

Exercice II (CIAM, Page 43, Exo 14)

- 1) Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$
- 2) En déduire que : $\tan 3x = \frac{\tan x (3 - \tan^2 x)}{1 - 3\tan^2 x}$

Résolution

- 1) Expression de $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$

On a : $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$$\Rightarrow \cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

Or : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Alors On a : $\cos 3x = \cos(2\cos^2 x - 1) - 2\sin x \cos x \sin x \quad (\Rightarrow)$

$$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x)$$

d'où : $\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$

• $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

Or : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Alors : $\sin 3x = 2\sin x \cos x \cos x + \sin(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$$\Rightarrow \sin 3x = 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$$

d'où : $\boxed{\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x}$

- 2) On a : $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{-4\sin^3 x + 3\sin x}{4\cos^3 x - 3\sin x} = \frac{\sin x (-4\sin^2 x + 3)}{\cos x (4\cos^2 x - 3)}$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \left(\frac{\frac{4\sin^2 x + 3}{\cos^2 x}}{\frac{4\cos^2 x - 3}{\cos^2 x}} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan x \cdot \frac{(-4\tan^2 x + 3)}{4 - 3} \quad \text{Or } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Alors $\tan 3x = \tan x \frac{[-4\tan^2 x + 3(1 + \tan^2 x)]}{[4 - 3(1 + \tan^2 x)]}$ d'où : $\boxed{\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}}$

Abonnez-vous Maths c'est l'effort qui fait le fort