

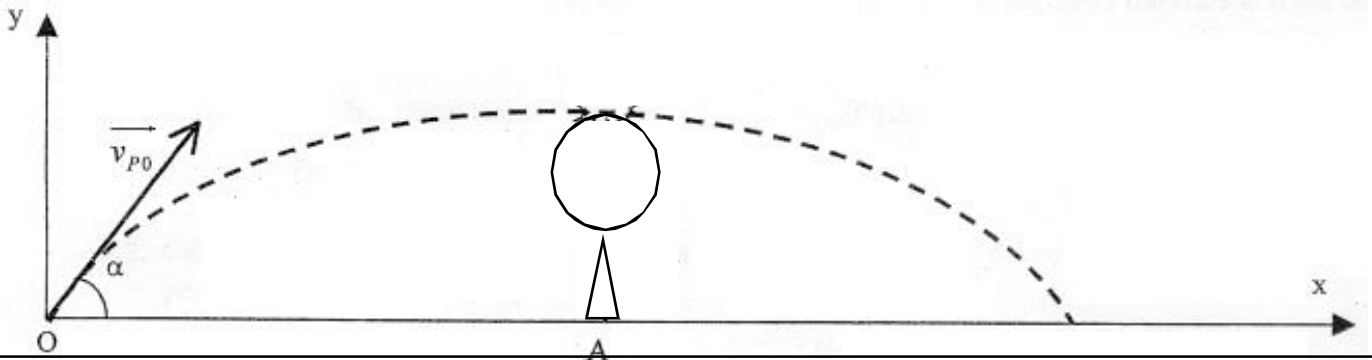
PROJECTILE DANS UN CHAMP DE PESANTEUR

1. CHUTE PARABOLIQUE SANS FROTTEMENT.

On étudie le mouvement d'une balle de golf frappée par un joueur au départ du parcours.

La balle de masse $m_B = 0,10 \text{ kg}$ assimilée à un point matériel M est lancée avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ de valeur $v_0 = 30 \text{ m/s}$, faisant un angle α de 45° par rapport à l'horizontale.

Sur la trajectoire de la balle se trouve en A un arbre.



1.1. L'EXPRESSION DU VECTEUR ACCELERATION A PARTIR DUBILAN DES FORCES.

Dans cette étude la vitesse atteinte par la balle étant faible, on considère comme négligeables les frottements de l'air dans tout l'exercice ainsi que la poussée d'Archimède. Al'aide de la deuxième loi de Newton, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on peut établir les équations horaires du mouvement de la balle ainsi que l'équation de sa trajectoire dans le repère (O, x, y).

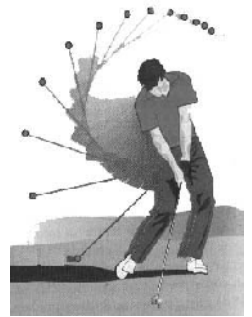
Remarque.

Les résultats qui suivent ne sont valables que si les conditions de l'étude sont respectées (chute libre).

Dans l'air, la vitesse du projectile doit être assez faible pour qu'on puisse considérer que la force de frottement exercée par l'air est négligeable devant le poids du solide.

Ce n'est pas le cas en réalité pour la balle de golf, qui est lancée à une vitesse v_0 de plusieurs dizaines de m.s^{-1} .

Dans ce cas le modèle de la chute libre n'est plus applicable: la trajectoire réelle n'est plus parabolique.



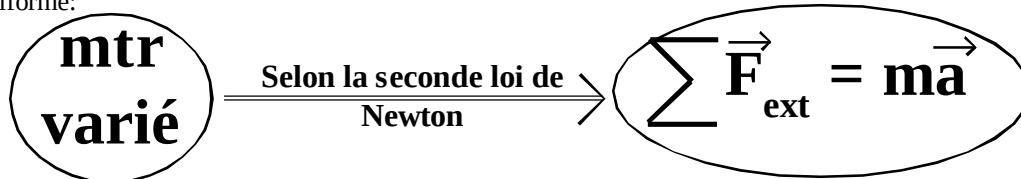
On étudie le système projectile dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Inventaire des forces appliquées au système.

Le poids
 $\vec{p}$

Point d'application:	G
Direction:	Verticale
Sens:	vers le centre de la Terre
Valeur:	$p = m \times g$

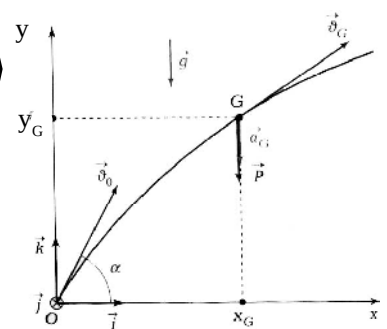
On peut appliquer la seconde loi de Newton, qui établit une relation vectorielle dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne non uniforme:



On a donc la relation $\vec{p} = m \vec{g} = m \vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un solide en chute libre est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

La valeur de l'accélération est indépendante de la masse.



1.2. LES COMPOSANTES DU VECTEUR ACCELERATION DANS LE PLAN (O, x, y).

On projette cette relation sur les trois axes en tenant compte des grandeurs algébriques:

$\vec{a}$	$\left \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$
-----------	---

1.3. LES COMPOSANTES DU VECTEUR VITESSE DANS LE PLAN (O,x,y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right. \rightarrow \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_{x0} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_{y0} = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right.$$

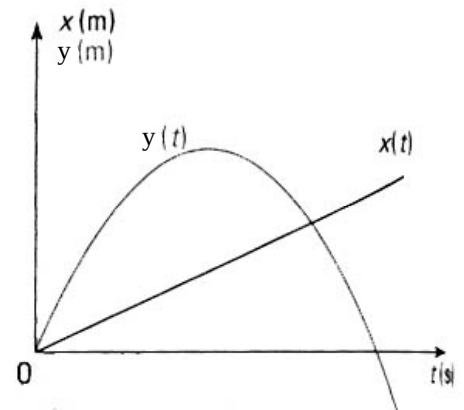
1.4. LES COMPOSANTES DU VECTEUR POSITION DANS LE PLAN (O,x,y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = V_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right. \rightarrow \vec{OM} \left| \begin{array}{l} x = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha + x_0 = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + z_0 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha \end{array} \right.$$

Les équations horaires montrent:

- Selon l'axe Oz, le mouvement est celui d'une chute libre verticale de vitesse initiale de valeur $v_0 \sin \alpha$;
- Selon l'axe Oy, puisque $y = 0$ à tout instant du mouvement, le mouvement du projectile s'effectue dans le plan (xOz), qui contient le vecteur vitesse initial v_0 ;
- Selon l'axe Ox, puisque la composante v_x du vecteur vitesse selon l'axe Ox est indépendante du temps, donc constante au cours du mouvement, le mouvement sur l'axe Ox est donc uniforme;
- Puisque la composante a_z de l'accélération est constante, le mouvement sur l'axe Oz est uniformément varié.



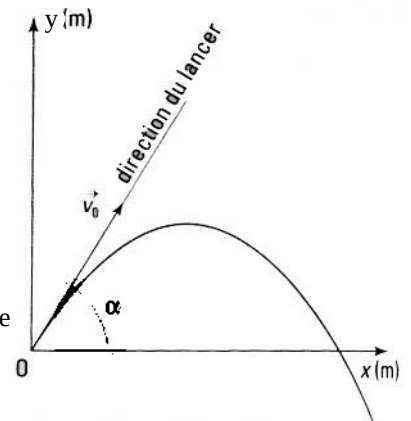
1.5. EQUATION DE LA TRAJECTOIRE.

Pour trouver l'équation de la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile, il suffit de remplacer le paramètre temps dans l'expression de z par:

$$t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha} \quad \text{ce qui donne} \quad y = -\frac{1}{2} g \left[\frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha} \right]^2 + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \left[\frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha} \right]^2 + x \cdot \tan \alpha$$

La trajectoire du centre d'inertie d'un projectile lancé avec une vitesse quelconque est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.



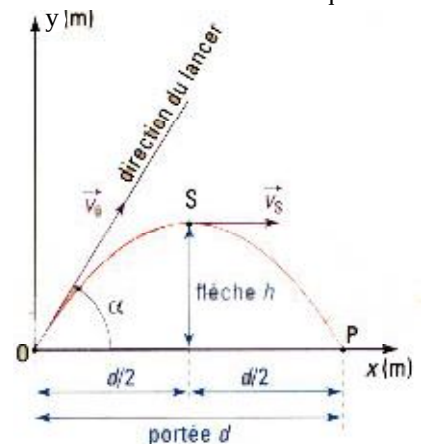
1.6. PORTEE DE TIR.

On appelle portée de tir la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal contenant O. Dans l'équation de la trajectoire, c'est la valeur de x différente de zéro qui annule z:

$$y_p = -\frac{1}{2} g \left[\frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha} \right]^2 + x_p \cdot \tan \alpha = 0$$

$$\text{on en déduit} \quad OP = x_p = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

La portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$ ou si $\alpha = 45^\circ$



1.7. LA FLECHE DE LA TRAJECTOIRE.

La flèche de la trajectoire est l'altitude maximale atteinte par le point G par rapport au point de lancement.

Au sommet de la parabole, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire donc horizontal. Par conséquent la composante v_{sy} est nulle.

$$v_y = -g \cdot t + V_0 \sin \alpha = 0 \quad \text{on en déduit l'instant } t_s \text{, date de passage du projectile au sommet S: } t_s = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

On remplace ensuite t par cette expression dans les équations paramétriques de position pour déterminer les coordonnées de S:

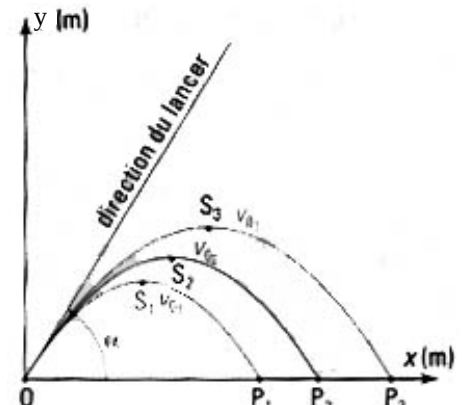
$$\text{OS} \quad \begin{cases} x_s = v_0 \cdot t_s \cdot \cos \alpha = v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ y_s = -\frac{1}{2} g t_s^2 + V_0 t_s \sin \alpha = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \end{cases}$$

Remarque. A noter que $x_p = 2 \cdot x_s$, de sorte que l'on retrouve une propriété de construction de la parabole, à savoir que la droite verticale passant par le sommet S est un axe de symétrie de la parabole.

1.8. INFLUENCE DE LA VALEUR DE LA VITESSE INITIALE.

A α donné ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), on fait varier la valeur v_0 de la vitesse initiale. La flèche h et la portée d sont proportionnelles à v_0^2 : plus la valeur v_0 de la vitesse initiale est grande, et donc plus le projectile s'élève et parcourt une distance importante.

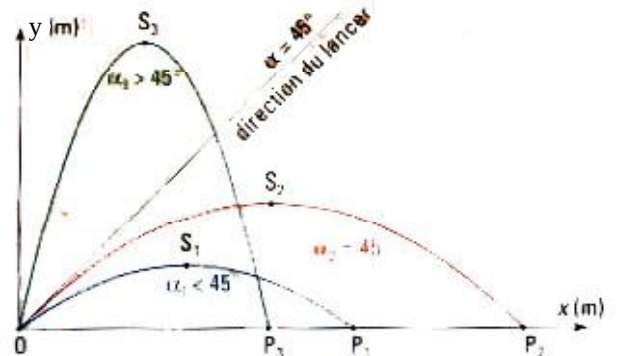
La vitesse initiale communiquée au projectile résulte d'un transfert d'énergie sous forme d'énergie cinétique (bras d'un lanceur, système de projection d'une machine...), il faut aussi, pour aller plus loin ou plus haut, ajuster l'angle de tir.



1.9. INFLUENCE DE L'ANGLE DE TIR.

● A v_0 donné, on fait varier la valeur de l'angle de tir α entre 0° et 90° . D'après les expressions respectives, la flèche h est proportionnelle à $\sin^2 \alpha$ et la portée d est proportionnelle à $\sin(2\alpha)$:

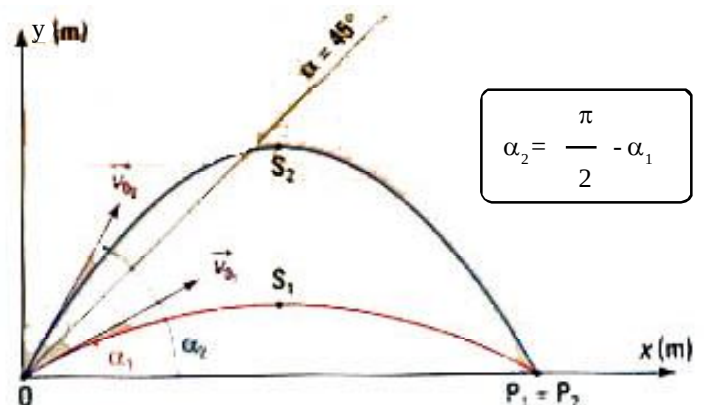
- Lorsque α croît de 0° à 45° , la flèche et la portée d augmentent;
- Pour $\alpha = 45^\circ$, la portée d est maximale ($\sin(2\alpha) = 1$). C'est cette valeur que les lanceurs de poids, de marteau ou de javelot, recherchent pour donner à leurs jets une efficacité optimale;
- Lorsque α croît de 45° à 90° , la flèche h continue à augmenter, alors que la portée diminue.



La flèche est maximale et la portée est nulle pour $\alpha = 90^\circ$: on retrouve alors le cas particulier de la chute libre verticale.

● A une valeur v_0 de la vitesse initiale donnée, deux projectiles lancés respectivement avec les angles de tir α_1 et α_2 complémentaires ont la même portée, mais des flèches différentes. Cette propriété est couramment utilisée par des joueurs de basket qui "lobent" un adversaire, ou de façon moins plaisante, par les artilleurs qui bombardent une position en évitant des obstacles de faibles hauteurs.

Remarque Si $\alpha_1 < \alpha_2$, le premier tir est tendu et le second est en cloche.



2. CHUTE VERTICALE SANS FROTTEMENT.

Prenons le cas d'une pomme lâchée verticalement sans vitesse initiale à une hauteur h du sol.

L'étude du mouvement sera identique à celle précédente.

2.1. EQUATIONS PARAMETRIQUES DU MOUVEMENT DE LA BALLE DE FUSIL.

Le mouvement de ce projectile est étudié dans un domaine de l'espace où le champ de pesanteur est considéré comme uniforme (ce n'est pas le cas pour un satellite !!).

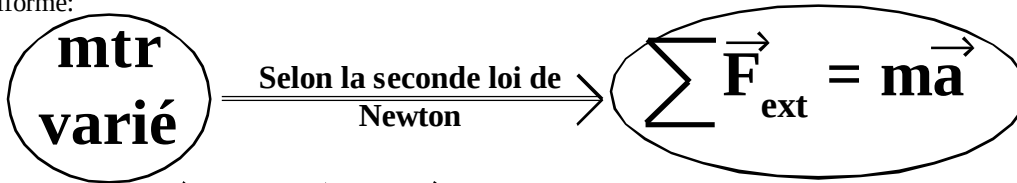
Nous allons négliger les frottements dus à l'air et la poussée d'Archimède.

On étudie le système projectile dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Inventaire des forces appliquées au système.

$\vec{p}$	Le poids	Point d'application:	G
		Direction:	Verticale
		Sens:	vers le centre de la Terre
		Valeur:	$p = m \times g$

On peut appliquer la seconde loi de Newton, qui établit une relation vectorielle dans le cas d'un mouvement de translation rectiligne non uniforme:



On a donc la relation $\vec{p} = m \vec{g} = m \vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un solide en chute libre est égal au vecteur champ de pesanteur g .
La valeur de l'accélération est indépendante de la masse.

2.2. LES COMPOSANTES DU VECTEUR ACCELERATION DANS LE PLAN (O, x, y).

On projette cette relation sur les trois axes en tenant compte des grandeurs algébriques:

$\vec{a}$	$a_x = 0$
	$a_y = -g$

2.3. LES COMPOSANTES DU VECTEUR VITESSE DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{x0} = 0 \\ v_y = -g.t + v_{y0} = -g.t \end{cases}$$

2.4. LES COMPOSANTES DU VECTEUR POSITION DANS LE PLAN (O, x, y).

Par intégration et en se plaçant dans les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégrations, on obtient

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -g.t + V_{B0} \end{cases} \rightarrow \vec{OM} \begin{cases} x = x_0 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} g.t^2 + z_0 = -\frac{1}{2} g.t^2 + h \end{cases}$$

Si vous étiez dans un ascenseur en chute libre, le fait de sauter juste avant de vous écraser au sol vous sauverait-il ?

Désolé, sauter n'évitera pas l'issue tragique de cette chute purement théorique (les ascenseurs, à part dans les films, sont équipés de systèmes de freinage de secours). Pourquoi l'atterrissage est-il si douloureux ? Parce que dans votre descente à toute berzingue, disons à 80 km/h, l'ascenseur et vous avez une énergie cinétique très importante. Quand, lors du fatal contact avec le rez-de-chaussée, votre vitesse devient subitement nulle, cette énergie cinétique ne disparaît pas (l'énergie ne disparaît pas); elle se transforme en énergie mécanique de déformation. En langage non scientifique: vous, comme l'ascenseur, vous écrabouillez. En quoi sauter pourrait-il vous aider ? En réduisant votre vitesse de descente, donc votre énergie cinétique au moment de l'impact, et finalement la déformation que devraient encaisser vos rotules. Mais voilà, aucun humain ne peut bondir à une vitesse proche de 80 km/h (tout en évitant le plafond de l'ascenseur). Les meilleurs basketballers atteignent à peine les 8 km/h. En plus, pour vous en sortir, il vous faudrait non seulement faire des sauts de super-héros mais en plus avoir une vision aux rayons X pour savoir à quel moment produire l'effet salvateur ...

