

Diarra

P R O B L È M E S

R É S O L U S

Aboumoussa Chérif Diarra

Collection D.L. DIARRA

SCIENCES PHYSIQUES
Terminales SB & SE

Par D.L. DIARRA
Professeur au Lycée Ibrahima Ly
de Banankabougou

η

Dahouda L DIARRA
Professeur principal au Lycée Ibrahima Ly
de Banankabougou (LILIY)

e-mail : davidiel2000@yahoo.fr
Cell : 601 - 61 - 95

Problèmes résolus de SCIENCES PHYSIQUES Préparation à l'examen du Bac

Niagara

Baco-Djicoroni

j'ai

DAVID.

Sommaire

I MECANIQUE

1. Projectile dans de champ de pesanteur : trajectoire d'un ballon de football ----- 7
2. Projectile dans le champ de pesanteur – tir tendu et tir en cloche ----- 10
3. Satellite terrestre ----- 14

II ELECTROMAGNETISME

1. Electron lancé dans un champ électrique uniforme ----- 16
2. Déviation d'un faisceau d'électrons par un champ magnétique et par un champ électrique ----- 20
3. Déviation d'un faisceau d'électrons par un champ électrique : étude de phénomènes qui font penser à la réfraction en optique ----- 22
4. Déviation des particules α par un champ magnétique et un champ électrique ----- 26
5. Séparation des isotopes du magnésium ----- 29
6. Détermination du nombre de masse d'un isotope de zinc ----- 34

III AUTO-INDUCTION

1. Courant induit et quantité d'électricité induite dans une bobine ----- 37
2. Inductance d'un solénoïde – flux propre ----- 40
3. Variation linéaire de la résistance : force électromotrice induite dans une bobine ----- 42

IV ENERGIE

1. Energie potentielle de pesanteur – énergie mécanique : conservation et non conservation de l'énergie mécanique ----- 44
2. Calorimétrie ----- 48

V LES OSCILLATIONS LIBRES

1. Le pendule élastique vertical ----- 50
2. Association de deux ressorts identiques d'axes horizontaux ----- 53
3. Association de deux ressorts identiques d'axes verticaux oscillations d'un cadre dans un champ magnétique uniforme ----- 54
4. Oscillations horizontales d'un ressort ----- 56
5. Pendule élastique constitué de deux ressorts en série ----- 60
6. Oscillations d'un ressort sur un plan incliné - projectile lancé par un ressort ----- 64
7. Pendule de torsion constitué par une barre rectiligne ----- 68
8. Pendule de torsion constitué par un disque homogène ----- 72
9. Circuit oscillant : énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine ----- 73
10. Détermination de la période d'un circuit Lc à partir de l'oscillogramme ----- 76
- ① Circuit Lc : charges et décharges successives du condensateur – analyse à l'oscilloscope ----- 77

V LES OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES : LE COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL

1. Caractéristiques d'une bobine ----- 80
2. Détermination de la nature d'un dipôle ----- 81
3. Mesure d'un déphasage - intensité instantanée du courant. Puissance moyenne consommée - caractéristiques d'une bobine ----- 83
4. Etude d'une résonance d'intensité dans un circuit – bande passante à trois décibels – facteur de qualité - caractéristiques du circuit. (classes de SE) ----- 85
5. Détermination des caractéristiques d'un circuit. Construction de Fresnel ----- 88
6. Puissance moyenne. Puissance apparente. Facteur de puissance ----- 90

VII PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE

1. Effet photoélectrique ----- 93
2. Niveaux d'énergie dans l'atome d'hydrogène ----- 94

3.	Nombre de noyaux radioactifs – activité d'une substance radioactive	96
4.	Energie libérée lors de la désintégration du polonium 210 – longueur d'onde du photon γ associé	97

VIII CHIMIE ORGANIQUE

1.	Configurations du pent-3-ène-2-ol	101
2.	Stereo-isomères d'un alcène	102
3.	Isomères d'un alcène	103
4.	Action du sodium sur un alcool primaire aromatique	104
5.	Détermination de la formule d'une amine	105
6.	Passage d'un acide carboxylique à un anhydride d'acide	107
7.	Passage d'un alcool à une amide	107
8.	synthèse d'un peptide	109

IX CINETIQUE CHIMIQUE

1.	Décomposition de l'hémi-pentoxyle d'azote	112
2.	Saponification de l'éthanoate d'éthyle	114
3.	Détermination de l'ordre d'une réaction par la méthode graphique	115
4.	Cinétique d'une réaction d'estérification	117
5.	Décomposition de l'éthanal	120
6.	Décomposition de l'eau oxygénée	122
7.	Oxydation de l'ion iodure par l'ion peroxodisulfate	123
8.	Méthode chimique d'étude de la saponification	126
9.	Cinétique de la décomposition du chlorure de sulfuryle	128

X EQUILIBRE CHIMIQUE

1.	Réaction de l'acide éthanoïque avec l'éthanol	131
2.	Dissociation du pentachlorure de phosphore	133
3.	Synthèse de l'ammoniac	135

XI LES ACIDES FORTS ET LES BASES FORTES

1.	Détermination de la concentration d'une solution d'acide chlorhydrique	137
2.	Mélange de deux solutions d'acides forts	138
3.	pH d'un mélange de deux solutions de bases fortes	139

XII COUPLE ACIDE/BASE

1.	Acide méthanoïque	141
2.	Solution d'ammoniac et solution de mono éthylamine	142
3.	Détermination de la concentration d'une solution d'ammoniac	144
4.	Solution de chlorure d'ammonium – mélange tampon	145

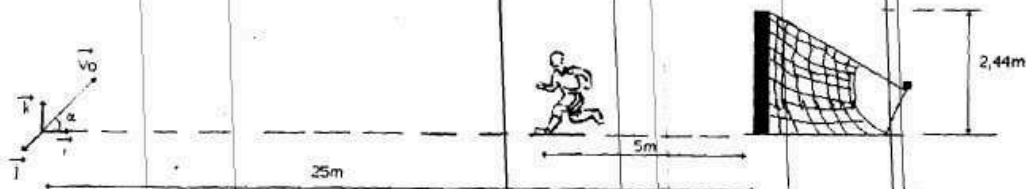
XIII REACTIONS ACIDE-BASE. DOSAGES

1.	Réaction entre une solution d'acide faible et une solution de base forte-trois méthodes pour préparer une solution tampon	148
2.	Réaction entre une solution de base faible et une solution d'acide fort	150
3.	Identification de deux solutions acides	152

CHAPITRE I MECANIQUE

1_ Projectile dans le champ de pesanteur : trajectoire d'un ballon de football

Lors d'un match de football en Angleterre, au stade Wembley, Eric Cantona reçoit une balle au sol, dans l'axe des buts adverses, à 25 m de la ligne de but alors que le Gardien était sorti de sa cage de 5 m. D'une frappe rapide du pied, il communique à la balle une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{k})$ inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale et de valeur $v_0 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'influence de l'air est négligeable.



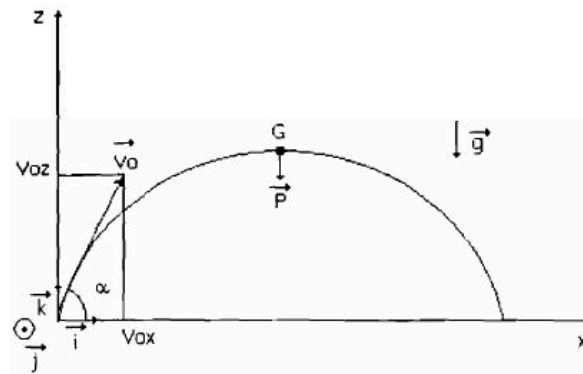
- 1° Déterminer les équations paramétriques de la balle dans le repère cartésien $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- 2° Montrer que le mouvement de la balle se situe dans un plan et trouver l'équation de sa trajectoire.
- 3° Déterminer :
 - a. la hauteur maximale H atteinte par la balle ainsi que le temps t_1 que met la balle pour arriver à ce point ;
 - b. la vitesse v_1 de la balle à cette hauteur.
- 4° La hauteur des buts est 2,44 m. Le Gardien peut toucher de la main en sautant, une balle située au plus à 3 m du sol.
 - a. Calculer le temps t_2 mis par la balle pour arriver au niveau du Gardien.
 - b. Quelle est la vitesse v_2 de la balle à cet instant ?
 - c. Le Gardien peut-il oui ou non toucher la balle ? (justifier votre réponse). Si non dire si la balle entre dans les buts.

Prendre $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

LMDB dev SB

Solution

1° Le ballon, de masse m , constitue à lui seul le système mécanique étudié. Si l'on néglige la résistance de l'air au mouvement, le système n'est soumis qu'à une seule force extérieure : le poids $\vec{p} = m\vec{g}$.



d'où

$$m\vec{g} = m\vec{a}_G \quad (1)$$

G

(1),

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (2)$$

(2),

—

$\vec{j}$

sur l'axe orienté par $\vec{k}$: $z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$

Numériquement :

$$x = (18 \times 0,86)t = 15,48t \quad (4)$$

$$y = 0 \quad (5)$$

$$z = -0,5 \times 10t^2 + 18 \times 0,5t = -5t^2 + 9t \quad (6)$$

$$\begin{cases} x = (15,48)t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 9t \end{cases}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{OG} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

projection

y =

2° Comme $y = 0$, le mouvement s'effectue dans le plan xoz . D'autre part la relation (4) donne :

$$t = \frac{x}{15,48} \quad (7)$$

Compte tenu de (7) l'équation (6) s'écrit :

$$z = \frac{-5x^2}{(15,48)^2} + 9 \frac{x}{15,48}$$

soit :
$$z = -0,02x^2 + 0,58x$$

Cette dernière relation est l'équation de la trajectoire

$$z = -2 \cdot 10^{-2} x^2 + 0,58x$$

3° a) L'abscisse x_S du sommet de la trajectoire est obtenue en annulant la dérivée de z par rapport à la variable x .

Or :
$$\frac{dz}{dx} = -4 \cdot 10^{-2} x + 0,58$$

Lorsque $x = x_s$,
$$\frac{dz}{dx} = 0$$

donc :
$$-4 \cdot 10^{-2} x_s + 0,58 = 0$$

d'où
$$x_s = \frac{0,58}{4 \cdot 10^{-2}} = 14,50 \text{ m}$$

La hauteur maximale H est la cote z_s du sommet.

avec :
$$z_s = -2 \cdot 10^{-2} x_s^2 + 0,58 x_s$$

soit :
$$z_s = -2 \cdot 10^{-2} (14,50)^2 + 0,58(14,50) = 4,20 \text{ m}$$

$$H = 4,20 \text{ m}$$

La vitesse de la balle à chaque instant est donnée par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

Au sommet de la trajectoire, la vitesse se confond avec sa composante horizontale : $v_1 = v_x$; donc $v_z = 0$

or :
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(-5t^2 + 9t)$$

$$v_z = -10t + 9$$

A la date t_1 , $v_z = 0$

soit :
$$-10t_1 + 9 = 0$$

d'où :
$$t_1 = \frac{9}{10} = 0,9 \text{ s}$$

$$t_1 = 0,9 \text{ s}$$

b) Nous avons : $v_1 = v_x$

Or

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(15,48t) = 15,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = 15,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4°

$$x = (15,48)t$$

$$20 = (15,48)t_2$$

$$t_2 = \frac{20}{15,48} = 1,29 \text{ s}$$

$$t_2 = 1,29 \text{ s}$$

$$\vec{v}_2$$

$$v_{2x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(15,48)t = 15,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{2z} = \frac{dz}{dt} = -10t_2 + 9 = -10 \times 1,29 + 9 = -3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2z}^2}$$

$$v_2 = \sqrt{(15,48)^2 + (-3,9)^2} = 15,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 15,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$z(20) = -2 \cdot 10^{-2} \quad z(20) = 0,58 \times 20 \text{ m} = 3,6 \text{ m}$$

>

h'

$$z(25) = -2 \cdot 10^{-2} \cdot (25)^2 + 0,58 \times 25 = 2 \text{ m} < 2,44 \text{ m}$$

2_

1°

A

α

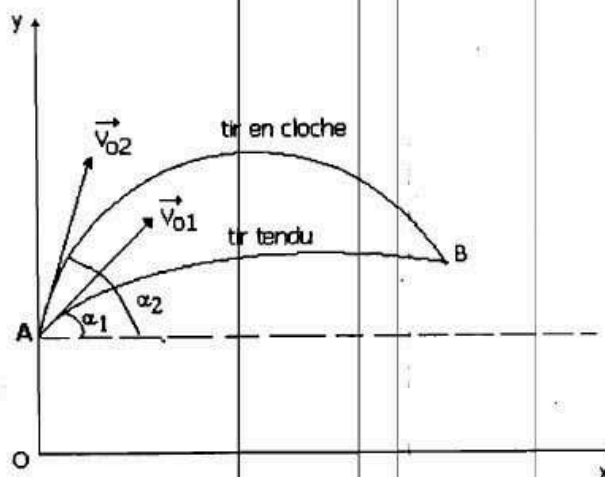
$$u \text{ e } v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$x_A = y_A = 1,65 \text{ m},$$

$$x_B = y_B = 5 \text{ m}.$$

$$\tan \alpha,$$

2° Il existe deux angles de tir α_1 et α_2 qui permettent d'atteindre B (tir tendu et tir en cloche).



a) Calculer α_1 et α_2 .

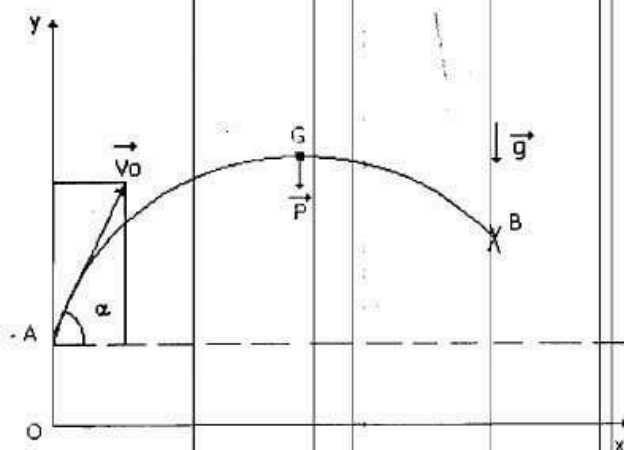
b) En envisageant les deux cas précédents, déterminer la hauteur maximale atteinte.

3° On considère que la pierre est lancée sous l'angle α_2 . Déterminer la norme et la direction du vecteur vitesse au point B.

LMDB dev SE

Solution

1° En négligeant la résistance de l'air, la seule force qui s'exerce sur la pierre est le poids $\vec{p} = m\vec{g}$



D'après le théorème du centre d'inertie :

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OA} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}; \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}; \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ y_A \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha)t \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + \quad (4)$$

;

$$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \alpha + y_A$$

or :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha + y_A$$

$$\frac{10(1 + \tan^2 \alpha)}{2 \times 10^2} \alpha \quad 1,65$$

$$y = -\frac{1}{80} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha + 1,65$$

2°

trajectoire,

$$y_B = -\frac{1}{80} (1 + \tan^2 \alpha) x_B^2 + x_B \tan \alpha + 1,65$$

$$5 = -\frac{(1 + \tan^2 \alpha) 625}{80} + 25 \cdot \tan \alpha + 1,65$$

$$5 = -7,81 - 7,81 \tan^2 \alpha + 25 \tan \alpha + 1,65$$

$$7,81 \tan^2 \alpha - 25 \tan \alpha + 11,16 = 0$$

$$\tan \alpha$$

$$7,81 X^2 - 25 X + 11,16 = 0$$

$$\Delta = 25^2 - 4 \times 7,81 \times 11,16 = 6,62^2$$

l'équation

$$X_1 = \frac{25 - 16,62}{2 \times 7,81} = 0,5364$$

$$X_2 = \frac{25 + 16,62}{2 \times 7,81} = 2,66$$

par conséquent :

$$\tan \alpha_1 = 0,5364 \Rightarrow \alpha_1 = 28,21^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = 2,66 \Rightarrow \alpha_2 = 69,42^\circ$$

$$\alpha_1 = 28,21^\circ$$

$$\alpha_2 = 69,42^\circ$$

b) La hauteur maximale h est l'ordonnée du sommet de la trajectoire. En utilisant l'expression de la flèche, nous obtenons :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + y_A$$

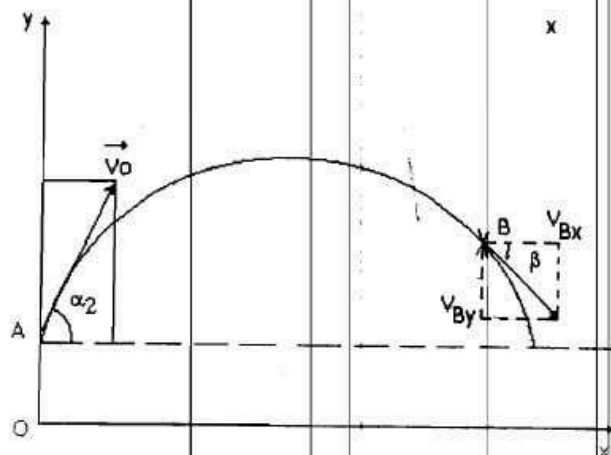
pour $\alpha = \alpha_1$, on a : $h_1 = \frac{(20)^2 \sin^2 28,21^\circ}{2 \times 10} + 1,65 = 6,12\text{m}$

pour $\alpha = \alpha_2$, on a : $h_2 = \frac{(20)^2 \sin^2 69,42^\circ}{2 \times 10} + 1,65 = 19,18\text{m}$

$$h_1 = 6,12\text{m}$$

$$h_2 = 19,18\text{m}$$

3° Les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}_B$ sont V_{Bx} et V_{By} telles que :



$$V_{Bx} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(V_0 \cos \alpha_2)t$$

$$= V_0 \cos \alpha_2$$

soit :

$$V_{Bx} = 20 \cos 69,42^\circ = 7\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{By} = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin \alpha_2$$

puisque :

$$x_B = (V_0 \cos \alpha_2)t$$

$$t = \frac{x_B}{V_0} = \frac{25}{0,35} = 3,57s$$

$$V_{By} = -10 \times 3,57 + 20 \sin 69,42^\circ = -16,97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}$$

$$V_B = \sqrt{49 + (-16,97)^2} = 18,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

 $\vec{V}_B$
 β

$$\tan \beta = \frac{V_{By}}{V_{Bx}} = \frac{-16,97}{7} = -2,424$$

$$\beta = -67,58^\circ$$

$$\boxed{V_B = 18,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\boxed{\beta = -67,58^\circ}$$

3_

12h30mn.

1°

2°

3°

g_0

$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

R_T

II

1°

ω

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

12h30mn

750mn

$45 \cdot 10^3 \text{ s}$

$$\omega = \frac{2 \cdot 3,14}{45 \cdot 10^3} = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\omega = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2°

e en fonction de l'altitude est :

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{R_T^2 \cdot g_0}$$

$$T^2 \cdot R_T^2 \cdot g_0 = 4\pi^2 (R_T + h)^3$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot R_T^2 \cdot g_0}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot R_T^2 \cdot g_0}{4\pi^2}} - R_T$$

$$R_T = 6400\text{km} = 64 \cdot 10^5 \text{m}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(45 \cdot 10^3)^2 \times (64 \cdot 10^5)^2 \times 9,8}{40}} - 64 \cdot 10^5 = 2,08 \cdot 10^7 \text{m}$$

$$\boxed{h = 20800\text{km}}$$

$$v = \omega \times (R_T + h)$$

$$v = 1,39 \cdot 10^{-4} \times (64 \cdot 10^5 + 2,08 \cdot 10^7)$$

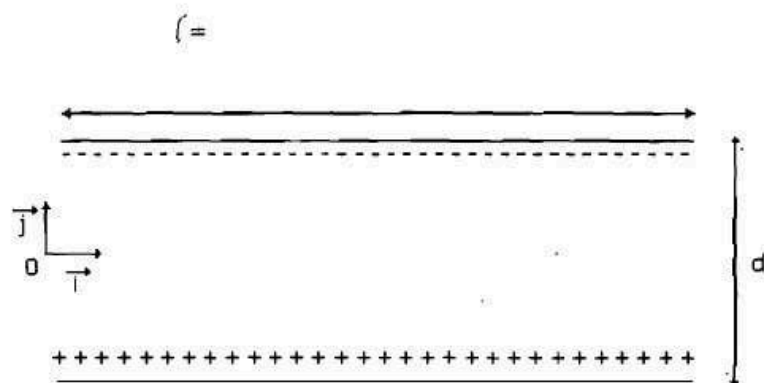
$$v = 2,9 \cdot 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 290\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v = 290\text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

soit :

ELECTROMAGNETISME

1_



$$v_0 = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

l'une $U,$
à

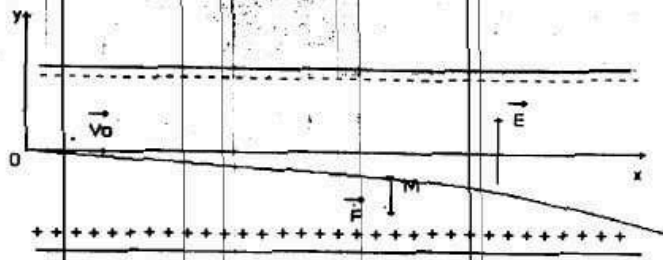
=

fonction $d, U,$ $\alpha,$
condensateur

$$\left| \begin{array}{l} 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ 1,6 \cdot 10^{-19} \end{array} \right|$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$



La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

soit :

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

d'où :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Par intégrations successives du vecteur accélération on obtient :

le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0 \quad (1)$$

le vecteur position

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \frac{q\vec{E}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t$$

soit, avec $q = -e$

$$\vec{OM} = -\frac{e\vec{E}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t \quad (2)$$

les coordonnées des vecteurs sont :

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par projection dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, la relation (2) devient :

- sur l'axe orienté par $\vec{i}$:

$$x = v_0 t \quad (3)$$

- sur l'axe orienté par $\vec{j}$:

$$y = -\frac{eE}{2m} t^2 \quad (4)$$

Éliminons t entre les relations (3) et (4).

D'après (3) :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

En portant dans (4), il vient :

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

comme :

$$E = \frac{U}{d}$$

on a alors :

$$y = -\frac{eU}{2mdv_0^2} x^2$$

$$y = \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} U x^2}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-14}} = -4,4 \cdot 10^{-2} U x^2$$

$$y = -4,4 \cdot 10^{-2} U x^2$$

$$1, |y| < -$$

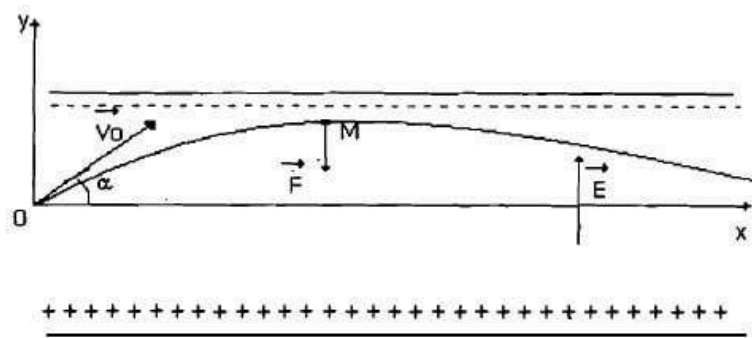
$$4,4 \cdot 10^{-2} U \cdot l^2 < \frac{d}{2}$$

$$U < \frac{d}{8,8 \cdot 10^{-2} l^2}$$

$$U < \frac{2 \cdot 10^{-2}}{8,8 \cdot 10^{-2} \times 16 \cdot 10^{-4}}$$

$$U < 142 \text{ V}$$

2° a)



$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{OM}(x) ; \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$(0, \vec{i}) \quad (v_0 \cos \alpha) t \quad (5)$$

$$(0, \vec{j}) \quad y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \quad (6)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{eE}{m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{m d v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

f,

v_y

or

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

D'après (6) :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{eE}{m}t + v_0 \sin \alpha$$

puisque :

$$v_y = 0$$

il vient :

$$-\frac{eE}{m}t + v_0 \sin \alpha = 0$$

on en déduit :

$$\sin \alpha = \frac{eE}{mv_0}t$$

ou, avec $E = \frac{U}{d}$:

$$\sin \alpha = \frac{eU}{mdv_0}t$$

D'autre part, d'après (3) :

$$x = (v_0 \cos \alpha)t$$

A la sortie, $x = \ell \Rightarrow$

$$\ell = (v_0 \cos \alpha)t$$

d'où :

$$t = \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha}$$

par conséquent :

$$\sin \alpha = \frac{eU\ell}{mdv_0^2 \cos \alpha}$$

ou encore :

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{eU\ell}{mdv_0^2}$$

en utilisant la formule trigonométrique : nous obtenons :

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{eU\ell}{mdv_0^2}$$

d'où :

$$\sin 2\alpha = \frac{2eU\ell}{mdv_0^2}$$

soit :

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 50}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 2 \cdot 10^{-2} \times 10^{14}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 0,3516$$

Il existe deux cas :

premier cas :

$$2\alpha = 20,6^\circ$$

donc :

$$\alpha = 10,3^\circ$$

deuxième cas :

$$2\alpha = 180^\circ - 20,6^\circ$$

donc :

$$\alpha = 90^\circ - 10,3^\circ = 79,7^\circ$$

Pour $\alpha_1 = 10,3^\circ$, l'ordonnée de sortie est :

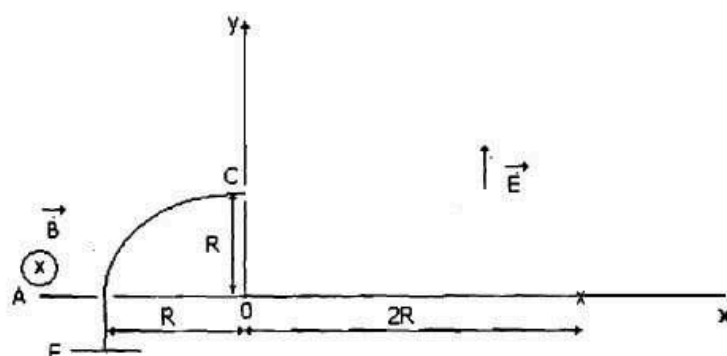
$$y(\ell) = \frac{-eU\ell^2}{2mdv_0^2 \cos^2 \alpha_1} + \ell \tan \alpha_1$$

Pour $\alpha_2 = 79,7^\circ$, $y_{(0)} = 1 \text{ cm}$. Cette valeur ne convient pas car l'électron est intercepté par l'armature positive ; donc :

$$\boxed{\alpha = 10,3^\circ}$$

11s

A le filament $U_0 = 285 \text{ V}$. Grâce à T



- 1°
- 2°
- 3°
- 4°

$$OM=2R.$$

$$|e| \begin{matrix} 9,1 \cdot 10^{-31} \\ 1,6 \cdot 10^{-19} \end{matrix}$$

compos

1°

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eU_0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 285}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° Le rayon de courbure de la trajectoire des électrons dans le champ magnétique

est :
$$R = \frac{mv_0}{Be}$$

On en déduit :
$$B = \frac{mv_0}{Re}$$

avec :
$$R = 20\text{cm} = 0,2\text{m}$$

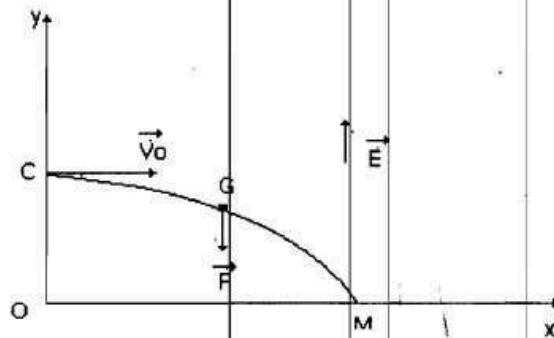
donc :
$$B = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7}{0,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{T}$$

$$B = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{T}$$

3° Les forces qui s'exercent sur un électron est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le poids est négligeable devant la force électrique. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m\vec{a} = -e\vec{E}$$

d'où :
$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$



Le vecteur accélération des électrons est constant. Par intégrations successives, on

obtient le vecteur position :
$$\vec{OG} = -\frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OC}$$

Les matrices des coordonnées des différents vecteurs sont :

$$\vec{OG} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}; \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Par projection sur les axes, le vecteur position $\vec{OG}$ donne :

suivant ox :
$$x = v_0 t \quad (1)$$

suivant oy :
$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 + R \quad (2)$$

D'après (1) :
$$t = \frac{x}{v_0} \quad (3)$$

La relation (2) compte tenu de (3) donne l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} x^2 + R$$

L'ordonnée

4°

x_M

$$y_M = -\frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} x_M^2 + R$$

$$\frac{-eE \times 4R^2}{2mv_0^2} + R$$

$$0 = -R \left(\frac{2eER}{mv_0^2} - 1 \right)$$

$\neq$

$$\frac{2eER}{mv_0^2} - 1 = 0$$

$$\frac{2eER}{mv_0^2} = 1$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2eR}$$

$$E = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 10^{14}}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,2} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E = 1400 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

3_

champ

:

U_1

$U_1,$

v_1

$v_1,$

$\vec{v}_1$

G_1

G_2

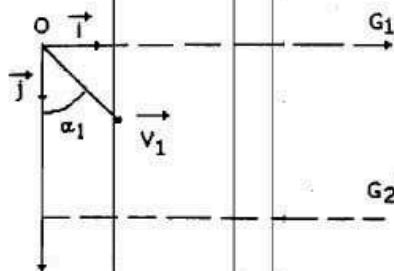
$\vec{v}_1$

$(0, \vec{i}, \vec{j})$

α_1

$\vec{j}$

$G_1,$



Les électrons traversent la grille G_2 avec la vitesse $\vec{v}_2$ faisant un angle α_2 avec $\vec{j}$. Les tensions U_1 et U_2 restent constantes, on fait varier α_1 et on mesure les valeurs correspondantes de α_2 . Les résultats de ces mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

$\alpha_1(^{\circ})$	10	20	30	40	45
$\alpha_2(^{\circ})$	14,2	29	45	65,5	90
$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$					

- a. Compléter ce tableau. Quel résultat peut on mettre en évidence.
- b. Indiquer sans calcul la nature de la trajectoire des électrons entre les grilles.
- 3) On veut vérifier ces résultats expérimentaux par une étude théorique.
 - a. Exprimer en fonction de e , m , U_1 et U_2 la norme de la vitesse $\vec{v}_2$.
 - b. Montrer que la coordonnée du vecteur-vitesse des électrons sur $\vec{i}$ reste constante entre G_1 et G_2 . En déduire la relation liant v_1 , v_2 , α_1 et α_2 .
 - c. Exprimer le rapport $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ en fonction de U_1 et U_2 et vérifier alors, en faisant l'application numérique que cette étude théorique est en accord avec les résultats expérimentaux.

Solution

- 1) D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = eU_1$$

on en déduit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$$

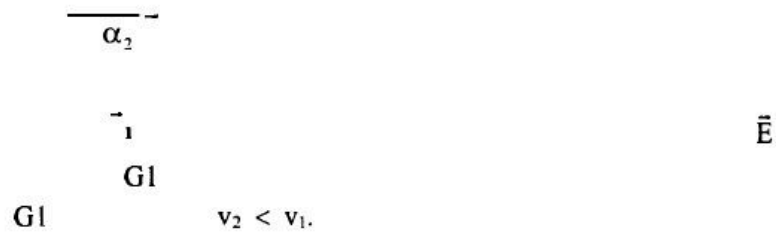
Application numérique :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 400}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,18 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = 1,18 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 2) a) Les valeurs du rapport $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ sont consignées dans le tableau suivant :

$\alpha_1(^{\circ})$	10	20	30	40	45
$\alpha_2(^{\circ})$	14,2	29	45	65,5	90
$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -eU_2$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - eU_2$$

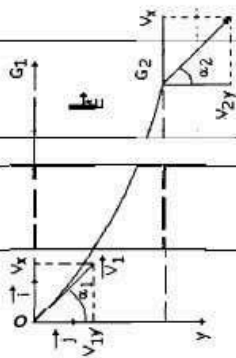
ou :

$$mv_2^2 = 2e(U_1 - U_2)$$

$$v_2^2 = \frac{2e(U_1 - U_2)}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2e(U_1 - U_2)}{m}}$$

$(\alpha, \vec{i})$



$$\sin \alpha_1 = \frac{v_x}{v_1}$$

$$v_x = v_1 \sin \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_x}{v_2}$$

$$v_x = v_2 \sin \alpha_2$$

Des relations (1) et (2) il vient :

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

a) Nous avons :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2e(U_1 - U_2)}{m}}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{U_1 - U_2}{U_1}}$$

il vient donc :

Application numérique :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{400 - 200}{400}} = 0,5$$

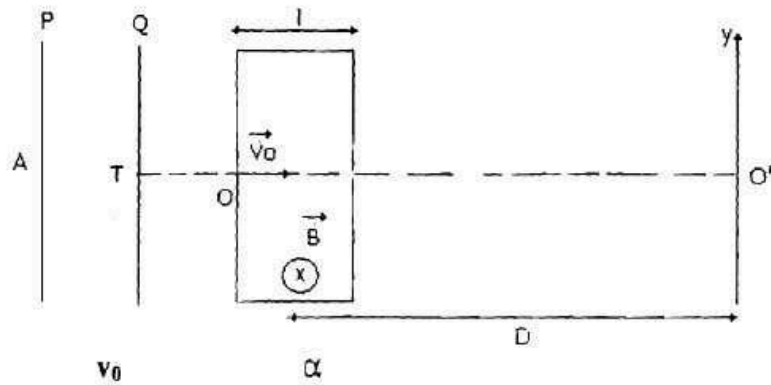
Donc, l'étude théorique est en accord avec les résultats expérimentaux.

cm

4.

électrique.

Elles
T
I
Q,
P Q
U₀
B 8·10⁻²



1°
2°
3°
4°

v₀

α

D

I

u

$$1 = 1,67 \cdot 10^{-27}$$

1°

force

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = q U_0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

$$= 2e \quad 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m = 4 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 6,68 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{6,68 \cdot 10^{-27}}} = 4,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° Dans le champ, les ions sont soumis à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force est orthogonale à la vitesse $\vec{v}_0$; par conséquent son travail est nul. Autrement dit l'énergie cinétique des particules reste constante. Le mouvement est donc uniforme. D'autre part, lorsqu'une particule pénètre dans un champ magnétique la trajectoire est curviligne plane. La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

l'accélération d'un ion est donc :

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

(1)

Dans la base de Frenet,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

soit :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

puisque la norme de la vitesse reste constante, $\frac{dv}{dt} = 0$

il vient :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

(2)

L'accélération est donc centripète. Le mouvement est circulaire uniforme.

Des relations (1) et (2), il vient :

$$\frac{q}{m} \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = \frac{v_0^2}{R} \vec{n}$$

soit en modules :

$$\frac{qv_0 B}{m} = \frac{v_0^2}{R}$$

d'où :

$$R = \frac{mv_0}{Bq}$$

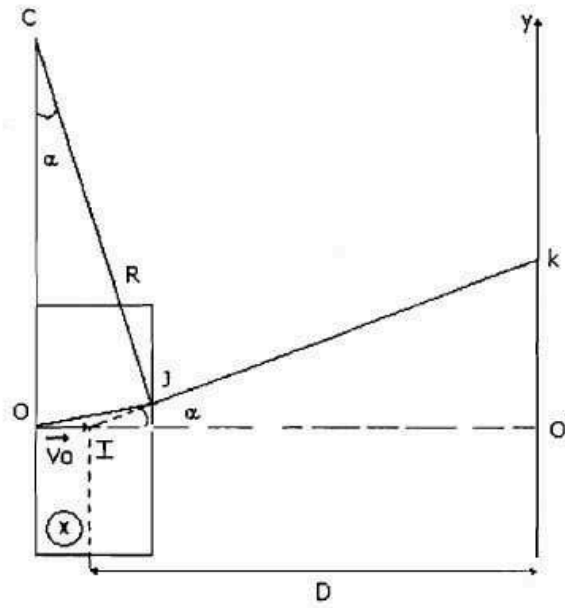
numériquement :

$$R = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \times 4,38 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-2} \times 3,2 \cdot 10^{-19}} = 0,1142 \text{ m}$$

soit :

$$\boxed{R = 11,42 \text{ cm}}$$

3° La trajectoire des ions dans le champ $\vec{B}$ est un arc de cercle de rayon R. A la sortie du champ, au point J les ions décrivent un segment de droite tangent à l'arc.



$$\tan \alpha = \frac{O'K}{D} = \frac{y}{D}$$

α très petit

$$\tan \alpha \approx \alpha$$

$$\alpha = \frac{y}{D} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{OJ}{R}$$

$$OJ \approx l$$

or :

$$\alpha = \frac{l}{R} \quad (4)$$

$$\frac{y}{D} = \frac{l}{R}$$

$$y = \frac{l \cdot D}{R}$$

$$y = \frac{3 \times 40}{11,42} = 10,50 \text{ cm}$$

$$\boxed{y = 10,50 \text{ cm}}$$

4°

$$\frac{qUD}{mdv_0^2}$$

d'où :

A

$$U = \frac{m y v_0^2}{q l D}$$

$$d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$l = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

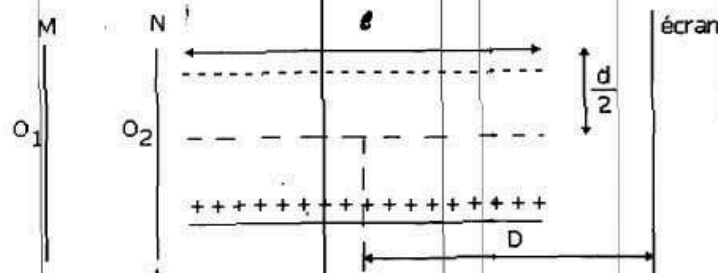
$$D = 40 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$y = 10,50 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$U = 700,60 \text{ V}$$

5_Séparation des isotopes du magnésium.

Des ions Mg^{2+} sortant d'une chambre d'ionisation, pénètrent avec une vitesse négligeable par un trou O_1 dans l'espace compris entre deux plaques M et N. Lorsqu'on applique entre les plaques une tension $U_0 = |V_M - V_N|$, les ions atteignent le trou O_2 avec la vitesse $\bar{v}_0$.



1° Quelle plaque (M ou N) doit-on porter au potentiel le plus élevé ? pourquoi ? Exprimer v_0 en fonction de la charge q et de la masse m d'un ion, ainsi que de U_0 .

2° A la sortie de O_2 , les ions ayant cette vitesse $\bar{v}_0$, pénètrent entre les armatures d'un condensateur. La longueur des armatures est l et leur écartement est d . Un écran vertical est situé à la distance D du centre des armatures. On applique entre les armatures une tension U créant un champ électrique vertical.

a) Etablir l'équation de la trajectoire des ions à l'intérieur du condensateur en fonction de U_0 , U et d .

b) Trouver l'expression de la déflexion électrique Y .

3° Dans l'espace entre les armatures, on superpose au champ électrique vertical, un champ magnétique horizontal $\vec{B}$. Le mouvement des ions dans le condensateur est rectiligne uniforme et horizontal.

a) Indiquez le sens de $\vec{B}$.

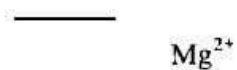
b) Exprimer U en fonction de U_0 , m , d , B et q .

4° En réalité, le magnésium est formé des isotopes ${}^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$; ${}^{25}_{12}\text{Mg}^{2+}$ et ${}^{26}_{12}\text{Mg}^{2+}$ de masses respectives m_1 , m_2 et m_3 .

Lorsque $U = U_1 = 228 \text{ V}$, seuls les ions ${}^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$ ont la trajectoire rectiligne.

Lorsque $U = U_2 = 223 \text{ V}$, seuls les ions ${}^{26}_{12}\text{Mg}^{2+}$ ont la trajectoire rectiligne.

$$U_3 = \frac{A_2}{A_1} \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_2}{A_1} \frac{m_1}{m_2} \frac{U_3}{U_1}$$



$$\frac{1}{2} m v_0^2 = q U_0$$

$$m v_0^2 = 2 q U_0$$

d'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 q U_0}{m}}$$

2°

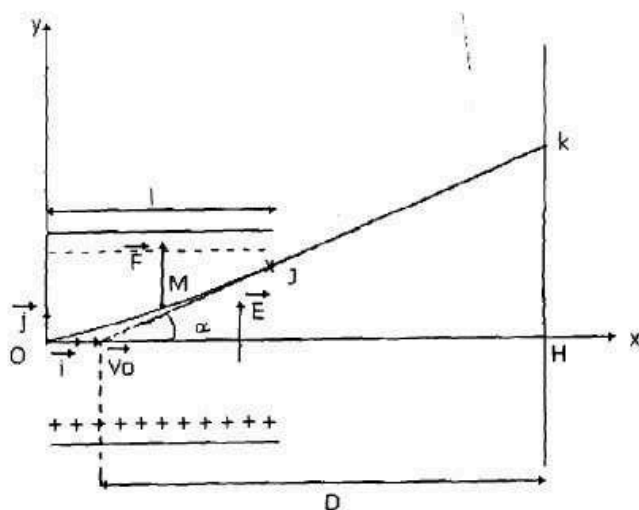
$(o, \vec{i}, \vec{j})$

$(o, \vec{i})$

$$\vec{p} = m \vec{g}$$

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad \vec{p}$$

$(\vec{F})$



$$m \vec{a}$$

soit :

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

d'où :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (1)$$

Par intégrations successives de l'accélération on obtient le vecteur position :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \frac{q\vec{E}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t \quad (2)$$

avec : $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'équation vectorielle (2) donne en projection sur les axes :

$$x = v_0 t \quad (3)$$

$$y = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (4)$$

L'équation (4) s'écrit, en éliminant t à partir de l'équation (3) :

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{mv_0^2} x^2$$

soit, avec $E = \frac{U}{d}$:

$$y = \frac{1}{2} \frac{qU}{m \cdot d \cdot v_0^2} x^2$$

Compte tenu de la question 1° : $mv_0^2 = 2qU_0$

il vient :

$$y = \frac{U}{4U_0 d} x^2 \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{4} \frac{U}{U_0 d} x^2$$

b) La déflexion électrique :

$$Y = HK$$

Considérant le triangle rectangle IKH :

$$\tan \alpha = \frac{HK}{D}$$

soit :

$$\tan \alpha = \frac{Y}{D} \quad (6)$$

Par ailleurs, à la sortie du condensateur, les ions ne sont soumis d'une force : leur mouvement est rectiligne uniforme segment tangente à la parabole. Le coefficient directeur de cette droite est par rapport à la variable x ; donc :

pour $x = l$,

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

d'après (5) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U}{2U_0 d} x$$

$$\tan \alpha = \frac{U\ell}{2U_0d} \quad (7)$$

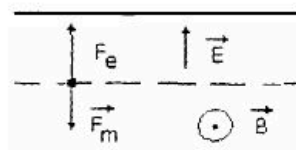
(7),

$$\frac{Y}{D} = \frac{U\ell}{2U_0d}$$

$$Y = \frac{U\ell D}{2U_0d}$$

I

B



$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

$$F_e = F_m$$

$$qE = qv_0B$$

$$E = v_0B$$

$$\frac{U}{d} = v_0B$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

$$\frac{U}{d} = B \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

$$U = d \cdot B \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

$$Y = \frac{U \ell D}{2 U_0 d} \quad \vec{F}_e \quad \vec{F}_m \quad \vec{F}_e$$

$$(q\vec{v}_0, B, \vec{F}_m)$$

et :

donc :

De même :

b) Puisque :

il vient :

soit :

ou encore :

par la suite :

soit :

De même :

il vient :

soit :

$$U_1 = d \cdot B \sqrt{\frac{2qU_0}{m_1}}$$

$$U_2 = d \cdot B \sqrt{\frac{2qU_0}{m_2}}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\frac{U_3}{U_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}$$

$$m_1 = 24 \text{ u et } m_2 = A_1 \text{ u}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{24 \text{ u}}{A_1 \text{ u}}}$$

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{24}{A_1}$$

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \frac{A_1}{24}$$

$$A_1 = 24 \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$$

$$A_1 = 24 \times \left(\frac{228}{223}\right)^2 = 25$$

$$\frac{U_3}{U_1} = \sqrt{\frac{24 \text{ u}}{A_2 \text{ u}}}$$

$$A_2 = 24 \left(\frac{U_1}{U_3}\right)^2$$

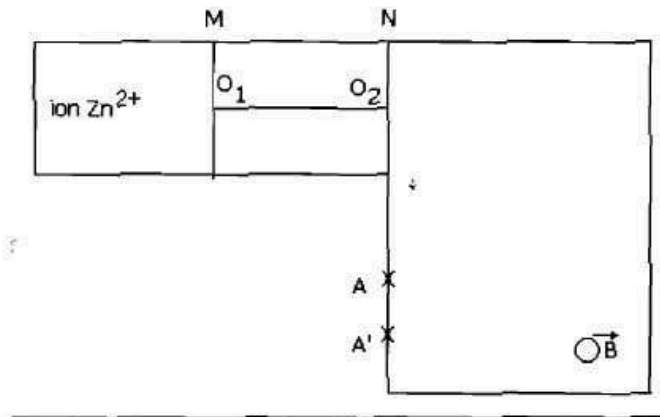
$$A_2 = 24 \times \left(\frac{228}{219}\right)^2 = 26$$

$$A_1 = 25$$

$$A_2 = 26$$

6_ Détermination du nombre de masse d'un isotope de zinc

Une chambre d'ionisation produit des ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ et $^x\text{Zn}^{2+}$ de masses respectives $m_1=68u$ et $m_2=xu$. Les ions sont ensuite accélérés dans le vide entre les plaques M et N. la tension accélératrice a pour valeur $U = V_M - V_N = 1000 \text{ V}$. les ions pénètrent ensuite dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure, d'intensité $B = 0,1 \text{ T}$



- 1) Calculer la vitesse v_1 des ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ lorsqu'ils arrivent en O_2 . Exprimer la vitesse v_2 des ions $^x\text{Zn}^{2+}$ en O_2 en fonction de v_1 et de x .
 - 2) Indiquer sur un schéma le sens du vecteur $\vec{B}$ pour que les ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ parviennent en A et les ions $^x\text{Zn}^{2+}$ en A'.
 - 3) Calculer le rayon de courbure pour les ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ dans le champ $\vec{B}$.
 - 4) On donne $AA' = 8 \text{ mm}$. Calculer x
- Donnée : $1u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

LMDB devoir SB

Solution

1° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = qU$$

on en déduit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m_1}}$$

Application numérique :

$$q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_1 = 68u = 68 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 1,14 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \cdot 10^{-19} \times 1000}{1,14 \cdot 10^{-25}}} = 7,49 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

par la suite

$$R_2 = \frac{7,49 \cdot 10^4 \times 1,67 \cdot 10^{-22}}{0,1 \times 3,2 \cdot 10^{-19}} \sqrt{68x}$$

soit :

$$R_2 = 3,9 \cdot 10^{-3} \sqrt{68x}$$

on en déduit :

$$\sqrt{68x} = \frac{R_2}{3,9 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,27}{3,9 \cdot 10^{-3}} = 69,23$$

par la suite :

$$68x = (69,23)^2$$

d'où :

$$x = 70$$

$$v_1 = 7,49 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

De même :

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = qU$$

soit :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m_2}} = \sqrt{\frac{2qU}{xu}}$$

comme :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{68u}}$$

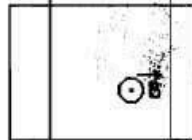
il vient :

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{68}{x}}$$

d'où :

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{68}{x}}$$

2° Le trièdre $(\vec{q}\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct le sens de $\vec{B}$ est sortant :



3° Le rayon de courbure de la trajectoire des ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ est :

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{Bq}$$

soit :

$$R_1 = \frac{1,14 \cdot 10^{-25} \times 7,49 \cdot 10^4}{0,1 \times 3,2 \cdot 10^{-19}} = 2,64 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$R_1 = 2,64 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

4° Nous avons :

$$AA' = 2R_2 - 2R_1$$

d'où :

$$R_2 = \frac{AA' + 2R_1}{2}$$

soit :

$$R_2 = \frac{8 \cdot 10^{-3} + 2 \times 2,64 \cdot 10^{-1}}{2} = 2,7 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

par ailleurs :

$$R_2 = \frac{m_2 v_2}{Bq}$$

comme :

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{68}{x}} \quad \text{et} \quad m_2 = xu$$

il vient :

$$R_2 = \frac{xu v_1}{Bq} \sqrt{\frac{68}{x}}$$

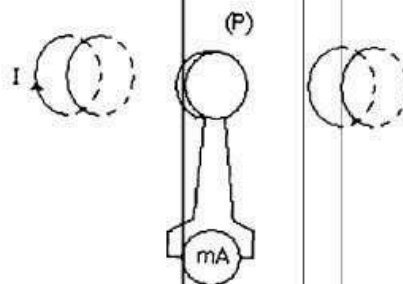
ou encore :

$$R_2 = \frac{v_1 u}{Bq} \sqrt{68x}$$

AUTO-INDUCTION

1_ Courant induit et quantité d'électricité induite dans une bobine

Un solénoïde (s) de longueur $l = 50$ cm, est formé d'une seule couche de spires jointives faites d'un fil de diamètre $d = 1$ mm. A l'intérieur de ce solénoïde se trouve une bobine plate (P) de même axe que le solénoïde. Cette bobine plate, comportant $N = 400$ spires ayant chacune une surface $S = 14$ cm², est reliée à un milliampèremètre. La résistance totale du circuit est $R = 8 \Omega$



1° On fait circuler dans le solénoïde un courant d'intensité $I = 12$ A dans le sens indiqué sur la figure.

- a) Donner les caractéristiques du vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ régnant à l'intérieur du solénoïde.
- b) Calculer le flux magnétique Φ à travers la bobine plate.

2° On fait varier l'intensité du courant dans le solénoïde suivant la loi $I(t) = 12 - 3t^2$, t variant de 0 à 12 s.

- a) Indiquer le sens du courant induit i dans la bobine plate.
- b) Trouver l'expression du courant induit i dans la bobine (P) et tracer le graphique $i = f(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq 2$ s.
- c) Calculer la quantité d'électricité induite qui traverse une section quelconque de la bobine plate pendant le même intervalle de temps.

3° Le solénoïde est à présent alimenté par un courant alternatif sinusoïdal d'équation :

$$i(s) = 14 \cos 100\pi t \quad (i(s) \text{ en ampères})$$

- a) Trouver l'expression de la force électromotrice dont la bobine (P) est le siège.
- b) Déterminer l'intensité du courant induit dans (P) à l'instant $t = 5 \cdot 10^{-3}$ s

Solution

1) a) Le champ $\vec{B}$ est uniforme et parallèle à l'axe du solénoïde. Son sens est, d'après la loi de l'observateur d'Ampère dirigé de droite à gauche. Son intensité a pour expression :

$$B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} n \cdot I$$

D'autre part : le nombre de spires du solénoïde est $\frac{\ell}{d} = 500$ spires. Le nombre de

spires par unité de longueur est $n = \frac{500}{\ell} = 1000$

donc : $B = 4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \times 12 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$

$$B = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

b) Le flux à travers (P) :

$$\Phi = NBS$$

$$S = 14 \text{ cm}^2 = 14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

donc : $\Phi = 400 \times 1,5 \cdot 10^{-2} \times 14 \cdot 10^{-4} = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$

$$\Phi = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

2) a) D'après la loi de Lenz, le courant induit a un sens tel qu'il s'oppose à la cause qui lui donne naissance : Il a donc tendance à créer un champ $\vec{B}$ dirigé de la gauche vers la droite ; d'où le sens suivant :



b) Lorsque $I = 12 - 3t^2$, le champ magnétique a pour expression :

$$B(t) = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 (12 - 3t^2)$$

soit : $B(t) = 1,5 \cdot 10^{-2} - 3,77 \cdot 10^{-3} t^2$

le flux a pour expression :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= NSB(t) \\ &= 400 \times 14 \cdot 10^{-4} (1,5 \cdot 10^{-2} - 3,77 \cdot 10^{-3} t^2) \end{aligned}$$

soit : $\Phi(t) = 8,4 \cdot 10^{-3} - 2,11 \cdot 10^{-3} t^2$

La f.e.m induite est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 2 \times 2,11 \cdot 10^{-3} t$$

soit : $e = 4,22 \cdot 10^{-3} t$

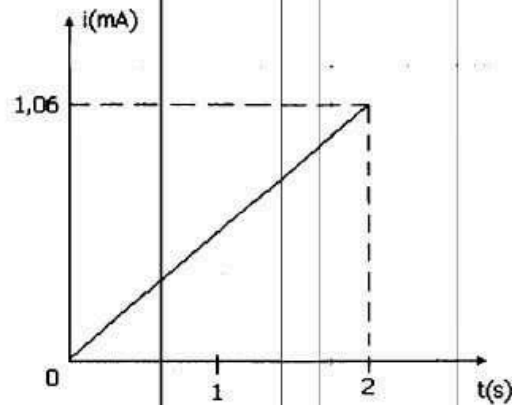
L'intensité du courant induit, en ampères est :

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{4,22 \cdot 10^{-3}}{8} t = 0,53 \cdot 10^{-3} t$$

soit, en milliampère : $i = 0,53t$

L'intensité est une fonction affine du temps. Son graphe est donc une droite. D'autre part, lorsque $t = 0$, $i = 0$; lorsque $t = 2s$, $i = 1,06$ mA

Nous avons donc le graphe suivant :



c) La quantité d'électricité induite est :

$$Q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$$

comme :

$$I = 12 - 3t^2$$

lorsque $t = 0$, $I_1 = 12$ A ; le flux est alors : $\Phi_1 = 8,4 \cdot 10^{-3}$ Wb

lorsque $t = 2s$, $I_2 = 0$; par conséquent $\Phi_2 = 0$

Il vient :

$$|\Delta\Phi| = |\Phi_2 - \Phi_1| = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

d'où :

$$Q = \frac{8,4 \cdot 10^{-3}}{8} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

3) a) Le champ magnétique dans (S) a pour expression :

$$B(t) = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \times 10^3 \times 14 \cos 100\pi t$$

soit :

$$B(t) = 1,76 \cdot 10^{-2} \times 14 \cos 100\pi t$$

L'expression du flux est :

$$\Phi(t) = NSB(t)$$

$$= 400 \times 14 \cdot 10^{-4} \times 1,76 \cdot 10^{-2} \cos 100\pi t$$

soit :

$$\Phi(t) = 9,86 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$$

La f.e.m induite est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 9,86 \cdot 10^{-3} \times 100 \times 3,14 \sin 100\pi t$$

$$e = 3,1 \sin 100\pi t$$

b) L'intensité du courant induit dans (P) est :

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{3,1}{8} \sin 100\pi t$$

soit :

$$i = 0,39 \sin 100\pi t$$

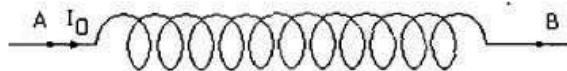
$$\text{lorsque } t = 0,005 \text{ s, } i = 0,39 \sin 100\pi t \times 0,005$$

$$I = 0,39 \sin \frac{\pi}{2} = 0,39 \text{ A}$$

$$i = 0,39 \text{ A}$$

2_ Inductance d'un solénoïde – flux propre.

Un solénoïde de résistance négligeable est traversé par un courant continu d'intensité $I_0 = 1 \text{ A}$, de A vers B



La longueur du solénoïde est $\ell = 0,5 \text{ m}$, son rayon est $2,5 \text{ cm}$. Le nombre de spires par unité de longueur est $n = 4 \cdot 10^3$ spires.

1° Calculer l'inductance du solénoïde.

2° Quelle est la tension U_{AB} aux bornes de la bobine.

3° Lors de l'établissement du courant, l'intensité dans la bobine passe de la valeur $I_0 = 1 \text{ A}$ à la valeur $I_1 = 2,5 \text{ A}$ en 20 ms . Calculer la f.e.m. moyenne d'auto-induction aux bornes de la bobine pendant cette opération ; Quelle est alors la tension moyenne U_{AB} aux bornes de la bobine ?

4° Lors de l'annulation du courant dans la bobine, l'intensité passe de I_1 à la valeur $I_2 = 0,5 \text{ A}$ en 10 ms . Calculer la f.e.m. moyenne d'auto-induction aux bornes de la bobine et la tension U_{AB} .

LMDB devoir SB

Solution

1° L'inductance d'un solénoïde comportant N spires est :

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} \text{ S}$$

d'autre part :

$$n = \frac{N}{\ell} \Rightarrow N = n\ell$$

d'où :

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} n^2 \ell \text{ S}$$

De plus :

$$S = \pi R^2$$

Il vient :

$$L = 4\pi^2 10^{-7} n^2 \ell R^2$$

Soit :

$$L = 4 \times 10^{-7} \times 16 \cdot 10^6 \times 0,5 \times (2,5)^2 \cdot 10^{-4} = 0,02 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 0,02 \text{ H}}$$

2° Nous avons :

$$U_{AB} = RI_0 + L \frac{dI_0}{dt}$$

or :

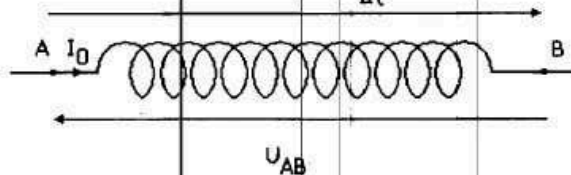
$$R = 0 \text{ et } \frac{dI_0}{dt} = 0$$

d'où :

$$U_{AB} = 0$$

3° La f.e.m. moyenne E et la tension U_{AB} sont orientées selon le schéma :

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$



Par ailleurs, le flux à l'instant initial est :

$$\Phi_1 = LI_0 = 0,02 \times 1 = 0,02 \text{ Wb}$$

le flux à l'instant final est :

$$\Phi_2 = LI_1 = 0,02 \times 2,5 = 0,05 \text{ Wb}$$

d'où :

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0,05 - 0,02 = 0,03 \text{ Wb}$$

La f.e.m. moyenne est :

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{0,03}{20 \cdot 10^{-3}} = -1,5 \text{ V}$$

par ailleurs :

$$U_{AB} = -E = 1,5 \text{ V}$$

$$\boxed{E = -1,5 \text{ V}} \\ \boxed{U_{AB} = 1,5 \text{ V}}$$

4° Le flux initial est :

$$\Phi_1 = LI_1 = 0,05 \text{ Wb}$$

Le flux final est :

$$\Phi_2 = LI_2 = 0,02 \times 0,5 = 0,01 \text{ Wb}$$

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0,01 - 0,05 = -0,04 \text{ Wb}$$

La f.e.m. moyenne est :

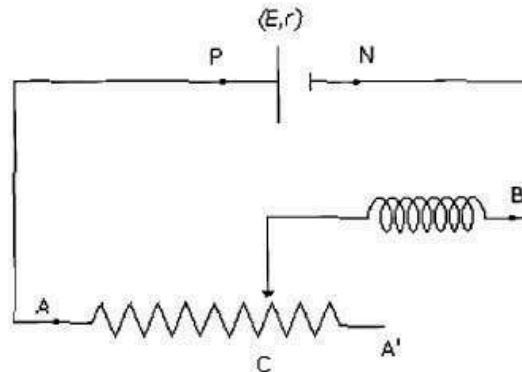
$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{0,04}{10 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ V}$$

$$U_{AB} = -E = -4 \text{ V}$$

$$\boxed{E = 4 \text{ V}} \\ \boxed{U_{AB} = -4 \text{ V}}$$

3_ Variation linéaire de la résistance : Force électromotrice induite dans une bobine.

Un circuit comprend, montés en série, un générateur de force électromotrice $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 1 \Omega$, un solénoïde de longueur $l = 40 \text{ cm}$ comportant $N_1 \approx 1000$ spires et de résistance $R = 2,5 \Omega$, un rhéostat dont la résistance peut varier de 0 à 25Ω .



1° A la date $t = 0$, le curseur C du rhéostat est en A ($R_{AC} = 0$). On le déplace à vitesse constante et il arrive en A' à la date $t = 0,5 \text{ s}$ ($R_{AC} = 25 \Omega$).

- Déterminer la résistance R_{AC} en fonction du temps.
 - Trouver en fonction du temps, l'expression de l'intensité du courant dans le solénoïde.
 - Exprimer en fonction du temps l'intensité B du champ à l'intérieur du solénoïde.
- 2° A l'intérieur du solénoïde, on place une bobine plate de section moyenne $S = 12 \text{ cm}^2$ dont l'axe est confondu avec celui du solénoïde. Cette bobine comporte $N_2 = 500$ spires.

- Déterminer en fonction du temps la f.e.m. d'induction de cette bobine.
- Calculer la valeur de cette f.e.m au temps $t = \frac{1}{50} \text{ s}$.

LMDB compos SE

Solution

1° a) La résistance du rhéostat est une fonction affine du temps :

$$R_{AC} = at + b \quad a \text{ et } b \text{ sont des constantes}$$

lorsque $t = 0$,

$$R_{AC} = 0, \text{ donc } 0 = b$$

lorsque $t = 0,5 \text{ s}$,

$$R_{AC} = 25 \Omega, \text{ donc}$$

$$25 = 0,5a \Rightarrow a = 50$$

finalement :

$$R_{AC} = 50t$$

b) La tension aux bornes du générateur : $U_{PN} = E - r \cdot I$

La tension aux bornes du rhéostat : $U_{AC} = R_{AC} I$

La tension aux bornes du solénoïde est : $U_{CB} = RI$

D'autre part : $U_{PN} = U_{AC} + U_{CB}$

soit : $E - r \cdot I = R_{AC} I + RI$

ou encore : $E = I(R_{AC} + R + r)$

on en déduit :

$$I = \frac{E}{R_{ac} + R + r}$$

soit :

$$I = \frac{12}{50t + 3,5}$$

c) L'intensité du champ magnétique dans le solénoïde est :

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} n \cdot I$$

Le nombre de spires par unité de longueur est $n = \frac{N_1}{\ell} = \frac{1000}{0,4} = 2500$

Par conséquent :

$$B = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 2500 \times 12}{50t + 3,5} = \frac{3,76 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

$$B = \frac{3,76 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

2° a) Le flux à travers la bobine

$$\Phi = N_2 BS$$

$$S = 12 \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

donc :

$$\Phi = \frac{500 \times 3,76 \cdot 10^{-2} \times 12 \cdot 10^{-4}}{50t + 3,5}$$

soit :

$$\Phi = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

La f.e.m induite est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

soit :

$$e = - \frac{d}{dt} \left(\frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5} \right)$$

donc :

$$e = \frac{50 \times 2,25 \cdot 10^{-2}}{(50t + 3,5)^2} = \frac{1,12}{(50t + 3,5)^2}$$

$$e = \frac{1,12}{(50t + 3,5)^2}$$

b) Lorsque $t = \frac{1}{50} \text{ s}$,

$$e = \frac{1,12}{(1 + 3,5)^2} = 0,05 \text{ V}$$

$$e = 5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

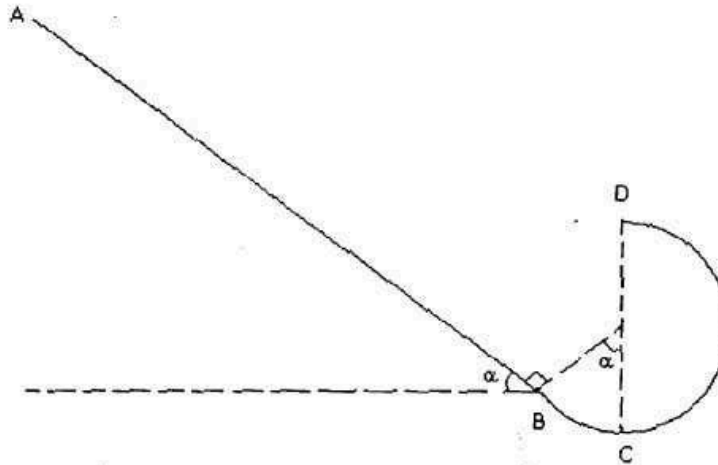
CHAPITRE IV

ENERGIE

(Classes de SE)

6_ Energie potentielle de pesanteur – Energie mécanique : conservation et non conservation de l'énergie mécanique

Une piste verticale est formée d'une partie rectiligne AB de longueur $l = 1,00\text{m}$ inclinée d'un angle $\alpha = 60^\circ$ sur l'horizontale et d'une partie circulaire BCD raccordée tangentiellement en B à AB, de rayon $R = 25\text{ cm}$.



Un solide ponctuel de masse $m = 800\text{ g}$, est abandonné en A sans vitesse initiale.

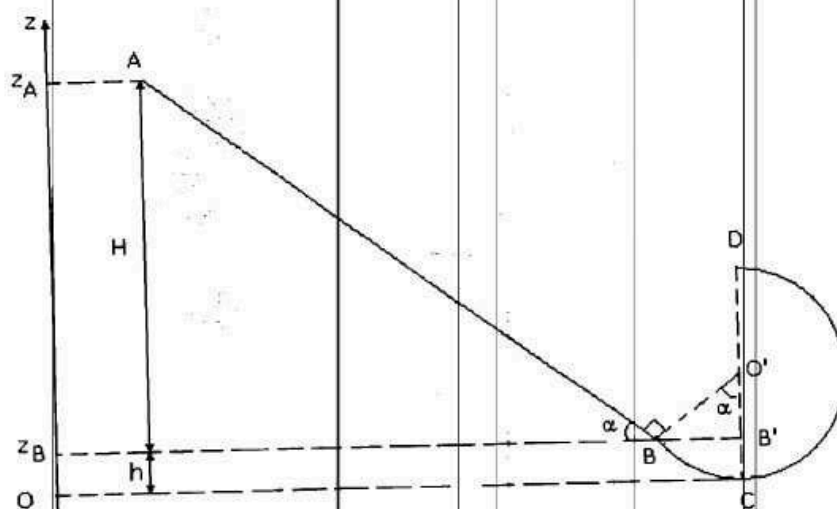
- 1) Calculer l'énergie potentielle de pesanteur du solide en A, B, C et D. (On choisit C comme position de référence et comme origine des altitudes).
- 2) En supposant les frottements négligeables, calculer la vitesse du solide lors de son passage en B, C et D.
- 3) En réalité on constate qu'en B, la vitesse du solide est $2,70\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
 - a. Déterminer la variation de l'énergie mécanique entre A et B.
 - b. On suppose que cette variation d'énergie mécanique est due à des frottements. Calculer la valeur supposée constante de la force de frottement $\vec{f}$ qui s'exerce sur le solide entre A et B.

Prendre $g = 9,80\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

LMDB devoir SE

Solution

1°



L'énergie potentielle de pesanteur du solide a pour expression :

$$E_p = mgz + \text{constante}$$

Si la position de référence et l'origine des altitudes sont confondues, on a :

$E_p = 0$ pour $z = 0$, donc $\text{Const} = 0$

par la suite :

$$E_p = mgz$$

L'énergie potentielle en A est donc :

$$E_p(A) = mgz_A$$

08 :

$$z_A = H + h$$

par ailleurs :

$$H = AB \sin \alpha = \ell \sin \alpha = 0,87 \text{ m}$$

et :

$$h = O'C - O'B'$$

soit :

$$h = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$$

avec

$$R = 25 \text{ cm} = 0,25\text{m}$$

done :

$$h = 0,25(1 - 0,5) = 0,125m$$

il vient :

$$z_A = 0,87 + 0,125 = 0,995 \text{ m}$$

par conséquent :

$$E_p(A) = 0,8 \times 9,8 \times 0,995 = 7,80 \text{ J}$$

Energie potentielle en B :

$$E_p(B) = mgz_B$$

or :

$$z_H = h = 0,125\text{m}$$

il vient :

$$E_p(B) = 0,8 \times 9,8 \times 0,125 = 0,98 \text{ J}$$

Energie potentielle en C :

$$E_p(C) = mgz_C$$

puisque $z_C = 0$, $E_P(C) = 0$

Energie potentielle en D :

$$E_p(D) = mgz_D$$

avec

$$z_D = 2R = 0,5\text{m}$$

donc :

$$E_p(D) = 0,8 \times 9,8 \times 0,5 \approx 3,92\text{J}$$

$$E_p(A) = 7,80\text{J}$$

$$E_p(B) = 0,98\text{J}$$

$$E_p(C) = 0$$

$$E_p(D) = 3,92\text{J}$$

2° Au cours du mouvement, le solide est soumis à deux forces :

- Le poids $\vec{P}$
- La réaction $\vec{R}$ de la piste

Comme il n'y a pas de frottement, $\vec{R}$ est perpendiculaire en tout point à la piste ABCD. Le travail de $\vec{R}$ est donc nul. La seule force qui travaille est le poids $\vec{P}$, force conservative. Par conséquent, l'énergie mécanique E du solide se conserve au cours du mouvement ; donc :

$$E(A) = E(B) = E(C) = E(D)$$

D'autre part, l'énergie mécanique de la bille dans le champ de pesanteur a pour expression :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

L'énergie mécanique du solide en A est donc :

$$E(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + E_p(A)$$

comme $v_A = 0$,

$$E(A) = E_p(A) = 7,80\text{J}$$

L'énergie mécanique du solide en B :

$$E(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + E_p(B)$$

soit :

$$E(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0,98$$

Nous avons :

$$E(A) = E(B)$$

soit :

$$7,80 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0,98$$

il vient :

$$13,64 = mv_B^2$$

d'où :

$$v_B = \sqrt{\frac{13,64}{m}} = \sqrt{\frac{13,64}{0,8}} = 4,13\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'énergie mécanique du solide en C est :

$$E(C) = \frac{1}{2}mv_C^2 + E_p(C)$$

soit :

$$E(C) = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Puisque :

$$E(A) = E(C)$$

Il vient :

$$7,80 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

On en déduit :

$$v_C = \sqrt{\frac{2 \times 7,80}{m}} = \sqrt{\frac{15,60}{0,8}} = 4,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'énergie mécanique du solide en D :

$$E(D) = \frac{1}{2}mv_D^2 + E_p(D)$$

soit :

$$E(D) = \frac{1}{2}mv_D^2 + 3,92$$

d'autre part :

$$E(A) = E(D)$$

il vient :

$$7,80 = \frac{1}{2}mv_D^2 + 3,92$$

soit :

$$7,76 = mv_D^2$$

d'où :

$$v_D = \sqrt{\frac{7,76}{m}} = \sqrt{\frac{7,76}{0,8}} = 3,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B = 4,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_C = 4,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_D = 3,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3° a) Nous avons :

$$E(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0,98$$

comme : $v_B = 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$E(B) = 0,5 \times 0,8 \times (2,7)^2 + 0,98 = 3,90 \text{ J}$$

La variation d'énergie mécanique entre A et B est :

$$\Delta E = E(B) - E(A)$$

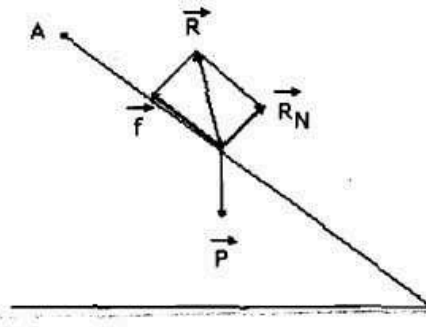
soit :

$$\Delta E = 3,9 - 7,8 = -3,9 \text{ J}$$

$$\Delta E = -3,9 \text{ J}$$

b) La variation de l'énergie mécanique entre A et B est égale au travail de la force non conservative $\vec{f}$ lors du déplacement rectiligne $\overline{AB}$

$$\Delta E = W_{\vec{f}}(A \rightarrow B)$$



d'autre part, par définition : $W_f = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = f \cdot AB \cdot \cos(\vec{f}, \overrightarrow{AB})$

or : $(\vec{f}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ$; donc $W_f = -f \cdot AB$

par la suite : $\Delta E = -f \cdot AB = -f \cdot l$

on en déduit : $f = \frac{-\Delta E}{l} = 3,9 \text{ N}$

$$f = 3,9 \text{ N}$$

7_ Calorimétrie

Un calorimètre contient 350 g d'eau à 16°C . La capacité calorifique du vase et des accessoires est $80 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.

1° On plonge dans l'eau de ce calorimètre un morceau de glace de masse $m_1 = 50 \text{ g}$ prélevé à la température de -18°C . Quelle est la température finale d'équilibre sachant que toute la glace a fondu ?

2° On ajoute dans le calorimètre un nouveau morceau de glace de masse $m_2 = 50 \text{ g}$, toujours prélevé à la température de -18°C . On constate que ce nouveau morceau de glace ne fond pas entièrement. Quelle est la masse de glace restante ?

Données :
 chaleur massique de l'eau : $4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
 chaleur massique de la glace : $2100 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
 chaleur latente de fusion de la glace : $334000 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$

LMDB compos SE

Solution

1°. Le calorimètre et l'eau qu'il contient se refroidissent de 16°C à la température finale θ , ($\theta < 16^\circ\text{C}$). La chaleur cédée au cours de ce refroidissement est :

$$Q = (\mu + mc)(16 - \theta)$$

Le morceau de glace de masse m_1 reçoit les quantités de chaleur suivantes :

- chaleur sans changement d'état pour passer de -18°C à 0°C :

$$Q_1 = m_1 c' (0 - (-18)) = 18 m_1 c'$$

- chaleur de changement d'état pour fondre à 0°C :

$$Q_2 = m_1 \cdot L$$

- chaleur sans changement d'état pour passer de 0°C à $\theta^\circ\text{C}$ à l'état d'eau :

$$Q_3 = m_1 c (\theta - 0) = m_1 c \theta$$

Au total, m_1 reçoit la quantité de chaleur :

$$Q' = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

soit :

$$Q' = 18m_1 c' + m_1 \cdot L + m_1 c \theta$$

A l'équilibre thermique :

$$Q = Q'$$

soit :

$$(\mu + mc)(16 - \theta) = 18m_1 c' + m_1 \cdot L + m_1 c \theta$$

ou encore :

$$16(\mu + mc) - \theta(\mu + mc) = 18m_1 c' + m_1 \cdot L + m_1 c \theta$$

par la suite :

$$16(\mu + mc) - 18m_1 c' - m_1 \cdot L = \theta(m_1 c + \mu + mc)$$

d'où :

$$\theta = \frac{16(\mu + mc) - 18m_1 c' - m_1 \cdot L}{m_1 c + \mu + mc}$$

avec :

$$m = 0,34 \text{ kg et } m_1 = 0,05 \text{ kg}$$

numériquement :

$$\theta = \frac{16(80 + 0,35 \times 4180) - 18 \times 0,05 \times 2100 - 0,05 \times 334000}{0,05 \times 4180 + 80 + 0,35 \times 4180} = 3,48^\circ \text{C}$$

$$\boxed{\theta = 3,48^\circ \text{C}}$$

2° Si toute la glace n'a pas fondu, la température finale est 0°C . Le calorimètre et la masse d'eau qu'il contient se refroidissent de $3,48^\circ \text{C}$ à 0°C . La quantité de chaleur cédée par le vase calorimétrique et son contenu est alors :

$$Q = (\mu + mc + m_1 c)(3,48 - 0)$$

Soit x la masse de glace fondue du second morceau de glace. La masse m_2 reçoit les chaleurs suivantes :

- chaleur sans changement d'état de -18°C à 0°C :

$$Q_1 = m_2 c' (0 - (-18)) = 18m_2 c'$$

- chaleur de changement d'état pour fondre à 0°C :

$$Q_2 = x \cdot L$$

Au total m_2 reçoit la chaleur :

$$Q' = Q_1 + Q_2 = 18m_2 c' + x \cdot L$$

A l'équilibre thermique :

$$Q = Q'$$

soit :

$$3,48(\mu + mc + m_1 c) = 18m_2 c' + x \cdot L$$

d'où

$$x = \frac{3,48(\mu + mc + m_1 c) - 18m_2 c'}{L}$$

numériquement :

$$x = \frac{3,48(80 + 0,35 \times 4180 + 0,05 \times 4180) - 18 \times 0,05 \times 2100}{334000}$$

$$x = 0,01 \text{ kg} = 10 \text{ g}$$

La masse de glace non fondue est $m_2' = m_2 - x = 50 - 10 = 40 \text{ g}$

$$\boxed{m_2' = 40 \text{ g}}$$

LES OSCILLATIONS LIBRES

1_ Le pendule élastique vertical

Un pendule est constitué d'un ressort de masse négligeable, auquel est accroché un solide de masse $M \approx 200\text{g}$. la longueur à vide du ressort est $l_0 \approx 16\text{ cm}$. Quand le solide est accroché, la longueur est $l = 20\text{ cm}$.

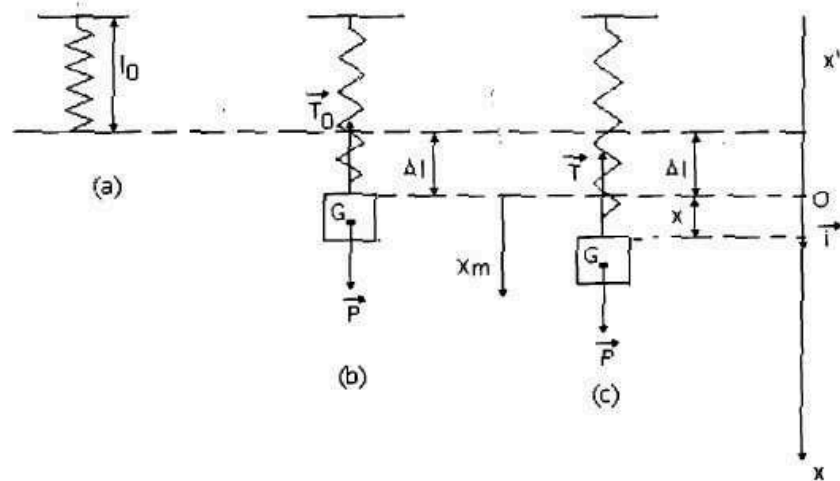
- 1° Ecrire la condition d'équilibre du solide et calculer la constante de raideur du ressort.
- 2° on tire verticalement le solide vers le bas d'une longueur de 6 cm , puis on l'abandonne sans vitesse initiale.
 - a) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
 - b) Calculer la pulsation propre, la période propre et la fréquence des oscillations.
- 3° En prenant comme origine des dates, l'instant où le solide se trouve à l'abscisse $+3\text{ cm}$ et se dirige vers la position d'équilibre, déterminer l'équation horaire du mouvement du solide.
- 4° A quelle date le solide passe-t-il pour la première fois par la position d'équilibre ?

Donnée : $g = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

LMDB devoir SB

Solution

1° Faisons le bilan des forces extérieures appliquées au solide pris comme système.



Le solide est soumis à l'action de son poids $\vec{P}$ et à la tension du ressort. A l'équilibre (figure b) la tension du ressort est $\vec{T}_0$. La condition d'équilibre impose :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{O}$$

Cette relation vectorielle devient , en projection par l'axe $(\vec{0}, \vec{i})$:

d'autre part, la tension est proportionnelle à l'allongement du ressort :

Par conséquent :

D'où :

Numériquement :

$$P - T_0 = 0$$

$$T_0 = k\Delta l$$

$$P - k\Delta l = 0$$

$$k = \frac{P}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$m = 200\text{g} = 0,2\text{kg}$$

$$\Delta l = l - l_0 = 4\text{cm} = 4 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$k = \frac{0,2 \times 10}{4 \cdot 10^{-2}} = 50\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k = 50\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

2° a) Lorsque le solide est en mouvement et que son élongation est x par rapport à sa position d'équilibre (figure C), la tension du ressort est $\vec{T}$. Le théorème du centre d'inertie permet d'écrire :

soit, en projection sur l'axe $\vec{i}$:

or :

par conséquent :

ou encore :

puisque :

il vient :

par la suite :

ou encore :

$$\vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}_G$$

$$P - T = M\ddot{x}$$

$$T = k(\Delta l + x)$$

$$P - k(\Delta l + x) = M\ddot{x}$$

$$P - k\Delta l - kx = M\ddot{x}$$

$$P - k\Delta l = 0$$

$$-kx = M\ddot{x}$$

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} \cdot x = 0$$

6) La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{50}{0,2}} = 5\sqrt{10} = 5\pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

La période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0,4\text{s}$$

La fréquence :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 2,5\text{Hz}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 5\pi \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ T_0 &= 0,4\text{s} \\ f_0 &= 2,5\text{Hz} \end{aligned}$$

3° Une solution de l'équation différentielle est :

avec

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 6\text{cm} = 6 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

lorsque

$$t=0, x = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m ; donc}$$

$$3 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-2} \cos \varphi$$

d'où :

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \text{ donc } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

De plus, le solide se déplace dans le sens négatif des elongations à la date $t=0$; donc la vitesse est négative à cet instant.

$$v = \frac{dx}{dt} = -Xm\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

lorsque

$$t=0, v = -Xm\omega_0 \sin \varphi$$

$$\text{si } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$v = -Xm\omega_0 \times 0,86 < 0$$

$$\text{si } \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$v = Xm\omega_0 \times 0,86 > 0$$

$$\text{donc } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

finalement :

$$x = 6 \cdot 10^{-2} \cos \left(5\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

4° A la position d'équilibre,

$$x=0$$

donc :

$$6 \cdot 10^{-2} \cos \left(5\pi t + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

d'où :

$$\cos \left(5\pi t + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

il vient :

$$5\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Pour le premier passage à la position d'équilibre $k=0$; donc

$$5\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

soit :

$$5t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

ou encore :

$$5t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

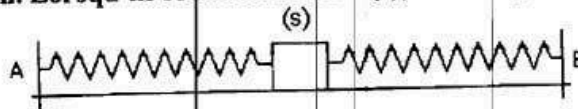
d'où :

$$t = \frac{1}{5 \times 6} = 0,03\text{s}$$

$$t = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

2_ Association de deux ressorts identiques d'axes horizontaux.

Deux ressorts identiques de masses négligeables et de constantes de raideur $k = 7,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ sont accrochés à un solide (s) de masse $m = 0,56 \text{ kg}$. Le solide repose sur une table horizontale et les deux ressorts sont fixés en A et B sur la table. La longueur à vide des ressorts est $l_0 = 15 \text{ cm}$. Lorsqu'ils sont accrochés à (s), leur longueur est $l = 27 \text{ cm}$.



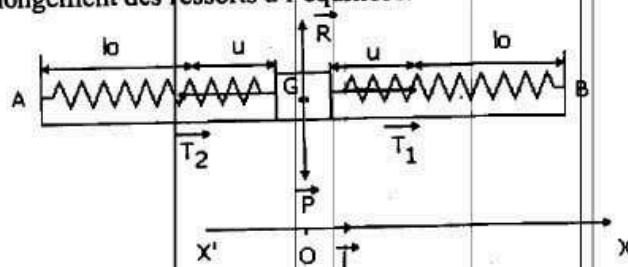
On tire suivant l'axe (AB) le solide d'une distance $d = 12 \text{ cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale. Les frottements sont considérés négligeables.

- 1° Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- 2° calculer la période des oscillations et la vitesse maximale acquise par le solide.
- 3° calculer l'énergie mécanique de vibration de l'oscillateur ainsi constitué.

LMDB devoir SB

Solution

1° Faisons le bilan des forces appliquées à (s) pris comme système en considérant u comme l'allongement des ressorts à l'équilibre.



Les forces qui s'exercent sur (s) sont le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la table et les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des ressorts.

Le théorème du centre d'inertie donne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M\vec{a}$$

soit, suivant $(O, \vec{i})$:

$$T_1 - T_2 = M\ddot{x}$$

Lorsque l'élongation du centre d'inertie est x par rapport à la position d'équilibre les tensions sont :

$$T_1 = k(u - x)$$

$$T_2 = k(u + x)$$

il vient :

$$k(u - x) - k(u + x) = M\ddot{x}$$

soit :

$$ku - ku - 2kx = M\ddot{x}$$

ou :

$$-2kx = M\ddot{x}$$

ou encore :

$$M\ddot{x} + 2kx = 0$$

par la suite :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$$

2° La pulsation propre est d'après l'équation différentielle

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 7,6}{0,56}} = 5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La période des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \times 3,14}{5,2} = 1,20 \text{ s}$$

La vitesse maximale est :

$$v_{\max} = \omega_0 X_m$$

avec :

$$X_m = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$$

donc :

$$v_{\max} = 5,2 \times 0,12 = 0,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T_0 = 1,20 \text{ s}$$

$$v_{\max} = 0,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3° L'énergie mécanique de vibration de cet oscillateur :

$$E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2$$

avec :

$$K = 2k = 2 \times 7,6 = 15,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

donc :

$$E = \frac{1}{2} \times 15,2 \times (0,12)^2 = 0,11 \text{ J}$$

$$E = 0,11 \text{ J}$$

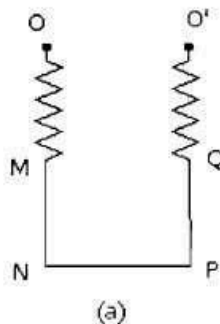
3_ Association de deux ressorts identiques d'axes verticaux Oscillations d'un cadre dans un champ magnétique uniforme.

On dispose de deux ressorts identiques de masses négligeables et de constante de raideur k . Ils s'allongent de 2 cm sous une traction de 1 N.

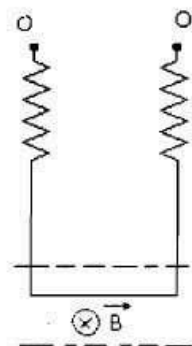
1° Calculer la valeur de k .

2° Avec une tige métallique, homogène et rigide, on réalise un cadre rectangulaire ouvert MNPQ de masse $m = 100 \text{ g}$, soudé aux extrémités des deux ressorts. On suspend l'ensemble par les deux extrémités libres des ressorts aux points O et O'. Les axes des ressorts sont verticaux, le brin NP de longueur $l = 10 \text{ cm}$ est horizontal. Les ressorts possèdent alors le même allongement (figure a).

On tire le brin NP verticalement vers le bas d'une longueur de 4 mm puis, on le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine de dates.



(a)



(b)

- a) Trouver la nature du mouvement effectué par le cadre.
b) Déterminer l'équation horaire du mouvement.
- 3° Dans la région de l'espace où oscille le cadre, règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal, perpendiculaire au plan du cadre, de sens indiqué sur la figure b. La norme du champ est $B = 4 \cdot 10^{-1} \text{ T}$. Au cours des oscillations, le brin NP ne sort jamais de la zone où règne le champ magnétique et les ressorts n'y entrent jamais. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans le cadre en fonction du temps (préciser l'orientation du cadre).

LMDB devoir SE

Solution

1°
d'un ressort.

Soit $\vec{F}$ l'action mécanique qui provoque un allongement $x_0 = 2 \text{ cm}$

d'où :

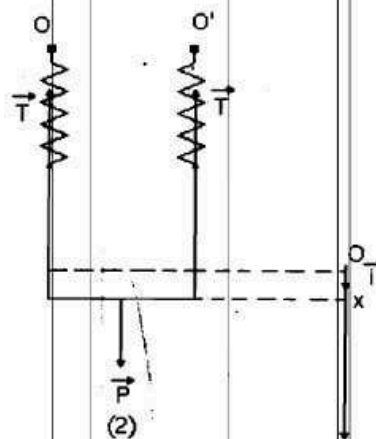
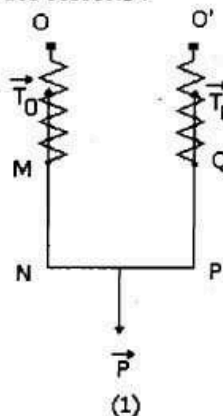
$$F = kx_0$$

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

2°

a) Les forces appliquées au cadre pris comme système, sont : le poids $\vec{P}$ et la tension des ressorts :



A l'équilibre (figure 1), la tension des ressort est $\vec{T}_0$. Le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{P} + 2\vec{T}_0 = \vec{0}$$

soit, suivant l'axe $(\vec{0}, \vec{i})$:

$$P - 2T_0 = 0$$

or :

$$T_0 = k\Delta l$$

d'où :

$$P - 2k\Delta l = 0$$

En mouvement, (figure 2), lorsque l'abscisse du centre d'inertie est x par rapport à la position d'équilibre, le théorème du centre d'inertie donne :

$$\vec{P} + 2\vec{T} = m\vec{a}$$

soit, suivant $(\vec{0}, \vec{i})$:

$$P - 2T = m\ddot{x}$$

d'autre part :

$$T = k(\Delta l + x)$$

donc :

$$P - 2k(\Delta l + x) = m\ddot{x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{soit :} & P - 2k\Delta l - 2kx = m\ddot{x} \\
 \text{comme :} & P - 2k\Delta l = 0 \\
 \text{il vient :} & -2kx = m\ddot{x} \\
 \text{soit :} & m\ddot{x} + 2kx = 0 \\
 \text{ou encore :} & \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0
 \end{aligned}$$

cette équation différentielle admet comme solution :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le mouvement est donc rectiligne sinusoïdal.

b) Nous avons :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec :

$$X_m = 4 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

et :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \times 50}{0,1}} = 10\sqrt{10} = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

d'autre part, lorsque $t = 0$,

$$x = X_m ; \text{ donc}$$

$$X_m = X_m \cos \varphi$$

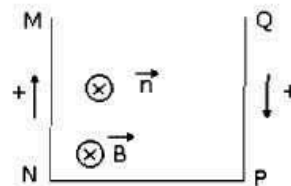
d'où :

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

finalement :

$$x = 4 \cdot 10^{-3} \cos 10\pi t$$

3° Orientons le cadre dans le sens MQPN : la normale positive a même direction et même sens que $\vec{B}$



Lorsque le brin NP a parcouru dans le champ, la distance x , le circuit embrase le flux $\Phi = BS$ avec $S = xl$; donc

$$\Phi = Bxl$$

or :

$$x = 4 \cdot 10^{-3} \cos 10\pi t$$

il vient :

$$\Phi = 4 \cdot 10^{-3} \cdot B \cdot l \cdot \cos 10\pi t$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \Phi &= 4 \cdot 10^{-3} \times 4 \cdot 10^{-1} \times 10^{-1} \cos 10\pi t \\
 &= 16 \cdot 10^{-5} \cos 10\pi t
 \end{aligned}$$

La f.e.m. induite est :

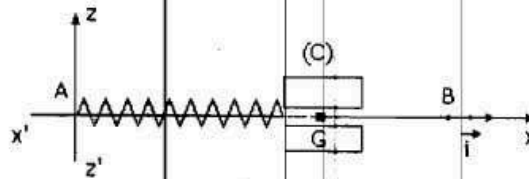
$$\begin{aligned}
 e &= -\frac{d\Phi}{dt} = 16\pi \cdot 10^{-4} \sin 10\pi t \\
 &= 5,02 \cdot 10^{-3} \sin 10\pi t
 \end{aligned}$$

$$e = 5,02 \cdot 10^{-3} \sin 10\pi t$$

4_ Oscillations horizontales d'un ressort

On dispose d'un ressort à spires non jointive, de masse négligeable et de raideur $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On engage le ressort sur une tige horizontale AB, l'une de ses extrémités est

fixée en A, l'autre est relié à un cylindre creux (C) qui peut glisser sans frottement le long de la tige.



On repère la position du centre d'inertie G de (C) par son abscisse x , sur un axe $(O, \vec{i})$ porté par AB.

1° A partir de sa position d'équilibre d'abscisse $x=0$, on écarte le cylindre dans le sens positif puis on le lâche sans vitesse initiale. Il effectue alors un mouvement oscillatoire suivant un segment de 6 cm de longueur. On compte 120 oscillations en 1 mn.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de (C). Calculer la période propre T_0 et la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. En déduire la masse M du cylindre.

b) On prend comme origine des temps l'instant du passage de (C) par sa position d'équilibre avec une vitesse positive. Déterminer l'équation horaire du mouvement de (C). Calculer sa vitesse lors du premier passage par sa position d'équilibre.

c) Compléter le tableau suivant :

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$x \text{ (cm)}$					

d) Tracer le diagramme représentant les variations de l'abscisse au cours de la première seconde.

2° L'ensemble tourne maintenant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $(A, \vec{k})$. On note l_0 la longueur du ressort à vide. Exprimer l'allongement Δl que prend ce ressort en fonction de M , l_0 , k et ω .

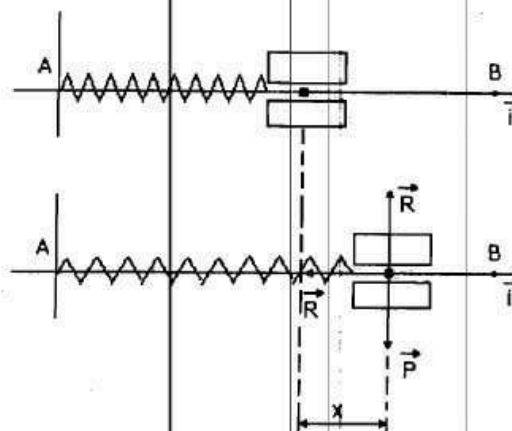
Application numérique :

$$\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ;$$

$$l_0 = 25 \text{ cm.}$$

Solution

1° a) Les forces appliquées au cylindre pris comme système sont : le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la tige et la tension $\vec{T}$ du ressort.



En considérant le repère du laboratoire comme galiléen, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Cette relation vectorielle devient, en projection sur l'axe $\vec{i}$:

$$-T = M\ddot{x}$$

$$-kx = M\ddot{x}$$

soit :

ou encore :

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

finalement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

D'autre part, la durée de 120 oscillations est 60s ; donc

$$120T_0 = 60$$

d'où :

$$T_0 = \frac{60}{120} = 0,5s$$

La pulsation propre est :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 12,56 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

De plus :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

donc :

$$M = \frac{k}{\omega_0^2}$$

soit :

$$M = \frac{20}{(12,56)^2} \approx 0,13 \text{ kg}$$

$$T_0 = 0,5s$$

$$\omega_0 = 12,56 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$M = 0,13 \text{ kg}$$

b) L'équation différentielle admet comme solution :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Nous avons :

$$2X_m = 6 \text{ cm}$$

donc :

$$X_m = 3 \text{ cm}$$

Par ailleurs, lorsque $t = 0$, $x = 0$; soit :

$$0 = X_m \cos \varphi$$

d'où :

$$\cos \varphi = 0 \text{ et } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

De plus, la vitesse à la date $t = 0$ est positive ; or la vitesse a pour expression :

$$v = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

lorsque $t = 0$,

$$v = v_0$$

$\Rightarrow$

$$v_0 = -X_m \omega_0 \sin \varphi$$

$$\text{si } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$v_0 = -X_m \omega_0 < 0$$

$$\text{si } \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$v_0 = +X_m \omega_0 > 0$$

par conséquent

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

L'équation horaire du mouvement est :

$$x = 3 \cos(12,56t - \frac{\pi}{2})$$

(x en cm et t en secondes)

Les vitesses à la position d'équilibre sont :

avec
donc :

Lorsque le cylindre passe pour la première fois par la position d'équilibre, il se dirige dans le sens négatif des elongations ; donc la vitesse est négative à cette date :

$$v = -0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$x = 3 \cos(0) = +3 \text{ cm}$$

c) On sait que :

donc :

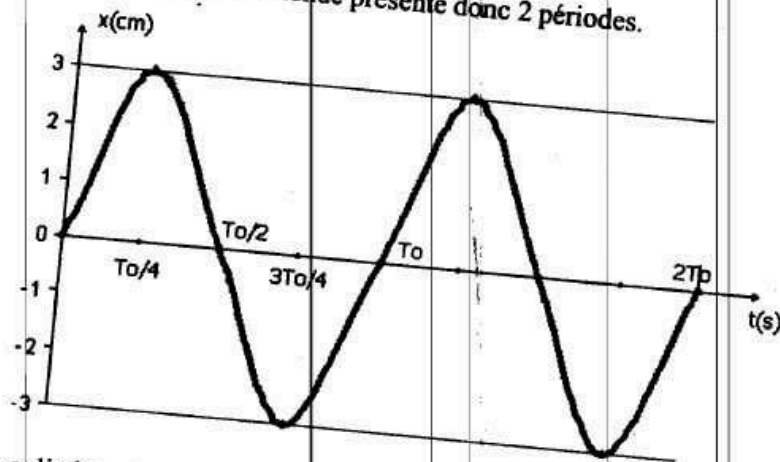
lorsque $t = 0$,

lorsque $t = \frac{T_0}{4}$,

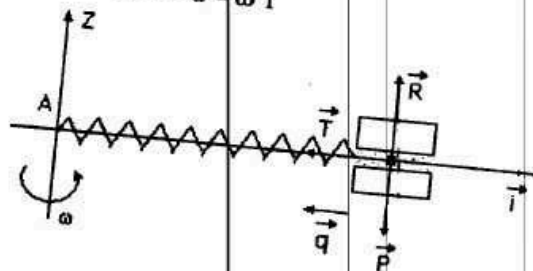
d'où le tableau suivant :

t(s)	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x (cm)	0	+3	0	-3	0

c) Nous avons $T_0 = 0,5 \text{ s}$.
1 s correspond à $2T_0$. La sinusoïde obtenue présente donc 2 périodes.



2°
Le cylindre est encore soumis aux trois forces $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$. Ils décrivent un cercle de centre A et de rayon $l = l_0 + \Delta l$. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération est centripète et de module $a = \omega^2 l$



La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$$

En projection suivant $\vec{i}$ la relation vectorielle donne :

$$-T = -Ma$$

soit :

$$k\Delta l = M\omega^2 l$$

par la suite :

$$k\Delta l = M\omega^2 (l_0 + \Delta l)$$

ou encore :

$$k\Delta l = M\omega^2 l_0 + M\omega^2 \Delta l$$

et :

$$k\Delta l - M\omega^2 \Delta l = M\omega^2 l_0$$

ou :

$$\Delta l(k - M\omega^2) = M\omega^2 l_0$$

on en déduit :

$$\Delta l = \frac{M\omega^2 l_0}{k - M\omega^2}$$

Numériquement :

$$\Delta l = \frac{0,13 \times (7)^2 \times 25 \cdot 10^{-2}}{20 - 0,13 \times (7)^2} = 11,68 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta l = 11,68 \text{ cm}$$

5_Pendule élastique constitué de deux ressorts en série.

On dispose de deux ressorts à spires non jointives R_1 et R_2 de constante de raideur respectives $k_1 = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et k_2 inconnue. On accroche à R_1 un solide (S) de masse $M = 100 \text{ g}$. A l'équilibre, le centre d'inertie de (S) est en G_0 . On déplace parallèlement vers le bas le solide d'une distance $G_0 G = X \text{ m}$ puis on le lâche sans vitesse initiale.

1° En prenant comme origine des dates l'instant où le solide passe au point d'abscisse $x = 3 \text{ cm}$ avec une vitesse $v = -0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer l'équation horaire du mouvement de (S).

2° Calculer à l'instant $t = 3 \text{ s}$, la position et l'accélération du solide.

3° On associe au ressort R_1 , le ressort R_2 ; à l'ensemble on suspend le solide (S) comme l'indique la figure ci-dessous.



a) Le système étant à l'équilibre, trouver les expressions des allongements u_1 et u_2 de R_1 et R_2 en fonction de la masse M et des raideurs k_1 et k_2 .

b) Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent qui, à l'équilibre, sous l'influence de (S) subirait un allongement $u = u_1 + u_2$.

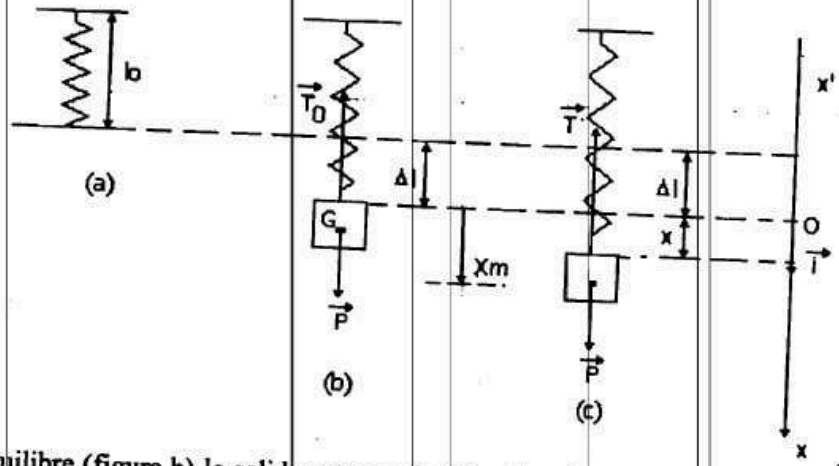
c) On mesure la durée de 10 oscillations du solide, on trouve $4,082 \text{ s}$; en déduire la valeur de k_2 .

Prendre $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution

1° système.

Faisons le bilan des forces extérieures appliquées à (S) pris comme



A l'équilibre (figure b) le solide est soumis à l'action de son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}_0$ du ressort. La condition d'équilibre impose :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

soit, en projection suivant l'axe $(O, \vec{i})$:

$$P - T_0 = 0$$

d'autre part, T_0 est proportionnelle à l'allongement Δl du ressort ;

$$T_0 = k_1 \cdot \Delta l$$

il vient :

$$P - k_1 \Delta l = 0$$

Lorsque le solide est en mouvement et que son élongation est x par rapport à sa position d'équilibre (figure c), la tension du ressort est $\vec{T}$. Le théorème du centre d'inertie donne :

$$\vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}$$

$$P - T = M\ddot{x}$$

soit, suivant $(O, \vec{i})$:

$$T = k_1 (\Delta l + x)$$

or :

il vient :

$$P - k_1 (\Delta l + x) = M\ddot{x}$$

par suite :

$$P - k_1 \Delta l - k_1 x = M\ddot{x}$$

comme :

$$P - k_1 \Delta l = 0$$

il vient :

$$-k_1 x = M\ddot{x}$$

soit :

$$M\ddot{x} + k_1 x = 0$$

ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{M} x = 0$$

Une solution de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

lorsque $t = 0$,

$$x = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m ; donc}$$

$$3 \cdot 10^{-2} = X_m \cos \varphi$$

La vitesse du centre d'inertie est

$$v = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Lorsque $t = 0$,

$$v = -0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; \text{ soit :}$$

(1)

d'autre part :

$$-0,6 = -X_m \omega_0 \sin \varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

il vient :

$$-0,6 = 20 X_m \sin \varphi$$

d'où :

$$X_m \sin \varphi = 3 \cdot 10^{-2} \quad (2)$$

Dès relations (1) et (2), il vient :

$$\frac{X_m \sin \varphi}{X_m \cos \varphi} = 1$$

soit :

$$\tan \varphi = 1$$

d'où :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

D'après (2), nous avons :

$$X_m = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\sin \varphi}$$

si $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$X_m = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

si $\varphi = \frac{5\pi}{4}$,

$$X_m = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} < 0 ; \text{ cette valeur ne convient pas à } X_m.$$

donc :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad X_m = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

L'équation horaire du mouvement est :

$$x = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$$

2°

L'élongation à la date $t = 3\text{ s}$ est :

$$x_{(3)} = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \cos\left(20 \times 3 + \frac{3,14}{4}\right) = -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

L'accélération à la date $t = 3\text{ s}$ est :

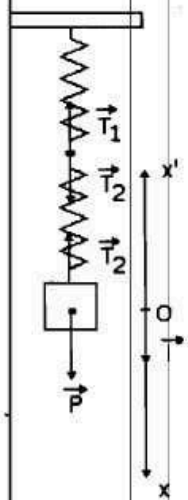
$$\ddot{x}_{(3)} = -\omega_0^2 x_{(3)} = (20)^2 \times 1,9 \cdot 10^{-2} = 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$x_{(3)} = -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\ddot{x}_{(3)} = 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3°

a)



Le solide (S) pris comme système, est soumis à l'action de son poids $\vec{P}$ et de la tension $\vec{T}_2$ du ressort R_2 . La condition d'équilibre impose :

$$\vec{P} + \vec{T}_2 = \vec{O}$$

suivant l'axe $(O, \vec{i})$ on obtient:

$$P - T_2 = 0$$

$$Mg - T_2 = 0$$

soit :

$$T_2 = Mg$$

d'où :

d'autre part :

$$T_2 = k_2 u_2$$

il vient :

$$k_2 u_2 = Mg$$

d'où :

$$u_2 = \frac{Mg}{k_2}$$

Considérons maintenant le système $\{R_1, R_2\}$. Au point d'attache c, s'exercent les forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$. La condition d'équilibre s'écrit :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{O}$$

d'où :

$$T_1 = T_2$$

comme :

$$T_1 = k_1 u_1$$

il vient :

$$k_1 u_1 = T_1 = Mg$$

d'où :

$$u_1 = \frac{Mg}{k_1}$$

$$u_1 = \frac{Mg}{k_1}$$

$$u_2 = \frac{Mg}{k_2}$$

b) L'allongement du ressort équivalent a pour expression :

$$u = \frac{Mg}{k} \quad (1)$$

D'autre part nous avons :

$$u = u_1 + u_2$$

soit :

$$u = \frac{Mg}{k_1} + \frac{Mg}{k_2}$$

par suite :

$$u = Mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (2)$$

Des relation (1) et (2) il vient :

$$\frac{Mg}{k} = Mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

d'où :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

ou encore :

$$\frac{1}{k} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 \cdot k_2}$$

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

on en déduit :

c) La période du mouvement est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

d'où :

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2}$$

or :

$$T = \frac{4,082}{10} = 0,4082s$$

donc :

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2} = \frac{4 \times 10 \times 0,1}{(0,4082)^2} = 24 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

de plus :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

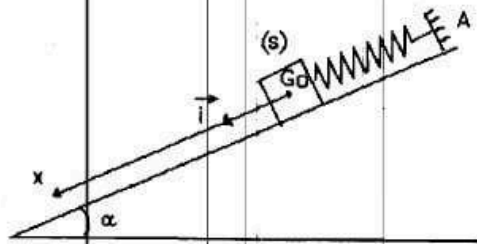
on en déduit :

$$k_2 = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k} = \frac{24 \times 40}{40 - 24} = 60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

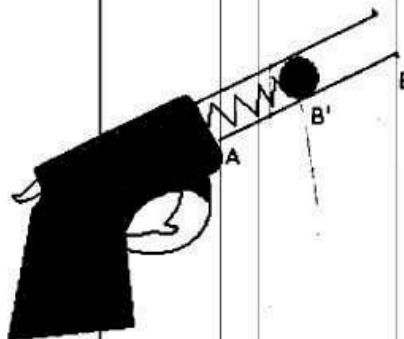
$$k_2 = 60 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

6_ Oscillations d'un ressort sur un plan incliné - projectile lancé par un ressort.

Un solide de masse $M=100g$ peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontal. Il est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort à spires non jointives ; l'autre extrémité du ressort est fixée en A à un support. La longueur à vide du ressort est $l_0 = 14cm$.



1. Le solide (S) étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0 . Le ressort dont l'axe est parallèle à la ligne de plus grande pente a pris la longueur $l=15\text{cm}$.
 - a. Représenter les forces qui s'exercent sur le solide et écrire la condition d'équilibre du solide sous forme vectorielle.
 - b. Projeter la relation vectorielle suivant l'axe $(0, \vec{i})$ et exprimer le coefficient de raideur du ressort en fonction de l'angle α , de la masse M , de l'allongement Δl du ressort et de l'intensité du champ de pesanteur g . Calculer sa valeur numérique.
2. On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas en amenant son centre d'inertie en G que $\vec{G_0G} = X_m \vec{i}$ avec $X_m = 4\text{cm}$. A l'instant $t=0$ on abandonne le solide.
 - a. Déterminer l'équation horaire du mouvement ;
 - b. Calculer la période T et la fréquence des oscillations f ;
 - c. Calculer l'énergie mécanique de vibration de l'oscillateur ; en déduire la vitesse maximale v_m acquise par le solide ;
 - d. Trouver la vitesse lorsque l'élongation est égale à $2,5\text{ cm}$.
3. Le ressort précédent d'extrémités A et B, muni d'une plaquette plane est installé dans le canon d'un pistolet à ressort. La longueur du canon est $AB = l_0$. On comprime le ressort en enfonçant la plaquette de 10 cm jusqu'en B' et on le maintient par un déclic armé. On place ensuite contre la plaquette une balle (solide ponctuelle) de masse $m=3\text{g}$.



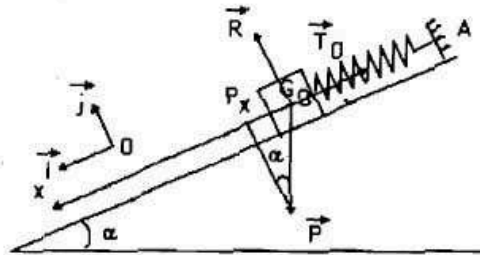
Quand on lâche le déclic, la balle sort du canon avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle de 45° avec l'horizontal.

- a. Calculer la norme v_0 de la vitesse d'éjection de la balle .
 - b. Calculer la portée du tir et la durée qu'il faut à la balle pour atteindre le point considéré.
 - c. Déterminer la flèche.
- prendre $g=10\text{ USI}$

LMDB compos SE

Solution

1° a) Les forces qui s'exercent sur le solide sont : le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du plan et la tension $\vec{T}_0$ du ressort.



$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{O}$$

b) Suivant l'axe $(O, \vec{i})$ la relation vectorielle donne : $P_x - T_0 = 0$

comme :

$$T_0 = k\Delta l$$

il vient :

$$P_x - k\Delta l = 0$$

Par ailleurs :

$$P_x = P \sin \alpha = Mg \sin \alpha$$

donc :

$$Mg \sin \alpha - k\Delta l = 0$$

par suite :

$$Mg \sin \alpha = k\Delta l$$

d'où :

$$k = \frac{Mg \sin \alpha}{\Delta l}$$

Application numérique :

$$M = 0,1 \text{ kg}$$

$$\Delta l = l - l_0 = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$k = \frac{0,1 \times 10 \times 0,50}{10^{-2}} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

2° a) En mouvement, lorsque l'élongation du centre d'inertie de (S) est x par rapport à la position d'équilibre, la tension du ressort est $T = k(\Delta l + x)$. Le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Suivant l'axe $(O, \vec{i})$ nous obtenons :

$$P_x - T = M\ddot{x}$$

soit :

$$P_x - k(\Delta l + x) = M\ddot{x}$$

par suite :

$$P_x - k\Delta l - kx = M\ddot{x}$$

or

$$P_x - k\Delta l = 0 \quad (\text{condition d'équilibre})$$

il vient donc :

$$-kx = M\ddot{x}$$

soit :

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

Une solution de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec

$$X_m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

et

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{50}{0,1}} = 10\sqrt{5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

lorsque $t = 0$, $x = X_m$;

d'où :

$$X_m = X_m \cos \varphi$$

donc :

$$\cos \varphi = 1 \text{ et } \varphi = 0$$

finalement :

$$x = 4 \cdot 10^{-2} \cos 10\sqrt{5}t$$

b) La période des oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \times 3,14}{10 \times 2,23} = 0,28 \text{ s}$$

La fréquence est :

$$f = \frac{1}{T} = 3,55 \text{ Hz}$$

$$T = 0,28 \text{ s}$$

$$f = 3,55 \text{ Hz}$$

c) L'énergie mécanique de vibration est :

$$E = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 16 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$E = 4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Si la vitesse est maximale, l'énergie potentielle élastique est nulle ; l'énergie mécanique est alors égale à l'énergie cinétique maximale ; donc :

$$E = \frac{1}{2} M v_{\max}^2$$

d'où :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{M}}$$

il vient :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \cdot 10^{-2}}{0,1}} = 0,89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\max} = 0,89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d) Nous avons :

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

ou encore :

$$E - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} M v^2$$

par la suite :

$$2E - k x^2 = M v^2$$

on en déduit :

$$v = \sqrt{\frac{2E - k x^2}{M}}$$

soit :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 4 \cdot 10^{-2} - 50 \times (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{0,1}} = 0,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 0,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3° a) L'énergie mécanique du système ressort-balle s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + mv^2$$

avant le déclic,

$$v = 0 \text{ et } x = d$$

donc l'énergie mécanique initiale est :

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2$$

Après le déclic, à la sortie du tube la vitesse de la balle est v_0 ; la position du centre d'inertie est $x = 0$, par conséquent l'énergie mécanique finale est donc :

$$E_f = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Traduisons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_f = E_i$$

soit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd^2$$

par suite :

$$mv_0^2 = kd^2$$

d'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

Application numérique :

$$m = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$d = BB' = 0,1 \text{ m}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{50 \times (0,1)^2}{3 \cdot 10^{-3}}} = 12,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 12,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La portée est :

$$x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(12,90)^2 \times 1}{10} = 16,64 \text{ m}$$

d'autre part :

$$x_p = (v_0 \cos \alpha)t$$

on en déduit :

$$t = \frac{x_p}{v_0 \cos \alpha} = \frac{16,64}{12,9 \times 0,70} = 1,82 \text{ s}$$

$$x_p = 16,64 \text{ m}$$

$$t = 1,82 \text{ s}$$

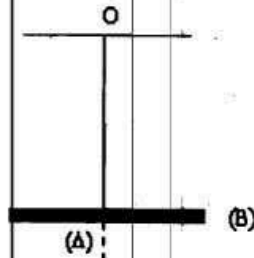
c) La flèche est :

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(12,90)^2 \sin^2 45^\circ}{20} = 4,16 \text{ m}$$

$$y_m = 4,16 \text{ m}$$

7_ Pendule de torsion constitué par une barre rectiligne

Un fil métallique vertical de constante de torsion C , fixé en O à un support, soutient une barre (B) horizontale qui peut prendre seulement un mouvement de rotation autour de l'axe Δ matérialisé par le fil. Le moment d'inertie de la barre par rapport à cet axe est J .



A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner la barre d'un angle α_0 dans un sens choisi comme sens positif, puis on l'abandonne à la date $t = 0$ avec une vitesse de $-4,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La période des oscillations est $T = 0,8 \text{ s}$.

1° Etablir l'équation horaire du mouvement pris par la barre sachant qu'elle passe pour la première fois par sa position d'équilibre à la date $t = 0,1 \text{ s}$. En déduire α_0 .

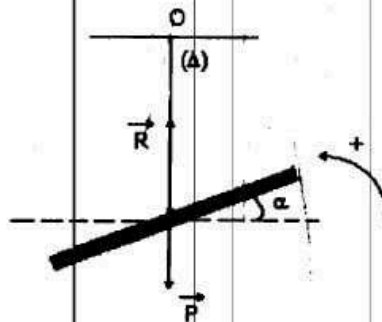
2° Calculer :

- la vitesse angulaire maximale acquise par la barre ;
- l'accélération angulaire maximale de la barre.

3° On fixe à la barre de part et d'autre de l'axe, à 10 cm de celui-ci deux solides ponctuels de même masse $m = 30 \text{ g}$. La période des oscillations devient $T = 1 \text{ s}$. En déduire la valeur du moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Δ .

Solution

1° A un instant quelconque, lorsque la barre est en mouvement, trois actions mécaniques s'exercent sur lui :



- Le poids $\vec{P}$ dont le moment par rapport à l'axe est $M_{P/A} = 0$
- La force $\vec{R}$ exercée par le fil pour soutenir la barre, de moment $M_{R/A} = 0$
- L'action développée par la torsion du fil sous forme d'un couple de rappel de moment $M_{C/A} = -C\alpha$

D'autre part, le mouvement de rotation est régi par la relation :

$$\sum M_A = J \cdot \ddot{\alpha}$$

Nous avons donc :

$$M_{P/A} + M_{R/A} + M_{C/A} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

soit :

$$0 + 0 - C\alpha + I \cdot \ddot{\alpha} = 0$$

puis :

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} \alpha = 0$$

ou encore :

Cette équation différentielle admet comme solution :

avec : $\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,8} = 2,5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 lorsque $t = 0,1 \text{ s}$, $\alpha = 0$; donc :
 $0 = \alpha_m \cos(2,5\pi \times 0,1 + \varphi)$
 soit : $0 = \alpha_m \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$
 donc : $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$
 d'où : $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 pour le premier passage à la position d'équilibre, $k = 0$;
 il vient : $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2}$
 donc : $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
 D'autre part, la vitesse angulaire est : $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\omega_0 \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
 soit : $\dot{\alpha} = -2,5\pi \alpha_m \sin(2,5\pi t + \frac{\pi}{4})$
 lorsque $t = 0$, $\dot{\alpha} = -4,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; donc :

$$-4,7 = -2,5\pi \alpha_m \sin \frac{\pi}{4}$$

d'où : $\alpha_m = \frac{4,7}{2,5 \times 3,14 \times 0,707} = 0,85 \text{ rad}$

finalement : $\alpha = 0,85 \cos\left(2,5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

D'autre part, lorsque $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$;
 soit : $\alpha_0 = 0,85 \cos \frac{\pi}{4}$
 donc : $\alpha_0 = 0,85 \times 0,707 = 0,60 \text{ rad}$
 $\alpha_0 = 0,60 \text{ rad}$

2° a) La vitesse angulaire maximale :

$$\dot{\alpha}_m = \omega_0 \alpha_m$$

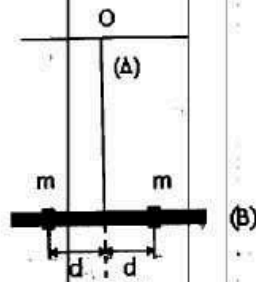
soit : $\dot{\alpha}_m = 2,5\pi \times 0,85 = 6,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 $\dot{\alpha}_m = 6,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

b) L'accélération angulaire maximale :

$$\ddot{\alpha}_m = \omega_0^2 \alpha_m$$

soit : $\ddot{\alpha}_m = (2,5)^2 \pi^2 \times 0,85 = 52,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$
 $\ddot{\alpha}_m = 52,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

3°



Le moment d'inertie d'un point par rapport à l'axe Δ est $I = md^2$. Le moment d'inertie J de la barre et des masses ponctuelles est donnée par le théorème de Huygens.

$$J' = J + 2md^2$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J + 2md^2}{C}}$$

par conséquent :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

or :

il vient, après simplification :

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{J + 2md^2}{J}$$

soit :

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = 1 + \frac{2md^2}{J}$$

ou encore :

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1 = \frac{2md^2}{J}$$

donc :

$$\frac{1}{(0,8)^2} - 1 = \frac{2md^2}{J}$$

ou :

$$0,56 = \frac{2md^2}{J}$$

on en déduit :

$$J = \frac{2md^2}{0,56}$$

Numériquement : $m = 30g = 30 \cdot 10^{-3} kg$

$$d = 10cm = 0,1m$$

$$J = \frac{2 \times 30 \cdot 10^{-3} \times (0,1)^2}{0,56} = 1,1 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

$$J = 1,1 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

8_Pendule de torsion constitué par un disque homogène

Un disque D_1 , de rayon R est suspendu à un fil A_1O_1 qui passe par son centre O_1 . La constante de torsion du fil est C . Le moment d'inertie de D_1 par rapport à l'axe vertical passant par O_1 est J . On fait osciller le disque.

1° Trouver l'expression de la période T_1 des oscillations.

2° Un second disque D_2 , semblable au précédent, est muni à sa périphérie d'une jante de masse m . Il est suspendu par son centre O_2 à un fil A_2O_2 de même constante de torsion que A_1O_1 . Donner l'expression de la période T_2 des oscillations de D_2 en fonction de R , m , J et C .

3° On fait osciller simultanément les deux disques. Pendant que D_1 effectue 51 oscillations, D_2 en effectue 50. Déterminer le moment d'inertie J de D_1 .

4° Les 51 oscillations de D_1 durent $3\text{mn } 24\text{s}$; en déduire la valeur de la constante de torsion du fil.

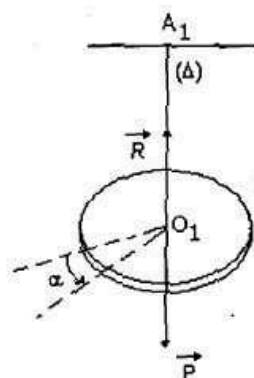
Donnée : le moment d'inertie d'une jante par rapport à un axe passant par son centre est $I = mR^2$.

LMDB devoir SE

Solution

1° Le mouvement de rotation du disque est régi par la relation :

$$\sum M_A = J \cdot \ddot{\alpha}$$



Nous avons :

$$M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} + M_{C/\Delta} = J \cdot \ddot{\alpha}$$

soit :

$$0 + 0 - C\alpha = J \cdot \ddot{\alpha}$$

il vient :

$$J \cdot \ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

ou encore :

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J}\alpha = 0$$

par conséquent :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

et

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

2° Le moment d'inertie du système disque + jante par rapport à l'axe Δ est $J' = J + mR^2$

donc :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{C}}$$

soit :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$$

3° Nous avons :

$$51T_1 = 50T_2$$

il vient, après simplification :

$$51\sqrt{\frac{J}{C}} = 50\sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$$

par la suite :

$$(51)^2 J = (50)^2 \cdot (J + mR^2)$$

soit :

$$2601J = 2500J + 2500mR^2$$

d'où :

$$J = \frac{2500mR^2}{2601 - 2500}$$

soit :

$$J = \frac{2500mR^2}{101}$$

$$m = 0,1 \text{ kg} \\ R = 0,2 \text{ m}$$

Application numérique :

$$J = \frac{2500 \times 0,1 \times (0,20)^2}{101} = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

4° Nous avons :

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 J}{C}$$

d'où :

$$C = \frac{4\pi^2 J}{T_1^2}$$

d'autre part :

$$51T_1 = 3 \text{ mn } 24 \text{ s} = 204 \text{ s}$$

d'où :

$$T_1 = \frac{204}{51} = 4 \text{ s}$$

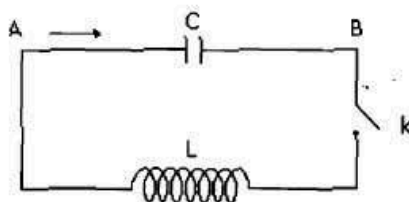
il vient :

$$C = \frac{4 \times 10 \times 9,9 \cdot 10^{-2}}{16} = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$C = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$$

9_ Circuit oscillant : énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine.

Un condensateur de capacité $C = 2 \mu\text{F}$ est chargé sous une tension $U = 20 \text{ V}$. Dès que la charge est terminée, on relie les armatures de ce condensateur à une bobine d'inductance $L = 0,5 \text{ N}$ et de résistance négligeable. A un instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur K.

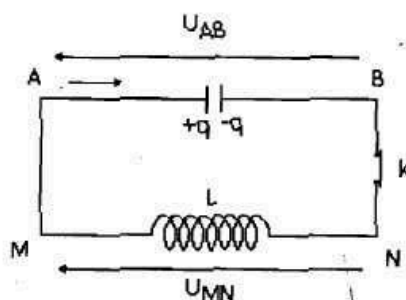


- 1° En comptant positivement l'intensité $i(t)$ quand le courant circule dans le sens indiqué sur le schéma, établir l'équation différentielle du circuit (on précise qu'à l'instant $t = 0$, l'armature A est chargée positivement).
- 2° Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit ainsi que la fréquence propre f_0 des oscillations.
- 3° Trouver les expressions de la charge du condensateur et de l'intensité du courant en fonction du temps $q(t)$ et $i(t)$.
- 4° Déterminer les expressions des fonctions $W_c(t)$ et $W_b(t)$ des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine. Montrer que ce système satisfait au principe de conservation de l'énergie.

LMDB devoir SB

Solution

1°



La tension aux bornes du condensateur est $U_{AB} = \frac{q}{C}$

La tension aux bornes de la bobine est $U_{MN} = -L \frac{di}{dt}$

d'autre part :

$$U_{AB} = U_{MN}$$

soit :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

ou encore :

$$\frac{L di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

comme :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

il vient :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

ou encore :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

2° La pulsation propre est :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,5 \times 2 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La fréquence propre est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1000}{6,28} = 159,23 \text{ Hz}$$

$$\omega_0 = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f_0 = 159,23 \text{ Hz}$$

3° L'équation différentielle admet comme solution :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La charge initiale du condensateur est :

$$Q_m = CU = 2 \cdot 10^{-6} \times 20 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

Par ailleurs, lorsque $t = 0$, $q = Q_m$; donc :

$$Q_m = Q_m \cos \varphi$$

d'où :

$$\cos \varphi = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

Par conséquent :

$$q(t) = 4 \cdot 10^{-5} \cos 1000t$$

L'intensité du courant en fonction du temps s'obtient par la relation :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

soit :

$$i(t) = -4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \sin 1000t$$

$$= -4 \cdot 10^{-2} \sin 1000t$$

$$i(t) = -4 \cdot 10^{-2} \sin 1000t$$

4° L'énergie emmagasinée dans le condensateur est :

$$W_c(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-6}} \cos^2 1000t$$

$$= 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 1000t$$

$$W_c(t) = 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 1000t$$

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

$$W_b(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 16 \cdot 10^{-4} \sin^2 1000t$$

$$= 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 1000t$$

$$W_c(t) = 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 1000t$$

$$W_b(t) = 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 1000t$$

L'énergie de vibration de ce système est :

$$W = W_c(t) + W_b(t)$$

soit :

$$W = 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 1000t + 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 1000t$$

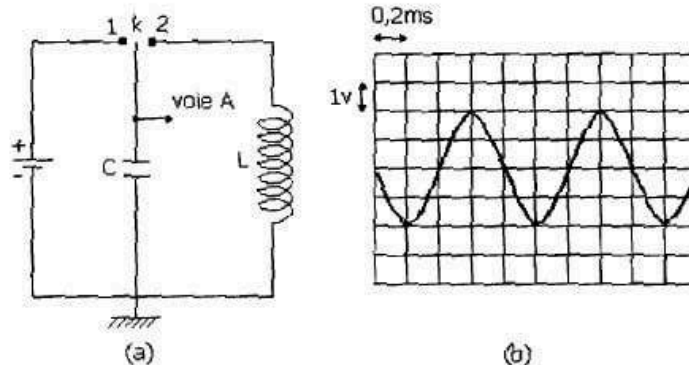
$$= 4 \cdot 10^{-4} (\sin^2 1000t + \cos^2 1000t)$$

$$W = 4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

L'énergie totale est constante ; le système satisfait donc au principe de la conservation de l'énergie.

10_ Détermination de la période d'un circuit LC à partir de l'oscillogramme.

On réalise le montage de la figure (a). La voie A d'un oscilloscope est branchée aux bornes d'un condensateur de capacité $C \approx 0,1 \mu\text{F}$. Le calibre est de $1\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$. La base de temps de l'oscilloscope est en position $0,2\text{ms} \cdot \text{cm}^{-1}$. L'inductance L de la bobine est inconnue.

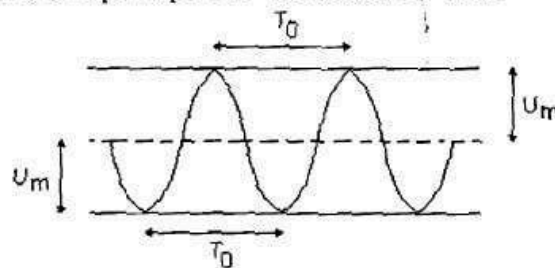


- 1° On place l'inverseur K en position 1. Que se passe-t-il pour le condensateur ?
- 2° A l'instant $t = 0$, on bascule l'inverseur de la position 1 à la position 2. On observe alors sur l'écran la courbe de la figure (b). Quelle phénomène représente-t-elle ? déterminer sa période ; en déduire l'inductance de la bobine.
- 3° Déterminer à partir de l'oscillogramme l'expression de la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du condensateur.

LMDB devoir SB

Solution

- 1° Le condensateur se charge sous la tension imposée par le générateur.
- 2° Nous observons la décharge oscillante du condensateur. Par ailleurs l'oscillogramme montre que la période T_0 s'inscrit sur 4 cm.



donc :

$$T_0 = 4 \times 0,2\text{ms} = 0,8\text{ms} = 0,8 \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$T_0 = 8 \cdot 10^{-4}\text{s}$$

D'autre part la période propre d'un circuit LC a pour expression :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

donc :

$$T_0^2 = 4\pi^2 LC$$

on en déduit :

$$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

soit :

$$L = \frac{(8)^2 \cdot 10^{-8}}{4 \times 10 \times 0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,16 \text{ H}$$

$$L = 0,16 \text{ H}$$

3° La tension maximale U_m aux bornes du condensateur correspond à 2 cm sur l'écran de l'oscillographe ;

donc :

$$U_m = 2 \times 1 \text{ V} = 2 \text{ V}$$

La tension instantanée $u(t)$ a pour expression :

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2 \times 3,14}{8 \cdot 10^{-4}} = 7850 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

lorsque $t = 0$, $u(t) = U_m$;

d'où :

$$U_m = U_m \cos \varphi$$

soit :

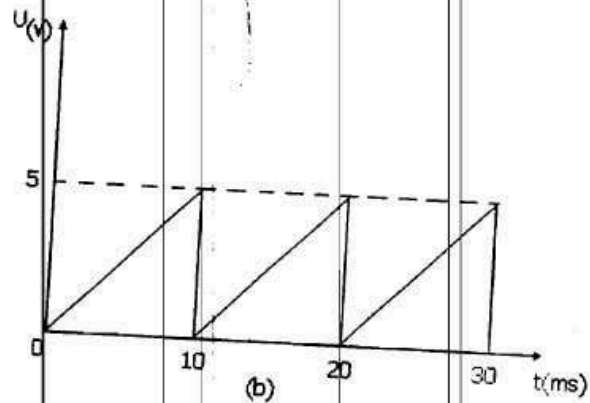
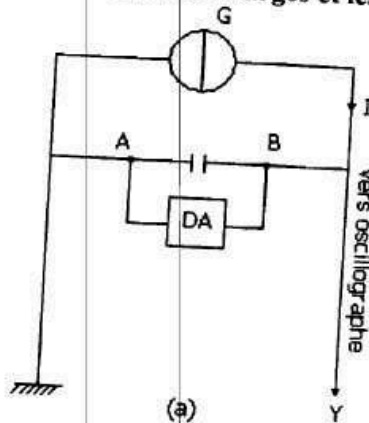
$$\cos \varphi = 1 \text{ et } \varphi = 0$$

finalement :

$$u(t) = 2 \cos 7850t$$

11_ Circuit LC : charges et décharges successives du condensateur – analyse à l'oscillographe.

On réalise le montage schématisé ci-dessous (figure a). Un générateur G débite un courant d'intensité constante $I = 1 \text{ mA}$. Dès que la tension entre les armatures A et B du condensateur $U_{AB} = U(t)$ atteint la valeur maximale $U_m = 5 \text{ V}$, un dispositif noté (DA) permet de décharger automatiquement et instantanément le condensateur. L'oscillographe permet d'observer les charges et les décharges successives (figure b).



- 1° Dédurre de l'oscillogramme l'expression de la tension U pour t compris entre 0 et 10 ms.
- 2° Dans le même intervalle de temps, exprimer U en fonction de l'intensité I du courant débité par le générateur et de la capacité C du condensateur et déterminer la capacité du condensateur.

- 3° A l'instant $t = 6 \text{ ms}$, on isole le condensateur du circuit précédent et on le connecte à une bobine d'inductance $L = 0,5 \text{ H}$ et de résistance négligeable. Etablir l'expression de la charge $q(t)$ du condensateur en fonction du temps $q(t)$ (préciser l'origine des dates).
- 4° Exprimer en fonction du temps la tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant $i(t)$ et montrer que le courant et la tension sont déphasés.
- 5° Déterminer l'énergie emmagasinée dans le condensateur quand l'intensité du courant est $i = 1 \text{ mA}$.

LMDB devoir SE

Solution

1° Dans l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 10 \text{ ms}$, le graphe de la fonction $U(t)$ est une droite. Donc, dans cet intervalle, la tension aux bornes du condensateur est de la forme :

$$U(t) = at + b$$

a et b sont des constantes à déterminer

lorsque $t = 0$, $U = 0$; d'où $b = 0$

lorsque $t = 10 \text{ ms} = 10^{-2} \text{ s}$, $U = 5 \text{ V}$;

soit :

$$5 = a \cdot 10^{-2}$$

on en déduit :

$$a = 5 \cdot 10^2$$

finalement :

$$U(t) = 5 \cdot 10^2 t$$

2° La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge Q :

$$U = \frac{Q}{C}$$

or :

$$Q = It$$

il vient :

$$U(t) = \frac{It}{C}$$

Nous avons donc l'égalité suivante :

$$\frac{It}{C} = 5 \cdot 10^2 t$$

soit :

$$\frac{I}{C} = 5 \cdot 10^2$$

d'où :

$$C = \frac{I}{5 \cdot 10^2}$$

$$I = 1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

donc :

$$C = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 2 \mu\text{F}$$

$$C = 2 \mu\text{F}$$

3° On retrouve l'équation différentielle $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ dont une solution est :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La charge maximale est la charge à l'instant de la connexion ;

soit :

$$Q_m = CU_{(6\text{ms})}$$

or :

$$U_{(6\text{ms})} = 5 \cdot 10^2 \times 6 \cdot 10^{-3} = 3 \text{ V}$$

donc :

$$Q_m = 2 \cdot 10^{-6} \times 3 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

La pulsation propre est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

En prenant comme origine des dates l'instant de la connexion, nous avons :

$$q = Q_m \text{ lorsque } t = 0 ;$$

$$Q_m = Q_m \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 1 \text{ et } \varphi = 0$$

soit :

$$q(t) = 6 \cdot 10^{-6} \cos 1000t$$

d'où :

il vient donc :

4° La tension instantanée $u(t)$ s'obtient par la relation :

$$u(t) = \frac{q(t)}{C}$$

soit :

$$u(t) = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} \cos 1000t = 3 \cos 1000t$$

L'intensité instantanée du courant s'obtient par :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -6 \cdot 10^{-3} \sin 1000t$$

$$u(t) = 3 \cos 1000t$$

$$i(t) = -6 \cdot 10^{-3} \sin 1000t$$

En utilisant la relation trigonométrique : $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ nous obtenons :

$$i(t) = 6 \cdot 10^{-3} \cos(1000t + \frac{\pi}{2})$$

L'intensité est donc en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.

5° L'énergie électrique totale est :

$$E = \frac{1}{2} C U_0^2$$

$$\text{avec } U_0 = U_{(rms)} = 3V$$

donc :

$$E = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 9 = 9 \cdot 10^{-6} J$$

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

$$E_M = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,25 \cdot 10^{-6} J$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est E_e :

Par ailleurs,

$$E = E_e + E_M$$

d'où :

$$E_e = E - E_M$$

soit :

$$E_e = 9 \cdot 10^{-6} - 0,25 \cdot 10^{-6} = 8,75 \cdot 10^{-6} J$$

$$E_e = 8,75 \cdot 10^{-6} J$$

LES OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES : LE COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL

* 1_ Caractéristiques d'une bobine

Une bobine de résistance R et d'inductance L est d'abord alimentée par un générateur de tension continue $U_1 = 6V$; l'intensité du courant qui la traverse est $I_1 = 0,3A$. Si elle est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale, de valeur efficace $U_2 = 24V$ et de fréquence 50 Hz , l'intensité efficace vaut $I_2 = 0,12A$.

1° Déterminer R et L .

2° La tension imposée s'écrit sous la forme :

$$u = 24\sqrt{2} \cos 100\pi t \quad (u \text{ en volts})$$

a) Ecrire l'expression de l'intensité instantanée du courant.

b) On monte en série avec la bobine un condensateur de capacité $C = 5\mu F$ et on soumet l'ensemble à la tension sinusoïdale. Déterminer l'expression de l'intensité instantanée du courant.

LMDB devoir SB

Solution

1° En courant continu, la loi d'Ohm aux bornes de la bobine donne :

$$R = \frac{U_1}{I_1}$$

soit :

$$R = \frac{6}{0,3} = 20\Omega$$

En courant alternatif, l'impédance de la bobine est :

$$Z = \frac{U_2}{I_2}$$

soit :

$$Z = \frac{24}{0,12} = 200\Omega$$

d'autre part :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

soit :

$$Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$$

d'où :

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

il vient :

$$L = \frac{1}{314} \sqrt{(200)^2 - (20)^2} = 0,63 \text{ H}$$

$$\boxed{\begin{matrix} R = 20\Omega \\ L = 0,63 \text{ H} \end{matrix}}$$

2° a) La phase de la tension par rapport à l'intensité est φ telle que :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

soit :

$$\tan \varphi = \frac{0,63 \times 314}{20} = 9,89$$

d'où :

$$\varphi = 1,47 \text{ rad}$$

La phase de l'intensité par rapport à la tension est $\varphi' = -\varphi$. L'intensité instantanée du courant s'écrit donc : $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

$$I_m = I_2 \sqrt{2} = 0,12 \sqrt{2}$$

il vient :

$$i(t) = 0,12 \sqrt{2} \cos(100\pi t - 1,47)$$

b) L'impédance du circuit devient :

$$Z' = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

soit :

$$Z' = \sqrt{(20)^2 + (194,68 - 636,94)^2} = 442,71 \Omega$$

La phase de la tension par rapport à l'intensité devient Φ telle que

$$\tan \Phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

soit :

$$\tan \Phi = \frac{194,68 - 636,94}{20} = -22,113$$

d'où :

$$\Phi = -1,52 \text{ rad}$$

La phase de l'intensité par rapport à la tension est $\Phi' = -\Phi$. L'intensité instantanée du courant s'écrit alors :

$$i(t) = I'_m \cos(100\pi t + 1,52)$$

par ailleurs :

$$I'_m = \frac{U_m}{Z'} = \frac{24 \sqrt{2}}{442,71} = 7,64 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

d'où :

$$i'(t) = 7,64 \cdot 10^{-2} \cos(100\pi t + 1,52)$$

2_ Détermination de la nature d'un dipôle

Soit un dipôle électrique AB dont la nature exacte est inconnue. On sait qu'il peut être formé des éléments suivants :

Cas n°1 : une bobine de résistance R, d'inductance L

Cas n°2 : un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C en série.

Cas n°3 : un conducteur ohmique de résistance R

1° On alimente ce dipôle par une tension continue et on constate qu'un courant d'intensité constante le traverse. Montrer que le cas n°2 ne peut convenir.

2° On alimente maintenant le dipôle AB par une tension sinusoïdale de fréquence $f=50\text{Hz}$ et on observe :

- a. au wattmètre que la puissance moyenne dissipée dans AB est $P=25W$.
- b. à l'ampèremètre, que l'intensité efficace dans est $I = 0,5 A$.
- c. au voltmètre, que la tension efficace aux bornes de AB est $U=100V$.

Grâce à ces indications, déterminer la nature exacte du dipôle AB et ses grandeurs caractéristiques.

3° Le dipôle AB est placé en série avec un condensateur de capacité variable. L'ensemble est alimenté par la même tension sinusoïdale qu'au 2. Déterminer la valeur C' de la capacité pour que la tension et le courant soient en phase.

Solution

1° Un condensateur arrête le courant continu (pendant un bref instant le courant circule puis son intensité décroît et s'annule). Le cas n°2 ne convient donc pas.

2° Si le dipôle AB était une résistance pure (cas n°3). Le courant et la tension serait en phase. La puissance moyenne consommée serait :

$$P = UI = 100 \times 0,5 = 50W$$

puisque $P = 25W$, le courant et la tension sont déphasés. Le dipôle AB est donc la bobine de résistance R et d'inductance L .

D'autre part, nous avons :

$$P = RI^2$$

on en déduit :

$$R = \frac{P}{I^2}$$

soit :

$$R = \frac{25}{(0,5)^2} = 100\Omega$$

L'impédance du dipôle AB est :

$$Z = \frac{U}{I}$$

soit :

$$Z = \frac{100}{0,5} = 200\Omega$$

d'autre part, nous avons :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

d'où :

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

par suite :

$$L = \frac{1}{314} \sqrt{(200)^2 - (100)^2} = 0,55H$$

$$\boxed{R = 100\Omega}$$

$$\boxed{L = 0,55H}$$

3° La tension et le courant sont en phase à la résonance. La capacité C' est telle que :

$$L\omega = \frac{1}{C'\omega}$$

on en déduit :

$$C' = \frac{1}{L\omega^2}$$

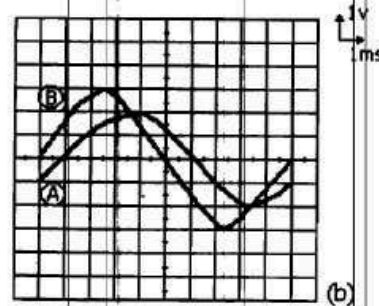
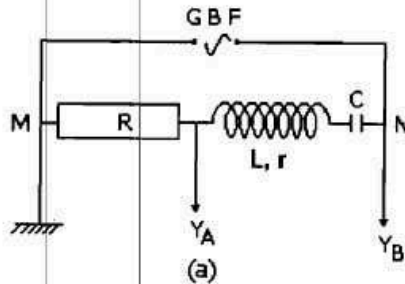
soit :

$$C' = \frac{1}{0,55 \times (314)^2} = 1,84 \cdot 10^{-5} F$$

$$\boxed{C' = 1,84 \cdot 10^{-5} F}$$

3_Mesure d'un déphasage - Intensité instantanée du courant. Puissance moyenne consommée - Caractéristiques d'une bobine.

Un dipôle MN est constitué par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $R = 40\Omega$, d'une bobine de résistance r et d'inductance L et d'un condensateur de capacité $C = 5\mu F$. Le dipôle est alimenté par un générateur de basse fréquence qui impose une tension $u = U_m \cos \omega t$ (figure a).



Un oscillographe bicourbe permet de visualiser les tensions $u_1(t)$ aux bornes de R (sur la voie A), et $u_2(t)$ aux bornes de MN (sur la voie B). les réglages de l'oscillographe sont les suivants :

- balayage : 1 ms par division
- voie A et B : 1V par division

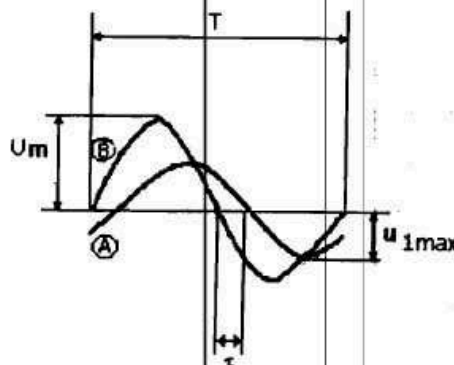
L'oscillogramme est présenté sur la figure b

- 1° A partir de l'oscillogramme déterminer la période et la pulsation de la tension et du courant
- 2° Déterminer les valeurs maximales U_m et I_m de la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du circuit et de l'intensité instantanée. Calculer l'impédance du dipôle MN.
- 3° Toujours à l'aide de l'oscillogramme déterminer le déphasage entre la tension u et l'intensité et donner l'expression de cette intensité instantanée.
- 4° Calculer la puissance moyenne consommée dans le dipôle MN.
- 5° Déterminer la résistance et l'inductance de la bobine.

LMDB devoir SE

Solution

1° Le schéma ci-dessous est la représentation simplifiée de la figure (b). Cette représentation montre la tension maximale U_m , la période T du courant.



Une période occupe 10 divisions sur l'écran ; donc

$$T = 10 \times 1 \text{ ms} = 10 \text{ ms} = 10^{-2} \text{ s}$$

$$T = 0,01 \text{ s}$$

La pulsation est

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

soit :

$$\omega = \frac{2\pi}{10^{-2}} = 200\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 200\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° La tension maximale U_m est l'amplitude $(u_2)_{\text{max}}$ de la tension $u_2(t)$

$$U_m = (u_2)_{\text{max}}$$

or :

$$(u_2)_{\text{max}} = 3 \text{ divisions}$$

donc :

$$U_m = 3 \times 1 \text{ V} = 3 \text{ V}$$

$$U_m = 3 \text{ V}$$

Par ailleurs, la tension $u_1(t)$ est proportionnelle à l'intensité $i(t)$.

L'intensité maximale est donc :

$$I_m = \frac{(u_1)_{\text{max}}}{R}$$

or :

$$(u_1)_{\text{max}} = 2 \text{ divisions}$$

soit :

$$(u_1)_{\text{max}} = 2 \times 1 \text{ V} = 2 \text{ V}$$

il vient :

$$I_m = \frac{2}{40} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

$$I_m = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

L'impédance du dipôle MN est :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{3}{0,05} = 60 \Omega$$

$$Z = 60 \Omega$$

3° Le décalage temporel τ entre les deux courbes est proportionnel au déphasage $|\varphi|$

entre l'intensité et la tension aux bornes du circuit : $\tau = \frac{|\varphi|}{\omega}$

d'où :

$$|\varphi| = \tau \omega$$

L'oscillogramme montre que τ occupe 1 division ; donc :

$$\tau = 1 \times 1 \text{ ms} = 1 \text{ ms}$$

soit :

$$\tau = 10^{-3} \text{ s}$$

par conséquent :

$$|\varphi| = 10^{-3} \times 200\pi = 0,628 = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

$$|\varphi| = 0,628 \text{ rad}$$

L'oscillogramme montre que la tension aux bornes du dipôle MN est en avance de phase par rapport à l'intensité $i(t)$; donc :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - |\varphi|)$$

soit :

$$i(t) = 5 \cdot 10^{-2} \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$i(t) = 5 \cdot 10^{-2} \cos(200\pi t - 0,628)$$

4° La puissance moyenne consommée par le dipôle MN est donnée par la relation :

$$P = U \cdot I \cos \varphi$$

Puisque :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

il vient :

$$P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi$$

soit :

$$P = \frac{3 \times 0,05 \times 0,80}{2} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$$\boxed{P = 6 \cdot 10^{-2} \text{ W}}$$

5° Nous avons :

$$\cos \varphi = \frac{R + r}{Z}$$

d'où :

$$R + r = Z \cos \varphi$$

soit :

$$40 + r = 60 \times 0,80$$

on en déduit :

$$r = 48 - 40 = 8 \Omega$$

$$\boxed{r = 8 \Omega}$$

Par ailleurs, la phase de la tension par rapport à l'intensité est φ telle que :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$$

or :

$$\varphi = 0,628 \text{ rad}$$

donc :

$$\tan 0,628 = \frac{628L - 318,47}{48}$$

ou encore :

$$9,8 \cdot 10^{-3} \times 48 = 628L - 318,47$$

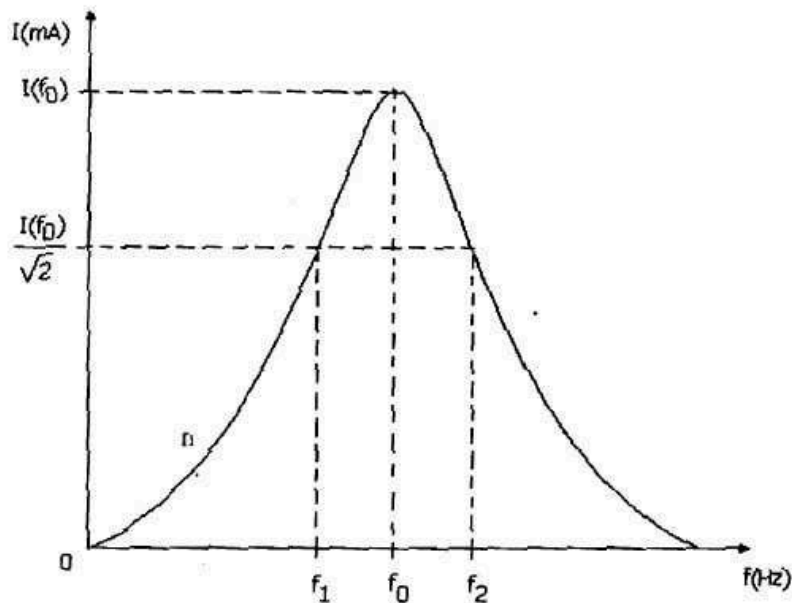
on en déduit :

$$L = \frac{0,47 + 318,47}{628} = 0,50 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 0,50 \text{ H}}$$

× **4_ Etude d'une résonance d'intensité dans un circuit – Bande passante à trois décibels – Facteur de qualité – Caractéristiques du circuit. (Classes de SE)**

Un circuit comprend, montés en série, un générateur BF, un conducteur ohmique de résistance R , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C . Le générateur délivre une tension efficace $U=10\text{V}$. On note I l'intensité efficace dans le circuit pour une fréquence f imposée par le générateur. La figure ci-dessous donne les valeurs de I en fonction de f .



A partir de la courbe on a obtenu :

$$f_0 = 200\text{Hz} ; I(f_0) = 250\text{mA}$$

$$f_1 = 186\text{Hz} ; f_2 = 216\text{Hz}$$

1. Déterminer le facteur de qualité Q .
2. Calculer R , L et C .
3. On se place à la résonance d'intensité. Calculer les tensions efficaces aux bornes de la résistance, du condensateur et de la bobine.
4. On règle maintenant la fréquence à la valeur f_1 calculer :
 - a. Les valeurs efficaces de la tension aux bornes de chacun des dipôles.
 - b. La phase φ_1 de la tension par rapport à l'intensité.

Solution

1) La largeur de la bande passante est :

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 216 - 186 = 30\text{Hz}$$

Le facteur de qualité du circuit est donné par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

soit :

$$Q = \frac{200}{30} = 6,7$$

$$\boxed{Q = 6,7}$$

2) A la résonance, $f = f_0$; le circuit est équivalent à la résistance R ; d'où :

$$R = \frac{U}{I(f_0)}$$

$$I(f_0) = 250\text{mA} = 0,25\text{A}$$

donc :

$$R = \frac{10}{0,25} = 40\Omega$$

d'autre part :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

d'où :

avec

par conséquent :

Par ailleurs :

d'où :

soit :

$$L = \frac{QR}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \times 3,14 \times 200 = 1256 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = \frac{6,7 \times 40}{1256} = 0,21 \text{ H}$$

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2}$$

$$C = \frac{1}{0,21 \times (1256)^2} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 3 \mu\text{F}$$

$$\begin{aligned} R &= 40 \Omega \\ L &= 0,21 \text{ H} \\ C &= 3 \mu\text{F} \end{aligned}$$

3) A la résonance, l'intensité efficace est maximale :

$$I(f_0) = I_0 = 250 \text{ mA} = 0,25 \text{ A}$$

La tension efficace aux bornes de la résistance est donc :

$$U_R = RI_0 = 40 \times 0,25 = 10 \text{ V}$$

La tension efficace aux bornes du condensateur est :

$$U_C = Z_C I_0 = \frac{I_0}{C\omega_0}$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow U_C = \frac{I_0}{C\omega_0}$$

$$U_C = \frac{0,25}{3 \cdot 10^{-6} \times 1256} = 66,34 \text{ V}$$

soit :

La tension efficace aux bornes de la bobine est :

$$U_L = Z_L I_0 = L\omega_0 I_0 = 66 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} U_R &= 10 \text{ V} \\ U_C &= U_L = 60 \text{ V} \end{aligned}$$

4) a) A la fréquence $f_1 = 186 \text{ Hz}$, l'intensité efficace du courant est :

$$I = \frac{I(f_0)}{\sqrt{2}} = \frac{0,25}{1,41} = 0,18 \text{ A}$$

La pulsation du courant est alors :

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 1168,08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La tension efficace aux bornes de la résistance est :

$$U_R = RI = 40 \times 0,18 = 7,2 \text{ V}$$

La tension efficace aux bornes du condensateur est :

$$U_C = \frac{I}{C\omega_1} = \frac{0,18}{3 \cdot 10^{-6} \times 1168,08} = 51,36 \text{ V}$$

La tension efficace aux bornes de la bobine est :

$$U_L = L\omega_1 I = 0,21 \times 1168,08 \times 0,18 = 44,15 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} U_R &= 7,2 \text{ V} \\ U_C &= 51,36 \text{ V} \\ U_L &= 44,15 \text{ V} \end{aligned}$$

b) Nous avons :

soit :

$$\tan \varphi_1 = \frac{L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}}{R}$$

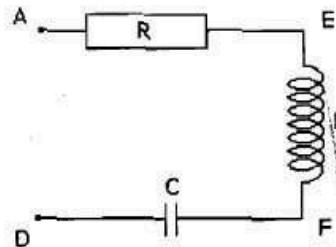
$$\tan \varphi_1 = \frac{0,21 \times 1168,08 - \frac{1}{3 \cdot 10^{-6} \times 1168,08}}{40} = -1$$

d'où :

$$\varphi_1 \approx -\frac{\pi}{4}$$

5_ Détermination des caractéristiques d'un circuit. Construction de Fresnel.

Un dipôle AD comprend en série, un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C. Un générateur BF maintient entre ses bornes une tension sinusoïdale de pulsation ω réglable.



A l'aide d'un voltmètre, on a mesuré les tensions efficaces :

$$U_{AD} = 15 \text{ V} ; U_{AE} = 7 \text{ V} ; U_{EF} = 44 \text{ V}$$

D'autre part, la mesure de l'intensité efficace donne : $I = 350 \text{ mA}$. A l'aide d'un oscillographe bicourbe on a trouvé que la tension aux bornes du dipôle AD est en retard de phase par rapport à l'intensité.

1° Calculer R.

2° On pose φ , la phase de la tension aux bornes de l'ensemble par rapport à l'intensité.

a) Représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions instantanées $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$.

b) Calculer φ et U_{FD} .

c) Calculer les impédances Z_L et Z_C de la bobine et du condensateur.

3° Un courant de pulsation $1413 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ traversant le circuit est en phase avec la tension aux bornes du circuit. En déduire L et C.

4° Calculer, dans les conditions de résonance, la puissance moyenne consommée par le dipôle.

Solution

1° La tension efficace aux bornes de la résistance est :

$$U_{AB} = RI$$

d'où :

$$R = \frac{U_{AE}}{I}$$

avec

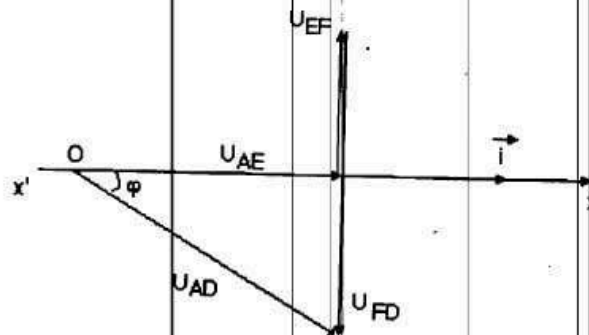
$$I = 350 \text{ mA} = 0,35 \text{ A}$$

donc :

$$R = \frac{7}{0,35} = 20 \Omega$$

$$\boxed{R = 20 \Omega}$$

2° a) L'effet de capacité l'emportant sur l'effet d'inductance, on obtient la construction de Fresnel suivante :



b) D'après le diagramme de Fresnel

$$\cos \varphi = \frac{U_{AE}}{U_{AD}} = \frac{7}{15} = 0,4666$$

donc :

$$\varphi = 1,08 \text{ rad}$$

D'autre part :

$$\tan \varphi = \frac{U_{FD} - U_{EF}}{U_{AE}}$$

on encore :

$$U_{AE} \tan \varphi = U_{FD} - U_{EF}$$

d'où :

$$U_{FD} = U_{AE} \tan \varphi + U_{EF}$$

soit :

$$U_{FD} = 7 \tan 1,08 + 44 = 57,09 \text{ V}$$

$$\boxed{\varphi = 1,08 \text{ rad}}$$

$$\boxed{U_{FD} = 57,09 \text{ V}}$$

c) La tension efficace aux bornes de la bobine :

$$U_{EF} = Z_L I$$

d'où :

$$Z_L = \frac{U_{EF}}{I} = \frac{44}{0,35} = 125,71 \Omega$$

La tension efficace aux bornes du condensateur :

$$U_{FD} = Z_C I$$

d'où :

$$Z_C = \frac{U_{FD}}{I} = \frac{57,09}{0,35} = 163,11 \Omega$$

$$Z_L = 125,71 \Omega$$

$$Z_C = 163,11 \Omega$$

3° Le courant et la tension sont en phase à la résonance ; il vient :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad (1)$$

avec :

$$\omega_0 = 1413 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

par ailleurs :

$$L\omega = Z_L = 125,71 \Omega$$

d'où :

$$L = \frac{125,71}{\omega} \quad (2)$$

De même :

$$\frac{1}{C\omega} = 163,11 \Omega$$

d'où :

$$C = \frac{1}{163,11\omega} \quad (3)$$

Compte tenu des relations (2) et (3), la relation (1) donne :

$$\frac{125,71\omega_0^2}{163,11\omega^2} = 1$$

ou :

$$\omega^2 = \frac{125,71\omega_0^2}{163,11}$$

par la suite :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{125,71}{163,11}}$$

soit :

$$\omega = 1413 \times \sqrt{\frac{125,71}{163,11}} = 1240,47 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 1240,47 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

d'après (2) :

$$L = \frac{125,71}{1240,47} = 0,10 \text{ H}$$

d'après (3) :

$$C = \frac{1}{163,11 \times 1240,47} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$C = 5 \mu\text{F}$$

4° A la résonance, l'impédance de l'ensemble est $Z=R$. L'intensité efficace est alors :

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{15}{20} = 0,75 \text{ A}$$

La puissance moyenne consommée est donc maximale :

$$P_0 = RI_0^2 = 20 \times (0,75)^2 = 11,25 \text{ W}$$

$$P_0 = 11,25 \text{ W}$$

6_Puissance moyenne. Puissance apparente. Facteur de puissance.

Un circuit en série comprend un conducteur ohmique de résistance $R = 18\Omega$, une bobine d'inductance $L = 450\text{mH}$ et de résistance $r = 6\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 2\mu\text{F}$. Un générateur maintient aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 12\text{V}$ et de fréquence variable.

- 1° Pour quelle fréquence la puissance moyenne consommée par le circuit est elle maximale ? Calculer la valeur P_0 de ce maximum.
- 2° On se place à la fréquence $f = 200\text{Hz}$.
 - a) Déterminer le facteur de puissance et les valeurs possibles de la phase.
 - b) Calculer la puissance apparente et la puissance moyenne consommée.
 - c) Calculer les puissances moyennes consommées par le conducteur ohmique, par la bobine et par le condensateur.

Solution

1° La puissance moyenne consommée est maximale à la résonance. La fréquence est alors :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$L = 450\text{mH} = 0,45\text{H}$$

$$C = 2 \cdot 10^{-6}\text{F}$$

$$f_0 = \frac{1}{6,28\sqrt{0,45 \times 2 \cdot 10^{-6}}} = 167,84\text{Hz}$$

Numériquement :

La puissance maximale consommée est :

$$P_0 = (R + r)I_0^2$$

or :

$$I_0 = \frac{U}{R + r} = \frac{12}{24} = 0,5\text{A}$$

donc :

$$P_0 = 24 \times (0,5)^2 = 6\text{W}$$

$$\boxed{f_0 = 167,84\text{Hz}}$$

$$\boxed{P_0 = 6\text{W}}$$

Autrement :

2° a) Le facteur de puissance du circuit est donné par la relation :

$$\cos \varphi = \frac{R + r}{Z}$$

Par ailleurs :

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Avec

donc :

$$\omega = 2\pi f = 1256\text{Hz}$$

Par la suite :

$$Z = \sqrt{(24)^2 + (565,2 - 398,08)^2} = 168,83\Omega$$

d'où :

$$\cos \varphi = \frac{24}{168,83} = 0,1421$$

$$\varphi = \pm 1,43\text{rad}$$

$$\boxed{\cos \varphi = 0,1421}$$

$$\boxed{\varphi = \pm 1,43\text{rad}}$$

b) La puissance apparente est par définition :

$$S = UI$$

Comme :

$$I = \frac{U}{Z}$$

il vient :

$$S = \frac{U^2}{Z} = \frac{(12)^2}{168,83} = 0,85 \text{ V} \cdot \text{A}$$

La puissance moyenne consommée est :

$$P = (R + r) \cdot I^2$$

avec :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{12}{168,83} = 0,07 \text{ A}$$

donc :

$$P = 24 \times (0,07)^2 = 0,12 \text{ W}$$

$$\begin{array}{l} S = 0,85 \text{ V} \cdot \text{A} \\ P = 0,12 \text{ W} \end{array}$$

Autrement :

$$P = UI \cos \varphi = 12 \times 0,07 \times 0,1421 = 0,12 \text{ W}$$

c) La puissance moyenne consommée par le conducteur ohmique est :

$$p(R) = RI^2 = 18 \times (0,07)^2 = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

La puissance moyenne consommée par la bobine :

$$p(B) = RI^2 = 6 \times (0,07)^2 = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

Aux bornes du condensateur la tension est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur l'intensité :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = 0$$

D'où :

$$p(C) = 0$$

$$\begin{array}{l} p(R) = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ W} \\ p(B) = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ W} \\ p(C) = 0 \end{array}$$

Physique atomique et nucléaire

1_Effet photoélectrique

On dispose d'une cellule photoélectrique au potassium. L'énergie d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25 \text{ eV}$. On éclaire la cellule par une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,49 \mu\text{m}$.

- 1° Calculer la vitesse maximale avec laquelle les électrons quittent la cathode.
- 2° Calculer le potentiel d'arrêt.
- 3° La puissance rayonnante reçue par la cathode est $P = 9 \cdot 10^{-7} \text{ W}$.

On constate que l'intensité du courant de saturation dans le circuit de la cellule est $i_s = 4 \cdot 10^{-8} \text{ A}$. En déduire le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus pendant le même temps.

Données :

masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

charge de l'électron : $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solution

1° L'énergie d'un photon incident est :

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

soit :

$$W = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0,49 \cdot 10^{-6}} = 4,05 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Sachant qu'un électronvolt (ev) équivaut à $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, l'énergie d'extraction, en joules est :

$$W_0 = 2,25 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La différence entre l'énergie d'un photon et l'énergie d'extraction est l'énergie cinétique maximale $E_{c \text{ max}}$ d'un électron :

$$E_{c \text{ max}} = W - W_0$$

soit :

$$E_{c \text{ max}} = 4,05 \cdot 10^{-19} - 3,6 \cdot 10^{-19} = 0,45 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

d'autre part :

$$E_{c \text{ max}} = \frac{1}{2} m \cdot V_{\text{max}}^2$$

d'où :

$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_{c \text{ max}}}{m}}$$

soit :

$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,45 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 3,14 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{\text{max}} = 3,14 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° La tension négative U_0 qui annule le courant photo-électrique est le potentiel d'arrêt.

Nous avons : $|U_0| \approx \frac{E_{c \max}}{e}$

soit : $|U_0| \approx \frac{0,46 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,28 \text{ eV}$

$$|U_0| \approx 0,28 \text{ eV}$$

3° Le nombre d'électrons émis par seconde est :

$$n \approx \frac{i_s}{e} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,5 \cdot 10^{11}$$

soit N, le nombre de photons reçus par seconde. L'énergie de ces N photons est donnée par la relation :

$$P \approx N \cdot h \cdot \nu \approx \frac{N \cdot h \cdot c}{\lambda}$$

On en déduit :

$$N \approx \frac{P\lambda}{hc}$$

soit :

$$N \approx \frac{9 \cdot 10^{-7} \times 0,49 \cdot 10^{-6}}{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 2,22 \cdot 10^{12}$$

Le rendement quantique est :

$$\rho = \frac{n}{N} = \frac{2,5 \cdot 10^{11}}{2,22 \cdot 10^{12}} = 0,11 = 11 \%$$

$$\rho = 11 \%$$

2_ Niveaux d'énergie dans l'atome d'hydrogène.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation : $E = -\frac{13,6}{n^2}$

où E est en eV et n, est un nombre entier naturel non nul.

1. Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?
2. Etablir l'expression littérale de la fréquence des radiations émises lorsque cet atome passe d'un état excité tel que $n > 2$ à l'état $n \approx 2$ (radiation de la série de Balmer)
3. L'analyse du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène révèle la présence de radiations de longueur d'onde 656 nm (H_α) ; 486 nm (H_β) ; 434 nm (H_γ). Déterminer à quelle transitions correspondent ces radiations de la série de Balmer.

Données :

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

LMDB devoir SE

Solution

1° L'énergie d'ionisation est l'énergie E_i qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène pour le faire passer de son état fondamental ($E_1 = -13,6 \text{ eV}$) à son état ionisé ($E_\infty = 0$) :

$$E_i = E_\infty - E_1 = 13,6 \text{ eV}$$

$$E_i = 13,6 \text{ eV}$$

2° L'énergie d'un photon de fréquence $\nu_{n,2}$ émis lors d'une transition entre deux niveaux d'énergie E_n et E_2 est :

$$h\nu_{n,2} = E_n - E_2$$

soit :

$$h\nu_{n,2} = -\frac{13,6}{n^2} + \frac{13,6}{4}$$

il vient :

$$\nu_{n,2} = \frac{13,6}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

soit, en unités SI (avec $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) :

$$\nu_{n,2} = \frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

finalement :

$$\nu_{n,2} = 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

3° Nous avons :

$$\nu_{n,2} = \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{4} - \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2}$$

ou :

$$\nu_{n,2} = 0,822 \cdot 10^{15} - \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2}$$

par la suite :

$$\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2} = 0,822 \cdot 10^{15} - \nu_{n,2}$$

on en déduit :

$$n = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - \nu_{n,2}}}$$

La fréquence $\nu_{(\alpha)}$ correspondant à la radiation H_α est :

$$\nu_{(\alpha)} = \frac{c}{\lambda_{(\alpha)}}$$

avec

$$\lambda_{(\alpha)} = 656 \text{ nm} = 656 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

donc :

$$\nu_{(\alpha)} = \frac{3 \cdot 10^8}{656 \cdot 10^{-9}} = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

par conséquent :

$$n_{(\alpha)} = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 4,57 \cdot 10^{14}}} = 3$$

H_α correspond donc à la première transition de fréquence $\nu_{3,2}$

De même :

$$\begin{aligned} \nu_{(\beta)} &= \frac{c}{\lambda_{(\beta)}} = \frac{3 \cdot 10^8}{486 \cdot 10^{-9}} \\ &= 6,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned}$$

et :

$$n_{(\beta)} = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 6,17 \cdot 10^{14}}} = 4$$

H_β correspond donc à la deuxième transition de la série de Balmer de fréquence $\nu_{4,2}$

finalement :

$$v_{(r)} = \frac{c}{\lambda_{(r)}} = \frac{3 \cdot 10^8}{434 \cdot 10^{-9}} = 6,91 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$n_{(r)} = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 6,91 \cdot 10^{14}}} = 5$$

H_{γ} correspond donc à la troisième transition de la série de Balmer de fréquence $v_{5,2}$.

3_ Nombre de noyaux radioactifs – Activité d'une substance radioactive

Une substance radioactive dont la demi-vie est de 10 s émet initialement $2 \cdot 10^7$ particule α par seconde.

1° Initialement combien y a-t-il en moyenne de noyaux radioactifs ?

2° Combien restera-t-il en moyenne de noyaux radioactifs après 30 secondes ? Quelle sera alors l'activité de la substance ?

LMDB devoir SE

Solution

1° L'activité à l'instant initial est $A_0 \approx 2 \cdot 10^7$ Bq (1 Bq = 1 désintégration par seconde). Si λ est la constante radioactive, le nombre moyen N_0 de noyaux radioactifs

à l'instant initial est :

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda}$$

D'autre part, la période radioactive ou demi-vie est :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

soit :

$$\lambda = \frac{0,693}{10} = 6,93 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

il vient :

$$N_0 = \frac{2 \cdot 10^7}{6,93 \cdot 10^{-2}} = 2,88 \cdot 10^8$$

$$N_0 = 2,88 \cdot 10^8 \text{ noyaux}$$

2° Le nombre de noyaux radioactifs décroît de façon exponentielle suivant la loi :

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Le nombre de noyaux présents à la date $t = 30$ s est donc :

$$N = 2,88 \cdot 10^8 \exp(-6,93 \cdot 10^{-2} \times 30) = 3,6 \cdot 10^7$$

$$N = 3,6 \cdot 10^7 \text{ noyaux}$$

L'activité varie suivant la loi :

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

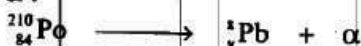
L'activité à la date $t = 30$ s est donc :

$$A = 2 \cdot 10^7 \exp(-6,93 \cdot 10^{-2} \times 30) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Bq}$$

$$A = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Bq}$$

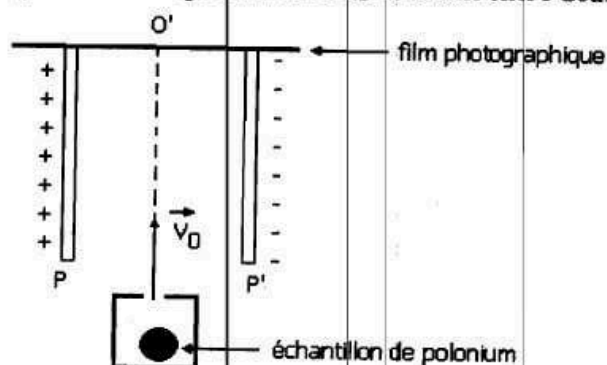
4_ Energie libérée lors de la désintégration du polonium 210 Longueur d'onde du photon γ associé.

Le polonium 210 est radioactif α :



1° Indiquer, en les justifiant, les valeurs de x et y.

2° Pour déterminer l'énergie cinétique des particules α émises, on dévie un faisceau de ces particules par le champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ existant entre deux plaques P et P'



La vitesse d'entrée $\vec{v}_0$ des particules est orthogonale au champ. La ddp $V_P - V_{P'}$ est positive. La norme du champ est $E = 5 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. un film photographique est placé à la sortie des plaques, à 10 cm du point O.

a) Reproduire la figure en indiquant le sens des $\vec{E}$ et l'allure de la trajectoire des particules α

b) Un impact est observé sur le film à 4,7mm du point O'. En déduire l'énergie cinétique (en Mev) des particules α correspondantes lors de leur émission par l'échantillon radioactif.

3° Calculer (en Mev) l'énergie libérée par la désintégration α étudiée.

4° Interpréter la différence entre les résultats numériques des questions 2 et 3 sachant qu'on observe simultanément l'émission d'un rayonnement γ . Calculer la longueur d'onde du rayonnement γ .

Données ;

$m_{\text{Po}} = 209,9368 \text{ u}$; $m_{\text{Pb}} = 205,9295 \text{ u}$; $m_{\alpha} = 4,0015 \text{ u}$

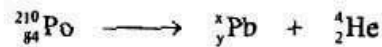
célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

LMDB devoir SE

Solution

1° La particule α est un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$. L'équation de désintégration s'écrit donc :



La conservation du nombre de nucléons impose :

$$210 = x + 4$$

d'où :

$$x = 210 - 4 = 206$$

La conservation de la charge permet d'écrire :

$$84 = y + 2$$

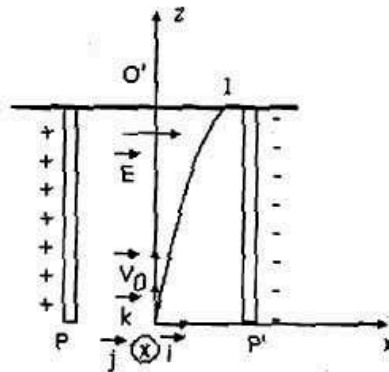
d'où :

$$y = 84 - 2 = 82$$

$$x = 206$$

$$y = 82$$

2° a) Pour étudier la trajectoire d'une particule α , choisissons un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié aux plaques, supposé galiléen, tel que $\vec{V}_0 = V_0 \vec{k}$; d'autre part le trièdre $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct :



b) Les forces qui s'exercent sur chaque particule α sont : le poids et la force d'origine électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. Le poids est négligeable devant la force électrique. D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

d'où :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

par intégrations successives, on obtient le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \frac{q\vec{E}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t \quad (1)$$

Les matrices de coordonnées des différents vecteurs sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \vec{E} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{v}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

L'équation (1) donne par projection sur les axes de coordonnées :

$$x = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (2)$$

$$y = 0 \quad (3)$$

$$z = v_0 t \quad (4)$$

En éliminant le temps t entre les équations (2) et (4), on obtient l'équation de la trajectoire des particules α ;

$$t = \frac{z}{v_0} \quad (5)$$

D'après (4) :

$$x = \frac{qEz^2}{2mv_0^2}$$

Compte tenu de (5) l'équation (2) donne :

$$D'autre part, l'énergie cinétique d'une particule α lors de son émission est :$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$$

soit :

$$2E_c = mv_0^2$$

il vient :

$$x = \frac{qEz^2}{4E_c}$$

On en déduit :

$$E_c = \frac{qEz^2}{4x}$$

Application numérique : $q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$x = 0,1 = 4,7 \text{ mm} = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$z = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^6 \times 10^{-2}}{4 \times 4,7 \cdot 10^{-3}} = 8,51 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

en électronvolts,

$$E_c = \frac{8,51 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,32 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

1 mégaelectronvolt (MeV) = 10^6 eV ; donc $E_c = 5,32 \text{ MeV}$

$$\boxed{E_c = 5,32 \text{ MeV}}$$

3° L'énergie libérée lors de la désintégration du polonium 210 est

$$E = |\Delta m|c^2$$

$$\Delta m = m_{\text{Pb}} + m_{\alpha} - m_{\text{Po}} = 205,9295 \text{ u} + 4,00150 \text{ u} - 209,9368 \text{ u} = -0,0058 \text{ u}$$

$$\boxed{|\Delta m| = 0,0058 \text{ u}}$$

d'autre part : $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$;

$$\Delta m = 0,0058 \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 9,63 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

donc :

$$E = 9,63 \cdot 10^{-30} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 8,67 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

il vient :

soit, en électronvolts :

$$E = \frac{8,67 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,42 \cdot 10^6 \text{ eV} = 5,42 \text{ MeV}$$

$$\boxed{E = 5,42 \text{ MeV}}$$

4° L'énergie libérée est supérieure à l'énergie cinétique. La différence s'explique par le fait que le noyau de plomb Pb crée se trouve dans un état excité Pb^* ce noyau émet un photon γ en retombant dans l'état fondamental. L'énergie du photon γ est, en joules :

$$\Delta E = E - E_c$$

$$\Delta E = 8,67 \cdot 10^{-13} - 8,51 \cdot 10^{-13} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

soit :

d'autre part :

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

soit :

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-14}} = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

La longueur d'onde du photon γ est :

$$\lambda = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

CHAPITRE VIII

Chimie organique

5_ Configurations du pent-3-ène-2-ol

On s'intéresse aux différentes configurations que peut prendre le pent-3-ène-2-ol de formule $\text{CH}_3 - \text{CH} = \text{CH} - \text{CHOH} - \text{CH}_3$.

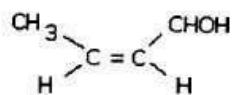
- 1) Sous combien de configurations différentes cette molécule peut-elle exister ? Représenter et nommer les configurations autour de la double liaison.
- 2) On traite la molécule par du dihydrogène en présence d'un catalyseur le nickel. On obtient un composé X. Sous combien de configurations la molécule X peut-elle exister ? Représenter ces configurations.
- 3) On traite X par une solution de dichromate de potassium acidifiée par l'acide sulfurique. On obtient le composé Y. Quelle réaction le corps X subit-il ? Sous combien de configurations différentes la molécule Y peut-elle exister ?

LMDB devoir SE

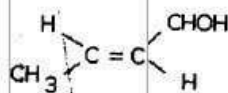
Solution

1° La molécule du pent-3-ène-2-ol possède une double liaison éthylénique et un carbone asymétrique. Avec la double liaison nous avons l'isomérie Z/E. A chaque isomère (Z ou E) correspond un couple d'énantiomères. Donc la molécule du pent-3-ène-2-ol peut exister sous quatre configurations.

Les configurations autour de la double liaison sont :

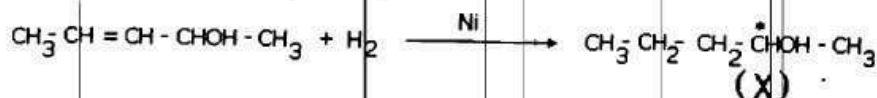


pent-3-ène-2-ol (Z)

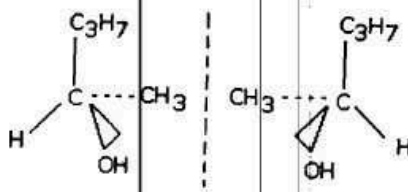


pent-3-ène-2-ol (E)

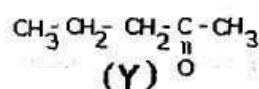
2° Traité par du dihydrogène, on obtient un composé saturé, le pentan-2-ol qui possède un atome de carbone asymétrique :



Le pentan-2-ol peut exister sous la forme de deux énantiomères



3° Le pentan-2-ol subit une oxydation. Le composé obtenu est une cétone : le pentan-2-one



Y est une molécule achirale à une seule configuration.

6_ Stéréo-isoméries d'un alcène.

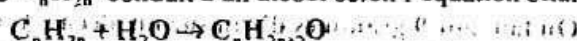
Un alcène de formule C_nH_{2n} présentant deux stéréoisomères A et A', conduit, par hydratation, à un seul composé oxygéné B renfermant en masse 21,6% d'oxygène.

- 1° Déterminer la formule brute de B.
- 2° Ecrire toutes les formules semi-développées possibles par B et nommer chacune d'elles.
- 3° Quelle formule semi-développée convient à B sachant que sa molécule est chirale ?
- 4° Représenter et nommer les stéréoisomères A et A'.

LMDB devoir SB

Solution

1° L'hydratation d'un alcène C_nH_{2n} conduit à un alcool selon l'équation bilan :



Soit M la masse molaire de l'alcool $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}$. Dans une mole d'un tel alcool il y a 16 grammes d'oxygène, d'où :

$$\frac{16}{\%O} = \frac{M}{100}$$

par conséquent :

$$M = \frac{16 \times 100}{\%O}$$

soit :

$$M = \frac{1600}{21,6} = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

d'autre part :

$$M = 12n + 2n + 2 + 16$$

soit :

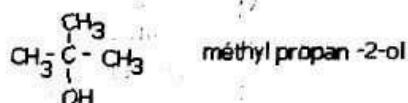
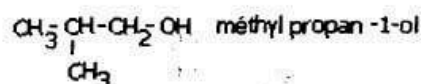
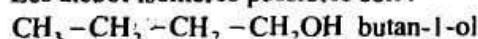
$$74 = 14n + 18$$

d'où :

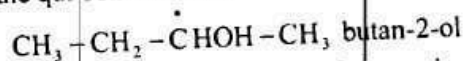
$$n = \frac{74 - 18}{14} = 4$$

B a pour formule brute $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

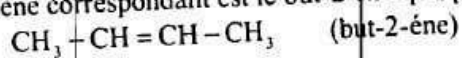
2° Les alcool isomères possibles soit :



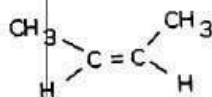
3° La molécule de B est chirale ; donc elle possède un carbone asymétrique. La formule qui convient est :



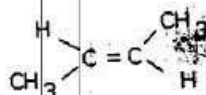
L'alcène correspondant est le but-2-ène qui, par hydratation donne un seul alcool :



Les deux stéréo-isomères A et A' sont :



but-2-ène (Z)



but-2-ène (E)

7_ Isomères d'un alcène

On fait agir 9 grammes d'eau sur un alcène A. On obtient 37g d'un composé B.

1° Quelle est la fonction chimique de B ? Trouver la formule moléculaire de B ainsi que celle de A.

2° Quelles sont les formules semi-développées possibles pour A ? Donner le nom de chacune d'elles.

3° L'alcène A ne peut conduire qu'à un seul composé d'hydratation. Quelle est donc sa formule semi-développée ? en déduire celle de B.

$$M(\text{H}) = 1\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{O}) = 16\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

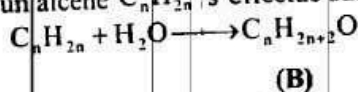
$$M(\text{C}) = 12\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

LMDB compos SE

Solution

1° B est un alcool

D'autre part, l'hydratation d'un alcène C_nH_{2n} s'effectue suivant l'équation-bilan :



stœchiométrie :

soit :

d'où :

soit :

$$\frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{m_{\text{B}}}{M_{\text{B}}}$$

$$M_{\text{B}} \cdot m_{\text{H}_2\text{O}} = M_{\text{H}_2\text{O}} \cdot m_{\text{B}}$$

$$M_{\text{B}} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}} \cdot m_{\text{B}}}{m_{\text{H}_2\text{O}}}$$

$$M_{\text{B}} = \frac{18 \times 37}{9} = 74$$

d'autre part : $M_B = 12n + 2n + 2 + 16$

soit : $74 = 14n + 18$

par la suite : $n = 4$

d'où, la formule molécule de B : $C_4H_{10}O$; celle de A est C_4H_8

2° Les formules semi-développées possibles pour A.

$CH_3 - CH_2 - CH = CH_2$ but-1-ène

$CH_3 - CH = CH - CH_3$ but-2-ène

$CH_3 - \underset{\substack{| \\ CH_3}}{C} = CH_2$ méthyl propène

3° L'action de l'eau $H-OH$ sur un alcène conduit généralement à deux alcools selon la position occupée par le groupe hydroxyle OH autour de la double liaison. Ainsi, l'hydratation du but-1-ène conduit à deux alcools qui sont :

$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2OH$ et $CH_3 - CH_2 - CHOH - CH_3$

L'hydratation du but-2-ène conduit à un seul alcool :

$CH_3 - CH_2 - CHOH - CH_3$

L'hydratation du méthyl propène conduit à deux alcools :

$CH_3 - \underset{\substack{| \\ CH_3}}{CH} - CH_2 - OH$ et $CH_3 - \underset{\substack{| \\ OH}}{\overset{\substack{CH_3 \\ |}}{C}} - CH_3$

A est donc le but-2-ène ($CH_3 - CH = CH - CH_3$) et B est le butan-2-ol ($CH_3 - CH_2 - CHOH - CH_3$)

8_ Action du sodium sur un alcool primaire aromatique

On fait réagir 5,4 g d'un alcool primaire aromatique A avec un excès de sodium. Il se dégage 0,56L de dihydrogène mesuré dans les conditions normales de température et de pression.

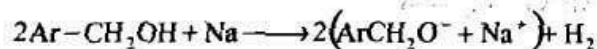
1° Déterminer la masse molaire puis la formule semi-développée de l'alcool A ; préciser son nom.

2° On fait réagir A sur du permanganate de potassium en milieu acide. On obtient un produit B qui rosit le réactif de Schiff, puis un solide blanc cristallisé C. Ecrire les formules semi-développées de B et C.

LMDB dev. SE

Solution

1° Un alcool primaire est aromatique s'il contient un groupe aromatique noté Ar. Sa formule générale est donc $Ar - CH_2OH$. L'équation bilan de sa réaction avec le sodium s'écrit :



Le volume molaire des gaz dans les conditions normales étant $V_m = 22,4L$ nous avons, par stœchiométrie :

soit :

Il vient :

On en déduit :

D'autre part :

soit :

d'où :

Ar est donc le noyau benzénique ou radical phényl C_6H_5-

Par conséquent la formule de A est

$$\frac{m_{\text{alcool}}}{2M_{\text{alcool}}} = \frac{V_{H_2}}{V_m}$$
$$\frac{5,4}{2M_{\text{alcool}}} = \frac{0,56}{22,4}$$

$$5,4 \times 22,4 = 2 \times 0,56 M_{\text{alcool}}$$

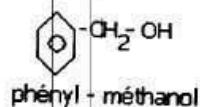
$$M_{\text{alcool}} = \frac{5,4 \times 22,4}{2 \times 0,56} = 108 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{alcool}} = 108 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{alcool}} = M_{(\text{Ar})} + M_{(\text{C})} + 3M_{(\text{H})} + M_{(\text{O})}$$

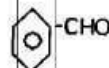
$$108 = M_{(\text{Ar})} + 12 + 3 + 16$$

$$M_{(\text{Ar})} = 77 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

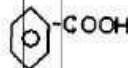


2° Par action d'un oxydant comme le permanganate de potassium en milieu acide nous obtenons d'abord un aldéhyde puis un acide carboxylique.

(B) est le phényl - méthanal :



(C) est l'acide benzoïque :



9_ Détermination de la formule d'une amine

Pour déterminer la formule d'une amine saturée, on soumet à l'analyse 15g de cette amine ; on obtient 2,9 grammes d'azote.

- 1) Sachant que la formule d'une amine saturée est $C_nH_{2n+3}N$, déterminer la masse molaire de l'amine et en déduire sa formule brute.
- 2) Donner les différentes formules semi-développées possibles en se limitant aux amines primaires et tertiaires.
- 3) L'amine en question ne réagit pas avec un chlorure d'acyle. Quel est le nom de cette amine ?
- 4) Par action de l'iodométhane sur l'amine on obtient un précipité. Ecrire l'équation bilan de la réaction et indiquer la propriété des amines mise en jeu dans cette réaction.

Données : $M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
 $M(N) = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

LMDB devoir SB

Solution

1° Dans une mole d'amine saturée de masse M il y a 14g d'azote, d'où :

$$\frac{14}{\%N} = \frac{M}{100}$$

ou encore :

$$\frac{14}{m(N)} = \frac{M}{m(C_n H_{2n+3} N)}$$

soit :

$$\frac{14}{2,9} = \frac{M}{15}$$

d'où :

$$M = \frac{15 \times 14}{2,9} = 72,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M = 72,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

d'autre part :

$$M = 12n + 2n + 3 + 14$$

soit :

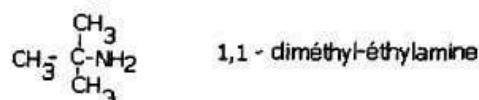
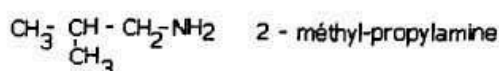
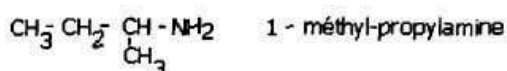
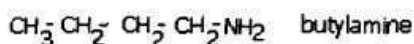
$$72,41 = 14n + 17$$

d'où :

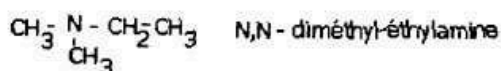
$$n = \frac{72,41 - 17}{14} = 4$$

L'amine a pour formule brute $C_4H_{11}N$.

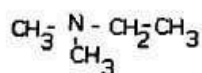
2° Les amines primaires isomères possibles :



Comme amine tertiaire nous avons :



3° L'amine en question est une amine tertiaire qui ne réagit pas avec un chlorure d'acyle ; soit : la N,N-diméthyl-éthylamine



4° La liaison carbone-iode dans la molécule de l'iodométhane est polarisée du fait de la différence d'électronégativité entre les atomes de carbone et d'iode. Le doublet électronique de l'atome d'azote va alors attaquer l'atome de carbone légèrement positif :



Cette réaction met en évidence le caractère nucléophile des amines.

10_ Passage d'un acide carboxylique à un anhydride d'acide.

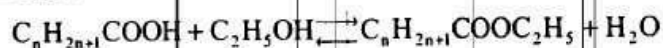
On désigne par A, un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée. En estérifiant cet acide par de l'éthanol on obtient un composé organique B de masse molaire $M = 102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 1° Ecrire l'équation-bilan de la réaction de l'éthanol avec un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée.
- 2° Déterminer les formules semi-développées de A et B et nommer ces composés.
- 3° Par chauffage de A en présence d'un déshydratant, on obtient un composé C. Ecrire la formule semi-développée de C et donner son nom.

LMDB devoir SB

Solution

1° La formule d'un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée est $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{COOH}$. L'équation-bilan de la réaction de l'éthanol avec un tel acide s'écrit :



(B)

2° Nous avons :

$$M(\text{B}) = 102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Soit :

$$12n + 2n + 6 + 3 \times 12 = 102$$

par la suite :

$$14n + 74 = 102$$

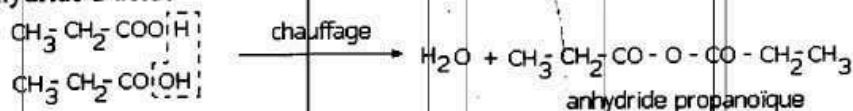
d'où :

$$n = \frac{28}{14} = 2$$

(A) a pour formule : $\text{C}_3\text{H}_7\text{COOH}$; sa formule semi-développée est $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COOH}$; c'est l'acide propanoïque

(B) est le propanoate d'éthyle $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COOC}_2\text{H}_5$

3° Par chauffage d'un acide carboxylique en présence d'un déshydratant on obtient un anhydride d'acide



11_ Passage d'un alcool à une amide.

Un alcool saturé A, contient en masse 64,86% de carbone et 13,50% d'hydrogène.

- 1° Déterminer sa formule brute et trouver les formules semi-développées possibles.
- 2° Par action du dichromate de potassium en milieu acide, A donne un composé B capable de réagir avec la liqueur de Fehling puis un autre composé organique C possédant une chaîne ramifiée. Identifier A, B et C.
- 3° On fait agir le chlorure de thionyle sur C. On obtient entre autre un composé organique D. Ecrire l'équation-bilan de la réaction et nommer le composé D.

4° On fait réagir D avec l'ammoniac. Déterminer la formule semi-développée et le nom du composé obtenu.

Données :

$$M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

LMDB devoir SB

Solution

1° La formule générale d'un alcool saturé est $C_nH_{2n+2}O$. Il y a donc $12n$ grammes de carbone et $2n+2$ grammes d'hydrogène dans une mole d'un tel alcool, d'où :

$$\frac{12n}{\%C} = \frac{2n+2}{\%H}$$

soit :

$$\frac{12n}{64,86} = \frac{2n+2}{13,51}$$

par la suite :

$$12 \times 13,51n = 64,86 \cdot (2n+2)$$

et :

$$162n = 129,72n + 129,72$$

encore :

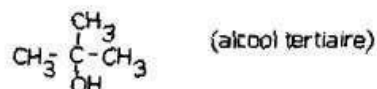
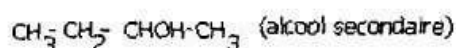
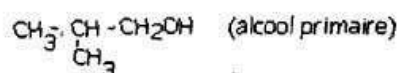
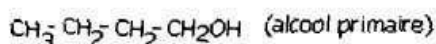
$$n(162 - 129,72) = 129,72$$

d'où :

$$n = \frac{129,72}{32,28} = 4$$

La formule brute de l'alcool est $C_4H_{10}O$

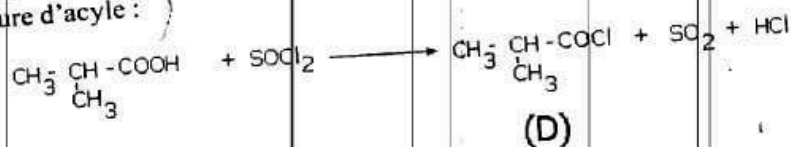
Les formules semi-développées possibles :



2° (A) est un alcool primaire qui, par action des oxydants comme le dichromate de potassium en milieu acide donne un aldéhyde (B) capable de réagir avec la liqueur de Fehling, puis un acide carboxylique (C). Par ailleurs, la chaîne carbonée de l'acide carboxylique étant ramifiée, celle de l'alcool l'est aussi. A est donc l'alcool primaire à chaîne ramifiée :

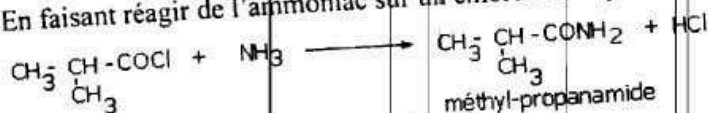


3° L'action du chlorure de thionyle sur un acide carboxylique conduit à un chlorure d'acyle :



D est le chlorure de méthyle propanoyle

4° En faisant réagir de l'ammoniac sur un chlorure d'acyle, on obtient une amide



12_ Synthèse d'un peptide

La leucine et l'isoleucine sont deux acides α -aminés de formule : $\text{R} - \text{CH}(\text{NH}_2) - \text{COOH}$ dont les groupes alkyles R diffèrent. Le groupe alkyle de la leucine est noté R_L , celui de l'isoleucine R_I . La masse molaire des deux acides α -amines est $M = 131 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1° Déterminer la formule brute du groupe alkyle.

2° Les groupes R_L et R_I possédant chacun une seule ramification, la leucine possède un atome de carbone asymétrique et l'isoleucine en comporte deux.

a) Ecrire la formule semi-développée de chacun des deux acides α -aminés.

b) Donner les représentations de Fischer des configurations de la L-leucine et de la D-leucine (pour ne pas alourdir l'écriture on symbolisera, dans cette question et les suivantes les groupes alkyles par R_L et R_I).

3° a. Montrer que la réaction de condensation de la leucine sur l'isoleucine conduit formellement à deux peptides P_1 et P_2 .

b. En fait, la réalisation expérimentale conduit à quatre peptides. Pourquoi ?

4° On désire synthétiser un des peptides P_1 . Indiquer succinctement quels sont les moyens expérimentaux qui permettent de n'obtenir que P_1 .

On donne : $M(\text{H}) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ $M(\text{N}) = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$M(\text{C}) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

LMDB compos SE

Solution

1° Le groupe alkyle est $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}$. La leucine et l'isoleucine ont pour formule : $\text{C}_n\text{H}_{2n+1} - \text{CH}(\text{NH}_2) - \text{COOH}$

Par conséquent :
soit :

$$M = 12n + 2 \times 12 + 2n + 5 + 14 + 2 \times 16$$

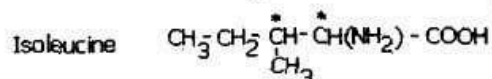
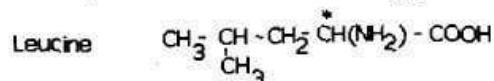
$$131 = 14n + 75$$

d'où :

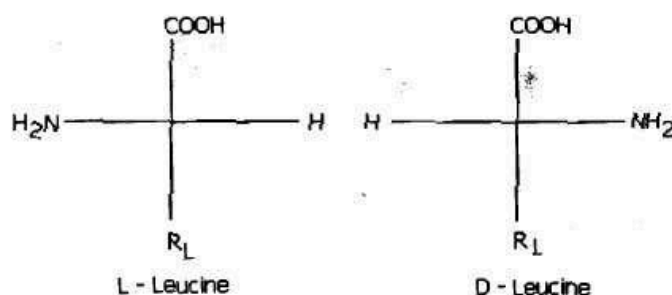
$$n = \frac{131 - 75}{14} = 4$$

et R est le groupe : $C_4H_9 -$

2° a) Les formules semi-développées :

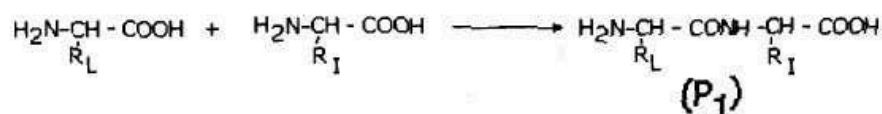


b) Le couple d'énantiomères de la leucine :

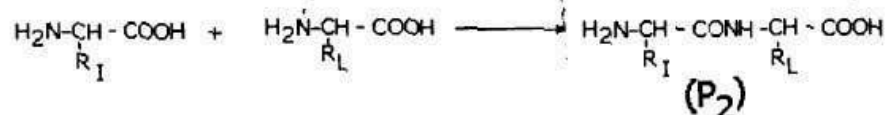


3° a) La réaction de condensation, avec élimination d'eau, se produisant entre le groupe carboxyle $COOH$ de l'un des aminoacides et le groupe amine de l'autre acide α -aminé offre deux possibilités :

Premier cas : Leucine-isoleucine



Deuxième cas : Isoleucine-leucine



b) Le mélange réactionnel contient les peptides suivants :

Leucine - isoleucine

Leucine - leucine

Isoleucine - leucine

Isoleucine - isoleucine

L'expérience conduit donc à quatre peptides.

4° Si l'on désire synthétiser P_1 seulement, il faut empêcher la formation de P_2 .

Pour cela il faut :

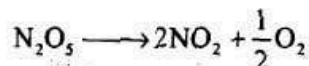
- bloquer le groupe $-COOH$ de l'isoleucine en l'estérifiant par un alcool
- bloquer le groupe $-NH_2$ de la leucine par l'action d'un chlorure d'acyle.

- Activer le groupe -COOH de la leucine en le transformant en chlorure d'acyle par action de SOCl_2 ou de PCl_5 .
Enfin on libère les fonctions amine et acide, précédemment bloquées.

Cinétique chimique

1_ Décomposition de l'hémi-pentoxyde d'azote.

L'hémi-pentoxyde d'azote N_2O_5 se dissocie suivant l'équation :



La réaction est d'ordre 1.

1° A $105^\circ C$ on constate qu'au bout de 4mn, $\frac{3}{4}$ de la quantité initiale de N_2O_5 a été décomposée.

a. Calculer le temps de demi-réaction à cette température.

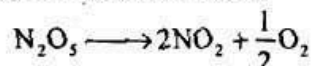
b. Quel serait le temps de demi-réaction si la molarité initiale avait été doublée ?

2° A $95^\circ C$ le temps de demi-réaction est 5mn. Calculer le temps au bout duquel $\frac{3}{4}$ de la quantité initiale sera décomposée.

LMDB devoir SB

Solution

1° a) L'équation-bilan de la réaction s'écrit :



La vitesse de disparition de N_2O_5 est définie par :

$$v = -\frac{d[N_2O_5]}{dt} \quad (1)$$

D'autre part, la réaction étant d'ordre 1, nous avons :

$$v = k[N_2O_5] \quad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2) on obtient :

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = k[N_2O_5]$$

ou encore :

$$\frac{d[N_2O_5]}{[N_2O_5]} = -k \cdot dt$$

cette dernière relation s'intègre en :

$$\ln \frac{[N_2O_5]_0}{[N_2O_5]} = kt$$

ou encore :

$$\ln \frac{C_0}{C} = kt$$

C_0 est la concentration initiale de N_2O_5

C est la concentration à une date t quelconque

lorsque $t = t_1$, $C = \frac{C_0}{2}$

il vient :

$$\ln \frac{C_0}{C_0/2} = kt_{\frac{1}{2}}$$

soit :

$$\ln 2 = kt_{\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

d'après (3) :

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{C_0}{C}$$

A la date $t=4mn$,

$$C = C_0 - \frac{3C_0}{4} = \frac{C_0}{4}$$

Par conséquent :

$$k = \frac{1}{4} \ln \frac{C_0}{\frac{C_0}{4}} = \frac{\ln 4}{4} = 0,35mn^{-1}$$

Il vient :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{0,35} = 1,98mn$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 1,98mn$$

b) Nous avons :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

Le temps de demi-réaction est indépendant de la concentration initiale ; donc $t_{\frac{1}{2}} = 1,98mn$.

2° La constante de vitesse dépend de la température. Sa nouvelle valeur est :

$$k' = \frac{\ln 2}{t'_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 2}{5} = 0,14mn^{-1}$$

compte tenu de la relation (3) :

$$\ln \frac{C_0}{C} = k' \cdot t'$$

d'où :

$$t' = \frac{1}{k'} \cdot \ln \frac{C_0}{C}$$

avec :

$$C = \frac{C_0}{4}$$

il vient :

$$t' = \frac{1}{0,14} \ln \frac{C_0}{\frac{C_0}{4}} = \frac{\ln 4}{0,14} = 9,9mn$$

$$t' = 9,9mn$$

2_ Saponification de l'éthanoate d'éthyle.

On étudie la cinétique de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle.
L'équation bilan de la réaction est :



Des expériences faites avec des concentrations molaires initiales $[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_0 = [\text{OH}^-]_0 = C_0$, ont données les temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$ indiqués dans

le tableau suivant :

$C_0 (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$
$t_{\frac{1}{2}} (\text{mn})$	17,8	8,9	4,45	2,22

1° Montrer que la réaction est d'ordre 2 et déterminer la constante de vitesse.

2° On part des conditions :

$$[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_0 = [\text{OH}^-]_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Calculer le temps qu'il faut pour que 80% de l'acétate soit transformé.

LMDB devoir SB

Solution

1° A chaque instant nous avons :

$$[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_t = [\text{OH}^-]_t = C$$

si la réaction est d'ordre 2, la vitesse v s'écrit :

$$v = kC^2 \quad (1)$$

k est la constante de vitesse

D'autre part la vitesse de disparition de l'acétate d'éthyle est définis par :

$$v = -\frac{dC}{dt} \quad (2)$$

Des relation (1) et (2) il vient :

$$-\frac{dC}{dt} = kC^2$$

soit :

$$-\frac{dC}{C^2} = kdt$$

Cette dernière relation s'intègre en :

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt$$

d'où :

$$t = \frac{C_0 - C}{kC_0C}$$

lorsque $t = t_{\frac{1}{2}}$, $C = \frac{C_0}{2}$

donc :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{C_0 - \frac{C_0}{2}}{kC_0 \cdot \frac{C_0}{2}} = \frac{1}{kC_0}$$

soit : $C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}$

Donc le produit $C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}$ est une constante. Le tableau ci-dessous indique les valeurs de ce produit :

$C_0 (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$
$t_{\frac{1}{2}} (\text{mn})$	17,8	8,9	4,45	2,22
$C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}} (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn})$	$17,8 \cdot 10^{-2}$	$17,8 \cdot 10^{-2}$	$17,8 \cdot 10^{-2}$	$17,76 \cdot 10^{-2}$

Nous avons $C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}} = 17,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}$. La réaction est donc d'ordre 2.

Par suite, comme :

$$\frac{1}{k} = C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}$$

Il vient :

$$k = \frac{1}{C_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}}$$

soit :

$$k = \frac{1}{17,8 \cdot 10^{-2}} = 5,6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$k = 5,6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$$

2° Nous avons :

$$t = \frac{C_0 - C}{k C_0 \cdot C}$$

La quantité d'acétate transformé est $x = \frac{80 C_0}{100} = \frac{80 \times 2 \cdot 10^{-2}}{100} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

La concentration de l'éthanoate restant est :

$$C = C_0 - x$$

$$C = 2 \cdot 10^{-2} - 1,6 \cdot 10^{-2} = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

soit :

$$t = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 0,4 \cdot 10^{-2}}{5,6 \times 2 \cdot 10^{-2} \times 0,4 \cdot 10^{-2}} = 35,65 \text{ mn}$$

donc :

$$t = 35,65 \text{ mn}$$

3_ Détermination de l'ordre d'une réaction par la méthode graphique.

On considère la réaction chimique suivante :



Les concentrations molaires initiales sont $[A]_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[B]_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On donne le tableau suivant :

Temps (h)	0	25	50	100	150
Concentration de D ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	0	0,20	0,33	0,50	0,60

- 1° Montrer que la réaction est d'ordre 2 et déterminer la constante de vitesse
- 2° Calculer la vitesse de disparition du constituant A au temps $t = 25\text{h}$.

LMDB compos SE

Solution

1° Les concentrations initiales étant identiques, à chaque instant nous avons :

$$[A] = [B]$$

Si la réaction est d'ordre 2, la vitesse est :

$$v = k[A]^2 \quad (1)$$

par ailleurs,

$$v = -\frac{d[A]}{dt} \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), il vient :

$$-\frac{d[A]}{dt} = k \cdot [A]^2$$

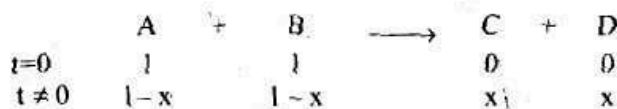
soit :

$$-\frac{d[A]}{[A]^2} = k \cdot dt$$

Cette dernière relation s'intègre facilement en :

$$\frac{1}{[A]} = k \cdot t + \frac{1}{[A]_0}$$

$\frac{1}{[A]} = f(t)$ serait donc une fonction affine et son graphe, une droite. D'autre part, les concentrations molaires exprimées en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à l'instant initial puis à une date t quelconque, des réactifs et des produits sont résumés dans le schéma suivant :



Ainsi, à chaque instant :

$$1-x = [A]$$

or :

$$x = [D]$$

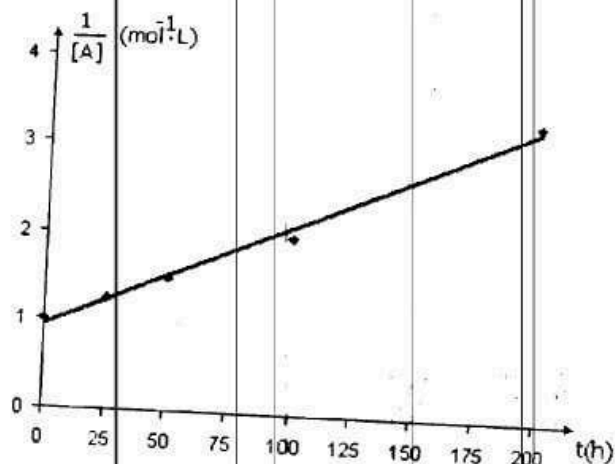
d'où :

$$1-[D] = [A]$$

Le tableau ci-dessous montre à chaque instant la valeur du rapport $\frac{1}{[A]}$

t(h)	0	25	50	100	200
$[D](\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	0,20	0,33	0,50	0,70
$[A] = 1 - [D] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	1	0,80	0,67	0,50	0,30
$1/[A] (\text{mol}^{-1} \cdot \text{L})$	1	1,25	1,49	2	3,33

Le graphe de la fonction $\frac{1}{[A]} = f(t)$ est la suivante :



Le graphe obtenu est une droite. La réaction est donc d'ordre 2
d'autre part :

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$$

soit :

$$kt = \frac{[A]_0 - [A]}{[A]_0 \cdot [A]}$$

on en déduit :

$$k = \frac{[A]_0 - [A]}{t \cdot [A]_0 \cdot [A]}$$

$$[A]_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

lorsque $t = 100 \text{ h}$, $[A] = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; donc : $k = \frac{1 - 0,50}{100 \times 0,50} = 0,01 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{h}^{-1}$

$$k = 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{h}^{-1}$$

(On retiendra que k est la pente de la droite).

2° La vitesse à la date $t = 25 \text{ h}$

$$v = k[A]^2 = 0,01 \times (0,8)^2 = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

4_ Cinétique d'une réaction d'estérification.

On veut étudier la cinétique d'une réaction d'estérification. Pour cela, on mélange $0,04 \text{ mol}$ d'acide méthanoïque et $0,04 \text{ mol}$ de pentan-1-ol à 0°C , l'ensemble occupant un volume de $5,9 \text{ cm}^3$. Par dosage des prélèvements, on détermine les quantités d'acide restant n_A , ce qui permet de dresser le tableau des valeurs suivant.

$t(\text{mn})$	0	10	15	20	30	40	50
$n_A(10^{-3} \text{ mol})$	40	21,30	18,30	16,8	15	14,5	14

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction et nommer l'ester formé.

2° Tracer la courbe $[\text{ester}] = f(t)$

Echelles : $1 \text{ cm} \longleftrightarrow 5 \text{ mn}$

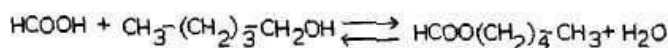
$1 \text{ cm} \longleftrightarrow 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

3° Calculer la vitesse de formation de l'ester aux instants $t_1=5\text{mn}$ et $t_2=20\text{mn}$. Interpréter l'évolution de la vitesse d'estérification.

LMDB devoir SE

Solution

1° L'équation bilan de la réaction s'écrit :



Méthanoate de pentyle

2° D'après l'équation-bilan, la quantité d'ester apparu est égale à la quantité d'acide disparu. Ce qu'on peut représenter par le tableau suivant :

	acide	alcool	ester	eau
$t=0$	0,04mol	0,04mol	0	0
$t \neq 0$	$0,04-x$	$0,04-x$	x	x

Donc, à une date t quelconque le nombre de moles d'acide

est : $n_A = 0,04 - x$

soit : $n_A = 0,04 - n_E$

d'où : $n_E = 0,04 - n_A$

ou encore : $n_E = 40 \cdot 10^{-3} - n_A$

Par conséquent, la concentration en ester est :

$$[\text{ester}] = \frac{n_E}{v}$$

avec :

$$v = 5,9\text{cm}^3 = 5,9 \cdot 10^{-3}\text{L}$$

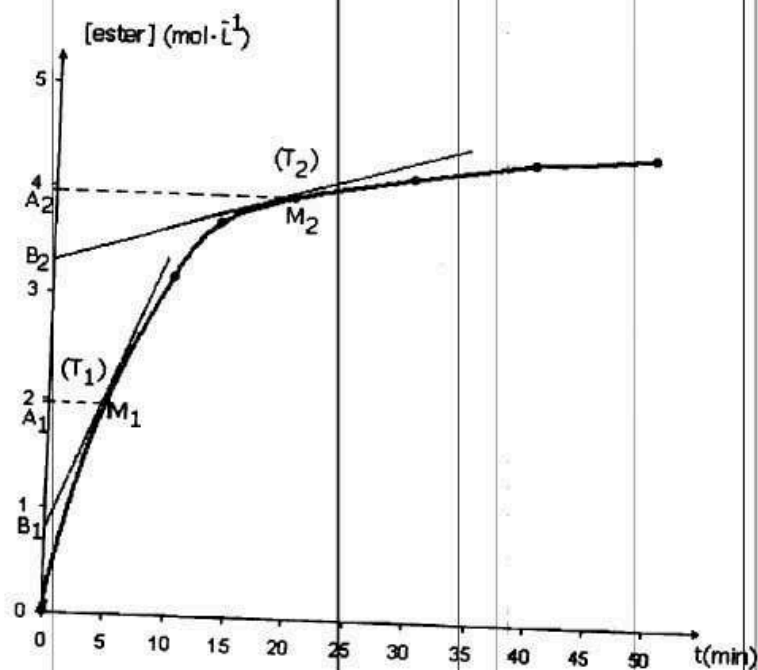
Ainsi, à la date $t=10\text{mn}$,

$$n_E = 40 \cdot 10^{-3} - 21,3 \cdot 10^{-3} = 18,7 \cdot 10^{-3}\text{mol}$$

$$[\text{ester}] = \frac{18,7 \cdot 10^{-3}}{5,9 \cdot 10^{-3}} = 3,2\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

D'où le tableau des résultats :

$t(\text{mn})$	0	10	15	20	30	40	50
$n_A(10^{-3}\text{mol})$	40	21,30	18,30	16,8	15,6	14,5	14
$n_E(10^{-3}\text{mol})$	0	18,7	21,7	23,2	24,4	25,5	26
$[\text{ester}](\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	3,16	3,68	3,93	4,14	4,32	4,4



3° La vitesse est mesurée par le coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe $[\text{ester}] = f(t)$ à la date t , compte tenu des échelles choisies.
La vitesse v_1 à la date t_1 est mesurée par la pente de la tangente T_1 au point $M_1(t_1)$:

$$v_1 = \frac{A_1 B_1}{A_1 M_1}$$

ou encore

$$v_1 = \frac{[\text{Ester}]_{A_1} - [\text{Ester}]_{B_1}}{5}$$

soit :

$$v_1 = \frac{1,95 - 0,75}{5} = 0,24 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

La vitesse v_2 à la date t_2 est mesurée par la pente de la tangente T_2 au point M_2 (20mn) :

$$v_2 = \frac{A_2 B_2}{A_2 M_2}$$

ou encore

$$v_2 = \frac{[\text{Ester}]_{A_2} - [\text{Ester}]_{B_2}}{5}$$

soit :

$$v_2 = \frac{3,9 - 3,3}{20} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = 0,24 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1} \\ v_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1} \end{array}}$$

La vitesse au cours de l'estérification diminue progressivement et tend vers zéro. Elle est nulle quand l'équilibre est atteint.

5_ Décomposition de l'éthanal.

L'éthanal se décompose, en phase gazeuse, suivant :



On introduit de l'éthanal à la date $t=0$, dans une enceinte de volume invariable, préalablement vidée, portée à la température $\theta=477^\circ\text{C}$, sous une pression initiale $P=2,83 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. La mesure de la pression dans l'enceinte permet d'évaluer la concentration molaire du méthane formé en fonction du temps. Les résultats sont les suivants :

$t(\text{mn})$	0	4	8,6	13,8	19,7	26,5	33,9
$10^4 [\text{CH}_4] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	2,2	4,5	6,9	9,1	11,4	13,6

1° Calculer la concentration molaire initiale en admettant que l'éthanal gazeux vérifie la loi des gaz par faits :

$$PV=nRT$$

$$\text{Avec } R=8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2° Tracer la courbe représentant la concentration molaire $[\text{CH}_4]$ en fonction du temps. Echelles :

$$1 \text{ cm} \longleftrightarrow 5 \text{ mn}$$

$$1 \text{ cm} \longleftrightarrow 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3° Déterminer :

a) La vitesse moyenne de formation du méthane entre les instant $t_1 \approx 4 \text{ mn}$ et $t_2 = 13,8 \text{ mn}$.

b) La vitesse instantanée de formation du méthane à la date $t=13,8 \text{ mn}$

4° Au bout de combien de temps $\frac{1}{5}$ de l'éthanal initial a-t-il été disparu ?

Solution

1° L'équation d'état des gaz parfait s'écrit :

$$PV = nRT$$

on en déduit :

$$P = \frac{n}{V} RT$$

La concentration initiale de l'éthanal est : $[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{n}{V}$

il vient :

$$P = [\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 RT$$

d'où :

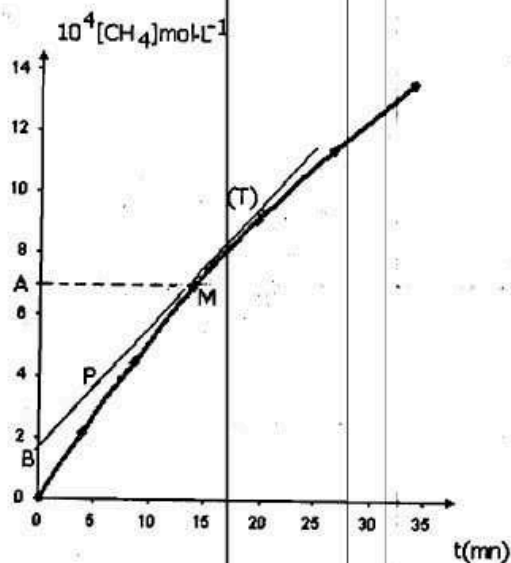
$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{P}{RT}$$

$$T = 273 + \theta = 273 + 477 = 750 \text{ K}$$

$$\text{soit : } [\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{2,83 \cdot 10^4}{8,314 \times 750} = 4,54 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 4,54 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = 4,54 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° Traçons la courbe $10^4 [\text{CH}_4] = f(t)$



3° a) La vitesse moyenne de formation du méthane est, par définition :

$$V_{\text{moy}} = \frac{[\text{CH}_4]_2 - [\text{CH}_4]_1}{t_2 - t_1}$$

soit :

$$V_{\text{moy}} = \frac{6,9 \cdot 10^{-4} - 2,2 \cdot 10^{-4}}{13,8 - 4} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$V_{\text{moy}} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

b) La vitesse instantanée est mesurée par le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M(13,8mn).

$$v = \frac{AB}{AM}$$

ou encore

$$v = \frac{[\text{CH}_4]_A - [\text{CH}_4]_B}{13,8}$$

Soit :

$$v = \frac{6,8 \cdot 10^{-4} - 1,8 \cdot 10^{-4}}{13,8} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

4° D'après l'équation-bilan, la quantité de méthane formée est égale à la quantité d'éthanal disparu ; donc la quantité de méthane à cette date est :

$$[\text{CH}_4] = \frac{[\text{CH}_3\text{CHO}]_0}{5}$$

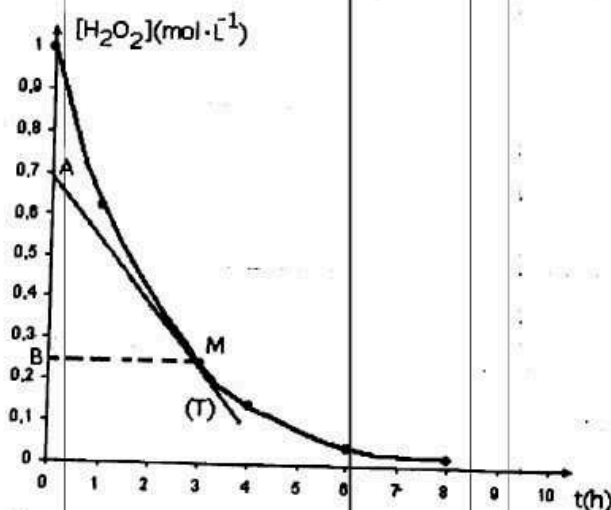
soit :

$$[\text{CH}_4] = \frac{4,54 \cdot 10^{-3}}{5} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En portant cette valeur sur la courbe, nous obtenons en abscisse pour le temps, $t = 19 \text{ mn}$

$$t = 19 \text{ mn}$$

3° a) La courbe $[H_2O_2]=f(t)$ est représentée ci-dessous



b) Pour déterminer la vitesse à la date $t = 3h$, on trace la tangente à la courbe au point $M(3h)$ puis on détermine son coefficient directeur (ou pente). La vitesse de disparition de H_2O_2 est l'opposé du coefficient directeur de la tangente (T)

$$v_{H_2O_2} = -\frac{AB}{BM}$$

ou encore

$$v_{H_2O_2} = -\frac{[H_2O_2]_A - [H_2O_2]_B}{\Delta t}$$

Soit :

$$v_{H_2O_2} = -\frac{0,7 - 0,25}{3} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$V_{H_2O_2} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

4° Nous avons :

avec

$$v = k[H_2O_2]$$

or :

$$k = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

il vient :

$$1 \text{ s}^{-1} = 3600 \text{ h}^{-1}$$

par conséquent :

$$k = 1,28 \cdot 10^{-4} \times 3600 = 0,46 \text{ h}^{-1}$$

soit :

$$v_{(3h)} = 0,46[H_2O_2]$$

on trouve pratiquement la même valeur.

$$v_{(3h)} = 0,46 \times 0,24 = 0,11 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

7_ Oxydation de l'ion iodure par l'ion peroxodisulfate.

L'ion peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$ oxyde l'ion iodure suivant l'équation :



On veut étudier la vitesse de disparition de l'ion iodure I^- . Pour cela, à la date $t=0$, on mélange un volume $V_1=250\text{cm}^3$ de solution de peroxodisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration $C_1=2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et un volume $V_2=250\text{cm}^3$ de solution d'iodure de potassium KI de concentration $C_2=4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- 1° Calculer la concentration molaire initiale des ions iodures $[I^-]_0$ dans le mélange.
 2° Par dosage de prélèvements, on détermine la concentration molaire en diiode $[I_2]$ à différentes dates t . On trouve :

$t(\text{mn})$	0	2	4	6	8	10	12	15
$10^3[I_2](\text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$	0	2,4	4,2	5,7	6,8	7,6	8,1	8,6

Tracer le graphique représentant $[I_2]=f(t)$

Echelles : $1\text{cm} \longleftrightarrow 2\text{mm}$

$1\text{cm} \longleftrightarrow 10^{-3}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

- 3° On désigne par $t_{\frac{1}{2}}$ le temps au bout duquel la moitié des ions iodures a disparu.

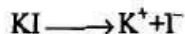
Déterminer la concentration du diiode à la date $t_{\frac{1}{2}}$.

- 4° Calculer la vitesse de formation du diiode à la date $t_{\frac{1}{2}}$ et en déduire la vitesse de disparition des ions iodures à la même date.

LMDB devoir SE

Solution

- 1° En solution l'iodure de potassium se dissocie mole par mole suivant l'équation :



Par conséquent, la quantité de matière (nombre de moles) des ions iodures est égale au nombre de moles de l'iodure de potassium KI ; soit : $n(I^-) = n(\text{KI}) = C_2V_2$

La concentration molaire initiale des ions iodures est :

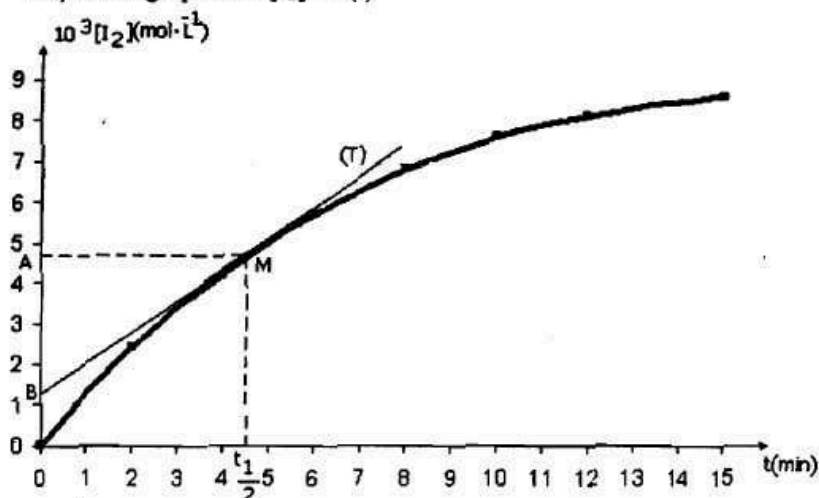
$$[I^-] = \frac{n(I^-)}{V_1 + V_2} = \frac{C_2V_2}{V_1 + V_2}$$

soit :

$$[I^-] = \frac{4 \cdot 10^{-2} \times 250}{500} = 2 \cdot 10^{-2} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$[I^-]_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

- 2° Traçons le graphe $10^3[I_2] = f(t)$



3° Soit x la concentration du diiode à la date $t_{\frac{1}{2}}$. Le tableau ci-dessous indique les concentrations en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ des ions iodures et du diiode à la date $t=0$ et à la date $t_{\frac{1}{2}}$.

	2I^-	$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$	I_2	2SO_4^{2-}
$t=0$	$2 \cdot 10^{-2}$		0	0
$t_{\frac{1}{2}}$	$2 \cdot 10^{-2} - 2x$		x	$2x$

Lorsque $t = t_{\frac{1}{2}}$, la moitié de la quantité initiale des ions iodures a disparu ;

$$\text{soit : } 2 \cdot 10^{-2} - 2x = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2}$$

$$\text{d'où : } x = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{I}_2] = x \Rightarrow [\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

4° La concentration du diiode à la date $t_{\frac{1}{2}}$ est : $[\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;

$$\text{soit : } 10^3 [\text{I}_2] = 5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En portant cette valeur sur la courbe, nous obtenons en abscisse le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \text{ mn}$.

La vitesse de formation du diiode au temps $t_{\frac{1}{2}}$ est donc égale à la pente de la tangente au point $M_{(4,5 \text{ mn})}$

$$v_{\text{I}_2} = \frac{\text{AB}}{\text{AM}}$$

ou encore

$$v_{\text{I}_2} = \frac{[\text{I}_2]_{\text{A}} - [\text{I}_2]_{\text{B}}}{4,5}$$

soit :

$$v_{\text{I}_2} = \frac{4,75 \cdot 10^{-3} - 1,20 \cdot 10^{-3}}{4,5} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

D'après les coefficients de l'équation bilan, nous avons à chaque instant :

$$v_{\text{I}^-} = 2v_{\text{I}_2}$$

à la date $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \text{ mn}$ la vitesse de disparition des ions iodures est donc :

$$v_{\text{I}^-} = 2 \times 7,8 \cdot 10^{-4} = 15,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v_{\text{I}_2} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v_{\text{I}^-} = 15,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

8_ Méthode chimique d'étude de la saponification.

Pour étudier la cinétique d'une réaction de saponification, on réalise un mélange équimolaire d'ester et d'hydroxyde de sodium dans un solvant approprié. L'équation-bilan de la réaction s'écrit :



A la date $t = 0$, on introduit 0,01 mol d'ester et 0,01 mol d'hydroxyde de sodium dans de l'eau. Le mélange, de volume $V=1L$ est maintenu dans un bain à température constante. A différentes dates t , on prélève des échantillons de 10cm^3 dans lesquels on dose les ions OH^- restant par une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire $10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Le tableau ci-dessous indique le volume V_A d'acide chlorhydrique versé sur chaque prélèvement.

$t(\text{mn})$	10	30	50	100	150	200
$V_A(\text{cm}^3)$	8	5,70	4,45	2,85	2,10	1,65

- 1° Calculer pour chaque prélèvement la concentration en ester restant (on expliquera les calculs pour le premier prélèvement puis on présentera les autres valeurs calculées dans un tableau).
- 2° Tracer la courbe $[\text{Ester}]=f(t)$
échelles : 1cm pour 20mn
1cm pour $1\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$
- 3° On appelle temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$, le temps au bout duquel la moitié de l'ester a été saponifié. Déterminer à l'aide du graphique $t_{\frac{1}{2}}$.
- 4° Déterminer le pourcentage d'ester saponifié à date $t = 2t_{\frac{1}{2}}$

LMDB devoir SE

Solution

1° Soit C_B la concentration molaire en ions OH^- dans la prise d'essai de volume $V_B=10\text{cm}^3$. Quand l'équivalence acido-basique est atteinte, le nombre de moles des ions OH^- est égale au nombre de moles d'acide chlorhydrique de concentration C_A ;

soit :

$$V_B = C_A V_A$$

d'où :

$$C_B = \frac{C_A V_A}{V_B}$$

Ainsi, à la date $t=10\text{mn}$, nous avons :

$$C_B = \frac{10^{-2} \times 8}{10} = 8 \cdot 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

ou, en millimole par litre,

$$C_B = 8\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$$

Par ailleurs l'équation-bilan montre que l'ester et l'ion OH^- réagissent mole à mole. Comme les concentrations initiales en ester et en ions OH^- sont identiques, les concentrations restantes, à la date t le sont aussi. Donc, à la date $t=10\text{mn}$, $[\text{Ester}]=8\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$. Toutes les autres valeurs sont consignées dans le tableau suivant :

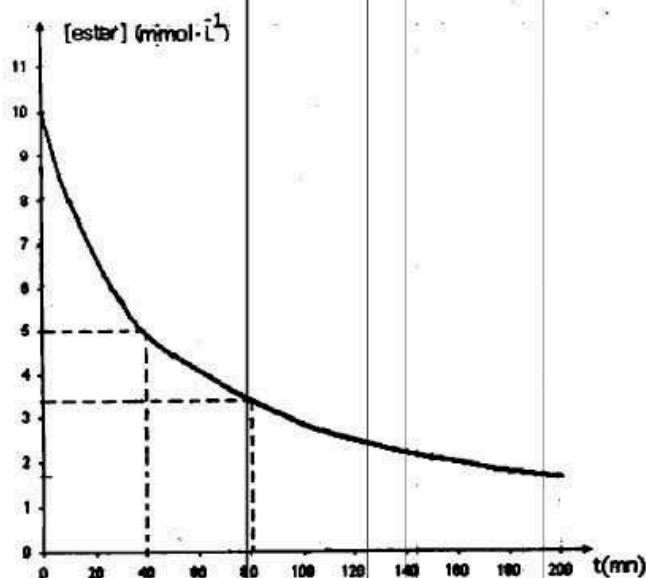
$T(\text{mn})$	10	30	50	100	150	200
$V_A(\text{cm}^3)$	8	5,70	4,45	2,85	2,10	1,65
$[\text{Ester}](\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1})$	8	5,70	4,45	2,85	2,10	1,65

- 2° La concentration de l'ester à la date $t=0$ est :

soit:

Traçons la courbe $[\text{Ester}] = f(t)$. le tableau ci-dessous indique les valeurs des concentrations exprimées en millimole par litre à l'instant initial et à différentes dates t .

$t(\text{mn})$	0	10	30	50	100	150	200
$[\text{Ester}](\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1})$	10	8	5,70	4,45	2,85	2,10	1,65



3° A la demi-réaction la concentration de l'ester est :

$$[\text{Ester}] = \frac{[\text{Ester}]_0}{2} = 5\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$$

En portant cette valeur sur la courbe, nous obtenons en abscisse pour le temps de demi-réaction $t_1 = 40\text{mn}$

$$t_1 = 40\text{mn}$$

4° Nous avons : $t_1 = 40\text{mn} \Rightarrow 2t_1 = 80\text{mn}$

D'après la graphique, la concentration en ester à cette date est :

$$[\text{Ester}]_{80\text{mn}} = 3,4\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$$

La quantité d'ester saponifié a cette date est :

$$[\text{Ester}]_0 - [\text{Ester}]_{80\text{mn}} = 10 - 3,4 = 6,6\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$$

La pourcentage d'ester saponifié à la date $2t_1$ est :

$$\frac{6,6 \times 100}{[\text{Ester}]_0} = \frac{6,6 \times 100}{10} = 66\%$$

9_ Cinétique de la décomposition du chlorure de sulfuryle.

Le chlorure de sulfuryle SO_2Cl_2 se décompose en phase gazeuse à 320°C suivant la réaction :



A fin d'étudier cette réaction, on introduit à la date $t=0$, une certaine quantité de chlorure de sulfuryle dans un récipient de volume constant maintenu à 320°C . La mesure de la pression P dans le récipient permet de suivre l'évolution de la réaction. On obtient, aux divers instants t , les valeurs suivantes :

t(s)	0	100	210	250	350	380	450
P(bar)	0,51	0,63	0,73	0,75	0,80	0,82	0,85

1° Trouver, en utilisant la loi des gaz parfaits, une relation entre la pression initiale P_0 et la concentration molaire initiale C_0 ; en déduire la valeur de C_0 .

2° Soit α le coefficient de dissociation du chlorure de sulfuryle (le coefficient de dissociation est le rapport de la quantité de SO_2Cl_2 décomposé à la quantité initiale de SO_2Cl_2).

a) Exprimer en fonction de C_0 et de α , les concentrations molaires des différents corps purs

b) Exprimer P en fonction de P_0 et de α ; en déduire l'expression de α .

3° Déterminer pour chacun des instants qui figurent dans le tableau, les concentrations molaires en dioxyde de soufre.

4° Tracer la courbe donnant les concentrations en SO_2 en fonction du temps et déterminer graphiquement la vitesse initiale de formation de SO_2

Echelles :

2cm pour 100s

1cm pour $10^{-3}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

données : $1\text{bar}=10^5\text{Pa}$

constante des gaz parfait : $R=8,31\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Solution

1° Soit n_0 le nombre de moles de SO_2Cl_2 à la date $t=0$. D'après la loi des gaz parfaits :

$$P_0 V = n_0 R T$$

D'où :

$$P_0 = \frac{n_0}{V} R T$$

or :

$$\frac{n_0}{V} = C_0$$

Par conséquent :

$$P_0 = C_0 R T$$

on en déduit :

$$C_0 = \frac{P_0}{R T}$$

Application numérique :

$$P_0 = 0,52\text{bar} = 0,52 \cdot 10^5\text{Pa}$$

$$T = 273 + 320 = 593\text{K}$$

$$C_0 = \frac{0,52 \cdot 10^5}{8,31 \times 593} = 10,53\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$$

soit, en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

$$C_0 = 10,53 \cdot 10^{-3}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} = 1,05 \cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

$$C_0 = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) Soit x la quantité exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de SO_2Cl_2 décomposé à un instant t .
D'après l'équation-bilan $x = [\text{SO}_2] = [\text{Cl}_2]$

d'autre part :

$$\alpha = \frac{x}{C_0}$$

d'où :

$$x = C_0 \alpha$$

Le tableau ci-dessous montre les concentrations des différents gaz à l'instant initial puis à une date t quelconque.

	SO_2Cl_2	SO_2	Cl_2
$t=0$	C_0	0	0
$t \neq 0$	$C_0 - C_0 \alpha$	$C_0 \alpha$	$C_0 \alpha$

Donc :

$$[\text{SO}_2\text{Cl}_2] = C_0 - C_0 \alpha = C_0(1 - \alpha)$$

$$[\text{SO}_2] = C_0 \alpha$$

$$[\text{Cl}_2] = C_0 \alpha$$

b) La quantité de matière initiale, en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est C_0 . La quantité de matière totale à une date t quelconque est la somme des quantités de matière :

$$[\text{SO}_2\text{Cl}_2] + [\text{SO}_2] + [\text{Cl}_2] = C_0(1 - \alpha) + C_0 \alpha + C_0 \alpha = C_0(1 + \alpha)$$

Par ailleurs, la pression est proportionnelle à la quantité de matière

$$\frac{P}{C_0(1 + \alpha)} = \frac{P_0}{C_0}$$

soit, après simplification :

$$P = (1 + \alpha)P_0$$

ou :

$$P = P_0 + P_0 \alpha$$

Par la suite :

$$P - P_0 = P_0 \alpha$$

d'où :

$$\alpha = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{P}{P_0} - 1$$

$$\alpha = \frac{P}{P_0} - 1$$

3° Nous avons : $[\text{SO}_2] = C_0 \alpha$

or :

$$\alpha = \frac{P}{P_0} - 1$$

avec $P_0 = 0,52 \text{ bar}$

Ainsi, à la date $t = 100 \text{ s}$, $P = 0,63 \text{ bar}$; donc à cette date

$$\alpha = \frac{0,63}{0,52} - 1 = 0,21$$

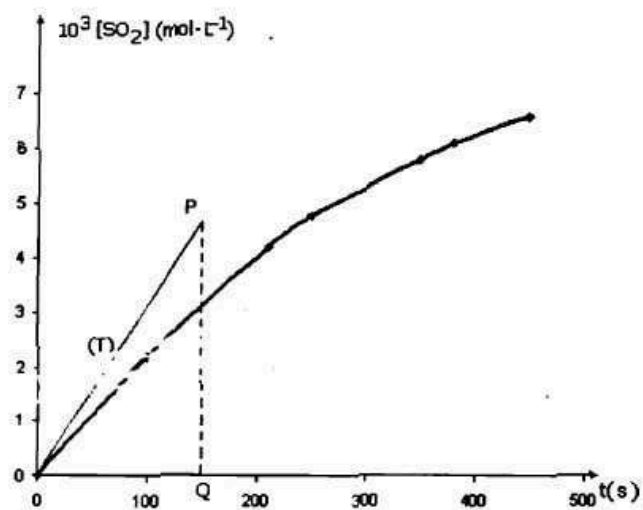
La concentration molaire de SO_2 à la même date est :

$$[\text{SO}_2] = 1,05 \cdot 10^{-2} \times 0,21 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Toutes les autres valeurs sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

$t(\text{s})$	0	100	210	250	350	380	450
$P(\text{bar})$	0,52	0,63	0,73	0,75	0,80	0,82	0,85
$\alpha = \frac{P}{0,52} - 1$	0	0,21	0,40	0,44	0,54	0,58	0,63
$[\text{SO}_2] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$

4° Traçons la courbe $10^3 [\text{SO}_2] = f(t)$



La vitesse initiale de formation de SO_2 est numériquement égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point O.

$$v_{\text{SO}_2} = \frac{PQ}{OQ}$$

soit :

$$v_{\text{SO}_2} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{150} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\text{SO}_2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

chapitre X

Equilibre chimique

1 Réaction de l'acide éthanoïque avec l'éthanol

On fait réagir à température constante, de l'acide acétique et de l'éthanol.

1° Ecrire l'équation-bilan de la réaction et rappeler brièvement quelques caractéristiques de cette réaction.

2° On a mélangé 0,6 mol d'acide acétique et 0,6 mol d'éthanol. Déterminer :

a) la composition du mélange à l'équilibre

b) la constante d'équilibre relative aux concentrations K_c

3° A ce mélange en équilibre, on ajoute 1 mol d'éthanol. Déterminer la composition du mélange lors du nouvel état d'équilibre.

LMDB devoir SB

Solution

1° La réaction d'estérification entre l'acide éthanoïque et l'alcool s'effectue selon l'équation



La réaction est lente, inversable et athermique

2° a) L'expérience montre, qu'avec un mélange équimolaire de n moles d'acide éthanoïque et n moles d'éthanol, nous avons, à l'équilibre :

$$\frac{n}{3} \text{ mol d'acide éthanoïque}$$

$$\frac{n}{3} \text{ mol d'éthanol}$$

$$\frac{2n}{3} \text{ mol d'éthanoate d'éthyle}$$

$$\frac{2n}{3} \text{ mol d'eau}$$

Ainsi, pour $n=0,6$; nous avons à l'équilibre :

$$n_{\text{CH}_3\text{COOH}} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ mol}$$

$$n_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ mol}$$

$$n_{\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5} = \frac{2 \times 0,6}{3} = 0,4 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{2 \times 0,6}{3} = 0,4 \text{ mol}$$

b) Soit V le volume du mélange réactionnel. Les concentrations des différents corps purs sont :

$$[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] = \frac{0,4}{V}$$

$$[\text{H}_2\text{O}] = \frac{0,4}{V}$$

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{0,2}{V}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = \frac{0,2}{V}$$

D'autre part :

$$K_c = \frac{[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] \cdot [\text{H}_2\text{O}]}{[\text{CH}_3\text{COOH}] \cdot [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]}$$

Soit, après simplification :

$$K_c = \frac{0,4 \times 0,4}{0,2 \times 0,2} = 4$$

$$\boxed{K_c = 4}$$

3° Si l'on ajoute 1 mol d'éthanol, l'équilibre se déplace dans le sens de disparition de l'éthanol. En prenant comme origine des dates l'instant du rajout, nous obtenons le tableau suivant représentant les nombres de moles à l'instant initial puis à l'équilibre :

	CH_3COOH	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	$\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$	H_2O
$t=0$	0,2	1,2	0,4	0,4
équilibre	$0,2-x$	$1,2-x$	$0,4+x$	$0,4+x$

Il vient :

$$K_c = \frac{(0,4+x)(0,4+x)}{(0,2-x)(1,2-x)}$$

soit :

$$4 = \frac{0,16 + 0,8x + x^2}{0,24 - 1,4x + x^2}$$

par la suite :

$$4x^2 - 5,6x + 0,96 = 0,16 + 0,8x + x^2$$

soit :

$$3x^2 - 6,4x + 0,80 = 0$$

Cette équation du second degré admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3,2 - \sqrt{7,84}}{3} = 0,13 \text{ mol}$$

$$x_2 = \frac{3,2 + \sqrt{7,84}}{3} = 2 \text{ mol}$$

La solution $x_2 = 2 \text{ mol}$ correspond à la disparition complète de l'acide éthanóïque et de l'éthanol ; donc cette valeur ne convient pas ; donc $x = 0,13 \text{ mol}$

Nous aurons donc, à l'équilibre :

$$n_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 0,2 - 0,13 = 0,07 \text{ mol}$$

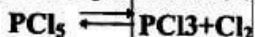
$$n_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 1,2 - 0,13 = 1,07 \text{ mol}$$

$$n_{\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5} = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ mol}$$

2_ Dissociation du pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore PCl_5 se dissocie en phase gazeuse suivant l'équation :



On introduit dans un récipient de 5L, à 250°C , 2 moles de pentachlorure de phosphore.

1° Calculer la constante d'équilibre aux concentration K_c sachant que le coefficient de dissociation est $\alpha=0,40$; en déduire K_p .

2° Exprimer K_p en fonction de α et de la pression totale P .

3° Calculer la pression totale ainsi que les pressions partielles des différents gaz.

Donnée : constante molaire des gaz parfaits : $R=8,2 \cdot 10^{-2} \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{K}^{-1}$

LMDB devoir SB

Solution

1° Soit x la quantité de PCl_5 transformée à l'équilibre. Le tableau suivant indique les nombres de moles à l'instant initial puis à l'équilibre des différents corps purs

	PCl_5	PCl_3	Cl_2
$t=0$	2	0	0
équilibre	$2-x$	x	x

d'autre part :

$$\alpha = \frac{x}{n_0} \quad (n_0 \text{ étant le nombre de moles initial})$$

d'où :

$$x = n_0 \alpha = 2 \times 0,4 = 0,8 \text{ mol}$$

Ainsi, à l'équilibre les quantités de matière en mol sont :

$$n_{\text{PCl}_5} = 2 - 0,8 = 1,2 \text{ mol}$$

$$n_{\text{PCl}_3} = 0,8 \text{ mol}$$

$$n_{\text{Cl}_2} = 0,8 \text{ mol}$$

Les concentrations molaires des corps purs, à l'équilibre sont :

$$[\text{PCl}_5] = \frac{n_{\text{PCl}_5}}{V} = \frac{1,2}{5} = 0,24 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{PCl}_3] = \frac{n_{\text{PCl}_3}}{V} = \frac{0,8}{5} = 0,16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Cl}_2] = \frac{0,8}{5} = 0,16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Comme :

$$K_c = \frac{[\text{PCl}_3] \cdot [\text{Cl}_2]}{[\text{PCl}_5]}$$

Il vient :

$$K_c = \frac{0,16 \times 0,16}{0,24} = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$K_c = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par ailleurs nous avons :

$$K_p = K_c \cdot (RT)^{\Delta n}$$

Δn étant la différence entre la somme des coefficient des produits et la somme des coefficient des réactif ; donc $\Delta n = (1+1) - 1 = 1$

d'où :

$$K_p = K_c RT$$

avec

$$T = 273 + 250^\circ = 523 \text{ K}$$

donc :

$$K_p = 0,1 \times 8,8 \cdot 10^{-2} \times 523 = 4,28 \text{ atm}$$

$$K_p = 4,28 \text{ atm}$$

2° Nous avons :

$$x = n_0 \alpha$$

$$n_0 = 2 \text{ moles} \Rightarrow x = 2\alpha$$

A l'équilibre, les nombres de moles des constituants sont :

$$n(\text{PCl}_5) = 2 - x = 2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha)$$

$$n(\text{PCl}_3) = x = 2\alpha$$

$$n(\text{Cl}_2) = x = 2\alpha$$

Le nombre de moles total à l'équilibre est :

$$\Sigma n = 2 - 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 2(1 + \alpha)$$

Les pressions partielles des constituants du mélange gazeux à l'équilibre, sont proportionnelles aux nombres de moles des constituants du mélange.

$$\text{donc : } \frac{P_{\text{PCl}_5}}{2(1 - \alpha)} = \frac{P_{\text{PCl}_3}}{2\alpha} = \frac{P_{\text{Cl}_2}}{2\alpha} = \frac{P}{2(1 + \alpha)}$$

Ainsi :

$$\frac{P_{\text{PCl}_5}}{2(1 - \alpha)} = \frac{P}{2(1 + \alpha)} \Rightarrow P_{\text{PCl}_5} = \frac{(1 - \alpha) \cdot P}{1 + \alpha}$$

De même :

$$\frac{P_{\text{PCl}_3}}{2\alpha} = \frac{P}{2(1 + \alpha)} \Rightarrow P_{\text{PCl}_3} = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

par suite :

$$P_{\text{Cl}_2} = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

or :

$$K_p = \frac{P_{\text{PCl}_3} \cdot P_{\text{Cl}_2}}{P_{\text{PCl}_5}}$$

soit :

$$K_p = \frac{\frac{\alpha^2 P^2}{(1 + \alpha)^2}}{\frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha}} = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

$$K_p = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

3° Nous avons :

$$K_p = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

$$K_p = 4,28 \text{ atm}$$

$$\alpha = 0,40$$

il vient :

$$4,28 = \frac{0,16P}{1 - 0,16}$$

soit :

$$4,28 - 0,68 = 0,16P$$

d'où :

$$P = \frac{3,6}{0,16} = 22,50 \text{ atm}$$

Les différentes pressions partielles sont :

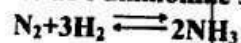
$$P_{\text{PCl}_5} = \frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha} = \frac{(1 - 0,4) \times 22,50}{1,4} = 9,64 \text{ atm}$$

$$P_{\text{PCl}_3} = P_{\text{Cl}_2} = \frac{\alpha P}{1 + \alpha} = 6,43 \text{ atm}$$

$$\begin{aligned}
 P &= 22,50 \text{ atm} \\
 P_{\text{PCl}_5} &= 9,64 \text{ atm} \\
 P_{\text{PCl}_3} &= 6,43 \text{ atm} \\
 P_{\text{Cl}_2} &= 6,43 \text{ atm}
 \end{aligned}$$

3_ Synthèse de l'ammoniac

Pour réaliser la synthèse de l'ammoniac selon la réaction :



on chauffe à 450°C sous la pression totale $P = 300 \text{ atm}$ un mélange formé de 28g de diazote et de 6g de dihydrogène. A l'équilibre, il reste 13,44g de diazote.

- 1° Déterminer la pression partielle de chacun des gaz à l'équilibre.
- 2° Calculer la constante d'équilibre relative aux pressions partielles K_p et préciser son unité.
- 3° Dans l'intervalle de température $298\text{K} \leq T \leq 400\text{K}$ la constante K_p varie avec la température absolue suivant la loi :

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{T}$$

Calculer K_p à la température de 127°C

on donne : $M(\text{N}) = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ $M(\text{H}) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

LMDB devoir SE

Solution

- 1° Les nombres de moles des réactifs à l'instant initial sont :

$$n(\text{N}_2)_0 = \frac{m(\text{N}_2)}{M(\text{N}_2)} = \frac{28}{28} = 1 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2)_0 = \frac{m(\text{H}_2)}{M(\text{H}_2)} = \frac{6}{2} = 3 \text{ mol}$$

Soit x la fraction d'azote initial transformé en gaz ammoniac à l'équilibre. Le nombre de moles de chaque constituant à l'instant initial puis à l'équilibre est donné par le tableau suivant :

	N_2	3H_2	2NH_3
$t=0$	1	3	0
Equilibre	$1-x$	$3-3x$	$2x$

Le nombre de moles total à l'équilibre est :

$$\Sigma n = 1 - x + 3 - 3x + 2x = 4 - 2x$$

d'autre part la quantité de diazote à l'équilibre est :

$$n(\text{N}_2) = \frac{13,44}{M(\text{N}_2)} = \frac{13,44}{28} = 0,48 \text{ mol}$$

donc :

$$1 - x = 0,48$$

d'où :

$$x = 1 - 0,48 = 0,52 \text{ mol}$$

Ainsi, à l'équilibre nous avons :

$$n(\text{N}_2) = 0,48 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2) = 3 - 3 \times 0,52 = 1,44 \text{ mol}$$

$$n(\text{NH}_3) = 2 \times 0,52 = 1,04 \text{ mol}$$

$$\Sigma n = 4 - 2 \times 0,52 = 2,96 \text{ mol}$$

Les pressions partielles étant proportionnelles aux nombres de moles, nous avons :

$$\frac{P_{\text{N}_2}}{0,48} = \frac{P}{2,96} \Rightarrow P_{\text{N}_2} = \frac{0,48P}{2,96} = \frac{0,48 \times 300}{2,96} = 48,64 \text{ atm}$$

$$\frac{P_{\text{H}_2}}{1,44} = \frac{P}{2,96} \Rightarrow P_{\text{H}_2} = \frac{1,44 \times 300}{2,96} = 145,94 \text{ atm}$$

$$\frac{P_{\text{NH}_3}}{1,04} = \frac{P}{2,96} \Rightarrow P_{\text{NH}_3} = \frac{1,04 \times 300}{2,96} = 105,40 \text{ atm}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{N}_2} &= 48,64 \text{ atm} \\ P_{\text{H}_2} &= 145,94 \text{ atm} \\ P_{\text{NH}_3} &= 105,40 \text{ atm} \end{aligned}$$

2° La constante d'équilibre relative aux pressions partielles :

$$K_p = \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} \cdot P_{\text{H}_2}^3}$$

soit :

$$K_p = \frac{(105,40)^2}{48,64 \times (145,94)^3} = 7,35 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-2}$$

$$\boxed{K_p = 7,35 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-2}}$$

3° La constante d'équilibre K_p varie selon la loi :

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{T}$$

$$T = 273 + 127^\circ = 400 \text{ K}$$

donc :

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{400}$$

soit :

$$\ln K_p = 3,92$$

on en déduit :

$$K_p = \exp 3,92 = 50,40 \text{ atm}^{-2}$$

$$\boxed{K_p = 50,40 \text{ atm}^{-2}}$$

Les acides forts et les bases fortes

1_ Détermination de la concentration d'une solution d'acide chlorhydrique.

Il existe dans un laboratoire une bouteille possédant une étiquette sur laquelle est écrit : 'acide chlorhydrique : masse volumique $1190 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; pourcentage en masse d'acide pur 37% ; masse molaire du chlorure d'hydrogène $36,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.'

1° Calculer la concentration molaire de cette solution.

2° On extrait $4,15 \text{ cm}^3$ de cette solution et on complète à 500 cm^3 avec de l'eau distillée. Quelle est la nouvelle concentration molaire.

LMDb devoir SB

Solution

1° La masse volumique de l'acide chlorhydrique contenant des impuretés est $1190 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1190 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$

La masse d'acide chlorhydrique pur contenu dans un litre de la solution est :

$$\mu = \frac{1190 \times 37}{100} = 440,3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

La concentration molaire c est le nombre de moles de chlorure d'hydrogène pur dans un litre ; soit :

$$C = \frac{\mu}{M_{\text{HCl}}} = \frac{440,3}{36,5} = 12,06 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C = 12,06 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° La quantité initiale de l'acide chlorhydrique (nombre de moles de l'acide chlorhydrique) se retrouve après la dilution, elle est constante. On a :

$n_{\text{acide}} = C_i V_i = C_f V_f$ (C est la concentration initiale ; C_f est la concentration finale)

d'où :

$$C_f = \frac{C_i V_i}{V_f}$$

soit :

$$C_f = \frac{12,06 \times 4,15}{500} = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_f = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2_ Mélange de deux solutions d'acides forts.

On veut déterminer la masse molaire d'un alcool $R-OH$, (R est un radical alkyle). Sur 3,7g de cet alcool, on fait agir du chlorure d'éthanoyle en excès. Le chlorure d'hydrogène formé est recueilli en totalité dans 5 litres d'eau. Le pH de la solution obtenue est 2.

1° Ecrire l'équation-bilan de cette réaction et calculer la masse molaire M de cet alcool ; en déduire sa formule moléculaire.

2° Dans 50cm³ de la solution d'acide chlorhydrique obtenue, on verse 100cm³ d'une solution d'acide nitrique de concentration $C_2=2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de $\text{pH}=2,7$.

a) Montrer que l'acide nitrique est un acide fort et écrire l'équation bilan de son ionisation dans l'eau.

b) Quel est le pH du mélange obtenu ?

LMDB devoir SE

Solution

1° L'action d'un chlorure d'acyle sur un alcool conduit à un ester.



La concentration molaire de la solution d'acide chlorhydrique obtenue est

$$C_1 = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La nombre de moles de chlorure d'hydrogène formé est :

$$n(\text{HCl}) = C_1 V_{\text{HCl}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

D'après l'équation bilan de la réaction, nous avons:

$$n(R-OH) = n(\text{HCl})$$

soit:

$$\frac{m(R-OH)}{M(R-OH)} = 5 \cdot 10^{-2}$$

on en déduit:

$$M = \frac{m(R-OH)}{5 \cdot 10^{-2}}$$

soit :

$$M = \frac{3,7}{5 \cdot 10^{-2}} = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La formule générale de cet alcool est : $C_n H_{2n+1} OH$

Il vient donc :

$$12n + 2n + 1 + 17 = M$$

soit :

$$14n + 18 = 74$$

d'où :

$$n = \frac{56}{14} = 4$$

La formule moléculaire de l'alcool est : $C_4 H_9 OH$

2° a) Si l'acide nitrique est fort, son pH vérifie la relation : $\text{pH} = -\text{Log} C_A$

Nous avons :

$$-\text{Log} C_2 = 2,7$$

Le pH de la solution étant 2,7, l'acide nitrique est donc un acide fort. Sa réaction avec l'eau est totale et s'effectue selon l'équation :



b) Le nombre de moles d'ions H_3O^+ présents dans le volume $V_1=50\text{cm}^3$ de la solution de chlorure d'hydrogène est : $n_1=C_1 V_1$

Le nombre de moles d'ions H_3O^+ présents dans la solution d'acide nitrique est $n_2=C_2 V_2$

La concentration molaire des ions H_3O^+ dans le mélange est :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{n_1 + n_2}{V_1 + V_2}$$

soit :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{50 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} \times 100}{150} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

comme :

$$\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+]$$

le pH du mélange est :

$$\text{pH} = -\text{Log} 4,66 \cdot 10^{-3} = 2,3$$

$$\boxed{\text{pH} = 2,3}$$

3_ pH d'un mélange de deux solutions de bases fortes.

A 25°C, on obtient une solution S en mélangeant 100mL de solution d'hydroxyde de potassium de concentration $C_1 = 0,16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec 200mL de solution d'hydroxyde de sodium de pH=12 et 200mL d'eau.

1° Calculer le pH du mélange.

2° Déterminer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans S et montrer que la solution est électriquement neutre.

LMDB devoir SE

Solution

1° Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans la solution d'hydroxyde de potassium de volume V_1 est $n_1 = C_1 V_1$.

Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans la solution d'hydroxyde de sodium de volume V_2 est $n_2 = C_2 V_2$

Par ailleurs

d'où :

$$\text{pH} = 14 + \text{Log} C_2$$

$$\text{Log} C_2 = \text{pH} - 14$$

$$\text{Log} C_2 = 12 - 14 = -2$$

$$C_2 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

on en déduit :

Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans le volume $V_3 = 200 \text{ mL}$ d'eau est négligeable devant n_1 ou n_2 . La concentration molaire en ions OH^- :

$$[\text{OH}^-] = \frac{n_1 + n_2}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :

$$[\text{OH}^-] = \frac{0,16 \times 100 + 0,01 \times 200}{500}$$

$$[\text{OH}^-] = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 25°C, on a :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

d'où :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = 2,77 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

comme :

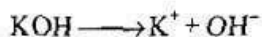
$$\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le pH du mélange est :

$$\text{pH} = -\text{Log} 2,77 \cdot 10^{-13} = 12,5$$

$$\boxed{\text{pH} = 12,5}$$

2° L'hydroxyde de potassium KOH se dissout totalement dans l'eau pure suivant l'équation :



Les ions K^+ , provenant uniquement de cette dissolution ; leur nombre de moles est égale au nombre de moles d'ions OH^- contenus dans la solution de KOH comme l'indique l'équation de dissolution ; donc :

$$n(\text{K}^+) = n_1$$

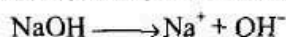
La concentration en ions K^+ est :

$$[\text{K}^+] = \frac{n_1}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :

$$[\text{K}^+] = \frac{0,16 \times 100}{500} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

L'hydroxyde de sodium NaOH se dissout totalement en solution selon l'équation :



Le nombre de moles d'ions Na^+ est égale au nombre de moles d'ions OH^- contenus dans la solution de NaOH :

$$n(\text{Na}^+) = n_2$$

La concentration des ions Na^+ est :

$$[\text{Na}^+] = \frac{n_2}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :

$$[\text{Na}^+] = \frac{0,01 \times 200}{500} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution sont :

$$\boxed{\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] &= 2,77 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] &= 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{Na}^+] &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{K}^+] &= 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}}$$

Le nombre de charges positives dans un litre de solution est :

$$[+] = [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Na}^+] + [\text{K}^+] = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de charges négatives dans un litre de solution :

$$[-] = [\text{OH}^-] = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'où :

$$[+] = [-]$$

Il y a autant de charges négatives que de charges positives : la solution est électriquement neutre.

Couple acide/base

1_Acide méthanoïque.

On dissout 0,1 mole d'acide méthanoïque HCOOH dans de l'eau pure de façon à obtenir 1 litre de solution. Le pH de cette solution est 2,4. Toutes les mesures sont réalisées à 25°C.

1° Montrer que l'acide méthanoïque est un acide faible et écrire l'équation bilan de la réaction qui a lieu lors de la préparation de la solution.

2° Calculer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans la solution. Déduire le pK_a du couple $\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-$.

LMDB devoir SE

Solution

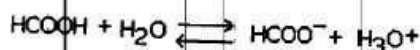
1° La concentration de la solution est $C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Si l'acide était fort, on pourrait utiliser la relation :

$$\text{pH} = -\text{Log}C$$

Or :

$$\text{pH} = 2,4 > -\text{Log}0,1$$

L'acide méthanoïque est donc un acide faible. L'équation-bilan de la réaction avec l'eau est :



2° Compte tenu de l'ionisation partielle de l'eau, les espèces en solution sont : HCOOH ; HCOO^- ; H_2O ; H_3O^+ et OH^- .

Nous avons :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

donc :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,4} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 25°C

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

D'où :

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Expression de la neutralité électrique :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{HCOO}^-]$$

$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$ (les ions OH^- sont ultra-minoritaires) d'où :

$$[\text{HCOO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Equation de conservation de la quantité de matière pour les espèces renfermant l'élément carbone :

$$C = [\text{HCOOH}] + [\text{HCOO}^-]$$

d'où :

$$[\text{HCOOH}] = C - [\text{HCOO}^-]$$

soit :

$$[\text{HCOOH}] = 10^{-1} - 3,9 \cdot 10^{-3} = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] &= 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] &= 2,6 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{HCOO}^-] &= 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{HCOOH}] &= 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

La relation d'Henderson donne :

on en déduit :

soit :

$$pH = pK_a + \log \frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$$

$$pK_a = pH - \log \frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$$

$$pK_a = 2,4 - \log \frac{3,9 \cdot 10^{-3}}{9,6 \cdot 10^{-2}} = 3,79$$

$$\boxed{pK_a = 3,79}$$

2_ Solution d'ammoniac et solution de monoéthylamine.

Le pH d'une solution aqueuse d'ammoniac NH_3 de concentration $C = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est 10,6.

1° Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu entre l'ammoniac et l'eau.

2° Calculer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans la solution. En déduire la valeur de la constante d'acidité K_{a1} du couple acide/base mis en jeu lors de la réaction de l'ammoniac avec l'eau.

3° Le pH d'une solution aqueuse de monoéthylamine $C_2H_5NH_2$ de concentration $C = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est 11,4.

a) Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu entre la monoéthylamine et l'eau.

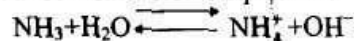
b) Calculer les concentrations des différentes espèces chimiques présentes dans la solution ; en déduire la valeur de la constante d'acidité K_{a2} du couple acide/base.

4° Dans les deux couples acide/base cités, entre l'ammoniac et la monoéthylamine, quelle est la base la plus forte justifier.

LMDB devoir SB

Solution

1° L'ammoniac réagit avec l'eau selon l'équation :



2° Compte tenu de l'ionisation partielle de l'eau, les espèces chimiques présentes en solution sont : H_3O^+ ; NH_3 ; NH_4^+ ; H_2O et OH^-

$$[H_3O^+] = 10^{-pH}$$

$$\text{soit : } [H_3O^+] = 10^{-10,6} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

L'équilibre ionique de l'eau se traduit par :

$$[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$$

$$\text{d'où : } [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Traduisons l'électroneutralité de la solution :

$$[H_3O^+] + [NH_4^+] = [OH^-]$$

puisque : $[H_3O^+] \ll [OH^-]$ (les ions H_3O^+ sont ultra minoritaires)

$$[NH_4^+] \approx [OH^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Exprimons la conservation de la matière pour les espèces renfermant l'élément azote :

$$C = [NH_3] + [NH_4^+]$$

d'où :

soit :

$$[\text{NH}_3] = C - [\text{NH}_4^+]$$

$$[\text{NH}_3] = 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-4} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_4^+] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_3] = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

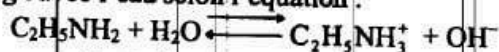
$$K_{a1} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

soit :

$$K_{a1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-11} \times 9,6 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{-10}$$

$$K_{a1} = 6 \cdot 10^{-10}$$

3° a) La monoéthylamine réagit avec l'eau selon l'équation :



b) Compte tenu de l'ionisation partielle de l'eau, les espèces chimiques présentes dans la solution sont : H_3O^+ ; $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$; $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$; H_2O et OH^-

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

soit :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11,4} = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Electroneutralité de la solution :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = [\text{OH}^-]$$

comme

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-]$$

il vient :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = [\text{OH}^-] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la matière relative à l'élément azote :

$$C = [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] + [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]$$

d'où :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = C - [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]$$

soit :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 10^{-2} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$K_{a2} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]}$$

soit :

$$K_{a2} = \frac{3,9 \cdot 10^{-12} \times 7,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 1,17 \cdot 10^{-11}$$

$$K_{a2} = 1,17 \cdot 10^{-11}$$

4° De deux bases, la plus forte est celle pour laquelle la constante d'acidité du couple auquel elle appartient est la plus petite.

$K_{a2} < K_{a1}$ donc la monoéthylamine est plus forte que l'ammoniac.

3_ Détermination de la concentration d'une solution d'ammoniac.

On prépare à 25°C une solution S d'ammoniac de pH=11 par dilution d'une solution S₀ vendue au commerce. Le pK_a du couple NH₄⁺/NH₃ est 9,2.

1° Calculer les concentrations molaire des espèces chimiques présentes dans la solution S et déterminer la concentration C de cette solution.

2° La solution S₀ du commerce a une masse volumique de 890g·L⁻¹ et contient 34% en masse d'ammoniac pur

a) Calculer la concentration molaire C₀ de la solution S₀.

b) Quel volume de S₀ a-t-il fallu utiliser pour obtenir un litre de la solution S ?

données : M(H)=1g·mol⁻¹ M(N)=14g·mol⁻¹

Solution

1° Les données sont :

$$\text{pH} = 11$$

$$\text{pK}_a = 9,2$$

soit :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-11}} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$K_a = 10^{-\text{pK}_a} = 10^{-9,2} = 6,3 \cdot 10^{-10}$$

Les réaction sont :



Les espèces en solution sont : NH₃; NH₄⁺; H₂O; H₃O⁺ et OH⁻

Equation de la neutralité électrique de la solution :

$$[\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$$

[H₃O⁺] est négligeable devant [OH⁻]

donc :

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'autre part :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

d'où :

$$[\text{NH}_3] = \frac{K_a[\text{NH}_4^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$$

soit :

$$[\text{NH}_3] = \frac{6,3 \cdot 10^{-10} \times 10^{-3}}{10^{-11}} = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{NH}_4^+] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{NH}_3] = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{array}}$$

Traduisons la conservation de la quantité de matière pour les espèces renfermant l'élément azote :

soit:

$$C = [\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+]$$

$$C = 6,3 \cdot 10^{-2} + 10^{-3} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) La masse d'ammoniac pur contenu dans un litre de la solution S_0 du commerce.

$$\mu = \frac{890 \times 34}{100} = 302,6 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de moles d'ammoniac pur dans un litre de la solution S_0 .

$$C_0 = \frac{\mu}{M(\text{NH}_3)} = \frac{302,6}{14 + 3} = 17,8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_0 = 17,8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Le nombre de mole de l'ammoniac se retrouve après dilution ; on a :

d'où :

$$C_0 V_0 = CV$$

$$V_0 = \frac{CV}{C_0}$$

soit :

$$V_0 = \frac{6,4 \cdot 10^{-2} \times 1}{17,8} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ L} = 3,6 \text{ cm}^3$$

$$V_0 = 3,6 \text{ cm}^3$$

4_ Solution de chlorure d'ammonium – mélange tampon.

Une solution aqueuse de chlorure d'ammonium de concentration $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ présente à 25°C un pH de 5,1.

1° Déterminer les concentrations molaires des diverses espèces chimiques présentes dans la solution.

2° A 100 mL de cette solution, on ajoute un volume V d'une solution aqueuse d'ammoniac de concentration molaire $2 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le pH du mélange obtenu est 9.

a) Calculer le volume V .

b) Quel volume V' de la solution d'ammoniac doit on ajouter à 100mL de la solution de chlorure d'ammonium pour obtenir une solution tampon de pH=9,2 ?

Le pKa du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ est 9,2

Solution

1° Les données sont :

soit:

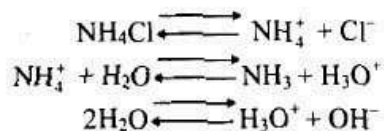
$$C = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 5,1$$

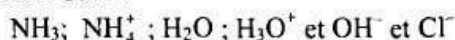
$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5,1} = 7,9 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{7,9 \cdot 10^{-6}} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Les réactions sont :



Les espèces en solution sont :



Equation de la neutralité électrique :

$$[\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{Cl}^-]$$

puisque:

$$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$$

il vient :

$$[\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{Cl}^-]$$

d'où :

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{Cl}^-] + [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (1)$$

Conservation de la quantité de matière relative à l'élément chlore :

$$C \approx [\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (2)$$

Compte tenu de (2) la relation (1) donne:

$$[\text{NH}_4^+] = 10^{-1} - 7,9 \cdot 10^{-6} = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la matière relative à l'élément azote :

$$C = [\text{NH}_4^+] + [\text{NH}_3]$$

d'où :

$$[\text{NH}_3] = C - [\text{NH}_4^+]$$

soit :

$$[\text{NH}_3] = 10^{-1} - 9,9 \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] &= 7,9 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] &= 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{NH}_4^+] &= 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{NH}_3] &= 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{Cl}^-] &= 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}}$$

2° a) La solution finale est un mélange d'une acide faible NH_4^+ avec sa base conjuguée NH_3 ; donc :

$$\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

ou :

$$\text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

or :

$$[\text{NH}_3] = \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$$

et :

$$[\text{NH}_4^+] = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B}$$

il vient :

$$\text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A}$$

soit :

$$9 - 9,2 = \text{Log} \frac{2 \cdot 10^{-1} \times V}{10^{-1} \times 100}$$

ou :

$$-0,2 = \text{Log} \frac{V}{50}$$

par la suite :

$$10^{-0,2} = \frac{V}{50}$$

ou :

$$0,63 = \frac{V}{50}$$

d'où :

$$V = 50 \times 0,63 = 31,5 \text{ mL}$$

$$\boxed{V = 31,5 \text{ mL}}$$

b) Le mélange obtenu est une solution tampon si :

$$\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = 1$$

donc :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = 1$$

soit :

$$\frac{2 \cdot 10^{-1} \times V'}{10^{-1} \times 100} = 1$$

ou :

$$\frac{V'}{50} = 1 \Rightarrow V' = 50 \text{ mL}$$

$$\boxed{V' = 50 \text{ mL}}$$

Réactions acide-base. Dosages.

1 Réaction entre une solution d'acide faible et une solution de base forte-trois méthodes pour préparer une solution tampon.

On verse dans un volume $V_A=10\text{cm}^3$ d'une solution d'acide éthanóïque de concentration molaire $C_A=0,12\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ un volume $V_B=10\text{cm}^3$ d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_B=8\cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Le pH du mélange obtenu est égal à 5,1.

1° Calculer le pKa du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$.

2° On dispose des solutions aqueuses suivantes :

acide chlorhydrique à $10^{-1}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

hydroxyde de sodium à $5\cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

acide éthanóïque à $10^{-1}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

ammoniac à $5\cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

chlorure d'ammonium à $10^{-1}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

éthanoate de sodium à $5\cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

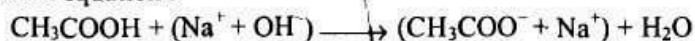
Le pKa du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ est 9,2.

Indiquer trois manières précises pour fabriquer 150cm^3 d'une solution tampon de pH=4,8.

LMDB devoir SE

Solution

1° La réaction entre l'acide faible CH_3COOH et la base forte NaOH est totale et s'effectue suivant l'équation :



Les ions Na^+ ne participant pas à la réaction, l'équation bilan prend la forme :



Le pH du mélange étant acide ($\text{pH} < 7$) la quantité d'hydroxyde de sodium ajouté a disparu complètement. Le tableau ci-dessous indique les quantités mises en présence et les quantités présentes dans l'état d'équilibre.

	CH_3COOH	OH^-	CH_3COO^-	H_2O
initialement	$C_A V_A$	$C_B V_B$		
équilibre	$C_A V_A - C_B V_B$	0	$C_B V_B$	

A l'équilibre, nous avons :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{C_A V_A - C_B V_B}{V_A + V_B}$$

d'autre part :

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \text{Log} \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

soit :

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$$

d'où :

$$\text{pK}_a = \text{pH} - \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$$

soit :

$$\text{pK}_a = 5,1 - \text{Log} \frac{8 \cdot 10^{-2} \times 10}{0,12 \times 10 - 8 \cdot 10^{-2} \times 10} = 4,8$$

$$\boxed{\text{pK}_a = 4,8}$$

2° Le pH de la solution tampon correspond au pK_a du couple CH₃COOH/CH₃COO⁻. Il s'agit donc de réaliser un mélange équimolaire de CH₃COOH et CH₃COO⁻.

Première méthode.

On mélange un volume V_A d'acide fort HCl avec un volume V_B de base faible d'éthanoate de sodium jusqu'à la demi-équivalence. On a alors :

$$\frac{C_A V_A}{C_B V_B} = \frac{1}{2}$$

ou :

$$2C_A V_A = C_B V_B$$

soit :

$$2 \cdot 10^{-1} \cdot V_A = 5 \cdot 10^{-2} V_B$$

ou :

$$2V_A = 5 \cdot 10^{-1} V_B$$

encore :

$$20V_A = 5V_B$$

et :

$$4V_A = V_B$$

d'autre part :

$$V_A + V_B = 150 \text{ cm}^3$$

il vient :

$$V_A + 4V_A = 150 \text{ cm}^3$$

soit :

$$5V_A = 150 \text{ cm}^3$$

d'où :

$$V_A = \frac{150}{5} = 30 \text{ cm}^3$$

et :

$$V_B = 4V_A = 120 \text{ cm}^3$$

On mélange donc 30 cm³ d'acide chlorhydrique avec 120 cm³ de la solution d'éthanoate de sodium.

Deuxième méthode :

On mélange un volume V_B de la base forte NaOH avec un volume V_A de l'acide faible CH₃COOH jusqu'à la demi-équivalence. On a alors :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = \frac{1}{2}$$

ou :

$$2C_B V_B = C_A V_A$$

soit :

$$2 \times 5 \cdot 10^{-2} \cdot V_B = 10^{-1} V_A$$

par la suite :

$$10^{-1} V_B = 10^{-1} V_A$$

d'où :

$$V_B = V_A$$

puisque :

$$V_A + V_B = 150 \text{ cm}^3$$

il vient :

$$2V_A = 150 \text{ cm}^3$$

d'où :

$$V_A = 75 \text{ cm}^3$$

et :

$$V_B = 75 \text{ cm}^3$$

On mélange 75 cm³ de la solution d'hydroxyde de sodium avec 75 cm³ de la solution d'acide éthanoïque.

Remarque :

Dans ces deux méthodes le demi-quotient représente le rapport du nombre de moles de l'espèce forte (acide fort ou base forte) au nombre de moles de l'espèce faible (acide faible ou base faible).

Troisième méthode :

On mélange un volume V_A d'acide faible CH_3COOH avec un volume V_B de sa base conjuguée CH_3COONa dans les mêmes proportions :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = 1$$

ou :

$$C_B V_B = C_A V_A$$

soit :

$$5 \cdot 10^{-2} \cdot V_B = 10^{-1} V_A \Leftrightarrow 0,5 V_B = V_A$$

ou encore :

$$5 \cdot 10^{-1} V_B = V_A$$

comme :

$$V_A + V_B = 150 \text{ cm}^3$$

il vient :

$$0,5 V_B + V_B = 150 \text{ cm}^3$$

soit :

$$1,5 V_B = 150 \text{ cm}^3$$

d'où :

$$V_B = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ cm}^3$$

et :

$$V_A = 0,5 \times 100 = 50 \text{ cm}^3$$

On mélange 50 cm^3 de la solution d'acide éthanoïque avec 100 cm^3 de la solution d'éthanoate de sodium.

2_ Réaction entre une solution de base faible et une solution d'acide fort.

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on fait réagir entre elles deux solutions aqueuses, l'une d'éthylamine $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$, l'autre d'acide chlorhydrique afin de déterminer le pK_a du couple constitué par l'éthylamine et son acide conjugué.

1° On prépare 100 cm^3 d'acide chlorhydrique de concentration molaire $C_A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en diluant un volume V_i d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans de l'eau pure.

a) Déterminer le volume initial V_i .

b) Expliquer brièvement comment on réalise pratiquement cette dilution.

2° A un volume $V_B = 20 \text{ cm}^3$ de la solution d'éthylamine, on ajoute progressivement de l'acide chlorhydrique. Un pH-mètre permet de suivre l'évolution du pH du mélange au cours de cette manipulation. On constate que :

- pour 30 cm^3 d'acide chlorhydrique ajouté, le pH mesuré est égal à 10,3.

- pour 40 cm^3 d'acide ajouté l'équivalence acido-basique est obtenue.

c) Préciser la formule et le nom de l'acide conjugué de l'éthylamine.

d) Que représente l'équivalence acido-basique ? Calculer la concentration molaire C_B de la solution aqueuse d'éthylamine.

e) Recenser les différentes espèces chimiques en solution lorsque le volume d'acide ajouté est $V_A = 30 \text{ cm}^3$ et calculer leurs concentrations molaires. En déduire le pK_a du couple constitué par l'éthylamine et son acide conjugué.

Solution

1° a) La quantité initiale de l'acide chlorhydrique (exprimée en mol) se retrouve après la dilution ; elle est constante :

$$n_{\text{acide}} = C_i V_i = c_f V_f$$

où :

$$V_i = \frac{C_f V_f}{C_i}$$

soit :

$$V_i = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 100}{1} = 5 \text{ cm}^3$$

$$V_i = 5 \text{ cm}^3$$

b) A l'acide d'une pipette on verse 5 cm^3 d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans une fiole jaugée de 100 cm^3 et on complète à 100 cm^3 avec de l'eau distillée.

2° a) L'acide conjugué de l'éthylamine est l'ion éthylammonium $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$.

b) L'équivalence acido-basique représente l'instant où l'éthylamine a disparu complètement dans le mélange.

A l'équivalence la quantité d'acide chlorhydrique ajouté est égale à la quantité initiale d'éthylamine, soit :

$$C_A V_{AE} = C_B V_B$$

V_{AE} est le volume d'acide versé l'équivalence : $V_{AE} = 40 \text{ cm}^3$

donc :

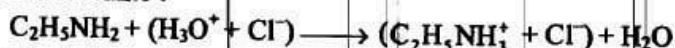
$$C_B = \frac{C_A V_{AE}}{V_B}$$

soit :

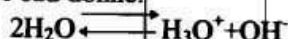
$$C_B = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 40}{20} = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_B = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

c) La réaction entre l'éthylamine et l'acide chlorhydrique est une réaction totale dont l'équation bilan est la suivante :

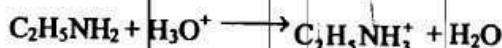


L'ionisation partielle de l'eau donne :



Puisque le pH est supérieur à 7 (pH=10,3) le milieu est basique ; donc contient des molécules de $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$. Les espèces en solution sont alors : $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$, $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$, H_3O^+ , Cl^- , OH^- et H_2O .

D'autre part les ions Cl^- ne participant pas à la réaction, l'équation bilan prend la forme :



Comme le milieu est basique, la quantité d'acide chlorhydrique ajouté a disparu complètement dans le mélange. Le tableau ci-dessous indique les quantités mises en présence et les quantités dans l'état d'équilibre.

	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$	H_3O^+	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$	H_2O
initialement	$C_B V_B$	$C_A V_A$		
équilibre	$C_B V_B - C_A V_A$	0	$C_A V_A$	

Le volume du mélange étant $V_A + V_B$, on a alors :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = \frac{C_B V_B - C_A V_A}{V_A + V_B} = \frac{10^{-1} \times 20 - 5 \cdot 10^{-2} \times 30}{50} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 30}{50} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La concentration en ion Cl^- qui ne réagit pas est :

$$[\text{Cl}^-] = \frac{n_{\text{HCl}}}{V_A + V_B} = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

D'après les données :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-10,3} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned} [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] &= 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] &= 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{Cl}^-] &= 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{H}_3\text{O}^+] &= 5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

La constante d'acidité du couple $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+/\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$:

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]}$$

soit :

$$K_a = \frac{5 \cdot 10^{-11} \times 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}} = 1,66 \cdot 10^{-11}$$

or :

$$\text{p}K_a = -\text{Log} K_a$$

soit :

$$\text{p}K_a = -\text{Log} 1,66 \cdot 10^{-11} = 10,8$$

$$\boxed{\text{p}K_a = 10,8}$$

Remarque : la relation d'Henderson donne :

$$\text{p}K_a = \text{pH} - \text{Log} \frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]} = 10,8$$

3_ Identification de deux solutions acides.

Deux flacons sans étiquettes, contiennent des solutions acides S_1 et S_2 de concentrations molaires inconnues.

1° Pour les identifier, on procède aux mesures suivantes :

- mesure de pH
 - pour S_1 : $\text{pH} = 2,5$
 - pour S_2 : $\text{pH} = 2$
- dosage de 25 cm^3 de chaque solution à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_B = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - pour S_1 , l'équivalence est atteinte après addition d'un volume $V_{BE_1} = 30 \text{ cm}^3$
 - pour S_2 , l'équivalence est atteinte après addition d'un volume $V_{BE_2} = 5 \text{ cm}^3$
- a) Calculer les concentrations molaires C_1 et C_2 de S_1 et S_2 respectivement.
- b) Montrer que l'un des flacons contient un monoacide fort et l'autre un monoacide faible.
- c) Quel indicateur coloré paraît le plus approprié à chaque dosage ?
 - rouge de méthyle : zone de virage $4,2 \leq \text{pH} \leq 6,2$
 - rouge de phénol : zone de virage $6,8 \leq \text{pH} \leq 8,4$
 - phénolphthaléine : zone de virage $8,0 \leq \text{pH} \leq 10,0$

2° Le monoacide faible est noté AH.

- a) Ecrire l'équation-bilan de sa réaction avec l'eau.

b) Recenser les espèces chimiques présentes dans la solution et calculer leurs concentrations.

c) Déterminer le pKa du couple AH/A⁻ et identifier l'acide AH en consultant le tableau ci-dessous.

Couple AH/A ⁻	pKa
CH ₂ Cl-COOH/CH ₂ Cl-COO ⁻	2,5
HCOOH/HCOO ⁻	3,7
C ₆ H ₅ COOH/C ₆ H ₅ COO ⁻	4,2
CH ₃ COOH/CH ₃ COO ⁻	4,8

3° Quel volume de la solution d'hydroxyde de sodium faudrait-il ajouter à 20cm³ de la solution d'acide AH pour atteindre la demi-équivalence ? Quel serait alors le pH de la solution obtenue ?

Solution

1° a) A l'équivalence la quantité de soude ajoutée est égale à la quantité d'acide contenu dans le volume V_A=25cm³ :

soit :

$$n_{\text{soude}} = n_{\text{acide}}$$

$$C_B V_{BE} = C_A V_A$$

d'où :

$$C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A}$$

- pour S₁ :

$$C_1 = \frac{0,05 \times 30}{25} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

- pour S₂ :

$$C_2 = \frac{0,05 \times 5}{25} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_2 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Pour un monoacide fort de concentration molaire C_A, la réaction avec l'eau est totale et [H₃O⁺] = C_A

- pour S₁ :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,5} = 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} < C_1. \text{ La}$$

réaction avec l'eau n'est pas totale ; S₁ contient un monoacide faible.

- pour S₂ :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = C_2$$

S₂ contient un monoacide fort.

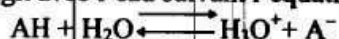
Autrement :

$$\text{pH} = -\text{Log} C_2 \text{ pour } S_2$$

c) - Lors du dosage de la solution d'acide faible (S₁) par une base forte NaOH, le pH au point d'équivalence est basique (pH_E > 7). L'indicateur le mieux adapté est la phénolphtaléine.

- Lors du dosage d'un acide fort (S₂) par une base forte NaOH le pH à l'équivalence est neutre (pH_E = 7). L'indicateur le plus approprié est le rouge de phénol.

2° a) L'acide faible AH réagit avec l'eau suivant l'équation :



b) En plus des molécules d'eau la solution contient les espèces : AH, A⁻, H₃O⁺ et OH⁻.

données :

$$\text{pH} = 2,5$$

soit: $C = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
 $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,5} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
 $[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{3,2 \cdot 10^{-3}} = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Equation de la neutralité électrique :

or: $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] + [\text{OH}^-]$
 $[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$
d'où: $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Equation de conservation de la quantité de matière:

ou: $C = [\text{AH}] + [\text{A}^-]$
soit : $[\text{AH}] = C - [\text{A}^-]$
 $[\text{AH}] = 6 \cdot 10^{-2} - 3,2 \cdot 10^{-3} = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{OH}^-] = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{A}^-] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{AH}] = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

c) La constante d'acidité du couple AH/A^- .

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

soit : $K_a = \frac{3,2 \cdot 10^{-3} \times 3,2 \cdot 10^{-3}}{5,7 \cdot 10^{-2}} = 1,79 \cdot 10^{-4}$

on a alors :

$$\text{p}K_a = -\text{Log}K_a = 3,7$$

$$\boxed{\text{p}K_a = 3,7}$$

Le $\text{p}K_a$ est celui du couple $\text{HCOOH} / \text{HCOO}^-$; donc le monoacide faible est l'acide méthanoïque HCOOH .

3° A la demi-équivalence la quantité de soude ajoutée est égale à la moitié de la quantité d'acide méthanoïque de volume $V_A = 20 \text{ cm}^3$. On a alors :

$$C_B V_B = \frac{C_A V_A}{2}$$

d'où : $V_B = \frac{C_A V_A}{2C_B}$

soit : $V_B = \frac{6 \cdot 10^{-2} \times 20}{2 \times 0,05} = 12 \text{ cm}^3$

$$\boxed{V_B = 12 \text{ cm}^3}$$

A la demi-équivalence le pH est égale au $\text{p}K_a$ du couple acide/base ; donc $\text{pH} = 3,7$.

DATE	DESCRIPTION	AMOUNT	BALANCE
1900			
1901			
1902			
1903			
1904			
1905			
1906			
1907			
1908			
1909			
1910			
1911			
1912			
1913			
1914			
1915			
1916			
1917			
1918			
1919			
1920			
1921			
1922			
1923			
1924			
1925			
1926			
1927			
1928			
1929			
1930			
1931			
1932			
1933			
1934			
1935			
1936			
1937			
1938			
1939			
1940			
1941			
1942			
1943			
1944			
1945			
1946			
1947			
1948			
1949			
1950			
1951			
1952			
1953			
1954			
1955			
1956			
1957			
1958			
1959			
1960			
1961			
1962			
1963			
1964			
1965			
1966			
1967			
1968			
1969			
1970			
1971			
1972			
1973			
1974			
1975			
1976			
1977			
1978			
1979			
1980			
1981			
1982			
1983			
1984			
1985			
1986			
1987			
1988			
1989			
1990			
1991			
1992			
1993			
1994			
1995			
1996			
1997			
1998			
1999			
2000			
2001			
2002			
2003			
2004			
2005			
2006			
2007			
2008			
2009			
2010			
2011			
2012			
2013			
2014			
2015			
2016			
2017			
2018			
2019			
2020			
2021			
2022			
2023			
2024			
2025			
2026			
2027			
2028			
2029			
2030			
2031			
2032			
2033			
2034			
2035			
2036			
2037			
2038			
2039			
2040			
2041			
2042			
2043			
2044			
2045			
2046			
2047			
2048			
2049			
2050			
2051			
2052			
2053			
2054			
2055			
2056			
2057			
2058			
2059			
2060			
2061			
2			