



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés
Département Science Des Matériaux (SDM)

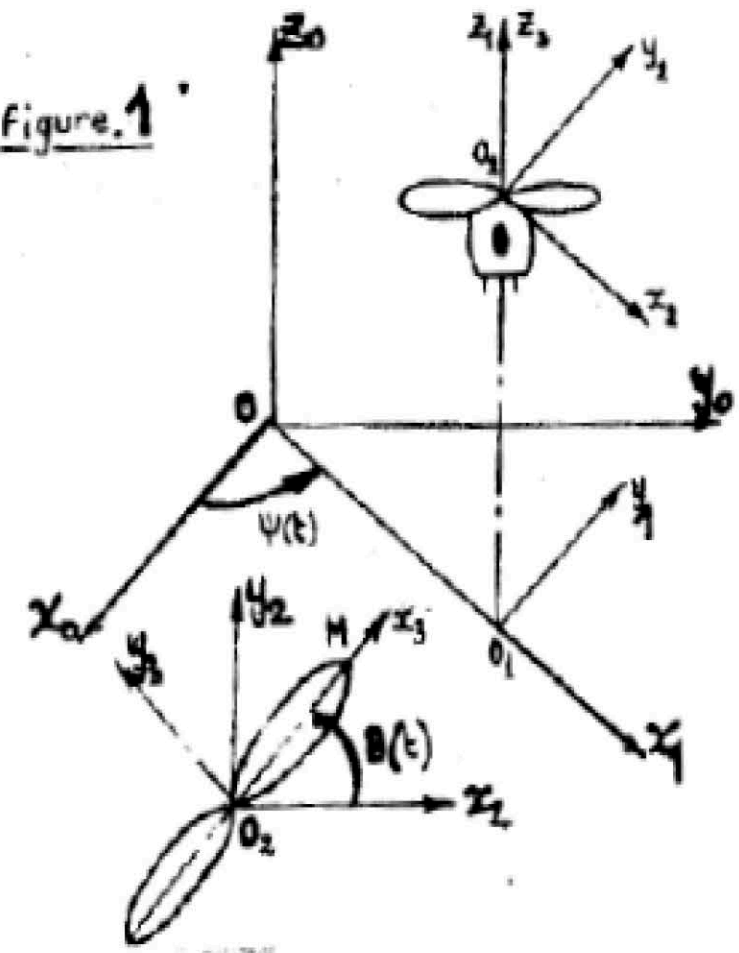


Module

Mécanique Rationnelle (MEC-RAT)

Soit le mouvement hélicoïdal d'un hélicoptère autour de l'axe Z_0 (voir figure ci-contre). On donne $OO_1 = R$, $O_1O_2 = Z(t)$. ψ et $\dot{\theta}$ sont constantes.

Figure.1



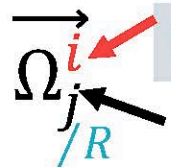
- 1- Calculer le **vecteur rotation instantanée** de R_2 par rapport à R_0 exprimé dans R_1 .
- 2- Calculer par dérivation le **vecteur vitesse** du point O_2 par rapport à R_1 exprimé dans R_1 .
- 3- Calculer par dérivation le **vecteur vitesse** du point M par rapport à R_1 exprimé dans R_2 puis dans R_0 en utilisant la matrice de passage de R_2 à R_0 .
- 4- Par la cinématique du solide, retrouver le **vecteur vitesse** de M par rapport à R_1 exprimé dans R_1 .
- 5- Calculer par dérivation le **vecteur accélération** de M par rapport à R_1 exprimé dans R_2 .
- 6- Par la cinématique du solide, retrouver le **vecteur accélération** de M par rapport à R_1 exprimée dans R_1 .

Exercice exemple du cours

Soit le mouvement hélicoïdal d'un hélicoptère autour de l'axe Z_0 (voir figure ci-contre). On donne $OO_1 = R$, $O_1O_2 = Z(t)$.

$\dot{\Psi}$ et $\dot{\theta}$ sont constantes

1- Calculer le vecteur rotation instantanée de R_2 par rapport à R_0 exprimé dans R_1 .



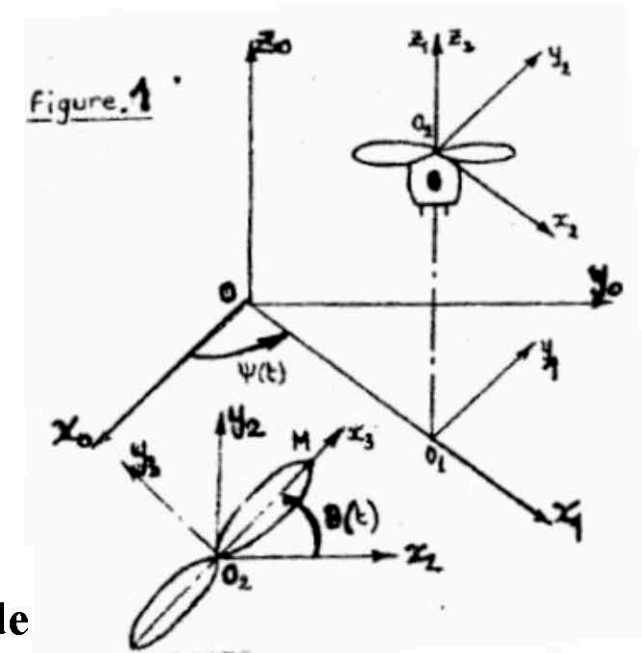
Indice i vas prendre le numéro du repère **par rapport** au quel on fait l'étude

Indice j vas prendre le numéro **du repère** au quel on veut calculé son vecteur de rotation

vas prendre le numéro du repère **de projection** auquel on va **exprimé le vecteur**

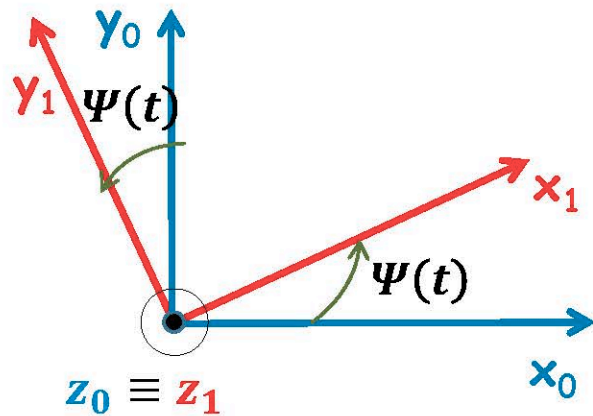
$$\overrightarrow{\Omega}_2^0 / R_1$$

$$\overrightarrow{\Omega}_2^0 / R_1 = \overrightarrow{\Omega}_2^1 + \overrightarrow{\Omega}_1^0$$



Lorsqu'on demande de calculer le vecteur **de rotation d'un solide** **Indice j** , vas prendre le numéro du **repère lié au solide** auquel on veut calculer son vecteur de rotation

figure plane $R_0 \rightarrow R_1$



$$\overrightarrow{\Omega}_1^0 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} / R_1$$

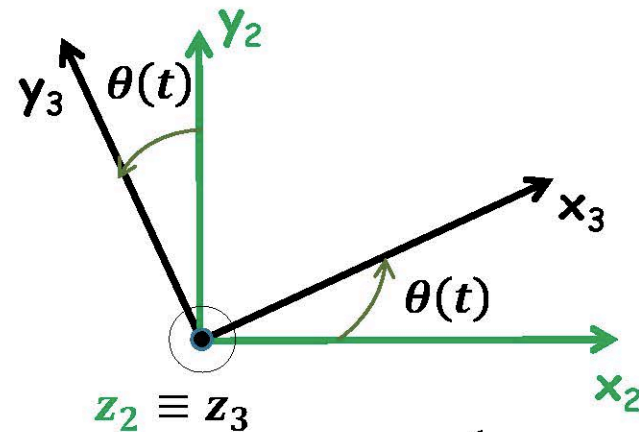
$$\overrightarrow{\Omega}_2^0 = \overrightarrow{\Omega}_1^0 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} / R_1$$

figure plane $R_1 \rightarrow R_2$

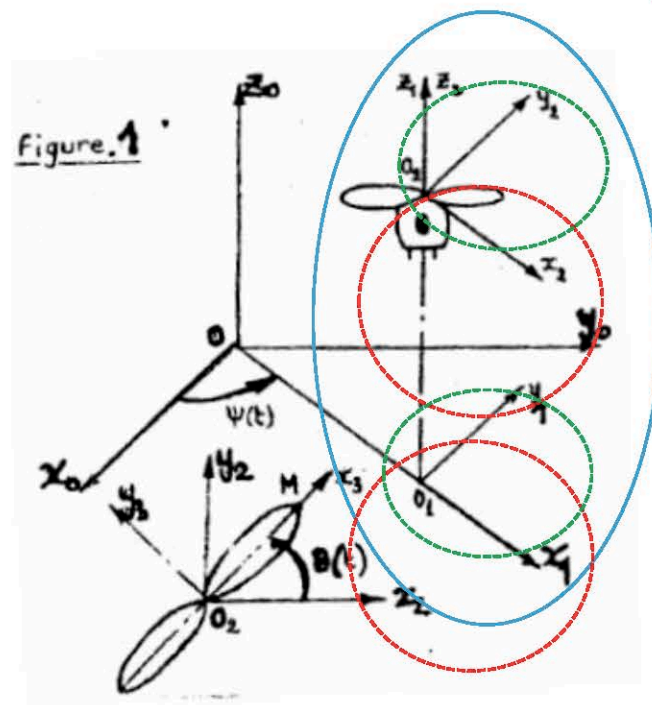
$R_1 // R_2$

$$\overrightarrow{\Omega}_2^1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

figure plane $R_2 \rightarrow R_3$



$$\overrightarrow{\Omega}_3^2 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases} / R_2$$



2- Calculer par dérivation le vecteur vitesse du point O_2 par rapport à R_1 exprimé dans R_1 .

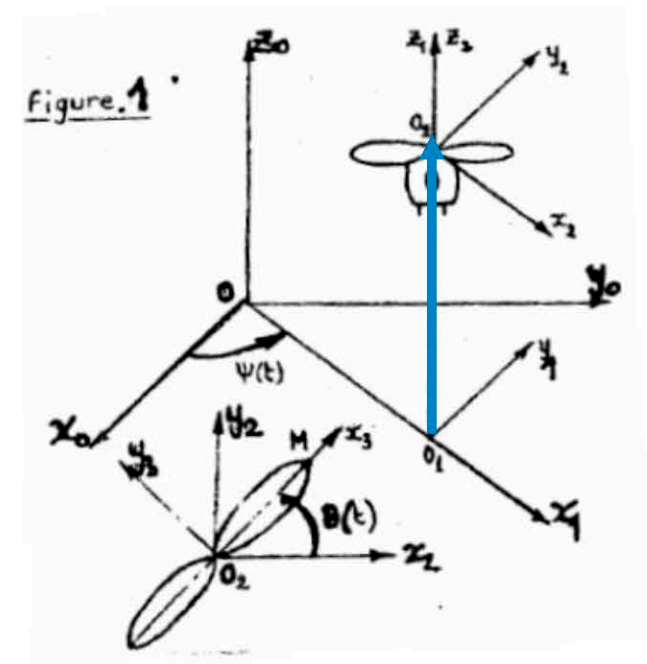
par dérivation on utilise la formule de la base mobile

$$\vec{V}^i(M) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i M}}{dt} = \frac{d^j \overrightarrow{O_i M}}{dt} + \vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_i M}$$

$$\vec{V}^1(O_2) = \frac{d^1 \overrightarrow{O_1 O_2}}{dt} \Big/_{R_1}$$

$$\overrightarrow{O_1 O_2} \Big/_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z(t) \end{cases} \Big/_{R_1}$$

$$\vec{V}^1(O_2) \Big/_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{Z} \end{cases} \Big/_{R_1}$$



3- Calculer **par dérivation** le vecteur **vitesse du point M** par rapport à R_1 exprimé dans R_2 puis dans R_0 en utilisant la matrice de passage de R_2 à R_0

$$\vec{V}^1(M)_{/R_2} = \frac{d^1 \vec{O_1 M}}{dt} = \frac{d^2 \vec{O_1 M}}{dt}_{/R_2} + \boxed{\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{O_1 M}}_{/R_2} \quad \text{---} \quad = 0 \quad (R_1 // R_2)$$

$$\vec{O_1 M}_{/R_2} = \vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 M}$$

$$\vec{O_1 O_2}_{/R_1 \equiv /R_2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ Z(t) \end{cases} \quad \vec{O_2 M}_{/R_2} = \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{cases}$$

($R_1 // R_2$)

$$\vec{O_1 M}_{/R_2} = \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ Z(t) \end{cases}$$

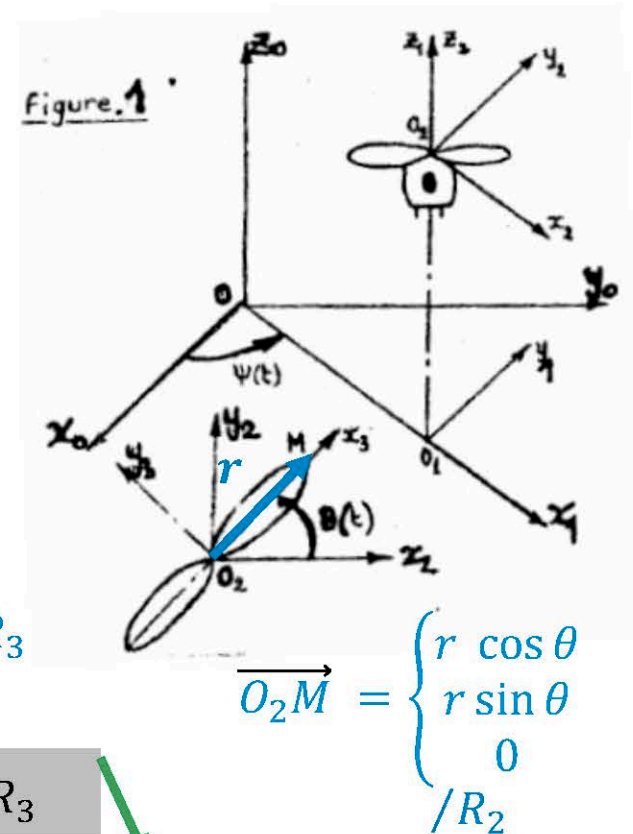
$$\vec{O_2 M}_{/R_3} = \begin{cases} r \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}^1(M)_{/R_2} = \begin{cases} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{Z}(t) \end{cases}_{/R_2}$$

Le vecteur $\vec{O_2 M}$ dans est dans R_3

il faut donc le ramener à R_2 , il faut utiliser la figure plane entre les deux repère

r est sure l'axe X_3 il faut le projeter sur X_2 et sur Y_2



dans R_2 puis dans R_0 en utilisant la matrice de passage de R_2 à R_0

$$\vec{V}^1(M)_{/R_1} = P_2^1 \cdot \vec{V}^1(M)_{/R_2}$$

$$P_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_1 // R_2)$$

$$\vec{V}^1(M)_{/R_1} = \begin{cases} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{Z}(t) \end{cases}_{/R_1}$$

$$\vec{V}^1(M)_{/R_0} = P_1^0 \cdot \vec{V}^1(M)_{/R_1}$$

$$P_1^0$$

est la matrice de passage de R_1 vers R_0

	Ancien			
	x_1	y_1	z_1	
Nouveau	x_0	$\cos \Psi(t)$	$-\sin \Psi(t)$	0
	y_0	$\sin \Psi(t)$	$\cos \Psi(t)$	0
	z_0	0	0	1

$$P_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \Psi(t) & -\sin \Psi(t) & 0 \\ \sin \Psi(t) & \cos \Psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}^1(M)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \cos \Psi(t) & -\sin \Psi(t) & 0 \\ \sin \Psi(t) & \cos \Psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{Z}(t) \end{cases}_{/R_1} = \begin{cases} -r\dot{\theta} \sin(\theta + \Psi) \\ r\dot{\theta} \cos(\theta + \Psi) \\ \dot{Z}(t) \end{cases}_{/R_0}$$

Par la cinématique du solide,

retrouver le **vecteur vitesse de M** par rapport à R_1 exprimé dans R_1 .

$$\overrightarrow{V^i(N_k)} = \overrightarrow{V^i(M_k)} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$$

Le point M se trouve **lié au repère R_3**

$$\overrightarrow{V^1(M)}_{/R_1} = \overrightarrow{V^1(O_2)}_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega_3^1}_{/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2 M}_{/R_1}$$

$$\overrightarrow{\Omega_3^1}_{/R_1} = \overrightarrow{\Omega_3^2} + \overrightarrow{\Omega_2^1}$$

$$\overrightarrow{\Omega_3^2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{/R_2}$$

$$\overrightarrow{V^1(M)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\mathbf{Z}}(t) \end{cases}_{/R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{/R_1} \wedge \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{cases}_{/R_1} = \begin{cases} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\mathbf{Z}}(t) \end{cases}_{/R_1}$$

5- Calculer **par dérivation** le vecteur **accélération** de **M** **par rapport** à R_1 **exprimé** dans R_2

$$\vec{\gamma}^i(M) = \frac{d^i \vec{V}^i(M)}{dt} = \frac{d^j \vec{V}^i(M)}{dt} + \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^i(M)$$

$$\frac{\vec{\gamma}^1(M)}{R_2} = \frac{d^1 \vec{V}^1(M)}{dt} = \frac{d^2 \vec{V}^1(M)}{dt} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{V}^1(M) \Rightarrow 0 \quad (R_1 // R_2)$$

$$\overrightarrow{\gamma^1}(M) = \begin{cases} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{Z}(t) \\ /R_2 \end{cases}$$

6- Par la cinématique du solide

retrouver le vecteur **accélération de M** par rapport à R_1 exprimée dans R_1 .

$$\overrightarrow{\gamma^i(N_k)} = \overrightarrow{\gamma^i(M_k)} + \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge (\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k})$$

Il faut que Les points M et N ∈ au même solide

$$\overrightarrow{\gamma^1(M)}_{/R_1} = \overrightarrow{\gamma^1(O_2)} + \frac{d^1 \overrightarrow{\Omega_3^1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2 M} + \overrightarrow{\Omega_3^1} \wedge (\overrightarrow{\Omega_3^1} \wedge \overrightarrow{O_2 M})$$

$$(\overrightarrow{\Omega_3^1} \wedge \overrightarrow{O_2 M}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \dot{\theta} \sin \theta \\ r \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega_3^1} \wedge (\overrightarrow{\Omega_3^1} \wedge \overrightarrow{O_2 M}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \dot{\theta} \sin \theta \\ r \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\overrightarrow{V^1(O_2)}_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\overrightarrow{\gamma^1(O_2)}_{/R_1} = \frac{d^1 \overrightarrow{V^1(O_2)}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{Z}(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\gamma^1(M)}_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{Z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1} = \begin{pmatrix} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{Z}(t) \end{pmatrix}_{/R_1}$$

① Série N° 02:

Cinématique

Exo 1:

Données: $OO_1 = R$, $q_{02} = z(t)$

$\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta} = \text{cte}$.

R_0 : Repère fixe (O, x_0, y_0, z_0)

$R_1(O, x_1, y_1, z_1) \parallel R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$

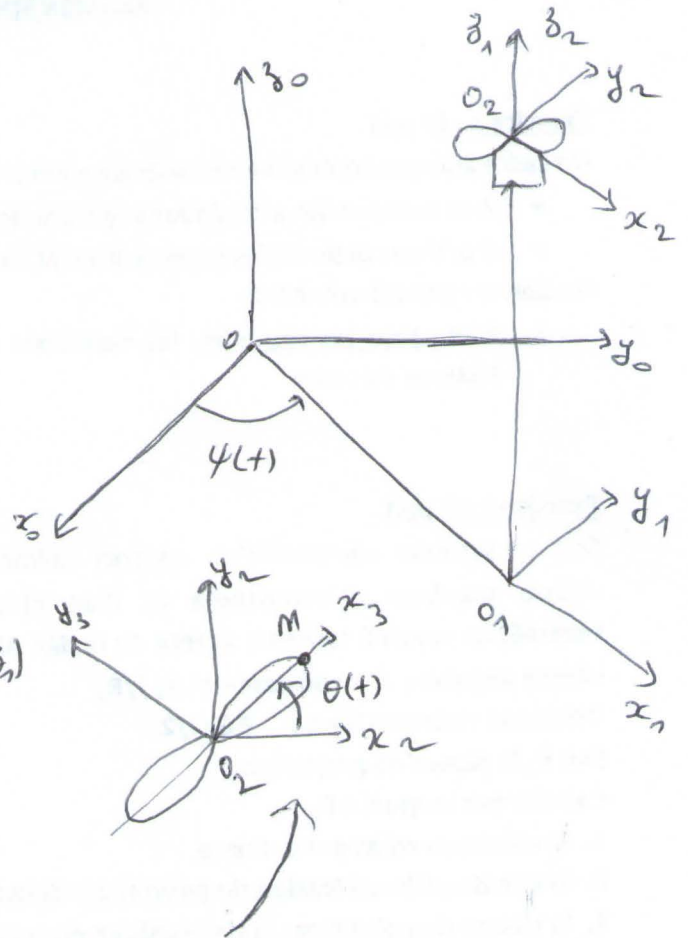
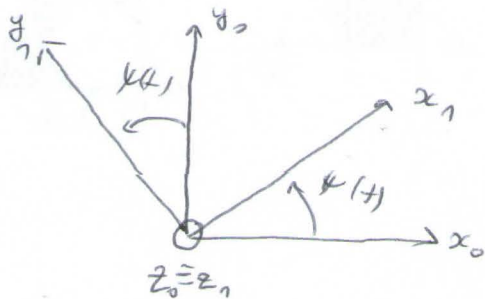
R_1 : repère intermédiaire

$R_2(O_1, x_2, y_2, z_2) \parallel R_2(O_2, x_2, y_2, z_2) \parallel R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$

$R_3(O_2, x_3, y_3, z_3)$ repère fixé au lame

passage entre les repères:

$R_0 \xrightarrow[\text{translation le long de } x_1]{\text{Rotation } +\varphi \text{ aut de } z_0 \equiv z_1 \text{ suivie d'une}} R_1 \xrightarrow[\text{long de l'axe } z_1 \equiv z_2]{\text{translation sans } \varphi} R_2 \xrightarrow[\text{Rotation } +\theta \text{ aut de } z_2 \equiv z_3]{\text{}} R_3$



① Vecteurs de Rotation de R_2 par rapport à R_0 exprimé dans R_1

$$\vec{\Omega}_{2/R_1} = \vec{\Omega}_{2/R_1}^1 + \vec{\Omega}_{1/R_1}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2, R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_0, R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_1} = \vec{\Omega}_{2/R_1}^0$$

② La vitesse de O_2 par rapport à R_1 exprimé dans R_1

$$\vec{V}(O_2)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt} \vec{O_1 O_2}_{/R_1} ; \quad O_1 O_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}_{R_1, R_2} \Rightarrow \vec{V}(O_2)_{/R_1} = \frac{d^1}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}_{R_1} = \vec{V}(O_2)_{/R_1}$$

3- par dérivation le vecteur vitesse du point M par rapport à R_1 exprimé dans R_2

$$\vec{v}(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt} \vec{O_1 M}_{/R_2} = \frac{d^2 (\vec{O_1 M})_{/R_2}}{dt^2} + \vec{\Omega}_{2/R_1}^1 \wedge \vec{O_1 M}_{/R_2}$$

$$\vec{\Omega}_{2/R_1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_2} \Rightarrow \vec{\Omega}_{2/R_1}^1 \wedge \vec{O_1 M}_{/R_2} = \vec{0}$$

$$\vec{O_1 M}_{/R_2} = ? \quad \text{car } \vec{O_1 M} = \vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 M} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix}_{R_1, R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_2}$$

$$\vec{O_1 M}_{/R_2} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix}_{/R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(M)_{/R_2} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}$$

3-2 Le vecteur vitesse du point M par rapport à R_1 exprimé dans R_0 par la matrice de passage :

$$\vec{v}(M)_{/R_0} = P_2^0 \vec{v}(M)_{/R_2}$$

$$\text{avec } P_2^0 = P_1^0 P_2^1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

	x_1	y_1	z_1
x_0	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
y_0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
z_0	0	0	1

$$\Rightarrow \vec{v}(M)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/R_0} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - L\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \\ -L\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + L\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}}$$

$$\vec{v}(M)_{/R_0} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin(\theta + \varphi) \\ L\dot{\theta} \cos(\theta + \varphi) \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{/R_0}$$

la cinématique du solide le vecteur vitesse du M par rapport à R_1 exprimé dans R_1 est $\vec{V}^i(M_k) = \vec{V}^i(M_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \vec{M}_k N_k$

$$\vec{V}^i(M)_{/R_1} = \vec{V}^i(O_2)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{3/R_1} \wedge \vec{O_2 M'}_{/R_1}$$

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} = \vec{\Omega}_{3/R_2} + \vec{\Omega}_{2/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1, R_2}$$

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} = P_2^1 \vec{\Omega}_{3/R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$O_2 M'_{/R_1} = ? \quad O_2 M' = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_3}$$

$$O_2 M'_{/R_1} = P_2^1 P_3^2 O_2 M'_{/R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \cos \theta & 0 \\ L \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_3}$$

$$O_2 M'_{/R_1} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_2 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ y_2 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ z_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\vec{\Omega}_{3/R_1} \wedge O_2 M'_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -L \dot{\theta} \sin \theta \\ L \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

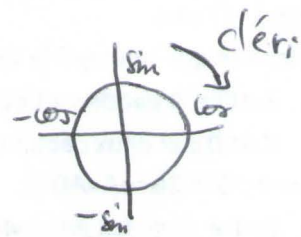
$$\vec{V}^i(O_2)_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{R_1} \Rightarrow \vec{V}^i(M)_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} -L \dot{\theta} \sin \theta \\ L \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{V}^i(M)_{/R_1} = \begin{pmatrix} -L \dot{\theta} \sin \theta \\ L \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{R_1}$$

5- Le vecteur accélération de M par rapport à R_1 exprimé dans R_2 :

$$\vec{\gamma}^1(M)_{/R_2} = \frac{d^1 \vec{v}^1(M)_{/R_2}}{dt} = \frac{d^2 \vec{v}^1(M)_{/R_2}}{dt} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{v}^1(M)_{/R_2}$$

Donc: $\vec{v}^1(M)_{/R_2} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{/R_2}$



$$\Rightarrow \vec{\gamma}^1(M)_{/R_2} = \frac{d^2}{dt} \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\ddot{\theta} \cos \theta \\ -L\ddot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

6- par cinématique du solide le vecteur accélération du point M par rapport à R_1 exprimé dans R_1

$$\vec{\gamma}^1(M)_{/R_1} = \vec{\gamma}^1(M)_{/R_2} + \frac{d^1 \vec{\Omega}_2^1}{dt} \wedge \vec{M}_R \vec{M}' + \vec{\Omega}_2^1 \wedge (\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{M}_R \vec{M}')$$

application:

$$\vec{\gamma}^1(M)_{/R_1} = \vec{\gamma}^1(O_2)_{/R_1} + \frac{d^1 \vec{\Omega}_3^1}{dt} \wedge \vec{O}_2 \vec{M}' + \vec{\Omega}_3^1 \wedge (\vec{\Omega}_3^1 \wedge \vec{O}_2 \vec{M}')_{/R_2}$$

$$\vec{\Omega}_3^1_{/R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{/R_1}, \quad \vec{O}_2 \vec{M}'_{/R_1} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{/R_1}$$

$$\vec{\Omega}_3^1 \wedge \vec{O}_2 \vec{M}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_3^1 \wedge (\vec{\Omega}_3^1 \wedge \vec{O}_2 \vec{M}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L\dot{\theta} \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{d^1 \vec{\Omega}_3^1}{dt}_{/R_1} = \frac{d^1}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \quad \text{--- ②}$$

$$\vec{\gamma}^1(O_2)_{/R_1} = \frac{d^1 \vec{v}^1(O_2)_{/R_1}}{dt} = \frac{d^1}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \text{--- ③}$$

donc $\vec{\gamma}^1(M)_{/R_1} = \text{①} + \text{②} + \text{③} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{/R_1}$