

REVISION GENERALE DU BAC 2020

MATHEMATIQUES SERIE A, B, C, D & E

$$\int_0^1 \frac{1}{n!} (x^n e^x)$$



$$y'' + 2y' + y = x + 3$$

TOME 1

© NDONG MBA Alphonse

ANNÉE ACADEMIQUE 2019 - 2020

AVANT PROPOS

Ce document est conçu pour aider les élèves de terminale des séries A, B, C, D et E à se préparer au Baccalauréat.

Par une sélection de sujets particuliers, j'ai voulu atteindre un double objectif : d'une part aider les professeurs qui continuent, envers et contre tous, à être exigeants, dans l'intérêt même des élèves ; d'autre part, offrir aux élèves curieux, comme à ceux qui sont sensibles au plaisir des Maths - et il en existe beaucoup - le bonheur de s'entraîner à des sujets de session de remplacement. Sans pour autant se substituer aux professeurs dans leurs travaux, ce livre se veut le catalyseur qui permettra le bon déroulement de l'enseignement, de la recherche et qui offrent à ses usagers de plus grande chance de réussite au bac.

Le philosophe **Alain Badou** évoque parfois que " la pensée est asséchée" devant la complexité des mathématiques mais " quand on arrive à surmonter cet état, il y'a réellement une joie". **Francis Bacon (1561 – 1626)** ajoute « ***si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer*** ».

C'est le souci de résoudre cet épineux problème qui gangrène la génération actuelle, assoiffée du savoir et passionnée des mathématiques qui nous a conduit à écrire ce document combien fois important car contenant des potentialités créatrices des hommes que sont les mathématiques. Si l'on en croit **René Descartes** dans le discours de la méthode : « ***les mathématiques me plaisent à cause de leur évidence et de leur certitude*** ».

L'auteur

NDONG MBA Alphonse.

SOMMAIRE

✚ **32 EXERCICES SUR L'ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE FONCTION :**
(EXPONENTIELLE + LOGARITHME + SUITE + INTÉGRALE + ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES). **PAGE : 4 – 35.**

✚ **32 EXERCICES SUR : NOMBRES COMPLEXES + GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE + ISOMÉTRIE DU PLAN + SYSTÈME LINÉAIRE. PAGE : 36 – 55.**

✚ **19 EXERCICES SUR : PROBABILITÉS ET STATISTIQUES. PAGE : 56 – 68.**

✚ **29 EXERCICES SUR : APPLICATION DE L'ESPACE + ARITHMÉTIQUE + CONIQUES. PAGE : 69 – 82.**

REVISION BAC 2020	$\int_0^1 x e^x dx$	<u>ETUDE DE FONCTIONS</u> <u>EXPONENTIELLE + LOGARITHME + INTÉGRALE + SUITE + EQUATION</u> <u>DIFFÉRENTIELLE</u>
	Terminale A, B, C, D & E (32 EXERCICES)	

Exercice N°1 : Uniquement pour les séries C & E

A tout entier non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $] -1, +\infty [$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A : Etude de la fonction f_n .

Soit h_n la fonction définie sur $] -1, +\infty [$ par $h_n = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

- Etudier le sens de variation de h_n .
 - Calculer $h_n(0)$ et déterminer le signe de $h_n(x)$ suivant les valeurs de x .
- Pour x appartenant à $] -1, +\infty [$, vérifier que $f_1'(x) = h_1'(x)$.
 - Montrer que pour tout $n > 1$ et pour tout réel $x > -1$, $f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$.
- On suppose que n est impaire. Dresser le tableau de variation de f_n et détermine ses limites en -1 et $+\infty$.
- On suppose que n est paire. Dresser le tableau de variation de f_n et déterminer ses limites en -1 et $+\infty$.
- Etudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
 - Tracer ces deux courbes dans le même repère.

PARTIE B : Etude d'une fonction d'intégrale

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. Etude de la convergence

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{1+x} dx$.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

2. Calcul de u_1

- En remarquant que $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$.
- Calculer u_1 au moyen d'une intégrale par partie.

3. Calcul de u_n

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout réel x de $]0, 1]$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \quad (1).$$

- Justifier que $S_n = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad (2)$.
- En intégrant successivement les égalités (1) et (2), établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

- En utilisant une intégration par partie et le résultat précédent, démontrer que :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right).$$

Exercice 2 : Uniquement pour la série D

PARTIE A : Etude de la fonction auxiliaire g .

Soit g de la variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

- Etudier le sens de variation de g .
- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1 ; 2]$.

- b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.

PARTIE B : Etude de la fonction f

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par:

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement ces résultats.
2. a) Justifier que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et vérifier que $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Tracer la tangente (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
5. a) Calculer en cm^2 , l'aire A du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
b) Démontrer que $A = \frac{-\alpha + 3\alpha - 1}{2} \text{ cm}^2$.

PARTIE C : Suite

1. On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $I = [1,31 ; 1,32]$ par : $h(x) = x - \frac{1}{2}g(x)$. Démontrer que $h(\alpha) = \alpha$.
2. On note h' la fonction dérivée de h .
a) calculer $h'(x)$.
b) Etudier le sens de variation de h' . On pourra calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur I .
c) Prouver que pour tout x de I , on a : $-0,7 \leq h'(x) \leq -0,6$ et $|h'(x)| \leq 0,7$.
3. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$\begin{cases} u_1 = 1,31 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \in I$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{100} \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 : Uniquement pour les séries A & B

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $OI = 4\text{cm}$ et $OJ = 4\text{cm}$.

PARTIE A : Fonction auxiliaire g .

Soit g définie sur $K =]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

- Calculer les limites de g aux bornes de K .
 - Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in K$.
- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- Calculer $g(1)$
 - Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Fonction f .

- Calculer la limite de f lorsque x tend vers. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
- Soit $(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 1$.
 - Montrer que (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$.
 - Déterminer les coordonnées du point A intersection de (Δ) et (C).
 - Etudier la position relative de (Δ) et (C).
- Soit f' la fonction dérivée de f .
 - Calculer $f'(x)$ puis vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
 - En déduire le signe de $f'(x)$ puis donner le sens de variation de f .
 - Dresser le tableau de variation complet de f .

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans l'intervalle $]0, +\infty[$. ($\alpha < \beta$) et justifie que $0,4 < \alpha < 0,5$. Et $2,3 < \beta < 2,4$.

Exercice 4 : Uniquement pour les séries C & E

PARTIE A : Etude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. On note f' , f'' et f''' les dérivées successives et établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'''(x) = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

2. Etudier les variations de f'' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'''(x)| \leq 2$.

PARTIE B : Calcul approché d'une intégrale.

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-2} près.

B.1 Soit u la fonction affine croissante définie par $u(x) = \alpha x + \beta$ et soit g la fonction composée définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (f \circ u)(x)$. On pose :

$$\varphi(x) = \int_{-x}^x g(t) dt - 2xg(0) \text{ avec } x > 0.$$

1. Sans chercher à calculer, établir que si G est une primitive de la fonction g alors :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0).$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi''(x) = g'(x) - g'(-x)$.

3. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |g''(x)| \leq 2\alpha^2$.

- b) Établir que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |\varphi''(x)| \leq 4\alpha^2 x$.

- c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$.

- d) Encadrer $\varphi(1)$ et en déduire que : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{+1} g(t) dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$.

B.2

1. Démontrer que $\int_{-1}^{+1} g(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u) du$.

2. On se place dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2n}$ et $\beta = \frac{2k+1}{2n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ établir que :

$$-\frac{1}{12n^2} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u) du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^2}.$$

3. En déduire que : $\left| \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right| \leq \frac{1}{2n^2}$.

PARTIE C : ETUDE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE INTEGRALE.

Pour tout x , on pose $F'(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la parité de F .

3. Quel est le sens de variation de F ?

4. a) Démontrer que $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Soit (u_n) pour n entier non nul, la suite de terme général, $U_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par $1 + \frac{1}{e}$.

Exercice 5 : Uniquement pour la série D

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x.$$

PARTIE A :

1. Dresser le tableau des variations de u puis construire sa courbe (C) avec soin.

2. Soit α un réel de l'intervalle $]0 ; 1[$. On désigne par D_α le domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. La rotation de D_α autour de l'axe des abscisses, engendre un solide S_α .

a) Démontrer que la fonction U définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $U(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$.

b) Calculer le volume $V(\alpha)$ du solide S_α .

c) Déterminer la limite de $V(\alpha)$, lorsque α tend vers 0 par valeur supérieure.

PARTIE B :

1. On considère la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + \ln x.$$

a) Etudier les variations de g .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β et que

$$0,65 < \beta < 0,66.$$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2. On se propose déterminer, s'il existe, le point de la courbe $(\mathbb{C})$ de la fonction u , le plus proche du point O . Soit M le point de $(\mathbb{C})$ d'abscisse x ($x > 0$) et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a) Calculer la distance OM .

b) Démontrer que si un point A de $(\mathbb{C})$ d'abscisse a est le plus proche de O , alors $f(a)$ est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

c) Démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

d) Démontrer que $f(\beta)$ est le minimum de f sur $]0, +\infty[$. En déduire les coordonnées du point B de $(\mathbb{C})$ qui est le plus proche de O .

e) Donner l'expression de $f(\beta)$ sous forme d'un polynôme en β . En déduire un encadrement de la distance OB .

PARTIE C :

1. a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$ et $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

2. On pose $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Étudier le sens de variation de (V_n) .

b) Calculer la limite de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : Uniquement pour les séries A & B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

PARTIE A : Étude de la fonction auxiliaire g .

Soit g définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ ou g' désigne la fonction dérivée de g .

2. Etudier le sens de variation de g .
3. Calculer les limites de g sur I .
4. Dresser le tableau de variation de g .
5. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2, 3]$.
 b) Donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs à 10^{-1} .
 c) En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B : Etude de la fonction f .

1. a) En remarquant que $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$. Déterminer les limites de f sur $]0, +\infty[$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 b) Calculer $f'(x)$. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 c) En déduire le sens de variation de f .
 d) Dresser le tableau complet de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 7 : Uniquement pour les séries C & E

Pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{e^{x-1}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ et (C_n) sa courbe.

PARTIE A :

Pour $n \geq 2$, on considère la fonction g_n définie par $g_n(x) = (n - x)e^x - n$.

1. Etudier les variations de g_n puis dresser son tableau de variation.
2. a) Calculer $g_n(0)$ puis montrer que $e^{n-1} - n > 0$
 b) Montrer que $g_n(x) = 0$ admet une solution unique non nulle $\alpha_n \in [n-1 ; +\infty[$.
 c) Montrer que $\alpha_n \in [n-1 ; n]$ puis en déduire que $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
3. Déterminer le signe de $g_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Préciser les coordonnées du maximum M_n de (C_n) et en déduire que les points M_n appartiennent à une courbe dont on déterminera l'équation.

PARTIE B :

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis donner une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point d'abscisse 0.
2. Calculer les limites de f_n sur D_f .
3. a) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que : $f_n(x) = \frac{x^{n-1}g_n(x)}{(e^x-1)^2}$.
b) Selon la parité de n , dresser le tableau de variation de f_n .
4. Pour tout ($p \geq 1$), étudier la position relative des courbes (C_{2p+1}) et (C_{2p}).
5. Construire dans le même repère les courbes (C_2) et (C_3).

PARTIE C :

Soit h_p la fonction définie sur $I_p = [p-1 ; p]$ par : $h_p = p - \frac{p}{e^x}$. Ou $p \geq 2$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = h_p(u_n)$ et $u_0 = p-1$.

1. Montrer que les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.
2. Montrer que pour tout réel $x \in I$ on a $h_p(x) \in I$ et $|h'_p(x)| \leq \frac{p}{e^{p-1}}$.
3. On pose : $k_p = \frac{p}{e^{p-1}}$ pour tout $p \geq 2$.
a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
b) Démontrer que $|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p |u_n - \alpha_p|$ puis que $|u_n - \alpha_p| \leq k_p^n$.
En déduire la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.
c) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_2 .

PARTIE D :

On définit la suite (v_n) par : $\int_0^1 f_n(x) dx$.

1. a) Justifier l'existence de la suite (v_n).
b) Démontrer que (v_n) est décroissante et minorée par 0. Conclusion ?
2. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $e^x - 1 > x$. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$:
 $f_n(x) \leq x^{n-1}$.
b) Montrer que $v_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$. En déduire la limite de (v_n).

Exercice 8 : Uniquement pour la série D

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2(x^2 - 3x + 2), \text{ si } x \in [0, 2] \\ f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)}, \text{ si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unité 2cm.

PARTIE A :

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = [0 ; 3[\cup]3 ; +\infty [$.
2. a) Etudier la continuité de f en $x = 2$.
b) Etudier la dérivabilité de f en $x = 2$.
c) Préciser les demis-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
3. a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et déterminer la fonction dérivée f' de f .
b) Etudier le sens de variation de f .
4. a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
b) Dresser le tableau de variation de f .
5. a) Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).
b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et $\alpha \in]\frac{17}{5} ; \frac{7}{2} [$.
c) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE B :

On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)}$.

1. a) Justifier que F est définie et dérivable sur $[4 ; +\infty [$.
b) Quel est le sens de variation F sur $[4 ; +\infty [$?
c) Par la méthode des rectangles, donner un encadrement de $F(5)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3. (On subdivisera l'intervalle $[4 ; 5]$ en cinq intervalles de même longueur.
d) En déduire un encadrement de l'aire en centimètre carrés de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $y = x - 1$, $x = 4$ et $x = 5$.
2. Soit l'application $g : [\frac{3}{2} ; 2] \rightarrow [2^{-\frac{1}{4}} ; 1]$
$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a) Démontrer que g admet une application réciproque g^{-1} .
b) Déterminer l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable.
3. On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Démontrer que le point A (1 ; 2) appartient à (Γ) et écrire un système qui définit la demi-tangente à la courbe (Γ) au point A.
- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $[2^{-\frac{1}{4}}; 1]$
- Construire (Γ) dans le même repère que (C).

Exercice 9 : Uniquement pour les séries A & B

PARTIE A :

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

- Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x^2 - 1)Q(x)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
 - $\ln(Q(x) + 6) = \ln 2 + \ln 3$ (ou ln désigne le logarithme népérien).
 - $\ln x + \ln(x - 1) = 2\ln 3 - \ln \frac{3}{2}$
 - $e^{8x} - e^{6x} - 7e^{4x} + e^{2x} = -6$

PARTIE B :

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$), d'unité graphique 1 cm.

A1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

- Déterminer le domaine de définition de f.
 - Ecrire sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{1}{x - 1}$ où a et b sont des réels à déterminer.
- Calculer les limites aux bornes du domaine de validité de f.
 - Déduire de (1) et (2) que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
 - Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
 - Montrer que le point I (1 ; -1) est un centre de symétrie de la courbe (C).
 - Tracer la courbe (C) dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

A2. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = f(n + 1) - \frac{1}{n}$

- Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Soit : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 10 : Uniquement pour les séries C & E

PARTIE A :

1. (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0) .
2. (E) est l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
 - a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .
 - b) Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0) .
 - c) Déterminer toutes les solutions de (E) .
 - d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

PARTIE B :

On considère la f définie par : $f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'unité graphique étant égale à 1cm.

1. Étudier les variations de f et tracer (C) avec soin.
2. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E) . Déterminer une primitive de F de f sur $\mathbb{R}$.

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f(t))dt$).

3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^n f(t)dt$.
 - a) Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation géométrique.
 - b) Étudier la convergence de la suite (I_n) , puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

PARTIE C :

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul

par : $u_n = \frac{1}{n^3} [(1 + 2n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2 + 2n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots + (n + 2n)^2 e^{-\frac{n}{n}}] = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k + 2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$$

2. Etablir que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$

$$\text{on a : } \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n \leq \int_0^1 f(t) dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$.

4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a : $I_n - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

5. Etudier la convergence de la suite u_n , puis préciser sa limite.

Exercice 11 : Uniquement pour la série D

I. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) vérifiant les conditions suivantes : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{1}{e}$, e désigne la base de logarithme népérien.

II. 1. On pose $h(x) = (1+x)e^x$.

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}}, \text{ si } x \in]-1, +\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x = -1$.

c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

d) Etudier le sens de variation de f .

2. Tracer la courbe représentative (Γ) de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan (unité 4cm).

3. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $[-1; -\frac{1}{2}]$

a) Démontrer que f_1 est une bijection de $[-1; -\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1 . Calculer $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$.

- b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$.
- c) Tracer la courbe représentative f^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ .
4. a) Montrer que pour tout $x \in [-1 ; \frac{1}{2}]$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$.
- b) En déduire que : $0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$.
- c) Soit S l'aire en cm^2 du domaine de plan limité par les droites d'équations : $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe f^{-1} . Donner un encadrement de S à 10^{-2} près.

III. Soit (U_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1. Déterminer que pour tout réel x de l'intervalle $[n ; n+1]$, on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.
2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et convergente. N.B : On prendra : $e = 2.72$; $\sqrt{e} = 1.65$.

Exercice 12 : Uniquement pour les séries A & B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (L'unité graphique : 2cm).

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Montrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (C) par rapport à (D) .

b) On remarque que $f(x) = -1 + e^{-x}(xe^x + 1)$.

Calculer la limite de f en $-\infty$, sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

2. Etudier les variations de f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer soigneusement la courbe (C) et la droite (D) .

Exercice 13 : Uniquement pour les séries C & E

PARTIE A :

Dans cette partie, on se propose de résoudre le problème suivant : trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, $xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$ (E).

1. Trouver toutes les fonctions polynomes de degré 3 telles que pour tout réel x ,

$$xp'(x) - 3p(x) = 0.$$

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

a) Calculer $h(1)$.

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

c) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x.$$

d) On suppose que f vérifie la propriété (E), montrer que h est définie par

$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt.$$

3. On suppose qu'il existe une fonction f et une seule solution du problème posé et en donner l'expression.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$.

1. a) Etudier les variations de f .

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Construire dans le repère orthogonal (Unité 10cm en abscisses, 5cm en ordonnées), la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $]0 ; 1]$

3. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel.

a) Calculer à l'aide d'une intégrale par partie $\int_{\alpha}^1 \ln t \, dt$.

b) En déduire que $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(t)dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n - 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire les inégalités :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) En utilisant la courbe (C) et en prenant $n = 10$, interpréter graphiquement cet encadrement.

5. On pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Déduire l'encadrement $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Déterminer la limite lorsque α tend vers 0 de $\alpha f(\alpha)$ et prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}.$$

Exercice 14 : Uniquement pour la série D

La partie A est largement indépendante aux deux dernières parties B et C.

PARTIE A : Etude d'une fonction.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Déterminer le réel M pour que la fonction $U(x) = me^{-3x}$ soit solution de (E).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Y = y - U$ est solution de l'équation différentielle (E') : $Y' + 2Y = 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle (E').
4. En déduire tous les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer la solution H de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

PARTIE B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln x$

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[2 ; +\infty[$ et que $3 \leq \alpha \leq 4$.
3. Etablir l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
4. a) Tracer (T) et (C) dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b) Calculer la surface du domaine du plan limité par (C_f) , l'axe $(x'ox)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

PARTIE C : Etude d'une suite

Soit g la fonction définie sur $[3 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + 2\ln x$.

1. Vérifier que : $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que pour tout réel x de $[3 ; +\infty[$, alors $g(x)$ appartient à $[3 ; +\infty[$ et que $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
3. En déduire que, pour tout x de $[3 ; +\infty[$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.
4. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$, $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier naturel n .
a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_n \in [3 ; +\infty[$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$.
c) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$.
d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) . Déterminer le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 15 : Uniquement pour les séries A & B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$. (C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de validité.
2. a) Prouver que la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
b) Préciser la position relative de (C) par rapport à (Δ_1) .
3. a) Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x + 2 + \frac{4}{e^x + 1}$.
b) En déduire que la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 2$. Est une asymptote à (C) en $+\infty$.

- c) Préciser la position relative de (C) par rapport à (Δ_2) .
4. a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduis le sens de variation de f . Dresse le tableau de variation de f .
5. Trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) puis la courbe (C) en précisant sa tangente au point d'abscisse nulle.
6. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Uniquement pour les séries C & E

PARTIE A :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 - x)e^x - k$ où k est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. Déduis-en le tableau de variation de f .
3. a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty ; 1]$ et l'autre notée $\beta_k \in]1 ; +\infty[$.
b) Prouve que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$. On admettra que β_k vérifie la même relation
C'est-à-dire $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.
4. Précise le signe de $f(x)$ suivants les valeurs de x .

PARTIE B :

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - kx$.
a) Etudier le sens de variation de u .
b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $e^x - kx > 0$.
2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$; par : $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$, (C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
a) Calculer de $g_k(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Prouver que $g_k(x) = \frac{kf(x)}{(e^x - kx)^2}$.

- c) Déduisez-en le tableau de variation de g_k . Calculer $g_k(1)$.
3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe d'abscisse respectives α_k et β_k .
- a) En utilisant la question 3.b de la partie A, démontrer que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$.
- b) Trouver une expression analogue pour $g_k(\beta_k)$.
- c) Déduisez-en de la question précédente que, lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont vous donnerez une équation.
4. a) Déterminer la position relative de (C_1) et (C_2) .
- b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.
- c) En prenant comme unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées, construit les courbes (C_1) , (C_2) et (H) sur le même graphique (tu prendras $\alpha_1 = -1,1$ et $\beta_1 = 1,8$ et $\beta_2 = 1,6$)
5. Calculer l'aire délimitée par la courbe (C_1) et les droites d'équations $x = -3$; $x = 0$ et $y = 0$.

Exercice 17 : Uniquement pour la série D

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique : 2 cm.

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi ; 0[$ par : $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

1. a) Démontrer que g est dérivable sur $]-\pi ; 0[$ et que $g'(x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$.
- b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\frac{2\pi}{3} ; 0[$.
- c) Dresser le tableau de variation de g .
2. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-\pi ; 0[$ et que $\beta \in]-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4}[$.
- b) En déduire le signe de g sur $]0 ; \pi[$.

PARTIE B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi ; +\infty[$

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2}, \text{ si } x \in]-\pi ; 0[\\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f .

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
3. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{2}$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$.

c) En déduire les asymptotes de la courbe (C_f) .

4. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

b) Prouver que $f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos x}$ pour tout $x \in]-\pi; 0[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi; +\infty[$.

PARTIE C :

On admet que pour tout $x \in [1,5; 2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}(e)$.

1. Soit h la fonction définie sur $[1,5; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$. Etudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5; 2]$.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5; 2]$ en utilisant (e)

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \text{ et que } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 18 : Uniquement pour les séries D

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la voie à aménager est assimilable à une portion de la courbe (C) de la fonction numérique f définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln|x - 1|}, \mathbb{R} - \{-1, 0\} \\ f(-1) = 0 \text{ et } f(0) = 1 \end{array} \right\}$$

- 1.a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \ln|x + 1| - \frac{1}{x+1} + \frac{e^{-x}}{x+1}$.
- b) Précisez les extremums de g et déduisez-en le signe de g suivant les valeurs de la variable réelle x .
2. a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- b) Démontrer que f est continue en 0 et en -1.
- c.1) Déterminer le développement limité d'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(x + 1)$ et $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
- c.2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat.
- d.1) Etudier la dérivabilité de f en -1.
- d.2) Donner une interprétation géométrique des résultats.
3. a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité E de f .
- b) Démontrer que : $\forall x \in E, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(\ln(|x+1|))^2}$
- c) Etudier le signe de $v(x) = \ln|x + 1|$
- d) Acheter les variations de f .
4. On pose $I = [-1 ; +\infty[$ et l'application : $f_1 : I \rightarrow f(I)$

$$x \mapsto f_1(x) = f(x)$$
 - a) Déterminer $f(I)$.
 - b) Démontrer que f_1 admet une bijection réciproque f_1^{-1} .
 - c) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de E' de f_1^{-1} .
 - d) Etudier la dérivabilité de f_1^{-1} en 0 et précisez la demi-tangente éventuelle à (Γ) , courbe représentative de f_1^{-1} , en son point d'abscisse 0.
 - e) Démontrer que le point $F(1 ; 0)$ appartient à (Γ) et déterminez une équation de la tangente à 0 en F .
5. a) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{x}{\ln} \right) \left[\frac{1 - e^{-x}}{\ln(1 + \frac{1}{x})} \right]$$

- b) Déduisez-en les branches infinies de la courbe (C).
6. Construire les courbes (C) et (Γ) dans le même repère.

Exercice 19 : Uniquement pour les séries C & E

Partie A : Déterminer la fonction dérivée d'une bijection réciproque.

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan x$

1. Etudier la dérivabilité de f .
2. Calculer $f'(x)$ ou f' désigne la fonction dérivée de f ; puis vérifier que $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$
3. 3.1. Calculer les limites de f aux bornes de son D_f .
- 3.2. Dresser le tableau complet de variation de f .
- 3.3. Démontrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.
4. 4.1. On désigne par g la bijection réciproque de f . Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ou g' désigne la fonction dérivée de g .
- 4.2. Dresser le tableau complet de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Déterminer la limite d'une fonction définie par une intégrale et donner du sens à la notation $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

1. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4+x^4}$ Vérifier que pour tout réel x , on

$$a : h(x) = \frac{1}{8} \times \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8} \times x \frac{x-2}{x^2-2x+2}$$

2. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on pose :

$$H_1(x) = \frac{1}{8}g(x+1) \text{ et } H_2(x) = \frac{1}{8}g(x-1)$$

- 2.1 Etudier la dérivabilité des fonctions H_1 et H_2 .

- 2.2 Calculer $H_1'(x)$ et $H_2'(x)$ ou $H_1(x)$ et $H_2(x)$ désignent respectivement les dérivées des fonctions H_1 et H_2 .

3. Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{t^4 + 4}$$

- 3.1 Démontrer que G est impair.

3.2 Etudier la dérivabilité de G , puis calculer $G'(x)$ ou G' désigne la fonction dérivée de G

3.3 Etudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

4. En remarquant que :

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

$$x + 2 = (x + 1) + 1$$

$$x - 2 = (x - 1) - 1$$

Démontrer que l'on a :

$$G(x) = \frac{1}{16} \ln \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \right) + \frac{1}{8} g(x + 1) + \frac{1}{8} g(x - 1)$$

5. On définit $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ par :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^4 + 1} dt$$

Calculer alors : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx$

Partie C : Etude d'une suite numérique

1. On désigne par (U_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \int_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 1}$$

1.1 Donner la valeur exacte de U_1 et U_2 .

1.2 Déterminer le signe de (U_n) .

1.3 Etudier le sens de variation de (U_n) .

2. En exploitant le sens de variation de φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x de l'intervalle $[n ; n+1]$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2 + 1} dx$$

En déduire que : $U_n \leq \int_0^n \frac{1}{x^2 + 1} dx$

3. Démontrer que la suite (U_n) est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \frac{\pi}{2}$$

Exercice 20 : Uniquement pour la série D

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition ; (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3. Etudier les variations de f .
4. Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C) .
5. Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.
6. Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$, le point $M(x; f(x))$ est à une distance constante du point $\Omega(3 ; 1)$.

En déduire la nature de (C) sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

Exercice 21 : Uniquement pour les séries C & E

PARTIE A :

On considère la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x-1}$

1. Donner le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de valeurs absolues.
2. Etudier les limites de f aux bornes du domaine de définition de f .
3. Etudier la dérivabilité de f en -1.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Démontrer que la courbe (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.
6. Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)
7. Prouver que la restriction de f à $[0 ; 1[$ est une bijection de $[0 ; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) .
8. a) Calculer les intégrales : $s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x) dx$ et $s_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx$.

b) En déduire l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\sqrt{2}$ et $x = 0$.

PARTIE B :

A toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de nombres réels strictement supérieure à 1, on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

1. a) Sachant que (v_n) est une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme $v_1 = 0$, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r .
- b) Comment choisir le réel r pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente ? Dans ce cas donner la limite.
- c) Calculer, en fonction de u_n , l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f , les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 2$ et $x = u_n$.

Exercice 22 : Uniquement pour les séries C, D & E

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|$

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1. a) Déterminer le domaine de validité D de f .
b) Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. a) Déterminer la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f .
b) Etudier le sens de variation de f' .
c) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout élément de D. (On remarquera que $f'(0) = 0$).
3. a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Etudier les branches infinies de (C).
4. a) Démontrer que la courbe (C) une seule fois l'axe des abscisses en un point d'abscisse α telle que $1 < \alpha < \frac{2}{3}$
b) Construire la courbe (C).

5. Exprimer uniquement en fonction de α et de $e^{-\alpha}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\alpha$; (α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.
6. On considère l'application g définie de $[0; \frac{1}{2}[$ vers $[1; +\infty[$ par : $g(x) = f(x)$. Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} . On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
7. a) Justifier que (C') admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisses 1.
b) Préciser les branches infinies de (C')
c) Construire (C') .

Exercice 23 : Uniquement pour les séries A & B

Un artisan fabrique des jouets pour les fêtes de fin d'année. Il décide de reprendre la fabrication des jouets dès le mois de janvier en fabriquant 200 jouets et en augmentant tous les mois la production de 40 jouets. On désigne par P_n le nombre de jouets fabriqués le n -ième mois ($n \in \mathbb{N}^*$).

On donne $P_1 = 200$ correspondant à la production du mois de janvier.

1. Calculez P_2 et P_3 respectivement les productions de février et de mars.
2. Déterminez la relation entre P_{n+1} et P_n .
3. Exprimez P_n en fonction de n
4. Combien de jouets l'artisan fabriquera-t-il le mois de décembre ?
5. Une commande de 5000 jouets a été faite auprès de l'artisan jusqu'au mois de décembre. Pourrait-il honorer cette commande ?

Exercice 24 : Uniquement pour les séries A & B

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50

000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

1. a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n .
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$
 - a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.
 - b) Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n
 - c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
 - d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure.

Exercice 25 : Uniquement pour la série C & D

Soit, dans un ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right)z_n$.

On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 8cm).

1. Calculer z_1, z_2, z_3 , et z_4 . Placer les points M_1, M_2, M_3 , et M_4 .
2. a) Calculer le quotient $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$
b) Quelle est la nature du triangle OM_nM_{n+1} ?
3. Pour tout entier naturel n , on pose : $r_n = |z_{n+1} - z_n|$
 - a) Donner une interprétation géométrique de r_n .
 - b) Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - c) Déterminer en fonction de n la longueur de la ligne brisée joignant les points $M_0, M_1, \dots, M_n$.

Exercice 26 : Uniquement pour les séries A & B

M. SY, un commerçant, place en l'an 2000 une somme de 500 000 F à la caisse d'épargne. Chaque année le capital augmente de 8%, on désigne par C_n le capital en l'an $(2000 + n)$.

- Détermine C_0 , C_1 et C_2 .
- Pour tout entier naturel n , exprime C_{n+1} en fonction de C_n .
En déduis la nature de la suite C_n
- Pour tout entier n , exprime C_n en fonction de n .
- En quelle année, le capital doublera-t-il ?

Exercice 27: Uniquement pour les séries C & D

I. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et pour la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$ (1).

- Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- Déterminer v_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II. On définit la suite (w_n) par ses premiers termes w_0 et w_1 avec : $w_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $w_1 \in \mathbb{R}_+^*$, et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2(w_n)^3}$

- Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = \ln(w_n)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien) vérifier la relation 1.
- En déduire la limite de la suite (t_n) , puis de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 28 : Uniquement pour les séries A & B

L'épidémie de Coronavirus Covid-19 continue de se propager dans le monde. Initialement, 200 personnes sont infectées par ce virus. Chaque semaine, 5% récupèrent du virus et 20 personnes sont blessées à nouveau. On suppose que le nombre de personne atteinte par corona à la n ème semaine est U_n avec n un entier naturel. On prend $U_0 = 200$.

- Calculer U_1 et U_2 , puis en déduire que U_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- Montrer que $U_{n+1} = 0,95U_n + 20$.
- Soit $V_n = U_n - 100$.

- a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique du premier terme et de raison à déterminer.
- b) Montrer que $U_n = -200(0,95)^n + 100$.
4. Le cout du test médical pour chaque personne est 300000fcfa soit C_n le cout total payé par toutes les personnes.
Exprimer C_n en fonction de n puis montrer que C_n est une suite croissante.
5. Chaque hôpital possède 25 salles de quarantaine. Trouver le nombre maximal des hôpitaux pour prendre en charge les blessés.

Exercice 29 : Uniquement pour les séries C & D

Question 1 : Expression du terme général d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Question 2 : Majoration et minoration du terme général d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{array} \right\}$$
 Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Question 3 : Etude de la monotonie d'une suite

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2$ est monotone.

Question 4 : Etude de divisibilité

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9 \mid u_n$ où $u_n = 4^n + 15n - 1$.

Exercice 30 : Uniquement pour les séries C, D & E

Une première étude des experts s'est intéressée aux ventes réalisées au cours de chaque année et a pu établir que ces ventes en tonnes sont les termes de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$V_n = \int_0^1 2^x x^{n-1} dx$ indiquant les ventes au cours de la $n^{\text{ième}}$ année où x est un indice de vente.

1. a) Démontrer que (V_n) est une suite décroissante.
 b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geq 0$ et déduisez-en que (V_n) est une suite convergente.
2. a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_{n+1} = \frac{2-V_n \ln 2}{\ln 2}$
 b) Déterminer les ventes en tonnes au cours de la première année c'est-à-dire V_1 et déduisez-en celle de la deuxième année V_2 . (les résultats seront donnés à 10^{-2}).
 c) Déduisez-en de la question 2.a que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. $V_{n-1} = \frac{2-V_n \ln 2}{n-1}$.
3. a) Déduisez-en des résultats précédents que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. $\frac{2}{n+\ln 2} \leq V_n \leq \frac{2}{n-1+\ln 2}$.
 b) Déduisez-en la limite de la suite (V_n) .
 c) Les politiques actuelles de la société lui permettent-elle d'exister à long terme ? Justifier votre réponse.

Exercice 31 : Uniquement pour les séries C & D

La ferme de NDONG est assimilable à un plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4dam.

La portion réservée à la production du « NEKIRA » est limitée par l'axe (OI) , les droites d'équations $x = -4$; $x = 4$ et une frontière modélisée par la courbe représentative (C_g) d'une fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$

La quantité de « NIKARA » en centaine de tonnes, qu'on peut espérer est la limite de la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{array} ; n \in \mathbb{N} \right\}$ et on pose ; $I = [0 ; 1]$ et k l'application définie par :

$K : I \rightarrow K(I)$

$$x \mapsto g(x) - x$$

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x , $g'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(1+2^x)^2}$, puis préciser le sens de variation de g .
 b) Dresser le tableau de variation de g .

- c) Tracer la courbe ($\mathcal{G}_g$) (prendre 1cm pour 1 dans dam).
2. a) Hachurer sur le dessin, la portion de la ferme réservée à la production du « NEKIRA ».
b) Démontrer que, sur le terrain, l'aire de cette portion de la ferme est de 36cm^2 .
3. a) Etudier le sens de variation de k .
b) Démontrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une solution unique α dans I .
4. a) Démontrer que : $\forall x \in I, g(x) \in I$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
b) Déduisez-en que : $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
5. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
b) Déduisez-en par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) Justifier que la suite U converge vers un réel à préciser.
d) Donner en fonction de α , la quantité de « NEKIRA » que peut espérer NDONG.

Exercice 32 : Uniquement pour les séries C & E

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^+), f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); e^{-x}(x + 1) - 1 < 0$, puis en déduire que la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_n = \frac{e^{-x}}{n!} \cdot \int_0^x t^n e^t dt.$$

- a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_1(x) = x - 1 + e^{-x}$.
b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$.
c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \text{ et } F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}.$$

3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\frac{x}{2} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$.

II. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$.

1. a) Calculer l'intégrale u_0 .

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + u_{n+1} = f(n)$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. Pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(k)$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x}$.

b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) : S_n = (-1)^{n-1} \cdot u_n + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente en précisant sa limite.

III. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0) = 1 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}; F(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt.$$

1.a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) ; 1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

b) En déduire que F est continue et dérivable à droite en $x_0 = 0$. Puis donner l'équation de la demi tangente à droite en $x_0 = 0$.

2. a) Montrer que : $(\forall x \in [1 ; +\infty[) ; 0 \leq F(x) \leq \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

3. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}.$$

b) Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et dresser son tableau de variation.

4. Construire la courbe (C_F) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

REVISION BAC 2020	$z' = az + b$	COMPLEXES + GEOMETRIE DE L'ESPACE + ISOMETRIE DU PLAN + SYSTEME LINÉAIRE
	Terminale A, B, C, D & E (32 EXERCICES)	

Exercice 1 : Uniquement pour les séries D

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + i, \quad z_B = 1 + 2i, \quad z_C = 6 + 3i, \quad z_D = -1 + 6i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D .
2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit J le point d'affixe $3 + 5i$.

Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B .

4. On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.
 - (a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q .
 - (b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\vec{IA}, \vec{IP})$ et $(\vec{IC}, \vec{IQ})$.
En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
 - (c) En déduire que J est l'image de M par g . Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice 2 : Uniquement pour les séries A & B

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ -2x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ -2x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 5 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 3 cm. On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 3, \quad b = 1 + \frac{2}{3}i, \quad c = 3i \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{3}i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D .
2. Déterminer l'angle ϑ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D .
3. Donner l'écriture complexe de s . En déduire l'abscisse du centre I de s .
4. Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par s .

Montrer que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}.$$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\begin{cases} M_0 &= A \\ M_{n+1} &= s(M_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel, on note z_n l'abscisse du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

- (a) Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- (b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $IM_k \leq 10^{-3}$.

Exercice 4 : Uniquement pour la série D

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

I. Soit $z \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons $z = x + iy$, x et y sont des réels.

1. Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est la partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ?

2. Quel est le module de z ?

3. Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$.

Déterminer le cosinus et le sinus de α en fonction de z .

4. Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ . Exprimer z' en fonction de z et θ .

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnu z qui suit :

$$(E): \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0.$$

1. Résoudre (E).

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$. Calculer OA et OB puis déduisez-en la nature du triangles OAB.

3. On désigne par C le point d'affixes $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe de point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; 1), (D ; -1) et (B ; -1).

a) Prouver que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.

b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique 1cm)

5. Déterminer une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$. Déduisez-en la nature du triangle GAC.

Exercice 5 : Uniquement pour les séries A & B

I. Une usine fabrique trois types de produit différents A, B et C. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures pour A, 3 heures pour B et un tiers d'heure pour C. L'usine fabrique 100 unités de ce produit pendant 100 heures de travail. Le nombre d'unité du produit B étant le tiers du nombre d'unité de A. Parmi ces 100 unités de produit, combien d'unité de chaque types de produit l'usine fabrique-t-elle ?

II. Une fille a été interrogée sur son âge. Elle répond : j'ai la moitié de l'âge de ma mère, ma mère à 5 ans de moins que mon père et la somme des trois âges (père, mère et fille) est égal à 100 ans. Trouver l'âge du père, de la mère et de la fille.

Exercice 6 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \frac{1}{3}(z + \frac{1}{z})$.

1. On désigne par K le point d'affixe $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Déterminer les coordonnées de K.
2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \frac{2}{3}\cos\alpha$.
3. a) En déduire la solution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^4 - 2(\cos\alpha)z^2 + 1 = 0$ (on donnera les solutions sous formes exponentielle).
 b) Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjugués.
 c) Décomposer le polynôme à variable réelle x définie par : $p(x) = x^4 - 2(\cos\alpha)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes de second degré à coefficient réels.
4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe telle que : $2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1 + i)(z' - \frac{1}{3})$.
 a) Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
 b) Démontrer que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 7 : Uniquement pour la série C & D

soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les solutions z_k de (E).

2. On pose $n = 5$.

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points images de solutions z_k de (E).

3. On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

a) Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; exprime α en fonction de j.

b) Prouver que α est une solution de l'équation : $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$.

4. Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P

d'affixe z' tels que : $z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a) Ecrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

b) Donner la nature de T et précise ses éléments caractéristiques.

Exercice 8 : Uniquement pour les séries C & D

Au terme de son travail, le géomètre a expliqué que les bornes du domaine de Sodji occupent des positions régulières dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Il a en effet signifié que les affixes respectives u , v , w des solutions A , B , C de trois bornes du domaine sont des solutions de l'équation : (E) : $z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4(1 - 4i)z + 16 - 8i = 0$. Et l'emplacement D de la quatrième borne est l'image de C par la similitude plane directe S de centre A qui transforme B en C .

Soit $p(z)$ le polynôme complexe défini par :

$$p(z) = z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4(1 - 4i)z + 16 - 8i = 0.$$

1. a) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que vous déterminerez.
 b) Déterminer le polynôme $Q(z)$ tel que : $p(z) = (z - z_0)Q(z)$.
 c) Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. On donne $u = 2$, $v = mi$ et $w = 2 + 4i$ où m est un nombre entier naturel.
 - a) Détermine la valeur m pour que l'écriture complexe de la similitude S soit :

$$z' = (1 - i)z + 2i.$$
 - b) Donne la nature de S puis précise ses éléments caractéristiques.
 - c) Détermine l'affixe du point D .
3. On suppose que : $m = 2$.
 - a) Détermine la nature du triangle ABC .
 - b) Sachant que l'unité de longueur est l'hectomètre, calculer en hectare l'aire de la portion ABC .
 - c) Déduisez-en l'aire du domaine de Sodji.

Exercice 9 : Uniquement pour les séries C & D

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm. On donne les points A , B et C d'affixe respectives i , $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + i$; on appelle I , J et K les milieux respectives des segments $[OB]$, $[AC]$, $[BC]$ et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B .

1. Faire une figure.
2. a) Déterminer le rapport et l'angle de S .
 b) Donner l'écriture complexe de S .

- c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de S .
- d) Quelle est l'image par S du rectangle $AOBC$?
3. On considère la transformation $S^2 = S \circ S$.
- a) Quelles sont les images des points O ; B et A par S^2 .
- b) Montrer que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- c) En déduire que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes.
4. On définit la suite des points A_n de la façon suivante $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.
- a) Placer les points A_1 , A_2 , et A_3 sur la figure.
- b) On note U_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$. Exprimer U_n en fonction de U_{n+1} .
- c) Calculer U_0 et en déduire U_n en fonction de n .
- d) Calculer $S_n = U_0 + \dots + U_n$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 10 : Uniquement pour les séries C & E

I. 1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble D des points M , du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que : $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$. Le plan sera rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

2. Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par : $f: z \rightarrow z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.
3. Quel est l'ensemble D' image par φ de l'ensemble D déterminé au I.1) ? Représenter graphiquement D' .

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la transformation ponctuelle F , qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = m^3 z + m(m + 1)$.

1. Donner la nature de la transformation F .
2. On suppose que $m = 1 + i$. Donner dans ce cas les éléments géométriques de F .
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

Exercice 11 : Uniquement pour les séries C & E

I. On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $p(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$.

1. Montrer que P admet pour racine un imaginaire pur.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

II. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = i$, $b = 2 - i$ et $c = 3 + 4i$. I est le milieu de [AB] et J, le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, 1); (B, m); (C, 2m)\}$.

Pour tout point M du plan, on note $\vec{V}_m = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$.

1. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et donner une interprétation de son argument.
2. Montrer que G_1 est le milieu du segment [CI].
3. Montrer que les points G_1 , J et C sont alignés.
4. Montrer que pour tout point M, $\vec{V}_m = -(\vec{AB} + 2\vec{AC})$.
5. Montrer que pour tout réel m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\vec{AG}_m$ est colinéaire à $\vec{AG}_{-1}$.
6. Montrer que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est rectangle.

Exercice 12 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthhonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). Soit f une application définie du plan (P) dans lui-même qui au point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$$

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f.
b) f est-il un déplacement ou un antidéplacement ?
c) Quel est l'ensemble des points invariants par f ?
d) En déduire la nature exacte de f.
2. Déterminer l'expression analytique de $f \circ f$. Quelle est alors la nature exacte de $f \circ f$?

3. On admet que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{w}$ et t la translation de vecteur $\vec{w}$.
- Démontrer que $f \circ f = t \circ t$.
 - Déterminer les coordonnées de K le milieu de $[OO']$ où O' est l'image de O par f .
 - En déduire les éléments caractéristiques de f (on donnera les coordonnées de $\vec{w}$ et une équation cartésienne de (Δ)).
4. On considère maintenant l'ensemble (E) définie par son équation paramétrique :
- $$\begin{cases} x(\theta) = 4\cos^2\theta - 2 \\ y(\theta) = 3\sin\theta \end{cases} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ (indication : } 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta \text{)}$$
- Déterminer une équation cartésienne de (E) , puis préciser sa nature et ses éléments caractéristique (on indiquera uniquement les sommets).
 - Ecrire une équation cartésienne de l'image de (E) par f .
 - Reconnaître l'ensemble obtenu et construire dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 13 : Uniquement pour la série C & E

On considère un triangle isocèle ABC direct de sommet principal A . On pose

$(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv 2\alpha [2\pi]$, où α est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On désigne par O le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à O . Soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) .

- Soit f la similitude directe qui envoie O sur I et D sur J . Déterminer à l'aide de α , l'angle et le rapport de f . Puis montrer que $f(A) = A$.
- On désigne par E le symétrique de O par rapport à I . Montrer que $f(B) = O$ et $f(C) = E$. Puis déterminer $\frac{OB}{BC}$.
- Soit g la similitude indirecte qui envoie B sur O et C sur E .
 - Déterminer le rapport de g et l'image de O par g .
 - Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$.
- Soit Ω le centre de g .
 - Montrer que $g \circ g(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ) .
 - Montrer que Ω appartient à la droite (BI) .
 - Construire Ω .

Exercice 14 : Uniquement pour les séries C & E

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de $[OA]$.

1. a) Faire une figure.

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de $[AB]$.

2. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = O$ et $f(H) = H'$.

a) Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.

b) Montrer que H' est le milieu du segment $[Of(A)]$. En déduire que A est le centre de f.

3. Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètre respectifs $[AB]$ et $[AO]$ se coupent en D.

a) Montrer que les points B, O et D sont alignés.

b) Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que $f(C) = D$.

c) Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4. Soit $g = S_{(DH)} \circ f$ où $S_{(DH)}$ est le symétrique axial d'axe (DH)

a) Déterminer $g(A)$ et $g(C)$.

b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c) Soit Ω le centre de g.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega D}$. Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

Exercice 15 : Uniquement pour la série D

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i, z_B = 1 + 2i, z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.

1. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en B et C en D. Préciser ses éléments caractéristiques.

3. On désigne par J le point d'affixe $3 + 5i$. Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On désigne par I le point d'affixe $1 + i$. M et N les milieux respectives des segments [AC] et [BD]. Déterminer la nature du quadrilatère IMN.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrés.

a) Calculer z_P et z_Q , les affixes respectives des points P et Q.

b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\widehat{IA, IP})$ et $(\widehat{IC, IQ})$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c) En déduire que J est l'image de M par g et que J est le milieu de [PQ].

Exercice 16 : Uniquement pour les séries C, D & E

Dans le plan S complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm, on donne le point A d'affixe -2.

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = \frac{iz+3}{z+2}$ avec $z \neq -2$ et $z \in \mathbb{C}$.

On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer X et Y en fonction de x et de y.

2. Déterminer et construire dans le repère les deux ensembles (C) et (Γ) définis par :

(C) : $\{M(X; Y) / Z \text{ soit réel}\}$

(Γ) : $\{M(X; Y) / Z \text{ soit un imaginaire pur}\}$

3. Soient A, B, et D les points d'affixes respectives i, $2 + 2i$ et $1 - i$.

On note par S la similitude plane directe qui transforme B en C et C en D.

a) Donner l'expression complexe de S.

b) Préciser ses éléments géométrique.

c) Construire l'image du cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ par S dans le repère précédent.

Exercice 17 : Uniquement pour la série C, D & E

Le plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 2cm.

On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectivement sont : $2i$, -1 et i .

Soit f l'application $(P) - \{A\}$ dans (P) qui, à tout point M d'affixe $z(z \neq 2i)$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Placer les points A , B et C . On complètera la figure dans la suite.
2. Déterminer l'affixe du point C' , l'image de C par f . Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?
3. Démontrer que le point C admet unique antécédent C'' par f . Quelle est la nature du triangle BCC'' .
4. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$.
5. Déterminer les ensembles suivants :
 - a) L'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif.
 - b) L'ensemble (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul.
 - c) L'ensemble (D) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre de module 1.
6. Construire $ACBC'$; BCC'' , (E) , (F) et (D) dans la figure.

Exercice 18 : Uniquement pour la série C & E

1. Soit A le point du plan d'affixe $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Déterminer l'affixe du point B pour que le triangle OAB soit équilatéral de sens direct.
2. a) Construire le point G isobarycentre des points O , A et B . Calculer GB .
 b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$OM^2 + MA^2 + MB^2 = 7,5.$$
3. Soit r la rotation de centre G qui transforme B en O et h l'application qui à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. On pose ensuite $S = h \circ r$.
 - a) Déterminer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
 - b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .
 - c) Déterminer et construire (E') , l'image de (E) par S .
 - d) Construire les points F tel que $(\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FA}) = -\frac{\pi}{3}$ et $FA = \frac{1}{2}FO$.

e) Démontrer que les points O, G, A et F sont cocyclique.

Exercice 19 : Uniquement pour les séries D

PARTIE A :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3 ; 2 ; 6)$, $B(1 ; 2 ; 4)$ et $C(4 ; -2 ; 5)$.

1. a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
 b) Déduisez-en que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.
2. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Prouve que $OH = \frac{4}{3}$.

PARTIE B :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points : $A(3 ; -5 ; 1)$, $B(0 ; 2 ; 4)$ et de vecteur $\vec{u}(1 ; 2 ; -1)$.

1. Soit (Δ) la droite de repère $(A ; \vec{u})$.
 a) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) .
 b) Déterminer les coordonnées du point C de (Δ) d'ordonnée nulle et les coordonnées du point N de (Δ) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.
2. Soit $(\mathcal{C})$ le plan d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 10 = 0$.
 a) Calculer la distance d de A à $(\mathcal{C})$.
 b) Démontrer que la droite (AB) et le plan $(\mathcal{C})$ sont sécants en un point M dont tu déterminera les coordonnées.
3. Soit (Γ) le plan passant par les points A et B et perpendiculaire à $(\mathcal{C})$. On désigne par (D) la droite d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de (Γ) .
 a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) .
 b) Donne une représentation paramétrique de (D).
4. Soit les points $E(2 ; -1 ; -4)$, $F(1 ; 0 ; -3)$ et $G(1 ; 2 ; 1)$.
 a) Démontrer que les points E, F et G déterminent un unique plan dont un vecteur normal est $\vec{u}$.
 b) Justifie que AEFG est un tétraèdre puis calculer son volume.

Exercice 20 : Uniquement pour les séries C, D & E

Dans l'espace (E) orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un cube ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{OA} = -3\vec{j} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1. a) Démontrer que le quadrilatère ABGH est un parallélogramme.

b) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A, -1), (B, 1), (C, 1).

2. On désigne par K, le centre de gravité du triangle ABH ;

$$(\Delta) : \{M \in E \mid (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) = 0\}.$$

$$(\Gamma) : \{M \in E \mid (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MH}) = 0\}.$$

a) Démontrer que (Γ) est une droite dont on précisera un repère.

b) Démontrer que (Δ) est un plan dont on précisera un vecteur normal.

3. a) Détermine dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées des points A, B, H, G et K.

b) Déterminer une équation cartésienne de (Δ) et une représentation paramétrique de (Γ) .

4. On considère les droites (D_1) et (D_2) définies par :

$$(D_1) \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z. \text{ Puis le plan } (Q_1) \text{ d'équation}$$

cartésienne $(Q_1) : x + y + z + 1 = 0$.

a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.

b) Donner une équation cartésienne du plan (Q_2) contenant (D_1) et (D_2) .

c) Démontrer que $(Q_1) \perp (Q_2)$.

5. a) Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q_3) contenant les points O et A orthogonal à (Q_1) .

b) Déterminer un repère de $(Q_1) \cap (Q_2)$.

6. On désigne par L le projeté orthogonal de O sur (Q_1) .

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (OL).

b) Déterminer les coordonnées du point L.

7. a) Démontrer que OABG est un tétraèdre.

b) Déterminer le volume de OABG.

Exercice 21 : Uniquement pour les séries C, D & E

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A (3 ; 0 ; 6) et I (0 ; 0 ; 6) et (D) la droite passant par A et par I. On appelle (P) le plan d'équation : $2y + z - 6 = 0$ et (Q) est le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Les plans (P) et (Q) coupent l'axe $(O ; \vec{j})$ respectivement en B et C. Déterminer les coordonnées des points B et C.
4. Trouver une équation du plan (T) passant par le point B et de vecteur normal $\vec{AC}$.
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 22 : Uniquement pour les séries C, & E

Soit ABCD un carré de sens direct tel que : $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et (Δ) la médiatrice du segment [BC]. Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale S_{Δ} , telle que : $\begin{cases} f(B) = C \\ f(D) = A \end{cases}$

1. Faites une figure soignée.
2. Soit O le milieu du segment [BD].
 - a) Montrez que O est l'unique point du plan invariant par f.
 - b) Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. Soit g et h des applications du plan définies respectivement par : $g = f \circ S_{\Delta}$ et $h = S_{\Delta} \circ f$.
 - a) Déterminer g(A) et g(C) et déduisez que $g = S_{(AC)}$.
 - b) Montrer que $h = S_{(BD)}$.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ h$.

Exercice 23 : Uniquement pour les séries C, D & E

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. On désigne par $(x ; y)$ un point du plan, $M_1(x_1 ; y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ et $M'(x' ; y')$ l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O ; \vec{i})$.
 - a. Exprimez x' et y' en fonction de x et y .
 - b. Caractérisez l'application qui transforme M en M' .
 - c. On désigne par r l'application qui au point $M(x ; y)$ associe le point $M''(x'' ; y'')$ définies par $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montrez que r est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ .
2. Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[M M'']$.
3. Au point $(x ; y)$ on associe le point $M_2(x_2 ; y_2)$ définies par $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$
 - a. Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
 - b. Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en 1°/- c).

Exercice 24 : Uniquement pour les séries C, D & E

- I. a. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, donnez l'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe la droite d'équation $y = -x + 1$.
 - b. On considère la parabole (H) d'équation $y = x^2 - 1$. Donnez l'équation de l'image de (H) par la symétrie S
 - c. Construire (H) et son image dans le même repère.
- II. Soient A, B et C 3 points non alignés d'un plan P et α un nombre réel. A tout point M de P on associe par l'application f_α le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = (2 - \alpha)\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} + (1 + 2\alpha)\overrightarrow{MC}$$
 Préciser, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de l'application f_α .
- III. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 1. Calculez z^2 et z^4 .
 2. Calculez le module et un argument de z^4 . En déduire le module et un argument de z

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $(x; y)$ un point du plan d'affixe le complexe $a = x + iy$. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que le module de az soit égal à 8 où z est le complexe défini précédemment.

IV. Trois villages désignés par les lettres A , B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B , à 3 km de C et le village B est à 5 km de C . Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

Exercice 25 : Uniquement pour les séries C & E

Soit S l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$

1. Donner l'expression complexe de S . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S .
2. O étant l'origine du repère, on considère la rotation R de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose : désigne par $f = R \circ S$.

- a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques f après avoir donné son écriture complexe.
 - b) Quelle est l'image par f du point d'affixe -3 ?
3. Soit g l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{z} - i).$$

- a) Donner l'expression complexe de $h = g \circ S$.
- b) Quelle est la nature de h ?

Montrer que h est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Exercice 26 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan P est orienté. ABC est un triangle rectangle en C tel que $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$,

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose : $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$. I désigne le

milieu du segment $[CD]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.
b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. Soit $g = f \circ r$.
a) Montrer que g est une translation.
b) Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle IBF.
c) Montrer que les points A, C et F sont alignés.
3. Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(C) = D$ et $h(I) = G$.
b) Montrer que h est une symétrie glissée dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 27 : Uniquement pour les séries C & E

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par E et F les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[BC]$ et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct.

1. Vérifier que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{12} [2\pi]$, et montrer que $r_{(A, -\frac{\pi}{6})} = S_{(AI)} \circ S_{(AD)}$.
2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = B$ et $f(E) = F$.
b) Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
c) Montrer que $f(D) = C$.
3. Soit g un antidéplacement tel que $g(D) = C$ et $g(C) = B$.
a) Montrer que g est une symétrie glissée.
b) On désigne par (Δ) et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g . Montrer que $g \circ g = t_{2\vec{u}}$ et déterminer (Δ) et $\vec{u}$.

Exercice 28 : Uniquement pour les séries C & E

ABC est un triangle rectangle en C tel que $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $r(C) = D$ et $r^{-1}(B) = E$. et I désigne le milieu du segment $[CD]$.

1. a) Démontrer qu'il existe un unique déplacement tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

- b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. On admet que f est la rotation de centre I d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose : $g = f \circ r$.
- a) Justifier que g est une translation puis donner le vecteur de translation.
- b) F est l'image de B par l'application g . Démontrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle IBF.
- c) Démontrer que les points A, C et F sont alignés.
3. Soit $t_{(\overline{AD})}(I) = G$ où $t_{(\overline{AD})}$ désigne la translation de vecteur $\overline{AD}$.
- a) Justifier qu'il existe un antidéplacement h tel que $h(C) = D$ et $h(I) = G$.
- b) Démontrer que h est une symétrie glissée dont on précisera le vecteur et l'axe.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la similitude directe S de centre Ω d'affixe i , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
- a) Déterminer l'écriture complexe de S .
- b) Déterminer l'affixe du point O' , antécédent du point O par S .
- c) En déduire l'ensemble (E) des points d'affixe z du plan vérifiant :

$$\left| \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{4} \right) z + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \right| = 1$$

Exercice 29 : Uniquement pour les séries C & E

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E): \frac{1}{m} z^2 + (1 - 3i)e - 4m = 0. \text{ Où } m \in \mathbb{C}^*.$$

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $a = 8 - 6i$.
- b) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) tels que : $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$.
- c) On pose : $\theta \equiv \arg(m)[2\pi]$. Calculer $\arg(z_1)$ en fonction de θ .
2. Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_1 , M_2 , M et D d'affixes respectives : z_1, z_2, m et $z_D = 1 + 3i$.
- a) Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle en O.
- b) Déterminer l'ensemble des points M (m) tels que O, D et M soient alignés.
- c) Déterminer l'ensemble des points M (m) tels que ODM soit un triangle rectangle en O.

3. Le point N_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Et le point N_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- a) Montrer que les points M_1 , N_1 , N_2 et M_2 sont cocycliques.
- b) Déterminer en fonction de m le rayon et l'abscisse du centre du cercle circonscrit au quadrilatère formé par ces quatre points.

Exercice 30 : Uniquement pour les séries C & E

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB = a$, $a > 0$. On désigne par I le milieu de $[BC]$.

1. a) En utilisant le théorème de la médiane, montrer que : $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- b) Montrer que pour tout point M du plan, $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4\vec{MI} \cdot \vec{IA} + a^2$.
- c) En déduire l'ensemble D des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.
2. Soit G le barycentre des points A , B et C affectés des coefficients respectifs -1 , 1 et 1 . (C) est l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$.
- a) Déterminer et placer le point G .
- b) Montrer que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$ équivaut à $MG^2 - a^2 = 0$.
- c) En déduire la nature de (C) , puis construire (C) .

Exercice 31 : Uniquement pour les séries C & E

On considère un triangle équilatéral BAC de côté a , $a > 0$.

1. Construire le barycentre D du système $\{(A, 2); (B, -2); (C, -1)\}$.
2. a) Déterminer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ en fonction de a .
- b) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est triangle rectangle en B .
3. Calculer les distances CD , BD et AD en fonction de a .
4. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

- a) Vérifier que C appartient à (F).
 - b) Exprimer $f(M) = 0$ en fonction de la distance MD et de a.
 - c) Déterminer et construire (F).
5. Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$.
- a) Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.
 - b) Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G). Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

Exercice 32 : Uniquement pour les séries C & E

Soit ABC un triangle, on pose : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC], [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Faire une figure.
2. a) En utilisant le théorème de la médiane, montrer que : $GB^2 + GC^2 = \frac{1}{2}GA^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
 b) Après avoir écrit deux autres relations analogues, montrer que :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$
3. A tout point M du plan, on associe le réel $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
 a) Montre que pour tout point M du plan, $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.
 b) Pour tout réel k, soit L_k l'ensemble des points M du plan tels que, $f(M) = k$.
 Déterminer suivant les valeurs du réel k la nature de l'ensemble.

REVISION BAC 2020	$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$	<u>STATISTIQUES ET PROBABILITES</u>
	Terminale A, B, C, D & E (19 EXERCICES)	

**Exercice 1 : Uniquement pour les séries
C & E**

Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes suivants : $z_0 = -2i$; $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$.

On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. a) Montrer que $c = \frac{1}{18}$.

b) Déterminer p_k pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexes inscrits sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) Déterminer les valeurs prises par X .

b) Donner la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 2 : Uniquement pour la série D

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient 3 boules blanches et 5 boules noires.

U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.

On tire une boule de l'urne U_1 puis une de l'urne U_2 .

1. Quelles est la probabilité pour que les deux boules tirées soient noires ?
2. Soit l'évènement A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ». Quelle est la probabilité pour que l'évènement A soit réalisé ?
3. Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes quelle est la probabilité pour que la boule noire provienne de l'urne U_1 .

N.B : tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 3 : Uniquement pour les séries
A & B**

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. Un joueur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir :
 - a) 2 boules de couleurs différentes.
 - b) 2 boules rouges.
 - c) 2 boules blanches.
- 2) Le jeu obéit à la règle suivante :
 - Si les deux boules sont rouges : il perd 30 F.
 - Si les deux boules sont blanches : il perd 100 F.
 - Si les deux boules sont de couleurs différentes : il gagne 40 F.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X.
- b) Calculer l'espérance mathématique de X.

**Exercice 4 : Uniquement pour les séries
C & E**

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3, et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4.

On lance simultanément les deux dés, on désigne par « a » le numéro apparu sur la face supérieure du dé cubique et « b » celui sur la face cachée du dé tétraédrique.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur $a^2 - 4b$.

1.a) Déterminer la loi de probabilité X.

b) Déduisez-en la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

2. On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E) admet une solution générale, une fonction non sinusoïdale.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de l'évènement $\{Y \geq 1\}$ soit supérieure ou égale à 0,999.

3. On pose $(a ; b) = (3 ; 2)$ et on considère l'équation différentielle

$$(E') : y'' + 3y' + 2y = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$$

a) Vérifier que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par : $e^{-x}\ln(x)$ est solution de (E').

b) Résoudre l'équation : $(E_{(3 ; 2)}) : y'' + 3y' + 2y = 0$.

c) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, prouve que g est solution (E') si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_{(3 ; 2)})$.

d) Déduisez-en toutes les solutions de (E').

Exercice 5 : Uniquement pour la série D

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron. On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements suivants :

A : « le bonbon est à la menthe » ;

B : « le bonbon est à l'orange » ;

C : « le bonbon est au citron ».

1. Détermine les probabilités $p(A)$ puis $p(B)$ et $p(C)$.

2. Représente l'expérience par un arbre pondéré (on fait figurer sur chaque branche la probabilité associée).

Exercice 6 : Uniquement pour les séries

A & B

I. Dans une classe de 35 élèves ou tous pratiquent le judo ou le taekwondo, vingt élèves pratiquent le judo et vingt-cinq le taekwondo.

1. Déterminer le nombre d'élèves pratiquant le judo et le taekwondo.

2. On choisit un élève au hasard

- a) Calculer la probabilité qu'il pratique le judo.
- b) Calculer la probabilité qu'il pratique le judo seulement.
- c) Calculer la probabilité qu'il pratique le judo et le taekwondo.
- d) Calculer la probabilité qu'il pratique le judo ou le taekwondo.

II. 1) Une cage contient 5 pigeons mâles et 3 pigeons femelles. On prend au hasard l'un après l'autre, sans remise, 4 pigeons de la cage. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E₁ : « les pigeons pris sont mâles »

E₂ : « 3 pigeons mâles et un pigeon femelle sont pris dans cet ordre »

E₃ : « 3 pigeons mâles et un pigeon femelle sont pris »

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pigeons femelles pris.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X.
- b) Calculer la probabilité de l'évènement $[X \geq 2]$.
- c) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

Exercice 7 : Uniquement pour les séries D

Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et cœur, de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures » : valet, dame, roi. On tire une carte au hasard dans ce jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité des événements suivants :

- 1. « La carte tirée est une dame. »

2. « La carte tirée est une figure rouge. »
3. « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

**Exercice 8 : Uniquement pour les séries
C & E**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient 7 boules bleues et 3 boules rouges.

U_2 contient 2 boules bleues et 1 boule rouge.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère les événements suivants :

- A (après l'épreuve les urnes se retrouvent dans leur configuration).
- B (après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule bleue).

On note $p(A)$ la probabilité de l'événement A et $p(B)$ la probabilité B. Vérifier que

$$p(A) = \frac{22}{40} \text{ et calculer } p(B).$$

2. Un joueur mise 200 F CFA et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules bleues contenues dans U_2 .

Si U_2 contient une seule boule bleue, le joueur reçoit 600 F CFA.

Si U_2 contient deux boules bleues, le joueur ne reçoit rien.

Si U_2 contient trois boules bleues, le joueur reçoit 2000 F CFA.

On appelle gain algébrique la différence (positive ou négative) entre la somme reçue par le joueur et la mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2.1 Déterminer les valeurs prises par X.

2.2 Déterminer la loi de probabilité.

2.3 Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à -75 et calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\delta(X)$.

3. MBADINGA joue cinq fois de suite à ce jeu. Calculer, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il obtienne au moins un gain strictement positif à l'issue des cinq épreuves.

Exercice 9 : Uniquement pour la série D

A. Le tiercé est une forme de pari où l'on parie sur trois chevaux engagés dans une même course, en précisant l'ordre d'arrivée.

Le PMUG annonce une course de 18 chevaux numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux ont la même chance de gagner la course. OBAME choisit dans l'ordre les chevaux portant les numéros 15, 13 et 8. Tous les chevaux ayant pris part à la course, on demande de calculer la probabilité pour qu'OBAME gagne le tiercé :

- a) Dans l'ordre
- b) Dans le désordre

B. On considère un club de parieur comprenant les hommes et les femmes ; le nombre des hommes étant le double de celui des femmes. On suppose que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre, et 12% des hommes gagnent le tiercé dans l'ordre. On note respectivement O, H et F les événements suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

1. Quelles est la probabilité pour que :

- a) Un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ?
- b) Un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme ?

2. On choisit au hasard 6 parieurs parmi les gagnants ; le nombre de gagnants est suffisamment grand pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.

Déterminer la probabilité pour qu'il y ait exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs.

**Exercice 10 : Uniquement pour les séries
A & B**

Dans une boîte on a placé six cartons indiscernables au toucher sur lesquels sont écrites les lettres du mot COPIES (une lettre par carton). On tire successivement et sans remise trois cartons

et on les aligne dans l'ordre de sortie de manière à former un « mot » de 3 lettres (ayant un sens ou non).

- 1) Déterminer le nombre de mots possibles.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « le mot formé est SEC ».
- B : « la lettre E figure dans le mot ».
- C : « le mot commence par la lettre E ».
- D : « exactement deux voyelles figurent dans le mot ».

Exercice 11 : Uniquement pour les séries D

En 2004, la campagne électorale pour les élections municipales à fait rage dans un village du Niger. Deux groupes de listes A et B s'affrontent par tous oratoires quotidiens. Chaque jour de campagne on interroge un lecteur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n : « l'électeur est favorable à la liste A au $n^{\text{ième}}$ jour de la campagne »

B_n : « l'électeur est favorable à la liste B au $n^{\text{ième}}$ jour de la campagne »

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

1. Déterminer une relation simple entre p_n et q_n .
2. Les arguments des uns et des autres sont si convaincantes et les électeurs sont indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20% des électeurs favorables à la liste A et 30% des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.

a) Déterminer l'arbre des probabilités.

b) Donner $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/B_n)$.

c) Montrer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0,8p_n$ et $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0,3q_n$

En déduire que $P(A_{n+1}) = 0,8p_n + 0,3q_n$; puis que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.

3. Soit la suite (U_n) de terme général $U_n = p_n - 0,6$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Quelle est sa limite ?

b) En déduire la limite de la suite (p_n) .

**Exercice 12 : Uniquement pour les séries
A & B**

Le tableau suivant donne le taux de scolarisation national de 1991 à 2002.

Année scolaire	1990 - 1991	1991 - 1992	1992 - 1993	1993 - 1994	1994 - 1995	1995 - 1996	1996 - 1997	1997 - 1998	1998 - 1999	1999 - 2000	2000 - 2001	2001 - 2002
Rang de l'année scolaire	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Taux national de scolarité	27,6	27,1	27,8	29,1	29,2	29,5	30,1 3	30,3 5	32,2 3	34,1 0	37,3	40

- 1) Représenter le nuage de points associé à cette série chronologique.
- 2) a) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.
b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer et représenter cette droite.
c) Démontrer que G appartient à cette droite.
- 3) Estimer le taux de scolarisation pour l'année scolaire 2005/2006.

**Exercice 13 : Uniquement pour les séries
A & B**

Dans cet exercice les formules et les principales étapes des calculs devront être indiquées. On considère la série statistique double (x, y) décrite par le tableau ci-dessous.

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16
y_i	10	15	10	20	21	40	32	35

- 1) Représenter le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 0,5 cm pour une unité en abscisses et 0,2 cm pour unité en ordonnées).
- 2) Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.
- 3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer et représenter cette droite. Vérifier que G appartient à cette droite.
- 4) Estimer la valeur de y pour $x = 24$.

Exercice 14 : Uniquement pour le série D

La constitution d'un groupe de trois élèves devant représenter leurs camarades à un exposé sur l'environnement est une expérience aléatoire.

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Un garçon est désigné à chaque apparition de pile et une fille à chaque apparition de face. Un groupe constitué de fille et de garçon est appelé « groupe mixte » et un groupe constitué uniquement de fille ou uniquement de garçon un « groupe non mixte ».

On désigne par : M l'évènement « le groupe est mixte » et par $\bar{M}$ l'évènement contraire de M.

1. Calculer les probabilités des évènements M et $\bar{M}$.
2. A l'intérieur de la salle où se tient l'exposé, le groupe de trois élèves reçoit en cadeau trois tee-shirts par fille présent au sein du groupe.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tee-shirts reçus.

- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Déterminer la loi de probabilité de X.
 - c) Déterminer la fonction de répartition F de X.
 - d) Construire la représentation graphique de F.
 - e) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3. Les tee-shirts reçus sont repartis de manière équitable à tous les membres du groupe. Quelle est la probabilité que chaque membre du groupe reparte avec au moins deux tee-shirts ?

Exercice 15 : Uniquement pour la série D

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ; x représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en FCFA ; y représente la quantité du produit P disponibles sur le marché, exprimé en millier.

x_i	30	35	45	60	80	100
y_i	12,5	13	13	15	15,5	16

1. On considère l'ensemble des points M_i de coordonnées (x ; y) où $1 \leq i \leq 6$.

a) Construire le nuage de points M_i (1,5 cm représentera 10 FCFA en abscisse et 1cm représentera 1000 en ordonnées).

b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier votre réponse.

2. a) Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer.

On prendra pour premier sous nuage les trois premiers points et pour le deuxième les trois derniers.

b) Déterminer une équation de (Δ) sous forme :

$y = ax + b$; a et b étant deux réels à préciser.

3. En utilisant l'équation de (Δ), estimer :

- La quantité de produit P disponible sur le marché pour un prix de 150FCFA.
- Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est 20 000.

Exercice 16 : Uniquement pour la série D

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1 ; 2 ; 3 ; et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée. Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, on notera p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1 ; p_2 ; p_3 ; et p_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$, prouver que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre des nombres 1 ; 2 ; 4 ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance dix fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
 - a) Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement ($X = i$).
 - b) Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.
 - c) Calculer la probabilité de l'évènement ($X \geq 1$).

On donnera une valeur arrondi au millième.
4. On lance n fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note u_n , la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{\text{ième}}$ lancer.
 - a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle converge.
 - b) Calculer $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$, en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (S_n) .
 - c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 0,999$.

**Exercice 17 : Uniquement pour les séries
A & B**

Le tableau suivant donne le pourcentage de la consommation médicale des ménages dans la consommation globale des ménages pour les 6 années considérées :

Année	1994	1999	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année (x_i)	0	5	10	11	12	13
Pourcentage (y_i)	9,4	10,9	11,8	12,1	12,3	12,5

- 1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

- 2) Déterminer par la méthode de Mayer une équation de la droite D de régression de y en x et la représenter. (On donnera les résultats avec 3 chiffres après la virgule).
- 3) On pourra prendre dans cette question : $y = 0, + 9$, comme équation de la droite de régression.

En supposant que cet ajustement linéaire reste valable au cours des prochaines années :

- a) Quel sera, le pourcentage de la consommation médicale en l'an 2024 ?
- b) A partir de quelle année le pourcentage de la consommation médicale dépassera-telle 25%.

Exercice 18 : Uniquement pour les séries D

1) (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X .

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y . On suppose que :

$(D_1) : y = a x + b$ et $(D_2) : x = a' y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Etablir que $r^2 = a x a'$.

2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

La droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x - y = 0$

La droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5 y - 9 x + 24 = 0$.

- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y , sachant que leur covariance est positive.
- b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y .

Exercice 19 : Uniquement pour la série D

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	30	38	50	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1) Représenter le nuage de points. On prendra 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 5 m en ordonnée.

NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8m.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage 85m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

PARTIE B : Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre :

Types de transport Y Causes des accidents X	Particulier y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents à liés l'excès de vitesse x_1	440	360
Accidents à cause mécanique x_2	110	90

1) Déterminer l'effectif des accidents enregistrés lors de cette étude.

2) Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} et f_{x_2/y_2}

3) Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{.2}$.

REVISION BAC 2020	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	ARITHMETIQUE + APPLICATION AFFINE ET DE L'ESPACE + CONIQUES
	Terminale A, B, C, D & E (29 EXERCICES)	

Exercice 1 : Uniquement pour les séries C & E

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} \\ y' = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine bijective.

Définir son application réciproque f^{-1} .

2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera ;

3. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient à (D) .

4. En déduire une construction simple de M' connaissant le point M .

5. Soit (E) la courbe d'équation $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0$.

Déterminer une équation de l'image de (E) par f .

Quelle est la nature de cette courbe ?

Exercice 2 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et f est application affine de P dans P qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation :

$$4x + y + 3 = 0.$$

2. Soit $M(x; y)$ un point du plan P n'appartenant pas à (Δ) .

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe.

Indication : On peut montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \gamma(\vec{i} + 5\vec{j})$ où γ est un réel.

b) Vérifier que la droite $[MM']$ n'est pas parallèle à (Δ) et que le point H d'intersection des droites (Δ) et (MM') a pour coordonnées $(\frac{5x-y-3}{9}; \frac{-20x+4y-15}{9})$.

c) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$. En déduire que f est une affinité dont on précisera l'axe, le vecteur et le rapport.

3. On considère la suite de points : $M_n(x_n; y_n)$ telle que $M_0(1; 8)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$.

a) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n .

b) Montrer par récurrence que tous les points $M_n(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

c) Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que les y_n sont aussi des entiers naturels.

4. Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux en utilisant un raisonnement par l'absurde.

5. a) Montrer que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.

b) En déduire que pour tout naturel n , $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

Exercice 3 : Uniquement pour les séries C & E

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 6cm. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z' e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

et on définit une suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$ on appelle z_n l'affixe de M_n .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . Placer les points M_0 , M_1 , et M_2 .
2. Montrer que l'on a $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Soient deux entiers n et p tels que $n \geq p$; Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $n - p$ est multiple de 12.
4. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir trouvé une solution particulière de cette équation, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
5. En déduire les entiers naturels n tels que M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 4 : Uniquement pour les séries C & E

Soit f une application de l'espace E dans E d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z - 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 1) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est le plan (P) d'équation : $2x - y + z + 1 = 0$.

2. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace, et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image.

- a) Montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction constante.

Indication : On peut montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \gamma(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ où γ est un réel.

- b) En déduire la position relative de la droite (MM') et le plan (P).
 - c) Démontrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P).
 - d) Déterminer : $f \circ f(M)$.
 - e) En déduire des questions précédentes la nature de f .
3. On considère le plan (Q) d'équation cartésienne : $x + y - z + 2 = 0$.
 - a) Justifier que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

- b) Soit (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q) . Déterminer une équation paramétrique de (Δ) .
4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan (Q) . On pose : $g = f \circ s$.
- a) Soit $A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est un point de (Q) .
- b) Montrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe.
- c) Déterminer les coordonnées de A' , où $A' = g(A)$.

Exercice 5 : Uniquement pour les séries C & E

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé.

Soit p l'application de E dans E d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

- a) Déterminer les coordonnées de A' , où $A' = p(A)$ avec $A(1; -2; 3)$
b) Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p .
- Démontrer que l'ensemble des points invariants par p est un plan (P) .
- Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de E et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par p .
a) Démontrer que M' n'appartient pas à (P) .
b) Démontrer que si M n'appartient pas à (P) , la droite $[MM']$ est orthogonale à (P) .
- En déduire la nature de p .

Exercice 5 : Uniquement pour les séries C & E

Dans l'espace E rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne $A(0; 0; -2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(0; 0; 4)$ et $D(0; -1; 3)$.

- Montrer qu'il existe un unique demi-tour, noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractériser géométriquement ce demi-tour et donner son expression analytique.

2. Soit g l'application de l'espace E vers E à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$

tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$. Démontrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe. Préciser

les

images de A et B par g .

3. Soit $h = f \circ g$. Définir analytiquement h .

Exercice 6 : Uniquement pour les séries C & E.

Soit $(P) : 2x + y - z = 3$ un plan et (Δ) la droite passant par O , perpendiculaire à (P) .

1. Déterminer les expressions analytiques :

a) de la réflexion S_p b) du demi-tour S_Δ c) de $S_\Delta \circ S_p$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_\Delta \circ S_p$.

Exercice 7 : Uniquement pour les séries C & E

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :
$$\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.

2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n .

3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.

4. Soit n un entier naturel.

a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.

5. a) Démontrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+1} .

c) En déduire des valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

Exercice 8 : Uniquement pour les séries C & E

- On considère l'équation : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, solution de l'équation $6x + 7y = 1$.
 - En déduire les couples d'entiers relatifs, solutions de l'équation ϵ .
- Soient (a_n) et (b_n) les suites arithmétiques définies par : $a_0 = -2,5$ et $b_0 = -32$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = a_n + 6$; $b_{n+1} = b_n + 7$.
Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels inférieurs à 15 tels que $a_p = -b_q$.
- Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace.
On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
Montrer qu'il existe un seul point de (P) de l'espace dont les coordonnées sont des entiers naturels qui appartient au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ / Déterminer les coordonnées de ce point.

Exercice 9 : Uniquement pour les séries C & E

- O considère l'équation $(E) : 10x + 11y + 12z = 95$, où x , y et z sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple d'entier relatifs $(u ; v)$ vérifiant $10x + 11y = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation $(E') : 10x + 11y = 95$.
 - Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E') .
- Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé de l'espace.
On considère le plan (P) d'équation : $10x + 11y + 12z = 95$.
On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan (O, I, J) .
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce points.
- On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.
 - Montrer que l'entier y est impaire.
 - On pose $y = 2p + 1$ où p est entier naturel.
Montrer qu'on a : $p + z \equiv 2[5]$.
 - On pose $p + z = 5q + 2$ ou q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x , p et q

vérifiant la relation : $x + p + 6q = 6$. En déduire que q prend la valeur 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 10 : Uniquement pour les séries C & E

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Equation avec congruence

Déterminer les entiers tels que : $\begin{cases} 4n + 4 \equiv 0[5] \\ -3n + 2 \equiv 0[5] \end{cases}$

Partie B : Application

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3 + 4i}{5} \bar{z} + \frac{1 - 2i}{5}$$

1. On note par x et x' , et y et y' les parties réelles respectivement les parties imaginaires de z et

$$z'. \text{ Démontrer que : } \begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. 2.1. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation :

$$2x - 4y - 1 = 0.$$

2.2. Démontrer que le vecteur $(MM') \rightarrow$ à une direction fixe et que la droite (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

2.3. Quelle est alors la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.

4. On cherche à déterminer les points de (Γ) dont les coordonnées sont des entières.

4.1. Donner une solution $(x_0 ; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

4.2. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tel que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' . Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z')$ soit entiers.

Exercice 11 : Uniquement pour les séries C & E

Les questions de 1 à 3 sont indépendantes.

1. Soit α , a et b trois entiers naturels non nuls tels que : $\alpha = \text{PGCD}(a, b)$. Montrer que α divise $\lambda a + \mu b$ avec λ et μ deux entiers relatifs.
2. Soit $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$.
 - 2.1. Démontrer que $\text{PGCD}(a, b)$ divise 3.
 - 2.2. Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2, alors $\text{PGCD}(a, b) = 3$.
3. Démontrer que pour tout entiers naturels n , $16 \times 17^{2n} - 28 \times 3^{2n} + 3$ est divisible par 5.

Exercice 12 : Uniquement pour les séries C & E

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$; avec $(x ; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - a) Donner une solution particulière de (E).
 - b) Résoudre (E).
2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
 - a) Montrer que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E).
 - b) Quel est le reste dans la division de N par 40.
3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, avec $(x ; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - b) Au VII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaies dans une auberge. Les hommes ont dépensés 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 13 : Uniquement pour les séries C & E

Q.1 : La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

Q.2 : Déterminer l'entier naturel n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

Q.3 : Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b .

Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$; rétablir la division.

Q.4 : Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre $n = 43x57y$ soit divisible par 15 et 2.

Q.5 : Trouver dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 45 et tels que le couple $(a ; b)$ soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$.

Q.6 : Un entier naturel s'écrit $xy7$ dans le système décimal et $y00x$ dans le système à base 8.

a) Sachant que $y = x - 4$; Déterminer x et y .

b) Ecrire ce nombre en système décimal ; binaire ; octa décimal et hexa décimal.

Q.7 : 1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de 11^n par 7.

Exercice 14 : Uniquement pour les séries C & E

1. On considère l'entier naturel A qui s'écrit $53x4$ dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :

a) A soit divisible par 7.

b) A soit divisible par 6. En déduire que A est divisible à la fois par 6 et 7.

2. On prend $x = 2$. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseur de 1 ?
Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit un carré parfait.

Exercice 15 : Uniquement pour les séries C & E

On considère l'entier naturel représenté en base b par $A=342x$ Déterminer le chiffre x pour que A soit :

a) divisible par 5, quand $b=6$

b) divisible par 3, quand $b=7$

c) divisible par 12, quand $b=17$

Exercice 16 : Uniquement pour les séries C & E

1. On considère l'équation (E) : $(p; q) \in \mathbb{Z}^2 : 11p - 7q = -4$

a) Vérifier que $(-1; -1)$ est solution de (E) ;

b) Résoudre (E)

2) a) Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :

(F) $x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7]$ et (G) $x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$

b) Déduire de 1) et 2) les solutions du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17 : Uniquement pour les séries C & E

I. Le nombre x s'écrit $\overline{bbaa}$ en base 3.

a) Quelles valeurs peuvent prendre a et b .

b) Le nombre x s'écrit $\overline{baa}$ en base 6. Trouver une relation liant a et b , et en déduire les valeurs de a et b .

c) Ecrire x dans la base décimale.

II. 1) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.

2) Démontrer que si x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ le système $\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$ ou m est le PPCM de a et b .

Exercice 18 : Uniquement pour les séries C & E

On donne $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1) a- Déterminer tous les polynômes de degré 3 tels que : $(x+1) - (x) = x^2$.

b- Retrouver le résultat : $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) On donne $\sum_{p=1}^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

a- Calculer $\sum_{p=1}^n p^2$ par une méthode analogue à celle de la 1ère question.

b- En déduire une expression de $En = \sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2)$.

Exercice 19 : Uniquement pour les séries C & E

I. n étant un entier relatif quelconque, on pose $A = n-1$ et $B = n^2-3n+6$.

1)a) Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4.

b) Déterminer, suivants les valeurs de n , le PGCD de A et B .

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

II. Démontrer que si un nombre de trois chiffres abc , est divisible par 17, il en est de même du nombre $(2a - c)^2 + 2b^2$.

Exercice 20 : Uniquement pour les séries C & E

1. Soit le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 + (-6 + i)z^3 + (17 - 7i)z^2 + (-26 + 14i)z + 20(1 - i).$$

1.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $Z^2 = -5 + 12i$.

1.2 Vérifier que : $p(z) = [z^2 - (4 - i)z + 5 - 5i][z^2 - 2z + 4]$.

1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B , C et Ω d'affixe respectives 4 ; $1 + i\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$ et 1 .

Soit E l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B , et d'axe focal l'axe des abscisses.

2.1 Déterminer A' tel que $[AA']$ soit le grand axe de (E) .

2.2 Démontrer que B et C sont des sommets de E .

2.3 Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E) .

2.4 Déterminer une équation cartésienne de (E) .

2.5 Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (E) avec l'axe des ordonnées.

2.6 Tracer (E) .

3. Soit f l'application affine du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 - i)z + i$.

3.1 Déterminer la nature exacte de f , puis précisez ses éléments caractéristiques.

3.2 Déterminer l'expression analytique de f .

3.3 Démontrer que f est bijective.

3.4 Déterminer la nature exacte de (E') image de (E) par f .

3.5 Déterminer les foyers, les directrices associées, les sommets, l'axe focal et l'excentricité de (E') .

Exercice 21 : Uniquement pour les séries C & E

I. Dans chacun des cas suivants, démontrer que (E) est une équation d'une conique dont on précisera la nature, le centre, l'axe focal et les sommets situés sur cet axe focal

a) $(E): x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$ b) $(E): 3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ c) $(E): 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0$ d) $(E): -x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0$ e) $(E): x^2 + 4x + 4y = 0$ f) $(E): y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

II. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique :

$$a) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta - 1 \\ y = \frac{3}{4} \sin \theta + 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = 2 \cos \theta - 3 \\ y = 3 \sin \theta + 1 \end{cases}$$

Exercice 22 : Uniquement pour les séries C & E

I. 1) Soit $A(2; -1)$ et $A'(-2; 3)$. Déterminer une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 1$.

2) Déterminer une équation de l'image de (C) :

a) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{2}{3}$.

b) par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$ et de rapport 2.

II. Soit $Z = 13|z|^2 - 5z^2 + 8(z + \bar{z}) - 64$ avec $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\bar{z}$ son conjugué. Soit $M(x; y)$ l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que Z soit réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

3) En déduire l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $\arg Z = -\frac{\pi}{2}$

4) Résoudre l'équation $Z=0$ et préciser les images de ses solutions.

III. Soit (Γ) l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Démontrer que } (\Gamma) \text{ est une partie d'hyperbole que l'on précisera.} \\ \text{Tracer } (\Gamma). \end{array} \right.$$

Exercice 23 : Uniquement pour les séries C & E

Soit (P) la parabole d'équation : $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

- 1) Déterminer les éléments caractéristiques de (P) et tracer (P) .
- 2) Déterminer une équation de l'image de (P) par chacune des transformations suivantes :
 - a) La symétrie orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$.
 - b) La symétrie de centre O .
 - c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 24 : Uniquement pour les séries C & E

On désigne par z l'affixe d'un point M . Soit le nombre complexe

$$z' = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\bar{z} - 1$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

- a) $|z'| = 1$; b) la partie réelle de z'^2 est égale à 1 ; c) la partie imaginaire de z'^2 est égale à 1

Exercice 25 : Uniquement pour les séries C & E

Soit M le point d'affixe Z

1. a) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite (D) .
- b) Démontrer que pour tout point M , la distance de M à (D) est : $\frac{1}{2}(\bar{z} + z + 4)$

- 2) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\left| \frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité.

Exercice 26 : Uniquement pour les séries C & E

- 1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m , la nature de l'ensemble (Γ_m) des points $M(x, y)$ tels que : $2mx^2 + 8mx - (m-1)y^2 + 7m - 2 = 0$.
- 2) Déterminer m pour que (Γ_m) soit:
 - a) un cercle
 - b) une hyperbole équilatère
- 3) Tracer (Γ_m) pour $m = \frac{1}{2}$ et $m = 2$.

Exercice 27 : Uniquement pour les séries C & E

1. Soit P la parabole d'équation $y^2 = 4x$.
On note F son foyer et D sa directrice. Déterminer les coordonnées de F et une équation de D .
2. Soit P' la parabole d'équation $y^2 = -4x + 8$.
 - a. Montrer que la parabole P' a pour foyer F .
 - b. Déterminer une équation de la directrice D' de P' .
 - c. Montrer que F est compris entre D et D' .
3. Déterminer les points d'intersection de P et P' .
4. Soit P'' la parabole d'équation $y^2 = 8x + 8$.
 - a. Montrer que P'' a pour foyer F .
 - b. Déterminer une équation de sa directrice D'' .
 - c. Montrer que F n'est pas compris entre D et D'' .
 - d. Existe-t-il des points communs de P et P'' .

FRANCOIS RABELAIS :
« SCIENCE SANS
CONSCIENCE N'EST QUE
RUINE DE L'AME ! »
BONNE CHANCES A
TOUS