NAJAH EN MATHÉMATIQUES 1

- Tronc Commun Scientifique
- Tronc Commun Technologique

Auteurs

HAKKANI Abdeslem
Inspecteur principal de l'enseignement secondaire qualifiant
«Coordinateur»

FAHMI Mostafa
Inspecteur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

JYAD Mostafa
Professeur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

GHOUZAILI Mohamed
Professeur principal de l'enseignement secondaire qualifiant

Livre de l'élève

Scanné avec CamScanner

Ensemble des nombres entiers naturels
Notions d'arithmétique

Activités préparatoires	10
Définitions et règles	13
Points essentiels	17
Exercices résolus	18
Exercices et problèmes	19

1

Capacités attendues

Utilisation de la parité et de la décomposition en produit de facteurs premiers dans la résolution de certains problèmes simples sur les nombres entiers naturels

Contenu

- Activités préparatoires
  - Nombres pairs et nombres impairs
  - Multiples d'un nombre entier naturel
  - Plus petit multiple commun de deux nombres
  - Diviseurs d'un nombre entier naturel
  - Nombres premiers
  - Plus grand diviseur commun de deux nombres
- Définitions et règles
  - Nombres pairs et nombres impairs
  - Opération sur les nombres pairs et impairs
  - Multiples d'un nombre entier naturel
  - Opérations sur les multiples
  - Diviseurs d'un nombre entier naturel
  - Opération sur les diviseurs
  - Nombres premiers
  - Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers
  - Diviseurs communs de deux nombres
  - Plus grand diviseur commun de deux nombres
  - Multiples communs de deux nombres
  - Plus petit multiple commun de deux nombres
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

1 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Nombres pairs et nombres impairs

1) Parmi les nombres suivants, déterminer les multiples du nombre 2 :

8	15	16	33 – 17	138 + 5

2) **Tout nombre entier naturel multiple de 2 est un nombre pair.**

Tout nombre qui n'est pas pair est un nombre impair.

Déterminer, parmi les nombre suivants, ceux qui sont pairs et ceux qui sont impairs :

$2^2 + 1$	$2n + 8$	$4n^2 + 1$	$1 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$

où n est un nombre entier naturel.

3) a- Montrer que **le produit de deux entiers naturels consécutifs est un nombre pair.**

b- En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + 7n + 13$ est impair.

ACTIVITE 2 Multiples d'un nombre entier naturel

A 1) Parmi les nombres suivants, reconnaître les multiples du nombre 3 :

78	34 x 6	104	102 + 39	34 – 21

2) Si m et n sont deux nombres entiers naturels vérifiant la relation m = 7n, que peut-on en déduire ?

3) Si x, y et z sont des nombres entiers naturels vérifiant la relation x . y = z, que peut-on en déduire ?

B Un fleuriste dispose d'un certain nombre de roses :

74 roses blanches, 111 roses jaunes et 185 roses rouges.

Le fleuriste veut former des bouquets contenant tous le même nombre de chaque sorte de roses:

1) Combien de bouquets peut-on former ?

2) Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?



ACTIVITE 3 Plus petit multiple commun de deux nombres

A 1) Ecrire les cinq premiers multiples du nombre 6.

2) Ecrire les cinq premiers multiples du nombre 8.

3) **On remarque que le nombre 24 est un multiple de 6 et 8.**

On dit que 24 est un multiple commun des deux nombres 6 et 8.

y est multiple de x si y = kx où k est un nombre entier naturel

Scanné avec CamScanner

a- Citer un autre multiple commun des deux nombres 6 et 8.

b- Peut-on déterminer tous les multiples communs des deux nombres 6 et 8 ?

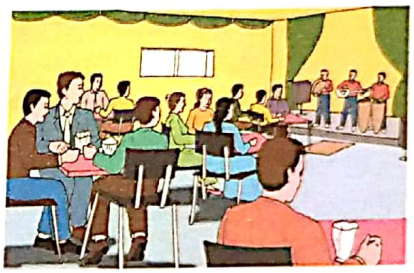
4) **Le nombre 24 est le plus petit multiple non nul des nombres 6 et 8.**

Le nombre 24 est appelé le plus petit multiple commun des deux nombres 6 et 8.

on écrit $6 \vee 8 = 24$ ou $M(6, 8) = 24$

Déterminer le plus petit multiple commun des deux nombres dans chacun des cas suivants :

15 et 30	5 et 7	12 et 9



B Dans une salle de festivités, le nombre de chaises est compris entre 400 et 500.

Si on place les chaises par rangées de 20, il reste 10 chaises.

Si on les place par rangée de 15, il reste 10 chaises aussi.

1) Quel est le nombre de chaises dans la salle ?

2) Si on range les chaises de telle sorte que le nombre de chaises par rangées soit compris entre 12 et 20, quel est alors le nombre de rangées ?

ACTIVITE 4 Diviseurs d'un nombre entier naturel

A 1) **Le nombre 15 est un multiple de 5. on dit aussi :**

* **5 est un diviseur du nombre 15.**
* **5 divise le nombre 15.**
* **15 est divisible par 5.**

Citer quelques diviseurs des nombres suivants :

x est diviseur de y si $y = kx$ où k est un nombre entier naturel

18	21	13	28	10	6×102	$2(a + 2)$ (a étant un entier naturel)

2) Si m et n sont deux nombres entiers naturels vérifiant $m = 5n$, que peut-on en déduire ?

3) Si x, y et z sont des nombres entiers naturels vérifiant la relation $z = xy$, que peut-on en déduire ?

4) Si a divise 6 et 6 divise a, que peut dire de a et 6 ?

B Un établissement scolaire a organisé une excursion à Rabat le jour x du mois y de l'année $(1900 + z)$.

Ont participé à ce voyage 90 élèves en compagnie de b enseignants à bord de a bus.

Sachant que le nombre d'enseignants dépasse le nombre de conducteurs par 1 et que $90 + xyzab = 34800$, trouver la date de l'excursion, le nombre de bus et le nombre d'enseignants.

Scanné avec CamScanner

1 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 5 Nombres premiers

A 1) Trouver les diviseurs de chacun des nombres suivants :

2	3	5	7	11	13	37

2) **On remarque que tout nombre, parmi les nombres précédents, admet deux diviseurs exactement.**
Tout nombre, parmi ces nombres, est appelé nombre premier.
Ecrire tous les nombres premier plus petits que 5.
3) Les nombres 1 et 0 sont-ils premiers ? Pourquoi ?
4) Le nombre 187 est-il premier ? Pourquoi ?

Il y a une infinité de nombres premiers

B Soient p et q deux nombres premiers tels que : $p < q$ et $3 < q$. On pose $n = p + q$
1) Montrer que n n'est premier.
2) Déterminer le plus grand diviseur de n, qui est différent de n.
3) Montrer que tout diviseur du nombre n (autre que n) est plus petit que q.
4) p est-il un diviseur de n ?

ACTIVITE 6 Plus grand diviseur commun de deux nombres

A 1) Déterminer tous les diviseurs du nombre 12.
2) Déterminer tous les diviseurs du nombre 18.
3) On remarque que 2 est un diviseur des deux nombres 12 et 18. On dit que 2 est un diviseur commun des nombres 12 et 18.
Citer un autre diviseur commun des deux nombres 12 et 18.
Quel est le plus grand parmi les diviseurs communs des deux nombres 12 et 18.
4) **Le nombre 6 est le plus grand diviseur commun des deux nombres 12 et 18.**
Le nombre 6 est appelé le plus grand diviseur commun des nombres 12 et 18.
On écrit $12 \wedge 18 = 6$, $D(12, 18) = 6$ ou $\Delta(12, 18) = 6$
5) Déterminer le plus grand diviseur des deux nombres dans chacun des cas suivants :

8 et 20	44 et 55	13 et 44	6 et 45

B Un ouvrier dispose de deux barres de fer, la longueur de la 1ère barre est 252cm ; la longueur de la 2ème barre est 396cm.
Il veut les diviser en morceaux de même longueur de telle sorte que la longueur de chaque morceau soit comprise entre 10cm et 20cm.
1) Quel est la plus grande longueur possible de chaque morceau ?
Quel est le nombre de morceaux ?
2) Quel est la plus petite longueur possible de chaque morceau ?
Quel est alors le nombre de morceaux ?



Scanné avec CamScanner

1 DEFINITIONS ET REGLES

1 Nombres pairs et nombres impairs

Définition

- Tout nombre entier naturel multiple de 2 est appelé nombre **pair**.
- Tout nombre entier naturel qui n'est pair est dit **impair**.
- Le nombres pairs sont les nombres qui s'écrivent sou la forme 2k où k est un nombre entier naturel.
- Les nombres impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme 2k + 1 où k est un nombre entier naturel, ou sous la forme 2k – 1 où k un nombre entier naturel non nul.

Exemples et applications

- 2004 est un nombre pair.
- 2005 est un nombre impair.
- soit a un nombre entier naturel non nul et différent de 1.
  - On pose A = 2a – 3 et B = 4a + 2
    On a : A = 2a – 2 – 1 = 2(a – 1) – 1. En posant k = a – 1,
    alors A = 2k – 1 où k est un nombre entier naturel non nul. Donc A est impair.
  - On a : B = 4a + 2 = 2(2a + 1). En posant k′ = 2a + 1,
    on a : B = 2k′ où k′ est un entier naturel.
    Donc B est pair.
- Soit n un nombre entier naturel. Etudier la parité des deux nombres A et B tels que : A = n(n + 1) ; B = n^2 + 3n +4

2 Opérations sur les nombres pairs et impairs

Propriétés soient a et b deux nombres entiers naturels tels que a ≥ b.

- Si a et b sont pairs, alors a + b et a – b sont pairs.
- Si a et b sont impairs, alors a + b et a – b sont pairs.
- Si l'un des deux nombres a et b est pair et l'autre impair, alors a + b et a – b sont impairs.
- Si l'un des deux nombres a et b et pair, alors ab est pair (quelle que soit la parité de l'autre).
- Si a et b sont impairs, alors ab est impair.

Exemples et applications

- Soit n un nombre entier naturel. On pose A = n(n + 1) + 2(n^2 + 1) + 1.
  n(n + 1) est le produit de deux nombres entiers consécutifs dont l'un est pair ; donc n(n + 1) est pair. Par ailleurs, 2(n^2 + 1) +1 est un nombre impair.
  Il s'ensuit que n(n + 1) + 2(n^2 + 1) + 1 est un nombre impair c'est-à-dire A est impair.
- Montrer que si (a est pair et a + b est impair), alors b est impair.

Notes

- Pour qu'un nombre entier naturel soit pair, il suffit que son chiffre d'unités soit 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Pour qu'un nombre entier soit impair, il suffit que son chiffre des unités soit 1, 3, 5, 7, ou 9.
- Etudier la parité d'un nombre entier naturel c'est savoir et préciser si ce nombre est pair ou impair.

Remarques

- a et b sont consécutifs signifie que :
  b = a + 1 ou a = b + 1
- Si a et b sont deux entiers consécutifs, alors :
  ab est pair,
  a + b et a – b son impairs (en supposant que a est plus grand que b);

Scanné avec CamScanner

1 DÉFINITIONS ET RÈGLES

3 Multiples d'un nombre entier naturel

Définition On dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier naturel b si m est le produit de b par un entier naturel n.

Exemples et applications

- 82 est un multiple de 41 car $82 = 41 \times 2$.
  33 est un multiple de 11 car $33 = 3 \times 11$.
  33 est aussi un multiple de 3.
- Montrer que 12×15 est un multiple de 30.

Propriété Si b est un multiple de a et c est un multiple de b, alors c est un multiple de a.

Exemples et applications

- Le nombre 12 est un multiple du nombre 4, et le nombre 24 est un multiple de 12 ; donc 24 est un multiple du nombre 4.
- Soient a et b deux entiers naturels.
  Montrer que si a est un multiple de b^2, alors a est un multiple de b.

4 Opérations sur les multiples

Propriétés Soient a, b et c des entiers naturels.

- Si b et c sont des multiples de a et $b \geq c$, alors $b + c$ et $b - c$ sont des multiples de a.
- Si b est un multiple de a, alors bc est un multiple de a.

Exemples et applications

- 15 est un multiple de 3, et 6 est un multiple de 3 ; donc 21 est un multiple de 3 (puisque $15 + 6 = 21$).
- Montrer que si b et c sont des multiples de a, alors $2c + 3b$ est un multiple de a.

5 Diviseurs d'un nombre entier naturel

Définition On dit que le nombre entier naturel a est un diviseur de b si b est un multiple de a c'est-à-dire si :
- il existe un entier naturel q tel que $b = aq$

Si a est un diviseur de b, on dit aussi que :
- a divise b.
- b est divisible par a.
- b est un multiple de a.

Autre formulation

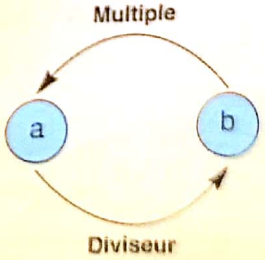
m est multiple de b signifie que $m = bn$ où n est un nombre entier naturel

Remarques

- Tout nombre entier naturel a est un multiple de lui-même et de 1
- 0 est multiple de tous les entiers naturels

Ecriture

a est un diviseur de b s'il existe un nombre entier naturel q tel que $b = aq$



Scanné avec CamScanner

1 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

- 12 est un diviseur de 36. 36 est un multiple de 12.
- Déterminer Tous les diviseurs du nombre 108 et calculer leur somme.

6 Opérations sur les diviseurs

Propriétés Soient a, b et c des nombres entiers naturels.

- Si a est un diviseur de b et de c, et b ≥ c alors que est un diviseur de b + c et de b – c.
- Si a est un diviseur de b, alors a est un diviseur de bc.

7 Nombres premiers

Définition Un nombre entier naturel p est premier s'il admet **exactement deux diviseurs**.

Exemples et applications

- Le nombre 31 est premier parce qu'il admet exactement deux diviseurs qui sont 1 et 31.
  Le nombre 6 n'est pas premier parce qu'il a plus de deux diviseurs (1, 2, 3, 6 sont les diviseurs de 6).
- Soient x et y sont deux nombres premiers tels que x + y est impair.
  Montrer que (x = 2 ou y = 2).

8 Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers

Introduction

60 est un nombre non premier.
On a : 60 = 10 × 3 × 2 = 2 × 2 × 3 × 5
Il y a des produits égaux à 60.
Le produit 2 × 2 × 3 × 5 a tous ses facteurs premiers
On dit que $2^2 \times 3 \times 5$ est la décomposition du nombre 60 en produit de facteurs premiers.

Propriété Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemples et applications

- L'écriture $2^2 \times 3 \times 5$ est la décomposition du nombre 60 en produit de facteurs premiers.
- Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 270 ; 180 ; 32.

Calcul littéral

a divise b signifie que b = ka.
a divise c signifie que c : k'a.
Donc :
$\begin{cases} b + c = (k + k')a \\ b - c = (k - k')a \end{cases}$
Ainsi a divise b + c et b – c.

Remarques

- Le nombre 1 n'est pas premier parce qu'il admet un seul diviseur.
- p est premier si p ≠ 1 et p admet deux diviseurs qui son 1 et p.

Méthode

Il y a une méthode pratique de décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers :

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Remarque

L'écriture : $120 = 2^3 \times 15$ n'est pas une décomposition de 120 en produit de facteurs premiers car 15 n'est pas premier.

Scanné avec CamScanner

1 DÉFINITIONS ET RÈGLES

9 Diviseurs communs de deux nombres

Définition On dit qu'un nombre entier naturel d est un diviseur commun des deux nombres a et b si d est un diviseur de chacun d'eux.

Exemples et applications

– Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.
– Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18.
– Les nombres 1, 2, 3, 6 sont les diviseurs communs des deux nombres 12 et 18.

Déterminer les diviseurs communs des deux nombres 18 et 150.

Commentaire

d est un diviseur commun de a et b s'il existe deux nombres entiers naturels k et k' tels que :
$a = kd$ et $b = k'd$

Remarque

1 est un diviseur commun à deux entiers naturels quelconques.

10 Plus grand diviseur commun de deux nombres

Définition Le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers naturels a et b est le plus grand entier parmi les diviseurs communs des nombres a et b ; on le note généralement $a \wedge b$ ou $\Delta(a; b)$.

Exemples et applications

– Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
– Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.
– Le plus grand diviseur commun des deux nombres 30 et 12 est 6 ;
donc : $30 \wedge 12 = 6$ $[\Delta(30; 12) = 6]$

Déterminer $15 \wedge 75$; $13 \wedge 14$; $27 \wedge 36$.

Note terminologique

Le plus grand diviseur commun des nombres 11 et 4 est 1
On dit que 11 et 4 sont premiers entre eux.

11 Multiples communs de deux nombres

Définition Ont dit qu'un nombre entier naturel m est un multiple commun des deux nombres a et b si m est un multiple de chacun d'eux.

Exemples et applications

36 est un multiple commun de 6 et 4 (car $36 = 9 \times 4$ et $36 = 6 \times 6$).

Déterminer les multiples communs des nombres 25 et 15, et qui sont inférieurs à 200.

Formulation littérale

m est un multiple commun des nombres a et b signifie que
$m = ka = k'b$
où k et k' sont des nombres entiers naturels

12 Plus petit multiple commun de deux nombres

Définition Le plus petit multiple commun de deux nombres entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b ; on le note généralement $a \vee b$ ou M(a; b).

• Les multiples non nuls de 4 sont 4, 8, 12, 16, 20, ...
• Les multiples non nuls de 6 sont 6, 12, 18, 24, 30, ...
• Le nombre 12 est le plus petit multiple non nul de 4 et 6 ; donc $6 \vee 4 = 12$.

Déterminer $15 \vee 25$, $24 \vee 18$ et $5 \vee 7$.

Scanné avec CamScanner

1 POINTS ESSENTIELS

1 Nombres pairs et nombres impairs

a est un nombre entier naturel.

a est un nombre pair	a s'écrit sous la forme	a = 2k où k est un entier naturel
a est un nombre impair	a s'écrit sous la forme	a = 2k + 1 où k est un entier naturel

2 Multiples d'un nombre entier naturel

m est un nombre entier naturel.

m est multiple du nombre entier naturel b **signifie** m = kb où k est un entier naturel

3 Diviseurs d'un nombre entier naturel

d est nombre entier naturel.

d est un diviseur du nombre b **signifie** b = kd où k est un entier naturel

4 Nombres premiers

p est un nombre entier naturel.

p est premier **signifie** p a exactement deux diviseurs 1 et p

5 Plus grand diviseur commun de deux nombres

d, a et b sont des entiers naturels.

d est le plus grand diviseur commun de a et b **signifie** d divise a, d divise b
d est le plus grand parmi les diviseurs de a et b

6 Plus petit multiple commun de deux nombres

m, a et b son des entiers naturels.

m est le plus petit multiple commun de a et b **signifie** m est un multiple de a et de b
m est le plus petit multiple non nul de a et b

7 Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers

Scanné avec CamScanner

EXERCICES RÉSOLUS

1 Parité et imparité

Soient m et n deux nombres entiers naturels tels que m > n.

1) Montrer que m – n est m + n ont la même parité.

2) Déterminer les nombres entiers naturels x et y qui vérifient :

$$x^2 - y^2 = 12$$

Commentaire

- Noter que si la somme de deux nombres est un nombre pair, alors ces deux nombres sont de même parité ; et si leur somme est un nombre impair, alors ils sont de parités différentes.
- Remarquer que : (m + n) + (m – n) = 2m.

Solution

1) Supposons que m – n est pair.

Donc il existe un nombre entier naturel k tel que m – n = 2k

Or (m + n) + (m – n) = 2m ; par conséquent

m + n = 2m – (m – n) = 2m – 2k

c'est-à-dire m + n = 2(m – k)

Il s'ensuit que m + n est pair.

De la même façon, on établit que si m – n est impair, alors m – n est impair.

2) Déterminons x et y tels que : $x^2 - y^2 = 12$

$x^2 - y^2 = 12$ signifie $(x - y)(x + y) = 12$

Comme $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$,

$x - y \leq x + y$ et $(x - y)$ et $(x + y)$ ont la même parité,

alors : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

2 Plus grand diviseur commun de deux nombres et décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Une place publique est rectangulaire de dimensions en mètres 240 et 320.

La commune décide de placer des poteaux électriques le long du périmètre de la place de telle sorte qu'un poteau soit posé dans chaque coin de la place et que les poteaux soient séparés par la même distance.

1) Quelle est la plus grande distance qui doit séparer deux poteaux sachant que la distance entre deux poteaux est un nombre entier naturel.

2) Quel est le nombre de poteaux nécessaires à l'éclairage de la place dans ce cas ?

3) Quelles sont les distances supérieurs à 15 mètres que peut laisser la commune entre deux poteaux successifs ? Calculer, dans chaque cas, le nombre de poteaux nécessaires à l'opération.

Commentaire

Noter que la distance entre deux poteaux est un diviseur commun des deux nombres 240 et 320.

Solution

1) La plus grande distance que l'on peut laisser entre deux poteaux consécutifs est le plus grand diviseur commun des nombres 240 et 320.

Or $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

et $320 = 2^6 \times 5$

par conséquent $320 \wedge 240 = 80$

d'où : la plus grande distance que l'on peut laisser entre deux poteaux consécutifs est 80m

2) Le périmètre de la place est [(240 + 320) × 2]m

c'est-à-dire 1120m.

Le nombre de poteaux nécessaires à l'éclairage, dans le cas où la distance entre deux poteaux consécutifs est 80m, vaut 1120 : 80, c'est-à-dire 14 poteaux.

3) Les diviseurs communs des nombres 240 et 320 sont :

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

Les distances supérieures à 15m que peut laisser la commune entre deux poteaux consécutifs sont :

16m, 20m, 30m, 40m ou 80m.

a) Si on laisse 16m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 16 = 70

b) Si on laisse 20m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 20 = 56

c) Si on laisse 40m entre deux poteaux, le nombre de poteaux sera : 1120 : 40 = 28

d) Si on laisse 80m entre deux poteaux, on sait, d'après la question 2), que le nombre de poteaux nécessaires est : 14.

Scanné avec CamScanner

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Nombres pairs et impairs

1 1) Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs par les nombres suivants :

$77^3 + 33^3$; $15^{33} + 3^3$; $491 + 493$

$11^3 - 6^3$; $15^3 - 3^3$; 731×432

$88^3 + 53^3$; 1234567×200002

2 soit n un nombre entier naturel.

Déterminer les nombres pairs et les nombres impairs parmi les nombres suivants :

$8n + 6$; $8n + 7$; $4n + 2$; $2n + 3$

$10n + 5$; $(2n + 1) - (2n - 1)$

$(n + 2)(n + 3)$; $2n^2 + 4n + 5$

$(2006)^2 n^2 + (2005)^2$; $(2n + 1)^2 - 4n - 1$

3 x est un nombre entier pair, y est un nombre entier naturel.

1) Que peut-on dire de la parité de y dans chacun des deux cas suivants :

a) $x + y$ est pair ; b) $x + y$ est impair

2) Montrer que xy est pair, quel que soit le nombre entier y.

4 Soit n un nombre entier naturel.

Montrer que les nombres suivants sont des nombres impairs :

$A = n^2 + 13n + 17$

$B = n^3 - n + 1$

$C = (2n + 2)^2 - (2n + 1)^2$

5 Soit m un nombre entier naturel.

a) Montrer que si m est pair, alors m^2 est pair.

b) Montrer que si m est impair, alors m^2 est impair.

c) Si m^2 est pair, montrer que m est pair.

d) Si m^2 est impair, montrer que m est impair.

Multiples et diviseurs

6 1) Montrer que 231 es un multiple de 33.

2) Montrer que 231 es un multiple des nombres 7, 21 et 77.

7 Montrer que le nombre a est un multiple du nombre b dans chacun des cas suivants :

1) $a = 3333$ et $b = 33$.

2) $a = 142128$ et $b = 7$.

3) $a = 7^3 + 3^3$ et $b = 10$.

4) $a = 8^3 + 5^3$ et $b = 13$.

8 Soient x, y, et z des nombres entiers naturels tels que :

- x est multiple de y.
- y est un multiple de z.

Que peut-on dire de x^2 et z^2 ?

9 Soit A un nombre de deux chiffres : $A = \overline{xy}$

(A est le nombre dont le chiffre des dizaines est x et dont le chiffre des unités est y)

Soit B le nombre dont le chiffre des unités est x et dont le chiffre des dizaines est y : $B = \overline{yx}$

Montrer que : A + B est divisible par 11.

10 a) Montrer que 120×28 est multiple de 5×24.

b) Montrer que 15×750 est un multiple de $25^2 \times 3$.

Plus petit multiple commun
Plus grand diviseur commun

11 Calculer le plus petit multiple commun des nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) $a = 7$ et $b = 35$.

2) $a = 6$ et $b = 18$.

3) $a = 25$ et $b = 100$.

4) $a = 12$ et $b = 4$.

12 Calculer $x \wedge y$ dans chacun des cas suivants :

1) $x = 5$ et $y = 2$.

2) $x = 8$ et $y = 5$.

3) $x = 3$ et $y = 4$.

4) $x = 13$ et $y = 10$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICES ET PROBLÈMES

13 Calculer le plus grand diviseur commun des nombres a et b dans chacun des cas suivants :

1) a = 7 et b = 21

2) a = 6 et b = 30

3) a = 2 et b = 12

4) a = 20 et b = 80

14 1) Calculer $x \vee y$ et $x \wedge y$ dans chacun des cas suivants :

a) $x = 13$ et $y = 17$

b) $x = 3$ et $y = 4$

c) $x = 5$ et $y = 15$

d) $x = 25$ et $y = 50$

2) Comparer $(x \vee y)(x \wedge y)$ et xy dans chaque cas précédent.

15 1) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres x et y dans chacun des cas suivants :

a) $x = 540$ et $y = 336$

b) $x = 252$ et $y = 315$

c) $x = 14$ et $y = 26$

2) Déterminer Tous les diviseurs communs des deux nombres 540 et 336, puis des deux nombres 252 et 315.

16 1) Décomposer les deux nombres 1386 et 4620 en produit de facteur premiers.

2) En déduire le plus petit multiple commun des deux nombres 1386 et 4620.

17 1) Décomposer les deux nombres 2520 et 3150 en produit de facteurs premiers.

2) En déduire le plus grand diviseur commun des deux nombres 2520 et 3150.

Nombres premiers

18 a) Le nombre 1 n'est pas premier. Pourquoi ?
b) Le nombre 0 est-il premier ? Pourquoi ?

19 a) Combien existe-t-il de nombres pairs et premiers ?
b) Combien existe-t-il de nombres multiples de 7 et premiers ?

20 Déterminer tous les nombres entiers naturels premiers et plus petits que 20.

21 a) Est-ce-que tout nombre impair est premier ? Pourquoi ?
a) Est-ce-que tout nombre premier est impair ? Pourquoi ?

Exercices de renforcement des apprentissages

Nombres pairs et impairs

22 soit x un nombre entier naturel.

1) Développer $(x + 1)^2 - x^2$.

2) En déduire que tout nombre impair est la différence de deux carrés consécutifs.

3) Ecrire 17 et 2005 comme différence de deux carrés consécutifs.

4) Ecrire $n^2 + n + 7$ comme différence de deux carrés consécutifs, après avoir vérifié que $n^2 + n + 7$ est un nombre impair.

23 Soit n un entier naturel.
On pose : $A = (-1)^n + (-1)^{n+2} + 2$
Calculer A selon la parité de n.

24 a, b et c sont des nombres entiers naturels.
On pose : $E = (-1)^a + (-1)^b + (-1)^c + 3$.
Dans quel cas a-t-on :

1) E = 0 ? ; 2) E = 1 ?

3) E = 2 ? ; 4) E = 3 ?

5) E = 4 ? ; 6) E = 5 ? ; 7) E = 6 ?

25 Soit n un nombre entier naturel.
On pose : $F = n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) + (n + 2)n$.

1) Montrer que si n est pair, alors F est pair.

2) Montrer que si n est impair, alors F est impair.

Multiples et diviseurs

26 Le nombre entier naturel N de trois chiffres, dont le chiffre des unités est z, dont le chiffre des dizaines est y et dont le chiffre des centaines est x, sera désigné par : $N = \overline{xyz}$
On a alors : $N = \overline{xyz} = z + 10y + 100x$

1) Montrer que si $\overline{xyz} > \overline{zyx}$, alors $\overline{xyz} - \overline{zyx}$ est un multiples de 99.

2) Montrer qui si $x + y + z = 9$, alors $\overline{xyz}$ est divisible par 9.

3) Montrer que si $y = x + z$, alors $\overline{xyz}$ est divisible par 11.

Scanné avec CamScanner

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

27 Mettre le chiffre convenable à la place du point pour obtenir un nombre divisible par 2 et par 9 simultanément dans chacun des cas suivants :

13•2 ; 54•• ; 6•1•

On donnera toutes les solutions possibles.

28 Mettre les chiffres convenables à la place des points pour avoir des nombres divisibles par 2 et 3 et 5 :

4•5• | 6•6• | 22•• | 5•27•

29 1) Encadrer les nombres suivants par deux multiples consécutifs du nombre 9 :

30 ; 123 ; 7 ; 49.

2) Encadrer les nombres suivants par deux multiples consécutifs de 7 :

27 ; 53 ; 102 ; 146.

30 Déterminer le nombre entier naturel n dans chacun des cas suivants :

a) $8n < 90 < 8(n + 1)$.

b) $5n < 32 < 5(n + 1)$.

31 Déterminer cinq multiples communs des deux nombres x et y dans chaque cas :

a) $x = 126$ et $y = 300$

b) $x = 186$ et $y = 124$

c) $x = 15$ et $y = 21$

d) $x = 27$ et $y = 18$

Plus petit multiple commun
Plus grand diviseur commun

32 1) Calculer le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun des nombres 225 et 270.

2) Diviser chacun des deux nombres 225 et 270 par 9 ; puis calculer le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des quotients obtenus des deux divisions.

Que remarque-t-on ?

33 1) Déterminer $d = 204 \wedge 170$

2) Diviser 204 et 170 par d.

3) Trouver le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun des quotients obtenus. Montrer que les quotients obtenus sont premiers entre eux.

34 On pose $a = 8 \times 9 \times 5$ et $b = 100$

1) Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$

2) a) Calculer $a^2 \wedge b^2$ et $a^2 \vee b^2$

b) Calculer $(a \wedge b)^2$ et $(a \vee b)^2$

3) Que remarque-t-on ?

35 1) Déterminer le plus petit multiple commun des nombres 9 et 15.

2) En déduire le plus petit nombre entier naturel non nul dont le reste de la division par 45 est égal à 7.

36 On considère deux nombres entiers naturels a et b tels que :

$ab = 2880$ et $a \wedge b = 24$

1) Déterminer $a \vee b$.

2) Quels sont les facteurs premiers communs aux deux décompositions, en produit de facteurs premiers, de a et b ?

3) En déduire a et b.

37 a et b sont deux nombres entiers naturels tels que :

$a \wedge b = 18$

1) Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.

2) Quels sont les facteurs premiers communs à a et b.

3) Sachant que $ab = 972$, déterminer $a \vee b$.

En déduire a et b.

38 On peut répartir les employés d'une société sur de grands bureaux de 24 employés ou sur des bureaux de 28 employés, ou sur des bureaux de 36 employés.

Déterminer le nombre d'employés de cette société sachant qu'il est compris entre 1500 et 2000.

39 Un phare, au bord de la mer, envoie un signal lumineux rouge toutes les 10 secondes et un signal lumineux vert toutes les 14 secondes.

Sachant que les deux signaux (rouge et vert) sont émis simultanément à sept heures du soir, répondre aux questions suivantes :

1) Après combien, de temps, les deux signaux seront envoyés de nouveau simultanément ?

2) Combien de fois les deux signaux seront émis simultanément entre 7h du soir et 8h 30mn du soir ?

Scanné avec CamScanner

EXERCICES ET PROBLÈMES

Nombres premiers

40 Soit x un nombre entier naturel premier différent de 2.

Montrer que $x + 1$ n'est pas premier.

41 a) Citer deux nombres entiers naturels premiers différents de 2 puis calculer leur somme.

b) Cette somme est-elle un nombre premier ?

c) Soient x et y deux nombres entiers naturels premiers tels que $x \neq 2$ et $y \neq 2$.

monter que $x + y$ n'est pas premier.

42 Notons que :

$$5 = 4 \times 1 + 1$$
$$13 = 4 \times 3 + 1$$
$$17 = 4 \times 4 + 1$$

Chercher tous les nombres entiers naturels premiers plus petits que 100 et qui vérifiant la propriété précédente.

43 Déterminer tous les nombres premiers p inférieurs à 100 et qui sont tels que : p – 1 est un multiple de 6.

Exercices de synthèse

Nombres pairs et impairs

44 1) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul p, le nombre 2^p est pair.

2) Montrer que si x est un nombre entier naturel tel que $2^x = 1$, alors $x = 0$.

45 Soient x et y deux nombres entiers naturels tels que :

$x \geq 2$ et $2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844$.

1) Monter que :

$2^{x-2}(1 + 4 \times 3^x) = 16844 - 7^{2y+1}$

2) Montrer que $16844 - 7^{2y+1}$ est un nombre impair.

3) En déduire que $x = 2$ puis déterminer la valeur de y.

46 Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que a est pair et b impair.

Montrer qu'il n'existe pas de nombre entier relatif x tel que :

$$ax + b = 0$$

47 Soient a, b et c des nombres entiers naturels impairs.

1) Montrer qu'il n'existe pas de nombre entier relatif x tel que : $ax^2 + bx + c = 0$

2) Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel y tel que : $ay^2 + by + c = 0$

Multiples et diviseurs

48 1) Déterminer les diviseurs du nombre 28.

2) Montrer que la somme des inverses des diviseurs de 28, est un nombre entier naturel.

49 1) Déterminer tous les diviseurs de 15.

2) En déduire tous les nombres entiers naturels x et y qui vérifient : $(x + 3)(y + 2) = 15$

3) Déterminer tous les nombres entiers naturels x et y tels que : $xy + 3x + y = 12$

50 Déterminer deux nombres entiers naturels non nuls x et y tels que :

$$\frac{x}{y} = \frac{44}{121} \quad \text{et} \quad y - x = 357$$

51 Déterminer un nombre entier naturel n de trois chiffres tel que 3n se termine par 491.

52 Soient m et p deux nombres entiers naturels tels que $m \geq p$.

Montrer que :

a) $(m + p)^3 - p^3$ est un multiple de p.

b) $(m + p)^3 + (m - p)^3$ est un multiple de 2m.

Répartition d'élèves

53 Le nombre d'élèves dans une école est un nombre entier naturel compris entre 500 et 600.

Si on répartit les élèves en groupes de 20 élèves, il reste 7 élèves. De même, si on répartit les élèves en groupes de 12 élèves ou bien en groupes de 36 élèves, il reste chaque fois 7 élèves.

Quel est le nombre d'élèves de l'établissement ?

De la réalité environnante

53 On veut procéder au pavage d'une salle rectangulaire de dimensions 3,6m et 4m de telle sorte que les rangées de carreaux soient parallèles aux côtés de la salle.

Scanné avec CamScanner

1 EXERCICES ET PROBLÈMES

Sur le marché, il y a trois catégories de carreaux.

1ère catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 25cm de côté.

2ème catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 30cm de côté.

3ème catégorie : chaque carreau a la forme d'un carré de 40cm de côté.

Quelle catégorie faut-il choisir pour que le nombre de rangées de carreaux soit un nombre entier naturel.

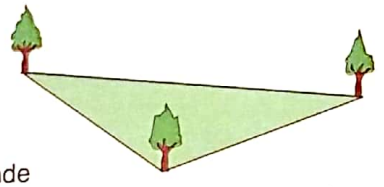
55 Deux règles graduées sont placées côte à côte (de telle sorte que les graduations soit l'une à côté de l'autre).

- La première règle mesure 144cm de longueur et est partagée en 48 segments de même longueur ;
- La deuxième règle mesure 160cm de longueur et est partagée en 32 segments de même longueur.

Déterminer, pour chaque règle, les graduations qui vont coïncider avec celles de l'autre règle et les numéros correspondants.

56 On veut planter des arbres sur le périmètre d'un jardin triangulaire de telle sorte que :

- Un arbre est planté à chaque sommet du triangle.
- La distance séparant deux arbres consécutifs est constante.



1) Quelle est la plus grande distance qui doit séparer deux arbres voisins sachant que les dimensions du jardin sont 42m, 70m, 98m ?

2) Quel est le nombre d'arbres que l'on peut alors planter autour du jardin ?

Avec l'environnement

57 Le long de la route à l'école, il y a quatre arbres : 430m sépare le premier et le second ; 645m sépare le second et le troisième et 516m est la distance entre le troisième et le quatrième.

Les responsables de l'environnement décident de planter d'autres arbres le long de la route de telle sorte que les arbres "voisins" soient séparés par la même distance.

1) Quelle est la distance qu'il faut laisser entre deux arbres consécutifs ?

2) Quel est le nombre de nouveaux arbres que l'on doit planter ?

Nombres premiers

58 Noter que :

$$5 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = 2^2 + 3^2$$
$$29 = 2^2 + 5^2$$

Chercher les nombres entiers naturels premiers inférieurs à 100 et qui vérifient la propriété précédente.

59 Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants :

a) 105 ; 119 ; 117 ; 113 ; 111 ; 107.

b) 201 ; 157 ; 193 ; 321 ; 247 ; 221.

60 Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres premiers :

137 ; 2223 ; 11111 ; 2003 ; 15631.

Problèmes

Notre entourage

61 On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain rectangulaire, de dimensions 90m et 72m, de telle sorte que la plantation respecte les conditions suivantes :

- Un arbre est planté à chaque coin (sommet) du terrain.
- La distance séparant deux arbres consécutifs est constante et égale à un nombre entier naturel valant au moins 2m.

a) Trouver la distance séparant deux arbres voisins.

b) Déterminer le nombre d'arbres nécessaires à l'opération.

Nombres de l'histoire

62 a) **Les nombres d'Euler** sont les nombre qui s'écrivent sous la forme $E_n = n^2 - n + 41$ où n est un nombre entier naturel.

Montrer que E_{40} est premier et que E_{41} n'est pas premier.

b) **Les nombres de Mersenne** sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un nombre entier naturel.

Montrer que M_5 est premier et M_6 non premier.

c) **Les nombres de Fermat** sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier naturel.

Montrer que F_4 est premier et que F_6 est divisible par 641.

Scanné avec CamScanner

Ensembles
IN ; Z ; ID ; Q ; IR

Activités préparatoires	25
Définitions et règles	28
Points essentiels	32
Exercices résolus	33
Exercices et problèmes	34

2

Capacités attendues

* Discernement des relations entre nombres et distinction des différents ensembles de nombres.
* Détermination de l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée.

Contenu

- Activités préparatoires
  - Deux nombres irrationnels
  - Opérations dans l'ensemble de nombres réels
  - Identités remarquables
  - Développement et factorisation
  - Puissances du nombre 10
  - Ecriture scientifique
- Définitions et règles
  - Différents types de nombres
  - Opérations dans IR et propriétés
  - Puissances du nombre 10
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Deux nombres irrationnels

A Supposons que $\sqrt{2}$ s'écrit sous forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux nombres entiers naturels (non nuls) et $\frac{p}{q}$ irréductible c'est-à-dire p et q sont premiers entre eux.

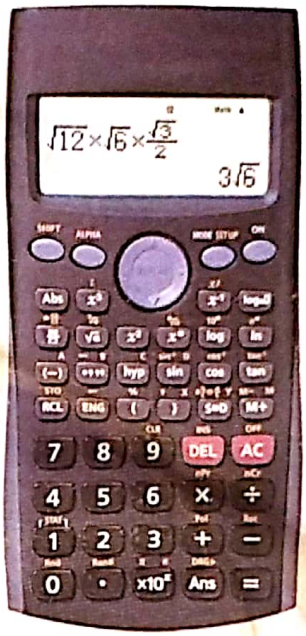
a) Vérifier que : $p^2 = 2q^2$

b) Montrer que p^2 est pair. En déduire la parité de p.

c) Montrer que q^2 est pair. En déduire la parité de q.

d) Les nombres p et q sont-ils premiers entre eux ?

e) Que peut-on en déduire ?



B a) Calculer l'expression A où :

$$A = \frac{9,801}{\sqrt{8}\left(1,103 + \frac{24\times 27,493}{396^4}\right)}$$

L'expression A donne une écriture approchée du nombre π.

b) Calculer π en utilisant la calculatrice puis comparer A et π

ACTIVITE 2 Opérations dans l'ensemble des nombres réels

A Calculer puis simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

$$B = \left(-2^{-1}+5\right)^{-1}\times\left(\frac{2}{5}-1\right)^{-2}$$

$$C = 2\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{10}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$D = \frac{\sqrt{4,9\times 10^3}}{\sqrt{3\times 10^2}\times\sqrt{12\times 106}}$$

Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITES PREPARATOIRES

B 1) Calculer $A=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{-1}$

2) On considère les deux expressions : $B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

a) Montrer que B et C sont deux nombres entiers naturels.

b) Vérifier que $A\sqrt{6}-\sqrt{10B}=18$

ACTIVITE 3 Identités remarquables

A 1) Construire un segment de longueur $\sqrt{5}$

2) On pose $a=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)$ et $b=3-\sqrt{6}$

a) Calculer a^2 et b^2.

b) Montrer que $a^2 + b^2$ est un nombre entier naturel.

3) On considère un triangle ABC rectangle en A tel que BC = a et AC = b.
Calculer AB.

B Sans trop de calculs, montrer que :

- $2^{64} - 1 = 255\ (2^8 + 1)\ (2^{16} + 1)\ (2^{32} + 1)$
- $(333333)^2 + (444444)^2 = (555555)^2$
- $(499999)^2 + 999999 = 25 \times 10^{10}$
- $(999999)^2 + (2000)^2 = (1000001)^2$

ACTIVITE 4 Développement et factorisation

A Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $(x + 1)\ (x + 2) = x(x + 3) + 2$

2) On pose $a = (x + 1)\ (x + 2)$

a) Montrer que : $x(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3) + 1 = (a - 1)^2$

b) En déduire que : $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+3\right)+1=9\left(2+\sqrt{5}\right)^2$

Scanné avec CamScanner

2 ACTIVITES PREPARATOIRES

B a, b et c sont des nombres réels.

1) Montrer que :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

2) a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle tels que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
Quelle est la nature du triangle ABC ?

ACTIVITE 5 Puissances du nombre 10

Ecrire les nombres suivants sous la forme $a.10^n$ où n est nombre entier relatif et a un nombre rationnel.

$A=0,05\times0,0006$

$B=(0,05)^2\times(0,02)^2\times10^{-7}$

$C=10^{-8}\times(0,006)^{-4}$

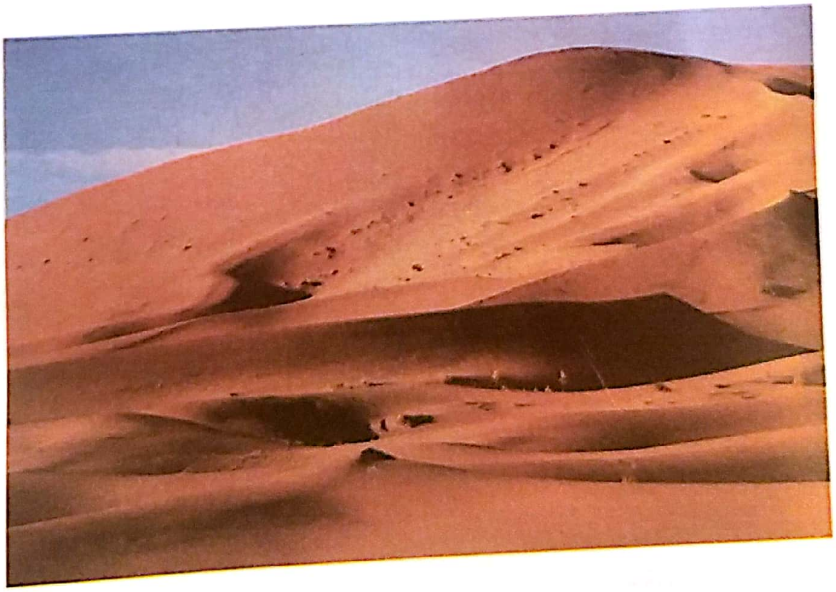
$D=(0,00004)^{11}\times\frac{1}{5}$

ACTIVITE 6 Ecriture scientifique

Selon les statistiques de 1996, l'aire des terres désertiques est estimée à $35264 \times 10^3 km^2$.

Chaque année, les terres agricoles désertifiées sont estimées à 5,5 millions d'hectares.

Si la désertification continue sur ce rythme, quelle sera l'aire des terres désertiques après dix ans ? Donner le résultat sous forme d'écriture scientifique.



Scanné avec CamScanner

2 DEFINITIONS ET REGLES

1 Différents types de nombres

1 Les nombres entiers naturels forment un ensemble que l'on note **IN**.

On écrit : $IN = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 1924, ..., 3000, ...\}$

→ Les nombres entiers naturels sont les éléments de l'ensemble IN.

Exemples et applications

- 16 est un élément de l'ensemble IN. On peut exprimer cette phrase en disant que "16 appartient à IN". On écrit $16 \in IN$.
- -16 n'est pas un élément de IN c'est-à-dire "-16 n'appartient pas à IN". On écrit $-16 \notin IN$.

2 Les nombres entiers relatifs forment un ensemble que l'on note $\mathbb{Z}$.

On écrit : $\mathbb{Z} = \{ ....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

→ Les nombres entiers relatifs sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
→ Si $n \in IN$, alors $-n \in \mathbb{Z}$.
→ Tout élément de IN est un élément de $\mathbb{Z}$.
→ On dit que IN est une partie de $\mathbb{Z}$ ou que IN est inclus dans $\mathbb{Z}$.
→ On écrit : $IN \subset \mathbb{Z}$.

Exemples et applications

- Parmi les nombres suivants, déterminer les éléments qui appartient à IN :
  $1,5 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad \sqrt{9}$
- -16 est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-16 \in \mathbb{Z}$.
- 16,3 n'est pas un élément de $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $16,3 \notin \mathbb{Z}$.

3 Les nombres décimaux forment un ensemble que l'on note **ID**.

On écrit : $ID = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in IN \right\}$

→ Les nombres décimaux sont les éléments de l'ensemble ID.

Exemples et applications

- Parmi les nombres suivants, déterminer les éléments décimaux : $\frac{1}{3}$; 3 ; $\frac{7}{0,5}$; $-0,002$.
- 12,5 appartient à ID puisque $12,5 = \frac{125}{10}$.
- Si a est un nombre entier relatif, alors a s'écrit sous la forme $a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0}$; donc a est un nombre décimal.
  Ainsi tout élément de $\mathbb{Z}$ est un élément de ID. D'ou : $\mathbb{Z} \subset ID$.
- $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal c'est-à-dire $\frac{1}{3} \notin ID$.

4 Les nombres rationnels forment un ensemble que l'on note **Q**.

On écrit : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \ ; \ b \neq 0 \right\}$

→ Les nombres rationnels sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Elément d'un ensemble

- La proposition «a est un élément de l'ensemble IN» signifie que «a est un nombre entier naturel».

Le symbole ∈

- Le symbole ∈ se lit «appartient à» ou «élément de»
- La notation $a \in IN$ signifie que a est un nombre entier naturel.
- La notation $n \notin IN$ signifie que b n'est pas un nombre entier naturel.

Le symbole ⊂

- Le symbole ⊂ se lit «inclus» ou «partie de».
- Le symbole $\not\subset$ se lit «n'est pas inclus»

Nombre irrationnel

$\sqrt{2}$ est un nombre qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Il existe d'autres nombres irrationnels ; par exemple $\sqrt{3}$; π ; ...

Scanné avec CamScanner

2 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples

- $\frac{1}{3}$ et $\frac{-2}{7}$ sont des nombres rationnels c'es-à-dire $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{-2}{7} \in \mathbb{Q}$.
- Tout nombre décimal s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^p}$ (où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$).

et appartient donc à $\mathbb{Q}$ (en prenant $b = 10^p$). Donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

- $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5 Les nombres réels forment un ensemble que l'on note IR.
IR est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels c'est-à-dire des nombres qui permettent de mesurer les longueurs et les opposés de ces nombres

→ Le nombres réels sont les éléments de l'ensemble IR.

Exemples

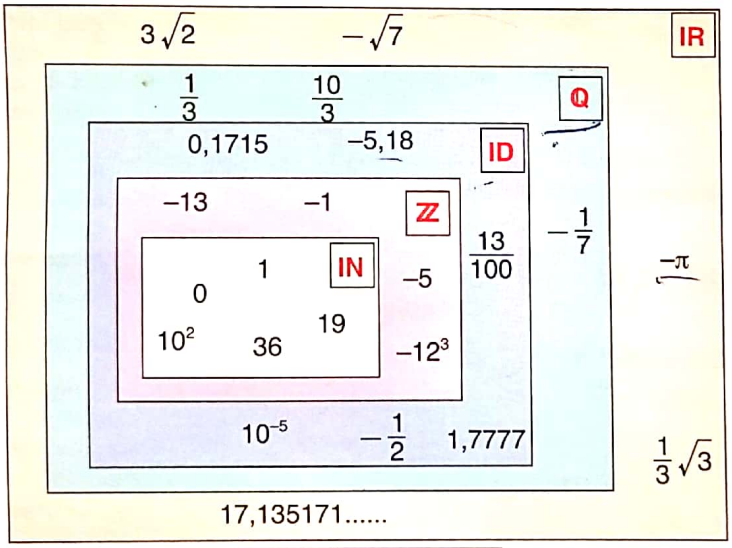
- $\sqrt{2}$ est un élément de IR c'est-à-dire $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

π est un élément de IR et π n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire π est irrationnel.

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ est un élément de IR.

Tout élément de $\mathbb{Q}$ est un élément de IR c'est-à-dire $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Conclusion



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2 Opérations dans IR et propriétés

1 **Règle fondamentale de développement et de factorisation.**
Soient a, b et c des nombres réels. On a :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Nombre réel

a nombre réel

a rationnel ou a irrationnel

Récapitulation

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque

Les nombres irrationnels n'ont pas d'écriture uniformisée (comme les nombres décimaux ou rationnels)
Ces nombres sont connus seulement par leurs propriétés.

Autre appellation

Cette règle est appelée distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Scanné avec CamScanner

2 DÉFINITIONS ET RÈGLES

Exemples

Développement

- $3(2x + 5y) = 3 \times 2x + 3 \times 5y$
  $= 6x + 15y$
- $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x - 4y\right) = -\sqrt{2} \times \sqrt{3}\,x + \sqrt{2} \times 4y$
  $= -\sqrt{6}\,x + 4\sqrt{2}\,y$

Factorisation

- $13x + 26 = 13 \times x + 13 \times 2$
  $= 13 \times (x + 2)$
- $4(x - 2) + (x - 3)(x - 2) = (x - 2)[4 + (x - 3)] = (x - 2)(x + 1)$

Conséquences

Pour tous a, b, c et d de IR, on a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

Quels que soient les réels a et b, on a :

carré d'une somme	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
carré d'une différence	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
différence de deux carrés	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Exemples

Développement

- $(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a) \times 3 + 3^2$
  $= 4a^2 + 12a + 9$
- $(7a - 3b)^2 = (7a)^2 - 2(7a)(3b) + (3b)^2$
  $= 49a^2 - 42ab + 9b^2$
- $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$
  $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 3 - 2 = 1$

Factorisation

- $81x^2 - 49 = (9x)^2 - 7^2$
  $= (9x - 7)(9x + 7)$
- $x^2 + 2x - y^2 + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2$
  $= (x + 1)^2 - y^2$
  $= (x + 1 - y)(x + 1 + y)$

Il y a d'autres identités que l'on peut déduire de la règle fondamentale.

Remarque

Développement

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Factorisation

Cette règle nous permet le développement et la factorisation.

Propriétés

- Pour tous a et b de IR :
  $a + b = b + a$ et $ab = ba$
  On dit que + et × sont commutatives dans IR.
- Pour tous a, b et c de IR :
  $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(ab)c = a(bc)$.
  On dit que + et × sont associatives.

Sommes algébriques

Lors du calcul d'une somme algébrique, on peut enlever les parenthèses précédées du signe – à condition de changer les signes des termes intérieurs à ces parenthèses.

Commentaire important

On utilise les identités remarquables :
- pour développer et factoriser.
- pour faire un calcul mental ou réfléchi.

Par exemple : $19^2 = (20 - 1)^2$

Scanné avec CamScanner

2 DEFINITIONS ET REGLES

Quels que soient les réels a et b, on a :

cube d'une somme	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
cube d'une différence	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
différence de deux cubes	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
somme de deux cubes	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Conséquence

On peut déduire le développement de $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$ en remarquant que :

$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$

$(a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b)$

Exemples et applications

- $8x^3 - 27 = (2x)^3 - (3)^3$
  $= (2x - 3)((2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2)$
  $= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
- $\left(x+\sqrt{2}\right)^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{2} + 3x\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3$
  $= x^3 + 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$
- Factoriser l'expression $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

3 Puissances du nombre 10

Définition Soit n un nombre entier naturel. On a :

$10^n = 1000\ldots00$ (n zéros) et $10^{-n} = 0{,}000\ldots01$ (n zéros)

(Exemple : $10^4 = 10000$ et $10^{-4} = 0{,}0001$)

Ecriture scientifique

Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.

Exemples :
- L'écriture scientifique du nombre 0,00028 est $2{,}8 \times 10^{-4}$
- L'écriture scientifique du nombre 11,0001 est $1{,}10001 \times 10^1$

Remarque : Si le nombre est négatif, alors son écriture scientifique est :
$-a \times 10^p$ où $a \in \mathbb{D}$ et $1 \leq a < 10$, et $p \in \mathbb{Z}$

Ecriture scientifique et calculatrice

La quasi-totalité des calculatrices utilise l'écriture scientifique lorsqu'elles affichent des nombres décimaux (à condition que l'exposant soit compris entre –99 et 99).

- Le nombre 208,12 dont l'écriture scientifique est $2{,}0812 \times 10^2$ est affiché par la calculatrice :
  – soit sous la forme 2,0812 02 – soit sous la forme $2{,}0812 \times 10^2$
- Le nombre 0,0079 qui s'écrit $7{,}9 \times 10^{-3}$ sous forme scientifique est affiché par la calculatrice :
  – soit sous la forme 7,9 –03 – soit sous la forme $7{,}9 \times 10^{-3}$

Domaine d'utilisation des puissances de 10

- Les puissances de 10 sont utilisés dans l'écriture des nombres décimaux dont les valeurs sont soit très grandes (astronomiques) ou très petites (microscopiques).

Exemples :
- La distance entre le soleil et la planète mars est $2{,}28 \times 10^8$km au lieu de 228000000
- Le temps qu'il faut à un ordinateur pour calculer une somme est de l'ordre de $4{,}8 \times 10^{-9}$s au lieu de 0,000 000 0048s.

Ordre de grandeur

- Le nombre a peut s'écrire $a = e + d$ où $e \in \mathbb{N}$, $1 \leq e < 10$ et $d \in \mathbb{D}$ vérifie $0 \leq d \leq 1$
- Le nombre $e.10^p$ est appelé ordre de grandeur de $a.10^p$
- L'ordre de grandeur permet de prévoir le nombre de chiffres du résultat et de donner ainsi une approximation préalable de ce résultat.

Scanné avec CamScanner

2 POINTS ESSENTIELS

Différents types de nombres

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Nombres entiers naturels	Nombres entiers relatifs	Nombres décimaux	Nombres rationnels	Nombres réels
$2 \in \mathbb{N}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$	$-2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$	$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\pi \in \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Identités remarquables

Pour tous réels a et b, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ecriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES RESOLUS

1 Identités remarquables

Soient x et y deux élément de IR.

1) Montrer que si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$

2) Trouver tous les nombres réels a et b qui vérifient :

$$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$$

Commentaire

- Remarquer que pour tous réels x et y :
  → $x^2 \geq 0$
  → Si ($x \geq y$ et $y \geq x$), alors $x = y$
- Dans certaines situations de calcul, on doit penser à transformer l'écriture des expressions en question avant de procéder aux opérations algébriques (factorisation, identités remarquables,...) permettant de simplifier les calculs.

Solution

1) On suppose que $x^2 + y^2 = 0$. Donc $x^2 = -y^2$

Or $x^2 \geq 0$, par conséquent $-y^2 \geq 0$; donc $y^2 \leq 0$.

Ainsi ($y^2 \leq 0$ et $y^2 \geq 0$) ; donc $y^2 = 0$; d'où $y = 0$

Il s'ensuit que $x^2 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$.

Finalement : Si $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$

2) Déterminons tous les réels a et b tels que :

$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$

$2a^2 + b^2 + 1 = 2ab - 2a$ signifie

$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2a + 1 = 0$

(changement d'écriture et décomposition de l'expression)

Donc : $(a - b)^2 + (a + 1)^2 = 0$.

D'après la question précédente, en prenant $x = a - b$ et $y = a + 1$, on en déduit $a - b = a + 1 = 0$

D'où : $a = b = -1$

Il est aisé de vérifier qu'en prenant $a = -1$ et $b = -1$, la relation proposée est satisfaite.

2 Simplification d'écriture

On considère les nombres A et B tels que :

$$A = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$$

1) Montrer que AB = 1

2) On pose $x = A + B$ et $y = A - B$

a- Calculer x^2 et y^2.

b- En déduire des écritures simplifiées de x et y.

3) Déterminer une écriture simplifiée de chacun des nombres A et B.

Commentaire

Dans certaines situations, pour simplifier des expressions, surtout celles comportant des racines carrées, on utilise le passage au carré.

Ainsi si a et b sont deux réels de même signe tels que $a^2 = b^2$, alors a = b.

(Notons que $a^2 = b^2$ n'entraîne pas nécessairement que a = b).

Solution

1) Montrons que AB = 1

On a : $AB = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}} \times \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$

$$= \sqrt{\left(19 + 6\sqrt{10}\right)\left(19 - 6\sqrt{10}\right)}$$

$$= \sqrt{(19)^2 - (6\sqrt{10})^2}$$

$$= \sqrt{361 - 360} = \sqrt{1} = 1$$

Donc : AB = 1

2) a- Calculons x^2 et y^2

On a : $x^2 = (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$x^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 2 + 19 - 6\sqrt{10}$

Donc : $\boxed{x^2 = 40}$

On a : $y^2 = (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$y^2 = 19 + 6\sqrt{10} - 2 + 19 - 6\sqrt{10}$

Donc : $\boxed{y^2 = 36}$

b- Simplification de x et y

On a : $x^2 = 40$ et $x > 0$; donc $x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

On a : $y^2 = 36$ et $y > 0$; donc $y = 6$

3) Simplification de A et B.

On a $\begin{cases} x = 2\sqrt{10} \\ y = 6 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} A + B = 2\sqrt{10} & (1) \\ A - B = 6 & (2) \end{cases}$

- En additionnant les égalités (1) et (2) membre à membre, on obtient : $2A = 6 + 2\sqrt{10}$ d'où : $A = 3 + \sqrt{10}$
- Par ailleurs : B = A – 6. Donc : $B = -3 + \sqrt{10}$

Remarque : On peut simplifier A et B en notant que :

$$\begin{cases} 19 + 6\sqrt{10} = 9 + 2 \times 3\sqrt{10} + 10 = \left(3 + \sqrt{10}\right)^2 \\ 19 - 6\sqrt{10} = 9 - 2 \times 3\sqrt{10} + 10 = \left(-3 + \sqrt{10}\right)^2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Nature des nombres

1 Recopier puis compléter en utilisant l'un des symboles $\in$ ou $\notin$.

1) -12 ... IN ; -12 ... $\mathbb{Z}$; -12 ... Q
2) 37,9 ... IN ; 37,9 ... $\mathbb{Z}$; 37,9 ... Q
3) $\frac{95}{19}$ ..... IN ; $\frac{95}{19}$ ..... $\mathbb{Z}$; $\frac{95}{19}$ ..... Q
4) $\frac{7}{11}$ ..... IN ; $\frac{7}{11}$ ..... $\mathbb{Z}$; $\frac{7}{11}$ ..... Q

2 **Vrai ou faux !**

1) $-3 \in$ IN ; $-3 \in \mathbb{Z}$; $-3 \in$ Q ; $-3 \in$ IR
2) $7 \in$ IN ; $7 \in \mathbb{Z}$; $7 \in$ Q ; $7 \in$ IR
3) $-1,4 \in$ IN ; $-1,4 \in \mathbb{Z}$; $-1,4 \in$ Q ; $-1,4 \in$ IR
4) $0 \in$ IN ; $0 \in \mathbb{Z}$; $0 \in$ Q ; $0 \in$ IR

3 Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres décimaux :

$-0,0093$; $\frac{37}{49}$; 3 ; 3,14 ; $\frac{19}{665}$; $\sqrt{47,61}$

4 Pour les nombres suivants, déterminer le "plus petit" ensemble de nombres auquel ils appartiennent (Est-ce IN, $\mathbb{Z}$, Q ou IR ?)

1) 3,77 ; $\frac{32}{12}$; $-\frac{155}{5}$; $\frac{-\sqrt{49}}{8}$
2) $\frac{-28\pi}{-4\pi}$; $\frac{\pi+2}{\pi+4}$; $\frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{39}}$; $\frac{-7,15}{5}$
3) $-4\sqrt{5}+20$; 10^{-7} ; -10^{7} ; $(5\sqrt{3}-2)^2$
4) -29 ; 1,37 ; $\sqrt{13}$; 3π
5) $-\frac{29}{5}$; $\frac{3,14\ 1593}{\pi}$; $\frac{969}{57}$; $\frac{\sqrt{1156}}{2}$
6) $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{343}}$; $-4,7 \times 10^{3}$; $\frac{1,111\ 11111}{9}$

3 **Equation particulière**

Déterminer tous les nombres entiers naturels x et y tels que :

$$\frac{x}{2}-\frac{3}{y}=1$$

Opérations dans IR

6 Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

1) $A=\frac{5}{3}-\frac{5}{6}-0,75-\frac{1}{3}\left(3-\frac{3}{4}\right)$

2) $B=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\left(7-\frac{57}{19}\right)$

3) $C=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

4) $D=\left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right):\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$

pour n = 2, puis pour n = 3, puis pour n = 4.

5) $E=\frac{12,95}{60,84}-19+\frac{60,84}{12,95}+\frac{4\,072\,900}{19}$

7 Calculer la valeur numérique de x dans chacun des cas suivants :

1) $\frac{x}{3}=\frac{6}{7}$; 2) $\frac{4,5}{x}=\frac{-5}{3,4}$
3) $\frac{7}{4,2}=\frac{x}{34}$; 4) $\frac{9,3}{0,3}=\frac{7,5}{x}$
5) $\frac{a}{3,5}=\frac{x}{a^2}$; 6) $\frac{\sqrt{9,5}}{b}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{19}}}$

où a et b sont deux nombres réels non nuls.

8 Déterminer x dans chaque cas :

1) $\frac{x}{7}=\frac{119}{49}$; 2) $\frac{371}{2809}=\frac{399}{x}$; 3) $\frac{169}{x}=\frac{x}{196}$

9 Soient x et y deux nombres entiers naturels premiers entre eux tels que : $\frac{1001}{5577}+\frac{285}{665}=\frac{x}{y}$

Calculer $x + y$

10 a, b, c sont des réels tels que $abc \neq 0$

Si $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, calculer c en fonction de a et b

11 Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que :

$(a - b)(3a - 2b) = 2ab$

1) Montrer que $a \neq b$ et $a \neq -b$

2) Calculer $\frac{a+b}{a-b}$

12 Calculer le nombre réel α sachant que :

$$2=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\alpha}$$

13 Calculer x sachant que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+x=2$$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

14 Déterminer n de $\mathbb{N}^*$ dans chaque cas :

1) $7-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}\right)=\frac{n}{64}$

2) $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{5-\dfrac{1}{6}}}}=\dfrac{10(2n-3)}{43n}$

15 Soient x, y et z des nombres réels non nuls tels que :

$(13x + y)(13x + z) = 169x(x + 1) + yz$

Calculer $y + z$

16 Soient x et y deux nombres réels non nuls tels que :

$x + y \neq 0$ et $x - y \neq 0$

Simplifier l'expression :

$$E=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}-\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

17 Soient x et y deux réels tels que :

$x + y \neq 0$ et $x + y + 1 \neq 0$

Simplifier l'expression suivante :

$$F=\left(1+\frac{1}{x+y}\right)\left(1-\frac{1}{x+y+1}\right)$$

18 Soit x un nombre réel différent de 1 et de 2.

Simplifier l'écriture de l'expression :

$$G=\frac{1}{x-1}-\frac{1-\frac{1}{x-2}}{1+\frac{1}{x-2}}$$

19 Soient x et y deux nombres réels non nuls et distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}=\dfrac{y}{x}$

b) Calculer la valeur du nombre H tel que :

$$H=\frac{-1+\frac{1}{1+\sqrt{5}}}{1+\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$$

20 Soient x et y deux nombres réels tels que :

$(x + 1)(y - 1) + 1 \neq 0$

On pose : $a=\dfrac{x+2}{xy-x+y}$ et $b=\dfrac{(x+1)y}{xy-x+y}$

Monter que : $(x + 1)(a - b + 1) = a + b - 1$

21 soient x et y deux nombres réels non nuls tels que :

$x \neq y$ et $2005(x + y) = 1$

1) Montrer que : $\dfrac{1}{xy}=2005\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

2) Calculer la valeur de l'expression I suivante :

$$I=\frac{y}{y-x}-\frac{y-x}{y}-\frac{x}{y-x}-\frac{y-x}{x}+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+2$$

Puissances

22 Simplifier les écritures suivantes :

$A=\dfrac{8^{93}\times 3^{-51}}{9^{25}\times 2^{280}}$; $B=\left(\dfrac{5^7\times 2^{-5}}{8\times 625}\right):\left(\dfrac{10^3\times 5^2}{56}\right)$

$C=\dfrac{(3^7\times 2^{-6}\times 9^{-1})^2}{(9^{-2}\times 3^2\times 2^{-1})^3}$; $D=\left(\dfrac{5^8}{10^2\times 2}\right)\left(\dfrac{2^3\times 5^{-3}}{4\times 25}\right)^2$

23 Soient x, y et z des nombres réels non nuls.

Simplifier les expressions suivantes et donner le résultat sous forme de produit ou de quotient de puissances à exposants positifs :

1) $X=\dfrac{(x^2y)^{-3}\times z^2}{xy^{-3}}$; 2) $Y=\dfrac{-x^2\times zy^{-1}}{xy}$

3) $Z=\dfrac{(-x)^2\times 2y}{2y^{-1}}$; 4) $T=\dfrac{(x^2y)^{-3}z^5x^4}{x(yz^2)^2y^{-1}}$

5) $W=\dfrac{(2y)^5\times 7x^{-2}}{(xy)^5}$; 6) $U=\dfrac{(-x)^5yz^{-2}}{y^3(-z)^{-3}x^2}$

Ecriture scientifique

24 Ecrire les nombres suivants sous forme d'écriture scientifique :

$a = 3600 \times 20\,000$; $b = 5\,000 \times 0,000\,05$

$c = 13 \times 10^{-7} \times 0,04$; $d=\dfrac{720\times 10^5}{0,000\,002}$

En physique

25 Ecrire les constantes universelles sous forme d'écriture scientifique :

$c = 299\,792\,458$; $e = 1602,1892 \times 10^{-22}$ $F = 96\,484,56$

$g = 980,665 \times 10^{-2}$; $h = 0,662\,6176$

$u = 166,0565 \times 10^{-29}$; $N_A = 60\,220,45 \times 10^{19}$

Identités remarquables

26 Factoriser ce qui suit :

1) $A = 9x^2 - 4$; 2) $B = 64x^3 - 27$; 3) $C = 27x^4 + 64x$

4) $G = 36 - 16x^2$; 5) $D = (3x + 2)^2 - 36(x + 1)^2$

6) $E = (-2x + 1)^2 - (4 - 8x)(x + 3) + (3 - 12x^2)$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

27 Développer et réduire ce qui suit :

1) $(2x+3)^2$; 2) $(7x-3y)^2$

3) $(x+y)^2-(x-y)^2$; 4) $(2x+3y)^3$

5) $(a+b)^3-(a-b)^3$; 6) $(a+b-c)^3$

28 x et y sont deux réels tels que : $x^2-y^2=-1$

Calculer $(x+y)\left((x+y)^{-1}+\dfrac{1}{(x-y)^{-1}}\right)$

29 x et y sont deux nombres réels non nuls tels que $x^2 \neq y^2$

Simplifier les écritures :

1) $A=\dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}$; 2) $B=\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$

3) $C=\dfrac{x+y+\dfrac{2y^2}{x-y}}{\dfrac{x+y}{2xy}-\dfrac{1}{x+y}}$; 4) $D=\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{xy-y^2}{xy-x^2}$

Exercices de renforcement des apprentissages

30 x, y et z sont trois nombres distincts deux à deux.

Montrer que :

$$\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-z)(y-x)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$$

31 x, y et z sont des nombres réels. On pose : $p=\dfrac{x+y+z}{2}$

Montrer que : $p^2+(p-x)^2+(p-y)^2+(p-z)^2=x^2+y^2+z^2$

32 a) Développer $(x+y+z)^2$

b) On suppose que x, y et z sont des nombres réels non nuls.

Montrer que :

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ signifie que $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

33 Calculer :

$$A=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+....+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)$$

$$B=\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{3}{3}\right)...\left(2-\frac{100}{3}\right)$$

34 a, b et c sont des réels positifs tels que :

$0<a<b<c$ et $2b=a+c$

Montrer que : $\dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

35 Soient x et y de IR. On désigne par $x * y$ le plus grand des deux nombres x et y.

(Exemples : $2 * 3 = 3$; $(-1) * 0 = 0$; $5 * 5 = 5$)

Montrer que : $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$

36 Si l'on pose $x \top y=\dfrac{xy}{x+y}$, calculer alors

$(x \top x) \top x$ et $(x \top x) \top (x \top x)$

37 Ecrire les nombres suivants sous la forme $3^m \times 17^n$ où m n sont deux nombres entiers relatifs.

1) $x=\left(\dfrac{17}{27}\right)^7$; 2) $y=\dfrac{3^9}{(153)^4}$

3) $z=27^{-3}\times(17^{-3})^2$; 4) $u=\dfrac{51^4}{3^5}$; 5) $t=\left(\dfrac{17}{9}\right)$

38 Calculer les nombres suivants :

$a = 2^{2005} \times (0,5)^{2007}$; $b = 40^{197} \times (1,25)^{98} \times 10^{-99}$

$c = 12^{2n} \times (1,5)^n \times 6^{-3n+1}$ $(n \in IN)$

39 Quel est le nombre de chiffres du nombre entier

$N = 4^{32} \times 5^{71}$?

40 Quel est le nombre de chiffres du nombre $P = 10^{2005} - 20$

41 Déterminer tous les nombres entiers naturels non nu

tels que : $(x^x)^x = x^{(x^x)}$

42 Simplifier les écritures suivantes où a, b et c sont nombres strictement positifs.

1) $x=\sqrt{ab^2c^2}$; 2) $y=\sqrt{a^{-2}b^2}$

3) $z=\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c^2}}$; 4) $t=\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$; 5) $u=\sqrt{\dfrac{a^-}{ab}}$

43 Montrer que :

1) $\sqrt{7,2}=\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{845}+\sqrt{5}=\sqrt{98}$

3) $\sqrt{10,125}=2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{1}{2}\sqrt{18,05}=\sqrt{5}-$

44 On sait que si a est un réel différent de 0, de 1 et de **si $a^x = 1$, alors $x = 0$**

1) Montrer que si a est un réel différent de 0, de 1 et d et si m et n sont deux nombres entiers relatifs tels $a^m = a^n$, alors m = n

2) Déterminer le nombre entier relatif x dans chacu cas suivants :

a) $2^{x+2}=\dfrac{1}{32}$

b) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x=3^{-2x}\times 9$

c) $3^{x-1}+3^{x+1}=810$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} = (7^{x+1})^{x-1}$

e) $5^{x+2} = 625 \times 5^{3x+1}$

45 Calculer $A = \dfrac{x^{-4}y^3(x^4y^{-3})x^{-6}y^6}{x^2y^{-6}(x^{-6}y^6)x^4y^9}$

pour $x = 10^{-6}$ et $y = -10^{-4}$

46 Simplifier A et B et calculer leurs valeurs numériques pour $x = 100$ et $y = -0{,}1$:

$$A = \frac{x^{-2}y^{-3}(xy^2)^3 + x^3y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)+\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\left(1+\frac{x}{y}\right)\times\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

47 Déterminer les deux nombres entiers relatifs x et y tels que :

$$10^{2xy} \times \frac{1}{100\,000} = \left(\frac{1}{10^2}\right)^{-5} \times 10^3$$

Calculatrice

48 On considère le nombre : $A = \dfrac{6{,}8 \times 10^{-8} + 0{,}000\,000\,85}{49{,}3 \times 10^{-6} - 34 \times 10^{-7}}$

a) Sans utiliser la calculatrice, écrire le numérateur et le dénominateur du nombre A sous forme d'écriture scientifique puis écrire A sous forme scientifique.

b) Calculer A en utilisant la calculatrice.

Vitesse de la lumière

49 Sachant que la vitesse de la lumière est c = 300 000km/s, qu'une année-lumière est la distance que parcourt la lumière (dans le vide) pendant une année julienne de 365 jours et que la galaxie la plus lointaine de la terre se trouve à 13,1 milliards d'années-lumière, calculer cette distance (en km) en utilisant l'écriture scientifique.

50 Soit n un élément de IN.

On pose : $E = \dfrac{(8^{n+3}+8^{n+2})^2}{(4^{n+2}-4^n)^3}$

Calculer E et vérifier qu'il est indépendant du nombre n.

51 Soit a un nombre réel non nul.

Quel est le nombre minimal de multiplications que l'on peut effectuer pour calculer a^7 ; a^9 ; a^{11} ; a^{13} ; a^{17} ?

52 a, b et c sont des nombres réels. Factoriser les expressions suivantes :

$E = (ab - 13a)(ab + 13a) - (5a + 65)(3b - 39)$

$F = ab + 7a + bc + 7c$

$G = abc + 3bc - 3ac - 9c$

$H = a^2b - ab^2 + bc^2 - ac^2 + a^2c - abc + b^2c - abc$

$K = a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$

53 On considère a et b tels que :

$$a = \sqrt{14+6\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

1) Calculer $(3+\sqrt{5})^2$ et $(3-\sqrt{5})^2$ puis simplifier a et b.

2) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel t tel que :

$$(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sqrt{7-3\sqrt{5}} = t\sqrt{2}$$

54 a) $\left(\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$

b) $36^3 = (27+3\sqrt{5})^3 + (27-3\sqrt{5})^3$

c) $4^3 = \left(\dfrac{\sqrt{85}+1}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{\sqrt{85}-1}{2}\right)^3$

55 x est un nombre réel non nul.

On pose $X = x + \dfrac{1}{x}$ et $Y = x - \dfrac{1}{x}$

a) Calculer $x^2+\frac{1}{x^2}$; $x^3+\frac{1}{x^3}$; $x^4+\frac{1}{x^4}$ en fonction de X

b) Calculer $x^2+\frac{1}{x^2}$; $x^3+\frac{1}{x^3}$; $x^4+\frac{1}{x^4}$ en fonction de Y

56 On pose $a = \sqrt{3}-\sqrt{2}$; $b = \sqrt{3}+\sqrt{2}$; $c = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

Montrer que : $a^4+1 = 10a^2$; $b^4+1 = 10b^2$; $c = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1+c}}$

57 x est un nombre réel différent de 1 et de –1.

Simplifier A et B où :

$$A = \left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2 \; ; \; B = \left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2$$

58 x est y sont deux nombres non nuls tels que $x + y \neq 0$

a) Montrer que $(x+y)^2 \neq x^2+y^2$ et $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \neq \dfrac{1}{x+y}$

b) Montrer que si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\sqrt{x}+\sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

59 Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$x + y = 2 \text{ et } x^2 + y^2 = 8$$

Calculer $x^4 + y^4$; $x^3 + y^3$ et $x^6 + y^6$

60 a est un nombre réel strictement positif et différent de1.
Pour tout n de $\mathbb{Z}$, on pose : $X = a^n + a^{-n}$ et $Y = a^n - a^{-n}$
Calculer $X^2 - Y^2$ en fonction de a et n.

61 x, y et z sont des nombres réels. On pose :
$A = x^2 - yz$; $B = y^2 - zx$; $C = z^2 - xy$
Montrer que : $xA + yB + zC = (x + y + z)(A + B + C)$

62 Montrer que pour tous x, y, a et b de IR, on a :

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

63 a) Développer $(x + y + z)(xy + yz + zx)$
b) Développer $(x + y + z)^2$ et $(x + y + z)^3$
c) On suppose que : $x + y + z = 0$ et $xyz = 1$
Calculer $x^3 + y^3 + z^3$

64 a) Montrer que :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$

b) Calculer : $\dfrac{a^2 - bc}{1 + \frac{b+c}{a}} + \dfrac{b^2 - ca}{1 + \frac{c+a}{b}} + \dfrac{c^2 - ab}{1 + \frac{a+b}{c}}$

Exercices de synthèse

65 On pose :

$$A = (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2$$

$$B = (x - y)^2 (x - z)^2 + (y - z)^2 (y - x)^2 + (z - x)^2 (z - y)^2$$

$$C = \frac{(x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4}{2}$$

Montrer que : A = B = C

66 a, b, c et d sont des nombres réels tels que

$$a + b + c + d = 0$$

Montrer qu'il existe des nombres x, y et z, que l'on déterminera, tels que :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = x(a + b) = y(c + d) = 3z$$

67 a) Montrer que : $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
b) En utilisant cette égalité, calculer :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{32} \text{ et } B = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{32}{243}$$

c) Montrer que $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
d) Calculer $A + \frac{1}{64}$ et $B + \frac{64}{729}$

68 Montrer que :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{9999^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10000^2}\right) = 0,50005$$

69 Quel est le plus petit nombre entier naturel de 12 chiffres de somme égale à 80 ?

70 Calculer : $(1 + 3)(1 + 3^2)(1 + 3^4)(1 + 3^8)(1 + 3^{16})(1 + 3^{32})$

71 Montrer que :

$$x + x(1 + x) + x(1 + x)^2 + \ldots + x(1 + x)^{99} = (1 + x)^{100} - 1$$

72 n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que : $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\ldots(2^{2^n}+1) = 4^{2^n} - 1$

73 On considère deux triangles ADE et BCD tels que :

$AD = 1 + 3\sqrt{2}$; $AE = 2\sqrt{2}$; $DE = 3 + \sqrt{2}$
$BC = 4 - 2\sqrt{2}$; $BD = 2\sqrt{2} - 1$; $CD = 5 - 2\sqrt{2}$

a) Montrer que ADE et BCD sont deux triangles rectangles.
b) Montrer que : cos ADE = cos BDC
c) Construire un dessin où D, B et E sont alignés et C est un point de (AD).

74 Soient x et y deux nombres entiers relatifs tels que :

$$x^2 + 2y + 6 = x(y + 6)$$

a) Montrer que : $(2x - (y + 6))^2 = (y + 2)^2 + 8$
b) Calculer les valeurs de x et y.

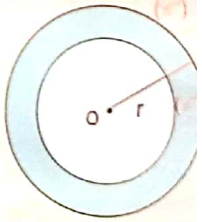
75 Déterminer le nombre entier naturel x tel que :

$$4^x + 3 \times 2^x = 88$$

Problèmes

Vers la géométrie

76 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles concentriques en O.
Le rayon de $\mathscr{C}$ est r, le rayon de $\mathscr{C}'$ est r + 1.
a) A est l'aire de la partie colorée.
Calculer A en fonction de r.
b) Peut-on avoir A = 3 ?
c) Montrer que si $r \in \mathbb{N}^*$, alors $A \notin \mathbb{Q}$.



77 Montrer que pour tout réel x différent de $-1-\sqrt{2}$, on a

$$\sqrt{\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2} - 1)x + 1}{x + 1 + \sqrt{2}}} \in \mathbb{N}$$

Scanné avec CamScanner

2 EXERCICES ET PROBLÈMES

Réflexion plus approfondie

78 Déterminer un nombre entier naturel n composé de deux chiffres tel que : $\sqrt{n+\sqrt{n+7}} \in \mathbb{N}$

Preuve

79 x et z sont deux entiers naturels tels que :

$$2^{3x+z-3} - 11 \times 2^{3x-5} + 2^{z+2} = 2000$$

a) Montrer que :

$$(2^{3x-5} + 1)(2^{z+2} - 11) = 3^2 \times 13 \times 17$$

b) En déduire les valeurs de x et z.

Défi à relever

80 Déterminer n de IN tel que :

$$\sqrt{1+5^n+6^n+11^n} \in \mathbb{N}$$

Géométrie et arithmétique

81 Soit x un nombre entier naturel non nul.
On considère deux points A et B du plan tels que AB = 4x.
Soit O le milieu de [AB].
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon x.
$\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont les deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon x.
($\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont tangents à $\mathscr{C}$).
La droite (AB) coupe $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_B$ respectivement en E et F, F et F′, F′ et E′ tels que A ∈ [EF], O ∈ [FF′] et B ∈ [E′F′].
Soit (Δ) une droite passant par E, tangente au cercle $\mathscr{C}_B$ en un point M et coupant $\mathscr{C}$ en deux points R et S avec ES > ER.
Soit H le projeté orthogonal du point O sur (Δ).
On pose : OH = α et RS = β.

1) a) En utilisant le théorème de Thalès, calculer α en fonction de x.

b) α est-il un nombre rationnel ? décimal ?

c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles α est un entier naturel ? un naturel premier ?

2) a) Calculer HS et β en fonction de x.

b) β Est-il un nombre rationnel ?

c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles β est un entier naturel ? un naturel premier ?

Réflexion plus approfondie

82 Factoriser les deux expressions :

$$A = x^8 + x + 1 \quad ; \quad B = x^{10} + x^5 + 1$$

83 On pose : $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}=18$ où $x > 0$.
Déterminer la valeur numérique de $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}$
(sans chercher la valeur de x).

84 Déterminer les nombres entiers naturels a, b et c tels que

$$a^6 = (b+8)^3 \quad \text{et} \quad c^{12} + (b-8)^3 = 0$$

Scanné avec CamScanner

Ordre dans l'ensemble IR

Activités préparatoires	41
Définitions et règles	46
Points essentiels	54
Exercices résolus	56
Exercices et problèmes	58

3

Capacités attendues

* Maîtrise des différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utilisation de la plus pertinente d'entre elles selon la situation étudiée.
* Représentation des différentes relations relatives à l'ordre sur une droite numérique.
* Connaissance et détermination de l'approximation d'un nombre (ou d'une expression) à une précision donnée.
* Effectuer des majorations et des minorations d'expressions algébriques.
* Utilisation de la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.

Contenu

- Activités préparatoires
  - Ordre dans l'ensemble IR
  - Opposé d'un nombre et signe d'un nombre
  - Distance et valeur absolue
  - Intervalles
  - Intersection et réunion d'intervalles
  - Encadrement et valeurs approchées
  - Approximation
  - Calculatrice
  - Limites de la calculatrice et encadrement
- Définitions et règles
  - Ordre dans l'ensemble IR
  - Ordre et opérations
  - Encadrement et opérations
  - Encadrement de l'inverse et du quotient
  - Approximations
  - Approximations décimales
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Ordre dans l'ensemble IR

A 1) Comparer $x = 2\sqrt{5}$ et $y = 5\sqrt{2}$

2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

On pose : $A = \dfrac{a + a^2}{1 + a + a^2}$ et $B = \dfrac{b + b^2}{1 + b + b^2}$

$E = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ et $F = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}$

a) Comparer A et B.

b) Montrer que : $E < 0$ et $F < 0$.

c) Montrer que : $0 < \dfrac{E}{F} < 1$

d) Comparer E et F.

B Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

On pose : $a = x + \dfrac{1}{x}$, $b = y + \dfrac{1}{y}$, $c = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

1) Vérifier que : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$

Déterminer alors $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ et $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ en fonction de a.

2) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6$

3) Montrer que : $a \geq 2$ et $c \geq 2$.

4) En déduire que : $a + b + c \geq 6$ et $abc \geq 8$.

5) A t-on $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$?

ACTIVITE 2 Ordre dans l'ensemble IR

1) Déterminer l'opposé de chacun des nombres réels suivants :

$-4,7$	9	$\dfrac{-3}{4}$	0	$7 - x$	$-x\sqrt{2}$	$2y + 81$	$\dfrac{17}{8} + x$	$-x$	$x - y$

2) Soit x un nombre réel. Etudier le signe de $-x$.

3) Calculer a – b et b – a en précisant leurs signes dans chacun des cas suivants :

a) $a = 17,8$ et $b = 3,5$; b) $a = \dfrac{22}{7}$ et $b = -3,75$; c) $a = -\dfrac{7}{2}$ et $b = \dfrac{-14}{5}$

ACTIVITE 3 Distance et valeur absolue

Soit (Δ) une droite graduée d'origine O. **On peut déterminer la position d'un point M de la droite (Δ) au moyen d'un nombre réel x.**

x est l'abscisse du point M . On écrit M(x). Le point M est représenté sur (Δ) comme suit :

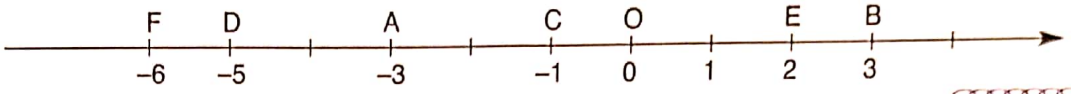


Selon l'emplacement du point M relativement à l'origine O

Scanné avec CamScanner

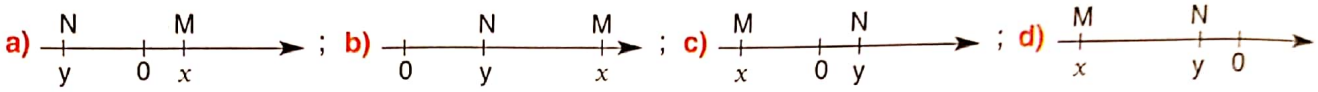
3 ACTIVITES PREPARATOIRES

On considère les points A, B, C, D, E et F représentés sur (Δ) ci-dessous :



AB = (abscisse de B) − (Abscisse de A)
Plus grand des deux abscisses
Plus petit des deux abscisses
$AB = x_B - x_A$ $(x_B > x_A)$

1) Déterminer les distances AB, AC, AD, AE, AF.
2) Soient M et N deux points de (Δ) d'abscisses respectives x et y.
Déterminer la distance entre les deux points M et N dans chacun des cas suivants :



3) En déduire que : OM = x si x est positif et OM = $-x$ si x est négatif

Le nombre OM est appelé la valeur absolue du nombre réel x et est noté $|x|$ c'est-à-dire $OM = |x|$.

4) Calculer $|-2|$; $\left|\frac{5}{3}\right|$; $|3-\pi|$; $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

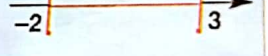
5) Montrer que : $MN = |y - x|$

Par convention, la distance entre M et N est communément appelée distance entre x et y

ACTIVITE 4 Intervalles

1) Déterminons les nombres réels x qui vérifient $|x-7| \leqslant 2$.
La relation $|x-7| \leq 2$ signifie que $[x \geq 7 \text{ et } x-7 \leq 2]$ ou $[x \leq 7 \text{ et } 7-x \leq 2]$
c'est-à-dire ($7 \leq x \leq 9$ ou $5 \leq x \leq 7$) ou encore $5 \leq x \leq 9$.
L'ensemble des nombres réels x qui vérifient $5 \leq x \leq 9$ est appelé **intervalle fermé** (d'origine 5 et d'extrémité 9) ; on le note **[5 ; 9]**.
Que signifie $x \in [-2 ; 3]$?

$|x-7| \leqslant 2$
Signifie que la distance entre x et 7 est inférieure ou égale à 2



2) Les nombres réels x tels que $|x-7| < 2$ sont les nombres vérifiant $5 < x < 9$ et formant un ensemble appelé **intervalle ouvert** (d'origine 5 et d'extrémité 9) ; on le note **]5 ; 9[**.
Que signifie $x \in \left]-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right[$?

3) L'ensemble des nombres réels que vérifient $x \geq a$ se note **[a ; +∞[**.
Cet intervalle se lit "a plus l'infini".
L'ensemble des nombres réels x qui vérifient $x \leq a$ se note **]−∞ ; a]** et se lit "moins l'infini a".

Remarque
Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$

Autre notation	Autre notation
$\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}^- =]-\infty ; 0]$
$\mathbb{R}^{*+} =]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}^{*-} =]-\infty ; 0[$
$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$	

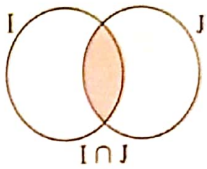
La droite numérique est toute droite rapportée à un repère

Scanné avec CamScanner

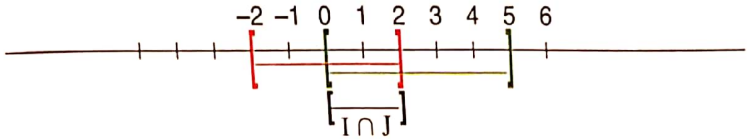
3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 5 Intersection et réunion d'intervalles

A **Intersection** On considère les deux intervalles I = [–2 ; 2] et J = [0 ; 5].



Quels sont les éléments communs aux deux ensembles I et J.
Pour faciliter la recherche des éléments communs, on utilise la droite numérique et on représente chacun des deux intervalles I et J ?



- Le symbole ∩ se lit "intersection" ou "inter
- $x \in I \cap J$ signifie que ($x \in I$ et $x \in J$)

A partir de cette représentation, il s'avère que les éléments communs aux deux ensembles I et J constituent l'intervalle K = [0 ; 2]

On dit que l'intervalle K est **l'intersection des deux intervalles** I et J ; on le note K = $I \cap J$.

L'ensemble vide

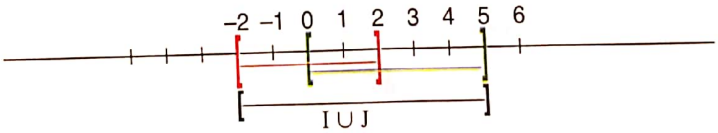
S'il n'existe aucun nombre commun à I et J, on dit que l'ensemble $I \cap J$ est vide et on écrit $I \cap J = \varnothing$

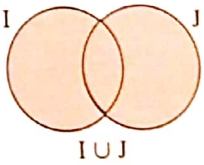
Applications : Déterminer $I \cap J$ dans chacun des cas suivants :

1) I = [0 ; 5] et J =]–2 ; 3[
2) I = [–10 ; 0] et J = [–3 ; +∞[
3) I = [–2 ; 3] et J =]–∞ ; 0]

Réunion On considère les deux intervalles I = [–2 ; 2] et J = [0 ; 5]

Quels sont les éléments qui appartiennent à I ou à J ?
Pour faciliter la recherche des éléments qui appartiennent à I ou à J, on utilise la droite numérique et on représente chacun des deux intervalles I et J.





A partir de cette représentation, il s'avère que les éléments qui appartiennent à l'ensemble I où à l'ensemble J constituent l'intervalle L = [–2 ; 5].
On dit que l'ensemble L est **la réunion (ou l'union) des deux intervalles** I et J ; on le note L = $I \cup J$.

- Le symbole ∪ se lit "union"
- $x \in I \cup J$ signifie que ($x \in I$ ou $x \in J$)

B 1) Déterminer les deux réels c et r qui vérifient :
($x \in]-\infty ; -6] \cup [4 ; +\infty[$ équivaut à $|x-c| \geqslant r$

2) Soit x un nombre réel tel que $|x-2| \leqslant 0,001$
a) Donner un encadrement de $x^2 - 2x$
b) En déduire que $|x^2-2x| \leqslant 0,002001$

3) Soit x un élément de IR tel que $|x-3| < 1$
Déterminer deux réels k et k' tels que :
a) $|x^2-9| \leqslant k|x-3|$
b) $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| \leqslant k'|x-3|$

4) Soient a, b deux réels et c un réel positif.
a) Montrer que :
si $|a| \leqslant c$ et $|b| \leqslant c$
alors $|a+b| + |a-b| \leqslant 2c$
b) Montrer que :
si $|a+b| + |a-b| \leqslant 2c$
alors $|a| \leqslant c$ et $|b| \leqslant c$

Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 6 Encadrement et valeurs approchées

A 1) Sur l'écran de la calculatrice, on lit 12,7388889

Parmi les valeurs suivantes, déterminer la valeur approché de ce nombre à 0,01 près.

12,7 | 12,74 | 12,738

2) a) Vérifier que $1<\sqrt{2}<2$. La différence 2 – 1 est appelée **amplitude de cet encadrement.**

b) Calculer $(1,4)^2$ et $(1,5)^2$; en déduire un encadrement de $\sqrt{2}$, quel est son amplitude ?

c) Calculer $(1,40)^2$ et $(1,41)^2$; en déduire autre encadrement de $\sqrt{2}$, quel est son amplitude ?

3) **Parmi les encadrements d'un même nombre, le plus fin est celui qui a la plus petite amplitude.**

a) Parmi les encadrements précédents de $\sqrt{2}$, quel est le plus fin ?

b) Montrer que 1,41 est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à 0,01 près.

c) Montrer que : $|\sqrt{2}-1,41|<0,01$

B Soient p et q deux nombres réels positifs tels que : (R) : $p^2 - 2q^2 = 1$

1) Montrer que : $\frac{p}{q}-\sqrt{2}=\frac{1}{\left(\frac{p}{q}+\sqrt{2}\right)q^2}$

2) En déduire que : $0<\frac{p}{q}-\sqrt{2}<\frac{1}{2q^2}$

3) On pose : $x = p^2 + 2q^2$ et $y = 2pq$

a) Montrer que x et y vérifient la relation (R) c'est-à-dire $x^2 - 2y^2 = 1$.

b) En remarquant que les réels p = 3 et q = 2 vérifient la relation (R), et en utilisant la question 3) a) précédente déterminer un couple $(\alpha ; \beta)$ qui vérifie la relation (R) tels que $\beta > 10^5$

c) En déduire une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

ACTIVITE 7 Approximation

Soient a, b, x et y des nombres réels tels que :

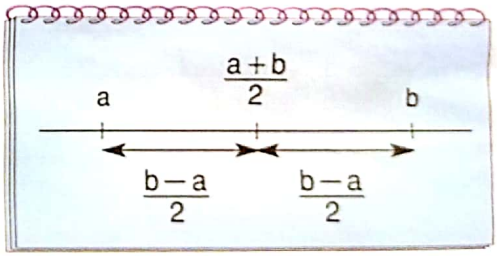
$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad a \leq y \leq b$$

1) Montrer que : $x - y \leq b - a$ et $y - x \leq b - a$

2) En déduire que : $|x-y| \leqslant b-a$

3) Montrer que : $\left|x-\frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$

On dit que $\frac{a+b}{2}$ est une approximation du nombre x à $\frac{b-a}{2}$ près (ou à la précision $\frac{b-a}{2}$ près).



Scanné avec CamScanner

3 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 8 Calculatrice

En utilisant une calculatrice, on trouve : $\sqrt{3} = 1,732050808$ et $\frac{2}{3} = 0,666666666$

1) Calculer $(1,732050808)^2$ et $3 \times 0,666666666$

2) Que peut-on en déduire ?

> La calculatrice ne donne pas toujours le résultat exact d'une opération, mais elle donne une valeur approchée (par défaut ou par excès) de cette opération

ACTIVITE 9 Limites de la calculatrice et encadrement

A On pose : $A = \frac{1}{\sqrt{10^{16}+1}-10^8}$

1) Calculer A en utilisant une calculatrice.

2) Qu'affiche l'écran de la calculatrice ? Pourquoi ?

3) Montrer que $A = \sqrt{10^{16}+1} + 10^8$

4) En déduire que $2 \times 10^8 < A < 2 \times 10^8 + \frac{1}{2 \times 10^8}$



B On pose : $x = 6406 \times 1396459$

$y = 85555 \times 104561$

1) Sans effectuer de calcul, montrer que $x \neq y$.

2) En utilisant une calculatrice, comparer

$a = \frac{6406}{85555}$ et $b = \frac{104561}{1396459}$

3) Que peut-on en déduire ?

Scanné avec CamScanner

3 DEFINITIONS ET REGLES

1 Ordre dans l'ensemble IR

Définition Soient a et b deux nombres réels.

On dit que a est inférieur ou égal à b, et on écrit $a \leq b$, si $a - b \leq 0$ (ou encore si $b - a$ est positif).

Notation

- L'écriture $a < b$ signifie que : $a \leq b$ et $a \neq b$ et on dit que : a est strictement inférieur à b
- Si $a \leq b$, alors b est supérieur ou égal à a et on écrit $b \geq a$.

Exemples et applications

- Comparons les deux nombres x et y où $x = \frac{22}{7}$ et $y = \frac{335}{107}$

  On a : $y - x = \frac{335}{107} - \frac{22}{7} = \frac{2345 - 2354}{749} = -\frac{9}{749} < 0$; donc : $y < x$.

- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs distincts.

  Comparons $\frac{4}{a+b}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

  On a : $\frac{4}{a+b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{4ab - (a+b)^2}{ab(a+b)} = -\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab(a+b)}$

  $\frac{4}{a+b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} < 0$ (car $a - b \neq 0$) ;

  donc : $\frac{4}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

- Soit n un nombre entier naturel non nul. Comparer $\frac{2n}{2n+1}$ et $\frac{2n-1}{2n}$

- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

  1) Comparer $2\sqrt{ab}$ et $a + b$.

  2) En déduire que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ et $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

2 Ordre et opérations

• Ordre et addition :

Propriétés Soient a,b, c et d des nombres réels.

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$
- Si ($a \leq b$ et $c \leq d$) , alors $a + c \leq b + d$

Remarques

- Si $a \leq b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b \geq 0$
- Si [($a \geq 0$ et $b \geq 0$) et $a + b = 0$], alors ($a = 0$ et $b = 0$)
- Si ($a \leq b$ et $b \leq c$), alors $a \leq c$, On écrit $a \leq b \leq c$.

Exemples et applications

- Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq 3$ et $y \leq -7$.
  Alors : $x + y \leq 3 + (-7)$ c'est-à-dire $x + y \leq -4$.
- Soit x un nombre réel tel que $x + 2 \leq 6$; donc $(x + 2) + (-2) \leq 6 + (-2)$ c'est-à-dire $x \leq 4$.
- Soient a et b deux nombres tels que $a \leqslant \frac{5}{7}$ et $b \leqslant \frac{16}{7}$
  Montrer que $a + b \leq \pi$.

Scanné avec CamScanner

3 DEFINITIONS ET REGLES

• Ordre et multiplication :

Propriétés Soient a,b, c et d des nombres réels.

- Si ($a \le b$ et $c \ge 0$) , alors $ac \le bc$.
- Si ($a \le b$ et $c \le 0$, alors $ac \ge bc$.
- Si ($ac \le bc$ et $c > 0$) , alors $a \le b$.
- Si ($ac \le bc$ et $c < 0$) , alors $a \ge b$
- Si ($0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$) , alors $ac \le bd$.

Exemples et applications

- Soit $x \leqslant \frac{3}{5}$. Alors $2 \times x \leqslant 2 \times \frac{3}{5}$ (car $2 > 0$) c'est-à-dire $2x \leqslant \frac{6}{5}$.
- Soit $x < \frac{3}{2}$. Alors $(-2) \times x > (-2) \times \frac{3}{2}$ (car $-2 < 0$) ; donc : $-2x > -3$.
- Soit $3x < 5$. Alors $\left(\frac{1}{3}\right)(3x) < \left(\frac{1}{3}\right) \times 5$ (car $\frac{1}{3} > 0$) c'est-à-dire $x < \frac{5}{3}$.
- Soit $0 \le x \le 1{,}5$ et $0 \le y \le 2$. Alors $xy \le 2 \times 1{,}5$ c'est-à-dire $xy \le 3$.
- Soit $0 \le 2x \le 3$ et $0 \le 5y \le 75$. Montrer que $xy \le 22{,}5$.

• Ordre et inverse :

Propriétés Soient a et b deux nombres réels.

- $0 < a \le b$ signifie que $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$
- $a \le b < 0$ signifie que $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$

Exemples et applications

- Soit $0 < x \le 5$. Donc : $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x}$.
- soit $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$. Donc : $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{3}{2}$.
- soit x un nombre réel tel que : $0 < \frac{1}{2x+1} < \frac{3}{2}$

  Montrer que $-\frac{1}{6} < x$.

• Valeur absolue et propriétés :

Définition Sur un axe normé, x est l'abscisse d'un point M

La valeur absolue de x est la distance entre l'origine du repère et le point M ; on la note $|x|$.

En d'autres termes : $OM = |x|$ (où O est l'origine du repère).

Remarques

- Si ($a \ge 0$ et $b \ge 0$), alors $ab \ge 0$.
- Si ($a \le 0$ et $b \le 0$), alors $ab \ge 0$.
- $a^2 \ge 0$ quel que soit le nombre réel a.
- Si ($a \le 0$ et $b \ge 0$), alors $ab \le 0$.

Importance des signes

a, b, c et d étant des nombres réels tels que $bd > 0$, on a :

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ signifie que $ad < bc$.

Scanné avec CamScanner

3 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

- $|-8|=8$ et $|-7|=-(-7)=7$
- $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$
- On a $|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$
- Déterminer $|x|$, $|y|$, $|x+y|$, $|x-y|$, $|xy|$ et $\left|\frac{x}{y}\right|$

  Sachant que : $x=\sqrt{3}-1$ et $y=\frac{1}{1-\sqrt{5}}$

• Distance entre deux nombres réels :

Définition Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B sur un axe normé (droite graduée), alors la distance entre a et b est la distance AB et on a : $AB=|b-a|$

Exemples et applications

- Soient 5 et –3 les abscisses de deux points A et B sur un axe normé.
  La distance entre 5 et –3 est $|5-(-3)|=|8|=8$
- Soient 1 et x les abscisses de deux points N et M sur un axe normé.
  La distance entre 1 et x est $|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ 1-x & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$
- Soient 3, 1 et x les abscisses respectives de trois points A, B et M sur un axe normé. Calculer MA + MB en fonction de x.

• Propriétés de la valeur absolue :

Propriétés Soient x et y deux nombres réels. On a :

(1) $|x-y|=|y-x|$

(2) $|xy|=|x||y|$

(3) si $y\neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

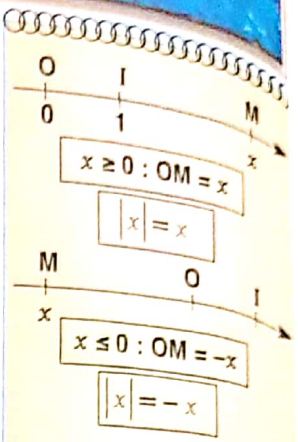
(4) $|x+y|\leq|x|+|y|$

(5) $|x-y|\geq|x|-|y|$

(6) $|x|=|y|$ signifie que ($x = y$ ou $x = -y$).

Exemples

- $|x|=5$ signifie que ($x = 5$ ou $x = -5$).
- $|x|=-5$ est impossibles car $|x|\geq 0$ et $-5 < 0$.
- $|x-2|=3$ signifie que ($x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$) c'est-à-dire ($x = 5$ ou $x = -1$).



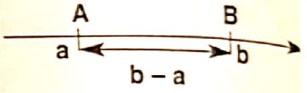
Remarques

- $|x|=\begin{cases} x & ; x\geq 0 \\ -x & ; x\leq 0 \end{cases}$
- $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$.
- $-|x|\leq x\leq|x|$
- Pour tout x de IR :

$|x|\geq 0$

$|x|=|-x|$

$\sqrt{x^2}=|x|$



(1) $|8-6|=|6-8|=2$

(2) $\begin{cases} |-7\times 3|=|-21|=21 \\ |-7|\times|3|=7\times 3=21 \end{cases}$

On a : $|-7\times 3|=|-7|\times|3|$

(3) $\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{3}{5}=\frac{|-3|}{|5|}$

On a : $\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{|-3|}{|5|}$

ملاحظات

- $|x-y|\leq|x|+|y|$
- $|x|^2=x^2=|x^2|$
- $|x|-|y|\leq|x+y|\leq|x|+|y|$

$\begin{cases} |x|=r \\ r\geq 0 \end{cases}$ signifie que ($x = r$ ou $x = -r$)

Scanné avec CamScanner

3 DEFINITIONS ET REGLES

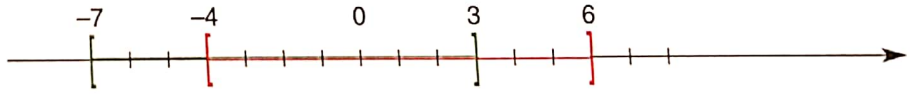
• **Intervalles :**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

Ensemble des nombres réels qui vérifient	Représentation sur une droite numérique	Notation	Intervalle
$a \leq x \leq b$		[a, b]	Intervalle fermé [a ; b]
$a < x < b$		]a, b[	Intervalle ouvert]a ; b[
$a \leq x < b$		[a, b[	Intervalle semi-ouvert à droite [a ; b[
$a < x \leq b$		]a, b]	Intervalle semi-ouvert à gauche]a ; b]
$x \leq a$		]–∞, a]	Intervalle]–∞ ; a] (fermé en a)
$x < a$		]–∞, a[	Intervalle]–∞ ; a[(ouvert en a)
$b \leq x$		[b, +∞[	Intervalle [b ; +∞[(fermé en b)
$b < x$		]b, +∞[	Intervalle]b ; +∞[(ouvert en b)

Exemples et applications

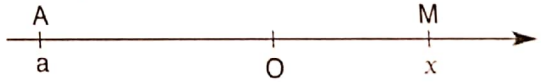
La représentation des deux intervalles [–4 ; 6] et [–7 ; 3] sur une droite numérique est la suivante :



Représenter chacun des deux intervalles I = [2 ; +∞[et J =]–5 ; 7] sur une droite numérique.

• **Intervalles et valeur absolue :**

Soient A et M deux points d'abscisses respectives a et x sur un axe normé :

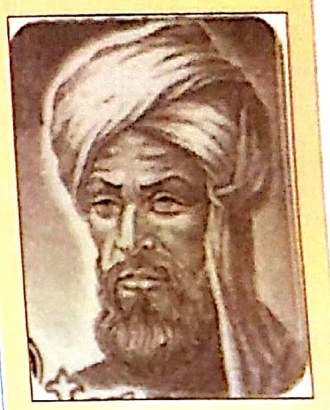


r est un nombre réel strictement positif.

L'inégalité

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

est appelée inégalité triangulaire.



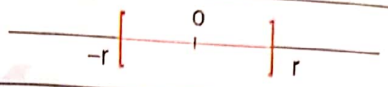
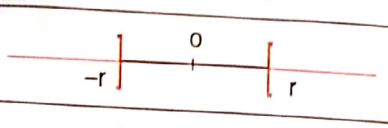
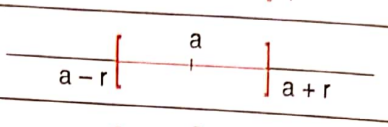
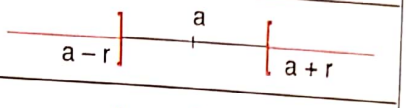
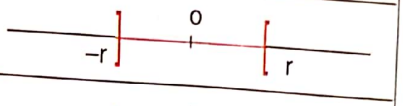
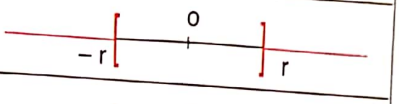
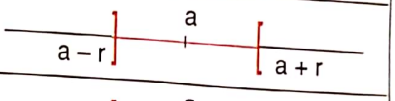
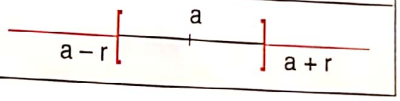
Al Khwarizmi, mathématicien (788 – 850)

Il a contribué au développement de l'algèbre. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages dont le plus célèbre est intitulé "Aljabr wa' Imuqabala"

(كتاب الجبر والمقابلة)

Scanné avec CamScanner

3 DÉFINITIONS ET RÈGLES

Ecriture en utilisant la valeur absolue	Notation avec des intervalles	Représentation sur une droite numérique
$\lvert x\rvert \leqslant r$	$x \in [-r, r]$	
$\lvert x\rvert \geqslant r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	
$\lvert x-a\rvert \leqslant r$	$x \in [a-r, a+r]$	
$\lvert x-a\rvert \geqslant r$	$x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$	
$\lvert x\rvert < r$	$x \in]-r, r[$	
$\lvert x\rvert > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	
$\lvert x-a\rvert < r$	$x \in]a-r, a+r[$	
$\lvert x-a\rvert > r$	$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	

Exemples

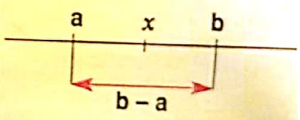
- $\lvert x\rvert \leqslant 4$ signifie que $x \in [-4 ; 4]$.
- $\lvert x\rvert \geqslant \frac{5}{2}$ signifie que $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$
- $\lvert x-1\rvert < 3$ signifie que $x \in]-2 ; 4[$
- $\lvert x-2\rvert > 7$ signifie que $x \in]-\infty ; -5[\cup]9 ; +\infty[$

Remarques

- Il n'existe aucun réel x vérifiant $\lvert x\rvert \leqslant -2$
- En revanche :
  Pour tout réel x, on a :
  $\lvert x\rvert > -2$

• Encadrement :

Définition Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Toute double inégalité (parmi les doubles inégalités suivantes) $a < x < b$; $a < x \leq b$; $a \leq x \leq b$; $a \leq x \leq b$ est appelée encadrement, de x, d'amplitude $b - a$.



Exemples et applications

- $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ est un encadrement de π d'amplitude $3{,}15 - 3{,}14 = 0{,}01$
- $1 < \frac{5}{4} < 2$ est un encadrement du nombre $\frac{5}{4}$ d'amplitude $2 - 1 = 1$
- Déterminer un encadrement de $\sqrt{6}$ d'amplitude 1.
- Déterminer un encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude 2 et un autre encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude 0,02.

Scanné avec CamScanner

3 DEFINITIONS ET REGLES

3 Encadrement et opérations

1) Encadrement de la somme de deux nombres :

Propriétés Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ sont des encadrements des deux nombres réels x et y, alors :

$\begin{cases} a+c \le x+y \le b+d \\ a-d \le x-y \le b-c \end{cases}$ sont des encadrements des réels $x+y$ et $x-y$.

Exemples et applications

- On a : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$

  Donc : $3,142 < \sqrt{3}+\sqrt{2} < 3,153$ est un encadrement de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ d'amplitude $3,153 - 3,142 = 0,011$.

- On a : $1,732 - 1,42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1,733 - 1,41$

  c'est-à-dire : $0,312 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,323$ est un encadrement de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ d'amplitude de 0,011.

- Sachant que : $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$, donner un encadrement de chacun des deux nombres $\sqrt{13}+5$ et $5-\sqrt{13}$ en précisant son amplitude.

2) Encadrement du produit de deux nombres :

Propriétés Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.

Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ sont deux encadrements de x et y, alors $ac \le xy \le bd$ est un encadrement de xy.

Exemples

- Soit $17,3 \le x \le 17,4$ et $21,9 \le y \le 22$; alors $378,87 \le xy \le 382,8$
- Soit $-17,4 \le a \le -14,3$ et $-22 \le b \le -21,9$.

  On a : $17,3 \le -a \le 17,4$ et $21,9 \le -b \le 22$. Alors $378,87 \le ab \le 382,8$
- Soit $-4 \le s \le -2$ et $1 \le t \le 3$. On a : $2 \le -s \le 4$ et $1 \le t \le 3$.

  Donc $2 \le (-s)t \le 12$. d'Où $-12 \le st \le -2$.
- Soit $-4 \le x \le 2$ et $1 \le y \le 3$.

  Notons que le nombre x peut-être positif ou négatif.

  - Si x est négatif c'est-à-dire $-4 \le x \le 0$, alors $0 \le -x \le 4$;

    donc $0 \times 1 \le -xy \le 4 \times 3$ ou encore $0 \le -xy \le 12$; d'où $-12 \le xy \le 0$
  - Si x est positif c'est-à-dire $0 \le x \le 2$, alors $0 \times 1 \le xy \le 2 \times 3$

    c'est-à-dire $0 \le xy \le 6$.
  - En considérant les deux cas, on peut dire que :

    $-12 \le xy \le 6$ est un encadrement du nombre xy.

Rappel

Connaissant des encadrements des deux nombres x et y, on peut déterminer un encadrement de chacun des deux réels $x+y$ et $x-y$.

Remarques

- $10^{-2} + 10^{-3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{11}{1000}$
- L'amplitude de l'encadrement de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est la somme des amplitudes des encadrements des deux nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Rappel

Connaissant des encadrements des deux réels x et y, on peut déterminer un encadrement de xy.

Scanné avec CamScanner

4 Encadrement de l'inverse et du quotient

Propriétés Soient a, b, c et d des nombres réels strictement positifs.

Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ sont deux encadrements des deux nombres réels x et y, alors :

$\frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{c}$ et $\frac{a}{d} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{c}$ sont deux encadrements des réels $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$.

Exemples et applications

- Soit $2 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 3$.

  Alors : $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant 1$ (encadrement de $\frac{1}{y}$) et $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 4$ (encadrement de $\frac{x}{y}$)

- Soit $-4 \leq a \leq -2$ et $1 \leq b \leq 3$. Donc $2 \leq -a \leq 4$ et $1 \leq b \leq 3$

  Il s'ensuit $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant 1$ et $\frac{2}{3} \leqslant -\frac{a}{b} \leqslant 4$ c'est-à-dire $-4 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant -\frac{2}{3}$. (encadrement de $\frac{a}{b}$).

- Donner un encadrement de $\frac{x}{y}$ sachant que : $3{,}95 \leq x \leq 4{,}01$ et $-2 \leq y \leq -1{,}2$
- Soit $-1 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -2$. Donner un encadrement de chacun des deux nombres : $\frac{a}{b}$ et $\frac{2a+3b}{3a-2b}$.

Remarque

Si $a \leq x \leq b$, alors $-b \leq -x \leq$

5 Approximations

1) Approximation par défaut et par excès :

Définition Soit $a \leq x \leq b$ ($a < x < b$; $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$) un encadrement du nombre x d'amplitude $b - a$.

- *Le nombre a est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par défaut.*
- *Le nombre b est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par excès.*

Convention

On dit "à b – a près" ou "à la précision b – a près"

Exemples et applications

- *Soit* $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

  Donc : 3,14 est une approximation du nombre π à 0,01 près par défaut

  3,15 est une approximation du nombre π à 0,01 près par excès.

- *On sait que* $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

  Donc : 1,4143 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} par excès.

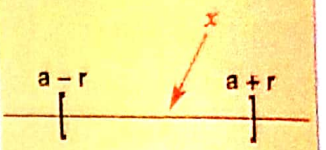
  1,4142 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près par défaut.

- Donner une approximation de $\frac{5}{4}$ à 10^{-1} près par excès.
- Donner une approximation de $\frac{1}{25}$ à 10^{-2} près par défaut.

Scanné avec CamScanner

2) Valeur approchée

Définition Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
Tout nombre réel a qui vérifie l'une ou l'autre des deux inégalités $|x-a|<r$ ou $|x-a|\leqslant r$ est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r près).



Exemples et applications

- On a : $|\sqrt{5}-2,235|\leqslant 0,005$ (on peut vérifier ce résultat en utilisant une calculatrice).
  Donc 2,235 est une valeur approchée du nombre $\sqrt{5}$ à la précision 0,005 près ou 0,005 près.
- Déterminer une valeur approchée de $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} près.

6 Approximations décimales

Définition Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \leq x < (N+1) \times 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$

- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par défaut.
- Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par excès.

Exemples et applications

- On a : $0,62 < \frac{5}{8} < 0,63$ c'est-à-dire $62 \times 10^{-2} < \frac{5}{8} < 63 \times 10^{-2}$

  ou encore $62 \times 10^{-2} < \frac{5}{8} < (62+1) \times 10^{-2}$

  Donc : 62×10^{-2} (c'est-à-dire 0,62 est l'approximation décimale du nombre $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par défaut.

  $63 \times 10^{-3} = 0,63$ est l'approximation décimale de $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par excès.
- • Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.
  • Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excès.
- On pose : $a = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

  Sachant que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ et $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$

  Donner les approximations décimales à 10^{-2} près par défaut et par excès du nombre t.

Note

Soit $a \leq x \leq b$ un encadrement du nombre x.

- a est une approximation de x à $b-a$ près par défaut.
- b est une approximation de x à $b-a$ près par excès.
- $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

Scanné avec CamScanner



Ordre dans IR

Soient a et b deux nombres réels :
$a \leq b$ signifie $a - b \leq 0$

Soient a, b, c et d des nombres réels.

Ordre et addition	Ordre et multiplication	Ordre et inverse
• Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$	• Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \geqslant 0 \end{cases}$, alors $ac \leq bc$	• Si $0 < a < b$ signifie $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$
• Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$, alors $a + c \leq b + d$	• Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant 0 \end{cases}$, alors $ac \geq bc$	• Si $a \leq b < 0$ signifie $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$
	• Si $\begin{cases} ac \leqslant bc \\ c > 0 \end{cases}$, alors $a \leq b$	
	• Si $\begin{cases} ac \leqslant bc \\ c < 0 \end{cases}$, alors $a \geq b$	

Valeur absolue

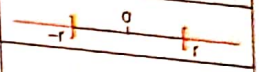
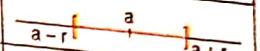
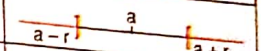
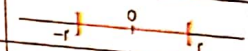
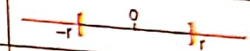
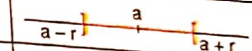
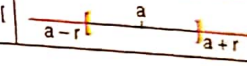
Valeur absolue d'un nombre réel	Distance entre deux nombres réels	Propriétés de la valeur absolue
• Sur un axe normé, x est l'abscisse d'un point M. La valeur absolue du réel x est la distance entre l'origine O du repère et le point M ; on la note $\lvert x \rvert$ c'est-à-dire $\lvert x \rvert = OM$.	Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B d'un axe normé, la distance en a et b est la distance AB et vaut $AB = \lvert b - a \rvert$	Soient x et y deux nombres réels.
• $\lvert x \rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	(ou encore $AB = \lvert a - b \rvert$)	• $\lvert x - y \rvert = \lvert y - x \rvert$
		• $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ et $\lvert -x \rvert = \lvert x \rvert$
		• $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert$
		• Si $y \neq 0$, alors $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$
		• $\lvert x + y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ et $\lvert x - y \rvert \geqslant \lvert x \rvert - \lvert y \rvert$
		• $\lvert x \rvert = \lvert y \rvert$ signifie que : ($x = y$ ou $x = -y$)

Scanné avec CamScanner

3 POINTS ESSENTIELS

Intervalles de IR

Soient a et b deux nombres réels.

Ensemble des réels vérifiant	Représentation sur une droite numérique	Notation	Intervalle	Ecriture utilisant la valeur absolue	Ecriture utilisant les intervalles	Représentation sur une droite numérique
$a \leq x \leq b$		[a, b]	Intervalle fermé [a ; b]	$\lvert x\rvert \leq r$	$x \in [-r, r]$	
$a < x < b$		]a, b[	Intervalle ouvert [a ; b]	$\lvert x\rvert \geq r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	
$a \leq x < b$		[a, b[	Intervalle semi-ouvert à droite [a ; b[	$\lvert x-a\rvert \leq r$	$x \in [a-r, a+r]$	
$a < x \leq b$		]a, b]	Intervalle semi-ouvert à gauche]a ; b]	$\lvert x-a\rvert \geq r$	$x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$	
$x \leq a$		]−∞, a]	Intervalle]−∞ ; a] (fermé en a)	$\lvert x\rvert < r$	$x \in]-r, r[$	
$x < a$		]−∞, a[	Intervalle]−∞ ; a[(ouvert en a)	$\lvert x\rvert > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	
$b \leq x$		[b, +∞[	Intervalle [b ; +∞[(fermé en b)	$\lvert x-a\rvert < r$	$x \in]a-r, a+r[$	
$b < x$		]b, +∞[	Intervalle]b ; +∞[(ouvert en b)	$\lvert x-a\rvert > r$	$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	

Encadrement

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$
Toute double inégalité parmi les relations
$a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$; $a < x \leq b$; $a < x < b$
est appelée encadrement du nombre x d'amplitude $b - a$

Encadrement de la somme et de la différence de deux nombres	Encadrement du produit de deux nombres	Encadrement de l'inverse et du quotient de deux nombres
• Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $\begin{cases} a+c \leqslant x+y \leqslant b+d \\ a-d \leqslant x-y \leqslant b-c \end{cases}$	• Si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant y \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $ac \leq xy \leq bd$	• Si $\begin{cases} 0 < a \leqslant x \leq b \\ 0 < c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, alors $\begin{cases} \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{c} \\ \frac{a}{d} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{b}{c} \end{cases}$

Approximations

Approximations par défaut et par excès	Valeur approchée
Soit $a \leq x \leq b$ ($a \leq x < b$; $a < x \leq b$ ou $a < x < b$) un encadrement de x d'amplitude $b - a$ • Le nombre a est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par défaut. • Le nombre b est appelé approximation du nombre x à $b - a$ près par excès.	Soient x un nombre réel et r un réel strictement positif. Tout nombre réel a qui vérifie l'une ou l'autre des deux relations $\lvert x-a\rvert < r$ ou $\lvert x-a\rvert \leqslant r$, est appelé valeur approchée de x à r près (ou à la précision r près).

Approximations décimales

Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$
• Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par défaut.
• Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimale du nombre x à 10^{-p} près par excès.

Scanné avec CamScanner



1 Comparaison de deux encadrements

Soient x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

On pose $A(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) Donner un encadrement du nombre $A(x)$.

2) a) Déterminer les deux réels a et b tels que :

$$A(x)=a+\frac{b}{x+2}$$

b) Déterminer un autre encadrement du nombre $A(x)$.

3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$.

Solution

1) Encadrement de A(x)

On a : $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$

Donc : $-1\leq 2x\leq 2$ et $\frac{3}{2}\leqslant x+2<3$

$2\leq 2x+3\leq 5$ et $\frac{3}{2}\leqslant x+2\leqslant 3$

$2\leq 2x+3\leq 5$ et $\frac{1}{3}\leqslant \frac{1}{x+2}\leqslant \frac{2}{3}$

Il s'ensuit : $2\times\frac{1}{3}\leqslant\frac{2x+3}{x+2}\leqslant 5\times\frac{2}{3}$

c'est-à-dire : $\frac{2}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{10}{3}$

2) a) Détermination de a et b pour que $A(x)=a+\frac{b}{x+2}$

$A(x)=a+\frac{b}{x+2}$ signifie que : $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}$

c'est-à-dire $2x+3=ax+2a+b$

Par identification des coefficients, on obtient

$2=a$ et $3=2a+b$

$2=a$ et $b=-1$

Ainsi : $A(x)=2-\frac{1}{x+2}$

b) Autre encadrement de A(x)

On a : $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$; donc $\frac{3}{2}\leqslant x+2\leqslant 3$

Il en découle : $-\frac{2}{3}\leqslant-\frac{1}{x+2}\leqslant-\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{4}{3}\leqslant 2-\frac{1}{x+2}\leqslant\frac{5}{3}$

c'est-à-dire $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$

3) Comparaison des deux encadrements précédents de A(x).

- On a : $\frac{2}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{10}{3}$

  Cet encadrement a pour amplitude $\frac{10}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

- On a : $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$ qui est un encadrement d'amplitude $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

- Comme $\frac{1}{3}<\frac{8}{3}$, alors le plus fin des deux encadrements est celui de la 2ème question c'est-à-dire $\frac{4}{3}\leqslant A(x)\leqslant\frac{5}{3}$.

2 Encadrement et valeur absolue

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$x\geqslant\frac{1}{2}$; $y\leq 1$ et $x-y=3$

1) Calculer la valeur du nombre B définie par

$$B=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$$

2) Vérifier que : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

3) Calculer la valeur du nombre C défini par

$$C=|x+y-5|+|x+y+2|$$

Solution

1) On a : $B=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

Donc : $B=|2x-1|+|2y-2|$

$B=|2x-1|+|2(y-1)|$

c'est-à-dire : $B=|2x-1|+2|y-1|$

- Or $x\geqslant\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $2x-1\geq 0$, et $|2x-1|=2x-1$
- Par ailleurs $y\leq 1$ c'est-à-dire $y-1\leq 0$, par suite $|y-1|=-(y-1)$
- On en déduit $B=2x-1-2(y-1)$

  $B=2(x-y)+1$

Comme $x-y=3$, alors $B=2\times 3+1$; donc $B=7$.

2) Vérifions que $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

- On a : $x-y=3$; donc : $x=y+3$

  On a : $y\leq 1$; donc $y+3\leq 4$ c'est-à-dire $x\leq 4$

  Par hypothèse $x\geqslant\frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$

- On a : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $x=y+3$. Donc : $\frac{1}{2}\leqslant 3+y\leqslant 4$

  On en tire $\frac{1}{2}-3\leqslant y\leqslant 4-3$ c'est-à-dire $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

Scanné avec CamScanner

EXERCICES RESOLUS

3

3) Calculons la valeur de $C=|x+y-5|+|x+y+2|$

Etudions d'abord le signe de chacun des deux réels $x+y+2$ et $x+y-5$

On a : $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ et $-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 1$

Donc : $-2\leq x+y\leq 5$

D'où : $0\leq x+y+2\leq 7$ et $-7\leq x+y-5\leq 0$

Il vient aussitôt $\begin{cases}|x+y-5|=-(x+y-5)\\ |x+y+2|=x+y+2\end{cases}$

On en tire : $C=-(x+y-5)+x+y+2$

$C=-x-y+5+x+y+2$

D'où : $C=7$.

3 Approximation

1) a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$$

b) En déduire que si $|x|<\frac{1}{2}$, alors $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$

2) Déterminer alors une valeur approchée du nombre $\frac{1}{0,99}$ à la précision 2×10^{-4} près (On pourra poser $x=10^{-2}$).

N. B. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est l'ensemble des nombres réels différents de 1

Solution

1) a) soit x un nombre réel différent de 1.

On a : $(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x}$

$(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{1-x}$

D'où : $(1+x)+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

b) Soit x un nombre réel tel que $|x|<\frac{1}{2}$

• On a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

ou encore $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\frac{x^2}{|1-x|}$ (1)

• On a $|x|<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{2}<-x<\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-x<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<1-x<\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}<\frac{1}{1-x}<2$

Donc $\frac{1}{|1-x|}<2$

Comme $x^2\geq 0$, alors $\frac{x^2}{|1-x|}\leqslant 2x^2$

En utilisant la relation (1), on déduit que $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$

(pourvu que $|x|<\frac{1}{2}$)

2) **Déterminons une valeur approchée de $\frac{1}{99}$ à 2×10^{-4} près**

D'après le résultat de la question 1) b), on a :

$\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leqslant 2x^2$ pour tout réel x tel que $|x|<\frac{1}{2}$

En prenant $x=10^{-2}$ (Il est bien clair que $|10^{-2}|<\frac{1}{2}$)

On a : $\left|\frac{1}{1-10^{-2}}-(1+10^{-2})\right|\leqslant 2\times(10^{-2})^2$

c'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-0,01}-(1+0,01)\right|\leqslant 2\times 10^{-4}$

ou encore $\left|\frac{1}{0,99}-1,01\right|\leqslant 2\times 10^{-4}$

Ceci signifie que 1,01 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{0,99}$ à la précision 2×10^{-4} près.

4 Approximation décimale d'un nombre rationnel

1) Sachant que $1,414\leqslant\sqrt{2}<1,415$, déterminer les approximations décimales du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

2) Déterminer les approximations décimales du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

Solution

1) On a $1,414\leqslant\sqrt{2}<1,415$

c'est-à-dire $1414\times 10^{-3}\leqslant\sqrt{2}<(1414+1)\times 10^{-3}$

Donc 1,414 et 1,415 sont les approximations décimales respectives du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.

2) **Déterminons les approximations décimales de $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut et par excès.**

On a : $\frac{3}{7}\times 10^3=\frac{3000}{7}$

$\frac{3}{7}\times 10^3=428+\frac{4}{7}$

Or $0<\frac{4}{7}<1$; par suite $428<\frac{3}{7}\times 10^3<428+1$

c'est-à-dire $428\times 10^{-3}<\frac{3}{7}<(428+1)\times 10^{-3}$

Donc :

• 0,428 est l'approximation décimale du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par défaut.

• 0,429 est l'approximation décimale du nombre $\frac{3}{7}$ à 10^{-3} près par excès.

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Comparaison et ordre

1 $x = 4{,}23 \times 10^{-2}$ et $y = 3{,}5 \times 10^{-3}$.

a) Déterminer les signes de $x + y$, xy et $\frac{x}{y}$.

b) Comparer x et y.

c) Comparer $-x$ et $-y$.

d) Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

2 Soit $x = -3{,}8 \times 10^{2}$ et $y = 1{,}17 \times 10^{2}$

a) Déterminer les signes de $x + y$, xy et $\frac{x}{y}$.

b) Comparer x et y.

c) Comparer $-x$ et $-y$.

d) Ranger les nombres $x + y$; $x - y$; $-x + y$.

e) Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.

3 Soit $a = -5{,}24 \times 10^{-3}$ et $b = 0{,}00464$.

a) Comparer a et b.

b) Comparer $a + b$ et $a - b$.

c) Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

d) Comparer a^2 et b^2.

4 On considère les deux nombres a et tel que :

$$a = -\frac{7}{13} \quad \text{et} \quad b = -\frac{4}{7}$$

a) Donner le signe de chacun des réels $a + b$; ab ; $\frac{a}{b}$.

b) Comparer a et b.

c) Comparer $a + b$ et $-(a + b)$.

d) Comparer $a + b$ et $a + 2b$.

e) Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

f) Comparer a^2 et b^2.

5 Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :

a) $x = \frac{496}{55}$ et $y = 9$.

b) $x = \frac{526}{187}$ et $y = \frac{23}{8}$.

6 Comparer les deux nombres a et b dans chaque cas :

a) $a = 4\sqrt{2}$ et $b = 5{,}65$

b) $a = \frac{1}{14\sqrt{5}}$ et $b = \frac{1}{31}$

c) $a = x\sqrt{x+1}$ et $b = (x+1)\sqrt{x}$

où x est un réels strictement positif.

7 On pose : $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$

a) Montrer que : $b - a = \frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

b) Comparer a et b.

8 Montrer que : $\frac{1}{50} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} < \frac{1}{25}$

(Noter que : $4 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{25}$)

9 On considère les deux nombres x et y tels que :

$$x = 3\sqrt{18} - \sqrt{72} + 2\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$y = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$$

1) Montrer que : $x - y = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$

2) Comparer x et y

10 Comparer les deux nombres $a = 10\sqrt{51}$ et $b = 70 + \sqrt{2}$

Comparaison difficile par la calculatrice

11 On considère les nombres $x = 333\sqrt{51}$ et $y = 2378{,}095667$

a) En utilisant une calculatrice, calculer x.

Peut-on dire que x et y sont égaux ?

b) A l'aide de la calculatrice, calculer x^2 et y^2.

2) Montrer que x^2 est un nombre entier naturel et que y^2 n'est pas un entier naturel.

En déduire que $x \neq y$.

3) Calculer la valeur exacte du nombre y^2 en posant $y^2 = (2378 + 0{,}095667)^2$.

4) Comparer x et y.

12 Comparer x et y dans chaque cas :

a) $x = a^3$ et $y = (a + b)^3$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$

b) $x = a$ et $y = \frac{a+b}{2}$ où $a \leq b$

c) $x = \frac{1}{a+1}$ et $y = \frac{1}{a+2}$ où a est un réel positif.

13 Ranger par ordre croissant chacune des listes suivantes :

a) $\frac{23}{97}$; $\frac{97}{23}$; 1.

b) $\frac{35}{36}$; $\frac{50}{37}$; $\frac{33}{36}$; $\frac{49}{37}$.

c) $\frac{8}{5}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{48}{54}$.

Scanné avec CamScanner

14 Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 2$

a) Montrer que $(a + b)^2 = 2(1 + ab)$

b) Sachant que a et b sont strictement positifs, déduire de ce qui précède que $a + b > \sqrt{2}$.

15 a, b et c sont des nombres réels inférieurs ou égaux à 1.

a) Montrer que $abc \leq bc$, $abc \leq ca$ et $abc \leq ab$.

b) En déduire que $3abc \leq ab + bc + ca$.

16 Ranger par ordre croissant les nombres suivants :

$-\sqrt{21}$; $-3\sqrt{21}$; 0 ; $2\sqrt{21}$; $49\sqrt{3}$

17 Soient x et y deux nombres réels strictement positifs et distincts. Donner le signe du quotient :

$$\frac{x-y}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \qquad (x \neq y)$$

18 Montrer que : $\sqrt{2} - \frac{655\,857}{470\,832} < 10^{-1}$

Valeur absolue – Distance

19 Calculer la distance entre les deux nombres dans chaque cas :

a) 5,2 et 7 ; b) $-\frac{37}{18}$ et $\frac{11}{6}$

c) 0,3 et –0,33 ; d) –5,3 et –7.

20 Calculer les valeurs exactes des réels suivants :

a) $|\pi - 4|$; b) $|3 - \pi|$

c) $|-\pi\sqrt{2} - 1|$; d) $|2^{-3}|$

21 Parmi les nombres suivants, déterminer le plus proche du nombre 1 :

1,1 ; $\frac{17}{18}$; 0,99 ; $\frac{13}{12}$; $\frac{28}{27}$

22 Soient x et y deux nombres réels. On pose :

$B = |x| + |-2 - y|$; $A = |x| - |-2 - y|$

$C = |x| + x$; $D = |x(2 + y)| - |x||y + 2|$

$E = -2 - y + |2 + y|$; $F = 2 + y - |y + 2|$

Calculer A, B, C, D, E et F dans chaque cas suivant :

a) $x = -2$ et $y = 2$

b) $x = \sqrt{3}$ et $y = -2 + \sqrt{3}$

c) $x = \frac{7}{4}$ et $y = -2 - 1$

23 Simplifier les expressions suivantes selon le signe de ce qui est "intérieur" à la valeur absolue.

a) $x + |x|$; b) $3x - 3|x|$

c) $\left|\frac{x}{3}\right| - \frac{x}{3}$; d) $\frac{|-7a|}{21} - \frac{a}{3}$

e) $\frac{|xy|}{6}$; f) $\frac{\sqrt{(y-1)^2}}{y-1}$ (où $y \neq 1$)

24 Sur une droite graduée, exprimer ce qui suit en utilisant des distances, puis résoudre géométriquement les équations suivantes :

a) $|x| = 1$; b) $|x - 2| = 1$; c) $|3 - x| = 2$

d) $|x + 2| = 3$; e) $|2x - 3| = 6$

25 Sur une droite graduée, donner une interprétation géométrique de chaque nombre suivant :

a) $|x + y|$; b) $2|x - y|$; c) $|x - 1| + |x + 1|$

d) $|x| + |x + 2|$; e) $2|x - 3| + 3|x + 1|$

26 Soient a et b deux nombres réels tels que :

$a \geq -2$; $b \leq -1$; $a - b = 6$

1) Calculer $A = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(b+1)^2}$

2) Montrer que $a \leq 5$ et $-8 \leq b$.

3) Déterminer la valeur numérique de l'expression B telle que : $B = |a + b - 4| + |a + b + 10|$

Intervalles

27 Sur une droite graduée, représenter les nombres réels x qui vérifient l'inégalité proposée dans chacun des cas suivants :

a) $x \geq 2$; b) $x < \frac{1}{2}$

c) $x > 3{,}5$; d) $x \leq 10^{-2}$

e) $x < -0{,}1$; f) $x < 0$

28 Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'intervalle auquel appartient le nombre réel a :

a) $a \geq 5$; b) $a \leq -7$; c) $a > \frac{3}{5}$

d) $a \geq 0$; e) $a > \sqrt{2}$; f) $a < -1 - \sqrt{3}$

29 Ecrire l'intervalle ou la réunion d'intervalles auxquels appartient le réel x dans chacun des cas suivants :

a) $-5 \leq x \leq -3$; b) $x < 7$ ou $x > 10$

c) $x \geq 0$ et $x \leq 7{,}5$; d) $x = -2$ ou $x \geq 3$

e) $x \neq 0$ et $-2 < x < 1$; f) $x \leq 1$ et $x > -3$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

30 Ecrire, sous forme d'intervalle ou d'une réunion d'intervalles, l'ensemble auquel appartient le réel t dans chaque cas :

a) $-1 < t < 7$; b) $3 \geq t > -2$

c) $t < -1$ et $t < 1$; d) $t > +1$ ou $t < -1$

31 Donner les inégalités qui déterminent l'appartenance d'un réel à chacun des intervalles suivants :

a) $[-3;2]$; b) $]-2;0]$; c) $]-\infty;3[$

d) $]\sqrt{2};+\infty[$; e) $]-\infty;-0,1[$; f) $\left[5;\frac{13}{2}\right[$

32 Représenter les ensembles suivants sur une droite graduée, et préciser ceux qui représentent des intervalles.

a) $[-8;2] \cap [-5;5]$; b) $\left[-\frac{3}{2};3\right[\cup [1;4[$

c) $[4;+\infty[\cap]-4;5[$; d) $]-\infty;-3[\cap]-6;+\infty[$

d) $[-2;5] \cup [8;+\infty[$; f) $[-1;+\infty[\cap [6;+\infty[$

g) $[6;+\infty[\cap [-3;19[\cap]-\infty;-1[$

Inégalités et encadrements

33 Déterminer un nombre rationnel r compris entre a et b dans chacun des cas suivants :

a) $a = 1,1$ et $b = 1,2$; b) $a = \pi$ et $b = \frac{22}{7}$

c) $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{3}$; c) $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$

e) $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{3}$; f) $a = 2 - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

34 On sait que : $-6 \leq x \leq 5$ et $-2 \leq y \leq 1$
Donner un encadrement de $x - y$.

35 a et b sont deux nombres réels tels que :
$2 \leq a \leq 4$ et $-3 \leq b \leq 3$
Donner un encadrement de $b - a$.

36 On sait que : $3 \leq x \leq 4$ et $2 \leq y \leq 5$
Trouver un encadrement de chacun des réels :
$x + y$; $x - y$; $2x - 3y$; $-4x + 3y - 5$

37 x et y sont deux nombres réels tels que :
$-3 \leq x \leq 2$ et $-7 \leq y \leq 1$
Trouver un encadrement de chacun des réels :
$x + 2y$; $-x - y$; $5x + 3y$; $-5x + 6y - 8$

38 On sait que : $\begin{cases} 1,01 \leq x \leq 1,02 \\ -4 \leq y \leq -3,8 \end{cases}$

a) Donner un encadrement de $-y$.
b) Encadrer xy.

39 On sait que : $-2,19 \leq x \leq -2,14$ et $-0,36 \leq y \leq -0,34$.
a) Donner un encadrement de chacun des réels $-x$ et $-y$.
b) Donner un encadrement de xy.

40 On sait que $3 \leq x \leq 3,5$ et $-0,4 \leq y \leq 0,2$
a) Donner un encadrement du réel xy dans chacun des deux cas suivants :
- $-0,4 \leq y \leq 0$
- $0 \leq y \leq 2$

b) Trouver alors un encadrement du réel xy.

41 On sait que : $4 \leq x \leq 8$ et $6 \leq y \leq 11$.
Donner un encadrement de chacun des deux réels $\frac{y}{x}$ et $\frac{x}{y}$.

42 Si x est un nombre réel tel que $-7 < x < 5$,
déterminer l'intervalle ou la réunion d'intervalles auquel appartient x^2 et $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

43 On considère deux nombres réels a et b tels que :
$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $0 \leq b \leq 3$

a) Encadrer les deux réels 2a et $\frac{1}{2a}$.
b) Encadrer $b - 2a$ et en déduire un encadrement de $(b - 2a)^2$.

44 Soient a et b deux réels vérifiant :
$0 \leq a \leq 2$ et $-4 \leq b \leq 1$
Montrer que : $-20 \leq 2a^2 + b^2 + 2a - 4b \leq 28$

45 On sait que : $-2 < a < 3$ et $-4 < b < 1$
Montrer que : $-5 \leq a^2 + b^2 - 2a + 4b < 13$

46 On sait que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$
On pose : $E = x^2 - y^2 + x + y$
a) Donner un encadrement du réel E.
b) Vérifier que : $E = (x + y)(x - y + 1)$
En déduire un autre encadrement de E.
c) En déduire que : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

47 On sait que : $-3 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 3$
Montrer que : $-33 \leq x^2 - 3y^2 - 5x \leq 24$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

48 On donne : $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 2$
et on pose $E = 4a^2 + 4a - b^2 + 2b - 3$
a) Donner un encadrement de E.
b) Vérifier que : $E = (2a + 1)^2 - (b - 1)^2 - 3$
c) Donner un autre encadrement de E.
d) Comparer les amplitudes des deux encadrements précédents.

49 Soient x, y deux nombres réels tels que :
$2{,}20 < x < 2{,}21$ et $3{,}44 < y < 3{,}45$
Comparer les deux réels : $3y - x + 2$ et $3x - y + 7$

Approximations

50 Trouver un encadrement du nombre $\frac{1}{7}$ d'amplitude 0,1, et un autre encadrement d'amplitude 0,05.

51 Trouver un encadrement du nombre $\sqrt{2}$ d'amplitude 1, et un autre encadrement d'amplitude 0,1.

52 Trouver un encadrement du nombre $\sqrt{131}$ d'amplitude 1, et un autre encadrement d'amplitude 0,5.

53 Montrer, dans chaque cas, que A est une valeur approchée du nombre x à r près :
a) $x = \frac{7}{6}$; $A = 1{,}1666$; $r = 5 \times 10^{-4}$
b) $x = \frac{1}{3}$; $A = 0{,}4$; $r = 8 \times 10^{-2}$

54 On sait que : $0{,}1 < x < 0{,}3$.
a) Donner un encadrement de x^2 ?
b) En déduire que 0,05 est une valeur approchée de x^2 à 0,04 près.

55 a) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
b) Développer $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})^2$
c) Soit $a = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$. Simplifier a.
d) Sachant que $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ et $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ donner des approximations de a à 0,5 près par défaut et par excès.

56 Donner une valeur approchée de $\frac{25}{7}$ à 10^{-10} près et une valeur approchée de $\frac{25}{35}$ à 10^{-10} près.

57 Déterminer l'encadrement correspondant à chacun des propositions suivantes :
a) 0,05 est une valeur approchée du réel x à 10^{-2} près.
b) $-0{,}02$ est une valeur approchée du réel t à 10^{-2} près par défaut.

58 Est-ce que $\frac{22}{7}$ est une valeur approchée du nombre π à 2×10^{-8} ?

59 x est un nombre réel tel que $|\sqrt{5} - 3x| < 10^{-3}$.
Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$, trouver un encadrement du réel x, par deux nombres décimaux, et dont l'amplitude est 10^{-3}.

60 x est un nombre réel tel que $1{,}9 \leq x \leq 2{,}1$.
a) Donner un encadrement du réel $x - 2$
b) Montrer que $2x - 2$ est une valeur approchée du réel $x^2 - 2x + 2$ à 0,01 près.

61 On sait que : $8{,}54384 \leq t \leq 8{,}54388$
Donner des approximations par défaut et par excès des réels t et $-t$ à 10^{-2}, 10^{-3} et 10^{-4} près.

Exercices de renforcement des apprentissages

62 Comparer les deux réels a et b dans chaque cas suivant :
1) $a = \frac{3577}{2468}$ et $b = \frac{3576}{2467}$
2) $a = 3\sqrt{5} - 47$ et $b = 3\sqrt{6} - 49$
3) $a = \sqrt{5} - 6$ et $b = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}}$

63 En utilisant la calculatrice, ranger par ordre croissant les nombres réels suivants :
π ; $\frac{25}{8}$; 3,14 ; 3,15 ; $\frac{22}{7}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{355}{13}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\sqrt{10}$

64 Sans utiliser la calculatrice, ranger par ordre croisant les réels suivants : $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{\pi + 2}$

65 Ranger par ordre décroissant chacune des listes suivantes de nombres réels
1) $\frac{14}{75}$; $\frac{56}{305}$; $\frac{221}{1250}$; 0,185 ; $\frac{21}{121}$; $\frac{19}{100}$
2) $\frac{1111}{1250}$; $\frac{381}{500}$; $-0{,}796$; $-\frac{383}{500}$; $-\frac{7}{10}$
3) $\frac{61}{67}$; $\frac{708}{804}$; $\frac{177}{200}$; $\frac{355}{402}$; $\frac{119}{135}$

66 Soient x et y deux nombres réels tels que :
$x - y + 7 = 0$ et $-7 < x - 2y \leq -5$
a) Montrer que : $x < y - 4$
b) Montrer que : $-9 \leq x < -7$ et $-2 \leq y < 0$

67 x et y sont deux réels tels que : $x < y$
Montrer que pour tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$,
On a : $x < \alpha x + (1 - \alpha)y < y$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

68 Soit a un nombre réel tel que : $a > -1$.
Ordonner les nombres x, y et z dans chacun des cas suivants :

1) $x = a+1$; $y = a+2$; $z = a+4$

2) $x = \dfrac{1}{a+1}$; $y = \dfrac{1}{a+2}$; $z = \dfrac{1}{a+4}$

3) $x = (a+1)^2$; $y = (a+2)^2$; $z = (a+4)^2$

69 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
Comparer x et y dans chaque cas suivant :

1) $x = n^2 - 2n + 1$; $y = (n-1)^2 + 1$

2) $x = 1 - \dfrac{2}{n}$; $y = 1 + \dfrac{1}{2n}$

3) $x = 1 + \dfrac{1}{n}$; $y = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$

70 Soit $x > 0$. On pose : $E = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ et $F = \dfrac{1}{x(x+3)}$

1) Comparer $\dfrac{1}{E}$ et $\dfrac{1}{F}$.

2) En déduire la comparaison des expression E et F (pour $x > 0$).

71 Soient x et y deux nombres réels strictement positifs et distincts.
Comparer E et F dans chaque cas suivant :

1) $E = \dfrac{1}{x(x+y)}$ et $F = \dfrac{4y}{(x+y)^3}$.

2) $E = xy + 4$ et $F = (x-2)(y-2)$.

3) $E = xy + 2005$ et $F = (x-401)(y-5)$.

4) $E = \dfrac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ et $F = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

72 a, b et c sont des nombres réels positifs tels que :
$$4a^2 - 3b^2 + 3c^2 = 0$$
Déterminer le plus grand de ces nombres.

73 Que peut-on dire des réels x, y et z si
$y + z \leq 2x$; $z + x \leq 2y$ et $x + y \leq 2z$?

74 Ordonner les réels positifs x, y et z sachant que:
$xy \leq z^2$; $zx \leq y^2$ et $yz \leq x^2$

75 a) Soit $x > 0$. Comparer $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x-1}{x}$

b) En utilisant la question précédente, comparer a et b d'une part, puis c et d d'autre part où :

- $a = \dfrac{3\,726,534}{3\,726,535}$ $b = \dfrac{3\,726,535}{3\,726,536}$
- $c = \dfrac{1234\,567,89}{1234\,567,9}$ $d = \dfrac{1234\,567,9}{1234\,567,91}$

76 Soient x et y deux nombres strictement positifs.
Comparer $\dfrac{196\,y}{2005\,x + 49\,y}$ et $\dfrac{2005\,x + 49\,y}{2005\,x}$.

77 a) Soient x et y deux nombres réels tels que : $0 < x < y$.
Comparer $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{x + 2005}{y + 2005}$.

b) Soit t un réel strictement positif.
Comparer $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{x+t}{y+t}$.

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$.
Comparer $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{(1+n)x}{nx+y}$.

78 a est l'aire d'un rectangle de dimensions 11 et 14.
b est l'aire d'un cercle de diamètre 14.
a) Comparer a et b en considérant les valeurs approchées respectives de π : 3,14 ; 3,15 et $\dfrac{22}{7}$.

b) En considérant la valeur exacte de π, quelle est la plus grande des deux aires ?

79 On pose $A = a^2 + a + 1$
1) Vérifier que $4A = (2a+1)^2 + 3$
Montrer que $A \geq \dfrac{3}{4}$

2) On suppose que : $-3 \leq a \leq 1$
Montrer que $\dfrac{3}{4} \leq A \leq 7$

80 Soient a, b et c des nombres réels tels que : $a \neq 1$ et $b \neq 2$.
On pose :
$$A = \frac{(a-4)(b-2)}{a-1} ; B = \frac{a-3b+5}{a-1} ; C = \frac{(a-1)^2 - 3(b-2)}{a-1}$$
Comparer A, B et C dans chacun des cas suivants :
a) $a = 2$ et $b \neq 3$; b) $a = 4$

81 Soit t un réel tel que : $t > 1$.
Montrer que : $\dfrac{3}{2} < \dfrac{1+2t}{1+t} < 2$

82 Soit x un réel tel que : $4 < x < 5$.
Montrer que : $\dfrac{4}{7} < \dfrac{x}{x+3} < \dfrac{5}{8}$.

83 On sait que : $0 < x < y$ et $t = \dfrac{x}{y}$.
Soient α et β deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que : $t < \dfrac{\alpha t + \beta}{\beta t + \alpha} < \dfrac{1}{t}$.

84 On sait que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $x > 10^n$
Montrer que : $0 < \dfrac{1}{x-1} < \dfrac{1}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ fois}}}$.

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

85 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{n+1}{n+2}$

Déterminer un encadrement de x et vérifier que son amplitude est $\frac{1}{n(n+1)}$

86 Soit a un nombre réel tel que $2 \leq a \leq 3$.
Montrer que $2 \leq \frac{a^3+2}{a^2+1} \leq 3$.

87 Soient x et deux nombres réels tels que $0 < x < y$.
a) Montrer que : $x^2 < xy < y^2$.
b) Montrer que si $xy = 15$, alors $x < \sqrt{15} < y$.
c) Montrer que : $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3\,615}{931}$

88 Soit x un nombre réel tel que $x \geq 1$.
a) Montrer que : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

b) On pose : $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10^4}}$

Montrer que $198 < A < 200$

89 Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
a) Simplifier l'expression suivante :

$A_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

b) En déduire que : $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

90 Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \geq \frac{1}{2}$

91 Ecrire sous forme d'intervalle chaque fois que cela est possible :
a) $[-1;4] \cup [3;+\infty[$; b) $]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$
c) $]-\infty;2] \cap [3;+\infty[$; d) $[-1;4] \cap [3;+\infty[$

92 Soit a un nombre réel tel que $a > \frac{68}{15}$

On pose $x = \frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$ et $y = \frac{a(7+\sqrt{3})}{2}$

1) Comparer x et y.
2) On considère que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ $a = 5$
Montrer que :
• 21,8375 est une valeur approchée de y à 0,0125 près.
• $|x - 27,1| < 0,1$

93 a et b sont deux nombres réels tels que :
$1 \leq 3a + 2b \leq 4$ et $|a - 1| \leq 1$.
Donner un encadrement de chacun des nombres réels suivants : $a + b + 2$; $2a + 2b + 1$;
$(3a + 2b)(2a + 2b + 1)$; $\frac{2a+2b+1}{3a+2b}$

94 a, b et c sont trois nombres réels tels que:
$b > 0$; $2b^2 = a^2 + c^2$; $1 < a < 2$ et $-2 < c < 2$
Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{2} < b < 2$

95 Encadrer x sachant que : $|x - 1,72| \leq 0,01$

96 Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient la condition imposée dans chacun des cas suivants :
a) $|3x - 1| = 4$; b) $1 \leq |x + 2| \leq 2$
c) $2 \leq |x + 3| \leq 3$; d) $|7x - 5| \leq \frac{7}{2}$
e) $\sqrt{7-x} < \sqrt{2x-2}$; f) $\sqrt{(7-x)^2} < \sqrt{(2x-2)^2}$

97 Soient x et y deux nombres réels tels que :
$-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$
Montrer que : $-1 < xy < 1$

98 Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$.
On pose : $A = \frac{2xy}{x+y}$ et $B = \frac{x+}{2}$
Montrer que : $0 < B - A < y - x$

99 x et y sont deux nombres réels tels que :
$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ et $|2x + y| \leq \frac{2}{3}$
Montrer que : $\frac{y}{x} \in \left[-4; -\frac{1}{2}\right]$

100 Déterminer les nombres réels x, y et z tels que :

$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$

Exercices de synthèse

101 Pour tout nombre réel a de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on pose :

$A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

1) Montrer que : $a(A + 1)(A - 1) = 1$.
2) Montrer que : $2 \leq A + 1 \leq 3$.
En déduire que : $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$.
3) Montrer que 1,1 est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ à la précision $\frac{1}{30}$ près.

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

102 Soit x un nombre réel strictement positif.

1) a) Montrer que $1+\sqrt{1+x}>2$

b) En déduire que $0<\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}<\dfrac{1}{2}$

2) Montrer que : $1<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$

3) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1,04}$

103 Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a \le b \le 2a$

1) a) Montrer que $(a-b)(2a-b) \le 0$

b) Développer $(a-b)(2a-b)$ et $(a\sqrt{2}-b)^2$

2) On pose : $A=\dfrac{2a^2+b^2}{3ab}$

Montrer que : $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \le A \le 1$

(Utiliser la première question)

3) Montrer que $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{6}$ est une valeur approchée du réel A à $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{6}$ près.

104 On sait que $-1 < x < 0$ et $0 < x^2 + x + y^2 < 3$

1) Montrer que $|y| < 2$

2) On suppose dans cette question que $0 < y < 1$

a) Factoriser $xy + y + x^2 - 1$

b) En déduire que $|xy + y + x^2| < 1$

105 a, b et sont des longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse est c.

Comparer les deux réels dans chaque cas suivant :

1) $a + b$ et c

2) $a^3 + b^3$ et c^3

3) $a^5 + b^5$ et c^5

106 a est un nombre réel tel que $|a| < 1$

On pose : $E = a^3 + a^2 - 5a + 3$

1) Montrer que : $-3 < E < 10$

2) Vérifier que : $E = (a + 3)(a - 1)^2$

3) En déduire que : $0 < E < 16$

4) Montrer que : $|E - 5| < 5$

107 a, b et α étant des réels positifs, comparer :

$x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $y=\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{b+\alpha}$

108 x, y et n sont des réels tels que :

$x \ge 0$; $y \le 0$; $(n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 3)$ et $x + y = 2n + 1$

On pose : $E=\sqrt{x^2+2nx+n^2}-|n+1-y|$

1) Vérifier que : $E=|x+n|-|n+1-y|$

2) En déduire que E est un nombre entier naturel pair.

109 On considère l'intervalle $I=\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right[$.

a) Montrer que pour tout x de I : $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{6}$.

b) Montrer que pour tout x de I : $\dfrac{-7}{9}<-x^2+x-1<-\dfrac{3}{4}$

110 Soit x un nombre réel tel que : $|x-1|<1$.

Montrer que : $|x^2+5x-6| \le 8|x-1|$.

111 Soient x et y tels que $|x-1|<\dfrac{1}{2}$ et $|y+1|<\dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\dfrac{1}{3}<\dfrac{2x}{x-y}<3$

112 Soit α tel que $12 < \alpha < 13$.

Montrer que $\left|\sqrt{\alpha}-\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{13}}{2}\right|<0,1$

113 Soit x un réel non nul. On pose : $E=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

2) a) Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1 \ge 2$.

b) En déduire que : $\left|E-\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{1}{2}|x|$.

3) Déterminer une valeur approchée du réel $\dfrac{\sqrt{0,0001}}{0,01}$ à 5×10^{-3} près.

114 Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que $\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}>\dfrac{1}{n}$

115 a, b et c sont des nombres réels tels que :

$0 < a \le 1$; $0 < b \le 1$ et $0 < c \le 1$

1) Montrer que : $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) \le 0$

2) En déduire que $a+b+c+\dfrac{1}{abc} \ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+abc$

116 Parmi les rectangles qui ont la même aire, montrer que le carré est celui qui a le plus petit périmètre.

117 Parmi les rectangles qui ont le même périmètre, montrer que le carré est celui qui a la plus grande aire.

118 p, k et n sont des nombres entiers non nuls.

Montrer que :

a) $\dfrac{1}{p+k}=\dfrac{1}{p}\left(1-\dfrac{k}{p+k}\right)$

b) $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{4}$

Scanné avec CamScanner

3 EXERCICES ET PROBLÈMES

119 x, y, z et t sont des nombres entiers naturels tels que :
$1 < x < y < z < t$
Montrer que : $\frac{1}{xyzt} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \leq \frac{31}{24}$

120 x et y étant deux nombres réels strictement positifs,
montrer que : $\frac{x+y}{x+y+1} < \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

Inégalités remarquables

121 soient x, y et z des nombres réels strictement positifs.
Montrer que :

1) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4.$

2) $(1+x)(1+y) \geq 4\sqrt{xy}\,.$

3) $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\,.$

4) $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 6.$

5) $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

6) Si $x + y = 1$, alors :

a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$

b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}\,.$

7) $\frac{\sqrt{2}(x+y)}{1+x^2+y^2} \leq 1.$

122 Soient x et y deux réels tels que : $1 \leq x^2 - xy + y^2 \leq 2$.

1) Montrer que : $\frac{2}{9} \leq x^4 + y^4 \leq 8.$

2) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :
$x^{2^n} + y^{2^n} \geq \frac{2}{3^{2^n}}\,.$

123 Montrer que :
$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4} \geq a+b+c$

124 a, b, c et d sont des nombres distincts de IN supérieurs ou égaux à 2. Montrer que :
$\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\left(1-\frac{1}{d^2}\right)} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

125 x, y et z sont des nombres réels supérieurs ou égaux à -1 tels que : $x + y + z + t = 2$
Montrer que : $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{2}$

126 a, b et c étant des nombres réels strictement positifs,
montrer que : $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$

127 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \ldots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$

Problèmes

128 On suppose que la trajectoire d'un satellite est un cercle de centre, le centre de la terre et de rayon de longueur 6800km.

1) Donner la valeur exacte de la longueur p de la trajectoire du satellite.

2) Soit a une valeur approchée du nombre π fournie par une calculatrice qui affiche 8 chiffres.
Si $|\pi - a| < 5 \times 10^{-8}$, peut-on obtenir un encadrement de la longueur p au mètre près ? au cm près ?

3) Vérifier que si on prend $|\pi - a| < 2 \times 10^{-3}$ (par exemple a = 3,14), alors la longueur p de la trajectoire sera calculée à la précision de 25km.

129 Deux cyclistes partent d'une ville A vers une ville B. Le premier cycliste part à neuf heures à la vitesse de 25 kilomètres par heure ; le second cycliste part à neuf heures et vingt minutes à la vitesse de 29 kilomètres par heure.
Quelle doit être la distance entre les deux villes pour que le second cycliste puisse dépasser le premier ?

130 Soit α un nombre réel strictement positif.
Soit x un élément de l'intervalle $[1 ; 1 + \alpha[$.

1) a) Vérifier que : $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$

b) Montrer que $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]\right| \leq \frac{3}{8}\alpha^2$

En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 6×10^{-8} près.

2) a) Vérifier que :
$-3x\sqrt{x} - 6x + \sqrt{x} + 8 = -(\sqrt{x} - 1)(3x + 9\sqrt{x} + 8)$

b) Montrer que :
$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \left[1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2\right]\right| \leq \frac{5}{16}\alpha^3$

En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-11} près.

Scanné avec CamScanner

Polynômes

Activités préparatoires	67
Définitions et règles	70
Points essentiels	76
Exercices résolus	77
Exercices et problèmes	78

4

Capacités attendues

* Maîtrise de la technique de la division euclidienne par $x - a$.
* Discernement de la divisibilité par $x - a$

Contenu

- Activités préparatoires
  - Introduction
  - Polynômes
  - Egalité de deux polynômes
  - Somme et produit de deux polynômes
  - Division euclidienne par $x - a$ et racine d'un polynôme
  - Racine d'un polynôme et ses coefficients
  - Polynômes n'admettant pas de racines naturelles
- Définitions et règles
  - Polynômes
  - Egalité de deux polynômes
  - Opérations sur les polynômes
  - Division euclidienne par $(x - \alpha)$
  - Racine d'un polynôme
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

Polynômes

Activités préparatoires	67
Définitions et règles	70
Points essentiels	76
Exercices résolus	77
Exercices et problèmes	78

4

Capacités attendues

* Maîtrise de la technique de la division euclidienne par $x - a$.
* Discernement de la divisibilité par $x - a$

Contenu

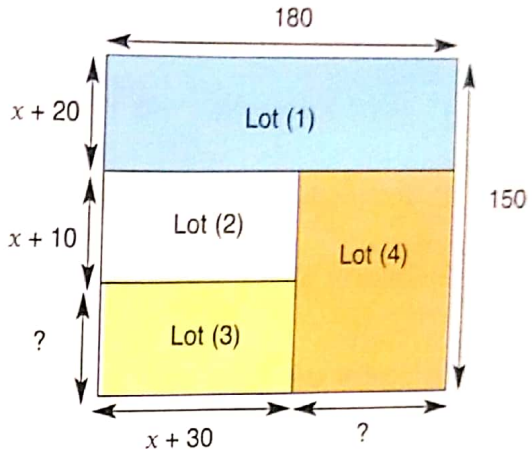
- Activités préparatoires
  - Introduction
  - Polynômes
  - Egalité de deux polynômes
  - Somme et produit de deux polynômes
  - Division euclidienne par $x - a$ et racine d'un polynôme
  - Racine d'un polynôme et ses coefficients
  - Polynômes n'admettant pas de racines naturelles
- Définitions et règles
  - Polynômes
  - Egalité de deux polynômes
  - Opérations sur les polynômes
  - Division euclidienne par $(x - \alpha)$
  - Racine d'un polynôme
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Introduction

On considère le plan suivant de quatre lots de terrain
(l'unité étant le mètre)
1) Déterminer en fonction de x l'aire de chaque lot.
2) Si la largeur du lot (1) est 50m, quelles sont les aires des lots (3) et (4) ?



ACTIVITE 2 Polynômes

On considère l'expression P(x) définie par : $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

P(x) est appelée polynôme du troisième degré et on écrit d°P = 3 (ou degP = 3).

Les nombres 5 ; -3 ; -9 ; 2 sont appelés coefficients du polynôme P(x).

5 est le **coefficient du terme** de degré 3.

-3 est le **coefficient du terme** de degré 2.

-9 est le **coefficient du terme** de degré 1.

2 est le **coefficient du terme** de degré 0.

$a_i x^i$ est appelé terme de degré i

1) Déterminer le degré de chacun des polynômes suivants :

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + x^4 + 1$

$F(x) = 5 - x$

$H(x) = x^5 + x^3 - \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$

$R(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^4 + \sqrt{3}x$

2) On peut écrire P(x) sous l'une des formes suivantes :

(I) $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ et (II) $P(x) = 2 - 9x - 3x^2 + 5x^3$

- Lorsqu'on écrit P(x) sous la forme (I), on dit que l'on a ordonné le polynôme P(x) selon les puissances décroissantes de la variable x.
- Lorsqu'on écrit P(x) sous la forme (II), on dit que l'on a ordonné le polynôme P(x) selon les puissances croissantes de la variable x.

Réduire et ordonner les polynômes suivants selon les puissances décroissantes de la variable x, puis selon les puissances croissantes de la variable x.

$G(x) = 3x^3 - 4x^5 + 2x^2 + 8x^3 - x - x^2 + 2$

$K(x) = (x + 2)^2 - (x - 2)^2$

$L(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 1)(x + 3)$

$M(x) = (1 + x)(x^2 - 3x + 1)$

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 3 Egalité de deux polynômes

On considère les deux polynômes G(x) et H(x) définis par :

$G(x) = (2x + 3)(x^2 - 3x + 2)$ et $H(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 6)$

1) Montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Calculer $G\left(-\frac{3}{2}\right)$, G(1) et G(2).

3) Vérifier que : $G(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)(x - 2)$.

ACTIVITE 4 Somme et produit de deux polynômes

On considère les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définis par :

$P(x) = 5x^2 + 4x - 2$ et $Q(x) = -3\sqrt{5}\,x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

1) Calculer $P(x) + Q(x)$ et $P(x) - Q(x)$.

2) Calculer le produit $P(x) \times Q(x)$.

3) Déterminer d°(P × Q).

4) Comparer d°(P × Q) et d°P + d°Q.

ACTIVITE 5 Division euclidienne par x - a et racine d'un polynôme

On considère le polynôme $P(x)$ définie par $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$

1) Vérifier que P(1) = 0 et P(–1) = 0 ; on dit que **1 et –1 sont des racines du polynôme P(x)**.

Calculer P(2). 2 est-il racine du polynôme $P(x)$?

2) Vérifier que : $P(x) - P(2) = (x^4 - 2^4) + (x^3 - 2^3) + (x^2 - 2^2) - (x - 2)$.

3) En déduire que $P(x) = (x - 2)Q(x) + P(2)$.

où $Q(x)$ est un polynôme de degré 3 = d°P – 1.

4) Ecrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x - 1)H(x) + P(a)$
(a est un nombre réel donné et $H(x)$ un polynôme à déterminer).

5) En prenant a = 1, en déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

a est une racine du polynôme P(x) signifie que P(a) = 0

Scanné avec CamScanner

4 ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

ACTIVITÉ 6 Racines d'un polynôme et ses coefficients

A On considère les deux polynômes $H(x)$ et $K(x)$ définis par :

$$H(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 - x + (a+b+c)$$

$$K(x) = x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

1) $H(x)$ admet deux racines évidentes. Les déterminer.

2) En déduire une factorisation de $H(x)$.

3) Calculer $K(a)$ et en déduire une factorisation de $K(x)$.

4) Résoudre l'équation $H(x) = 0$ et l'équation $K(x) = 0$.

B Soit $P(x)$ le polynôme défini par : $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

1) On suppose que $P(x)$ admet trois racines a', b' et c'.

Montrer que :
$$\begin{cases} a' + b' + c' = -\alpha \\ a'b' + b'c' + c'a' = \beta \\ a'b'c' = -\gamma \end{cases}$$

2) En déduire une factorisation du polynôme :

$$F(x) = x^3 - \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)x - \sqrt{30}$$

ACTIVITÉ 7 Polynômes n'admettant pas de racines naturelles

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs.

On suppose que $|P(0)|$ et $|P(1)|$ sont impairs.

1) Montrer que $|d|$ est impair.

2) Montrer que $|a + b + c|$ est pair.

3) On suppose que $P(x)$ admet une racine k appartenant à **N**.

a) Montrer que k n'est pas pair.

b) Montrer que $P(k) - P(1) = (k-1)(ak^2 + (a+b)k + (a+b+c))$

c) Montrer que k n'est pas impair (Remarquer que $P(k) - P(1) = -P(1)$)

4) Que peut-on en déduire ?

Scanné avec CamScanner

4 DEFINITIONS ET REGLES

1 Polynômes

Définition On appelle polynôme toute expression $P(x)$ qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où n est un nombre entier naturel et a_0, a_1, ... et a_n sont des nombres réels.
Les nombres a_0, a_1, ... et a_n sont appelés **coefficients** du polynôme $P(x)$.

- Si a_n n'est pas nul ($a_n \neq 0$), le nombre entier naturel n est appelé **degré** du polynôme $P(x)$ et on le note : **d°P = n**.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le polynôme nul qui est sans degré.
- $a_i x^i$ est le terme de degré i et a_i est le coefficient du terme de degré i.

Exemples

- $P(x) = 4x^3 + 7x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ est un polynôme du troisième degré (d°P = 3)
- $Q(x) = x^2 - x + 1$ est un polynôme du second degré (d°Q = 2)
- $S(x) = 2x - 3$ est un polynôme du premier degré (d°S = 1)

2 Egalité de deux polynômes

Propriété Pour que deux polynôme soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient le même degré et que les coefficients des termes de même degré soient deux à deux égaux.

Cette propriété signifie que tout polynôme a une forme réduite unique.

Exemples et applications

- On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x - 1$$
$$Q(x) = ax^4 + (a + b)x^3 + cx^2 + (2c + d)x - 1$$

$P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -2 \\ c = 7 \\ 2c + d = 5 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 7 \\ d = -9 \end{cases}$$

- *On considère les deux polynômes :*

$$H(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3$$
$$G(x) = 3x^4 + (2a + 1)x^3 + (b - 3)x^2 + (2c + 3)x + 3$$

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que les deux polynômes $H(x)$ et $G(x)$ soient égaux.

Remarque

- Le polynôme $ax + b$ (où $a \neq 0$) est appelé polynôme du premier degré ; il est aussi dit binôme du premier degré.
- Le polynôme $ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$) est appelé polynôme du second degré ; il est aussi appelé trinôme du second degré.

Scanné avec CamScanner

4 DEFINITIONS ET REGLES

3 Opérations sur les polynômes

A- Somme de deux polynômes

On considère les deux polynômes :

$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6$

$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$

On a : $P(x) + Q(x) = (5x^3 - 7x^2 + 8x + 6) + (2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9)$

$P(x) + Q(x) = 2x^4 + (5 - 2)\,x^3 + (-7 + 4)x^2 + (8 + 1)\,x + 6 - 9$

$P(x) + Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Donc $P(x) + Q(x)$ est un polynôme et $d°(P + Q) = 4$

Calculer la somme des deux polynômes et déterminer le degré de la somme, dans chacun des deux cas suivants :

(1) $\begin{cases} P(x) = 7x^6 - 6x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \\ Q(x) = 8x^7 - 6x^6 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} G(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 13x + 1 \\ H(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x^5 - 9x \end{cases}$

Remarques

En général :

$d°(P + Q) \quad d°P + d°Q$

Exemple :

$P(x) = x^2 + x$

$Q(x) = -x^2 + 5$

B- Produit d'un nombre réel par un polynôme

Définition Soit le polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

et soit k un nombre réel.

Le produit du nombre réel k par le polynôme $P(x)$ est le polynôme noté $kP(x)$ défini par :

$$kP(x) = ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ka_1 x + ka_0$$

Exemple

On considère les deux polynômes :

$P(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 4$

$Q(x) = x^4 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 4$

On a : $3P(x) - 2Q(x) = 3(7x^3 - 5x^2 + 3x + 4) - 2\left(x^4 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 4\right)$

$3P(x) - 2Q(x) = (21x^3 - 15x^2 + 9x + 12) + (-2x^4 + 12x^3 - 3x^2 + 2x - 8)$

$3P(x) - 2Q(x) = -2x^4 + 33x^3 - 18x^2 + 11x + 4$



Omar Khayyam
عمر الخيام
(1050-1122)
Poète, mathématicien, astronome et philosophe. Il a étudié les polynômes du troisième degré (cubiques) et leurs racines positives.

Scanné avec CamScanner

C- Produit de deux polynômes

On considère les deux polynômes : $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 - 3x + 4$

On a : $P(x) \times Q(x) = (x^3 + x^2 - 3x + 1)(2x^3 - 3x + 4)$

$P(x) \times Q(x) = 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 6x^4 + 9x^2 - 12x + 2x^3 - 3x + 4$

$P(x) \times Q(x) = 2x^6 + 2x^5 - 9x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 15x + 4$

Donc $P(x) \times Q(x)$ est un polynôme et $d°(P \times Q) = 6$

Propriété Le produit de deux polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme et $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$.

Remarques

Le produit du polynôme nul par n'importe quel polynôme, est le polynôme nul.

Calculer le produit des deux polynômes et déterminer le degré de ce produit, dans chacun des cas suivants :

(1) $P(x) = 3x^4 - 2x$ et $Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$

(2) $G(x) = x^3 - x^2 + x$ et $H(x) = 2x^2 - 3x + 5$

4 Division par $(x - \alpha)$

Propriété Soit $P(x)$ un polynôme de degré non nul n.

Soit α un nombre réel.

Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

- $Q(x)$ est appelé quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.
- $P(\alpha)$ est appelé reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.

Exemples et applications

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 2$

Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 3)\,Q(x) + P(3)$

- On a : $P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 3 - 2$

Donc : $P(x) - P(3) = 2(x^3 - 3^3) - 5(x^2 - 3^2) - 5(x - 3)$

$= 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 5(x - 3)(x + 3) - (x - 3)$

$= (x - 3)[2(x^2 + 3x + 9) - 5(x + 3) - 1]$

$= (x - 3)(2x^2 + 6x + 18 - 5x - 15 - 1)$

$P(x) - P(3) = (x - 3)(2x^2 + x + 2)$

Donc $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x + 2) + P(3)$

Il en découle que $Q(x) = 2x^2 + x + 2$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 3)$ et $P(3) = 4$ en est le reste.

Rappel

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Scanné avec CamScanner

4 DEFINITIONS ET REGLES

• On peut calculer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P(x) par (x – 3) comme c'est le cas pour les nombres entiers naturels en adoptant la disposition suivante :

	$2x^3 - 5x^2 - x - 2$	$x - 3$
- $(x-3) \times 2x^2$:	$-2x^3 + 6x^2$	$2x^2 + x + 2$ ← quotient
	$x^2 - x - 2$	
- $(x-3) \times x$:	$-x^2 + 3x$	
	$2x - 2$	
- $(x-3) \times 2$:	$-2x + 6$	
reste ⟶	4	

Donc : $P(x) = (x-3)(2x^2 + x + 2) + 4$

$Q(x) = 2x^2 + x + 2$ et $P(3) = 4$

■ Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme : $T(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 52$ par $(x + 2)$

	$3x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 52$	$x + 2$
- $(x+2) \times 3x^3$:	$-3x^4 - 6x^3$	$3x^3 - 7x^2 + 14x - 26$
	$-7x^3 + 0x^2 + 2x - 52$	
- $(x+2) \times (-7x^2)$:	$7x^3 + 14x^2$	
	$14x^2 + 2x - 52$	
- $14x\,(x+2)$:	$-14x^2 - 28x$	
	$-26x - 52$	
+ $26\,(x+2)$:	$26x + 52$	
	0	

Donc : $T(x) = (x + 2)(3x^3 - 7x^2 + 14x - 26)$

Ce qui signifie que le quotient de la division de $T(x)$ par $(x + 2)$ est $3x^3 - 7x^2 + 14x - 26$ et le reste est nul.

■ Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x - 11$ et $\alpha = -4$

(2) $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 4x + 3$ et $\alpha = 1$

(3) $P(x) = 4x^6 + 6x^5 - 2x^3 + 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fut le premier à démontrer (en 1799) que tout polynôme peut se décomposer en produit de polynômes du premier ou du second degré.

Scanné avec CamScanner

5 Racine d'un polynôme

Définition Soit $P(x)$ un polynôme et soit α un nombre réel.

On dit que α est **une racine** (ou un zéro) du polynôme $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$.

Exemples et applications

- On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 45$.
  - On a : $P(1) = 2 - 3 - 4 - 45 = -50$.
    Donc 1 n'est pas une racine de $P(x)$ (car $P(1) \neq 0$).
  - On a : $P(3) = 2 \times 3^4 - 3 \times 3^3 - 4 \times 3^2 - 45$.
    $P(3) = 162 - 81 - 36 - 45$.
    $P(3) = 0$.
    Donc 3 est une racine du polynôme $P(x)$.
- On considère le polynôme $F(x) = (2m - 1)x^3 + 5x^2 - (1 - m)x + 3$.
  Déterminer la valeur de m du nombre m pour laquelle 2 est une racine de $F(x)$.

Propriété Soit $P(x)$ un polynôme de degré n tel que $n \geq 1$

Soit α un nombre réel.
Le nombre α est une racine du polynôme si et seulement si l'on peut trouver un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que pour tout réel x : $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$
- *On dit alors que $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$*

Exemples et applications

- On considère le polynôme $P(x) = x^3 - (3 + \sqrt{2})x^2 + (2 + 3\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$

  On a : $P(2) = 8 - 12 - 4\sqrt{2} + 4 + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$

  Comme $P(2) = 0$, alors 2 est une racine du polynôme $P(x)$

  Donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$ c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - 2)Q(x) \text{ et } d°Q = 2$$

On peut déterminer le polynôme $Q(x)$ au moyen des deux méthodes déjà vues aux paragraphes précédents.

Remarques

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Le nombre 1 est racine de $P(x)$ si et seulement si :
$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$
(c'est-à-dire si la somme des coefficients est nulle)

En d'autres termes

Le nombre α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$

Scanné avec CamScanner

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-(3+\sqrt{2})x^2+(2+3\sqrt{2})x-2\sqrt{2} & x-2 \\
\hline
-x^3+2x^2 & x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2} \\
\hline
-(1+\sqrt{2})x^2+(2+3\sqrt{2})x-2\sqrt{2} & \\
(1+\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x & \\
\hline
\sqrt{2}x-2\sqrt{2} & \\
-\sqrt{2}x+2\sqrt{2} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x)=(x-2)\left(x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}\right)$

Par suite $Q(x)=x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$

■ On considère le polynôme $G(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

On a : $G(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - 6 \times 4 + 8$

$G(4) = 64 - 48 - 24 + 8 = 0$

$G(4) = 0$; donc 4 est une racine du polynôme $G(x)$.

Déterminons le polynôme $H(x)$ tel que $G(x) = (x - 4)H(x)$.

On peut déterminer le polynôme $H(x)$ en employant la méthode suivante :

Comme $d°G = 3$, alors $d°H = d°G - 1 = 2$

Donc : $H(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels tels que

$G(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$

c'est-à-dire :

$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c$

ou encore :

$a = 1$; $b - 4a = -3$; $c - 4b = -6$; $-4c = 8$

$a = 1$; $b = 1$; $c = -2$

Donc : $G(x) = (x - 4)(x^2 + x - 2)$.

D'où : $H(x) = x^2 + x - 2$.

■ Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ et déterminer le polynôme $Q(x)$ quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 36$; $\alpha = -2$.

(2) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15$; $\alpha = 3$.

(3) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Commentaire

Soit α une racine du polynôme $P(x)$.
Pour déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, on peut employer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- Première méthode :
  Utilisation de la disposition des calculs de la division euclidienne par $(x - \alpha)$.
  L'avantage de cette technique est de permettre de vérifier la validité du résultat en obtenant un reste nul.
- Deuxième méthode :
  Utilisation de l'égalité de deux polynômes qui se ramène à des systèmes simples à résoudre.

Scanné avec CamScanner

4 POINTS ESSENTIELS

Polynômes

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit x un nombre réel.

On considère l'expression $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$P(x)$ (ou P) est appelé **polynôme**.

Les nombres réels a_0 ; a_1 ; ... ; a_n sont appelés **coefficients** du polynôme $P(x)$

- Si $a_n \neq 0$, alors le nombre entier naturel n est appelé **degré** du polynôme $P(x)$ et se note : $n = d°P$
- Si $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$, alors $P(x) = 0$ est le **polynôme nul**.
- Pour que deux polynômes P et Q soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient le même degré et que les coefficients des termes de même degré soient deux à deux égaux.

Opérations sur les polynômes

Soient $P(x)$, $Q(x)$ deux polynômes et k un nombre réel.

- Somme : $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$.
- Produit : $(P \times Q)(x) = P(x)Q(x)$.
- Produit par un nombre réel : $(kP)(x) = k \times P(x)$.

* Degré du produit : $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$.

Division par $(x - \alpha)$ – Racine d'un polynôme

* *Soit $P(x)$ un polynôme de degré n où $n \in \mathbb{N}^*$.*

Soit α un nombre réel.

Il existe un polynôme unique $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

*Le polynôme $Q(x)$ et le réel $P(\alpha)$ sont appelés respectivement **le quotient** et **le reste** de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.*

* *α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.*
* *Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.*
* *Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$ si et seulement si : $P(\alpha) = 0$.*

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES RESOLUS

1 Egalité de deux polynômes

On considère les deux polynômes
$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$
$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer les nombres réels a, b et c pour que les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

Solution

On a :
$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$
$Q(x) = 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx + ax^2 + bx + c$
$Q(x) = 2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (2c - 3b + a)x^2 + (-3c + b)x + c$
Ainsi $P(x) = Q(x)$ si et seulement si :
$2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (2c - 3b + a)x^2 + (-3c + b)x + c = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 2a = 12 \\ 2b - 3a = -36 \\ 2c - 3b + a = 47 \\ -3c + b = -30 \\ c = 7 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = -9 \\ c = 7 \end{cases}$$

2 Division euclidienne par $(x - \alpha)$ Racine d'un polynôme

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 20$.
1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 4)Q(x)$

Solution

1) **Montrons que $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$**
On a : $P(4) = 4^3 - 8 \times 4^2 + 11 \times 4 + 20$
$P(4) = 64 - 128 + 44 + 20$
Donc $P(4) = 0$ c'est-à-dire que 4 est une racine de $P(x)$. D'où $P(x)$ est divisible par $(x - 4)$.

2) **Déterminons le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 4)Q(x)$.**
Effectuons la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - 4)$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 8x^2 + 11x + 20 & x - 4 \\ \underline{-x^3 + 4x^2} & \\ 0 - 4x^2 + 11x & x^2 - 4x - 5 \\ \underline{4x^2 - 16x} & \\ 0 - 5x + 20 & \\ \underline{5x - 20} & \\ 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x) = (x - 4)(x^2 - 4x - 5)$
D'où : $Q(x) = x^2 - 4x - 5$

3 Méthode de Hörner

Commentaire : On considère le polynôme :
$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

Soit $Q(x)$ le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ et R son reste.
La méthode de Hörner nous permet de connaître les coefficients de $Q(x)$ et R. Cette méthode se résume dans le tableau suivant :

Coefficients de $P(x)$	b_n	b_{n-1}	.....	b_0
a (×)		$+ b_n a$		
Coefficients de $Q(x)$ et le reste R	b_n	$b_{n-1} + b_n a$	.....	R

1) En utilisant la méthode de Hörner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :
$P_1(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5$ par $(x - 5)$
2) En utilisant la méthode de Hörner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :
$P_2(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ par $(x + 1)$

Solution

1) **Division euclidienne de $P_1(x)$ par $(x - 4)$ par la méthode de Hörner**

Coefficients de $P_1(x)$	3	–8	0	–5
4		12	16	64
Coefficients de $Q_1(x)$ et reste R	3	4	16	59

reste R_1

Donc le quotient est $Q_1(x) = 3x^2 + 4x + 16$ et le reste est $R_1 = 59$

2) Division euclidienne de $P_2(x)$ par $(x + 1)$ par la méthode de Hörner

Coefficient de $P_2(x)$	1	3	–7	–27	–18
–1		–1	–2	9	18
Coefficients de $Q_2(x)$ et reste R	1	2	–9	–18	0

reste R_2

Donc le quotient est $Q_2(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ et le reste est $R_2 = 0$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Egalité de deux polynômes

1 Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x) = 4(1+x)^3 - \frac{3}{2}(1-x)^2 + (1-x+x^2)^2$

$Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + x - 2)(3x^2 + x - 3)$

$R(x) = x(1-2x^2)(x^3+2) - x^3(x^2+1)(1-x^2)$

$S(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)$

Exemple : La forme réduite et ordonnée du polynôme $A(x) = (x-2)(2x+3)^2 + 18$ est $A(x) = 4x^3 + 4x^2 - 15x$

2 Déterminer la forme réduite et le degré du polynôme $P(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = (x^2-4)^2 - (x^2+2x)^2$.

b) $P(x) = (x+1)^3(x-1)$.

c) $P(x) = (2-x)^3(x+2)$.

d) $P(x) = (x^3-1)^2(x^3+1)^2$.

e) $P(x) = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)$.

3 Déterminer, sans développer complètement, le degré du polynôme $P(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = (3x^3)^4 - 9(x^3-4)(x^5+7)$

b) $P(x) = (2x^2 + x + .1)(x^5 - 2) - 2(1 + x^7)$

c) $P(x) = (2-5x)^3(3+5x)^2(7-13x^2)$

d) $P(x) = (7x^5 - 5)^4$

Somme et produit de deux polynômes

4 Calculer la somme et la différence des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $\begin{cases} f(x) = x^7 - 6x^6 + 5x^4 + 4x^3 - x + 1. \\ g(x) = -x^7 + 9x^9 - 3x^3 + 8x^2 - 9. \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = (x^2-4)(x+2). \\ g(x) = x(2-3x)(x+2). \end{cases}$

5 On considère les deux polynômes :

$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Calculer ce qui suit :

a) $2f(x) - 3g(x)$.

b) $f(x) \times g(x)$.

c) $(f(x))^2$.

d) $(g(x))^2$.

6 Soit $P(x)$ un polynôme non nul de degré n. Calculer, en fonction de n, le degré de chacun des polynômes suivants :

a) $(P(x))^2$; b) $(x^2+4)P(x)$; c) $(P(x))^3$

Coefficients d'un polynôme

7 Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x :

$ax^2 + (3-2b)x + b = c + 5$

8 Déterminer les nombres réels a et b tels que $P(x) = (x-a)^2 + b$ dans chaque cas suivant :

a) $P(x) = x^2 - 7x - 8$; c) $P(x) = x^2 + 33x + 90$

b) $P(x) = x^2 - 3x + 9$; d) $P(x) = x^2 - 50x + 1625$

Avec les factorisations

9 On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$

a) Déterminer le nombre réel a sachant que :

$P(x) = (x^2 - 3x + a)^2 - x^2$

b) Traduire $P(x)$ en produit de deux polynômes du second degré.

10 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

Déterminer les deux réels a et b sachant que :

$P(x) = (ax+b)(x+1)(x+3)$

11 Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que pour tout réel t, on ait :

$\alpha(t+2)^2 + \beta(t+2) + \gamma = 2t^2 + 9t + 10$

12 On considère les deux polynômes :

$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$

et $Q(x) = (6x^2 - 9x + 7)(ax^2 + bx + c)$

Déterminer les réels a, b et c sachant que les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux.

13 Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la relation proposée soient réalisée dans chaque cas suivant :

a) $(x-1)(ax^2 + bx + c) = -2x^3 - 3x^2 + 5x$

b) $(x-2)^2(ax^2 + bx + c) = 3x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 24x + 24$

c) $(x^2-1)(ax^3 + bx^2 + cx) = x^5 + x^3 - 2x$

d) $(2x+1)^2(ax^2 + bx + c) = 4x^4 + 4x^3 - 35x^2 - 36x - 9$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

Calcul de P(a), a donné

14 On considère le polynôme :
$P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$
Calculer : $P(0)$; $P(1)$; $P\left(\frac{1}{2}\right)$; $P(\sqrt{2})$; $P(-2)$

Racine d'un polynôme

15 On considère le polynôme :
$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 74$
Soit : $a = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$
1) Calculer a^2, a^3 et a^4. En déduire $P(a)$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$

16 Montrer que le polynôme :
$P(x) = -x(3x - 2) + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$
est divisible par $x + \frac{1}{3}$ et par $x - \frac{2}{3}$

17 Les nombres proposés sont-ils racines du polynôme $f(x)$ dans chaque cas suivant ?
a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 21$; $a = 3$
b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$; $\begin{cases} a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ b = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$
c) $f(x) = 5x^4 - x^3 - 5x^2 + x$; $a = \frac{1}{5}$
d) $f(x) = x^7 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$; $a = 1$ et $b = -1$

18 On considère le polynôme $P(x) = x^6 - 4\sqrt{2}\,x$
1) Montre que $\sqrt{2}$ est une racine de $P(x)$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tels que :
$P(x) = (x - \sqrt{2})\,Q(x)$
[Remarquer que $P(x) = x^6 - (\sqrt{2})^6 - 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$].

19 Déterminer le nombre réel α de telle sorte que le polynôme $P(x)$ admette x_0 comme racine dans chacun des deux cas suivants :
1) $\begin{cases} P(x) = \alpha x^2 + 6x - 4 \\ x_0 = 2 \end{cases}$
2) $\begin{cases} P(x) = 2x^4 + \alpha x^3 - x + 1 \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

20 Déterminer les racines du polynôme
$P(x) = x(x + 1)(x + 2) - a(a + 1)(a + 2)$
où a est un nombre réel donné.

Division par $(x - a)$

21 Déterminer le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $x - a$ dans chacun des cas suivants :
a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ par $x + 1$
b) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ par $x - 2$
c) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 5$ par $x + \frac{3}{2}$

22 Déterminer le quotient et le reste dans la division de $E(x)$ par $F(x)$ dans chacun des cas suivants :
a) $E(x) = 5x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1$ et $F(x) = x - 2$
b) $E(x) = 4x^3 + 5x^2 - x + 7$ et $F(x) = x + 1$
c) $E(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ et $F(x) = x - 1$
d) $E(x) = 4x^5 - 5x^3 + 2x + 1$ et $F(x) = 2x + 3$

23 On considère le polynôme :
$P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15$.
1) Montrer que le nombre 3 est racine de $P(x)$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$P(x) = (x - 3)Q(x)$

24 On considère le polynôme $A(x) = x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6$
1) Montrer que $4A(x) = (2x - 3\sqrt{3})^2 - 3$
2) Factoriser $A(x)$.
3) Soit le polynôme
$B(x) = x^3 - (3\sqrt{3} + 1)x^2 + 3(2 + \sqrt{3})x - 6$
a) Montrer que $B(x)$ est divisible par $(x - 1)$.
b) Déterminer le polynôme $C(x)$ tel que :
$B(x) = (x - 1)C(x)$
puis factoriser $B(x)$.

25 On considère les deux polynômes :
$A(x) = x^2(x^2 - 2x + 3) + (x - 1)^2 + 1$
$F(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 2$
a) Montrer que $F(x)$ est divisible par $(x - 1)$.
b) Vérifier que $F(x) = (x - 1)A(x)$.

26 On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 15x - 4$
1) a) Montrer que 4 est une racine de $P(x)$.
b) En effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - 4)$, montrer que : $P(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$
2) a) Montrer que : $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.
b) Déterminer les deux nombres réels tels que :
$P(x) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + a)(x + b)$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

27 On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$.

1) a) Calculer $P(1)$.

b) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x - 1)$

2) a) Déterminer les deux nombres réels a et b tels que :
$(ax + b)(x - b) = 3x^2 - 4x - 4$.

b) Résoudre dans IR l'équation : $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

c) En déduire dans IR les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercices de renforcement des apprentissages

28 On considère le polynôme :

$$P(x) = m(m + 1)x^4 + (m + 1)x^3 + (m^2 - 4)x + 4$$

où m est un nombre réel.

Déterminer, suivant les valeurs de m, le degré du polynôme $P(x)$.

29 Déterminer, selon les valeurs de m, le degré du polynôme $P(x) = (mx^5 - 1)(x^3 + (2 - m)x^5 - 7)$.

30 1) Montrer que, pour tout nombre réel t, on a :

$$t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$$

2) Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3$.

a) Vérifier que : $P(x) = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3$.

b) Factoriser $P(x)$ en produit de deux polynômes du second degré.

c) Montrer qu'il existe un nombre réel α que l'on déterminera tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)^2((x - \alpha)^2 + 2)$$

31 Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (ax^2 + bx + c)^2$$

32 Soit a un nombre réel. On considère les polynômes :

$$f(x) = x^2 - ax + 1$$

$$g(x) = x^4 - (a^3 - 2a)x + a^2 - 1$$

Déterminer le polynôme $h(x)$ tel que $g(x) = f(x)\,h(x)$.

33 1) On considère le polynôme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 1)$ si et seulement si : $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$.

2) Parmi les polynômes suivants, déterminer ceux qui sont divisibles par $(x - 1)$:

a) $P_1(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 6x - 3$

b) $P_2(x) = -x^6 + x^4 + x^3 + 7x^2 - 8$

c) $P_3(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

34 Dans chacun des cas suivants, le nombre a est-il racine du polynôme $P(x)$? Si oui, factoriser $P(x)$.

1) $P(x) = -x^4 + 16$; $a = -2$.

2) $P(x) = x^3 + 27$; $a = -3$.

3) $P(x) = -\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$; $a = -1$.

4) $P(x) = 6x^3 - x^2 - x + 6$; $a = -1$.

5) $P(x) = 3x^3 - 24$; $a = 2$.

6) $P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 7x - 3)$; $a = \frac{1}{2}$.

7) $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8$; $a = 2$ ou $a = -2$.

8) $P(x) = x^3 - 19x + 30$; $a = 2$ ou $a = 3$.

35 On considère le polynôme : $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 3x + b$

où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer a et b sachant que 2 et $\frac{1}{2}$ son deux racines de $P(x)$.

36 Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x - 2)$ et par $(x + 3)$:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b.$$

37 Soient a, b et c des nombres réels.

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = (x^2 - 1)(x - 3).$$

Déterminer a, b et c sachant qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $P(x) = Q(x)R(x)$.

38 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12$.

1) Calculer $P(2\sqrt{3})$ et en déduire que $P(x)$ et divisible par $\left(x - 2\sqrt{3}\right)$.

2) Effectuer la division du polynôme $P(x)$ par $\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

3) Factoriser $P(x)$ en produit de polynôme du premier degré.

39 On considère le polynôme $P(x)$ tel que :

$$P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

1) a) Vérifier que -1 est une racine de $P(x)$.

b) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x + 1)$.

c) En déduire que : $P(x) = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6)$.

2) a) Montrer que $x^2 + 5x + 6 = (x^2 - 9) + 5(x + 3)$.

b) Factoriser $x^2 + 5x + 6$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

40 Soit $P(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$P(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5)$.

2) Vérifier que $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$.

3) Déduire de ce qui précède une factorisation de P(x) en produit de polynômes du premier degré.

41 1) Montrer que $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

2) Soit $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.
Déterminer un polynôme $S(x)$ tel que $P(x) = (S(x))^2$.

42 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- $f(x)$ et $g(x)$ sont de degré 3.
- Le degré de $f(x) + g(x)$ est 0.

(c'est-à-dire que $f(x) + g(x) = k$ où k est une constante réelle fixe).

43 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- Le degré de $f(x)$ est 4.
- Le degré de $g(x)$ est 4.
- Le degré de $f(x) + g(x)$ est 1.

44 Montrer qu'il existe un polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que :
$P(1) = 3$, $P(-1) = 4$ et $P(2) = 3$

45 1) Montrer que $4(t^2 - t - 72) = (2t - 1)^2 - 289$

2) On considère les deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :
$f(x) = (8x + 7)^2 (8x + 6)(x + 1) - 9$
$g(x) = \alpha(8x + 7)^4 + \beta(8x + 7)^2 + \gamma$
où α, β et γ sont des réels donnés

a) Déterminer α, β et γ tels que $f(x) = g(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - t - 72 = 0$.

c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

46 Montrer que le polynôme :
$P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

47 On considère le polynôme :
$P(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + 12x + 4$
Déterminer a, b et c tels que :
$P(x) = (x^2 + bx + c)^2$

48 Déterminer le nombre réel α pour que le nombre 3 soit racine du polynôme $x^3 - 6x^2 + (2 + 3\alpha)x - 2\alpha$ puis factoriser le polynôme obtenu.

49 Déterminer tous les polynômes $P(x)$ tels que :

- le degré de $P(x)$ est 3.
- $P(1) = P(2) = P(3) = 0$

50 Déterminer deux polynômes $R(x)$ et $S(x)$ de degré 3, divisibles par $(x - 1)$ tels que :
$R(0) = 0$ et $S(3) = 0$

51 Montrer que le nombre a est une racine du polynôme $x^3 - (3 + a)x^2 + (2 + 3a)x - 2a$ puis factoriser ce polynôme.

52 Déterminer deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tels que :

- Le degré de $f(x)g(x)$ est 5.
- $f(0) + g(0) = 0$
- $f(0) \neq 0$ et $g(0) \neq 0$

53 Soit P(x) un polynôme de degré 3 tel que :
$P(2) = 4$; $P(3) = 9$; $P(4) = 16$; $P(1) = 7$.
On pose $Q(x) = P(x) - x^2$.

1) Montrer qu'il existe un nombre constant k tel que :
$Q(x) = k(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

2) Calculer Q(1) et en déduire la valeur de k.

3) Déterminer $P(x)$.

54 On considère le polynôme :
$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

1) Montrer que les nombres -1 et 2 sont deux racines du polynôme $P(x)$.

2) Factoriser $P(x)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

4) a) Vérifier que, pour tout nombre réel non nul x, on a :
$$\frac{6x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} + 6$$

b) En déduire, dans $\mathbb{R}^*$, les solutions de l'équation :
$6x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

55 On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1) Montrer que le nombre -3 est une racine du polynôme $P(x)$.

2) Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que :

$$P(x) = \alpha(x+3)^3 + \beta(x+3)^2 + \gamma(x+3)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2(x+3)^2 - 11(x+3) + 14 = 0$$

[Remarquer que -1 est une solution de cette dernière équation].

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

56 On considère le polynôme :

$$P(x) = x^3 + (1-\sqrt{2})x^2 - (6+\sqrt{2})x + 6\sqrt{2}$$

1) a) Montrer que $\sqrt{2}$ est une racine de $P(x)$.

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x-\sqrt{2})Q(x)$$

c) Montrer que 2 est une racine de $Q(x)$.

2) Factoriser le polynôme $P(x)$.

Exercices de synthèse

57 On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 4x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad R(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

1) a) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x+1)$.

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ qui vérifie :

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

2) Montrer que : $R(x) = (x-1)(2x+1)^2$

3) Résoudre dans IR les deux équations :

a) $P(x) = 0$; b) $R(x) = 0$.

4) Résoudre dans IR les deux inéquations :

a) $P(x) \geq 0$; b) $R(x) \leq 0$.

5) En déduire l'ensemble des nombres réels x qui vérifient :

$$-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1.$$

58 1) a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$8(8x^2 - 2x - 1) = (8x-1)^2 - 9$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^2 - 2x - 1 = 0$.

2) On considère le polynôme $P(x) = 32x^3 - 6x - 1$.

a) Vérifier que le nombre $-\frac{1}{4}$ est racine de $P(x)$.

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (4x+1)Q(x)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.

59 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$.

1) Calculer $P(1)$, $P(-2)$ et $P(2)$.

2) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x-2)$.

3) Montrer que si α est une racine non nulle du polynôme $P(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine du polynôme $P(x)$.

4) En déduire les trois racines du polynôme $P(x)$.

60 Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que :

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

61 Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$.

1) Effectuer la division de $P(x)$ par $(x-2)$.

2) Montrer que : $P(x) - 2(2-x) = (x-2)^3$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|P(x) - 2(2-x)| \leq 8 \times 10^{-3}$$

4) En déduire une valeur approchée de $P(1{,}845)$ à 8×10^{-3} près.

62 On considère le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$.

1) Vérifier que (-1) est une racine du polynôme $P(x)$.

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

3) Calculer $P(1+\sqrt{2})$ et $Q(1+\sqrt{2})$

4) Déterminer le nombre réel b tel que :

$$Q(x) = (x-1-\sqrt{2})(x+b)$$

5) Montrer que, pour tout nombre réel x de $]2; 1+\sqrt{2}[$ on a : $-4 < P(x) < 0$.

63 Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)$ et par $(x-2)$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.

En déduire le signe de $P(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x\sqrt{x} - 6x + 11\sqrt{x} \leq 6$$

3) a, b et c sont des nombres réels tels que :

$a + b + c = 6$ et $ab + bc + ca = -11$ et $abc = -6$

a) Montrer que $P(a) = 0$.

b) Déterminer a, b et c.

64 n est nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On consière le polynôme : $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = x(x+1)(2x+1)Q(x)$$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

65 Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$.

1) Déterminer les nombres réels a, b, c et d sachant que :

$$\begin{cases} P(x+1) - P(x) = x^2 \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

2) En déduire la valeur de la somme :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2$$

66 a, b et c sont des nombres réels deux à deux distincts.

On considère le polynôme :

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

1) Calculer P(a), P(b) et P(c).

2) En déduire que, pour tout réel x, on a : $P(x) = 1$.

67 $P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \ldots - 12x^2 + 12x + 1$

Calculer P(11) et P(13).

68 Soit n un nombre entier naturel non nul.

On considère le polynôme :

$$P(x) = (x-2)^{3n} + (x-1)^{2n} - 1$$

1) Montrer l'existence d'un polynôme Q(x) tel que :

$P(x) = (x-2)Q(x)$ et déterminer le degré de Q(x).

2) Calculer P(1) en fonction de n.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le polynôme P(x) est divisible par $(x-1)$.

3) On suppose que $n = 1$.

Montrer que $P(x) = (x-2)((x-a)^2 + b))$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

4) Montrer que pour tout x de $]2 ; +\infty[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(x) > 0$.

69 On considère le polynôme :

$$P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$$

où n est un nombre entier naturel non nul.

1) Montrer que : $P(-1) = 0$.

2) Montrer qu'il existe un polynôme Q(x) tel que :

$$P(x) = (x-1)^2 (x+1) Q(x)$$

et déterminer le degré du polynôme Q(x).

70 Soit $P(x) = ax^5 + bx^4 + 1$.

Montrer qu'il existe deux valeurs numériques de a et b telles que $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$ où Q(x) est un polynôme que l'on déterminera.

71 Soit P(x) un polynôme de degré 3 et admettant trois racines non nulles et distinctes α, β et γ : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

72 Soit P(x) est un polynôme de degré 4 tel que :

$$P(4) = 0 \text{ et } P(1) = P(2) = P(3) = 6$$

et on considère le polynôme $f(x) = P(x) - 6$.

1) Calculer f(1) et f(4).

2) Déterminer trois racines évidentes du polynôme f(x) et en déduire l'existence d'un polynôme g(x) tel que :

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)g(x)$$

Quel est le degré de g(x).

Calculer g(4).

3) En déduire que g(x) s'écrit sous la forme :

$$g(x) = ax - (1 + 4a)$$

où a est un nombre réel non nul.

4) Déterminer tous les polynômes P(x) de degré 4 tels que :

$$P(4) = 0 \text{ et } P(1) = P(2) = P(3) = 6$$

73 On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 20x^2 + 4$.

1) Vérifier que : $P(x) = (x^2 - 2)^2 - 16x^2$.

2) Factoriser P(x) en produit de deux polynôme du second degré.

3) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 5$.

Montrer que $n^4 - 20n^2 + 4$ n'est pas premier.

74 1) Soient α, β et γ trois nombres réels donnés.

Montrer qu'il existe un polynôme P(x) du second degré tel que :

$$\begin{cases} P(1) = \alpha \\ P(2) = \beta \\ P(3) = \gamma \end{cases}$$

2) Déterminer P(x) dans chacun des deux cas suivants :

a) $\alpha = \beta = \gamma = 2500$; b) $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $\gamma = 9$

75 Soient α, β et γ des nombres réels donnés. On pose :

$$A(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} ; C(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$B(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} ; D(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$P(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x) + \delta D(x)$$

Montrer que P(x) est l'unique polynôme qui vérifie :

$$P(1) = \alpha ; P(2) = \beta ; P(3) = \gamma ; P(4) = \delta$$

Scanné avec CamScanner

4 EXERCICES ET PROBLÈMES

76 Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_0 ; a_1 ; … ; a_n sont des nombres entiers relatifs et $a_0 \neq 0$.

On suppose qu'un nombre entier naturel α est racine du polynôme $P(x)$

Montrer qu'il exite un entier relatif β tel que $a_0 = \alpha\beta$

77 1) Vérifier que : $4(a^2 - a - 1) = (2a - 1)^2 - 5$.

2) On considère les deux polynômes :

$P(x) = x^4 - x + a$ et $Q(x) = x^2 - ax + 1$

a) On pose : $R(x) = (a^3 - 2a - 1)\,x + (-a^2 + a + 1)$.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q'(x)$ tel que :

$$P(x) = Q(x)\,Q'(x) + R(x)$$

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles :

$$P(x) = Q(x)\,Q'(x)$$

Problèmes

78 1) On considère le polynôme :

$$F(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$$

a) Montrer que pour tout nombre réel non nul x, on a :

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}F(x)$$

b) En déduire que si a est une racine de $F(x)$, alors $\frac{1}{a}$ est aussi une racine de $F(x)$.

2) On dit qu'un polynôme $P(x)$ "est symétrique de degré n" si son degré est n et si $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x)$ pour tout x non nul.

Le polynôme $G(x) = 2(1 + x^4) - (1 + x)^4$ est-il un polynôme symétrique ?

3) Soit le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Est-ce que 0 est une racine de $P(x)$?

b) Vérifier que $P(x)$ est un polynôme symétrique de degré 4.

c) Pour tout nombre réel non nul x, on pose $t = x + \frac{1}{x}$

Calculer t^2 en fonction de x.

En remarquant que :

$$P(x) = x^2\left(x^2 - x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

exprimer $x^2 - x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ en fonction de t.

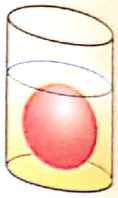
Montrer alors que pour tout nombre réel non nul x, on a :

$P(x) = 0$ signifie que $\left(t = x + \frac{1}{x}\right.$ et $\left.Q(t) = 0\right)$

où $Q(t)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

• Déterminer les racines du polynôme $P(x)$.

79 Sur la figure ci-contre, on dispose d'un cylindre de base circulaire de rayon 20 cm et de hauteur h.



A l'intérieur de ce cylindre, il y a une boule de rayon 14 cm couverte d'eau (de telle sorte que l'eau arrive à ras de la boule).

On remplace cette boule par une autre boule de rayon x cm telle que $0 \leq x \leq 20$.

1) Soit $V(x)$ le volume d'eau dans le cylindre qui peut couvrir la boule de rayon x.

Calculer $V(x)$ en fonction de x.

2) a) Montrer qu'il existe un polynôme $W(x)$ que l'on déterminera tel que :

$$V(x) - V(14) = (x - 14)W(x)$$

b) En déduire le signe de $V(x) - V(14)$ selon les valeurs de x.

c) Quel est le volume d'eau nécessaire pour couvrir la boule ?

Polynômes et calcul de sommes usuelles

80 1) Déterminer un polynôme P(x) du second degré tel que :

$$P(x + 1) - P(x) = x$$

En déduire la valeur de la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ où n est un entier naturel non nul.

2) Déterminer un polynôme $Q(x)$ de degré 3 tel que :

$$Q(x + 1) - Q(x) = x^2$$

En déduire la valeur de la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

3) Déterminer un polynôme $R(x)$ de degré 4 tel que :

$$R(x + 1) - R(x) = x^3$$

En déduire la valeur de la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

4) Déterminer un polynôme $F(x)$ de degré 4 tel que :

$$F(x + 1) - F(x) = x(x + 1)(x + 2)$$

En déduire la valeur de somme :

$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2)$.

Scanné avec CamScanner

Equations et inéquations du premier degré - Systèmes

Activités préparatoires 86
Définitions et règles 89
Points essentiels 97
Exercices résolus 99
Exercices et problèmes 101

5

Capacités attendues

* Résolutions d'équations et d'inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.
* Résolution de systèmes du premier degré à deux inconnues en utilisant les différentes méthodes (combinaison linéaire ; substitution ; déterminant).
* Mathématisation de situations comportant des grandeurs variables en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes.
* Représentation graphique des solutions d'inéquations ou de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues et utilisation du graphique pour régionner le plan et pour la résolution de problèmes simples sur la programmation linéaire.

Contenu

- Activités préparatoires
  - Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue
  - Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue
  - Inéquation et géométrie
  - Signe du binôme $ax + b$
  - Equations du premier degré à deux inconnues
  - Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
  - Inéquations du premier degré à deux inconnues - programmation linéaire
- Définitions et règles
  - Equation du premier degré à une inconnue
  - Inéquation du premier degré à une inconnue
  - Signe du binôme $ax + b$
  - Equation du premier degré à deux inconnues
  - Système de deux équations du premier degré
  - Signe de $ax + by + c$ - Régionnement du plan
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

5 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

A Résoudre les équations suivantes :

1) $2x-1=2(x-0,5)+3\left(x-\frac{2}{3}\right)$;

2) $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{2}=4-\frac{5x}{12}$

3) $|x-1|=5$;

4) $\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x-\frac{3}{7}\right)+\left(\sqrt{3}-2x\right)\left(x+\frac{18}{5}\right)=0$

5) $\sqrt{x^2+7}=4$;

6) $\frac{2x-7}{4-x}=\frac{3}{5}$

B 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x+3|=7$;

b) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}$

c) $|3x-4|=2x+5$;

d) $|x+6|+|x-10|=16$

2) Discuter, selon les valeurs du nombre réel m, les solutions de l'équation : $m^2x + 5 = 25x + m$.

ACTIVITE 2 Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue

A Résoudre les inéquations et les systèmes suivants :

1) $-2x+1 \geq x-3$;

2) $\sqrt{2}\,x-\frac{3}{4}<\frac{2x-3}{3}+4\left(x-\sqrt{2}\right)$

3) $\begin{cases} 2x-3 \leq 1-3x \\ 5x+3 > x+9 \end{cases}$;

4) $|x-2| \leqslant \frac{1}{2}$

5) $|2x-1|>3$;

6) $\sqrt{x+5}>3$

B Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs solutions :

a) $x^2-4 \geqslant (2x+3)(x-2)$;

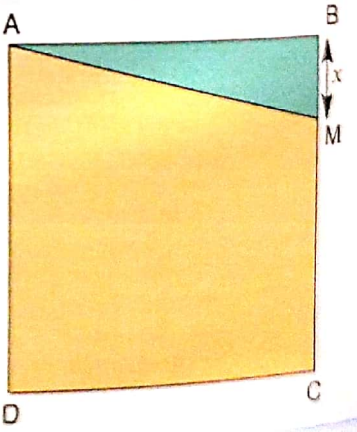
b) $\frac{1}{x-1} \leqslant \frac{2}{x}$

c) $|x-4| \leqslant \frac{1}{2}$;

d) $|x+6|+|x-10|>16$

ACTIVITE 3 Inéquation et géométrie

A L'unité de mesure des longueurs est le cm.
Soit ABCD un carré de côté de longueur 4cm.
Soit M un point du côté [BC] tel que BM = x.



1) Vérifier que l'aire A_1 du triangle ABM est égal à $2x$.
2) Vérifier que l'aire A_2 du trapèze AMCD est égal à $16 - 2x$.
3) Déterminer la position du point M sur [BC] dans chacun des deux cas suivants :

a) $A_1 = A_2$;

b) $A_1 = \frac{1}{3}A_2$

4) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $A_1 < \frac{1}{2}A_2$

Scanné avec CamScanner

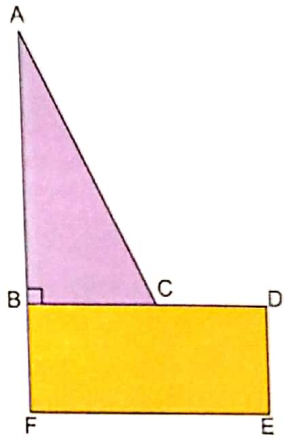
5 ACTIVITES PREPARATOIRES

B On considère la figure ci-contre où :

ABC est un triangle rectangle en B et BDEF est un rectangle.

On pose : AB = 6 , BF = 2 , CD = 1 et BC = x

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du triangle ABC est plus petite (strictement) que l'aire du rectangle BDEF.



ACTIVITE 4 Signe du binôme $ax + b$

Soient a et b deux nombres réels et $a \neq 0$.

1) Vérifier que $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$

2) Résoudre chacune des deux inéquations : (1) $x + \frac{b}{a} > 0$; (2) $x + \frac{b}{a} < 0$

3) Déterminer le signe du binôme $x + \frac{b}{a}$ et en déduire le signe de $ax + b$.

4) Etudier les signes des deux binômes $2x - 3$ et $4 - x$.

En déduire les solutions de l'inéquation $(2x - 3)(4 - x) \leq 0$.

5) Résoudre les deux inéquations : (1) $(2x + 5)(x - 4) \geq 0$; (2) $4x^2 - 9 < 0$

ACTIVITE 5 Equations du premier degré à deux inconnues

Soient x et y deux nombres réels qui vérifient l'égalité (E) : $2x - y = 7$

Cette égalité est appelée **équation du premier degré à deux inconnues** x et y.

Le couple $(x ; y)$ est appelé solution de l'équation (E).

1) a) Montrer que le couple (2 ; –3) est une solution de l'équation (E).

b) Le couple (3 ; 1) est-il solution de l'équation (E) ?

c) Si le couple $(x ; y)$ est une solution de l'équation (E) et y = 1, déterminer x.

2) Soit $(x ; y)$ une solution de l'équation (E).

a) On pose $x = \alpha$; montrer que $y = 2\alpha - 7$.

Le couple $(\alpha ; 2\alpha - 7)$ est-il solution de l'équation (E) pour tout nombre réel α ?

b) On pose $y = \beta$; montrer que $x=\frac{\beta+7}{2}$

Le couple $\left(\frac{\beta+7}{2} ; \beta\right)$ est-il solution de l'équation (E) pour tout nombre réel β ?

c) En déduire les solutions de l'équation (E).

3) Résoudre l'équation $4x - 5y + 3 = 0$.

L'ensemble des couples (x ; y) qui vérifient l'équation :

(E) $2x - y = 7$

est appelé ensemble des solutions de l'équation (E) et est noté souvent par la lettre S.

Scanné avec CamScanner

5 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 6 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

A 1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 5y = 17 \\ 3x + 2y = 25 \end{cases}$



2) Une femme a acheté deux bouquets de fleurs :

- Le premier bouquet contient une rose et cinq fleurs d'iris au prix de 17 dirhams.
- Le deuxième bouquet contient trois roses et deux fleurs d'iris au prix de 25 dirhams.

Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une fleur d'iris ?

B Une personne a déposé une partie de son capital dans une banque A au taux de 10 %, et a déposé la deuxième partie de ce capital dans une banque B au taux de 9 %. Après une année, elle obtient des intérêts dont le montant est de 2000 dirhams. En revanche, si cette personne dépose la première partie dans la banque B et la deuxième partie dans la banque A, elle obtiendra 2750 dirhams d'intérêts.

Quel est le capital dont dispose cette personne ?

ACTIVITE 7 Inéquations du premier degré à deux inconnues - Programmation linéaire

A Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère la droite (Δ) d'équation : $x - 2y + 3 = 0$

1) Construire la droite (Δ) les points A(1 ; 1) ; B(0 ; 2) ; C(–2 ; 1) ; D(1 ; –1).

2) Parmi les points O, A, B, C et D, déterminer les points dont le couple de coordonnées $(x ; y)$ vérifie la relation : $x - 2y + 3 > 0$.

B Soit (E) l'ensemble des points M$(x ; y)$ du plan, rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, et qui vérifient :

$$\begin{cases} 6x + 7y \leqslant 84 \\ 2x + 3y \leqslant 24 \\ 4x + 3y \leqslant 36 \\ y \leqslant 6 \\ y \leqslant 7 \end{cases}$$

1) Construire (E).

2) Parmi les points de (E), quels sont ceux pour lesquels $x + y$ est maximal ?

Scanné avec CamScanner

5 DEFINITIONS ET REGLES

1 Equation du premier degré à une inconnue

Définition On appelle équation du premier degré à une inconnue toute équation que l'on peut écrire sous la forme $ax + b = 0$ où x est l'inconnue et a et b sont deux nombres réels donnés.

Exemple et applications

- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x - 3 = 0$

  Soit S l'ensemble des solutions de cette équation et soit x un nombre réel.

  $x \in S$ si et seulement si $2x = 3$ c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$.

  Donc : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

  (1) : $2x - 3 - 3(1 - x) = 9x - 7$; (2) : $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+5}{3} = 4 - \frac{x}{6}$

Propriété On considère dans IR l'équation : (E) : $ax + b = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation.

- Si $a \neq 0$, alors $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $S = IR$

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'équation (1) : $(2x - 3)\left(\frac{3}{2}x + 5\right) = 0$

  Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

  On a : $x \in S_1$ si et seulement si $(2x - 3 = 0$ ou $\frac{3}{2}x + 5 = 0)$

  c'est-à-dire $\left(x = \frac{3}{2}\right.$ ou $\left.x = \frac{-5}{\frac{3}{2}}\right)$ ou encore $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{-5}{\frac{3}{2}} = -\frac{10}{3}$.

  Donc $S_1 = \left\{-\frac{10}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

- Résolvons dans IR l'équation (2) : $\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{3-4x}{6}$

  Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (2).

  $x \in S_2$ si et seulement si : $\frac{2(x-1)}{6} - \frac{3(2x+1)}{6} = \frac{3-4x}{6}$

  c'est à dire
  $$2(x - 1) - 3(2x + 1) = 3 - 4x$$
  $$2x - 2 - 6x - 3 = 3 - 4x$$
  $$-4x + 4x = 3 + 5$$
  $$0x = 8$$ ce qui est impossible.

  Donc $S_2 = \varnothing$

Rappel

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue dans IR, on utilise les développements, les simplifications, les factorisations et les deux règles suivantes :

- a = b si et seulement si :

  a + c = b + c.

- Si c ≠ 0, alors :

  a = b si et seulement si :

  ac = bc

Rappel

A × B = 0

si et seulement si :

(A = 0 ou B = 0)

Scanné avec CamScanner

Résolvons dans IR l'équation (3) : $\sqrt{6}+1-x\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (3).

$x \in S_3$ si et seulement si $\sqrt{6}+1-x\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}x+\sqrt{6}$

c'est-à-dire $x\sqrt{3}-x\sqrt{3}=1+\sqrt{6}-\sqrt{6}-1$

ou encore $0 \times x = 0$

Puisque cette dernière égalité est vérifiée par tout x de IR, alors S_3 = IR

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $(3x-4)(5x+1)-2(3x-4)(1-x)=0$.

b) $\frac{4x-1}{3}-\frac{3x-1}{2}=1-\frac{x}{6}$

c) $(x-1)-2\left(3x-\sqrt{5}\right) = 2\left(\sqrt{2}-x\right)-1-3x$

2 Inéquation du premier degré à une inconnue

Définition On appelle inéquation du premier degré à une inconnue dans IR toute inéquation que l'on peut écrire sous l'une des formes suivantes : $ax + b \geq 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b < 0$,

où x est l'inconnue et a et b son deux nombres réels donnés.

La résolution d'une inéquation, du premier degré à une inconnue dans IR, revient à déterminer les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles cette inéquation (en tant qu'inégalité) est réalisée ; ces valeurs sont appelées **solutions** de l'inéquation. L'ensemble de ces valeurs est appelé **ensemble des solutions** de l'inéquation et se note généralement S.

Exemple et applications

Résolvons dans IR l'inéquation $2x - 3 \geq 0$.

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Soit x un nombre réel.

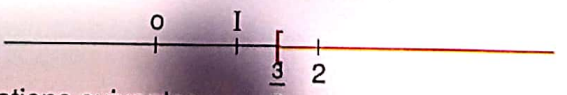
$x \in S$ si et seulement si $2x - 3 + 3 \geq 3$

$x \in S$ si et seulement si $2x \geq 3$

$x \in S$ si et seulement si $\left(\frac{1}{2}\right)(2x) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)(3)$

c'est-à-dire si $x \geqslant \frac{3}{2}$

Donc $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Cet ensemble de solutions est représenté sur un axe :



Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

(1) $2(x-1)-(3x-5) \leq 6x+7+4(x-3)$

(2) $\frac{3x}{4}-\frac{2x-1}{3} > \frac{5x-2}{12}-1$

Remarque

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue dans IR, on utilise les développements, les simplifications, les factorisations et les règles suivantes :

- a ≤ b si et seulement si : a + c ≤ b + c
- Si c > 0, alors : a ≤ b si et seulement si ac ≤ bc.
- Si c < 0, alors : a ≤ b si et seulement si ac ≥ bc.

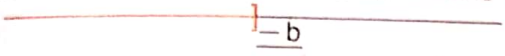
Scanné avec CamScanner

Propriétés On considère dans IR l'inéquation : $ax + b \leq 0$.

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

- Si $a > 0$, alors $x \leq -\frac{b}{a}$; donc $S = \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right]$.

On représente l'ensemble des solutions sur un axe comme suit :



- Si $a < 0$, alors $x \geq -\frac{b}{a}$; donc $S = \left[-\frac{b}{a} ; +\infty\right[$.

On représente l'ensemble des solutions sur un axe comme suit :



- Si $a = 0$ et $b > 0$, alors $S = \varnothing$
- Si $a = 0$ et $b \leq 0$; alors $S = IR$.

Exemples et applications

Résolvons dans IR l'inéquation (1) : $-2x + 1 < x - 3$.

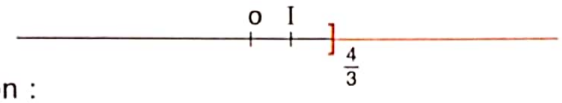
Soit S_1 l'ensemble des solutions de cette inéquation.

$x \in S_1$ si et seulement si $-2x - x < -3 - 1$

$x \in S_1$ si et seulement si $-3x < -4$

$x \in S_1$ si et seulement si $x > \frac{4}{3}$

Donc : $S_1 = \left]\frac{4}{3} ; +\infty\right[$. On représente S_1 sur un axe :



Résolvons dans IR l'inéquation :

(2) $5(3x - 1) - (5x - 4) \leq -4x + 10 - 7(-2x + 3)$

Soit S_2 l'ensemble du solutions de cette inéquation.

$x \in S_2$ si et seulement si $10x - 1 \leq 10x - 11$

$x \in S_2$ si et seulement si $-1 \leq -11$ et ceci est impossible.

Donc : $S_2 = \varnothing$

Résoudre dans IR les deux inéquations suivantes :

a) $\frac{2x-1}{4} + 8 < \frac{3-x}{5}$

b) $\frac{x+7}{10} - \frac{x-5}{5} \geq \frac{1-x}{10}$



Louis Lagrange
(1736-1813)
Mathématicien, mécanicien (s'est intéressé à la mécanique céleste et à la mécanique des fluides). Il a publié en 1771 l'une de ses principales publications sur la résolution algébrique.

3 Signe du binôme ax + b

Propriété On considère le binôme $ax + b$ où $a \neq 0$

- Si $x \geq -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et a ont le même signe.
- Si $x \leq -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et $-a$ ont le même signe.

Scanné avec CamScanner

Tableau de signe du binôme $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

Exemples et applications

- Signe de chacun des deux binômes $2x + 5$ et $-3x + 7$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x + 5$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$-3x + 7$	$+$	0	$-$

- Résolvons dans IR l'inéquation $(2x - 3)(-5x + 3) \leq 0$.

On pose $P(x) = (2x - 3)(-5x + 3)$

Après avoir étudié le signe de chaque facteur de $P(x)$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$-5x + 3$	$+$	0	$-$	$-$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0 $-$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est :

$$S = \left]-\infty ; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$$

- Résoudre dans IR les deux inéquations :

a) $4x^2 - 25 \geq 0$

b) $(4x - 5)(2x + 7)(1 - x)^2 < 0$

Rappel

- Le produit de deux nombres réels de même signe, est un nombre réel positif.
- Le produit de deux nombres réels de signes contraires, est un nombre réel négatif.

4 Equation du premier degré à deux inconnues

Définition On appelle équation du premier degré à deux inconnues toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$ où x et y sont les deux inconnues, et où a, b et c sont des nombres réels donnés.

Remarque :

La détermination de l'ensemble des couples $(x ; y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ exprime la résolution dans IR^2 de l'équation : $ax + by + c = 0$.

IR^2 est noté parfois IR × IR.

IR^2 est l'ensemble des couples de réels

Scanné avec CamScanner

5 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples et applications

On considère dans IR^2 l'équation (1) : $2x - y = 3$.
Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

- On a : $2 \times 1 - (-1) = 3$; donc $(1 ; -1) \in S_1$.
- On a : $2 \times \left(\frac{1}{2}\right) - (-2) = 3$; donc $\left(\frac{1}{2} ; -2\right) \in S_1$
- On a : $2 \times 3 - 1 = 5$; donc $2 \times 1 - 1 \neq 3$; d'où $(3 ; 1) \notin S_1$.

Résolvons dans IR^2 l'équation (2) : $2x - 5 = 0$.
Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (2).

$(x ; y) \in S_2$ si et seulement si $x = \frac{5}{2}$.

Donc S_2 est l'ensemble des couples $\left(\frac{5}{2} ; y\right)$ où y est un élément de IR.

On peut aussi écrire S_2 comme suit :

$$S_2 = \left\{\left(\frac{5}{2} ; y\right) / \, y \in IR\right\} \quad \text{ou} \quad S_2 = \left\{(x ; y) \in IR^2 / \, x = \frac{5}{2}\right\}$$

Résolvons dans IR^2 l'équation (3) : $4x - 5y + 6 = 0$.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (3).

$(x ; y) \in S_3$ si et seulement si $x = \frac{5y - 6}{4}$

Donc : $S_3 = \left\{(x ; y) \in IR^2 / \, x = \frac{5y - 6}{4}\right\}$ ou $S_3 = \left\{\left(\frac{5y - 6}{4} ; y\right) / \, y \in IR\right\}$

Résoudre dans IR^2 les équations suivantes :

a) $5y - 3 = 0$

b) $\sqrt{2}x - 2y + 5\sqrt{6} = 0$

Méthode

- On peut déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ en utilisant l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :
  Méthode 1 : Calcul de x en fonction de y.
  Méthode 2 : Calcul de y en fonction de x.
- L'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$, où $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, est un ensemble infini.
- La droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est la représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ ((D) étant tracée dans le plan muni d'un repère).

5 Système de deux équations du premier degré

Définition

Le système $(s) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

est appelé système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Le nombre $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$ est appelé déterminant du système (s).

Explication

Résoudre le système (s) c'est déterminer tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations :
$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$

Exemples

Méthode de substitution

Résolvons dans IR^2 le système $(s_1) : \begin{cases} 2x - y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 12 & (2) \end{cases}$

- On détermine l'une des inconnues en fonction de l'autre.
  A partir de l'équation (1), on trouve : $y = 2x - 7$ (3)

Scanné avec CamScanner

- Dans l'équation (2), on remplace y par l'expression $2x - 7$, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue :

$3x + 4(2x - 7) = 12$ qui signifie que $x = \frac{40}{11}$

- Dans l'équation (3), on remplace x par la valeur $\frac{40}{11}$, on obtient :

$y = 2 \times \frac{40}{11} - 7$ c'est-à-dire $y = \frac{3}{11}$

- Le couple $\left(\frac{40}{11}; \frac{3}{11}\right)$ vérifie le système (s_1).

- Donc l'ensemble des solutions du système (s_1) est $S_1 = \left\{\left(\frac{40}{11}; \frac{3}{11}\right)\right\}$

Méthode de résolution par combinaison linéaire

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $(s_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

- En multipliant les deux membres de la première équation par 3 et les deux membres de la deuxième équation par –2, on obtient :

$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ -6x + 8y = -14 \end{cases}$$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on trouve $11y = -5$ c'est-à-dire $y = -\frac{5}{11}$

- Pour obtenir, la valeur de x, on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par 4 (et les deux membres de la deuxième équation par 1 ; ce qui revient à laisser cette équation intacte). On a ainsi :

$$\begin{cases} 8x + 4y = 12 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

- En additionnant les deux équations obtenues membre à membre, on trouve :

$11x = 19$ c'est-à-dire $x = \frac{19}{11}$

- Le couple $\left(\frac{19}{11}; -\frac{5}{11}\right)$ vérifie bien le système (s_2).

- Donc l'ensemble des solutions du système (s_2) est $S_2 = \left\{\left(\frac{19}{11}; -\frac{5}{11}\right)\right\}$

Méthode du déterminant

Propriété On considère le système $(s) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1) Le système (s) admet une solution et une seule si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$;

dans ce cas la solution est le couple $(x ; y)$ défini par $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$

2) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, alors :

- ou bien le système (s) n'admet pas de solution.
- ou bien le système (s) admet une infinité de solutions

Explication

Le couple $\left(\frac{40}{11}; \frac{3}{11}\right)$ est le couple de coordonnées du point d'intersections des deux droites d'équations : $2x - y - 7 = 0$ et $3x + 4y - 12 = 0$

Note

On peut remplacer la valeur de y dans l'une ou l'autre des deux équations (du système) pour obtenir la valeur de x.

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Scanné avec CamScanner

5 DEFINITIONS ET REGLES

Exemples

- Résolvons le système suivant (s_3): $\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18+20=38$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (s_3) admet une solution et une seule $(x\,;\,y)$ telle que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{38} = \dfrac{-66+28}{38} = \dfrac{-38}{38} = -1 \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{38} = \dfrac{21+55}{38} = \dfrac{76}{38} = 2 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solution du système (s_3) est $S_3 = \{(-1\,;\,2)\}$

- Résolvons le système suivant (s_4): $\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=1 \\ x-6y=2 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -3+3=0$

Donc le système (s_4) est ou bien sans solution, ou bien admet une infinité de solutions.

On a : $\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=1 \\ x-6y=2 \end{cases}$. En multipliant la 1ère équation par 2, on obtient : $\begin{cases} x-6y=2 \\ x-6y=2 \end{cases}$

Donc le système (s_4) équivaut à l'équation : $x - 6y = 2$ c'est-à-dire aussi à : $x = 2 + 6y$.

Ainsi l'ensemble des solutions du système (s_4) est :

$$S_4 = \{(2+6y\,;\,y)/\,y \in \mathbb{R}\}$$

- Résolvons le système suivant (s_5): $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=2\sqrt{2} \\ -2x+\sqrt{2}y=3 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2-2=0$

Donc le système admet une infinité de solutions ou n'admet pas de solution.

On a : $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=2\sqrt{2} \\ -2x+\sqrt{2}y=3 \end{cases}$. En multipliant la 1ère équation par $(-\sqrt{2})$, on obtient :

$\begin{cases} -2x+\sqrt{2}y=-4 \\ -2x+\sqrt{2}y=3 \end{cases}$. Ce qui est impossible. Donc le système (s_5) n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions du système (s_5) est $S_5 = \varnothing$

Appellation

Lorsque le déterminant d'un système, de deux équations du premier degré à deux inconnues, n'est pas nul, on dit que le système est un système de Cramer.

A retenir

- Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet une infinité de solutions si et seulement si les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont deux équations de deux droites confondues.
- Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ n'admet pas de solutions si et seulement si : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont les équations de deux droites strictement parallèles.

Scanné avec CamScanner

6 Signe de ax + by + c - régionnement du plan

Propriété Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

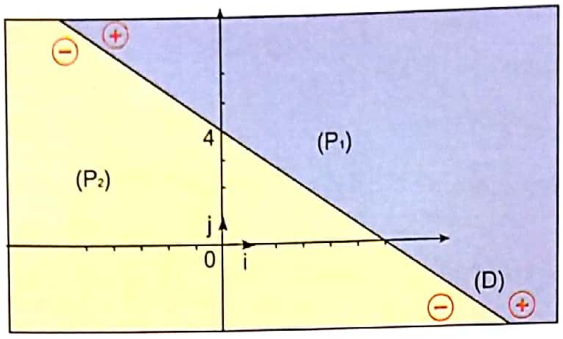
La droite (D) détermine deux demi-plans ouverts :

- Le premier est l'ensemble des points M(x ; y) qui vérifient : $ax + by + c > 0$.
- L'autre est l'ensemble des points M(x ; y) qui vérifient : $ax + by + c < 0$.

Exemples et applications

Déterminons graphiquement l'ensemble (E) des points M(x ; y) du plan qui vérifient la relation $2x + 3y - 12 > 0$.

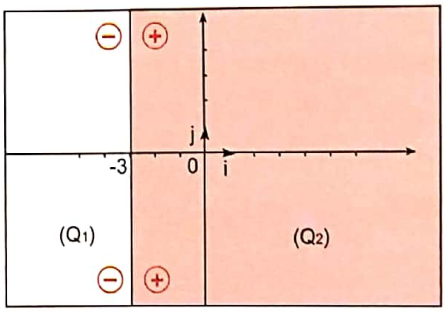
- On construit d'abord la droite (D) d'équation : $2x + 3y - 12 = 0$.
- En second lieu, on étudie le signe de $2x + 3y - 12$ puis on détermine le demi-plan dont les points ont des couples de coordonnées vérifiant l'inéquation $2x + 3y - 12 > 0$.



Le point O(0 ; 0) n'appartient pas à la droite (D). Par ailleurs :
$2 \times 0 + 3 \times 0 - 12 = -12 < 0$
L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points appartenant à (P_1) (voir la figure).
[En d'autres termes (E) est confondue avec (P_1)].

Résolvons graphiquement l'inéquation : $x > -3$.

- On construit la droite (Δ) d'équation $x = -3$.
- On étudie le signe de $x + 3$ puis on détermine le demi-plan dont les points ont des couples de coordonnées vérifiant l'inéquation $x > -3$.



Le point O(0 ; 0) n'appartient pas à (Δ).
Comme $0 + 3 = 3 > 0$, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $x > -3$ est l'ensemble des couples (x ; y) tels que M(x ; y) $\in$ (Q_2).

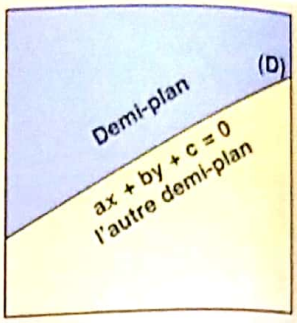
1) Résoudre graphiquement les deux inéquations :

a) $2x - 3y + 5 \geq 0$; b) $y - 1 < 0$

2) Résoudre graphiquement le système :

$$(S): \begin{cases} 2x - 3y + 5 < 0 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$$

Méthode



- Comme $ax + by + c$ garde le même signe pour tous les couples coordonnées des points de chacun des demi-plans ouverts déterminés par la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$, alors pour déterminer le signe de $ax + by + c$ lorsque le couple (x ; y) varie dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de voir ce signe pour un couple de coordonnées d'un point du plan qui n'appartient pas à la droite (D) ; ce point est le plus souvent O(0 ; 0) si ce point n'appartient pas (D).
- Régionner le plan revient à le partager en deux demi-plans et une droite qui les sépare.

Se rappeler

Pour construire une droite, il suffit de choisir deux points distincts de cette droite.

Scanné avec CamScanner

5 POINTS ESSENTIELS

Equations du premier degré à une inconnue

$ax = b$

- $a \neq 0$ → $x = \frac{b}{a}$ → l'ensemble des solutions de l'équation $ax = b$ est $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
- $a = 0$
  - $b = 0$ → L'ensemble des solutions de l'équation $0x = 0$ est $S = IR$
  - $b \neq 0$ → L'ensemble des solutions de l'équation $0x = b$ est $S = \varnothing$

Inéquations du premier degré à une inconnue

$ax \leq b$

- $a < 0$ → $x \geq \frac{b}{a}$ → l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax \leq b$ est $S = \left[\frac{b}{a}; +\infty\right[$
- $a > 0$ → $x \leq \frac{b}{a}$ → l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax \leq b$ est $S = \left]-\infty; \frac{b}{a}\right]$
- $a = 0$
  - $b \geq 0$ → l'ensemble des solutions de l'inéquation $0x \leq b$ est : $S = IR$
  - $b < 0$ → l'ensemble des solutions de l'inéquation $0x \leq b$ est : $S = \varnothing$

Scanné avec CamScanner

5 POINTS ESSENTIELS

Equation du premier degré à deux inconnues

$ax + by + c = 0$

- $a \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est : $S = \left\{\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}; y\right) \setminus y \in IR\right\}$
- $b \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est : $S = \left\{\left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) \setminus x \in IR\right\}$
- $a = 0$ et $b = 0$
  - $c \neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $0x + 0y + c = 0$ est : $S = \varnothing$
  - $c = 0$: l'ensemble des solutions de l'équation $0x + 0y + 0 = 0$ est : $S = IR^2$

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$

- $\Delta \neq 0$: $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$; Le système admet une solution unique qui est le couple $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$
- $\Delta = 0$: Le système admet une infinité de solutions ou n'admet pas de solution

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES RESOLUS

1 Equation se ramenant à une équation du premier degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation :

(1) $\dfrac{13x-5}{2x+1}-\dfrac{13x+5}{2x-1}=\dfrac{-48x+1}{4x^2-1}$

Solution

L'équation (1) est définie si : $\begin{cases}2x+1\neq 0\\2x-1\neq 0\\4x^2-1\neq 0\end{cases}$

c'est-à-dire si $x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq-\dfrac{1}{2}$

c'est-à-dire si $x\in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{13x-5}{2x+1}-\dfrac{13x+5}{2x-1}=\dfrac{-48x+1}{4x^2-1}$ équivaut successivement à :

$$\frac{(13x-5)(2x-1)-(2x+1)(13x+5)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{-48x+1}{4x^2-1}$$

$$(13x-5)(2x-1)-(2x+1)(13x+5)=-48x+1$$

$$26x^2-13x-10x+5-(26x^2+10x+13x+5)=-48x+1$$

$$-46x=-48x+1$$

$$2x=1 \quad ; \quad x=\frac{1}{2}$$

Or l'équation n'est pas définie pour cette valeur de x ; par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1=\varnothing$.

2 Equations et valeur absolue

Résoudre dans IR l'équation : (2) $|3-2x|+|x-4|=2x+1$

Solution

Etudions d'abord le signe de chacun des binômes :

$3-2x$ et $x-4$

x	$-\infty$		$3/2$		4	$+\infty$
$3-2x$	$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert 3-2x\rvert$	$3-2x$	0	$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert x-4\rvert$	$-x+4$		$-x+4$	0	$x-4$	
$\lvert 3-2x\rvert+\lvert x-4\rvert$	$-3x+7$		$x+1$		$3x-7$	

• **1er cas :**

Si $x\in\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$, l'équation (2) devient :

$-3x+7=2x+1$ c'est-à-dire $-5x=-6$

c'est-à-dire $x=\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{6}{5}\in\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

(car $\dfrac{6}{5}<\dfrac{3}{2}$). Donc $\dfrac{6}{5}$ est **une** solution de (2).

• **2ème cas :**

Si $x\in\left[\dfrac{3}{2},4\right]$, l'équation (2) devient $x+1=2x+1$

c'est-à-dire $x=0$; mais $0\notin\left[\dfrac{3}{2},4\right]$

• **3ème cas :**

Si $x\in[4;+\infty[$, l'équation (2) devient $3x-7=2x+1$

c'est-à-dire $x=8$ et $8\in[4;+\infty[$.

Donc 8 est **une** solution de (2).

• Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (2) est :

$$S_2=\left\{\frac{6}{5},8\right\}$$

3 Inéquation paramétrique du premier degré à une inconnue

Résoudre et discuter dans IR l'inéquation suivante :

(3) $(3-m)x-m^2+2m\geq 0$

où m est un paramètre réel.

Solution

L'inéquation $(3-m)x-m^2+2m\geq 0$ équivaut à $(3-m)x\geq m^2-2m$

• **1er cas :**

Si $3-m=0$ c'est-à-dire $m=3$, alors l'inéquation devient : $0x\geq 9-6$ c'est-à-dire $0\geq 3$; ce qui est impossible.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3) (dans le cas où $m=3$) est $S_3=\varnothing$.

• **2ème cas :**

Si $3-m>0$ c'est-à-dire si $m<3$, l'inéquation (3) devient : $x\geqslant\dfrac{m^2-2m}{3-m}$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3), dans le cas où $m<3$, est $S_3=\left[\dfrac{m^2-2m}{3-m};+\infty\right[$

• **3ème cas :**

Si $3-m<0$ c'est-à-dire si $m>3$, l'inéquation (3) devient : $x\leqslant\dfrac{m^2-2m}{3-m}$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (3), dans le cas où $m>3$, est $S_3=\left]-\infty;\dfrac{m^2-2m}{3-m}\right]$

4 Inéquation rationnelle

Résoudre dans IR l'inéquation (4) : $\dfrac{x^2-1}{x-2}<x+1$

Solution

L'inéquation (4) est définie si $x-2\neq 0$ c'est-à-dire si $x\neq 2$ ou encore si $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\dfrac{x^2-1}{x-2}<x+1$ équivaut successivement à : $\dfrac{x^2-1}{x-2}-(x+1)<0$

$$\frac{x^2-1-(x+1)(x-2)}{x-2}<0$$

$$\frac{x+1}{x-2}<0$$

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES RESOLUS

Etudions le signe de $\frac{x+1}{x-2}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x-2$	$-$	$\|$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-2}$	$+$	$\|$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (4) est $S_4 =]-1 ; 2[$

5 Système de trois équations du premier degré à deux inconnues

Résoudre dans IR^2 le système suivant (s) : $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ x+2y=-5 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

Solution

(s) $\begin{cases} 5x-3y=1 & (1) \\ x+2y=-5 & (2) \\ 2x+y=-4 & (3) \end{cases}$

On résout d'abord le système : (s′) $\begin{cases} 5x-3y=1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est : $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10+3 = 13$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (s′) admet une solution unique $(x ; y)$ où $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_x}{\Delta}$

On a : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2-15 = -13$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -25-1 = -26$

Donc $\frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1$ et $\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{13} = -2$

Il est aisé de vérifier que $x = -1$ et $y = -2$ vérifient l'équation : (3) : $2x + y = -4$

Donc l'ensemble des solutions du système (s) est : $S = \{(-1 ; 2)\}$

6 Programmation linéaire

Une usine fabrique deux types de chemises à l'aide de deux machines. La première machine fonctionne 250 heures par mois ; la deuxième machine fonctionne 160 heures par mois.

On suppose que la fabrication d'une chemise du premier type nécessite une heure et demi de travail de la première machine, et deux heures de travail de la deuxième machine.

On suppose aussi que la fabrication d'une chemise du deuxième type nécessite deux heures de travail de la première machine, et une demi-heure de travail de la deuxième machine.

Si chaque chemise du premier type est vendue avec un bénéfice de 12 dirhams, et chaque chemise du deuxième type est vendue avec un bénéfice de 6 dirhams, déterminer le nombre de chemises de chaque type que l'usine doit produire par mois pour réaliser un profit maximum.

Solution

Soient x le nombre de chemises du premier type et y le nombre de chemises du deuxième type que l'usine peut produire par mois ($x \in IN$ et $y \in IN$).

On peut traduire les données du problème en question par le système suivant :

(S) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 1,5x+2y \leqslant 250 \\ 2x+0,5y \leqslant 160 \end{cases}$

Résolvons graphiquement le système (s).

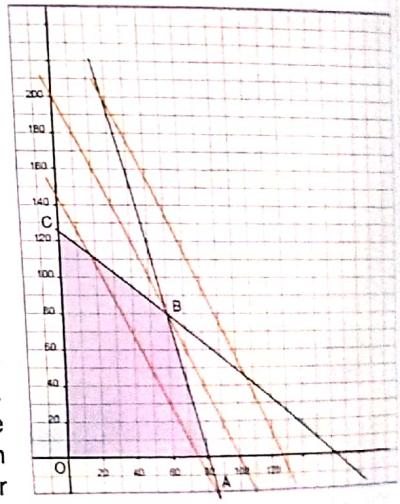
On considère les droites suivantes :

$(D_1) : x = 0$;

$(D_2) : y = 0$;

$(D_3) : 1,5x + 2y = 250$;

$(D_4) : 2x + 0,5y = 160$



L'ensemble des solutions du système (s) est l'ensemble des couples $(x ; y)$ des points $M(x ; y)$ qui appartiennent à la partie colorée délimitée par le quadrilatère OABC.

Si b est le bénéfice réalisé par la production de x chemises du premier type et y chemises du deuxième type, par mois, alors $12x + 6y = b$.

Ce bénéfice atteint sa valeur maximale lorsque $12x + 6y$ prend sa valeur maximale.

On considère les droites (Δ_b) d'équations : $12x + 6y - b = 0$ c'est-à-dire $y = -2x + \frac{b}{6}$. Ces droites sont parallèles et coupent l'axe des ordonnées au point dont le couple de coordonnées est $\left(0, \frac{b}{6}\right)$

La production de l'usine ne peut réaliser un bénéfice que pour les droites (Δ_b) qui ont au moins un point d'intersection avec le quadrilatère OABC dont les coordonnées sont deux nombres entiers naturels ; par ailleurs le bénéfice sera maximal au point B intersection des droites (D_3) et (D_4). Le couple $(x ; y)$ de coordonnées de B est solution du système :

$\begin{cases} 1,5x+2y=250 \\ 2x+0,5y=160 \end{cases}$

On trouve $x = 60$ et $y = 80$

Donc l'usine réalise son profit maximum lorsqu'elle produit 60 chemises du premier type et 80 chemises du deuxième type. Le bénéfice maximum est $60 \times 12 + 80 \times 6 = 1200$ dirhams.

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

1 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $5x = 0$; 2) $-\frac{3}{7}x = 0$

3) $3x - 7 = 0$; 4) $\frac{2}{3}x = \sqrt{5}$

5) $3\sqrt{3}x + 2 = x + \sqrt{3}$; 6) $1 + 2x = \sqrt{2}(3 - x)$

2 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\frac{3x-2}{3} - \frac{x-1}{4} = x - 7$; 2) $\frac{6x+1}{3} - x = \frac{2x-1}{2}$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{49}{20}$; 4) $2x - 1 = \frac{10x-1}{5} = -\frac{4}{5}$

5) $\left(1 - \sqrt{2}\right)x = 10\sqrt{2} - x\sqrt{2}$; 6) $(2x-1)^2 = (x-2)(4x+3)$

7) $0{,}7x - 1{,}4 = 2{,}1x + 5{,}6$

Equations et factorisation

3 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $(x + 1)(2x - 3) = 0$; 2) $x^2 - 2x = 0$

3) $(2x - 3)(5x + 1) - 3x(2x - 3) = 0$; 4) $(4x - 3)(x + 7) - 16x^2 + 9 = 0$

5) $(4x - 5)(1 - 2x) - (4x - 5)^2 = 0$; 6) $x^3 - 1 + 3(x^2 - 1) = 0$

Equations et valeur absolue

4 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $|x| = 5$; 2) $|3x| = \sqrt{3}$

3) $|2x - 7| = 0$; 4) $\left|\frac{2}{5}x - 1\right| - 5 = 0$

5) $3|x| + 7 = 0$; 6) $2|x| + 1 = 0$

Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré

5 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $2x + 1 - 3(1 + x) \leq 3 + x$; 2) $(1 - \sqrt{2})x + 3 \leq 0$

3) $-2x + 9 < -2(x - \sqrt{2})$; 4) $-6x + 2(x - 1) < -3(2x - 1) + 5x + 3$

5) $\frac{x-1}{2} + \frac{3+x}{3} > 3 - 2x$; 6) $\frac{2x+1}{2} - (1 - 2x) \geq 5 - \frac{x}{3}$

6 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\frac{3}{2}x - \frac{x+1}{5} \geq \frac{x-2}{10} + \frac{1}{2}$

2) $\frac{3x-1}{7} - \frac{19x}{49} < \frac{2x-5}{49} + \frac{3x-1}{3}$

3) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3} < \frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$

4) $x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 2x - 1 + \frac{1-x}{2} + \frac{x+1}{3}$

Inéquations et factorisation

7 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $(2x - 3)(4x - 5) \leq 0$; 2) $(1 - 2x)(x + 3) \geq 0$

3) $x^2 + 2x < 0$; 4) $4x^2 - 5x > 0$

5) $25x^2 - 16 \leq 0$; 6) $(4x - 3)(x + 7) - 16x^2 + 9 > 0$

Inéquations et valeur absolue

8 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $|x| \leq 5$; 2) $|2x - 1| < \frac{3}{2}$

3) $|x - 1| \geq \frac{4}{5}$; 4) $|3x - 1| > 7$

Système d'inéquations du premier degré

9 Résoudre dans IR les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 8x - 1 \leq 3x + 4 \\ 3x - 5 \geq x + 7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+3}{4} \\ \frac{x+1}{5} + 1 \leq \frac{2x-3}{3} + \frac{3}{5} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x-1}{2} - (1+x) < \frac{x-1}{3} \\ \frac{x+1}{2} - \left(3 - \frac{x}{2}\right) \geq 3 - \frac{x}{6} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 1 \\ \frac{2x-3}{2} > 1 - \frac{x}{3} \end{cases}$

Equations et pourcentages

10 Dans une entreprise A, il y a 300 employés dont 15 % sont des femmes.
Dans une entreprise B, il y a 30 % de femmes.
Sachant que les deux entreprises réunies contiennent 20 % de femmes, quel est le nombre d'employés de l'entreprise B ?

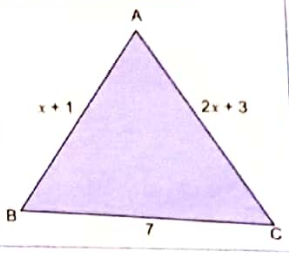
Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Inéquations et géométrie

11 Soit x un nombre réel strictement positif.

Déterminer les valeurs de x sachant que 7 ; $x+1$; $2x+3$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.



Equations du premier degré à deux inconnues

12 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

1) $2x+y-5=0$; 2) $x-3y+5=0$

3) $\frac{2}{3}x+2y-\frac{7}{2}=0$; 4) $\sqrt{3}x+2y-\sqrt{6}=0$

5) $4x-9=0$; 6) $7y+3=0$

Equation paramétrique du premier degré à deux inconnues

13 Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les solutions de l'équation : $(m+1)x+my-2=0$

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

14 En utilisant la méthode de substitution, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases} x+y=-3 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 5x+2y-7=0 \end{cases}$ (S_3): $\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 3x+y=3 \end{cases}$

15 En utilisant la méthode de résolution par combinaison linéaire, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+3y=15 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} 4x-5y+7=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$ (S_3): $\begin{cases} 2x-4y=0,18 \\ -x+2y=0,09 \end{cases}$

16 En utilisant la méthode du déterminant, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases} 5x-2y-4=0 \\ 3x-y-3=0 \end{cases}$ (S_2) : $\begin{cases} 0,12x-5,6y=-0,06 \\ -0,3x+y=-3,75 \end{cases}$

(S_3) : $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Systèmes de trois équations du premier degré à deux inconnues

17 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ x-2y=-5 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ x+2y=8 \\ -4x+y=5 \end{cases}$

(S_3): $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-3y+4=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ (S_4): $\begin{cases} y+1=0 \\ x-y+1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

Système et capital

18 Une personne place un capital de 30000 dirhams en deux parties. La première x est placée au taux de 6 % et la deuxième y au taux de 4 % pour une durée d'un an.

Déterminer x et y sachant que l'intérêt total est de 1440 dirhams.

Régionnement du plan

19 Résoudre graphiquement les inéquations :

1) $x-2y+3\leq 0$; 2) $5x-4y>0$

3) $2x-3\geq 0$; 4) $y+2<0$

20 Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases} x-2y+1\geqslant 0 \\ x+y-3\leqslant 0 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} x+y-5<0 \\ 3x-4y>0 \end{cases}$

(S_3): $\begin{cases} 2x-y+4\geqslant 0 \\ 3x+2\leqslant 0 \end{cases}$ (S_4): $\begin{cases} x+y\geqslant 4 \\ -x-4y\leqslant 20 \end{cases}$

(S_5): $\begin{cases} x-2y+1>0 \\ x-\frac{3}{2}<0 \\ 2y-9<0 \end{cases}$ (S_6): $\begin{cases} x+y-1\geqslant 0 \\ x-y\leqslant 0 \\ x-y+1\leqslant 0 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices de renforcement des apprentissages

Equations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue

21 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $25x^2 - 0{,}64 = 0$; 2) $\left(\frac{x+45}{2}\right)^2 = 12x + 540$

3) $(2x-3)^2 - 5 = 0$; 4) $4x^2 - 16 = 0$

5) $(x-1)^2 = (3x-2)^2$; 6) $3x^2 - (x-3)^2 = 0$

22 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^3 - 2x^2 + 10 - 5x = 0$

2) $x^3 - 8 + 2(x^2 - 4) + 3x - 6 = 0$

3) $t^2 - 3 + 2(t^2 + 2\sqrt{3}\,t + 3) = 0$

4) $x^3 - 27 + \frac{1}{2}(2x-6)(6-x) = x^2 - 9$

Equations rationnelles

23 Résoudre les équations suivantes :

1) $\frac{x+2}{2-x} = 0$; 2) $\frac{x^2-16}{2x} = 0$

3) $\frac{x+1}{3x-4} = \frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+3} = 0$

5) $2x - 7 = \frac{4}{2x-7}$; 6) $\frac{16}{3x+1} = 3x - 1$

7) $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{6x+1}{3x-2}$; 8) $\frac{1}{x-7} = \frac{1}{3x+8}$

Equations et valeur absolue

24 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $|2x-3| = |2-x|$; 2) $|2|x|-3| = 3$

3) $|x-2| = 2x-1$; 4) $|x^2 - 2x| = x^2$

5) $|x-2| - 2|x| = 2x-3$; 6) $|6-x| + |x+1| = 2 - |x|$

Equations contenant des racines carrées

25 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{3-2x} = \sqrt{x+6}$

3) $\sqrt{x^2-1} = |x|$; 4) $\sqrt{x^2-1} + x = 4$

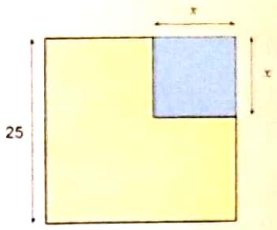
5) $2\sqrt{2x} = \sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{2x-1} = x-2$

Equations et géométrie

26 On veut construire une piscine sous forme de "L" sur un terrain carré dont la longueur du côté mesure 25m (voir figure)

1) Calculer l'aire de la piscine en fonction de x.

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la piscine est égale à $576m^2$



Equations et nombres entiers

27 1) Déterminer cinq nombres entiers relatifs consécutifs dont la somme est nulle.

2) Déterminer cinq nombres entiers relatifs impairs et consécutifs telle que leur somme soit égale à 125.

3) Déterminer le nombre entier relatif x que l'on doit ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{-7}{3}$ pour obtenir le nombre 6.

Inéquations se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue

28 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $(2x-3)(5x-1) - (2x-3)(-x+4) \geq 0$

2) $(2x+5)(3x-2) > (2x+5)(x+4)$

3) $x^2 - 25 + (x-5)(3x-7) \leq 0$

4) $(3x-8)(2x-5) < 4x^2 - 20x + 25$

5) $4x^2 - 3x + (4x-3)(2-x) > 0$

6) $(4x+7)(-x+7) + 16x^2 + 56x + 49 \leq 0$

29 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\frac{1-x}{1+x} \leq 2$; 2) $\frac{12x-1}{x-1} > -\sqrt{2}$

3) $\frac{x}{2x+3} < \frac{x}{5}$; 4) $\frac{1-x}{3x} + \frac{1}{2-x} \geq 0$

5) $\frac{x^2-2x}{x+1} > 0$; 6) $\frac{x^2-1}{x-2} < x+1$

7) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{2x-1}{x(x+1)}$; 8) $\frac{x^2-3x+1}{x+1} < 1$

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Inéquations et valeur absolue

30 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $|3x+4|<|5-3x|$; 2) $|x-1|\leqslant|x+1|$

3) $|x|+3x-1\leqslant 0$; 4) $\frac{1}{2}\leqslant|2x-5|\leqslant 3$

5) $\frac{2-3|x|}{1+|x|}<\frac{1}{2}$; 6) $|x-1|+|2x-3|<7$

7) $|x-1|-|x-2|\leqslant 2x-3$; 8) $\big||x+5|-7\big|<4$

Inéquations contenant des racines carrées

31 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $\sqrt{x}\leqslant 7$; 2) $\sqrt{3-2x}>\sqrt{x+6}$

3) $\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}\leqslant 0$; 4) $\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\geqslant 0$

5) $\sqrt{x^2+6x+9}\leqslant 3$; 6) $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x-3}<0$

Inéquations et commerce

32 Deux entreprises de location de voitures proposent les tarifs suivants :

La première entreprise propose 550 dirhams de frais fixes plus 6,30 dirhams pour chaque kilomètre parcouru.

La seconde entreprise propose 600 dirhams de frais fixes plus 6,10 dirhams pour chaque kilomètre parcouru.

Déterminer la distance à partir de laquelle le tarif de la seconde entreprise est le plus avantageux.

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

33 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases}(\sqrt{3}-1)x+2y=-2\\(\sqrt{3}+1)x+y=-1-\sqrt{3}\end{cases}$ (S_2): $\begin{cases}\sqrt{2}x-3y=2\sqrt{2}\\2x-3\sqrt{2}y=8\end{cases}$

(S_3): $\begin{cases}\sqrt{3}x+\sqrt{2}y=1\\\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$ (S_4): $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\9x-3y=2\end{cases}$

34 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases}2x^2+\frac{1}{y}=1\\3x^2+\frac{5}{y}=-9\end{cases}$ (S_2): $\begin{cases}2|x|-3\sqrt{y}=-4\\3|x|+\sqrt{y}=5\end{cases}$

(S_3): $\begin{cases}\frac{3}{2-x}-\frac{5y}{2-y}=2,5\\\frac{2}{2-x}-\frac{3y}{2-y}=2\end{cases}$ (S_4): $\begin{cases}\frac{x+3}{y+5}=3\\\frac{x+1}{y-3}=\frac{1}{2}\end{cases}$

Systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues

35 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

(S_1): $\begin{cases}x+y+z=4\\2x-y+z=13\\x+2y+z=13\end{cases}$ (S_2): $\begin{cases}3x+y-z=-4\\-2x+3y+z=7\\x-2y+2z=1\end{cases}$

(S_3): $\begin{cases}2x+y+z+1=0\\x+2y+z=0\\x+y+2z-1=0\end{cases}$ (S_4): $\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+y-2z-2=0\\5x-3y-2=0\end{cases}$

Systèmes et proportionnalité

36 Déterminer trois nombres réels x, y et z proportionnels respectivement à 2, 3 et 5 tels que : $x+2y-3z=1$

Systèmes et profit

37 Pour former le capital d'une société, trois personnes A, B et C placent les montants suivants :

A = 50000 dirhams ; B = 60000 dirhams ; C = 90000 dirhams

Après un an, le bénéfice total est de 20000 dirhams.

Calculer la part du bénéfice de chacune des trois personnes sachant que cette part est proportionnelle à la contribution au capital.

Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

38 Résoudre graphiquement le système :

(S): $\begin{cases}2x-3y\leqslant 12\\3x+2y\geqslant 5\\7x+9y\leqslant 49\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

39 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

(S_1) : $(5x - 3y)(2x + y - 2) \geq 0$

(S_2) : $(x + y - 1)(2x - y + 1) < 0$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(S): \begin{cases} 4x + 3y > 17 \\ 2x\ \ y < 11 \\ x + 2y < 8 \\ x - y \leq 4 \end{cases}$$

Système paramétrique

41 On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(E): \begin{cases} (m-1)x + 2y = -3 \\ mx - 3y = 8 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Déterminer la valeur du nombre réel m pour que le couple $(1 ; -2)$ soit solution du système (E).
2) Résoudre le système (E) pour $m = -1$.
3) Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles le système (E) admet une solution unique que l'on déterminera.

Systèmes et géométrie

42 Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 52m et que le périmètre est égale à 396m.

Systèmes et polynômes

43 Déterminer un polynôme $P(x)$ du second degré tel que :

$P(-1) = 14$; $P(2) = 2$; $P(1) = 0$.

Systèmes et vitesse

44 Un camion parcourt une pente en montée à la vitesse de 24 kilomètres par heure, et en descente aux $\frac{4}{3}$ de cette vitesse.

Calculer la longueur de la pente sachant que la durée de la montée et de la descente (réunies) est de 21 minutes.

45 Si la vitesse d'un train augmente de 10 kilomètres par heure, il "gagne" 40 minutes, et si sa vitesse diminue de 10 kilomètres par heure, il "perd" une heure.

Quelle est la distance parcourue par le train ? et quelle est sa vitesse ?

Exercices de synthèse

Equations paramétriques du premier degré à une inconnue

46 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les équations suivantes :

1) $(m - 1)x + 2m = 0$.
2) $(2 - m)x + 3mx + 2(m - x) - 6 = 0$.
3) $(3m + 5)x + 3m = (2m - 5)x + m + 1$.

Inéquations paramétriques du premier degré à une inconnue

47 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, les inéquations suivantes :

1) $(m + 2)x + 3 - 2m \leq 0$.
2) $2x(m - 1) + 3m \leq m(x + 1) - 5$.
3) $(m+1)x + 1 - 3m > \frac{m-1}{2} + \frac{3+x}{2}$

Discussion d'un système paramétrique

48 Résoudre et discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, le système suivant :

$$(s): \begin{cases} mx + 3y = m^2 \\ 3x + my = 9 \end{cases}$$

Systèmes et réduction

49 Le prix total d'achat de 5 unités d'un produit A et de 4 unités d'un produit B est de 350 dirhams.

Si le prix unitaire du produit B ne change pas et si celui (prix unitaire) du produit A baisse de 10 %, alors le prix total d'achat de 20 unités du produit A et de 8 unités du produit B sera de 1180 dirhams.

Déterminer les prix unitaires des produits A et B avant la "réduction" (c'est-à-dire lors du premier achat)

Scanné avec CamScanner

5 EXERCICES ET PROBLÈMES

Programmation linéaire

50 Un entreprise fabrique deux sortes de ceintures A et B. Chaque ceinture A est vendue avec un bénéfice de deux dirhams et chaque ceinture B avec un bénéfice de 1,5 dirham.

La fabrication d'une ceinture A dure deux heures et celle d'une ceinture B dure une heure, tandis que l'entreprise ne dispose que de 1000 heures de travail par jour.

On dispose d'une quantité de cuir suffisante pour produire 800 ceintures A et B par jour, et de 400 boucles pour les ceintures A et 700 boucles pour les ceintures B.

Dresser un programme de production quotidien pour que l'entreprise réalise un profit maximal.

51 Un artisan fabrique deux types d'objets A et B.

- Un objet A coûte 30 dirhams de matière première et 150 dirhams de main-d'œuvre.
- Un objet B coûte 70 dirhams de matière première et 75 dirhams de main-d'œuvre.

Les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre sont respectivement 650 dirhams et 1250 dirhams.

Les profits réalisés sont de 54 dirhams par objet A et 45 dirhams par objet B.

Déterminer le nombre d'objets A et le nombre d'objets B que l'artisan doit produire par jour pour réaliser un profit maximum.

Systèmes et valeur maximale

52 1) Résoudre graphiquement le système :

$$(s)\begin{cases} 2x+y-3>0 \\ x-4y+3<0 \end{cases}$$

2) Déterminer la valeur minimale (minimum ou la plus petite valeur) de l'expression $x + 2y$ sachant que le couple $(x ; y)$ vérifie le système (s).

Problèmes

Age du père et du fils

53 L'âge du père est le double de l'âge de son fils.

Lorsque le fils aura l'âge actuel de son père, la somme des âges du père et de son fils sera 90 ans.

Déterminer l'âge du père et celui de son fils.

Poids des trois amis

54 Salwa et Ahmed pèsent ensemble 60 kilogrammes. Salwa et Omar pèsent 39 kilogrammes. Ahmed et Omar pèsent 45 kilogrammes.
Quels sont les poids de Salwa, Ahmed et Omar.

Mathématisation d'une situation

55 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que les longueurs des côtés sont des nombres entiers naturels pairs consécutifs.

1) Si on désigne les longueurs des côtés de ce triangle par $x-2$, x et $x+2$, quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

2) Montrer que $x^2 - 8x = 0$

3) En déduire le mesures des longueurs de ce triangle.

Hauteur du mur d'un jardin

56 La longueur d'une échelle dépasse la hauteur du mur du jardin de 20 cm. Si on éloigne le bas de l'échelle d'un mètre du mur, le haut de l'échelle coïncide avec le bord du mur. Quelles sont la longueur de l'échelle et la hauteur du mur ?

Vitesse

57 Deux villes A et B sont distantes de 130 kilomètres.
Une voiture part de A à sept heures pour B et roule à une vitesse constante. Puis, deux voitures partent de B vers A à la même vitesse, l'une à huit heures et l'autre à huit heures et demi.
La voiture partante de A, après avoir parcouru 88 km, rencontre la première voiture partante de B, et après avoir parcouru 106 km, elle rencontre la deuxième voiture venant de B. Déterminer la vitesse de la voiture partante de A.

Nombre de spectateurs

58 Le tarif normal pour assister à une pièce de théâtre est de 100 dirhams alors que le tarif spécial aux étudiants est de 60 dirhams. Sachant que la recette totale de 90 spectateurs présents est de 7640 dirhams, déterminer le nombre d'étudiants parmi les spectateurs.

Economie

59 Chaque kilomètre parcouru en voiture personnelle coûte à un individu 1,10 dirhams. Sachant que le tarif d'un taxi est : 1,5 dirhams et 0,90 par kilomètre, quel est le moyen de locomotion le plus avantageux par cet individu ? sa voiture ou le taxi ?

Scanné avec CamScanner

Equations et inéquations du second degré à une inconnue

Activités préparatoires	108
Définitions et règles	111
Points essentiels	116
Exercices résolus	117
Exercices et problèmes	118

6

Capacités attendues

Résolution d'équations et d'inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du second degrés à une inconnue

Contenu

- Activités préparatoires
  - Résolution d'équations
  - Complétion au carré
  - Problème du second degré
  - Résolution d'une équation du second degré
  - Utilisation des équations du second degré pour calculer des longueurs
  - Résolution d'un problème géométrique en utilisant une équation du second degré.
  - Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
  - Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$
  - Solutions évidentes et non recours au discriminant
- Définitions et règles
  - Equations du second degré à une inconnue
  - Factorisation d'un trinôme du second degré
  - Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
  - Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit
  - Signe d'un trinôme du second degré
  - Inéquations du second degré
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

6 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Résolution d'équations

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $3x(2x-1)=0$; 2) $(\sqrt{3}x-1)(-4x+5)=0$

3) $4x^2-25=0$; 4) $16x^2-3=0$

5) $x^2+1=0$; 6) $9x^2+4=0$

> **ab = 0 signifie que a = 0 ou b = 0**

ACTIVITE 2 Complétion au carré

1) Compléter (par ce qui convient) : $x^2-5x=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ .....

2) Résoudre dans IR l'équation $x^2-5x+6=0$

Cette équation est appelée **équation du second degré à une inconnue**.

> **La technique utilisée est appelée la complétion au carré ; le nombre x^2+bx est le début du carré**

ACTIVITE 3 Problème du second degré

Une personne achète un morceau de tissu à 504 dirhams.
Déterminer le nombre de mètres achetés sachant que si le prix d'un mètre diminue de 4 dirhams, cette personne obtiendra 8 mètres supplémentaires.

ACTIVITE 4 Résolution d'une équation du second degré

On considère dans IR l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

1) Montrer que : $ax^2+bx+c=0$ signifie $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]=0$

L'écriture $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$ est appelée **la forme canonique du trinôme** ax^2+bx+c.

Il semble difficile de se rappeler la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c afin de l'utiliser dans la résolution de d'équation $ax^2+bx+c=0$.

Pour simplifier, on pose $\Delta = b^2-4ac$. Δ est appelé **discriminant** de (E).

> **$\Delta = b^2-4ac$ Le symbole Δ se lit delta. C'est une lettre grecque**

On a donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

2) On suppose dans cette question que : $\Delta = 0$

Vérifier que $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Résoudre alors l'équation (E).

3) On suppose dans cette question que : $\Delta > 0$

a) Vérifier que : $ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

b) Résoudre dans IR l'équation (E).

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans le cas où $\Delta < 0$.

5) Résoudre dans IR les équations suivantes :

(1) : $-4x^2+3x+1=0$; (2) : $4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$; (3) : $2x^2+x+3=0$

> **• L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ.**
> **• La factorisation du trinôme ax^2+bx+c dépend aussi du signe de Δ.**

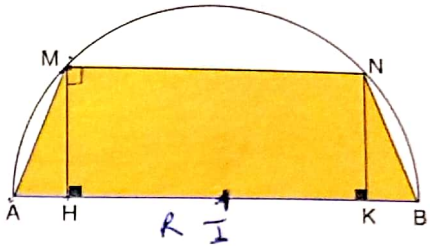
Scanné avec CamScanner

ACTIVITE 5 Utilisation des équations du second degré pour calculer des longueurs

A Soient AMNB un trapèze inscrit dans un demi cercle de diamètre [AB] (voir figure).

On pose AB = 2R

Soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur la droite (AB).



1) Montrer que : $AH = \frac{AM^2}{2R}$

2) Montrer que : $KH = 2R - \frac{AM^2}{R}$

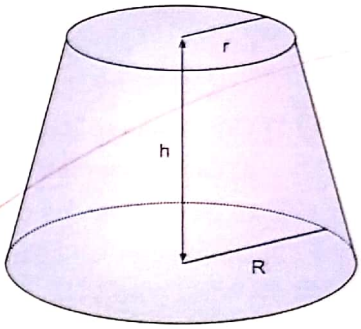
3) On suppose que MN = 2AM.

a) Montrer que : $AM^2 + 2R \times AM - 2R^2 = 0$

b) En déduire AM en fonction de R)

B La formule qui donne le volume de la section d'un cône de révolution est $V = \pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\frac{h}{3}$

Déterminer R en fonction de V, r et h.



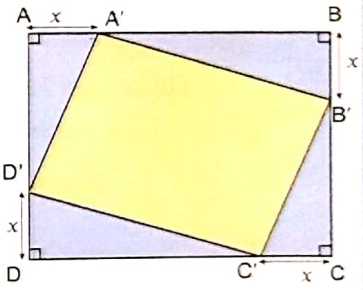
ACTIVITE 6 Résolution d'un problème géométrique en utilisant une équation du second degré

soit ABCD un rectangle tel que : BC = 3 et AB = 5.

Soit x un nombre réel tel que : $0 \leq x \leq 3$

On considère les points A' ; B' ; C' ; D' qui appartiennent respectivement aux segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] tels que :

$$AA' = BB' = CC' = DD' = x$$



1) Montrer que l'aire du quadrilatère vaut $2x^2 - 10x + 15$.

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère est égale à 7.

ACTIVITE 7 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

On considère dans IR l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ et soit Δ son discriminant.

Dans ce qui suit, on suppose que l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

1) Calculer la somme $x_1 + x_2$ en fonction de a et b.

2) Calculer le produit x_1x_2 en fonction de a et c.

3) On considère l'équation (E') : $2x^2 - x - 6 = 0$

a) Montrer que l'équation (E') admet deux solutions x_1 et x_2 (leur détermination n'est pas demandée).

b) Calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2.

Scanné avec CamScanner

6 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 8 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et que $x_1 < x_2$

Recopier et compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$		0		
$x - x_2$			0	
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a > 0$)		0	0	
$a(x - x_1)(x - x_2)$ (où $a < 0$)		0	0	

ACTIVITE 9 Solutions évidentes et non recours au discriminant

A 1) On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

a) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a + b + c = 0$.

b) Déterminer les deux racines de $P(x)$ si $a - b + c = 0$

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_1) : 4x^2+5x-9=0$

$(E_2) : -3x^2+2x+5=0$

$(E_3) : \sqrt{2}\,x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}=0$

B On considère le trinôme $H(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ où α et β sont deux nombres réels.

1) Calculer $H(\alpha)$ et en déduire les solutions de l'équation $H(x) = 0$.

2) Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes :

$(E_4) : x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$

$(E_5) : 2x^2-\left(1+\sqrt{7}\right)x+\frac{\sqrt{7}}{2}=0$

$(E_6) : x^2-5x+6=0$

C Déterminer une solution évidente, de chacune des équations suivantes, puis déterminer l'autre solution.

$(E_7)\quad x\left(x+1\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$

$(E_8)\quad \left(x-\frac{ab}{x}\right)\left(x+\frac{ab}{x}\right)=(a-b)(a+b)$

$(E_9)\quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{x}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$

$(E_{10})\quad x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)x+4=0$

Scanné avec CamScanner

6 DEFINITIONS ET REGLES

1 Equations du second degré à une inconnue

Définition

• Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une équation du second degré à une inconnue dans IR.

• Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples et applications

- L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet 1 et 3 comme solutions.
- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution dans IR.
- Calculer le discriminant de chacune des équations suivantes.

(1) $-2x^2 + x + 1 = 0$; (2) : $x^2 + x + 1 = 0$; (3) : $25x^2 - 10x + 1 = 0$

Propriété 1 On considère dans IR l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.

et soit S son ensemble de solutions.

• Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution et on a : $S = \varnothing$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique $-\frac{b}{2a}$ et on a : $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes à savoir : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a : $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'équation (1) : $x^2 + 4x - 5 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta_1 = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation (1) admet deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \{-5 ; 1\}$.

- Résolvons dans IR l'équation (2) : $2x^2 + 5x + 7 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta_2 = 5^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31$

Comme $\Delta_2 < 0$, alors l'équation (2) n'a pas de solution.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2 = \varnothing$.

- Résolvons dans IR l'équation : (3) $4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5 = 0$.

Le discriminant de cette équation est : $\Delta_3 = \left(-4\sqrt{5}\right)^2 - 4 \times 4 \times 5 = 0$.

Comme $\Delta_3 = 0$, alors l'équation (3) admet une solution unique qui est $x_1 = -\frac{-4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3 = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

- Résoudre dans IR les équations suivantes :

(1) : $x^2 - 6x + 8 = 0$; (2) : $2x^2 + x - 2 = 0$

(3) : $3x^2 + 2x + 1 = 0$; (4) : $9x^2 + 2x + \frac{1}{9} = 0$

Rappel

• Tout nombre réel qui vérifie l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est solution de cette équation et est dit racine du polynôme $ax^2 + bx + c$.

• Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes elles sont communément notées x_1 et x_2 (ou x' et x'').

Remarques

• Si $\Delta = 0$ alors $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$ on dit, dans ce cas, que l'équation admet $-\frac{b}{2a}$ comme solution double.

• Si $ac < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes.

Scanné avec CamScanner

2 Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété 2 On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ ne peut pas être factorisé en produit de polynômes du premier degré.

Exemples et applications

Factorisons le trinôme $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Le discriminant du trinôme $P(x)$ est $\Delta = 9$ et ses racines sont :

$x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$; donc $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $P(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$ ou encore $P(x)=(2x+1)(x-1)$

Factorisons le trinôme $Q(x)=-4x^2+4\sqrt{3}\,x-3$

Le discriminant du polynôme $Q(x)$ est $\Delta = 0$;

donc $Q(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ c'est-à-dire $Q(x)=-4\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

ou encore $Q(x)=-\left(2x-\sqrt{3}\right)^2$

On considère le trinôme $R(x) = x^2 + x + 1$.

Le discriminant de $R(x)$ est $\Delta = -3$

Comme $\Delta < 0$, alors $R(x)$ ne peut pas être factorisé en produit de polynômes du premier degré.

Factoriser les polynômes suivants :

$L(x)=4x^2+5x+1$

$H(x)=25x^2-10\sqrt{2}\,x+2$

$K(x)=-3x^2+2x-7$

Remarque

Pour factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$, on détermine le signe de son discriminant et on précise ses deux solutions (lorsqu'elles existent).

Scanné avec CamScanner

6 DEFINITIONS ET REGLES

3 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété 3 Si le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est strictement positif, alors les deux solutions x_1 et x_2 de cette équation vérifient les deux égalités :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemples et applications

- Soient x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation : $-2x^2 + x + \sqrt{3} = 0$

  On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

  c'est-à-dire : $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1 x_2 = = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- En notant que 1 est une solution de l'équation $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, déterminons l'autre solution de cette équation. soit α cette autre solution.
  On a : $\alpha + 1 = 1 + \sqrt{2}$ (ou $\alpha \times 1 = \sqrt{2}$) ; donc $\alpha = \sqrt{2}$.
- Déterminer la somme et le produit des deux racines de chacun des deux polynômes suivants :
  $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$ et $Q(x) = x^2 - (3+\sqrt{2})x + 3\sqrt{2}$
- Etudier le signe des deux racines du trinôme $H(x) = -3x^2 + 7x + 1$ (sans déterminer ces deux racines).

4 Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Propriété 4 Soient S et P deux nombres réels.

Le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$

Les nombres u et v sont les solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

Exemples et applications

- Résolvons le système (s) : $\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = -6 \end{cases}$

  Comme $5^2 - 4(-6) = 49 >$, alors le système (s) admet une solution.
  u et v sont les deux solutions de l'équation (E) : $X^2 - 5X - 6 = 0$

  (E) admet deux solutions qui sont $x_1 = \frac{5-7}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$

  Donc $\begin{cases} u = -1 \\ v = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 6 \\ v = -1 \end{cases}$

  L'ensemble des solutions du système (s) est $T = \{(-1 ; 6) ; (6 ; -1)\}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ xy = -1 \end{cases}$.
- Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les deux équations suivantes :
  (1) $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$; (2) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$

Remarque

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution double, alors $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

et on a aussi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Eclaircissement

La propriété 3 nous permet de :

- calculer la somme et le produit des deux solutions d'une équation du second degré sans déterminer (ou connaître) ses solutions.
- déterminer l'une des solutions connaissant l'autre.
- vérifier la validité des solutions trouvées.
- préciser le signe des solutions.

Passage du système à l'équation

- On dit que u et v ont des rôles symétriques dans le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$
- Il faut faire la distinction entre l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ et l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$

Technique

Les solutions de l'équation $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ sont α et β.

Scanné avec CamScanner

5 Signe d'un trinôme du second degré

Propriété 5 On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et soit Δ sont discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de IR.
- Si $\Delta = 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x différent du réel $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors le signe de $P(x)$ est :
  - → le signe de a à l'extérieur des racines ;
  - → le signe contraire de a à l'intérieur des racines.

Exemples et applications

Etudions le signe du trinôme $P(x) = -3x^2 + x - 2$.
Le discriminant du trinôme $P(x)$ est $\Delta = -23$.
Comme $\Delta < 0$, alors le signe de $P(x)$ est celui du nombre a.
Puisque $a = -3 < 0$, alors $P(x) < 0$ pour tout x de IR.

Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	

Etudions le signe du trinôme $Q(x) = 2x^2 - x - 1$.
Le discriminant du trinôme $Q(x)$ est $\Delta = 9$.
Comme $\Delta > 0$; donc $Q(x)$ admet deux racines, à savoir $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
Comme $a = 2 > 0$, on a le tableau suivant :

Tableau de signe de $Q(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Etudions le signe du trinôme $R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}\,x + 3$.
Le discriminant du trinôme $R(x)$ est $\Delta = 0$.
Donc $R(x)$ admet une racine unique qui est $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Comme $a = 16 > 0$, alors $R(x) > 0$ pour tout x de $\text{IR} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

Tableau de signe de $R(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$		$+\infty$
$R(x)$		$+$	0	$+$	

Etudier le signe de chacun des trinômes suivants :

$G(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$H(x) = -x^2 - 2x + 15$

$K(x) = -5x^2 + 10\sqrt{5}\,x + 25$

Remarque

- x_1 et x_2 étant les deux racines distinctes du trinôme $P(x)$ tels que $x_1 < x_2$:
  - l'intérieur des racines signifie : $x \in]x_1 ; x_2[$
  - l'extérieur des racines signifie : $x \in]-\infty ; x_1[$ ou $x \in]x_2 ; +\infty[$
  - $P(x_1) = P(x_2) = 0$
- Si $\Delta = 0$, alors $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

Scanné avec CamScanner

6 DEFINITIONS ET REGLES

6 Inéquations du second degré

Définition On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(x \neq 0)$.

Toute Inéquation de la forme $P(x) \geq 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) < 0$ est appelée **inéquation du second degré**.

Rappel

Tout nombre réel t vérifiant l'inégalité $P(x) \geq 0$ (c'est-à-dire $P(t) \geq 0$) est une solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exemples et applications

- Résolvons dans IR l'inéquation (1) : $x^2 - 7x + 12 \geq 0$.

  Etudions d'abord le signe du trinôme $x^2 - 7x + 12$.

  Le trinôme $x^2 - 7x + 12$ admet deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$.

  Tableau de signe de $x^2 - 7x + 12$:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est : $S_1 =]-\infty ; 3] \cup [4 ; +\infty[$

- Résolvons dans IR l'inéquation (2) : $-3x^2 + x - 1 \leq 0$.

  Etudions d'abord le signe du trinôme $-3x^2 + x - 1$.

  Le discriminant du trinôme $-3x^2 + x - 1$ est $\Delta = -11$.

  $\Delta < 0$; donc le signe de $-3x^2 + x - 1$ est le même que celui de -3 pour tout réel x.

  Tableau de signe de $-3x^2 + x - 1$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2 + x - 1$		$-$	

  L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $S_2 = IR$

- Résolvons dans IR l'inéquation (3) : $16x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 3 < 0$

  Etudions d'abord le signe du trinôme $16x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 3$

  Le trinôme $16x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 3$ admet une racine double qui est $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

  Tableau de signe de $16x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 3$:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{4}$		$+\infty$
$16x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 3$		$+$	0	$+$	

  L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est : $S_2 = \varnothing$

- Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

  (1) $3x^2 - 2x - 8 > 0$

  (2) $x^2 - 2x + 15 \leq 0$

  (3) $-5x^2 + 10\sqrt{5}\,x + 25 < 0$

Scanné avec CamScanner

6 POINTS ESSENTIELS

Résolution d'une équation du second degré à une inconnue

$(a \neq 0)$ $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet $x_1 = -\frac{b}{2a}$ comme solution unique

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		0		Signe de a

$\Delta > 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		0	Signe contraire de a	0		Signe de a

(On suppose $x_1 < x_2$)

$\Delta < 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans IR.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas dans IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

Somme et produit des solutions d'une équation du second degré à une inconnue

Si α et β sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors $\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$

Soient S et P deux nombres réels.

Le système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ admet une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$

Les réels u et v sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES RESOLUS

1 Equation se ramenant à une équation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation (1) : $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Solution

Résolvons dans IR l'équation (1) : $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$
Cette équation équivaut à : $3(x^2)^2 - 2x^2 - 1 = 0$
Posons $X = x^2$; donc l'équation (1) devient :

$$(1') \quad : \quad 3X^2 - 2X - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 > 0$.
Donc l'équation (1') admet deux solutions

$$X_1 = \frac{2-4}{6} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2+4}{6}$$

c'est-à-dire $X_1 = -\frac{1}{3}$ et $X_2 = 1$

Or $X = x^2$; par conséquent l'équation (1) équivaut à

$$\left(x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = -\frac{1}{3}\right)$$

La dernière relation est impossible $\left(\text{car } x^2 \geq 0 \text{ et } -\frac{1}{3} < 0\right)$
Par ailleurs $x^2 = 1$ signifie que ($x = -1$ ou $x = 1$)
D'où l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S_1 = \{-1 ; 1\}$.

2 Inéquation se ramenant à une inéquation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR l'inéquation suivante :

$$(2) \quad \frac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5} \geqslant 0$$

Commentaire

Pour résoudre cette inéquation, on étudie d'abord les signes de $-2x^2 + x + 1$ et $x^2 - 4x - 5$, puis on en déduit le signe du quotient $\frac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$

Solution

L'inéquation (2) est définie lorsque $x^2 - 4x - 5 \neq 0$

- Résolvons dans IR l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$;
  son discriminant est $\Delta = 36$ qui est strictement positif. Donc l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.
- Résolvons dans IR l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$;
  son discriminant est $D = 9$ ($D > 0$) ; donc $-2x^2 + x + 1 = 0$ admet deux solutions qui sont $x' = -\frac{1}{2}$ et $x'' = 1$

Tableau de singe de $\frac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		5		$+\infty$
$-2x^2+x+1$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x^2-4x-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est

$$S_2 = \left]-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, 5[$$

3 Résolution d'une équation irrationnelle qui se ramène à une équation du second degre à une inconnue

Résoudre dans IR l'équation (3) : $\sqrt{x^2+3} = 2x - 1$

Solution

L'équation (3) : $\sqrt{x^2+3} = 2x - 1$ est équivalente à :

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = (2x-1)^2 \quad \text{et} \quad 2x - 1 \geqslant 0$$

c'est-à-dire à : $x^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 1$ et $x \geqslant \frac{1}{2}$

ou encore à : $3x^2 - 4x - 2 = 0$ et $x \in \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

Le discriminant de l'équation $3x^2 - 4x - 2 = 0$
est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 40$; donc l'équation $3x^2 - 4x - 2 = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{40}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-\sqrt{40}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$

Comme $\frac{2-\sqrt{10}}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $\frac{2+\sqrt{10}}{3} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

alors l'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S_3 = \left\{\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

4 Résolution d'un système qui se ramène à une équation du second degré à une inconnue

Résoudre dans IR^2 le système (4) : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Solution

$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$

c'est-à-dire à : $\begin{cases} -3xy = 13 - 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$ ou encore à : $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$

Donc x et y sont solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$
qui a pour solutions $u_1 = -3$ et $u_2 = 1$. Donc $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Par suite, l'ensemble des solutions du système (4) est

$$S_4 = \{(-3 ; 1) ; (1 ; -3)\}$$

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices d'application

Equations du second degré ne nécessitant pas le calcul du discriminant

1 **Type $ax^2 + c = 0$ ou $ax^2 + bx = 0$**
Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^2 - 4 = 0$; 2) $x^2 - 7 = 0$
3) $7x^2 + 3 = 0$; 4) $5x^2 - 36 = 0$
5) $3x^2 - 2x = 0$; 6) $5x^2 = 3x$
7) $9(x+1)^2 - 36 = 0$; 8) $(3x+1)^2 + (3x+1) = 0$
9) $(x^2+2x)^2 - (x^2+2x) = 0$; 10) $(x^2+1)^2 + (x^2+1) = 0$

2 **Type se ramenant à $a(x-r)(x-s) = 0$**
Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $(x-7)(2x+1) = 0$
2) $(3-2x)(x-4) = 0$
3) $(3x-7)^2 - 9(x+2)^2 = 0$
4) $(x+2)^2 + (3-x)^2 = 0$
5) $(x-5)(x+7) + x^2 - 25 = 0$
6) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$
7) $(3x-1)(x-2) = (x-2)$
8) $7x(x-3) = (x-3)^2$

3 **Type $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ ou $x^2 - 2ax + a^2 = 0$**
Sans calculer le discriminant, résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
2) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$
3) $100x^2 - 60x + 9 = 0$
4) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
5) $4x^2 + 24x + 36 = 0$
6) $25x^2 - 30x + 9 = 0$
7) $4x^2 + 28x + 49 = 0$
8) $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

Forme canonique

4 Recopier les égalités suivantes et les compléter :

1) $x^2 + 12x + 11 = (x + \ldots)^2 + \ldots$
2) $x^2 + 12x + 35 = (x + \ldots)^2 + \ldots$
3) $x^2 - 7x = (x - \ldots)^2 + \ldots$
4) $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = (x + \ldots)^2 + \ldots$
5) $x^2 - 5x + 9 = (x - \ldots)^2 + \ldots$
6) $x^2 - 5x + 4 = (x - \ldots)^2 + \ldots$
7) $x^2 + 5x - \frac{49}{4} = (x + \ldots)^2 + \ldots$

5 Ecrire le trinôme $f(x)$ sous la forme $a[(x-\alpha)^2 - d]$ où a, α et d sont des nombres réels que l'on déterminera dans chaque cas, puis déterminer la forme factorisée (si c'est possible) du polynôme $f(x)$:

1) $f(x) = -4x^2 + 24x - 28$
2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
3) $f(x) = 2x^2 - 3x - 15$
4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 3$
5) $f(x) = -3x^2 + x + 4$
6) $f(x) = 3x^2 - x + \frac{5}{12}$

Equations du second degré

6 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $10x^2 - 3x - 4 = 0$
2) $x^2 - x + 7 = 0$
3) $9x^2 - 42x + 49 = 0$
4) $(2+\sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} - 1 = 0$
5) $(1+\sqrt{2})x^2 - 2(1-\sqrt{2})x + 1 = 0$
6) $x^2 - 21x + 54 = 0$
7) $3t^2 - 17t + 4 = 0$
8) $4x^2 - 7x - 1 = 0$
9) $5x^2 + x - 252 = 0$
10) $-x^2 - 55x + 4500 = 0$

7 Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $t^2 - 1{,}32t + 1{,}27 = 0$
2) $\frac{3}{8}x^2 + \sqrt{\frac{7}{4}}\,x - 1{,}5 = 0$
3) $10000x^2 - 10001x + 10000 = 0$
4) $x^2 + 2x + 1 - a^4 = 0$

(où a est un nombre réel non nul donné).

8 Déterminer des équations du second degré admettant r et s comme solutions, dans chaque cas suivant :

1) r = 1 et s = r
2) r = – 5 et s = 8

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

3) $r = 0$ et $s = -4$

4) $r = -1$ et $s = -2$

5) $r = a + 1$ et $s = a - 1$ (a réel donné)

Inéquations du second degré

9 **Signe d'un trinôme**

Déterminer, selon les valeurs de x, le signe du trinôme $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$
2) $f(x) = 7x^2 + 12x + 5$
3) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
4) $f(x) = x^2 + x + 1$
5) $f(x) = 8 - 5x^2$
6) $f(x) = -x^2 + 11x - 30$
7) $f(x) = (5x + 7)(x - 3)$
8) $f(x) = (4x + 5)^2 - 49$
9) $f(x) = 4x^2 - (x + 6)^2$
10) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

10 **Inéquations**

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2) $x^2 - 8x + 5 < 0$
3) $49x^2 - 70x + 25 > 0$
4) $-x^2 + x + 3 < 0$
5) $\sqrt{2}\,x^2 + 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0$
6) $3,5x^2 - 0,5x + 0,15 \leq 0$

Equations se ramenant à des équations du second degré

11 En posant $X = x^2$, résoudre chaque équation parmi les équations suivantes :

1) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$
2) $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
3) $x^4 + x^2 - 56 = 0$
4) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
5) $6x^4 - 17x^2 + 5 = 0$
6) $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$
7) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

12 En posant $t = \sqrt{x}$, résoudre les équations suivantes :

1) $x - 2\sqrt{x} + 3 = 0$
2) $3x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$
3) $x + 9\sqrt{x} - 10 = 0$
4) $2x + 7 = 15\sqrt{x}$
5) $\sqrt{x} = x - 2$

13 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $(3x - 1)(5x + 2) = 3x - 1$
2) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 2x + 3$
3) $\frac{x}{x^2 - 8} + 3 = 0$
4) $\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x + 3} = 1$
5) $(x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 2)^2 - 9$

14 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

1) $\sqrt{x^2 + 4} = 5 - x$
2) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = x - 2$
3) $x - \sqrt{5x - 1} = 3$
4) $\sqrt{x^2 - 8} - 2x = -5$

15 Soient s et p deux nombres réels donnés.
On considère le trinôme $f(x) = x^2 - sx + p$
et on suppose $s^2 - 4p > 0$.

a) Montrer que $f(x)$ admet deux racines distinctes et calculer leur somme et leur produit.

b) On suppose que deux nombres ont pour somme s et pour produit p. Montrer que ces deux nombres sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Inéquations se ramenant à des inéquations du second degré

16 Résoudre, dans IR, chacune des inéquations suivantes :

1) $(3x - 2)^2 > (2x + 2)^2$
2) $(x + 3)(4x + 3) > 2x + 6$
3) $\frac{x + 5}{2x + 1} \geq 0$
4) $\frac{1}{x + 3} + \frac{3}{x + 1} \leq -2$
5) $\frac{2x^2 - 8x - 24}{x^2 + 17x + 52} \geq 0$
6) $\sqrt{x - 2} < x - 5$
7) $\frac{6x + 2}{3x + 9} + \frac{x - 1}{2x + 1} > 0$

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercices de renforcement des apprentissages

17 α, β et γ sont des nombres réels donnés.
Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

1) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
2) $(\alpha+1)^2 x^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+1)x - \alpha\beta = 0$
3) $4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - (\gamma+\alpha)^2 = 0$
4) $\alpha^2 x^2 - \alpha(\alpha+\beta+1)x + \beta(\alpha+\beta(\alpha+1)) = 0$
5) $x^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)x - \beta^2\gamma^2 - \gamma^2\alpha^2 = 0$

18 Résoudre, dans IR, les équations suivantes :

1) $(2x+1)^2 + (6x+7)^2 - 8 = 0$
2) $4(x-5)^2 + 9x = -3(x+3)$
3) $(x+2)^2 + (x-2)^2 + x^2 = 8 - x$
4) $\frac{5x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{8}{3}$
5) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{24}$

19 Sans effectuer aucun calcul, montrer que les équations suivantes n'ont pas de solution dans IR :

1) $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$
2) $x + 5\sqrt{x} + 3 = 0$
3) $x + 3\sqrt{x-4} - 2 = 0$
4) $2x^4 + ax^2 + a^2 + 1 = 0$

20 Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

1) $7x^2 - 5x + 4 > 0$
2) $66x^2 + 17x + 1 < 0$
3) $3x^4 + 2x^2 - 1 > 0$
4) $x^2 - 4x + 3 > 10^{10}$
5) $-15 - 29x + 8x^2 \leq 0$
6) $x^5 - x^2 < 0$
7) $x^6 - 7x^3 - 8 \geq 0$
8) $x^2 + 7x - 3 < -10^{10}$

21 Résoudre, dans IR, les inéquations suivantes :

1) $4x - 3\sqrt{x} + 1 < 0$
2) $\frac{x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x} < 0$
3) $\frac{x^3 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \geqslant 0$
4) $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{3(x+3)}{x}$
5) $\sqrt{-x^2+3x+4} \leq \frac{1}{2}x + 2$

22 Déterminer le nombre réel a pour que les deux équations suivantes $x^2 + x + a = 0$ et $x^2 + ax + 1 = 0$ aient une solution commune.

23 Soient α et β les solutions de l'équation $x^2 + 7x - 12 = 0$

1) Calculer α et β.
2) Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.
3) Calculer (en utilisant le résultat de 2) ce qui suit :

$\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$; $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$

$\frac{\alpha-1}{\beta} + \frac{\beta-1}{\alpha}$; $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

$\alpha^3 + \beta^3$; $\alpha^4 + \beta^4$

24 Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = -1024 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 98 \\ xy = 15 \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$
5) $x + y = xy = \frac{x}{y}$

25 Résoudre, dans IR, le système :

$$\begin{cases} x^2 + 14x - 51 < 0 \\ 4x + 17 > 0 \end{cases}$$

26 Résoudre, dans IR, le système :

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq 3 \\ 2 + x < x^2 \end{cases}$$

27 On considère, dans IR, l'équation (E) suivante :

$$(E) : x - 2 = \frac{-1}{x+1}$$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes.
2) Si m et n sont les solutions de l'équation (E), montrer que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -1$$

28 1) Résoudre, dans IR, l'équation : $t^2 + 4t + 3 = 0$
2) Résoudre, dans IR, l'équation : $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

29 Déterminer tous les couples $(x ; y)$ de réels tels que :

$$\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$$

30 Déterminer tous les couples $(x ; y)$ de réels tels que :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = x + \sqrt{xy} \\ (x + y)^2 = 2(x - y)^2 \end{cases}$$

31 Déterminer tous les couples a, b et c tels que :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab + c^2 = 1 \end{cases}$$

32 Déterminer tous les réels x et y tels que :

$$x^2 + y^2 + (x + y) - xy + 1 = 0$$

33 Soient a et b deux nombres réels donnés

On pose $P(x) = x^3 - (a + b + 1)x^2 + (ab + a + b)x - ab$

1) Montrer que $P(1) = 0$

2) Résoudre, dans IR, l'équation $P(x) = 0$

34 a et b étant deux nombres réels donnés, on considère les deux équations :

$(E) : x^2 + ax + 1 = 0$

$(E') : x^2 + bx + 1 = 0$

On suppose que (E) admet deux solution α et β.

et que (E') admet deux solutions α' et β'.

Calculer, en fonction de α et β, le produit suivant :

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')$$

35 Résoudre, dans IR, l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1$$

36 Déterminer le nombre réel a pour que l'on ait :

Pour tout réel x : $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 + x + 1} < 2$

37 Soit a un nombre réel tel que : $a \geq 1$

Montrer qu'il existe un nombre réel x tel que :

$$\begin{cases} |x| \leq a \\ x + \dfrac{1}{x} = 2a \end{cases}$$

38 Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle tels que : $a < b < c$.

Montrer que l'équation : $x^2 - (a + b + c)x + a^2 + b^2 = 0$ admet deux solutions distinctes.

Exercices de synthèse

39 Soient a et b deux nombres réels.

S est l'ensemble des solutions de l'équation : $x^2 - ax + b = 0$

T est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - bx + a = 0$

Déterminer a et b sachant que : $S \cup T = \{-1 ; 1 ; 2 ; 3\}$

40 On considère, dans IR, l'équation symétrique

$(E) : 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

1) Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2) Montrer que l'équation (E) est équivalente à

$$(E') : \ 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

3) On pose $u = x + \dfrac{1}{x}$

a) calculer u^2 (en fonction de x).

b) Montrer l'équation (E') équivaut à :

$(2u^2 - 5u - 3 = 0$ et $u = x + \dfrac{1}{x})$

4) Résoudre, dans IR, l'équation $2u^2 - 5u - 3 = 0$.

En déduire les solutions de l'équation (E).

5) En procédant de la même façon, résoudre chacune des équations suivantes :

$(E_1) : 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

$(E_2) : x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

$(E_3) : x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$

$(E_4) : 2(x + 1)^4 + 9(x + 1)^3 + 14(x + 1)^2 + 9(x + 1) + 2 = 0$

41 Montrer que, quels que soient les nombres réels non nuls x et y, on a :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 > 0$$

42 On considère l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$.

Soient α et β les deux solutions de (E).

On pose :

$s_1 = \alpha + \beta$; $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$; ... ; $s_n = \alpha^n + \beta^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $s_{n+2} + s_{n+1} = s_n$.

2) Calculer s_2 ; s_3 ; s_4 ; s_5 ; s_6 ; s_7 ; s_8.

3) En déduire que : $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^8 + \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^8 = 47$

Scanné avec CamScanner

6 EXERCICES ET PROBLÈMES

Problèmes

43 Trouver deux nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme des carrés est égale à 8048074.

44 Deux ouvriers doivent exécuter un travail déterminé.

S'ils travaillent ensemble, il achèveront le travail en 12 jours.

Si l'un des ouvriers effectue la moitié du travail en question, puis l'autre poursuit l'exécution de la moitié du travail, ils accompliront le travail en 25 jours.

Quels est le temps nécessaire pour chaque ouvrier pour accomplir le travail seul ?

45 On considère l'expression $F(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}$

1) Résoudre, dans IR, l'équation $F(x) = -4$.

2) Résoudre, dans IR, l'inéquation $F(x) > -4$.

3) α et β sont deux nombres réels qui vérifient $F(\alpha) = F(\beta)$.

Montrer que α et β sont solutions de l'équation

$t^2 - pt + p - 7 = 0$ où p est un nombre réel que l'on déterminera.

46 Soit a un nombre réel.

On considère l'équation (E) suivante :

(E) : $(2a - 1)x^3 + 2(a - 1)x^2 - 2(2a - 1)^2x + 5 = 0$

1) Déterminer a sachant que 1 est solution de l'équation (E).

2) En considérant les valeurs obtenues à la question 1), trouver les réels α, β et γ pour que l'équation devienne :

$(x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$

3) Résoudre cette équation.

47 Deux villes sont distantes de 450km.

Pour parcourir cette distance, une voiture met quatre heures de moins qu'un camion.

Sachant que la vitesse de la voiture dépasse celle du camion de 30km/h, quelles sont les vitesses respectives de la voiture et du camion.

48 Calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sachant que la longueur de son hypoténuse est 26m, et que la distance entre le sommet de l'angle droit et le pied de la hauteur issue de ce sommet est 9,23m.

49 Un robinet remplit un bassin de $6m^3$ de capacité.

Si le débit du robinet est 10 litres par minute, il faut 20mn supplémentaires pour remplir le bassin.

Quel est le débit du robinet (en l/mn) ?

50 La distance d parcourue par un caillou en chute dans un puits est (approximativement) $d = 4,9t^2$ (d en mètres et t en secondes).

Par ailleurs la vitesse du son dans l'air est d'environ 330m/s.

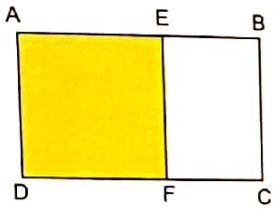
Si on jette un caillou dans un puits, l'écho de la percussion avec l'eau nous parvient après trois secondes de son lancer.

Quelle est la profondeur de ce puits ?

51 On dit que le rectangle ABCD est un **rectangle d'or** si :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{EB}$$

où AEFD est un carré ;



ce qui signifie que le rapport "longueur sur largeur" dans les deux rectangles ABCD et BCFE est le même. Ce rapport est noté φ et appelé **nombre d'or**.

Il est clair que $\varphi > 1$.

1) Déterminer la valeur de φ.

(On pourra poser x = AB et prendre BC = 1)

2) En déduire les valeurs de $\dfrac{1}{\varphi}$, $\varphi-\dfrac{1}{\varphi}$ et $\dfrac{1}{\varphi-1}$.

3) Le rectangle EBCF est-il un rectangle d'or ?

Scanné avec CamScanner

Calcul vectoriel dans le plan

Activités préparatoires	124
Définitions et règles	127
Points essentiels	131
Exercices résolus	132
Exercices et problèmes	133

7

Capacités attendues

* Construction d'un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.
* Exprimer les notions et les propriétés géométriques en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement.
* Résolution de problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.

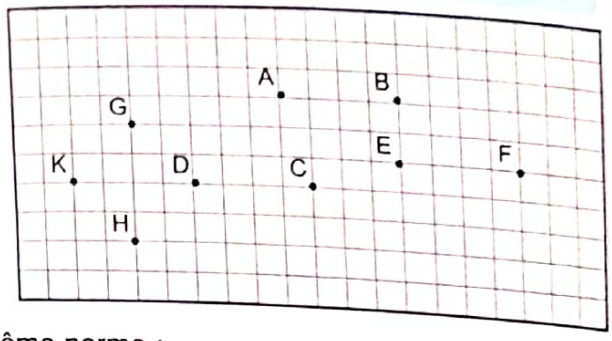
Contenu

- Activités préparatoires
  - Egalité de deux vecteurs
  - Somme de deux vecteurs - relation de Chasles
  - Colinéarité de deux vecteurs
  - Milieu d'un segment
  - Propriété $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
  - Propriété $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
  - Alignement de trois points
  - Colinéarité de deux vecteurs
  - Calcul vectoriel et résolution de problèmes
  - Condition de nullité d'un vecteur
- Définitions et règles
  - Egalité de deux vecteurs
  - Somme de deux vecteurs
  - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel
  - Colinéarité de deux vecteurs
  - Milieu d'un segment
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner

7 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 1 Egalité de deux vecteurs



Recopier le dessin ci-contre.

1) On a (AB) // (CD). On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même **direction**.

a) Déterminer les vecteurs qui ont la même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même direction que le vecteur $\overrightarrow{DG}$.

2) On a AB = CD. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme ; la distance AB est appelée **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ et on la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

a) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que celle du vecteur $\overrightarrow{DG}$.

3) ABDK est un parallélogramme et C appartient à la demi-droite [KD). On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KC}$ ont le même **sens**.

a) Déterminer les vecteurs qui ont le même sens que celui de $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs qui ont la même norme que $\overrightarrow{DG}$ et qui n'ont pas le même sens que le vecteur $\overrightarrow{DG}$.

4) On dit que deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

a) Déterminer les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DG}$.

- ABCD et ABFE sont des parallélogrammes et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

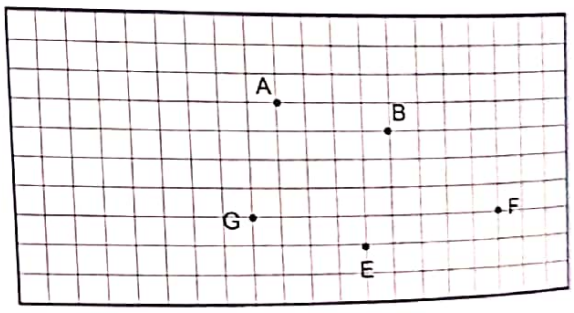
La translation qui transforme A en B, transforme aussi E en F et D en C. Le vecteur de cette translation peut être noté $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{EF}$.

Généralement, on le note $\vec{u}\left(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\ldots\right)$; cette notation est indépendante des points qui déterminent le vecteur considéré.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati)
$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

ACTIVITE 2 Somme de deux vecteurs - Relation de Chasles

A Recopier le dessin suivant.



1) Compléter l'égalité : $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\ldots$

2) a) Construire le point H tel que ABGH soit un parallélogramme.

b) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}$.

c) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BE}$.

B 1) Ecrire les vecteurs suivants sous forme d'un seul vecteur.

a) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}$

Scanné avec CamScanner

7 ACTIVITES PREPARATOIRES

c) $\vec{AE}+\vec{EC}+\vec{CD}+\vec{DA}+\vec{AB}$

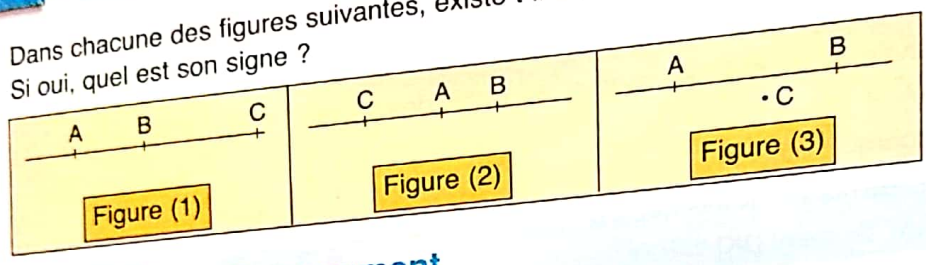
d) $\vec{AB}-\vec{DB}-\vec{EB}+\vec{DA}+\vec{EF}-\vec{AF}$

2) Soient K, L, M, N des points du plan.
On considère les deux point I et J définis par :
$\vec{KI}=\vec{KL}+\vec{KM}+\vec{KN}$ et $\vec{KJ}=\vec{KL}-\vec{KM}+\vec{KN}$

a) Calculer $\vec{JI}$.
b) Que peut-on en déduire ?

ACTIVITE 3 Colinéarité de deux vecteurs

Dans chacune des figures suivantes, existe t-il un nombre réel k tel que $\vec{AC}=k\vec{AB}$?
Si oui, quel est son signe ?



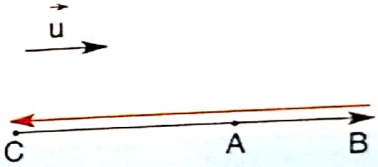
(A, B et C sont alignés) signifie qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{AC}=k\vec{AB}$

ACTIVITE 4 Milieu d'un segment

Soient A, B deux points distincts, I le milieu du segment [AB] et O un point donné.
1) Montrer que $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{O}$ et $\vec{AB}=2\vec{AI}$.
2) Montrer que : $\vec{OA}+\vec{OB}=2\vec{OI}$.

ACTIVITE 5 Propriété $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

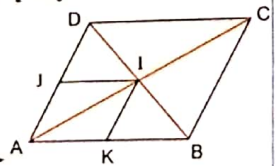
On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ et on pose $\|\vec{u}\|=k$.
Soient a et b deux nombres réels tels que $a>0$, $b<0$ et $a+b<0$.
A, B et C sont des points tels que $\vec{AB}=a\vec{u}$ et $\vec{BC}=b\vec{u}$.
1) Calculer la norme $\|\vec{AC}\|$ en fonction de a, b et k.
2) Montrer que : $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$



ACTIVITE 6 Propriété $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

A Soient ABCD un parallélogramme de centre I, J le milieu de [AD] et K le milieu de [AB].
On pose $\vec{AB}=\vec{u}$ et $\vec{AD}=\vec{v}$

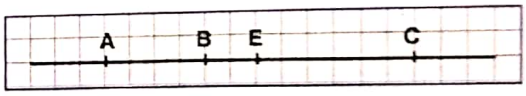
1) Montrer que AKIJ est un parallélogramme.



2) Montrer que $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\vec{AI}$

En déduire que : $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

B Recopier la figure suivante :



On pose $\vec{AB}=\vec{u}$

1) Montrer que : $\frac{1}{2}(3\vec{u})=\frac{1}{2}\vec{AC}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)\vec{u}=\vec{AE}$.

2) En déduire que : $\frac{1}{2}(3\vec{u})=\left(\frac{3}{2}\right)\vec{u}$.

Scanné avec CamScanner

7 ACTIVITES PREPARATOIRES

ACTIVITE 7 Alignement de trois points

Soient A, B, C trois points non alignés.

On considère les points M, N, P définis par :

$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA}$; $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{PB}$.

1) Déterminer $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Déterminer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{NP}$.

3) En déduire que M, N et P sont alignés.

ACTIVITE 8 Colinéarité de deux vecteurs

Soient ABC un triangle, A′, B′ et C′ les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1) Montrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

2) Soit I un point donné.

On considère les points J et K tels que : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BB'}$.

Soit E le milieu du segment [JK].

Montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

ACTIVITE 9 Calcul vectoriel et résolution de problèmes

Soient ABC un triangle, M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Soient I un point donné, J et K les points définis par : $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CP}$.

Soit E le milieu du segment [JK].

1) Montrer que : $\overrightarrow{IE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire des droites (IE) et (BC) ?

2) Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

Montrer que le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, est l'orthocentre du triangle ABC.

ACTIVITE 10 Condition de nullité d'un vecteur

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Soient E le milieu de [AC] et F le milieu de [BD].

Pour tous nombres réels x et y, on considère le vecteur $\vec{S}$ définis par :

$$\vec{S} = x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + y\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}\right)$$

1) Exprimer $\vec{S}$ en fonction de x, y et $\overrightarrow{EF}$.

2) Quelle est la condition pour que $\vec{S} = \vec{0}$?

Scanné avec CamScanner

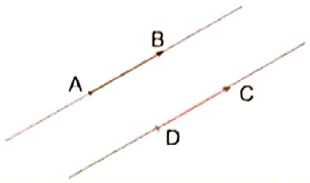
7 DEFINITIONS ET REGLES

1 Egalité de deux vecteurs

Définition Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que A ≠ B et C ≠ D.

On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont **égaux** et on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ lorsque ces deux vecteurs ont :

- la même direction ;
- le même sens ;
- la même norme.



Propriété 1 Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Exemples et applications

Soient A, B, C, D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.

Donc : BADC ; ADCB ; DCBA sont des parallélogrammes

D'où : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Soient AEFD et EFCB deux parallélogrammes.
Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Propriété 2 Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point unique B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Conséquence Quels que soient les points A, M et N du plan, on a :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ signifie que M = N.
- $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ signifie que M = A.

Le vecteur $\vec{0}$ est dit vecteur nul.

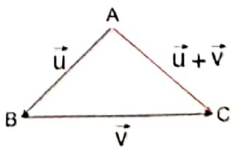
2 Somme de deux vecteurs

Définition (Relation de Chasles)

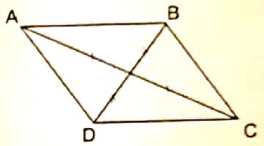
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ et défini par : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est connue sous le nom de relation de Chasles.

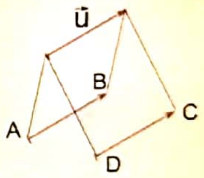


- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction signifie que : (AB) // (DC)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens signifie que le déplacement de A vers B se fait dans le même sens que le déplacement de D vers C.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même norme signifie que AB = DC c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$ (les deux vecteurs ont la même longueur).
- On ne peut comparer le sens de deux vecteurs que s'ils ont la même direction.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ABCD est un parallélogramme



Remarque

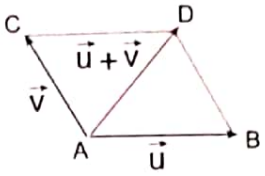
Il existe une infinité de vecteurs égaux à un vecteur donné $\vec{u}$.

Scanné avec CamScanner

7 DÉFINITIONS ET RÈGLES

Règle du parallélogramme pour construire la somme de deux vecteurs

La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ pour que ABDC soit un parallélogramme.



Exemples et applications

- Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

  On a : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$ (relation de Chasles)

  $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)$

  $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC}$

  Donc : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

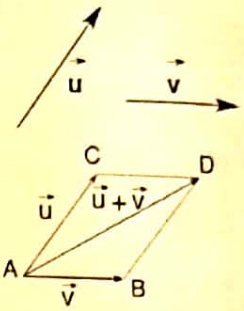
- Soient A, B, O trois points du plan $\mathcal{P}$.

  On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

  $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

  Donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

- Soient ABCD un parallélogramme, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
  Soit K un point de la droite (AD).
  Montrer que : $\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{KC}$



Rappel

$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{MA}$

3 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

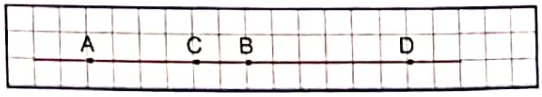
Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $\vec{w}$ que l'on note $k\vec{u}$ et qui est défini par :

- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si k = 0, alors $\vec{w}=\vec{0}$ (c'est-à-dire $0\vec{u}=\vec{0}$)
  - Si k > 0, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, le même sens et $\|\vec{w}\|=k\|\vec{u}\|$
  - Si k < 0, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, des sens contraires et $\|\vec{w}\|=(-k)\|\vec{u}\|$
- Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{w}=\vec{0}$ (c'est-à-dire $k\vec{0}=\vec{0}$)

Exemples et applications

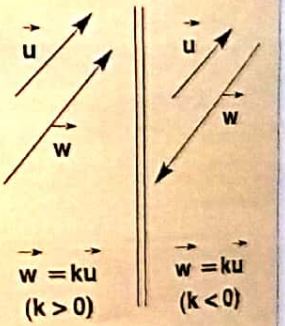
- On considère la figure suivante :



  - Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont la même direction, des sens opposés et CA = 2CB ; donc $\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{CB}$.
  - Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont la même direction, le même sens et DA = 2DB ; donc $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DB}$.

Rappel

La norme $\|\vec{u}\|$ du vecteur $\vec{u}$ n'est autre que la longueur du vecteur $\vec{u}$.



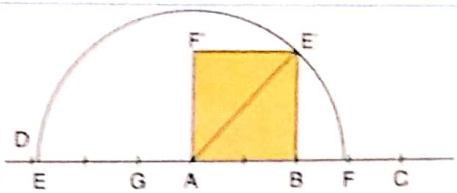
Rappel

- $1\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$
- $(-1)\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$
- $0\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Scanné avec CamScanner

7 DÉFINITIONS ET RÈGLES

- On considère la figure suivante :
  - On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
  - La longueur de la diagonale du carré ABE'F' est égale à $\sqrt{2}$ AB (rayon du cercle).
  - Les deux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, des sens opposés et $AE = \sqrt{2}\,AB$; donc $\overrightarrow{AE} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$.



- Déterminer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés Quels que soient les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}$ et les réels a, b et k, on a :

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$
$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$
$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$
Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors : $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Remarque

$$a(\vec{u}-\vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$$
$$(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$$

Exemples et applications

- On a : $\vec{u} + x\vec{u} = 1\vec{u} + x\vec{u}$
  $\vec{u} + x\vec{u} = (1+x)\vec{u}$
- Si $6\vec{u} = 8\vec{v}$, alors : $\frac{1}{2}(6\vec{u}) = \frac{1}{2}(8\vec{v})$ c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{2}\times 6\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\times 8\right)\vec{v}$
  ou encore $3\vec{u} = 4\vec{v}$

- Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 2(\vec{u}+\vec{v}) - 2(\vec{u}-\vec{v})$; $\vec{V}_2 = \vec{u} + 2(\vec{u}-\vec{v}) - 3(\vec{u}-\vec{v})$

$\vec{V}_3 = 3(\vec{u}-2\vec{v}) + 5(\vec{v}-\vec{u})$; $\vec{V}_4 = \frac{1}{2}(4\vec{u}+5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

4 Colinéarité de deux vecteurs

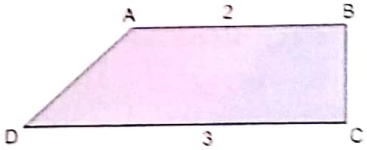
Définition On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

$\vec{0} = 0.\vec{u}$
Le vecteur nul est colinéaire avec tout vecteur du plan.

Exemples et applications

- Soit ABCD un trapèze (voir figure)
  On a : $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$. Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.



- Soient A, B et C trois points tels que $7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
  On a $7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$; donc $7\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$.
  D'où la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

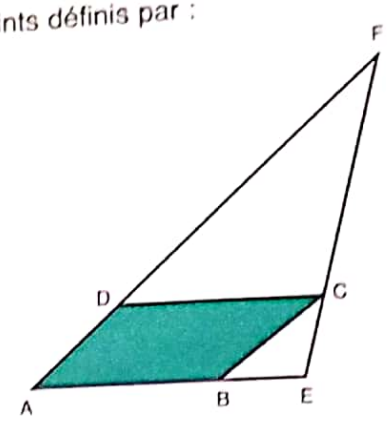
- Les points A, B, C sont alignés signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{AB} = k'\overrightarrow{AC}$)

Scanné avec CamScanner

7 DEFINITIONS ET REGLES

Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$$



Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

Or $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$, par suite :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{BC} \quad (\text{car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC})$$
$$\overrightarrow{EF} = 4\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

Donc : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

Ce qui prouve que les points E, C et F sont alignés.

Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$$

1) Construire la figure.
2) Montrer que les points A, C et F sont alignés.

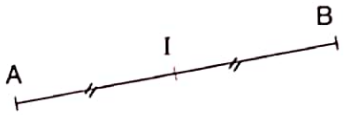
5 Milieu d'un segment

Propriété 3 Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB], il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

(1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

(2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Propriété 4 Si I est le milieu du segment [AB], alors quel que soit le point M du plan $\mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

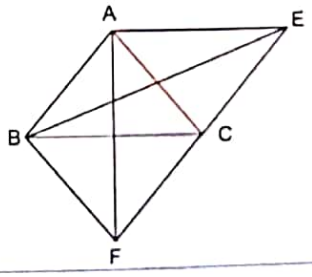
Exemple

Soit ABC un triangle.

Construisons les points E et F définis par

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Donc ABCE et ABCF sont des parallélogrammes c'est-à-dire $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$



On a : $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

D'où C est le milieu de [EF].

Remarque importante

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, où α et β sont des réels, alors :
$\alpha = 0$ et $\beta = 0$

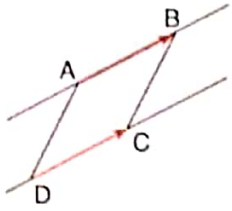


Michel Chasles (1793-1880) Savant et mathématicien français. On lui doit d'importants travaux en géométrie vectorielle et projective.

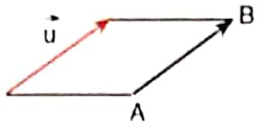
Scanné avec CamScanner

7 POINTS ESSENTIELS

Egalité de deux vecteurs



- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont :
  - la même direction
  - le même sens
  - la même norme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



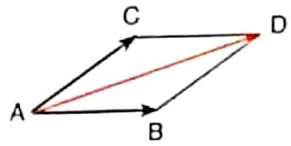
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point unique B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ signifie que M = N
- $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ signifie que M = A

Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C du plan $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

Somme de deux vecteurs



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

signifie que ABDC est un parallélogramme

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

- Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $\vec{w}$ que l'on note $k\vec{u}$ et qui défini par :
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si k = 0, alors $\vec{w} = \vec{0}$ $\left(0\vec{u} = \vec{0}\right)$
  - Si k > 0, alors $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ont la même direction, le même sens et $\left\|\vec{w}\right\| = k\left\|\vec{u}\right\|$
  - Si k < 0, alors $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ont la même direction, des sens opposés et $\left\|\vec{w}\right\| = (-k)\left\|\vec{u}\right\|$
- Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, alors $\vec{w} = \vec{0}$ $\left(k\vec{0} = \vec{0}\right)$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et les réels a, b et k, on a :

- $a\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}$

  $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

  $a\left(b\vec{u}\right) = (ab)\vec{u}$
- Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors $\left(k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}\right)$

Colinéarité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

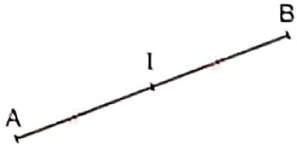
Milieu d'un segment

- Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB] il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée.

  (1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

  (2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

  (3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



- Si I est le milieu du segment [AB], alors quel que soit le point M du plan $\mathcal{P}$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES RESOLUS

1 Points alignés – Parallélogramme

Soient O, A et B des points du plan $\mathcal{P}$.

Soient M, N et P les points, du plan $\mathcal{P}$, tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

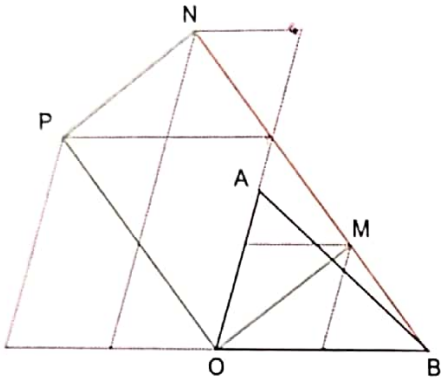
1) Construire la figure.

2) Montrer que les points B, M et N sont alignés.

3) Montrer que le quadrilatère OMNP est un parallélogramme.

Solution

1) Construction de la figure.



2) Alignement des points B, M et N

• On a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BM} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

• On a : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BN} = \left(2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

• On a $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BM}$

Ce qui prouve que les points B, P et N sont alignés.

3) Nature du quadrilatère OMNP.

On a : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PN} = \left(2\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) - \left(\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$

$\overrightarrow{PN} = \left(2 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$

D'où OMNP est un parallélogramme.

2 Milieu d'un segment

Soit ABC un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3) Montrer que A est le milieu du segment [CE].

Solution

1) Construction du point D

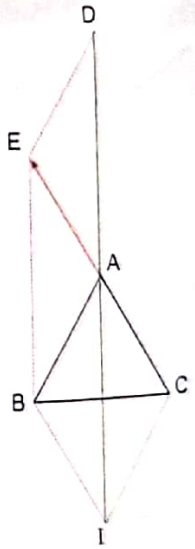
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AD} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

2) Construction du point E

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Ce qui signifie que ABED est un parallélogramme.



3) Montrons que A est milieu de [CE]

Ce que l'on veut prouver est

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

D'où : A est le milieu du segment [CE].

Scanné avec CamScanner

7

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

13 Soient A et B deux points distincts.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Construire les vecteurs $2\vec{u}$; $\frac{1}{8}\vec{u}$; $-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$.

14 A, B, C sont trois points non alignés, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.
Construire les points E, F, G tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{7}{4}\vec{u}$; $\overrightarrow{CG} = \vec{u} - \frac{5}{3}\vec{v}$.

15 Construire trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que :
$\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$.

16 Simplifier les écritures :
$\frac{36}{25}\left(\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{u}\right)$; $\frac{33}{22}\left(\vec{u} + \frac{4,5}{3,6}\vec{u}\right)$
$\frac{27}{4} \times \left(-\frac{2}{9}\right)\vec{u} + 3,5\vec{v}$; $0,26\left(3\vec{u} - \frac{8}{13}\vec{v}\right)$.

17 Déterminer le vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :
1) $\vec{u} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}$
2) $\vec{u} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
3) $9\vec{u} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC} = 5\vec{u} + \frac{10}{9}\overrightarrow{BC}$

18 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u} = \frac{7}{5}\vec{v}$.
Déterminer les réels x, y, z tels que :
$\vec{v} = x\vec{u}$ $\quad -\vec{v} = y\vec{u}$ $\quad \vec{v} = z(-\vec{u})$

19 Soient A et B deux points distincts.
1) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 1,5\overrightarrow{AB}$.
2) Déterminer α et β tels que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM} = \beta\overrightarrow{AB}$

Définition d'un point par une égalité vectorielle

20 Dans chacun des cas suivants, déterminer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; puis construire M.
1) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2) $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$
3) $4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MA} = \vec{0}$
4) $5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

21 Soit ABC un triangle.
Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, dans chacun des cas suivantes, puis construire le point M.
1) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$
2) $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
4) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$
6) $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AB}$

Milieu et centre de gravité

22 On considère un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soient B, C et D les points définis par :
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$.
Montrer que B est le milieu de [CD].

23 Soit MNPQ un parallélogramme.
1) Construire les points R et S tels que :
$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{QN}$ et $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MN}$.
2) Montrer que N est le milieu de [SQ].

24 Soit MNP un triangle.
1) Construire les points E et F tels que :
$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$.
2) Montrer que P est le milieu de [EF].

25 Soient A et B deux points distincts.
1) Construire les points R et S tels que :
$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
2) Montrer que les segments [AB] et [RS] ont le même milieu.

26 A, B, C, M sont des points du plan.
On pose : $\vec{v} = \overrightarrow{MA}$; $\vec{w} = \overrightarrow{MB}$; $\vec{t} = \overrightarrow{MC}$.
1) Construire les points E, F, H définis par :
$\overrightarrow{ME} = \vec{v} + \vec{w} - \vec{t}$
$\overrightarrow{MF} = \vec{v} - \vec{w} + \vec{t}$
$\overrightarrow{MH} = -\vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$
2) Montrer que A, B et C sont les milieux respectifs des segments [EF], [FH] et [HE].
3) Montrer que : $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

27 Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectif de [BC], [CA] et [AB].
On considère les points M, N, P tels que :

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'M}$; $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B'N}$; $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{C'P}$.

Calculer $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

28 Soient ABC un triangle, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [CA], C' le milieu de [AB] et G le point d'intersection de (BB') et (CC').
(G est le centre de gravité du triangle ABC).
E est le symétrique de G par rapport à B'.
F est le symétrique de G par rapport à C'.

1) Montrer que AGBF, AGCE et AFGE sont des parallélogrammes.

2) En déduire que : $\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GF} \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} \\ \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA} \end{cases}$

puis que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

3) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

29 ABC un triangle et H son centre de gravité.
A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [CA].
M et N sont les milieux respectifs de [BH] et [AH].
Montrer que A'B'NM est un parallélogramme.

30 ABC est un triangle ; x est un nombre réel.
Soient H le centre de gravité du triangle ABC,
I le milieu de [BC] et M le point tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les points A, M, I et H sont alignés.

Colinéarité, alignement et parallélisme

31 Soit OABC un quadrilatère.
On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$

2) Soit P le point tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$
Montrer que (OP) est parallèle à (CM).

32 Soit ABCD un quadrilatère.
On considère le vecteur $\vec{v} = 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC}$.

1) Montrer que : $\vec{v} = 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

2) Soit E le point tel que : $\vec{v} = \overrightarrow{CE}$.
Montrer que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.

33 A, B, C, M sont quatre points du plan ; x est un nombre réel.
On considère le vecteur $\vec{v} = x\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}$.

1) Ecrire $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et x.

2) Déterminer x pour que le vecteur $\vec{v}$ soit indépendant de x.

34 On considère deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

1) Simplifier l'écriture vectorielle du vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) - 4\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$$

2) On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$

a) Calculer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires.

35 Soit ABC un triangle.

1) Construire les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$$

2) Montrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

36 Soit ABC un triangle.
On considère le point M tel que :

$\begin{cases} \cdot \overrightarrow{MA} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BC} \\ \cdot \overrightarrow{MB} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AC} \end{cases}$

Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}$.

37 Soit ABC un triangle.

1) Construire les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad 5\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

2) Montrer que les point A, E et F sont alignés.

38 Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construire les points J, K, L et M tels que :

• J est le milieu de [BC]

• K est le milieu de [AD]

$\cdot \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CK}$

2) Montrer que les droites (BM) et (DL) sont parallèles.

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

39 ABC est un triangle. On considère le point X déterminé par :
- $\vec{AX}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires
- $\vec{CX}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

Calculer $\vec{BX}$

40 ABCD est un parallélogramme.
1) Construire les points M et N tels que :
$$\vec{DM} = 2\vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{AN} = 3\vec{AB}$$
2) Construire le point C' tel que AMC'N soit un parallélogramme.
3) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

41 Soit ABC un triangle.
On considère les points E et F tels que :
$$\vec{CE} = \frac{1}{3}\vec{CA} \quad \text{et} \quad \vec{BF} = 2\vec{BC} + \vec{BA}$$
1) Construire E et F.
2) Montrer que les points B, E et F son alignés.

42 Soient ABCD un parallélogramme, M et N les points définis par :
$$\vec{BM} = \frac{6}{5}\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{DN} = \frac{5}{6}\vec{DC}$$
1) Calculer $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2) En déduire que A, M et N sont alignés.

43 Soient ABCD un parallélogramme, M et N les points tels que :
$$\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA} \quad \text{et} \quad \vec{CN} = -\frac{1}{4}\vec{BC}$$
1) Montrer que (MN) et (AC) sont parallèles.
2) La droite passant par M et parallèle à la droit (BC), coupe (BD) en P.
Montrer que (PN) est parallèle à (AB).

44 Soit ABC un triangle.
1) Construire le point E tel que $\vec{BE} = 4\vec{BA} - 3\vec{BC}$.
2) Montrer que E appartient à la droite (AC).
3) Soit M un point tel que :
$$\vec{BM} = (x+1)\vec{BA} - x\vec{BC}$$
où x est un nombre réel.
Montrer que : $M \in (AC)$

45 ABC est un triangle.
Soient a un nombre réel,, E, F et H les points tels que :
$\vec{BE} = -a\vec{AB}$; $\vec{BF} = a\vec{AC}$; $\vec{BH} = \vec{BE} + \vec{BF}$
Montrer que le point H appartient à la droite (BC)

Exercices de renforcement des apprentissages

46 ABMN et MNEF sont deux parallélogrammes de côté commun [MN].
Montrer que : $\vec{AE} = \vec{BF}$

47 ABMN et ABEF sont deux parallélogrammes ayant [AB] comme côté commun.
Monter que : $\vec{ME} = \vec{NF}$

48 Soient ABC un triangle, E et F les points définis par :
$$\vec{AE} + \vec{AB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{AF} + \vec{AC} = \vec{0}$$
Montrer que : $\vec{BC} + \vec{EF} = \vec{0}$

49 Soit ABCD un parallélogramme.
On considère le point K tel que : $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB}$
La droite (DK) coupe (BC) en L.
1) Montrer que : $\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DL}$.
2) Calculer $\vec{CL}$ en fonction de $\vec{BC}$.

50 Soit ABM un triangle.
On considère les points E et F tels que :
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{ME} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{MF} = \vec{MA} + \vec{MB}$$
1) Montrer que M est le milieu de [EF].
2) On considère les points G et H tels que :
$$\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{ME} \quad \text{et} \quad \vec{MH} = \vec{MB} + \vec{ME}$$
Montrer que ABHG est un parallélogramme.

51 Soit ABCD un parallélogramme.
Soient E le milieu de [AB], K le symétrique de D par rapport à C et L le symétrique de D par rapport à E.
1) Monter que B est le milieu de [CL].
2) La droite (KE) coupe (BC) en T.
Calculer $\vec{LT}$ en fonction de $\vec{LC}$.

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

52 Soient ABC un triangle, E, F et G les points tels que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CF}$; $2\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

1) Construire E, F et G;
2) Montrer que $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{EC}$.
3) La droite (AG) coupe (BC) en K.
Montrer que K est le milieu de [BC].

53 Soient ABC un triangle, x un réel strictement supérieur à 1, M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}$
Montrer que les points A, C et N sont alignés.

54 Soient ABC un triangle, x un nombre réel tels que $0\leq x\leq\frac{1}{2}$.
On considère les points E, F, M et N tels que :
$\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{FN}=4\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE}=2x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{AB}$.
Déterminer la valeur de x pour laquelle les points A, M et N sont alignés.

55 Soient ABCD un parallélogramme, E le milieu du segment [AB] et N le point du segment [DE] tel que : $\overrightarrow{EM}=x\overrightarrow{ED}$
Déterminer x pour que A, C et M soient alignés.

56 Soient ABCD un quadrilatère et x un nombre réel.
On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN}=x\overrightarrow{DC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{AD}$
2) On suppose, dans cette question, que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$.
a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
b) Calculer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et x.
c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles M et N sont confondus ?

57 Soient ABC un triangle, E, F et G les points tels que :
$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EA}$; $4\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$.
1) Construire la figure.
2) Montrer que :
$\overrightarrow{FB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3) Montrer que les points B, F et G sont alignés et déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{FB}$.
4) Montrer que les points A, C et G sont alignés et déterminer le réel β tel que $\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AC}$.

58 ABCD est un parallélogramme ; I et J sont les points définis par : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AD}$
1) Montrer que : $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$
2) En déduire que les points C, I et J sont alignés.

59 Soit ABC un triangle.
On considère les points I, J; K tels que
$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.
1) Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{JK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$.
2) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

60 Soit ABCD un parallélogramme.
On considère les points E et F définis par :
$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.
1) Montrer que : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
2) En déduire que les points C, E et F sont alignés.

61 ABC est un triangle. On considère les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$.
1) Construire la figure.
2) Montrer que : $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PB}=\frac{9}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
3) Montrer que A, C et P sont alignés.
4) En déduire que P est le point d'intersection de (AC) et (BN).

62 Soient ABCD un parallélogramme,
M le symétrique de B par rapport à C
et N le point tel que : $3\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}$
1) Montrer que les points A, M, et N sont alignés.
2) La droite (AN) coupe (CD) en E.
Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{DC}$

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

63 ABC est un triangle.

Les points E, F et G sont définis par :

$4\vec{AE} = \vec{AB}$; $\vec{FA} + \vec{FC} = \vec{0}$; $2\vec{BG} = 3\vec{BC}$.

1) Montrer que : $2\vec{CG} + \vec{CB} = \vec{0}$.

2) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

64 Soit ABC un triangle et soit x un nombre réel.

On considère les points M et N définis par :

$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + x\vec{AC}$ et $\vec{AN} = x\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

1) Construire la figure pour $x = \frac{1}{2}$.

2) Dans le cas général, montrer que les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

3) Déterminer x dans chacun des cas suivants :

a) M = N (M et N confondus) ;

b) BCNM est un parallélogramme.

65 Soient ABCD un parallélogramme et x un nombre réel.

On considère les points R, S, T, V définis par :

$\vec{AR} = x\vec{AB}$; $\vec{BS} = x\vec{BC}$

$\vec{CT} = x\vec{CD}$; $\vec{DU} = x\vec{DA}$

1) Construire la figure dans le cas où $x = 3$.

2) Dans le cas général, montrer que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

66 Soient ABC un triangle, x un nombre réel non nul, M et N les points tels que : $\vec{AM} = x\vec{AB}$ et $\vec{MN} = (x+1)\vec{BC}$

1) Exprimer $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et x.

2) Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles A, C et N sont alignés ?

67 Soit ABCD un parallélogramme:

On considère les points F et J tels que : $\vec{CJ} = \vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{CB}$.

Les droites (DJ) et (AC) se coupent en L.

Les droites (DF) et (AB) se coupent en M.

1) Montrer que $\vec{CF} = \frac{4}{3}\vec{CB}$ et $\vec{DF} = \frac{4}{3}\vec{DM}$

2) Montrer que DAFJ est un parallélogramme.

3) a) Calculer $\vec{CJ}$ en fonction de $\vec{CF}$.

b) Calculer $\vec{CA}$ en fonction de $\vec{CL}$.

4) Montrer que les vecteurs $\vec{LM}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

68 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère les points E et F tels que :

$\vec{AE} = \frac{4}{3}\vec{BC}$ et $\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

1) Montrer que (EF) est parallèle à (BC).

2) Calculer $\vec{CE}$ et $\vec{CF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.

3) C appartient-il à (EF) ?

4) Quel est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\vec{MA} + \vec{MC}$ est colinéaire au vecteur $\vec{EF}$.

69 Soit ABCD un triangle.

On considère les points E, F, H, M tels que :

$2\vec{BE} = \vec{BC}$; $3\vec{CF} = 2\vec{CA}$

$3\vec{AH} = \vec{AB}$; $2\vec{AM} = 3\vec{AE}$

1) Montrer que $\vec{MB} = \frac{3}{4}\vec{CH}$ et $\vec{MC} = \frac{3}{4}\vec{BF}$

2) Soit K le point d'intersection de (CH) et (BF).

Montrer que A, K et E sont alignés.

Exercices de synthèse

70 Soit ABC un triangle.

1) Construire les points E et F tels que :

$3\vec{AE} + \vec{BE} + 2\vec{CE} = \vec{0}$ et $3\vec{AF} + 2\vec{CF} = \vec{0}$.

2) Montrer que les points B, E et F sont alignés.

71 Soit ABC un triangle.

On considère le point E tel que : $\vec{EA} = 2\vec{EB} + 3\vec{EC}$.

1) Montrer que : $\vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$.

2) Soit K le point défini par : $\vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

Montrer que $2\vec{KE} = \vec{KC}$.

3) Soit I le point tel que : $\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

Montrer que : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.

4) Montrer que les points A, I et K sont alignés.

5) Montrer que (AI) et (CE) se coupent en K.

Scanné avec CamScanner

72 ABCD est un parallélogramme de centre G.

1) Soient E le milieu de [AB] et F le milieu de [BC].

Montrer que : $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$

2) On considère les points H, K et I définis par :

- $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{CE}$.
- K est le milieu de [GH].
- I est le milieu de [AD].

a) Montrer que A est le milieu de [HE].

b) Quelle est la nature du quadrilatère AGIH ?

c) Montrer que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

3) a) Montrer que $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que:

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CE}$.

4) Soit L le point tel que : $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Soit N le point d'intersection de (DL) et (AC).

Montrer que : $3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

73 Soit ABC un triangle. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Les points M, N, P sont définis par :

$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{4}\vec{v}$

2) a) Déterminer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Montrer que : (BN) // (CP).

3) Soient I le milieu de [BN] et K le milieu de [CP].

a) Déterminer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Montrer que A, I et K sont alignés.

4) Soit E le point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que E appartient à la droite (IK).

74 ABCD est un trapèze tel que $7\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{DC}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) On considère le point E défini par : $5\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{DE}$

a) Calculer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

En déduire que les segments [AE] et [BD] ont le même milieu.

3) Soit x un nombre réel.

On considère le point M défini par : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer x pour que M soit le symétrique de C par rapport à D.

b) Dans le cas général, déterminer $\overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et x.

Quel est l'ensemble des points M lorsque x décrit IR ?

75 Soit ABC un triangle.

On considère le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.

Soit M le point d'intersection de (AE) et (BC).

On pose : $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=\beta\overrightarrow{MB}$.

1) Montrer que $(\alpha-7)\overrightarrow{AM}=(3-4\beta)\overrightarrow{MB}$.

2) Déterminer la position du point M sur le segment [AE].

76 Soient ABC un triangle, I, J et K les points définis par :

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JA}$; $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC}$

1) Construire les points I, J et K.

2) Soit G le point tel que : $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GC}$.

a) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

b) Montrer que les droits (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en G.

77 Soient ABC un triangle, I, J et K les points tels que :

$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$; $4\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CK}+2\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

En suivant les mêmes étapes de l'exercice (76), montrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

78 Soit ABC un triangle.

On considère les points I, J et K définis par :

$4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$; $2\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC}$.

1) Montrer que : $2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

2) Montrer que : $2\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JK}=\vec{0}$.

Que peut-on en déduire ?

79 ABC est un triangle. On considère les points E et F tels que :

$\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

K est le point d'intersection de (AF) et (CE).

L est le point d'intersection de (BK) et (AC).

Déterminer la position de L sur la droite (AC).

Scanné avec CamScanner

7 EXERCICES ET PROBLÈMES

Problèmes

80 **Droite d'Euler**

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

1) On considère le point P tel que : $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

a) Quelle est la nature du quadrilatère OAPB ?

b) Quelles est la nature du quadrilatère OPHC ?

c) En déduire que (CH) est une hauteur du triangle ABC.

2) Montrer, de la même façon, que (BH) est une hauteur du triangle ABC.

Que représente le point H ?

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que les points O, H et G sont alignés et déterminer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$.

Si ABC n'est pas équilatéral, alors la droite (OG) est la droite d'Euler du triangle ABC

81 Soit ABC un triangle.

M est un point de (AB).

N est un point de (AC).

1) On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre réel non nul k tel que :

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}.$$

Montrer que : (MN) // (BC).

2) On suppose, dans cette question que :

(MN) est parallèle à (BC)

On pose : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BC}$

Montrer que : $x = y = z$

Il s'agit, dans cet exercice, de la formulation vectorielle du théorème de Thalès

82 Soit ABCD un parallélogramme.

On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

- La droite passant par M et parallèle à (AB), coupe (AD) en I et coupe (BC) en J.
- La droite passant par M et parallèle à (BC), coupe (AB) en K et coupe (CD) en L.

1) Exprimer $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{MC}$.

2) Déterminer le nombre réel k tel que :

$$\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MJ}$$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MK}=k\overrightarrow{ML}$

(où k est le nombre trouvé en 2))

4) Montrer que : (LJ) // (IK)

83 Soit ABC un triangle.

On considère un point M de (BC), un point N de (CA) et un point P de (AB) tels que les droites (AM), (BN) et (CP) soient parallèles.

On pose $\begin{cases}\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{MC}\\ \overrightarrow{NC}=y\overrightarrow{NA}\\ \overrightarrow{PA}=z\overrightarrow{PB}\end{cases}$

1) Exprimer y et z en fonction de x.

2) En déduire que $xyz = -1$

Ce résultat porte le nom de théorème de Ménélaüs

Scanné avec CamScanner

Projection

Activités préparatoires	142
Définitions et règles	145
Points essentiels	150
Exercices résolus	152
Exercices et problèmes	153

8

Capacités attendues

* Traduction vectorielle du théorème de Thalès.

Contenu

- Activités préparatoires
  - Projeté d'un point sur une droite
  - Théorème de Thalès et réciproque
  - Coefficient de colinéarité
  - Conservation du coefficient de colinéarité
  - Projection de la somme de deux vecteurs
  - Théorème de Ménélaüs
- Définitions et règles
  - Projection sur une droite
  - Projection orthogonale
  - Théorème de Thalès
  - Réciproque du théorème de Thalès
  - Théorème de Thalès par la projection
  - Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs
- Points essentiels
- Exercices résolus
- Exercices et problèmes

Scanné avec CamScanner