

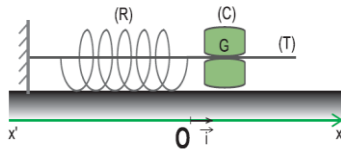
TD N°9: oscillateurs mécaniques libres

Situation 1 : Déterminations des caractéristiques des vibrations sinusoïdales

1. Un pendule effectue 120 oscillations par minute. Calcule: sa période, sa fréquence et sa pulsation.
2. La position d'une particule effectuant un mouvement périodique simple varie suivant l'équation $x = 6,0 \cos 4\pi t$ (en mètre).
 - 2.1 Trouve son amplitude et sa pulsation
 - 2.2 Calcule son sa fréquence et sa période
 - 2.3 Calcule sa position à $t = 0$? $t = 2,0s$?
 - 2.4 Calcule sa vitesse à $t = 0s$? $t = 2,0s$?
 - 2.5 Calcule la valeur de t lorsque $x = 6m$?

Situation 2: Déterminations de l'amplitude des oscillations (pour $v_0 = 0$ et pour $v_0 \neq 0$)

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$ est enfilé sur une tige horizontale. Une des extrémités du ressort est reliée à un cylindre creux (C) de masse $m = 100 \text{ g}$ qui peut coulisser sans frottement le long de la tige.



L'abscisse x du centre d'inertie G du cylindre (C) est repérée par rapport à O , position de G à l'équilibre
On écarte le cylindre de sa position d'équilibre d'une distance $x_0 = 2\text{cm}$ et on l'abandonne à lui-même à un instant t_0 choisi comme origine des temps.

1. Dans une première expérience, le cylindre est abandonné sans vitesse initiale.
 - 1.1 En appliquant le théorème du centre d'inertie, montre que les oscillations du centre d'inertie G du cylindre (C) sont sinusoïdales de pulsation propre ω_0 que l'on calculera.
 - 1.2 Montrer, par la détermination de $\frac{dE}{dt}$, que le système (cylindre, ressort) est conservatif.
 - 1.3 Exprime l'énergie mécanique E en fonction de k et de x_0 . En déduire que l'amplitude x_{m1} est égale à x_0 .
 - 1.4 Détermine l'équation horaire du mouvement de G .
2. Dans une deuxième expérience, le cylindre (C) est abandonné avec une vitesse initiale $v_0 = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.
 - 2.1 Qu'est-ce qui change dans les oscillations du pendule ? Justifier qualitativement la réponse.
 - 2.2 Sachant que l'élongation de G s'écrit : $x(t) = x_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, détermine l'amplitude x_{m2} , la phase initiale φ_2 et la vitesse maximale v_{m2} .
 - 2.3 Calcule l'énergie mécanique E_{02} de l'oscillateur à l'instant $t_0 = 0$.
 - 2.4 Retrouver énergétiquement les valeurs de x_{m2} et de v_{m2} .
3. Compare les énergies mécaniques du système {cylindre + ressort} dans les deux expériences considérées.

Situation 3 : Etude des oscillations d'un pendule élastique vertical

On considère un ressort de longueur à vide $l_0 = 0,10\text{m}$.

1° On suspend, à l'extrémité inférieure de ce ressort, un solide de masse $m = 50\text{g}$; sa longueur est alors $l = 0,12\text{m}$. Donnée : $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$.

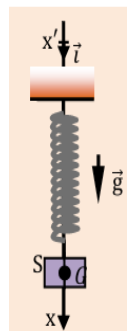
- a. Représenter le ressort à l'équilibre en faisant apparaître les forces agissant sur le solide.
- b. Que vaut l'allongement du ressort à l'équilibre ?
- c. Calculer la raideur du ressort.

2° On écarte maintenant verticalement et vers le bas le solide d'une distance $a = 1\text{cm}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Il oscille verticalement autour de la position de l'équilibre définie dans la première question, avec une période T égale à la période propre T_0 de cet oscillateur. Calculer T .

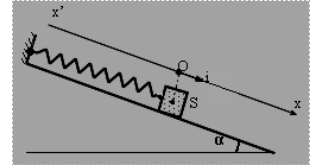
3° Soit x la position du solide S à l'instant t , l'origine de l'axe étant prise lorsque le système est en équilibre.

- a. L'énergie potentielle de pesanteur du système {terre-oscillateur-support} $E_{pp} = -mgx$. Quel est le niveau zéro de l'énergie potentielle de pesanteur ? Justifier le signe $-$.
- b. Exprimer l'énergie potentielle élastique de ce ressort en fonction de x .
- 4°a. Calculer l'énergie mécanique du système {terre-oscillateur-support} à l'instant $t=0$.
- b. A quelle condition cette énergie mécanique reste-t-elle constante lors des oscillations ?

Situation 4 : Etude des oscillations d'un pendule élastique sur le plan incliné



Un ressort est accroché à l'une de ses extrémités au bâti d'une table inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport au plan horizontal. A l'autre extrémité du ressort est accroché un solide auto-porteur S de masse $m = 0,6\text{kg}$. La longueur du ressort à vide vaut $l_0 = 16\text{cm}$. Lorsqu'on accroche le solide S, la longueur du ressort à l'équilibre devient $l = 26\text{cm}$.



1. Calculer la raideur k du ressort. ($g = 10\text{N/kg}$)

2. On tire le solide autoporteur de 7cm vers le bas et on le lâche sans vitesse à l'instant $t = 0$.

On prend comme origine spatiale la position G_0 du centre d'inertie G du solide S à l'équilibre. L'abscisse x de G à l'instant t sera déterminée sur l'axe (O, i) .

a. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide. Calculer la pulsation propre ω_0 .

b. Etablir l'équation horaire du mouvement de S.

3. Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur. L'énergie potentielle de pesanteur sera, conventionnellement, prise égale à zéro, pour le solide S, dans sa position d'équilibre.

Situation 5: Exploitation du graphe d'enregistrements des oscillations d'un pendule élastique

Un solide S, de masse m est attaché à un ressort à spires non jointives de raideur $k = 50\text{N.m}^{-1}$, l'ensemble est posé sur un banc à coussin d'air horizontal (figure 1). Avec un système approprié, on enregistre la position du centre d'inertie G de (S) à chaque instant t . Cette position est repérée par sur l'axe $x'x$ orienté de gauche à droite par un point d'abscisse x . L'origine O du repère (O, i) coïncide avec la position G lorsque (S) est à l'équilibre.

En écartant le solide (S) de la position d'équilibre et l'abandonne à lui-même à $t = 0$, le solide effectue des oscillations dont l'enregistrement est schématisé sur la figure 2.

1. Précise en le justifiant si le solide (S) :

1.1 Ecarté de sa position d'équilibre vers la droite ou vers la gauche.

1.2 Est lancé avec ou sans vitesse initiale à $t = 0$.

1.3 Effectue des oscillations amorties ou non amorties

2. Détermine la valeur de la pulsation propre ω_0 et en déduis la masse m du solide.

3. En appliquant le théorème du centre d'inertie, établis l'équation différentielle régissant le mouvement du solide.

4. La solution générale de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$.

4.1 Exprimer en fonction de m, k, x et v l'énergie mécanique du système. Montre qu'elle se conserve et calcule sa valeur.

4.2 En appliquant la conservation de l'énergie mécanique, détermine la vitesse initiale v_0 . En déduire la loi horaire $x(t)$.

4.3 Déterminer à la date t_1 , la vitesse v_1 .

Situation 6: Ressorts en série et en parallèles

Dans le problème les masses des ressorts utilisés sont négligeables. L'intensité de pesanteur est désignée par g et sa valeur est $9,8\text{m.s}^{-2}$.

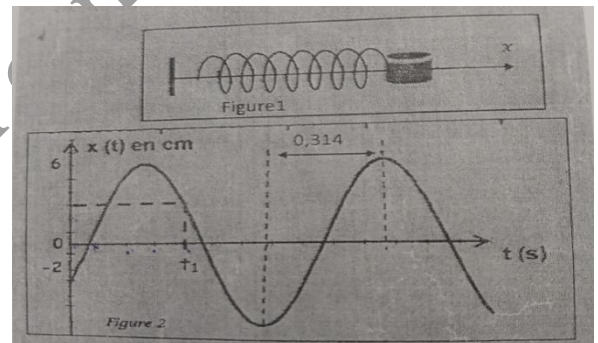
1. On dispose d'un ressort R_1 à spires non jointives de raideur K_1 . Une masse m est fixée, à l'extrémité libre du ressort R_1 suspendu à un support fixe. On écarte verticalement la masse m de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Donne sans calculer l'expression de la période T_0 des oscillations de la masse m . Calcule T_0 pour $m=0,36\text{kg}$ et $K_1=49\text{N.m}^{-1}$.

2. On accroche à l'extrémité libre de R_1 , un ressort R_2 de raideur K_2 (figure 1). A l'extrémité libre de R_2 est fixée la masse m précédente. Le système est supposé à l'équilibre. Montre que les deux ressorts ont les mêmes tensions $T_1=T_2$ puis détermine leur allongement respectif a_1 en fonction de m, g et K_1 ; et a_2 en fonction de m, g et K_2 .

3. a. On écarte ensuite la masse m de sa position d'équilibre et l'abandonne à l'instant $t=0$. Elle prend un mouvement oscillatoire. A un instant $t>0$ quelconque, l'abscisse de son centre de gravité est $OA=x$, O désignant la position d'équilibre. Les allongements à cet instant t sont $a_1'=a_1+x_1$ et $a_2'=a_2+x_2$.

Etablis les relations suivantes : $x_1 = \frac{K_2}{K_1+K_2} \cdot x$ et $x_2 = \frac{K_1}{K_1+K_2} \cdot x$



- b. Etablis la relation entre l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ et l'abscisse x de la masse m . En déduis la nature du mouvement et l'expression de la période T_1 .
- c. Calcule T_1 pour $K_1 = K_2 = 49mN^{-1}$ et $m=0,36kg$. Compare T_1 et T_0 .
- d. Montre que l'ensemble (R_1, R_2) se comporte comme un ressort unique de raideur K telle que $\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$.
4. Les ressorts R_1 et R_2 sont disposés comme indiqués dans la figure2. Ils ont tous deux leurs extrémités libres fixées à la masse m . On écarte toujours la masse m de sa position d'équilibre et l'abandonne à elle-même. Etablis l'expression de la période T_2 des oscillations.
- 5) La figure 3 vous propose une autre disposition des ressorts R_1 et R_2 et de la masse m . La masse peut se déplacée sur une surface lisse sans frottement. Montrer que pour déplacer m horizontalement d'une longueur x , il faut exercer suivant l'axe horizontal des deux ressorts une force d'intensité $F=2Kx$. On prendra directement $K_1=K_2=K$.

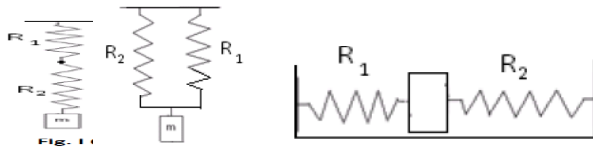


FIG. 1 : pendule de torsion

On réalise un pendule de torsion en suspendant un disque de cuivre horizontal par un fil de suspension dont la direction passe par son centre de gravité G . Le disque est un solide S homogène de moment d'inertie $J = 10^{-3} Kg \cdot m^2$ par rapport à l'axe qui lui est perpendiculaire en G .

Le fil de suspension vertical ayant pour constante de torsion C , la période des oscillations libres est $T_0 = 0,5 s$.

1) Etablis l'équation du mouvement du disque oscillant autour de sa position d'équilibre, et en déduis la valeur de C .

2) Le disque est initialement écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_0 = \frac{\pi}{6} rad$, puis lancé vers sa position d'équilibre à l'instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale α'_0 . Le disque passe par sa position d'équilibre pour la première fois à l'instant $t = 6,25 \cdot 10^{-2} s$.

Écrire l'équation du mouvement. En déduis α'_0 .

3) Une partie du disque est placée dans l'entrefer d'un aimant en U de telle sorte que le vecteur champ magnétique créé par l'aimant soit perpendiculaire au plan du disque.

a) Représente sur un schéma le dispositif ainsi décrit.

b) Explique qualitativement le phénomène observé lorsque le pendule est en mouvement.

Situation 8 : Un fil métallique vertical de constante de torsion C ; fixé en O à un support, soutient une barre (B) horizontale qui peut prendre seulement un mouvement de rotation au tour de l'axe Δ matérialisé par le fil. Le mouvement d'inertie de la barre par rapport à cet axe est J .

A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner la barre d'un angle α_0 .

Dans un sens choisi comme sens positif, puis on l'abandonne à la date $t = 0$ avec une vitesse de $-4,7 rad \cdot s^{-1}$. La période des oscillations est $T = 0,8 s$.

1) Etablir l'équation horaire du mouvement pris par la barre sachant qu'elle passe pour la première fois à sa position d'équilibre à la date $t = 0,1 s$. En déduire α_0

2) Calculer :

a) La vitesse angulaire maximale acquise par la barre ;

b) L'accélération angulaire maximale de la barre ;

3) On fixe à la barre de part et d'autre de l'axe, à 5 Cm de celui-ci deux solides ponctuelle de même masse $m = 30g$. La période des oscillations devient $T' = 1s$. En déduire la valeur du moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ) .

Situation 9: Amortissements des oscillations d'un pendule de torsion

Un disque D_1 de rayon $R = 20cm$ est suspendu à un fil A_1O_1 qui passe par son centre O_1 . La constante de torsion du fil est C .

Le moment d'inertie de D_1 par rapport à l'axe vertical passant par O_1 est J_1 . On fait osciller le disque.

1) Donne l'expression de la période T_1 des oscillations.

2) Un second disque D_2 semblable au précédent, est muni à sa périphérie d'une jante de masse $m=100g$. Il est suspendu par son centre O_2 à un fil A_2O_2 de même constante de torsion que A_1O_1 .

Trouve l'expression de la période T_2 des oscillations de D_2 en fonction de $R; m, J_1$ et C

3) On fait osciller simultanément les deux disques. Pendant que D_1 effectue 51 oscillations, D_2 en effectue 50. Détermine le moment d'inertie J_1 de D_1 .

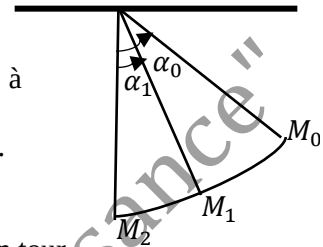
4) Les 51 oscillations de D_1 durent $3mn\ 24s$ En déduis la valeur de la constante de torsion du fil.

Donnée : le moment d'inertie d'une jante par rapport à un axe passant par son centre est $51J = mR^2$

Situation 10: Pendule simple

Une petite sphère S , ponctuelle de masse $m=200g$ est accrochée à un fil souple, de masse négligeable, inextensible de longueur $l=80cm$. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point fixe O .

On prendra : $g=9,8m.s^{-2}$. Le pendule ainsi obtenu est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_0=40^\circ$. S est lancée avec une vitesse $v_0=3m.s^{-1}$ à partir du point M_0 . On donne $\alpha_1=25^\circ$.



1. Calculer l'énergie mécanique E_0 de la sphère en M_0 . On prendra $E_{pp}=0J$, à l'équilibre.

2. Exprimer et calculer la vitesse de S lorsqu'elle passe aux points M_1 et M_2 .

3. Exprimer et calculer la tension du fil aux points M_1 et M_2 .

4. Calculer l'énergie mécanique E_2 de la sphère en M_2 . Conclure.

5. En déduire la valeur minimale de la vitesse v_0 pour que la sphère fasse un tour complet, le fil reste tendu au cours du mouvement circulaire.

6. Calculer l'angle d'écartement maximal α_m ($\alpha_m > \alpha_0$) avec $\alpha_m = (\overrightarrow{OM_2}; \overrightarrow{OM_m})$. A ce moment le fil se casse. Donner l'équation horaire de S après la rupture

Situation 11 : Pendule simple

Un pendule simple est formé par un fil inextensible de longueur $l=80cm$ portant une masse ponctuelle $m=50g$. 1. Le fil est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_m=0,2rad$ puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

a)) A partir de la conservation de l'énergie mécanique, montrer que le mouvement est de la masse m est sinusoïdale de rotation.

b)) Donner la loi horaire exacte de ce mouvement. c)) En déduire les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération angulaire.

2. Le fil est écarté de sa position initiale d'un angle $\alpha=\pi/3rad$ de sa position d'équilibre. Trouver la vitesse de la masse m au passage à la position d'équilibre ainsi que la tension du fil.

a)) Si la masse m est abandonnée sans vitesse initiale de sa position d'équilibre,

b)) Si la masse m est lancée avec une énergie mécanique $E=0,24J$.

3. Le fil est immobile. On communique à la masse m une vitesse horizontale $\vec{v}_0$ de module v_0 , la masse m décrit alors un cercle de rayon l dans le plan vertical. Au sommet de la trajectoire, la masse m a une vitesse $v=2m.s^{-1}$. Calculer la vitesse v_0 .

Situation12 : Un pendule composé et un pendule simple ont la même période $T = 2s$. Le pendule composé oscille autour d'un axe distant de son centre d'inertie de $20\ cm$. Son moment d'inertie par rapport à cet axe est $J = 5 \cdot 10^{-2} Kg.m^2$. Le pendule simple est constitué d'un fil de masse négligeable à l'extrémité duquel est fixé un petit objet de masse $m = 30g$.

1) Calcule la masse du pendule pesant.

2) Détermine la longueur du pendule simple.

3) On écarte le pendule simple de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_m = 45^\circ$ puis on le lâche sans vitesse initiale. Calcule :

a) L'énergie mécanique initiale du pendule simple.

b) L'énergie cinétique du pendule simple lorsque l'écartement du pendule est $\alpha = 20^\circ$

En déduis la vitesse du pendule à cet instant.

c) La vitesse à la position d'équilibre.

4) Pour quelles valeurs de α les énergies potentielle et cinétique sont-elles égales ? On prendra $\pi^2 = g = 9,8\ USI$