

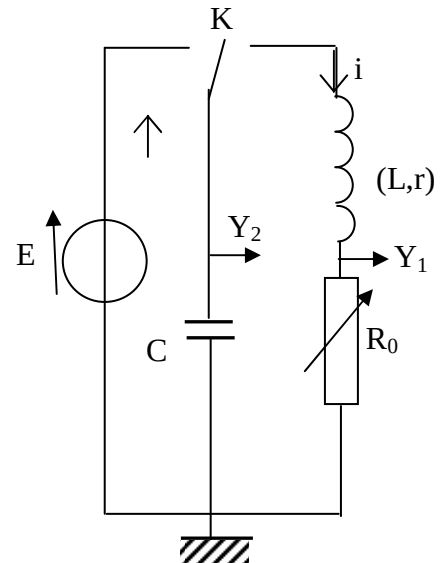
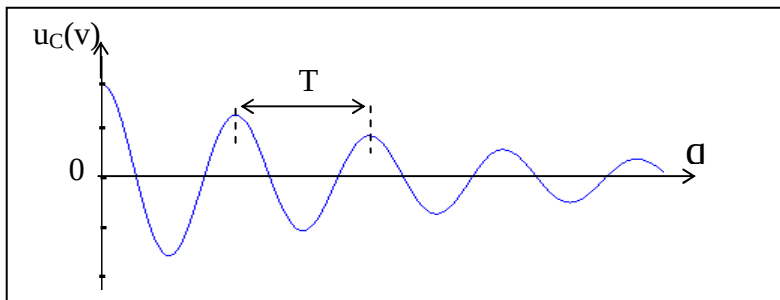
Oscillations électriques libres

A- Oscillations libres amorties

1/ Etude expérimentale

a- Expérience et observations

Après avoir chargé le condensateur (position 1)
On bascule l'interrupteur sur la position 2, on obtient l'oscillogramme suivant relatif à la décharge.



b- Interprétation

A l'état d'équilibre, la charge q du condensateur est nulle ainsi que la tension u_c aux bornes du condensateur. On constate que cet oscillogramme est symétrique par rapport à l'axe des temps ce qui montre que la charge q du condensateur varie et change de signe à des intervalles successifs et égaux. La charge q prend au cours du temps des valeurs alternativement positives et négatives autour de celle prise à l'état d'équilibre ($q = 0$). On dit que la charge (q) oscille au cours du temps. La charge q est appelée grandeur oscillante et le circuit RLC est appelé oscillateur.

Cette décharge se fait d'elle-même, les oscillations sont dites libres.

On constate aussi :

- que l'amplitude (la valeur maximale) de la tension u_c diminue au cours du temps : les oscillations sont alors amorties ;
- que la tension u_c est presque périodique, on dit alors qu'elle est pseudopériodique.

c- Remarque

L'intensité i est aussi une grandeur oscillante.

d- Conclusion

Les oscillations libres amorties sont des oscillations pseudopériodiques de pseudo période T.

1/ Influence de l'amortissement

a- Cause de l'amortissement

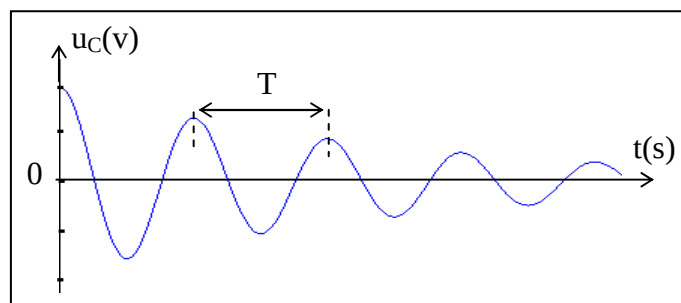
L'amortissement est du à la résistance du circuit $R = R_0 + r$ qui transforme une partie de l'énergie électrique en énergie thermique par effet Joule. Ceci se traduit par la diminution de l'amplitude de la grandeur oscillante.

b- Amortissement faible

L'oscillateur, dans ce cas, effectue un certain nombre d'oscillations puis revient à son état d'équilibre stable : c'est le régime

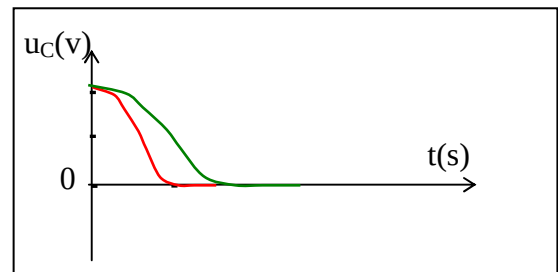
pseudopériodique des oscillations de pseudopériode T.

Plus l'amortissement est important plus la pseudopériode T est plus grande.



c- Amortissement important

L'oscillateur, dans ce cas, n'effectue aucune oscillations et revient lentement à son état d'équilibre stable : c'est le régime apériodique des oscillations.



II- Etude théorique

1/ Equation différentielle

$$u_B = ri + L \frac{di}{dt}, u_{R_0} = R_0 \cdot i, u_C = \frac{q}{C}$$

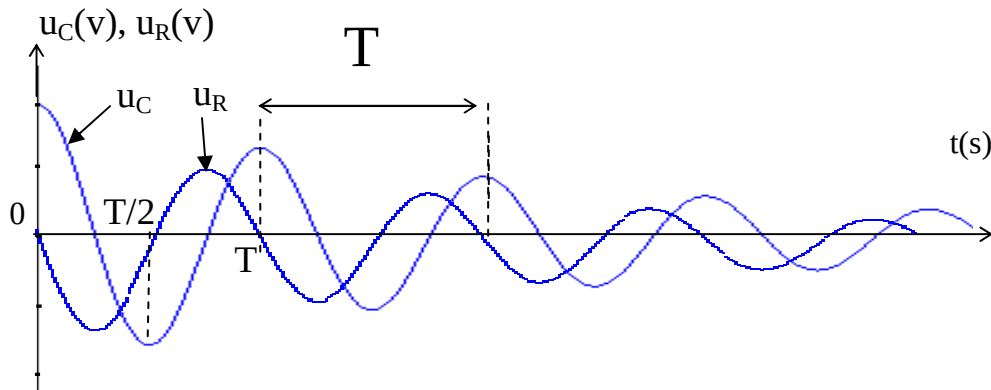
On applique la loi des mailles au circuit.

$$u_B + u_{R_0} + u_C = 0 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + ri + R_0 i + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq^2}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

2/ Energie électrique de l'oscillateur

a- Transformation mutuelle de l'énergie

L'énergie électrique totale de l'oscillateur est $E = E_c + E_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$



	$t = 0$	$t = T/4$	$t = T/2$	$t = 3T/4$	$t = T$
Etat de l'oscillateur					
Energie E	$E = E_C$	$E = E_L$	$E = E_C$	$E = E_L$	$E = E_C$

b- La non conservation de l'énergie

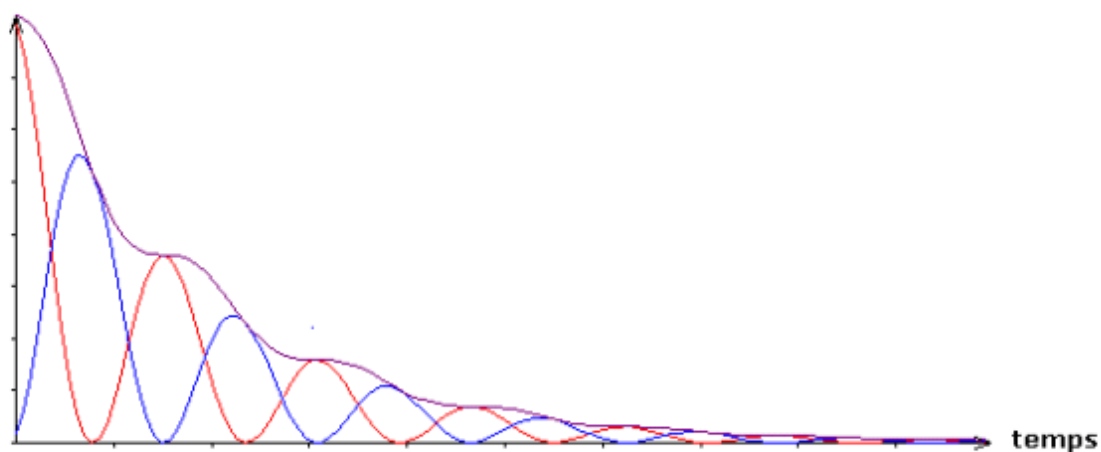
$$E = E_c + E_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \frac{dq}{dt} \left(L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

D'après l'équation différentielle $\frac{dE}{dt} = \frac{dq}{dt} (-Ri) = -Ri^2 < 0$. Avec $R = R_0 + r$

On constate que l'énergie électrique est une fonction décroissante.

$dE = -R \cdot i^2 \cdot dt$. La diminution d'énergie est due à la résistance R du circuit qui transforme une partie de l'énergie électrique en chaleur par effet Joule.

Energie



— Energie totale

— Energie E_L

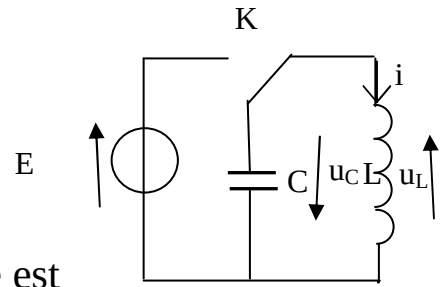
— Energie E_C

temps

B- Oscillations libres non amorties

I- Evolution de la charge du condensateur

1/ Equation différentielle de l'oscillateur



Le condensateur est initialement chargé et la bobine est purement inductive.

On applique la loi des mailles au circuit : $u_C + u_L = 0 \Leftrightarrow \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \text{on pose } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{Equation différentielle de l'oscillateur.}$$

2/ Expression de la charge du condensateur

L'équation différentielle de l'oscillateur est une équation différentielle de second ordre qui admet des solutions sinusoïdales de la forme :

$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$, q est la grandeur oscillante de l'oscillateur.

D'où les oscillations sont sinusoïdales

Avec :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est appelée pulsation propre de l'oscillateur.
- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ est appelée période propre de l'oscillateur.
- $N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est appelée fréquence propre de l'oscillateur.
- Q_m est appelée amplitude de la charge $q(t)$
- $(\omega_0 t + \varphi_q)$ phase de la charge à l'instant t
- φ_q phase initiale de la charge.

Remarque

L'amplitude et la phase initiale de la charge $q(t)$ dépendent des conditions initiales.

3/ Courbe $q = f(t)$

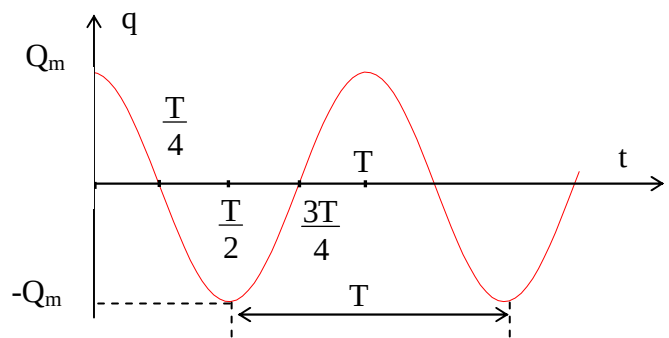
Un condensateur de capacité $C = 1\mu\text{F}$ est chargé par un générateur de f.e.m $E = 6\text{ V}$. A l'instant $t = 0$, le condensateur est relié à une bobine purement inductive d'inductance $L = 1\text{ H}$.

Sachant que la charge $q(t) = Q_m \sin(\omega_0.t + \varphi_q)$

1°) Déterminer l'amplitude Q_m , la pulsation propre et la phase initiale de la charge $q(t)$.

2°) Remplir le tableau suivant et tracer la courbe $q = f(t)$.

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
q	Q_m	0	$-Q_m$	0	Q_m



3°) a- Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant.

b- Tracer la courbe $i = f(t)$.

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_q$.

Remarque

$q(t)$ et $i(t)$ ont la même pulsation (période) on dit que les deux grandeurs sont synchrones.

4/ Comparaison de deux grandeurs sinusoïdales synchrones

On se propose de comparer les phases initiales de deux grandeurs sinusoïdales synchrones.

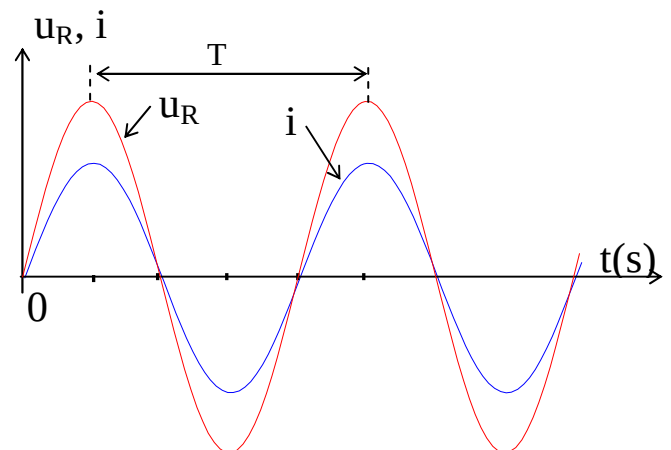
▪ Cas où $\Delta\varphi = 0$

Exp : $u_R(t) = U_{mR}\sin(\omega t + \varphi_{uR})$. D'après la loi d'Ohm $u_R(t) = R.i(t)$

$$i(t) = \frac{U_{mR}}{R} \sin(\omega t + \varphi_{u_R}) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$I_m = \frac{U_{mR}}{R} \text{ et } \varphi_i = \varphi_{u_R}$$

$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{uR} = 0$. On dit que les deux grandeurs sont en phase.



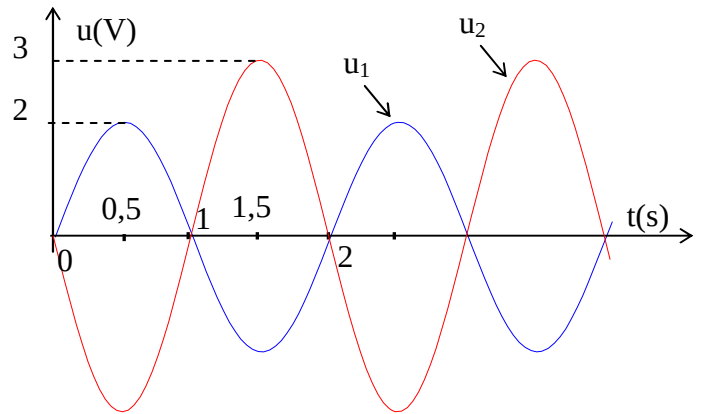
Deux grandeurs synchrones sont dites en phase si $\Delta\phi = 2k\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$

- Cas où $\Delta\phi = \pi$ rad

Exp : $u_1(t) = 2 \sin(\pi t)$; $u_2(t) = 3 \sin(\pi t + \pi)$

$\Delta\phi = \phi_{u2} - \phi_{u1} = \pi$ rad On dit que les deux grandeurs sont en opposition de phase.

Deux grandeurs synchrones sont dites en opposition de phase si $\Delta\phi = (2k+1)\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$.



- Cas où $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ rad

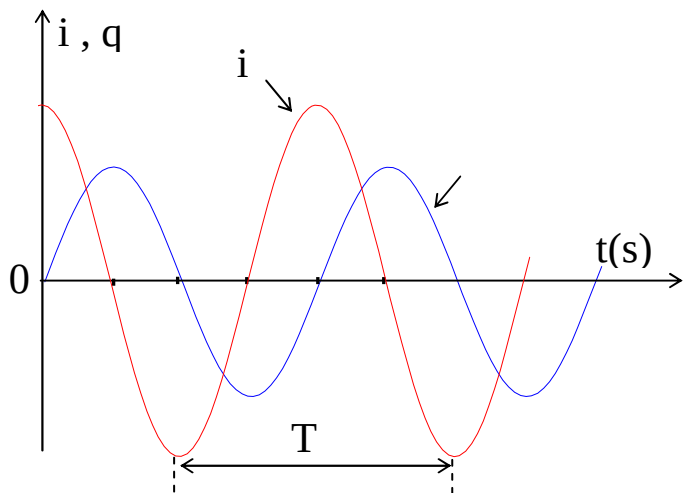
Exp : $\Delta\phi = \phi_i - \phi_q = \frac{\pi}{2}$ rad. On dit

que les deux grandeurs sont en quadrature de phase.

Deux grandeurs synchrones sont dites en quadrature de phase si

$\Delta\phi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; avec $k \in \mathbb{Z}$.

II- Energie électrique totale



1/ La conservation de l'énergie totale

- Energie électrostatique emmagasinée dans le condensateur.

$$E_C = \frac{q^2}{2C}$$

- Energie magnétique emmagasinée dans la bobine.

$$E_L = \frac{Li^2}{2}$$

- Energie électrique totale emmagasinée dans le circuit L.C.

$$E = E_C + E_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$$

$$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \phi_q) \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \phi_q).$$

$$E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_q) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi_q)$$

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} \text{ or } I_m = \omega_0 Q_m \text{ donc } Q_m^2 = \frac{I_m^2}{\omega_0^2} = I_m^2 \cdot L \cdot C, \text{ alors } E = \frac{I_m^2 L C}{2C}$$

$$\text{D'où } E = \frac{L I_m^2}{2}$$

L'énergie E s'exprime en fonction des grandeurs constantes d'où la conservation de l'énergie de l'oscillateur.

2/ Diagramme des énergies

On considère que la charge instantanée q d'un condensateur est :

$$q = Q_m \sin(\omega_0 t) \Rightarrow E_C = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_C = \frac{Q_m^2}{4C} (1 - \cos(2\omega_0 t)) \text{ et } E_L = \frac{Q_m^2}{4C} (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

