarrow 113 \equiv 0[n+4]$

$\Leftrightarrow (n+4) \mid 113$

$\Leftrightarrow n+4 = 1$ ou $n+4 = 113$

$\Leftrightarrow n = 109$

Exercice 13 juillet 2005

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$

a- Soit (x,y) une solution de l'équation (E)

Montrer que : $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 2[5]$

b- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

2) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) a- Soit (x,y) une solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$

On a : $(x+1)^2 = 9+5y$

Donc : $(x+1)^2 - 9 = 5y$ c'est-à-dire : $(x+1-3)(x+1+3) = 5y$

c'est-à-dire : $(x-2)(x+4) = 5y$, Donc 5 divise $(x-2)(x+4)$

et puisque 5 est un nombre premier alors: $5 \mid (x-2)$ ou $5 \mid (x+4)$

par suite, $x-2 \equiv 0[5]$ ou $x+4 \equiv 0[5]$

c'est-à-dire : $x \equiv 2[5]$ ou $x \equiv -4[5]$

c'est-à-dire : $x \equiv 2[5]$ ou $x \equiv 1[5]$

b- Soit (x,y) une solution de l'équation (E)

Donc : $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 2[5]$ (d'après le résultat de la question précèdente)

• Si $x \equiv 1[5]$ alors $x = 5k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

par suite, $9+5y = (5k+2)^2$

D'où : $y = 5k^2+4k-1$

• Si $x \equiv 2[5]$ alors $x = 5k+2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

par suite, $9+5y = (5k+3)^2$

D'où : $y = 5k^2+6k$

• Réciproquement, vérifier que pour tout k de $\mathbb{Z}$, les couples $(5k+1, 5k^2+4k-1)$ et $(5k+2, 5k^2+6k)$ sont des solutions de l'équation (E)

Conclusion : L'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$S = \{(5k+1, 5k^2+4k-1)/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(5k+2, 5k^2+6k)/k \in \mathbb{Z}\}$

2) On a : $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad 5k^2+4k-1 = k(5k+1)+(3k-1)$

D'où : $(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (5k+1) \wedge (3k-1)$

et on a : $5k+1 = 2(3k-1)-(k-3)$

D'où : $(5k+1) \wedge (3k-1) = (3k-1) \wedge (k-3)$

et on a : $3k-1 = 3(k-3)+8$

D'où : $(3k-1) \wedge (k-3) = (k-3) \wedge 8$

Conclusion : $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad (5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

Remarque :

On a utilisé le résultat suivant :

Pour tout (a,b,q,α) de $\mathbb{Z}^4$, si $a = bq+\alpha$ alors : $a \wedge b = b \wedge \alpha$

Montrer ce résultat en posant $d = a \wedge b$ et $d' = b \wedge \alpha$

3) Le système $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} x^2+2x+1 = 5y+9 \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

On a vu que si $x \equiv 1[5]$ alors les solutions de l'équation $x^2+2x+1 = 5y+9$ sont $(5k+1, 5k^2+4k-1)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Et on a vu aussi que : $(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $x \wedge y = 8 \iff (k-3) \wedge 8 = 8$

$\iff 8 | (k-3)$

$\iff k = 3 + 8\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{N})$

$\iff \begin{cases} x = 40\alpha + 16 \\ y = 320\alpha^2 + 272\alpha + 56 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{N})$

Conclusion :

L'ensemble de solutions du système proposé est:

$$\{(40\alpha + 16, 320\alpha^2 + 272\alpha + 56) / \alpha \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 14

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On pose: $b_n = 2.10^n + 1$ et $c_n = 2.10^n - 1$

1) Montrer que: $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

2) En déduire que $b_n \wedge c_n = 1$

3) Trouver un couple (x_n, y_n) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant: $b_n x_n + c_n y_n = 1$

Solution

1) • On pose: $d = b_n \wedge c_n$ et $d' = c_n \wedge 2$

On a: $d | b_n$ et $d | c_n$

Donc: $d | b_n - c_n$ c'est-à-dire: $d | 2$

par suite: $d | c_n \wedge 2$ c'est-à-dire: $d | d'$

• On a: $d' | c_n$ et $d' | 2$

Donc: $d' | (b_n - c_n) + c_n$ (car $b_n - c_n = 2$), c'est-à-dire: $d' | b_n$

D'où: $d' | b_n \wedge c_n$ c'est-à-dire: $d' | d$

Conclusion: On a: $d | d'$ et $d' | d$ donc: $d = d'$ (d et d' sont deux entiers naturels)

D'où: $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

2ème méthode:

On a: $b_n = c_n + 2$ et 2 est le reste de la division euclidienne de b_n par c_n

(car $0 \leq 2 < c_n$)

Donc: $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

2) On a: $c_n = 2.10^n - 1$, Donc c_n est un nombre impair

D'où: $c_n \wedge 2 = 1$

Et puisque: $c_n \wedge 2 = b_n \wedge c_n$ (d'après le résultat de la question précèdente)

alors: $b_n \wedge c_n = 1$

3) On a: $c_n = 2(10^n - 1) + 1$

Donc: $c_n = (b_n - c_n)(10^n - 1) + 1$ (car $2 = b_n - c_n$)

c'est-à-dire: $c_n - b_n(10^n - 1) + c_n(10^n - 1) = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

D'où: $b_n(1-10^n)+c_n.10^n=1$

par suite, le couple $(x_n\,,\,y_n)=(1-10^n,10^n)$ vérifie $b_nx_n+c_ny_n=1$

Exercice 15 juillet 2007

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant: $\begin{cases}x\equiv a[p]\\x\equiv b[q]\end{cases}$

où a,b,p et q sont des entiers relatifs et $p\wedge q=1$

1) a- Montrer qu'il existe un couple (u_0,v_0) de $\mathbb{Z}^2$ tel que: $pu_0+qv_0=1$

b- Montrer que le nombre $x_0=bpu_0+aqv_0$ est une solution du système (S)

2) Soit x une solution du système (S) , montrer que le nombre pq divise le nombre $(x-x_0)$

3) Soit x un nombre entier relatif tel que pq divise $(x-x_0)$

Montrer que x est une solution du système (S)

4) En déduire l'ensemble de solutions du système (S)

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}x\equiv 1[8]\\x\equiv 3[13]\end{cases}$

Solution

1) a- On a: $p\wedge q=1$

Donc, d'après le théorème de Bezout, il existe un couple (u_0,v_0) de $\mathbb{Z}^2$ tel que: $pu_0+qv_0=1$

b- • On a: $x_0-a=bpu_0+aqv_0-a$

$=bpu_0+a(qv_o-1)$

$=bpu_o-apu_o$

$=p(bu_o-au_o)$

Donc: $p|(x_0-a)$, et par suite $x_0\equiv a[p]$

• on a: $x_0-b=bpu_0+aqv_0-b$

$=b(pu_0-1)+aqv_o$

$=-bqv_o+aqv_o$

$=q(av_o-bv_o)$

Donc: $q|(x_0-b)$, et par suite: $x_0\equiv b[q]$

De ce qui précède, on déduit que x_0 est une solution du système (S)

2) Soit x une solution du système (S)

Donc: $\begin{cases}x\equiv a[p]\\x\equiv b[q]\end{cases}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Et puisque x_0 est une solution du système (S) alors: $\begin{cases} x_0 \equiv a\,[p] \\ x_0 \equiv b\,[q] \end{cases}$

par suite: $\begin{cases} x \equiv x_0\,[p] \\ x \equiv x_0\,[q] \end{cases}$

D'où: $p \mid (x - x_0)$ et $q \mid (x - x_0)$

Et puisque: $p \wedge q = 1$ alors : $pq \mid (x - x_0)$

Conclusion: Si x est une solution de (S) alors: $pq \mid (x - x_0)$

3) On suppose que $pq \mid (x - x_0)$, donc: $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x - x_0 = k\,pq$

D'où: $x = x_0 + kpq$

Et puisque: $pqk \equiv 0\,[p]$ et $pqk \equiv 0\,[q]$

alors: $x \equiv x_0\,[p]$ et $x \equiv x_0\,[q]$

Et puisque : $x_0 \equiv a\,[p]$ et $x_0 \equiv b\,[q]$

alors: $x \equiv a\,[p]$ et $x \equiv b\,[q]$

par suite, x est une solution du système (S)

Conclusion: Si $pq \mid (x - x_0)$ alors x est une solution de (S)

4) Soit S' l'ensemble de solutions du système (S)

D'après les résultats des questions (2) et (3) on a:

$$x \in S' \iff pq \mid (x - x_0)$$
$$\iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = x_0 + kpq$$

Donc: $S' = \{x_0 + kpq \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

5) Puisque $8 \wedge 13 = 1$, alors d'après le résultat de la dernière question, l'ensemble de solutions du système $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\ [13] \end{cases}$ est $S' = \{x_0 + 104k / k \in \mathbb{Z}\}$

Et puisque: $5 \times 8 - 3 \times 13 = 1$ alors on peut prendre : $u_0 = 5$ et $v_0 = -3$

Par suite: $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

$$= 3 \times 8 \times 5 + 1 \times 13 \times (-3) = 81$$

Conclusion: $S' = \{81 + 104k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 16 juin 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $a_n = \underbrace{333\ldots31}_{n\ fois}$ (n fois le chiffre 3)

1) Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$, puis en déduire que 31 divise a_{30k+1}

5) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) • On a: $a_1 = 31$ et 31 est un nombre premier

• On a: $a_2 = 331$ et $\sqrt{331} \simeq 18,2$

Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{331}$ sont $2,3,5,7,11,13$ et 17

Et puisque chacun de ces nombres ne divise pas 331

alors 331 est un nombre premier.

Conclusion: a_1 et a_2 sont des nombres premiers

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $3a_n + 7 = \underbrace{999...9}_{n \text{ fois neuf}}3 + 7$

$= 1\ \underbrace{00...00}_{(n+1) \text{ fois zéros}}$

Donc: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) • On a: 31 est un nombre premier et 31 ne divise pas 10

Donc: $10^{30} \equiv 1\ [31]$ (d'après le théorème de Fermat)

• Soit $k \in \mathbb{N}$

on a : $10^{30k} \equiv 1\ [31]$, donc $10^{30k} \times 10^2 \equiv 10^2\ [31]$

et puisque $10^2 \equiv 7[31]$, alors: $(\forall k \in \mathbb{N})\ 10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

4) Soit k un élément de $\mathbb{N}$

• On a: $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$ (d'après le résultat de la question 2)

et on a : $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$ (d'après le résultat de la question 3)

Donc: $3a_{30k+1} + 7 \equiv 7\ \ [31]$

par suite: $3a_{30k+1} \equiv 0\ \ [31]$

• On a: 31 divise $3a_{30k+1}$ et $31 \wedge 3 = 1$

Donc : 31 divise a_{30k+1} (d'après le théorème de Gauss)

5) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que: $n \equiv 1\ [30]$

Donc: $(\exists k \in \mathbb{N}) n = 30k + 1$, par suite : $a_n \equiv 0\ [31]$

(d'après le résultat de la question précèdente)

si $a_n x + 31y = 1$ admet une solution (x,y) alors $31 \mid a_n$ et donc $31 \mid a_n x$

Et puisque : $31 \mid 31y$ alors: $31 \mid a_n x + 31y$

par suite: $31 \mid 1$, ce qui est faux

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Exercice 17

1) Montrer que le nombre 2017 est premier

2) Soit a un nombre entier relatif tel que $a^5 \equiv -1[2017]$

a- Montrer que $a^{2016} \equiv 1[2017]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- Montrer que $a^{2015} \equiv -1[2017]$ puis en déduire que $a \equiv 2016[2017]$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^5 \equiv -1[2017]$

Solution

1) On a: $\sqrt{2017} \simeq 44,91$

Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{2017}$ sont :

$2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$ et 43

Aucun de ces nombres ne divise 2017

Donc 2017 est un nombre premier.

2) a- On a: $a^5 \equiv -1[2017]$

donc 2017 ne divise pas a

et puisque 2017 est un nombre premier

alors , d'après le théorème de Fermat: $a^{2017-1} \equiv 1[2017]$

C'est-à-dire: $a^{2016} \equiv 1[2017]$

b- • On a: $a^5 \equiv -1[2017]$

donc: $(a^5)^{403} \equiv (-1)^{403}[2017]$ c'est-à-dire: $a^{2015} \equiv -1[2017]$

• On a: $a^{2016} \equiv 1[2017]$ c'est-à-dire: $a^{2015} \times a \equiv 1[2017]$

Or: $a^{2015} \equiv -1[2017]$, donc : $-a \equiv 1[2017]$

D'où: $a \equiv -1[2017]$, donc: $a \equiv -1+2017[2017]$

c'est-à-dire: $a \equiv 2016[2017]$

3) D'après ce qui précède: $x^5 \equiv -1[2017] \Longrightarrow x \equiv 2016[2017]$

Réciproquement , si $x \equiv 2016[2017]$

alors: $x \equiv -1[2017]$, donc: $x^5 \equiv -1[2017]$

et par suite on a l'équivalence : $x^5 \equiv -1[2017] \Longleftrightarrow x \equiv 2016[2017]$

Donc: $S = \{2016 + 2017k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 18 juin 2017

On admet que le nombre 2017 est premier et que: $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$

1) Soit le couple (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que: $px + y^{p-1} = 2017$

a- Vérifier que: $p < 2017$

b- Montrer que p ne divise pas y

c- Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ et en déduire que p divise 2016

d- Montrer que: $p = 7$

2) Déterminer, suivant les valeurs de p , les couples (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant: $px + y^{p-1} = 2017$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) a- Soit (x,y) un élément de $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que: $px + y^{p-1} = 2017$

On a : $px - 2017 = -y^{p-1}$ et $-y^{p-1} < 0$

Donc: $px < 2017$

et puisque $x \geqslant 1$ alors : $p \leqslant px$

par suite: $p < 2017$

b- Montrons que p ne divise pas y

Supposons que: $p \mid y$

et puisque: $p \mid px$ alors: $p \mid px + y^{p-1}$

par suite: $p \mid 2017$, ce qui est faux car 2017 est un nombre premier

Donc p ne divise pas y

c- • On a: p est premier et p ne divise pas y

Donc d'après le théorème de Fermat on a: $y^{p-1} \equiv 1[p]$

• On a: $px + y^{p-1} = 2017$

Donc: $px + y^{p-1} \equiv 2017[p]$

par suite: $0 + 1 \equiv 2017[p]$

D'où: $2016 \equiv 0[p]$

Ce qui signifie que : p divise 2016

d- On a: p est premier et divise 2016 et $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Donc: $p = 2$ ou $p = 3$ ou $p = 7$

Et comme: $p \geq 5$ alors: $p = 7$

2) Considèrons dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E): $px + y^{p-1} = 2017$

où p est un nombre premier supérieur ou égal à 5

et soit S son ensemble de solutions.

D'après ce qui précède:

• Si $p \neq 7$ alors $S = \phi$

• Si $p = 7$ alors: $(E) \Leftrightarrow 7x + y^6 = 2017$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 7x = 2016 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2 \\ 7x = 1953 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ 7x = 1288 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 288 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2 \\ x = 279 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = 184 \end{cases}$$

Remarquons que : $3^6 < 2017$ et $4^6 > 2017$

Donc si $p = 7$ alors: $S = \{(288,1),(279,2),(184,3)\}$

Exercice 19 Juin 2009

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a- Vérifier que a_n est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a_n \equiv 0[3]$

2) Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$

a- Montrer que: $2^{p-1} \equiv 1[p]$, $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1[p]$

b- Montrer que p divise a_{p-2}

3) Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe un entier naturel non nul n tel que: $a_n \wedge q = q$

Solution

1) a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$2^n \equiv 0[2]$ et $6^n \equiv 0[2]$ et $3^n \equiv 1[2]$

donc : $a_n \equiv 0 + 1 + 0 - 1[2]$

C'est-à-dire: $a_n \equiv 0[2]$, donc: 2 divise a_n

par suite, a_n est un nombre pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$a_n \equiv 0[3] \Leftrightarrow 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0[3]$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n + 0 + 0 - 1 \equiv 0[3]$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n \equiv 1[3]$$
$$\Leftrightarrow n \text{ est pair}$$

Donc : $a_n \equiv 0[3]$ si et seulement si n est pair

2) a- p est un nombre premier positif différent de 2 et de 3

donc : $p \wedge 2 = 1$ et $p \wedge 3 = 1$

Alors, d'après le théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

et comme : $6 = 2 \times 3$ donc $p \wedge 6 = 1$

par suite, on a aussi: $6^{p-1} \equiv 1[p]$

b- On a: $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$

donc: $6a_{p-2} = 3.2^{p-1} + 2.3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$

et comme: $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1[p]$

donc: $6a_{p-2} \equiv 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 - 6[p]$

$$\equiv 0[p]$$

par suite, p divise $6a_{p-2}$

et comme $p \wedge 6 = 1$ donc p divise a_{p-2}

3) Soit q un entier naturel premier

• Si $q = 2$, alors: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $a_n \wedge 2 = 2$

car tous les nombres a_n sont pairs (d'après **1) a-**)

• Si $q = 3$, alors $(\forall n \in 2\mathbb{N}^*)$ $a_n \wedge 3 = 3$

car tous les nombres a_n où n est pair sont des multiples de 3 (d'après **1) b-**)

• Si $q \geq 5$, alors $a_{q-2} \wedge q = q$ car q divise a_{q-2} (d'après **2) b-**)

Donc pour tout entier naturel premier q, il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n \wedge q = q$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 20

On considère le nombre: $A = 101^{101} - 1$

1) Vérifier que 101 est un nombre premier et que 2 et 5 divisent A

2) Soit p un diviseur premier de A tel que $p \geq 7$ et soit a le plus petit entier naturel non nul qui vérifie: $101^a \equiv 1[p]$

a- Montrer que: $a \neq 1$

b- Montrer que si un nombre n de $\mathbb{N}$ vérifie $101^n \equiv 1[p]$ alors a divise n (on pourra considérer la division euclidienne de n par a)

c- Vérifier que: $101^{101} \equiv 1[p]$ et en déduire que: $a = 101$

d- Montrer que: $101^{p-1} \equiv 1[p]$ puis: $p \equiv 1[101]$

3) Vérifier que 811 est un nombre premier, est-il un diviseur de A ?

Solution

1) • Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{101}$ sont: 2 ; 3 ; 5 et 7, et aucun de ces nombres ne divise 101

donc 101 est un nombre premier

• On a: $101 \equiv 1[2]$ et $101 \equiv 1[5]$, donc: $101^{101} \equiv 1[2]$ et $101^{101} \equiv 1[5]$

par suite, 2 et 5 divisent $A = 101^{101} - 1$,

2) a- Si $a = 1$ alors: $101 \equiv 1[p]$, donc: $p \mid 100$

et puisque p est premier, alors $p = 2$ ou $p = 5$, ce qui est faux car $p \geq 7$

donc: $a \neq 1$

b- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $101^n \equiv 1[p]$

On a, dans la division euclidienne de n par a: $n = qa + r$ où $q \in \mathbb{N}$

et $0 \leqslant r < a$

donc: $101^{qa+r} \equiv 1[p]$, c'est-à-dire: $(101^a)^q . 101^r \equiv 1[p]$, donc: $101^r \equiv 1[p]$

car: $101^a \equiv 1[p]$

Si $r \neq 0$, alors: $101^r \equiv 1[p]$ et $r < a$

Cela contredit le fait que a est le plus petit entier naturel non nul tel que: $101^a \equiv 1[p]$

et par suite $r = 0$, donc: $n = qa$, d'où: a divise n

c- • Le nombre p divise A

donc: $101^{101} - 1 \equiv 0[p]$

d'où: $101^{101} \equiv 1[p]$

• Puisque: $101^{101} \equiv 1[p]$

donc d'après **2) b-** on a: a divise 101

et puisque 101 est premier et $a \neq 1$

Alors $a = 101$

d- • On a: $101^{101} \equiv 1[p]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

donc p ne divise pas 101

et comme p est premier, alors: $101^{p-1} \equiv 1[p]$ (d'après le théorème de Fermat)

• On a: $101^{p-1} \equiv 1[p]$

donc d'après 2) b): $a|(p-1)$

et puisque $a = 101$, alors: $p \equiv 1[101]$

3) • On a: $\sqrt{811} \simeq 28,48$

Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{811}$ sont:

$2;3;5;7;11;13;17;19$ et 23, et aucun de ces nombres ne divise 811

Donc 811 est un nombre premier.

• Si 811 divise A

Alors , d'après le résultat de la question 2) : $811 \equiv 1[101]$

or: $811 \equiv 3[101]$, donc: $3 \equiv 1[101]$ ce qui est faux

par suite le nombre premier 811 n'est pas un diviseur de A

Exercice 21

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $51x - 11y = 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système: $\begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ 2x \equiv 1[7] \end{cases}$

Solution

1) Déterminons une solution particulière de l'équation (E)

D'après l'algorithme d'Euclide on a:

$$51 = 4 \times 11 + 7$$
$$11 = 7 + 4$$
$$7 = 4 + 3$$
$$4 = 3 + 1$$

D'où: $1 = 4 - 3$

$= 4 - (7 - 4)$

$= 2 \times 4 - 7$

$= 2 \times (11 - 7) - 7$

$= 2 \times 11 - 3 \times 7$

$= 2 \times 11 - 3 \times (51 - 4 \times 11)$

$= -3 \times 51 + 14 \times 11$

par suite, $51 \times (-3) - 11 \times (-14) = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc: $(E) \Leftrightarrow 51x - 11y = -3 \times 51 + 14 \times 11$

$\Leftrightarrow 51(x+3) = 11(y+14)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 51(x+3) = 11(y+14) \\ 11 \mid 51(x+3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 51(x+3) = 11(y+14)$ *et* $11 \mid (x+3)$ $(car\ 51 \wedge 11 = 1)$

$\Leftrightarrow 51(x+3) = 11(y+14)$ *et* $x+3 = 11k$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = 11k - 3$ *et* $y = 51k - 14$ $(k \in \mathbb{Z})$

Conclusion:

L'ensemble de solutions de l'équation (E) est: $S = \{(11k-3, 51k-14)/k \in \mathbb{Z}\}$

2) On a:

$\begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ 2x \equiv 1[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ 2x \equiv 8[7] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$ (car $2 \wedge 7 = 1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(7k+4) \equiv 7[11] \\ x = 7k+4 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k \equiv 9[11] \\ x = 7k+4 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k \equiv 20[11] \\ x = 7k+4 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \\ k \equiv 10[11] \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ (car : $2 \wedge 11 = 1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k+4 \\ k \equiv 11\alpha + 10 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = 77\alpha + 74 (\alpha \in \mathbb{Z})$

Donc l'ensemble de solutions du système $\begin{cases} 5x \equiv 7[11] \\ 2x \equiv 1[7] \end{cases}$ est $S = \{77\alpha + 74/\alpha \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 22

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$

On pose: $A_p = \{1, 2, ..., p-1\}$

1) Soit a un élément de A_p

a- Montrer que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$

b- Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p

Montrer que r est la solution unique de l'équation $ax \equiv 1[p]$ dans A_p

2) a- Résoudre dans A_{71} l'équation $3x \equiv 1[71]$ et en déduire que: $3^{69} \equiv 24[71]$

ProfSalmi profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

b- Montrer que le nombre: $(3^{69}+4^{69}+6^{69}+8^{69}+9^{69})$ est un multiple de 71

Solution

1) a- Puisque $a \in A_p$, alors: $a \wedge p = 1$ (car p est premier)
donc, d'après le théorème de Fermat: $a^{p-1} \equiv 1[p]$
C'est-à-dire: $a \times a^{p-2} \equiv 1[p]$
Donc, a^{p-2} est en effet une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$
b- On a: $a^{p-2} \equiv r[p]$
donc: $a^{p-1} \equiv ar[p]$, or: $a^{p-1} \equiv 1[p]$, donc: $ar \equiv 1[p]$
et par suite, r est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$
et $r \in A$ car: $1 \leq r \leq p-1$
Supposons qu'il existe r' de A_p tel que: $ar' \equiv 1[p]$
donc: $a(r-r') \equiv 0[p]$, d'où: $p \mid a(r-r')$
or: $p \wedge a = 1$ donc: $p \mid (r-r')$
et puisque: $-p < r-r' < p$ car $1 \leqslant r \leqslant p-1$ et $1 \leqslant r' \leqslant p-1$
alors: $r-r' = 0$, par suite: $r = r'$
(0 est le seul multiple de p compris strictement entre $-p$ et p)
Donc r est l'unique solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$ dans A_p
2) a- On a: $3x \equiv 1[71] \iff 3x \equiv 72[71]$
$\iff x \equiv 24[71]$ (car $3 \wedge 71 = 1$)
et puisque $24 \in A_{71}$ alors 24 est la solution de l'équation $3x \equiv 1[71]$ dans A_{71}
et d'après le résultat de la question précèdente , 24 est le reste de la division euclidienne de 3^{69} par 71
c'est-à-dire: $3^{69} \equiv 24[71]$
b- On obtient de même (dans le contexte de l'exercice):
$4^{69} \equiv 18[71]$, $6^{69} \equiv 12[71]$; $8^{69} \equiv 9[71]$ et $9^{69} \equiv 8[71]$
Donc: $3^{69}+4^{69}+6^{69}+8^{69}+9^{69} \equiv 71[71]$
$\equiv 0[71]$
par suite, le nombre $(3^{69}+4^{69}+6^{69}+8^{69}+9^{69})$ est un multiple de 71

Exercice 23

1- Soient n un nombre entier naturel non nul et x un nombre entier naturel tels que: $(x+1)^n - x^n = n$
Soit p le plus petit diviseur premier positif de n
a- Vérifier que : $(x+1)^n \equiv x^n[p]$
b- Montrer que : $p \wedge x = 1$ et $p \wedge (x+1) = 1$
c- En déduire que: $x^{p-1} \equiv 1[p]$ et $(x+1)^{p-1} \equiv 1[p]$
d- Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{N}^2$ tel que $nu-(p-1)v = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

e- En déduire que $x+1 \equiv x[p]$

2) En déduire de ce qui précède que l'équation $(x+1)^n - x^n = n$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$

Solution

1) a- On a : $p|n$, donc : $p|((x+1)^n - x^n)$ car $n = (x+1)^n - x^n$

par suite : $(x+1)^n \equiv x^n[p]$

b- Supposons que: $p \wedge x \neq 1$

donc : $p|x$ car p est premier

par suite, $p|x^n$

et on a: $p|n$, donc $p|n+x^n$ et par suite : $p|(x+1)^n$

d'où : $p|(x+1)$ car p est premier

Or : $p|x$ donc : $p|(x+1)-x$

C'est-à-dire $p|1$ ce qui est faux (p est premier)

Donc $p \wedge x = 1$

Or : $(x+1)^n \equiv x^n[p]$, donc : $(x+1)^n \not\equiv 0[p]$ car $x^n \not\equiv 0[p]$

C'est-à-dire p ne divise pas $(x+1)^n$

donc p ne divise pas $(x+1)$ et par suite $p \wedge (x+1) = 1$ car p est premier

c- Le nombre p est premier et ne divise ni x ni $(x+1)$

donc d'après le théorème de Fermat: $x^{p-1} \equiv 1[p]$ et $(x+1)^{p-1} \equiv 1[p]$

d- Si $n \wedge (p-1) \neq 1$

alors il existe un nombre premier q positif divisant n et $(p-1)$

On a: $q \leq p-1$, donc: $q < p$ et $q|n$

Ce qui contredit le fait que p est le plus petit diviseur premier positif de n

Donc : $n \wedge (p-1) = 1$

et par suite : $(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2) \quad \alpha n + \beta(p-1) = 1$

α et β ne sont pas de même signe car n et $p-1$ sont strictement positifs

donc : $(\exists (u,v) \in \mathbb{N}^2) \quad nu - (p-1)v = 1$

e- On a $nu = 1 + (p-1)v$ où $(u,v) \in \mathbb{N}^2$

Or : $(x+1)^n \equiv x^n[p]$

donc : $(x+1)^{nu} \equiv x^{nu}[p] \quad (u \in \mathbb{N})$

C'est-à-dire: $(x+1)^{1+(p-1)v} \equiv x^{1+(p-1)v}[p]$

donc: $((x+1)^{p-1})^v \cdot (x+1) \equiv x \cdot (x^{p-1})^v[p] \quad (v \in \mathbb{N})$

Or: $(x+1)^{p-1} \equiv 1[p]$ et $x^{p-1} \equiv 1[p]$

donc : $x+1 \equiv x[p]$

2) On considère l'équation $(E) : (x \in \mathbb{N}) \quad (x+1)^n - x^n = n$

Si l'équation (E) admet une solution x dans $\mathbb{N}$

alors : $x+1 \equiv x[p]$ où p est le plus petit diviseur positif premier de n

(d'après ce qui précède)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite, $p|(x+1)-x$ c'est-à-dire : $p|1$
Ce qui est faux car p est premier
Donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$

Exercice 24

Soit n un nombre entier naturel non nul
On pose $a = 11n+3$ et $b = 13n-1$
1) Montrer que $a \wedge b$ divise 50
2) a- Déterminer une solution particulière de l'équation $50x - 11y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$
b- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 50x - 11y = 3$
c- En déduire les valeurs de n pour lesquelles $a \wedge b = 50$
3) a- Montrer que: $b^{11} \equiv b[11]$ et $a^{10} \equiv 1[11]$
b- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $b \equiv 0[11]$
c- En déduire que si $n \not\equiv 6[11]$ alors $((13n-1)(11n+3))^{2010} \equiv 1[11]$

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d = a \wedge b$
On a: $d|a$ et $d|b$
C'est-à-dire: $d|(11n+3)$ et $d|(13n-1)$
donc: $d|13(11n+3)-11(13n-1)$
C'est-à-dire : $d|50$
2) a- On pose : $50 = \alpha$ et $11 = \beta$
On a: $\alpha = 4\beta + 6$ et $\beta = 6+5$ et $6 = 5+1$
donc : $6 = \alpha - 4\beta$ et $5 = \beta - 6 = 5\beta - \alpha$
et : $1 = 6-5 = (\alpha - 4\beta) - (5\beta - \alpha)$
et par suite : $2\alpha - 9\beta = 1$
C'est-à-dire : $50 \times 2 - 11 \times 9 = 1$
Donc le couple $(2;9)$ est une solution de l'équation $50x - 11y = 1$
b- On a: $50 \times 2 - 11 \times 9 = 1$, donc: $50 \times 6 - 11 \times 27 = 3$
par suite, $(E) \Leftrightarrow 50x - 11y = 50 \times 6 - 11 \times 27$

$$\Leftrightarrow 50(x-6) = 11(y-27)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 50(x-6) = 11(y-27) \\ 11|50(x-6) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 50(x-6) = 11(y-27) \\ 11|x-6 \ (car\ 11 \wedge 50 = 1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = 11k\ (k \in \mathbb{Z}) \\ 50(x-6) = 11(y-27) \end{cases}$$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6=11k & (k\in\mathbb{Z}) \\ y-27=50k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6+11k & (k\in\mathbb{Z}) \\ y=27+50k \end{cases}$$

Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $50x-11y=3$ est

$S=\{(6+11k,27+50k)/k\in\mathbb{Z}\}$

c- On a: $(a\wedge b)|50$ d'après 1)

Donc : $a\wedge b=50 \Leftrightarrow 50|a$ et $50|b$

et on a: $50|a \Leftrightarrow (\exists x\in\mathbb{N})\ a=50x$

$\Leftrightarrow (\exists x\in\mathbb{N})\ 11n+3=50x$

$\Leftrightarrow (\exists x\in\mathbb{N})\ 50x-11n=3$

$\Longrightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ n=27+50k$ (d'après le résultat de la question précèdente)

et si $n=27+50k$ où $k\in\mathbb{N}$

alors: $a=11(27+50k)+3=50(6+11k)$

et $b=13(27+50k)-1=50(7+13k)$

donc: $50|a$ et $50|b$

Les valeurs de n pour lesquelles $a\wedge b=50$ sont $27+50k$ où $k\in\mathbb{N}$

3) a- Le nombre 11 est premier

donc d'après le théorème de Fermat: $b^{11}\equiv b[11]$ et $a^{11}\equiv a[11]$

On a: $a=11n+3$, donc $a\equiv 3[11]$

et par suite 11 ne divise pas a

Donc: $a^{10}\equiv 1[11]$

b- On a: $b\equiv 0[11] \Leftrightarrow 13n-1\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow 2n\equiv 1[11]$

$\Leftrightarrow 2n\equiv 12[11]$

$\Leftrightarrow n\equiv 6[11]$ $(car\ 2\wedge 11=1)$

$\Leftrightarrow n=11k+6\ (k\in\mathbb{N})$

c- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\not\equiv 6[11]$

donc: $b\not\equiv 0[11]$ c'est-à-dire 11 ne divise pas b

Or 11 est premier, donc: $b^{10}\equiv 1[11]$

On a aussi: $a^{10}\equiv 1[11]$

donc: $(ab)^{10}\equiv 1[11]$ et par suite: $(ab)^{2010}\equiv 1[11]$

C'est-à-dire: $((13n-1)(11n+3))^{2010}\equiv 1[11]$

profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 25 juin 2007

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 195x - 232y = 1$

a- Déterminer $232 \wedge 195$

b- Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (E) est:

$S = \{(163 + 232k, 137 + 195k)/k \in \mathbb{Z}\}$

c- Déterminer l'unique entier naturel d qui vérifie:

$0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1[232]$

2) Montrer que 233 est un nombre premier.

3) Soit A l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 232

On considère l'application f de A vers A définie par: pour tout a de A, l'entier $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{195} par 233

a- Montrer que: $(\forall a \in A - \{0\})\ \ a^{232} \equiv 1[233]$

b- Montrer que pour tout (a,b) de A^2, si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$

c- Soit $(a,b) \in A^2$ tel que $f(a) = b$, Déterminer a en fonction de b

d- En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Solution

1) a- Décomposons les nombres 232 et 195 en produit de facteur premiers:

On a: $232 = 2^3 \times 29$ et $195 = 3 \times 5 \times 13$

par suite: $232 \wedge 195 = 1$

b- • On a: $195 \times 163 - 232 \times 137 = 31785 - 31784 = 1$

Donc le couple $(163, 137)$ est une solution de l'équation (E)

• On a: $(E) \Leftrightarrow 195x - 232y = 195 \times 163 - 232 \times 137$

$$\Leftrightarrow 195(x - 163) = 232(y - 137)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 195(x - 163) = 232(y - 137) \\ 195 \mid 232(y - 137) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 195(x - 163) = 232(y - 137) \\ 195 \mid (y - 137) \end{cases} \quad (car\ 195 \wedge 232 = 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 163 = 232k \\ y - 137 = 195k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 163 + 232k \\ y = 137 + 195k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est:

$S = \{(163 + 232k, 137 + 195k)/k \in \mathbb{Z}\}$

c- On a: $195d \equiv 1[232] \Leftrightarrow (\exists d' \in \mathbb{Z})\ 195d - 232d' = 1$

Et d'après le résultat de la question précèdente on a: $d = 163 + 232k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Et puisque: $0 \leq d \leq 232$ alors: $0 \leq 163 + 232k \leq 232$

profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite: $\frac{-163}{232} \leq k \leq \frac{69}{232}$

et puisque $k \in \mathbb{Z}$ alors: $k = 0$

par suite: $d = 163$

2) On a: $\sqrt{233} \simeq 15,26$

et les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{233}$ sont $2, 3, 5, 7, 11$ et 13

Et puisque aucun de ces nombres ne divise 233

alors 233 est un nombre premier.

3) a- Soit a un élément de $A - \{0\}$

On a: 233 est un nombre premier et a n'est pas divisible par 233

Donc: $a^{232} \equiv 1[233]$ (d'après le théorème de Fermat)

b- Soient a et b deux éléments de A tels que $f(a) = f(b)$

On a: $a^{195} \equiv f(a)[233]$ et $b^{195} \equiv f(b)[233]$

Donc: $a^{195} \equiv b^{195}\,[233]$ $(*)$

Et puisque le couple $(163, 137)$ est une solution de l'équation (E)

alors: $195 \times 163 = 1 + 232 \times 137$

par suite: $a^{195\times 163} \equiv b^{195\times 163}\,[233]$ (d'après $(*)$)

C'est-à-dire: $a \times (a^{232})^{137} \equiv b \times (b^{232})^{137}\,[233]$

Et puisque: $a^{232} \equiv 1[233]$ et $b^{232} \equiv 1\ [233]$

alors: $a \equiv b\ [233]$

C'est-à-dire: $a - b \equiv 0\ [233]$ c'est-à-dire: $233 \mid (a - b)$

et puisque : $0 \leq a \leq 232$ et $0 \leq b \leq 232$

alors: $-232 \leq a - b \leq 232$

Par suite: $a - b = 0$ d'où: $a = b$

(0 est le seul multiple de 233 compris entre -232 et 232)

Conclusion: $(\forall (a,b) \in A^2) \quad f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

c- Soient a et b deux éléments de A tels que $f(a) = b$

Donc: $a^{195} \equiv b\,[233]$

Et puisque: $195 \times 163 = 1 + 232 \times 137$

alors: $(a^{195})^{163} \equiv b^{163}\ [233]$

par suite: $a \times (a^{232})^{137} \equiv b^{163}\ [233]$

Et puisque: $a^{232} \equiv 1[233]$

alors: $a \equiv b^{163}\ [233]$

Donc a est le reste de la division euclidienne de b^{163} par 233

d- D'après le résultat de la question **(3) b-**), on déduit que f est injective

et d'après le résultat de la question **(3) c-**), on déduit que f est surjective

Par suite, f est bijective de A vers A et sa bijection réciproque f^{-1} est définie de A vers A par:

pour tout b de A , l'entier $f^{-1}(b)$ est le reste de la division euclidienne de b^{163} par 233

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 26 juin 2008

I. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 35u - 96v = 1$

1) Vérifier que le couple $(11;4)$ est une solution de l'équation (E)

2) En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E)

II. On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(F): x^{35} \equiv 2[97]$

1) Soit x une solution de l'équation (F)

a- Montrer que 97 est un nombre premier et que : $x \wedge 97 = 1$

b- Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$

c- Montrer que: $x \equiv 2^{11}[97]$

2) Montrer que si un entier naturel x vérifie $x \equiv 2^{11}[97]$ alors x est une solution de l'équation (F)

3) Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (F) est $\{11 + 97k / k \in \mathbb{N}\}$

Solution

I. 1) Vérifier que: $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

Remarquer alors que: $35 \wedge 96 = 1$ (d'après le théorème de Bezout)

2) On a: $(E) \Longleftrightarrow 35u - 96v = 35 \times 11 - 96 \times 4$

$$\Longleftrightarrow 35(u-11) = 96(v-4)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 35(u-11) = 96(v-4) \\ 35 \mid 96(v-4) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 35(u-11) = 96(v-4) \\ 35 \mid v-4 \end{cases} \quad (car : 35 \wedge 96 = 1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u - 11 = 96k \\ v - 4 = 35k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = 11 + 96k \\ v = 4 + 35k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est:

$S = \{(11 + 96k, 4 + 35k) / k \in \mathbb{Z}\}$

II. 1) a- • On a: $\sqrt{97} \simeq 9,8$

et les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{97}$ sont $2, 3, 5$ et 7

Et puisque aucun de ces nombres ne divise 97

alors 97 est un nombre premier.

• Soit x une solution de l'équation (F)

On a: $x^{35} \equiv 2[97]$

Donc 97 ne divise pas x (car 97 ne divise pas x^{35})

Et puisque 97 est premier alors: $x \wedge 97 = 1$

b- On a: 97 est un nombre premier et 97 ne divise pas x

Donc : $x^{96} \equiv 1[97]$ (d'après le théorème de Fermat)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

c- On a: $x^{96} \equiv 1[97]$, donc: $(x^{96})^4 \equiv 1[97]$ c'est-à-dire: $x^{96\times 4} \equiv 1[97]$
donc: $x^{96\times 4}x \equiv x[97]$, c'est-à-dire: $x^{96\times 4+1} \equiv x[97]$
Or: $35\times 11 - 96\times 4 = 1$
Donc: $x^{35\times 11} \equiv x[97]$
C'est-à-dire: $x \equiv (x^{35})^{11}[97]$
Par suite: $x \equiv 2^{11}[97]$ $(car\ x^{35} \equiv 2[97])$

2) Soit x un élément de $\mathbb{N}$ qui vérifie $x \equiv 2^{11}\ [97]$
Donc: $x^{35} \equiv 2^{11\times 35}[97]$
C'est-à-dire: $x^{35} \equiv 2^{1+96\times 4}[97]$
par suite: $x^{35} \equiv (2^{96})^4 \times 2[97]$
et puisque 97 est un nombre premier et $2 \wedge 97 = 1$
Alors: $2^{96} \equiv 1[97]$
Par suite: $x^{35} \equiv 2[97]$
Donc, x est bien une solution de l'équation (F)

3) Soit S l'ensemble de solutions de l'équation (F)
D'après ce qui précède, on a :

$$x \in (F) \Leftrightarrow x \equiv 2^{11}\ [97]$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 2048[97]$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 11\ \ [97]\ (car\ 2048 = 21\times 97 + 11)$$
$$\Leftrightarrow x = 11 + 97k\ (k \in \mathbb{N})$$

Donc: $S = \{11 + 97k\ /\ k \in \mathbb{N}\}$

Exercice 27 juin 2016

Première partie:

Soit (a,b) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$

1) Montrer que: $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (Remarquer que: $171 = 3\times 57$)

2) Montrer que: 173 divise a si et seulement si 173 divise b

3) On suppose que 173 divise a, montrer que 173 divise $(a+b)$

4) On suppose que 173 ne divise pas a

a- En utilisant le théorème de Fermat, montrer que: $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

b- Montrer que: $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$

c- En déduire que 173 divise $(a+b)$

Deuxième partie:

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante: (E): $x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose: $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que: $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

Première partie:

1) On a: $173|(a^3+b^3)$, donc: $a^3 \equiv -b^3\,[173]$

Par suite: $(a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57}\,[173]$

C'est - à - dire: $a^{171} \equiv -b^{171}\,[173]$

2) On a:

$173|a \Leftrightarrow a \equiv 0\,[173]$

$\Leftrightarrow a^{171} \equiv 0\,[173]$ ($a^{171} \equiv 0[173] \Rightarrow a \equiv 0[173]$, car 173 est un nombre premier)

$\Leftrightarrow -b^{171} \equiv 0\,[173]$ (car $a^{171} = -b^{171}\,[173]$)

$\Leftrightarrow b^{171} \equiv 0\,[173]$

$\Leftrightarrow 173|b^{171}$

$\Leftrightarrow 173|b$ (car 173 est un nombre premier)

3) On suppose que: $173|a$

Donc: $173|b$ (d'après le résultat de la question précèdente)

par suite: $173|a+b$

4) a- On suppose que 173 ne divise pas a

et puisque 173 est un nombre premier

alors : $a^{172} \equiv 1\,[173]$ (d'après le théorème de Fermat)

Et puisque 173 ne divise pas a alors 173 ne divise pas b

(d'après le résultat de la question **2**)

par suite, $b^{172} \equiv 1\,[173]$ (d'après le théorème de Fermat)

Donc: $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$

b- On a: $a^{171}(a+b) = a^{172} + a^{171}b$

Et puisque: $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$

alors: $a^{172} + a^{171}b \equiv b^{172} + a^{171}b\,[173]$

$\equiv b(b^{171} + a^{171})\,[173]$

$\equiv b \times 0\,[173]$ (d'après le résultat de la question 1)

$\equiv 0\,[173]$

par suite: $a^{171}(a+b) \equiv 0\,[173]$

c- On a: $173|a^{171}(a+b)$ (d'après le résultat de la question précèdente)

et on a: 173 est un nombre premier et 173 ne divise pas a

Donc: $173 \wedge a = 1$, par suite : $173 \wedge a^{171} = 1$

D'où: $173|a+b$ (d'après le théorème de Gauss)

Deuxième partie:

1) • Remarquons tout d'abord que:

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 173k(x^2 - xy + y^2)$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

• On a: $k(x-y)^2+(k-1)xy = k(x-y)^2+kxy-xy$

$= k(x^2-2xy+y^2+xy)-xy = k(x^2-xy+y^2)-xy$

$= \frac{x^3+y^3}{173}-xy = \frac{173(xy+1)}{173}-xy = xy+1-xy$

Donc: $k(x-y)^2+(k-1)xy = 1$

2) On a: $k(x-y)^2+(k-1)xy = 1$

Donc: $\begin{cases} k(x-y)^2 = 0 \\ (k-1)xy = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k(x-y)^2 = 1 \\ (k-1)xy = 0 \end{cases}$ (car $k(x-y)^2 \in \mathbb{N}$ et $(k-1)xy \in \mathbb{N}$)

par suite: $\begin{cases} k = 0 \text{ ou } x = y \\ k-1 = 1 \text{ et } x = 1 \text{ et } y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k = 1 \text{ et } (x-y)^2 = 1 \\ k-1 = 0 \end{cases}$

Et puisque le système $\begin{cases} k = 0 \text{ ou } x = y \\ k-1 = 1 \text{ et } x = 1 \text{ et } y = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution car $x+y = 173k$

alors: $\begin{cases} k = 1 \text{ et } (x-y)^2 = 1 \\ k-1 = 0 \end{cases}$, donc: $\begin{cases} k = 1 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases}$

par suite: $\begin{cases} x+y = 173 \\ x-y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y = 173 \\ x-y = -1 \end{cases}$

D'où: $\begin{cases} x = 87 \\ y = 86 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 86 \\ y = 87 \end{cases}$

Et réciproquement, vérifier que les couples $(87,86)$ et $(86,87)$ sont des solutions de l'équation (E)

Conclusion:

L'ensemble de solutions de l'équation (E) est: $S = \{(87;86),(86;87)\}$

Exercice 28 juin 2015

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1) Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun de x et 2015

a- Montrer que d divise 1436

b- En déduire que : $x \wedge 2015 = 1$

3) a- En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $x^{1440} \equiv 1[5]$, $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (Remarquer que: $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

b- Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Solution

1) Comme : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$
Alors, d'après le théorème de Bezout : $1436 \wedge 2015 = 1$
2) a- Soit d un diviseur commun de x et 2015
puisque : $x^{1439} \equiv 1436\,[2015]$
alors : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x^{1439} = 2015k + 1436$
et comme : $d \mid x$ et $d \mid 2015$
alors : $d \mid x^{1439} - 2015k$
C'est-à-dire : $d \mid 1436$
b- On pose : $\alpha = x \wedge 2015$
α est un diviseur commun de x et 2015
Donc d'après la question précèdente : α divise 1436
par suite, $\alpha \mid 2015$ et $\alpha \mid 1436$
D'où : $\alpha \mid (2015 \wedge 1436)$
C'est-à-dire : $\alpha \mid 1$
Donc : $\alpha = 1$ et par suite : $x \wedge 2015 = 1$
3) a- • Le nombre 5 est premier et ne divise pas x
car $x \wedge 2015 = 1$ et 5 divise 2015
Donc, d'après le théorème de Fermat : $x^4 \equiv 1\,[5]$
par suite, $(x^4)^{380} \equiv 1\,[5]$ c'est-à-dire : $x^{1440} \equiv 1\,[5]$
• Montrer de même que : $x^{1440} \equiv 1\,[13]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[31]$
b- • On a : $x^{1440} \equiv 1\,[5]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[13]$
donc : $5 \mid (x^{1440} - 1)$ et $13 \mid (x^{1440} - 1)$
et comme : $5 \wedge 13 = 1$ alors : $5 \times 13 \mid (x^{1440} - 1)$
c'est-à-dire : $65 \mid (x^{1440} - 1)$
d'où : $x^{1440} \equiv 1\,[65]$
• On a : $65 \mid (x^{1440} - 1)$ et $31 \mid (x^{1440} - 1)$ et $65 \wedge 31 = 1$
Donc : $65 \times 31 \mid (x^{1440} - 1)$
c'est-à-dire : $2015 \mid (x^{1440} - 1)$, d'où : $x^{1440} \equiv 1\,[2015]$
4) On a : $x^{1439} \equiv 1436\,[2015]$
Donc : $1051.x^{1439} \equiv 1051 \times 1436\,[2015]$
C'est-à-dire : $1051.x^{1439} \equiv 1 + 2015 \times 749\,[2015]$ (car $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$)

Donc : $1051.x^{1439} \equiv 1\,[2015]$, d'où : $1051x^{1440} \equiv x\,[2015]$
Or : $x^{1440} \equiv 1\,[2015]$, donc : $1051 \equiv x\,[2015]$

Exercice 29 juillet 2012

1) a- Vérifier que 503 est un nombre premier.
b- Montrer que $7^{502} \equiv 1\,[503]$ et en déduire que : $7^{2008} \equiv 1\,[503]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $49x-6y=1$
Sachant que $(1;8)$ est une solution de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
3) On pose : $N=1+7+7^2+\cdots+7^{2007}$
a- Montrer que le couple $(7^{2006},N)$ est une solution de l'équation (E)
b- Montrer que : $N\equiv 0[4]$ et $N\equiv 0[503]$
c- En déduire que N est divisible par 2012

Solution

1) a- On a : $\sqrt{503}\simeq 22,43$
Les nombres premiers positifs inférieurs à $\sqrt{503}$ sont $2,3,5,7,11,13,17$ et 19,
et aucun de ces nombres ne divise 503
Donc 503 est un nombre premier.
b- • Le nombre 503 est premier et ne divise pas 7
Donc, d'après le théorème de Fermat : $7^{502}\equiv 1[503]$
• On a : $7^{502}\equiv 1[503]$
Donc : $(7^{502})^4\equiv 1[503]$
C'est-à-dire: $7^{2008}\equiv 1[503]$
2) Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$
On a : $49x-6y=1 \iff 49x-6y=49\times 1-6\times 8$
$\iff 49(x-1)=6(y-8)$
$\iff \begin{cases}49(x-1)=6(y-8)\\ 6\,|\,49(x-1)\end{cases}$
$\iff \begin{cases}49(x-1)=6(y-8)\\ 6\,|\,(x-1)\end{cases}$ (car $6\wedge 49=1$)
$\iff \begin{cases}49\times 6k=6(y-8)\\ x-1=6k\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$
$\iff \begin{cases}x=1+6k\\ y=8+49k\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$

Donc : $S=\{(1+6k\,,8+49k)/k\in\mathbb{Z}\}$
3) a- On a : $49\times 7^{2006}-6N=7^{2008}-6N$
Or : $N=1\times\dfrac{7^{2008}-1}{7-1}=\dfrac{7^{2008}-1}{6}$
Donc : $6N=7^{2008}-1$
Par suite, $49\times 7^{2006}-6N=1$
D'où : $(7^{2006},N)$ est une solution de l'équation (E)
b- • On a : $N\equiv(1+7)+(7^2+7^3)+\cdots+(7^{2006}+7^{2007})[4]$
$\equiv(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)[4]$ (car $7\equiv -1[4]$)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $N \equiv 0[4]$

Autre méthode :

On a : $6N = 7^{2008} - 1$ et $7 \equiv -1[8]$

Donc : $6N \equiv 0[8]$

Par suite, $3N \equiv 0[4]$ (si $pa \equiv pb[pn]$ alors $a \equiv b[n]$)

et puisque : $3 \wedge 4 = 1$

Alors : $N \equiv 0[4]$

• On a: $6N = 7^{2008} - 1$

et comme : $7^{2008} \equiv 1[503]$ alors : $6N \equiv 0[503]$

C'est-à-dire : $503 \mid 6N$

et comme : $503 \wedge 6 = 1$, donc d'après le théorème de Gauss : $503 \mid N$

Par suite : $N \equiv 0[503]$

c- On a : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

Donc : $4 \mid N$ et $503 \mid N$

et comme : $4 \wedge 503 = 1$, alors : $4 \times 503 \mid N$ c'est-à-dire : $2012 \mid N$

Exercice 30

1) Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 3$ et soit x un nombre entier relatif.

Montrer que si $x \equiv 1[p]$ alors : $x^p \equiv 1[p^2]$

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que : $a \wedge 4225 = 1$

a- Montrer que : $a^4 \equiv 1[5]$ et $a^{12} \equiv 1[13]$

b- Déterminer : $20 \vee 156$ puis en déduire que : $a^{780} \equiv 1[4225]$

Solution

1) On a : $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$

Or : $x \equiv 1[p]$, donc : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ x - 1 = kp$ et $(\forall i \in \{1, \ldots, p-1\})\ x^i \equiv 1[p]$

Donc : $(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1) \equiv p[p]$,

par suite, $(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1) \equiv 0[p]$

D'où : $(\exists k' \in \mathbb{Z})\ x^{p-1} + \cdots + x + 1 = k'p$

Donc : $x^p - 1 = kp.k'p = kk'p^2$

Par suite : $x^p \equiv 1[p^2]$

2) a- On a : $a \wedge 4225 = 1$

et comme : $4225 = 5^2 \times 13^2$

Alors : $a \wedge 5 = 1$ et $a \wedge 13 = 1$

et puisque : 5 et 13 sont des nombres premiers

alors, d'après le théorème de Fermat : $a^4 \equiv 1[5]$ et $a^{12} \equiv 1[13]$

b- • On a : $20 = 2^2 \times 5$ et $156 = 2^2 \times 3 \times 13$

Donc : $20 \vee 156 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13 = 780$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

• On a : $a^4 \equiv 1[5]$, donc : $(a^4)^5 \equiv 1[25]$ (d'après 1) c'est-à-dire : $a^{20} \equiv 1[25]$
et $a^{12} \equiv 1[13]$, donc : $(a^{12})^{13} \equiv 1[169]$ c'est-à-dire : $a^{156} \equiv 1[169]$
Donc : $a^{780} \equiv 1[25]$ et $a^{780} \equiv 1[169]$ (on a : $20 \times 39 = 780$ et $156 \times 5 = 780$)
C'est-à-dire : $25 \mid (a^{780} - 1)$ et $169 \mid (a^{780} - 1)$
et puisque : $25 \wedge 169 = 1$, alors : $(25 \times 169) \mid (a^{780} - 1)$
c'est-à-dire : $4225 \mid (a^{780} - 1)$ et par suite : $a^{780} \equiv 1[4225]$

Exercice 31 juin 2013

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers naturels n supérieurs à 1 qui vérifient la propriété: (R): $3^n - 2^n \equiv 0[n]$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ tel que n vérifie la propriété (R) et soit p le plus petit diviseur premier positif de n

a- Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ et en déduire que $p \geq 5$

b- Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

c- Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

d- Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $(p-1)$ $(q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < p-1$ et $a = q(p-1)+r)$

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

2) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel n supérieur à 1 qui vérifie la propriété (R)

Solution

1) a- * On a : $3^n - 2^n \equiv 0[n]$
Donc : n divise $(3^n - 2^n)$
et comme p divise n, donc p divise $(3^n - 2^n)$, par suite, $3^n - 2^n \equiv 0[p]$
* Si $p = 2$
Alors : $3^n \equiv 0[2]$ car : $3^n - 2^n \equiv 0[2]$ et $2^n \equiv 0[2]$
C'est-à-dire : $1 \equiv 0[2]$, ce qui est faux, donc : $p \neq 2$
* Si $p = 3$
alors : $-2^n \equiv 0[3]$ car : $3^n - 2^n \equiv 0[3]$ et $3^n \equiv 0[3]$
C'est-à-dire : $3 \mid 2^n$, donc : $3 \mid 2$ car 3 est premier, ce qui est faux, donc : $p \neq 3$
* p est un nombre premier positif tel que : $p \neq 2$ et $p \neq 3$
Donc : $p \geq 5$

b- p est un nombre premier ne divise ni 2 ni 3 (car $p \geq 5$)
Donc d'après le théorème de Fermat : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

c- Montrons que : $n \wedge (p-1) = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Si n et $(p-1)$ ne sont pas premiers entre eux
Alors n et $(p-1)$ admettent un diviseur premier positif commun α
Donc n admet un diviseur premier positif α vérifiant $\alpha \leq p-1 < p$
(car $\alpha | (p-1)$)
Ce qui contredit le fait que p est le plus petit diviseur premier positif de n
et par suite : $n \wedge (p-1) = 1$
Donc, d'après le théorème de Bezout : $(\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\ an - b(p-1) = 1$
d- On a : $a = q(p-1) + r$ où $0 \leq r < p-1$
Donc : $an = nq(p-1) + nr$
Or : $an = 1 + b(p-1)$, donc : $nr = (b-nq)(p-1) + 1$
Le nombre $(b-nq)$ est entier, montrons qu'il est positif.
Si : $b - nq < 0$ alors : $b - nq \leq -1$, par suite, $(b-nq)(p-1) \leq 1-p$
D'où : $(b-nq)(p-1) + 1 \leq 2-p$ c'est-à-dire : $nr \leq 2-p$
Or : $p \geq 5$, donc : $2-p < 0$, par suite $nr < 0$ ce qui est faux (car $r \geq 0$ et $n \geq 2$)
Donc le nombre $k = b - nq$ est un entier naturel, et on a : $rn = 1 + k(p-1)$
2) Supposons qu'il existe un entier n supérieur à 1 tel que : $3^n \equiv 2^n [n]$
Donc il existe (r,k) de $\mathbb{N}^2$ tel que : $rn = 1 + k(p-1)$ où p est le plus petit diviseur premier positif de n et $p \geq 5$
Par suite, $3^{rn} \equiv 2^{rn} [p]$
C'est-à-dire : $3^{1+k(p-1)} \equiv 2^{1+k(p-1)} [p]$
C'est-à-dire : $3 \times (3^{p-1})^k \equiv 2 \times (2^{p-1})^k [p]$
Or : $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $2^{p-1} \equiv 1 [p]$
Donc : $3 \equiv 2 [p]$
D'où : p divise 1, ce qui est faux
Donc : il n'existe pas de tel entier n

Exercice 32 Juin 2012

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$
1) a- Déterminer $143 \wedge 195$ et en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$
b- Sachant que $(-1;-1)$ est une solution de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 5 = 1$
Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ n^{4k} \equiv 1 [5]$
3) Soit $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x \equiv y [4]$
a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n^x \equiv n^y [5]$
b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n^x \equiv n^y [10]$
4) Soient x et y deux entiers naturels tels que le couple (x,y) est une solution de l'équation (E)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimale.

Solution

1) a- • $195 = 143 + 52$

$143 = 2 \times 52 + 39$

$52 = 39 + 13$

$39 = 3 \times 13 + 0$

Le dernier reste non nul est 13

Donc : $195 \wedge 143 = 13$

Autrement, on a : $195 = 13 \times 5 \times 3$ et $143 = 13 \times 11$

Donc : $195 \wedge 143 = 13$

• L'équation (E) est : $143x - 195y = 52$

et on a : $143 \wedge 195 = 13$ et 13 divise 52

Donc l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

b- On a : $(E) \Leftrightarrow 11x - 15y = 4$

$\Leftrightarrow 11x - 15y = 11 \times (-1) - 15 \times (-1)$

$\Leftrightarrow 11(x+1) = 15(y-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(x+1) = 15(y-1) \\ 11 \mid (y-1) \end{cases}$ (car $11 \wedge 15 = 1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(x+1) = 15 \times 11k \\ y - 1 = 11k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15k - 1 \\ y = 11k + 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Donc : $S = \{(15k - 1, 11k + 1) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 5 = 1$

Le nombre 5 est premier et $n \wedge 5 = 1$

Donc, d'après le théorème de Fermat : $n^4 \equiv 1[5]$

par suite, $(\forall k \in \mathbb{N})\ (n^4)^k \equiv 1[5]$

C'est-à-dire : $(\forall k \in \mathbb{N})\ n^{4k} \equiv 1[5]$

3) a- Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x \equiv y[4]$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 5 = 1$

- Si : $x \geq y$ alors : $x = y + 4k$ où $k \in \mathbb{N}$

par suite, $n^x = n^{y+4k} = n^y \times n^{4k}$

et puisque : $n^{4k} \equiv 1[5]$

Alors : $n^x \equiv n^y[5]$

- Si : $x \leq y$ alors : $y = x + 4k$ où $k \in \mathbb{N}$

Par suite, $n^y = n^{x+4k} = n^x \times n^{4k}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

D'où : $n^y \equiv n^x [5]$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \wedge 5 \neq 1$

Donc : 5 divise n

Par suite, $n^x \equiv 0[5]$ et $n^y \equiv 0[5]$

D'où : $n^x \equiv n^y [5]$

b- Soit $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

Les deux nombres n^x et n^y ont la même parité, donc : $n^x \equiv n^y [2]$

et on a : $n^x \equiv n^y [5]$ (d'après la question précèdente)

Donc : $2 \mid (n^x - n^y)$ et $5 \mid (n^x - n^y)$

et comme : $2 \wedge 5 = 1$, alors : $2 \times 5 \mid (n^x - n^y)$ c'est-à-dire : $10 \mid (n^x - n^y)$

D'où : $n^x \equiv n^y [10]$

4) • Remarquons tout d'abord que le chiffre des unités d'un nombre entier naturel est, dans le système de numération décimale, le reste de la division de ce nombre par 10

C'est-à-dire, si $n \equiv u[10]$ et $0 \leq u \leq 9$, alors u est le chiffre des unités du nombre entier naturel n

• Soit (x,y) une solution de l'équation (E) tel que : $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $11x - 15y = 4$, par suite : $11x - 15y \equiv 0[4]$

Et puisque $11 \equiv -1[4]$ et $-15 \equiv 1[4]$

Alors : $-x + y \equiv 0[4]$ c'est-à-dire : $x \equiv y[4]$

Donc d'après le résultat de la question **3) b-** : $n^x \equiv n^y [10]$

Par suite, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimale.

Exercice 33

1) Soit n un entier naturel premier.

Montrer que si n divise $(5^n - 2^n)$ alors : $n = 3$

2) Soient p et q deux nombres entiers naturels premiers tels que : $3 < q < p$ et pq divise $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

a- Montrer que q divise $(5^p - 2^p)$

b- Soit a un entier naturel tel que : $2a \equiv 5[q]$

Montrer que q ne divise pas a et $a^p \equiv 1[q]$ et $a^{q-1} \equiv 1[q]$

c- En déduire que $a \equiv 1[q]$ (Remaquer que: $p \wedge (q-1) = 1$)

3) En déduire de tout ce qui précède que si p et q sont des entiers naturels premiers tels que : $q < p$ et pq divise $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$, alors : $(p,q) = (13;3)$

Solution

1) Soit n un entier naturel premier tel que : n divise $(5^n - 2^n)$

D'après le théorème de Fermat : $5^n \equiv 5[n]$ et $2^n \equiv 2[n]$ (car n est premier)

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $5^n - 2^n \equiv 3[n]$

et puisque : $n \mid (5^n - 2^n)$, alors : $n \mid 3$, d'où : $n = 3$ (car n est premier)

2) a- On a : $q \mid pq$ et $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

Donc : $q \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

Or $q \neq 3$ donc : q ne divise pas $(5^q - 2^q)$ (d'après la question 1)

et puisque q est premier

alors : $q \wedge (5^q - 2^q) = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $q \mid (5^p - 2^p)$

b- • Si q divise a, alors : $2a \equiv 0[q]$, donc : $5 \equiv 0[q]$ c'est-à-dire : $q \mid 5$

et par suite : $q = 5$

Or : $5^p - 2^p \equiv 0[q]$ (d'après la question précèdente)

Donc : $5^p - 2^p \equiv 0[5]$

par suite, $2^p \equiv 0[5]$ c'est-à-dire : $5 \mid 2^p$, donc : $5 \mid 2$ car 5 est premier, ce qui est faux et par suite : q ne divise pas a

• On a : $2a \equiv 5[q]$, donc : $(2a)^p \equiv 5^p[q]$

par suite, $2^p(a^p - 1) \equiv 5^p - 2^p[q]$

c'est-à-dire : $2^p(a^p - 1) \equiv 0[q]$ car q divise $(5^p - 2^p)$

Or : $q \wedge 2^p = 1$ donc : $a^p - 1 \equiv 0[q]$

par suite, $a^p \equiv 1[q]$

• Le nombre q est premier et ne divise pas a (car $a^p \equiv 1[q]$)

Donc, d'après le théorème de Fermat : $a^{q-1} \equiv 1[q]$

c- • On a : $q - 1 < q$, donc : $q - 1 < p$

et comme p est premier, alors : $p \wedge (q-1) = 1$

Donc, d'après le théorème de Bezout : $(\exists (u,v) \in \mathbb{N}^2)\ (q-1)u - pv = 1$

• On a : $a^{q-1} \equiv 1[q]$, donc : $(a^{q-1})^u \equiv 1[q]$

et par suite : $a^{1+pv} \equiv 1[q]$, c'est-à-dire : $a(a^p)^v \equiv 1[q]$

Or : $a^p \equiv 1[q]$, donc : $(a^p)^v \equiv 1[q]$

Par suite, $a \equiv 1[q]$

3) Soient p et q deux entiers naturels premiers tels que : $q < p$

et $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

• Si : $3 < q < p$ et a un entier naturel tel que : $2a \equiv 5[q]$ (un tel nombre existe, il suffit par exemple de prendre $a = \dfrac{q+5}{2}$)

Alors (d'après 2)c) : $a \equiv 1[q]$

Donc : $2 \equiv 5[q]$, c'est-à-dire : $3 \equiv 0[q]$

et par suite q divise 3, donc : $q = 3$ ce qui contredit le fait que : $q > 3$

• Si $q = 2$ on aurait : $5^p - 2^p \equiv 0[2]$ car $q \mid (5^p - 2^p)$ d'après 2)a)

c'est-à-dire : $1 \equiv 0[2]$ ce qui est faux.

Donc : $q \neq 2$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

• Alors nécessairement : $q = 3$

On a donc : $p > 3$ et $3p \mid 117(5^p - 2^p)$

Par suite, $p \mid 39(5^p - 2^p)$

et comme $p \neq 3$ (car $p > 3$) alors p ne divise pas $(5^p - 2^p)$ (d'après 1)

et puisque p est premier alors : $p \wedge (5^p - 2^p) = 1$

Donc, d'après le théorème de Gauss : $p \mid 39$

Par suite, $p = 13$ (car p premier et $p > 3$)

Donc : $(p,q) = (13;3)$

Exercice 34

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ tels que : $a \wedge b = 1$

1) Montrer que : $(a^2 + ab + b^2) \wedge (a^2 + b^2) = 1$

2) Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$ et $p \mid (a^2 + ab + b^2)$

a- Montrer que : $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$

b- Montrer que : $a^3 \equiv b^3 [p]$

c- Montrer que si $p = 5 + 6k$ où $k \in \mathbb{N}$, alors : $a \equiv b[p]$, puis que : $p \mid 3ab$

d- En déduire que : $p \equiv 1[6]$

3) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation : $x^2 + xy + y^2 = 34(x \wedge y)^2$

Solution

1) On pose : $(a^2 + ab + b^2) \wedge (a^2 + b^2) = d$

• On a : $d \mid a^2 + ab + b^2$ et $d \mid a^2 + b^2$

Donc : $d \mid ab$ (car : $(a^2 + ab + b^2) - (a^2 + b^2) = ab$)

D'où : $d \mid ab^2$ et $d \mid a^3 + ab^2$ (car : $a(a^2 + b^2) = a^3 + ab^2$)

et par suite : $d \mid a^3$

• de même on obtient : $d \mid b^3$

• On a donc : $d \mid a^3$ et $d \mid b^3$

D'où : $d \mid a^3 \wedge b^3$

Or : $a \wedge b = 1$ donc : $a^3 \wedge b^3 = 1$

et par suite : $d \mid 1$, d'où : $d = 1$

Donc, $(a^2 + ab + b^2) \wedge (a^2 + b^2) = 1$

2) a- • Supposons que : $p \wedge a \neq 1$

Donc : $p \wedge a = p$ (car p est premier), par suite, $p \mid a$

Donc : $p \mid a^2 + ab$ (car : $a^2 + ab = a(a + b)$)

Or : $p \mid a^2 + ab + b^2$, donc : $p \mid b^2$ (car : $(a^2 + ab + b^2) - (a^2 + ab) = b^2$)

On a : $p \mid a$ et $p \mid b^2$, donc : $p \mid a \wedge b^2$

Or : $a \wedge b = 1$, donc : $a \wedge b^2 = 1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

par suite, $p|1$, d'où : $p=1$ ce qui est faux
Donc : $p \wedge a = 1$
• Montrer de même que : $p \wedge b = 1$
b- On a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
et puisque : $p|a^2+ab+b^2$
alors : $p|a^3-b^3$, d'où : $a^3 \equiv b^3[p]$
c- • Supposons que : $p = 5+6k\ (k \in \mathbb{N})$
Le nombre p est premier et : $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$
Donc, d'après le théorème de Fermat : $a^{p-1} \equiv 1[p]$ et $b^{p-1} \equiv 1[p]$
C'est-à-dire : $a^{4+6k} \equiv 1[p]$ et $b^{4+6k} \equiv 1[p]$
Donc : $a^{4+6k} \equiv b^{4+6k}[p]$
C'est-à-dire : $a.(a^3)^{1+2k} \equiv b.(b^3)^{1+2k}[p]$
Or : $a^3 \equiv b^3[p]$, donc : $(a^3)^{1+2k} \equiv (b^3)^{1+2k}[p]$
et par suite : $a.(a^3)^{1+2k} \equiv b(a^3)^{1+2k}[p]$
et comme : $p \wedge a = 1$ alors : $p \wedge (a^3)^{1+2k} = 1$
Donc : $a \equiv b[p]$
• On a : $a \equiv b[p]$, donc : $p|a-b$ et par suite : $p|(a-b)^2$
Or : $p|a^2+ab+b^2$, donc : $p|(a^2+ab+b^2)-(a-b)^2$
C'est-à-dire : $p|3ab$
d- Un nombre premier est soit de la forme $6k+1$ ou de la forme $6k+5\ (k \in \mathbb{N})$
Si $p = 6k+5$, alors d'après le résultat de la question précèdente : $p|3ab$
Or : $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, donc : $p \wedge ab = 1$
par suite $p|3$, donc : $p = 3$ ce qui contredit le fait que $p \geq 5$
Donc : $p = 6k+1\ (k \in \mathbb{N})$ et par suite : $p \equiv 1[6]$
3) Soit $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x^2+xy+y^2 = 34(x \wedge y)^2$
On pose : $d = x \wedge y$
Donc : $(\exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2)\ x = da$ et $y = db$ et $a \wedge b = 1$
par suite, $d^2(a^2+ab+b^2) = 34d^2$
C'est-à-dire : $a^2+ab+b^2 = 2 \times 17$
et par suite : $17|(a^2+ab+b^2)$
Donc, d'après ce qui précède : $17 \equiv 1[6]$
Ce dernier résultat est fausse.
Donc l'équation : $x^2+xy+y^2 = 34(x \wedge y)^2$ n'admet pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^2$

Exercice 35

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}^3$ l'équation : (E): $(\overline{xyz}^{(10)})^{143} \equiv 2\ [899]$
1) a- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $143u - 840v = 1$
b- En déduire le plus petit nombre entier naturel d qui vérifie : $143d \equiv 1\ [840]$
2) Soit n un nombre entier naturel premier avec 899

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

a- Montrer que n est premier avec 29 et avec 31

b- En déduire que : $n^{840} \equiv 1\,[899]$

c- Montrer que si $n^{143} \equiv 2\,[899]$ alors : $n \equiv 2^d\,[899]$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation (E)

Solution

1) a- • Il faut d'abord trouver une solution particulière de cette équation, on utilise l'algorithme d'Euclide :

$840 = 5 \times 143 + 125$ (1)

$143 = 125 + 18$ (2)

$125 = 6 \times 18 + 17$ (3)

$18 = 17 + 1$ (4)

On a : $1 = 18 - 17$ d'après (4)

$1 = 18 - (125 - 6 \times 18)$ d'après (3)

$1 = 7 \times 18 - 125$

$1 = 7 \times (143 - 125) - 125$ d'après (2)

$1 = 7 \times 143 - 8 \times 125$

$1 = 7 \times 143 - 8 \times (840 - 5 \times 143)$ d'après (1)

Donc : $143 \times 47 - 840 \times 8 = 1$

• On a : $143u - 840v = 1 \iff 143u - 840v = 143 \times 47 - 840 \times 8$

$$\iff 143(u-47) = 840(v-8)$$

$$\iff \begin{cases} 143(u-47) = 840(v-8) \\ 143 \mid 840(v-8) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 143(u-47) = 840(v-8) \\ 143 \mid v-8 \end{cases} \quad (\text{car } 143 \wedge 840 = 1)$$

$$\iff \begin{cases} 143(u-47) = 840 \times 143k \\ v-8 = 143k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} u = 840k + 47 \\ v = 143k + 8 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation : $143u - 840v = 1$ est :

$S = \{(840k + 47, 143k + 8)/k \in \mathbb{Z}\}$

b- D'après ce qui précède, on a : $(\forall k \in \mathbb{Z})\ 143(840k + 47) - 840(143k + 8) = 1$

Donc : $143(840k + 47) \equiv 1\,[840]$ (*)

Par suite, le plus petit nombre entier naturel d qui vérifie $143d \equiv 1\,[840]$ est égal à 47 obtenu en remplaçant k par 0 dans la relation (*)

2) a- On a : $899 = 29 \times 31$

Et puisque : $n \wedge 899 = 1$ alors les nombres 29 et 31 ne sont pas des diviseurs de n

Et puisque les nombres 29 et 31 sont premiers

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Alors : $n \wedge 29 = 1$ et $n \wedge 31 = 1$

b- On a : $n \wedge 29 = 1$ et 29 est un nombre premier

Donc : $n^{28} \equiv 1[29]$ (d'après le théorème de Fermat)

Par suite : $(n^{28})^{30} \equiv 1[29]$

C'est-à-dire : $n^{840} \equiv 1[29]$

et on a : $n \wedge 31 = 1$ et 31 est un nombre premier

Donc : $n^{30} \equiv 1[31]$ (d'après le théorème de Fermat)

Par suite : $(n^{30})^{28} \equiv 1[31]$

C'est-à-dire : $n^{840} \equiv 1[31]$

Donc : $29 \mid (n^{840} - 1)$ et $31 \mid (n^{840} - 1)$

Et puisque : $29 \wedge 31 = 1$

Alors : $29 \times 31 \mid (n^{840} - 1)$ c'est-à-dire : $899 \mid (n^{840} - 1)$

Par suite : $n^{840} \equiv 1[899]$

c- On suppose que : $n^{143} \equiv 2[899]$

et comme : $143d - 840 \times 8 = 1$ (on a vu que : $d = 47$)

Donc : $143d = 840 \times 8 + 1$

Et puisque : $n^{143} \equiv 2[899]$

Alors : $(n^{143})^d \equiv 2^d[899]$

C'est-à-dire : $n^{840 \times 8 + 1} \equiv 2^d[899]$

C'est-à-dire : $(n^{840})^8 . n \equiv 2^d[899]$

Et puisque : $n^{840} \equiv 1[899]$ alors : $(n^{840})^8 \equiv 1[899]$

Par suite : $n \equiv 2^d[899]$

3) Résolvons dans $\mathbb{N}^3$ l'équation (E): $(\overline{xyz}^{(10)})^{143} \equiv 2[899]$

On pose : $n = \overline{xyz}^{(10)}$

On peut appliquer les résultats précèdents car le nombre $\overline{xyz}^{(10)}$ est écrit dans le système décimal.

On a : $n \not\equiv 0[899]$, donc 899 ne divise pas n

Par suite, les nombres 29 et 31 ne divisent pas n (car $899 = 29 \times 31$)

D'où : $29 \wedge n = 1$ et $31 \wedge n = 1$ (car les nombres 29 et 31 sont premiers).

Donc : $(29 \times 31) \wedge n = 1$ c'est-à-dire : $899 \wedge n = 1$

Et puisque : $n^{143} \equiv 2[899]$

Alors : $n \equiv 2^{47}[899]$ (d'après **2) c-**)

C'est-à-dire : $n \equiv 345[899]$ (montrer que : $2^{47} \equiv 345[899]$)

Par suite : $n = 345 + 899k$ où $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $100 \leq n \leq 999$

Alors : $k = 0$

Par suite : $n = 345$

Donc : $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 5$

Conclusion : L'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \{(3;4;5)\}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Exercice 36 Juin 2019

On admet que 2969 est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n

a- En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ u.n \equiv 1[2969]$

b- En déduire que : $(n.m)^8 \equiv -1[2969]$ et que : $(u.m)^{2968} \equiv -1[2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

c- Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

d- En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$

2) a- En utilisant les résultats précèdents, montrer que 2969 divise n

b- Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Longleftrightarrow n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$

Solution

1) a- On suppose que 2969 ne divise pas n

et puisque 2969 est un nombre premier

alors : $2969 \wedge n = 1$

Par suite, d'après le théorème de Bezout : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2)\ nu + 2969v = 1$

Donc : $(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2)\ n.u + 2969v \equiv 1[2969]$

et par suite : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ n.u \equiv 1[2969]$

b- • On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

donc : $u^8 n^8 + u^8 m^8 \equiv 0[2969]$

c'est-à-dire : $(u \times n)^8 + (m \times u)^8 \equiv 0[2969]$

et puisque : $(u \times n)^8 \equiv 1[2969]$ car $u \times n \equiv 1[2969]$

alors : $1 + (m \times u)^8 \equiv 0[2969]$

Donc : $(m \times u)^8 \equiv -1[2969]$

• On a : $(m \times u)^8 \equiv -1[2969]$

donc : $((m \times u)^8)^{371} \equiv (-1)^{371}[2969]$

c'est-à-dire : $(m \times u)^{2968} \equiv -1[2969]$

c- Si 2969 divise $u \times m$ alors : $u \times m \equiv 0[2969]$

par suite, $(u \times m)^{2968} \equiv 0[2969]$ ce qui contredit le résultat de la question précèdente

Donc : 2969 ne divise pas $u \times m$

d- Puisque 2969 est un nombre premier et ne divise pas $u \times m$, alors d'après le théorème de Fermat, on a :

$(u \times m)^{2969-1} \equiv 1[2969]$, c'est-à-dire: $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$

2) a- Si 2969 ne divise pas n

Alors, d'après les résultats de la première question; on a : $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$ et $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $1 \equiv -1[2969]$
c'est-à-dire: 2969 divise 2, ce qui est faux
Donc : 2969 divise n
b- • Supposons que : $m \equiv 0[2969]$ et $n \equiv 0[2969]$
Donc : $m^8 + n^8 \equiv 0^8 + 0^8[2969]$
c'est-à-dire : $m^8 + n^8 \equiv 0[2969]$
• Supposons que : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$
Donc d'après le résultat de la question 2)a), le nombre 2969 divise n
Par suite, $n \equiv 0[2969]$, d'où : $n^8 \equiv 0[2969]$
Donc : $m^8 \equiv 0[2969]$, d'où 2969 divise m^8
et puisque : 2969 est premier
alors : 2969 divise m, par suite : $m \equiv 0[2969]$

Exercice 37

I. Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 7$

1) a- Vérifier que le nombre $\frac{p-1}{2}$ est un entier pair et que : $2 < \frac{p-1}{2} < p-2$

b- En déduire que $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$

2) On suppose qu'il existe un entier naturel non nul n tel que : $(p-1)! = p^n - 1$

et on pose : $S = \sum_{k=0}^{n-1} p^k$

a- Montrer que : $S \equiv n[p-1]$

b- Montrer que $(p-1)$ divise S et en déduire que $(p-1)$ divise n

c- Montrer que : $(p-1)^p < p^n$ (on admet que : $((\forall m \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ m^m > 1 + m!)$

et en déduire que : $(p-1)! < p^n - 1$

II. Déterminer les nombres premiers positifs p pour lesquels il existe un entier non nul n tels que : $(p-1)! = p^n - 1$

III. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $1 + 11 + 11^2 + \ldots + 11^{n-1} = 362880$
$(10! = 3628800)$

Solution

I. 1) a- • Comme p est un nombre premier supérieur ou égal à 7
alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*)\ p = 4k+1$ ou $p = 4k+3$

par suite, $\frac{p-1}{2} = 2k$ ou $\frac{p-1}{2} = 2(k+1)$

Donc le nombre $\frac{p-1}{2}$ est un entier pair.

• On a : $p \geq 7$, donc : $\frac{p-1}{2} \geq 3$, d'où : $2 < \frac{p-1}{2}$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

et on a : $(p-2)-\frac{p-1}{2}=\frac{p-3}{2}$

donc : $(p-2)-\frac{p-1}{2}>0$ car $p\geq 7$

par suite, $\frac{p-1}{2}<p-2$

d'où : $2<\frac{p-1}{2}<p-2$

b- • Si $p\geq 11$, on a :

$$(p-1)!=1\times 2\times 3\times\cdots\times(p-1)$$
$$=2\times 3\times\cdots\times\frac{p-3}{2}\times\frac{p-1}{2}\times\frac{p+1}{2}\times\cdots\times(p-2)\times(p-1)$$
$$=3\times\cdots\times\frac{p-3}{2}\times(p-1)\times\frac{p+1}{2}\times\cdots\times(p-2)\times(p-1)$$
$$=(p-1)^2\times\left(3\times\cdots\times\frac{p-3}{2}\times\frac{p+1}{2}\times\cdots\times(p-2)\right)$$

Donc : $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$

• Si $p=7$, on a : $(7-1)!=6!=720$ et $(7-1)^2=36$ et 36 divise 720

• Par suite, si p est un nombre premier tel que : $p\geq 7$

alors $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$

2) a- On a : $S=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}$

et on a : $1\equiv 1[p-1]$ et $p\equiv 1[p-1]$

Donc : $S\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ fois}[p-1]$

C'est-à-dire : $S\equiv n[p-1]$

b- • On a : $S=\sum_{k=0}^{n-1}p^k=1\times\frac{1-p^n}{1-p}=\frac{p^n-1}{p-1}$

donc : $(p-1)S=p^n-1$

et puisqu'on a supposé que : $p^n-1=(p-1)!$ alors : $(p-1)S=(p-1)!$

et comme $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$, donc : $(p-1)!=\alpha(p-1)^2$ où α est un nombre entier naturel non nul

par suite, $(p-1)S=\alpha(p-1)^2$, d'où $S=\alpha(p-1)$

Donc : $(p-1)$ divise S

• On a : $S\equiv 0[p-1]$ car : $(p-1)$ divise S

Or $S\equiv n[p-1]$, donc : $n\equiv 0[p-1]$, par suite, $(p-1)$ divise n

c- On a : $(p-1)|n$, donc : $p-1\leq n$

• Si : $p-1=n$ alors : $n!=(n+1)^n-1$ car $(p-1)!=p^n-1$

par suite, $(n+1)^n=n!+1$

Or : $(n+1)^n>n^n>1+n!$

Ce qui contredit l'égalité : $(n+1)^n=n!+1$

ProfSalmi
profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner

Donc : $p-1<n$ c'est-à-dire : $p \leq n$

par suite, $(p-1)^p < p^p$ et $p^p \leq p^n$, donc: $(p-1)^p < p^n$

• Pour tout $k \in \{1,2,...,p-2\}$ on a : $k < p-1$

donc : $(p-2)! < (p-1)^{p-2}$

par suite, $(p-1)\times(p-2)! < (p-1)^{p-1}$ c'est-à-dire : $(p-1)! < (p-1)^{p-1}$

Or : $(p-1)^{p-1} < (p-1)^p$ et $(p-1)^p < p^n$

donc : $(p-1)! < (p-1)^{p-1} < p^n$

Par suite, $(p-1)!+1 < p^n$, d'où $(p-1)! < p^n - 1$

II. Soit p un nombre premier positif.

• Si $p \geq 7$ et s'il existe un entier non nul n tel que : $(p-1)! = p^n - 1$

Alors : $(p-1)! < p^n - 1$ d'après ce qui précède, ce qui est impossible.

Donc pour les nombres premiers p tels que : $p \geq 7$, il n'existe pas d'entier n tel que $(p-1)! = p^n - 1$

• Si $p = 5$, on a : $(p-1)! = 24$ et $p^2 - 1 = 24$

Donc : $(5-1)! = 5^2 - 1$

• Si $p = 3$, on a : $(p-1)! = 2$ et $p^1 - 1 = 2$

Donc : $(3-1)! = 3^1 - 1$

• Si $p = 2$, on a : $(p-1)! = 1$ et $p^1 - 1 = 1$

Donc : $(2-1)! = 2^1 - 1$

Conclusion :

Les nombres premiers positifs p pour lesquels il existe un entier naturel non nul n tels que : $(p-1)! = p^n - 1$ sont 2 , 3 et 5

III. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1+11+11^2+\cdots+11^{n-1} = 362880 \Leftrightarrow \frac{11^n-1}{11-1} = 362880$$

$$\Leftrightarrow 11^n - 1 = 3628800$$

$$\Leftrightarrow 11^n - 1 = 10!$$

$$\Leftrightarrow (11-1)! = 11^n - 1$$

et comme 11 est premier et $11 \geq 7$, alors d'après le résultat de la partie II l'égalité $1+11+11^2+\cdots+11^{n-1} = 362880$ ne peut pas exister.

profsalmi.blogspot.com
Scanned with CamScanner