

2 OSCILLATEUR MECANIQUE DE ROTATION LE PENDULE DE TORSION

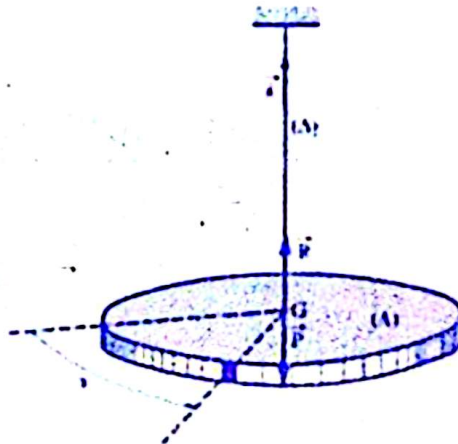
1 Définition

Un pendule de torsion est un solide fixé à un fil d'acier vertical passant par son centre d'inertie G et qui effectue des oscillations de torsion quand on l'écarte de sa position d'équilibre.

2 Equation horaire

2.1 Equation différentielle du mouvement

Considérons un disque homogène D , suspendu par un fil d'acier passant par son centre d'inertie G et qui effectue des oscillations de torsion. Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation Δ symbolisé par le fil est J .



A une date t quelconque lorsque l'abscisse angulaire du disque est α par rapport à la position d'équilibre, les forces appliquées au disque sont :

- Le poids $\vec{P}$ dont le moment par rapport à l'axe est $M_{\vec{P}/\Delta} = 0$
- La force $\vec{R}$ exercée par le fil pour soutenir la barre, de moment $M_{\vec{R}/\Delta} = 0$. (Le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ sont colinéaires à l'axe Δ . Les moments de ces forces par rapport à l'axe Δ sont donc nuls.)
- L'action développée par la torsion du fil sous forme d'un couple de rappel de moment $M_{C/\Delta}$ proportionnel et de signe contraire à l'élongation angulaire α : $M_{C/\Delta} = -C\alpha$. C est une constante dépendant uniquement du fil. On l'appelle **constante de torsion du fil**.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au disque en rotation est :

$$\sum M = J\ddot{\alpha}$$

soit: $M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} + M_{C/\Delta} = J\ddot{\alpha}$

Donc : $0 + 0 - C\alpha = J\ddot{\alpha}$

ou encore : $J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$

D'où :

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} \alpha = 0$$

L'équation différentielle d'un pendule de torsion est linéaire et du second ordre.

2.2 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle admet comme solution générale :

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

α_m est l'amplitude angulaire du mouvement. ω_0 est la pulsation propre des oscillations. φ est la phase à l'origine.

3 Caractéristiques

3.1 Pulsation propre

La pulsation propre des oscillations est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

3.2 Période propre

La période de propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

4 Etude énergétique

4.1 Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle E_p d'un pendule de torsion est à chaque instant, proportionnelle au carré de son élongation angulaire α :

$$E_p = \frac{1}{2} C \alpha^2 = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique E_c d'un pendule de torsion est, à chaque instant le demi-produit de son moment d'inertie J par le carré de sa vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2 \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J} \Rightarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.3 Energie mécanique de vibration

L'énergie mécanique E d'un pendule de torsion est à un instant, la somme de son énergie potentielle E_p et de son énergie cinétique E_c .

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \underbrace{[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]}_1 = \frac{1}{2} C \alpha_m^2$$

$$E = \frac{1}{2} C \alpha_m^2$$

L'énergie mécanique E du pendule de torsion se conserve : $E = \text{Cte}$

Conséquence de la conservation de l'énergie de vibration :

Nous avons : $E = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} C \alpha^2$

En dérivant cette expression par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{E} = \frac{1}{2} J \times 2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} C \times 2 \alpha \dot{\alpha}$$

soit : $\dot{E} = J \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + C \alpha \dot{\alpha}$

ou encore : $\dot{E} = \dot{\alpha} (J \ddot{\alpha} + C \alpha)$

$E = \text{Cte} \Rightarrow \dot{E} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} (J \ddot{\alpha} + C \alpha) = 0$

$\dot{\alpha} \neq 0 \Rightarrow J \ddot{\alpha} + C \alpha = 0$

On retrouve ainsi l'équation différentielle du pendule de torsion.

– si $\alpha = \pm \alpha_m$, $E_p = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \Rightarrow E_p = E$. Par conséquent : $E_c = 0$.

• Cuvette de potentiel

Lorsque le pendule est écarté au maximum de sa position d'équilibre, toute son énergie mécanique se retrouve sous forme d'énergie potentielle.

– si $\alpha = 0$, $E_p = 0 \Rightarrow E_c = E$.

Au passage à la position d'équilibre, l'énergie mécanique E est uniquement sous forme d'énergie cinétique.

Les vitesses du pendule de torsion à la position d'équilibre sont :

$$\dot{\alpha} = \pm \omega_0 \alpha_m$$

5 Analogie formelle entre grandeurs de rotation et grandeurs de translation

	Translation	rotation
Equation différentielle	$M\ddot{x} + kx = 0$	$J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$
Abscisse	x	α
Accélération	$\ddot{x}$	$\ddot{\alpha}$
Inertie	M	J
Elasticité	K	C