maxi. Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

Sc Maths

2ème Année du Baccalauréat

Sciences Mathématiques, Fillière A et B
Option Français

Tome 2

Cours & exercices corrigés

2ème Bac Sc-Maths

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

maXi Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

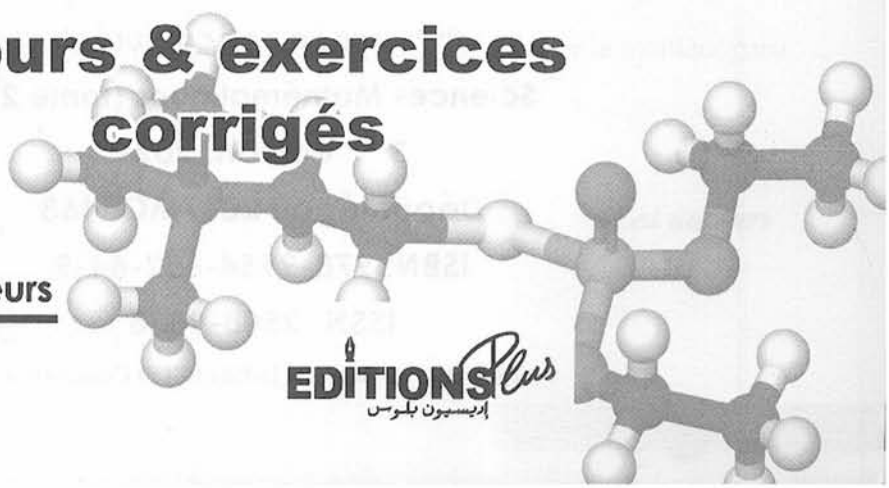
Tome 2

2ème année baccalauréat

Sciences Mathématiques, filières A et B

Option Français

Cours & exercices corrigés



Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Préface

Ce deuxième volume traite de la deuxième partie du programme de la deuxième année du baccalauréat, série sciences mathématiques *A* et *B* option langue française.

Sa conception répond à plusieurs nécessités:

- Vous permettre de mettre en oeuvre vos connaissances du cours vu en classe.
- Vous apprendre à rédiger la résolution d'un exercice.
- Développer vos capacités en vous confrontant à des situations difficiles, exigeant connaissances, organisation et méthode.

Chaque chapitre comprend les rubriques suivantes:

- Un rappel de cours, souvent détaillé et axé sur les notions fondamentales.
- Un large éventail d'exercices progressifs, allant des plus simples, Q.C.M et exercices. d'application; aux plus difficiles, ayant fait l'objet de contrôles en classe ou posés aux épreuves de l'Examen National du Baccalauréat.
- Des corrigés détaillés accompagnent tous les exercices, avec des commentaires, indiquant clairement l'étape de leur résolution; ce qui vous permet de juger de la qualité de votre apprentissage, de remédier aux diffultés rencontrées, et d'aborder sereinement de nouvelles acquisitions.

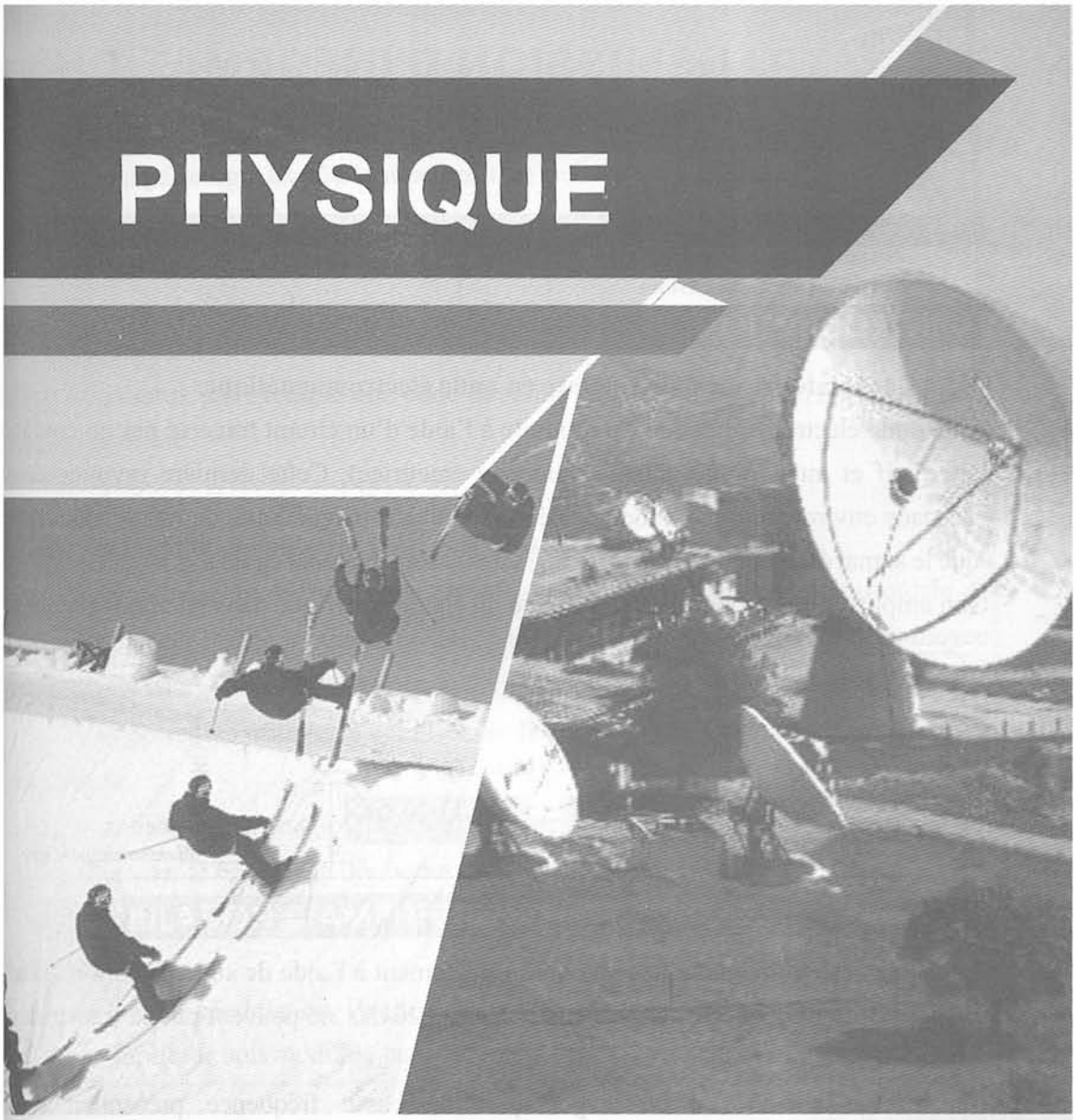
Vous disposez ainsi d'un outil. dont, nous espérons, vous saurez tirer le meilleur parti.

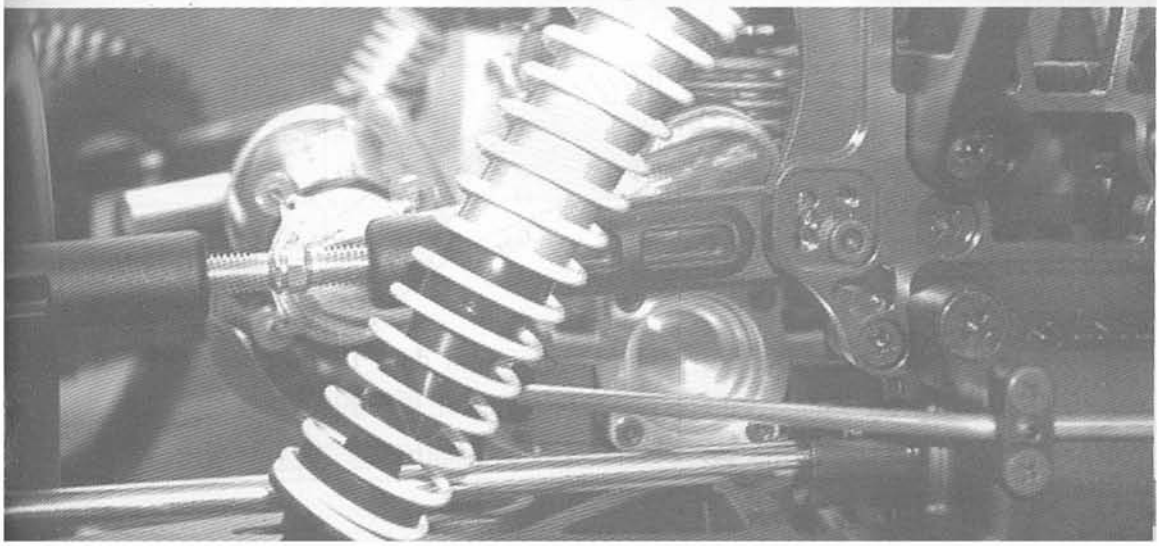
Les auteurs

SOMMAIRE

	Pages
Physique	
1- Transmission d'un signal par modulation d'amplitude.	6
2- Lois de Newton.	24
3- Chute verticale d'un solide.	49
4- Mouvement de projectile dans le champ de pesanteur uniforme.	83
5- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme.	107
6- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.	119
7- mouvement des satellites et planètes.	134
8- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.	158
9- Les oscillateurs mécaniques.	168
10- L'atome et la mécanique de Newton.	230
Chimie	
1- Évolution spontanée d'un système chimique.	240
2- Évolution spontanée dans une pile électrochimique.	254
3- Transformation électrochimique forcée : électrolyse.	278
4- Chimie organique.	297

PHYSIQUE



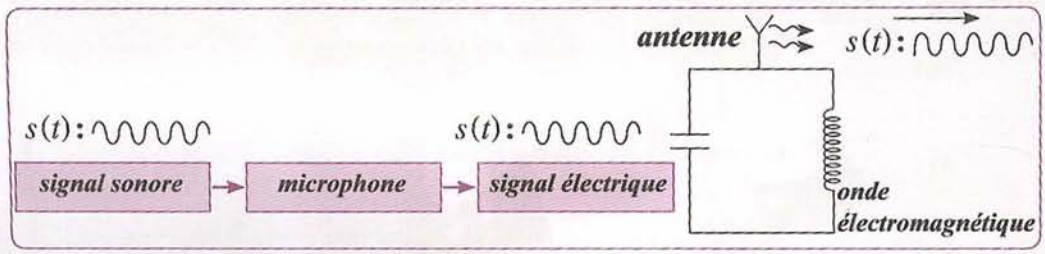


1 TRANSMISSION D'INFORMATIONS MODULATION D'AMPLITUDE

I- INTRODUCTION:

1 Conversion d'un signal sonore en onde électromagnétique:

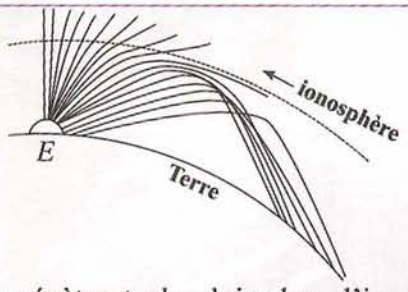
Une onde électromagnétique est produite à l'aide d'un circuit traversé par un courant alternatif et muni d'une antenne (antenne émettrice). Cette dernière rayonne dans l'espace environnant une onde appelée onde électromagnétique, de même fréquence que le signal électrique, dans l'air, à une vitesse sensiblement égale à $C = 3.10^8 m.s^{-1}$ et son amplitude est proportionnelle à celle du signal électrique dans le circuit oscillant.



2 Les ondes électromagnétiques de basse fréquence:

Les ondes électromagnétiques obtenues directement à l'aide de signaux sonores dont la gamme de fréquence est située entre $2Hz$ et $20kHz$ ne peuvent pas se transmettre efficacement.

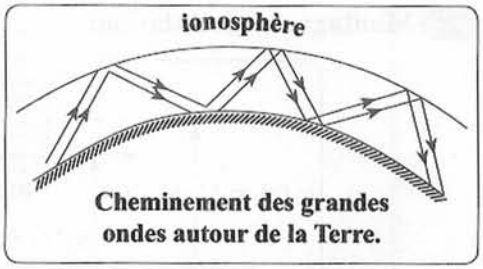
En effet, les ondes électromagnétiques de basse fréquence présentent trois inconvénients:



Les petites ondes pénètrent plus loin dans l'ionosphère que les précédentes avant de revenir vers le sol.

Par suite, elles sont plus fortement absorbées.

- Elles sont fortement absorbées par l'ionosphère.
- Le brouillage de signaux dû à la superposition de plusieurs signaux captés simultanément par un même récepteur.
- La longueur de l'antenne voisine la $\frac{\lambda}{2}$ pose un autre problème:



Cheminement des grandes ondes autour de la Terre.

Pour transmettre par exemple une onde de faible fréquence $N = 10kHz$, la longueur de l'antenne est:

de: $\ell \simeq \frac{\lambda}{2} = \frac{C}{2N} = \frac{3.10^8}{2.10^4} = 15km$!

3 Comment transmmettre un signal basse fréquence?

Le message sonore basse fréquence est véhiculé à l'aide d'une onde sinusoïdale de haute fréquence, l'onde porteuse, celle-ci jouant en quelque sorte le rôle d'un moyeu de transport chargé d'acheminer le courrier (le signale sonore à transmettre).

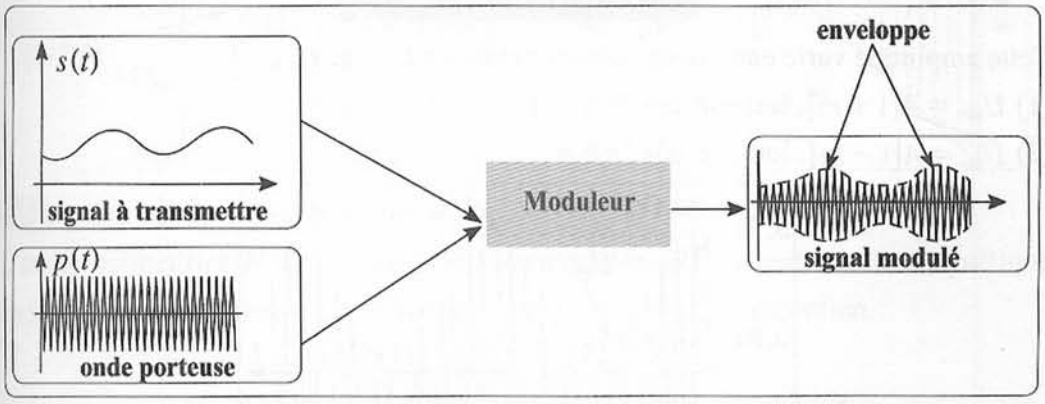
Les ondes porteuses utilisées à cet effet ont des fréquences élevées et leur portée est importante.

Chaque station d'émission possède une porteuse fréquence F qui lui est propre, ce qui permet d'éviter le brouillage des ondes émises.

II- MODULATION D'AMPLITUDE:

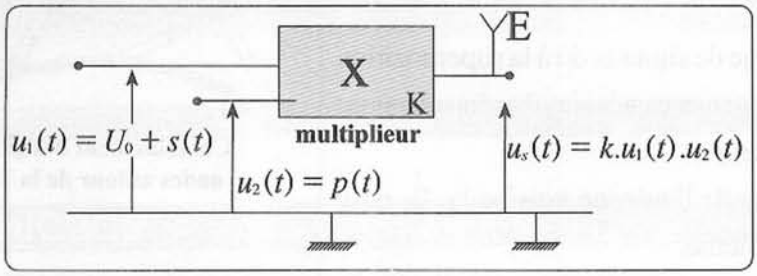
1 Principe:

Dans ce type de modulation, l'onde porteuse est modulée en amplitude de telle sorte que son amplitude soit modifiée par le signal à transmettre, appelé signal modulant.



L'enveloppe du signal modulé doit reproduire les variations du signal modulant

2 Montage de modulation:



Pour que la modulation soit correcte, on ajoute au signal $s(t)$ une tension continue U_0 de valeur appelée: La composante continue ou la tension de décalage.

3 Expression de l'amplitude du signal modulé:

L'expression du signal $U_s(t)$ à la sortie du multiplieur est:

$$u_s(t) = K.u_1(t).u_2(t) = K[U_0 + s(t)].p(t) \quad ; \; s(t) = S_m \cos 2\pi ft \; ; \; p(t) = \frac{p}{m} \cos 2\pi Ft$$
$$= K[U_0 + S_m \cos 2\pi f.t]P_m . \cos 2\pi Ft$$

En remplaçant $s(t) = S_m . \cos 2\pi ft$ et $P_p(t) = P_m . \cos 2\pi Ft$, et en factorisant par le terme $K.U_0.P_m$; il vient:

$$u_s(t) = KU_0P_m\left[1 + \frac{S_m}{U_0} \cos 2\pi ft\right] \cos 2\pi + Ft .$$

En posant: $m = \frac{S_m}{U_0}$ appelé coefficient de modulation et $A = KUP_m$; on écrit:

$$U_S(t) = \underbrace{A.[1 + m \cos 2\pi ft]}_{\text{amplitude } U(t)} \cos 2\pi F.t$$

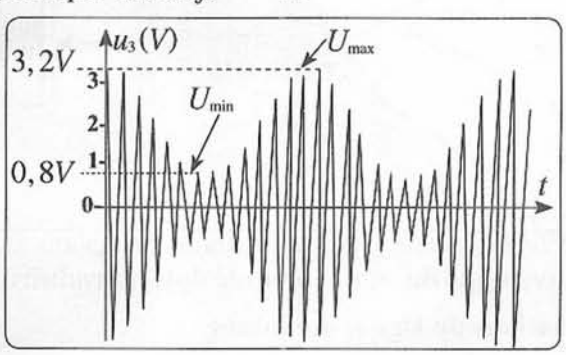
Le signal modulé a la même fréquence que la porteuse, et, son amplitude a pour expression:

$$U(t) = A[1 + m. \cos 2\pi f.t]$$

Cette amplitude varie entre deux valeurs extrêmes U_{max} et U_{min}:

(1) $U_{max} = A[1 + m]$, lorsque $\cos 2\pi ft = 1$

(2) $U_{min} = A[1 - m]$, lorsque $\cos 2\pi ft = -1$.



4 Expression de m en fonction de U_{max} et U_{min}:

Les expressions (1) et (2) donnent: $\frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+m}{1-m}$.

d'où: $m(U_{max} + U_{min}) = U_{max} - U_{min}$

alors: $m = \frac{U_{ma} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$

Exemple: sur la figure:

U_{max} et $U_{min} = 0,8V$

alors: $m = \frac{3,2 - 0,8}{3,2 + 0,8} = 0,6$.

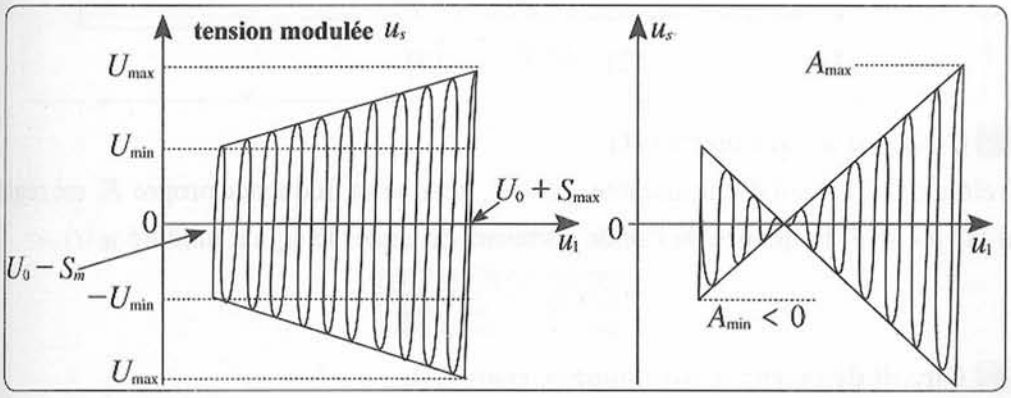
5 Conditions d'une bonne modulation:

L'obtention d'une bonne modulation d'amplitude, nécessite les deux conditions suivantes:

$$F >> f \text{ et } m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} < 1$$

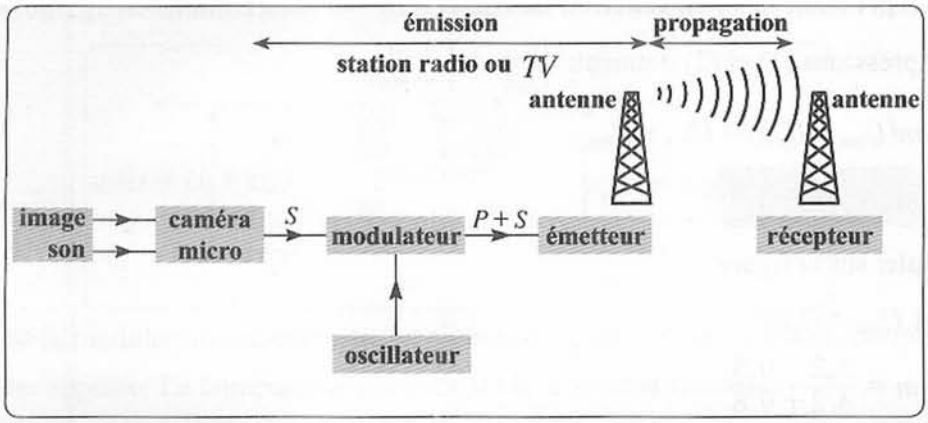
6 Utilisation de la méthode du trapèze:

La qualité de modulation peut être vérifiée graphiquement en visualisant à l'oscilloscope les variations de la tension modulée $u_s(t)$ en fonction de $s(t)$ on $u_1(t) = s(t) + u_0$.



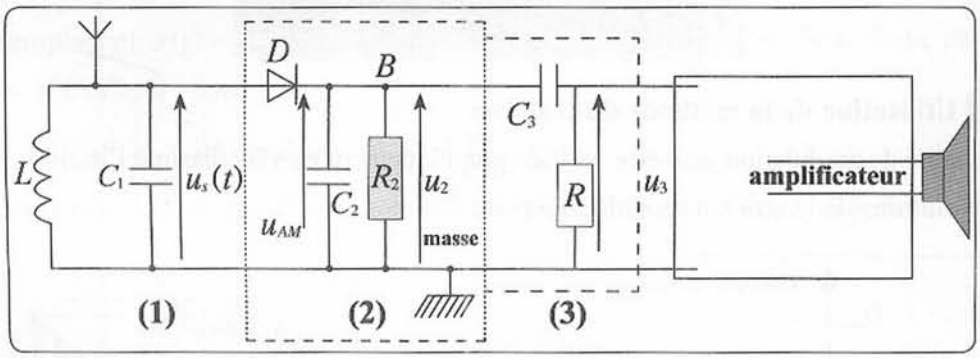
7 Emission du signal modulé:

L'antenne émettrice E transforme la tension modulée $u_s(t)$ en onde électromagnétique se propageant à la vitesse $c = 3.10^8 m.s^{-1}$ jusqu'au circuit de réception.



III- DEMODULATION D'UN SIGNAL MODULÉ D'AMPLITUDE

La station ou poste de réception de l'onde hertzienne portant le message à transmettre comporte une chaîne de circuits électriques.



1 Circuit d'accord circuit (1):

Le circuit (LC) muni d'une antenne, permet; lorsque sa fréquence propre F_0 est réglée sur la valeur F fréquence de l'onde porteuse, de capter le signal modulé $u_s(t)$.

$$F = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

2 Circuit détecteur d'enveloppe (circuit (2)):

La détection de l'enveloppe du signal $u_s(t)$ reçu se fait en deux étapes:

- **Le redressement**: la diode (D) permet d'éliminer les alternances négatives du signal obtient alors le signal $u_{AM}(t)$.

- **Elimination de la porteuse**: (filtre passe-bas)

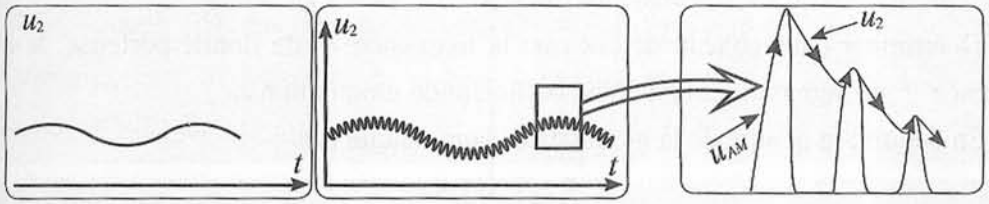
La tension $u_2(t)$ obtenue à la sortie de ce circuit est une reproduction du signal $s(t)$ et à transmettre.

Cette opération se fait grâce à la charge du condensateur C_1 par la tension u_{AM} et sa

décharge à travers la résistance R_1.

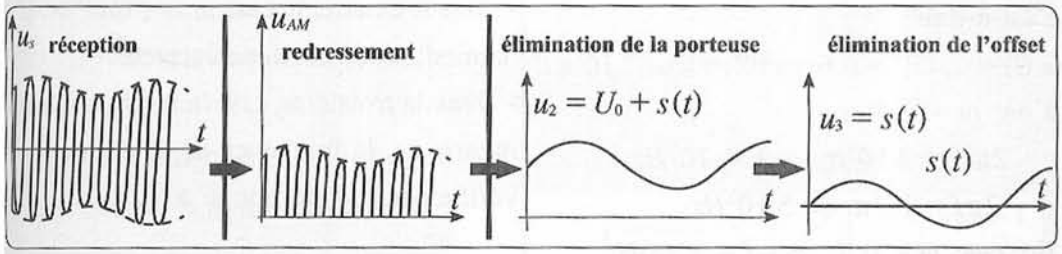
Cette décharge ne doit être ni trop rapide ni trop lente. On montre que la constante de temps du circuit (R_1C_1) doit vérifier la propriété:

$$T_P = \frac{1}{F} << \tau = R_2C_2 < T_s = \frac{1}{f}$$



3 Suppression de la composante continue: (filtre passe-haut)

Le circuit (R_3C_3) permet l'élimination de la tension continue U_0 et l'obtention du signal modulant $s(t)$ qui est ensuite amplifié puis converti à l'aide du haut-parleur, au signal sonore étudié.



1 On donne ci-après l'expression de la tension obtenue à la sortie du modulateur:

1er cas: $u_s(t) = A[1 + \cos(2\pi.10^4\pi t)]\cos(2\pi.10^5 t)$.

2eme cas: $u_s(t) = 0,9[2 + 1,2\cos(2\pi.10^4 t]\cos(2.10^5\pi t)$.

3ème cas: $u_s(t) = A[1 + 0,7\cos(24\pi.10^2 t)]\cos(2,4\pi.10^3 t)$.

1- Déterminer dans chacun de ces cas; la fréquence F de l'onde porteuse, la fréquence f du signal modulant et la coefficient de modulation m.

2- En déduire la qualité de la modulation dans chaque cas.

Solution

1- 1er cas: $F = 10^5 Hz$, $f = 10^4 .Hz$ et $m = 1$.

2ème cas: $u_s(t)$ s'écrit:

$u_s(t) = A[1 + m.\cos 2\pi ft]\cos(2\pi Ft)$.

c'est-à-dire:

$u_s(t) = 0,45[1 + 0,6\cos 10^4\pi t]\cos(2.10^5\pi t)$

d'où: $m = 0,6$,

$2\pi F = 2.10^5\pi \Longrightarrow F = 10^5 Hz$

$2\pi f = 10^4\pi \Longrightarrow 5.10^3 Hz$.

3ème cas: $m = 0,7$, $F = f = 1200Hz$.

2- Qualité de la modulation.

- Dans le premier cas: la modulation est incorrecte car m ne vérifie pas la condition $m < 1$.
- Dans le deuxième cas: $m < 1$ et $F >> f$, la modulation est donc correcte.
- Dans la troisième cas: la modulation est incorrecte, la fréquence de la porteuse ne vérifie pas la condition $F >> f$.

2 On considère un signal sinusoïdal de basse fréquence f.

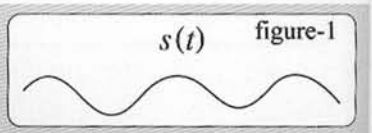


figure-1

On désire transmettre ce signal en utilisant la technique de modulation d'amplitude à l'aide d'une onde porteuse de haute fréquence.

En utilisant le même montage et en changeant la valeur de tension de décalage U_0, on obtient les signaux modulés $u_s(t)$ représentés sur la figure (2).

1- Dans quel cas la modulation est-elle correcte? Justifier votre réponse.

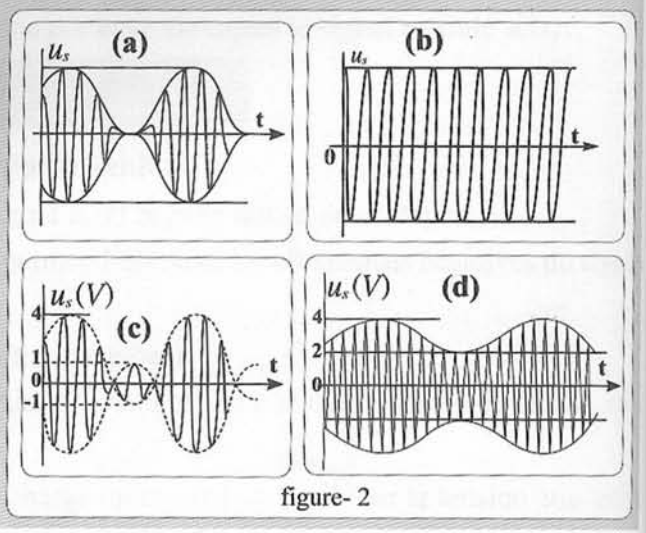


figure- 2

2- Déterminer pour chacun de ces cas, le taux de modulation exprimé par:

$m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$, où U représente l'amplitude du signal modulé.

Solution

1- L'expérience (d) que la modulation est correcte, car, l'enveloppe du signal modulé est fidèle à l'allure du signal à transmettre.

2- **Expérience (a)**: $U_{min} = 0 \Longrightarrow m = 1$: sur modulation.

- **Expérience (b)**: $U_{min} = U_{max} \Longrightarrow m = 0$: absence de modulation.

- **Expérience (c)**: $U_{min} < 0$

$m = \frac{4-(-1)}{4+(-1)} > 1$

- **Expérience (d)**: $U_{min} < U_{max} \Longrightarrow m < 1$: modulation correcte

$m = \frac{4-2}{4+2} = 0,33.$

3 Pour transmettre un signal sonore $s(t)$ de forme sinusoïdale et de fréquence f. On utilise le montage de la figure 1.

On donne: $p(t) = P_m \cos 2\pi Ft$ et $s(t) = S_m \cos 2\pi ft$.

1- Quel est le nom de la composante de symbole (X) dans ce circuit?

2- En utilisant la figure 2 déterminer la fréquence f du signal étudié et la fréquence F de l'onde porteuse.

3- Montrer que l'amplitude U du signal modulé s'écrit sous la forme:

$U = K.P_m.U_0[1 + m.\cos 2\pi f.t]$

4- En déduire l'expression du coefficient de modulation m; en fonction de U_{max} et U_{min}.

5- Justifier que la modulation est correcte.

figure- 1

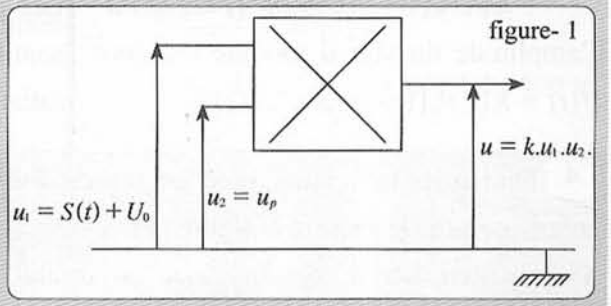
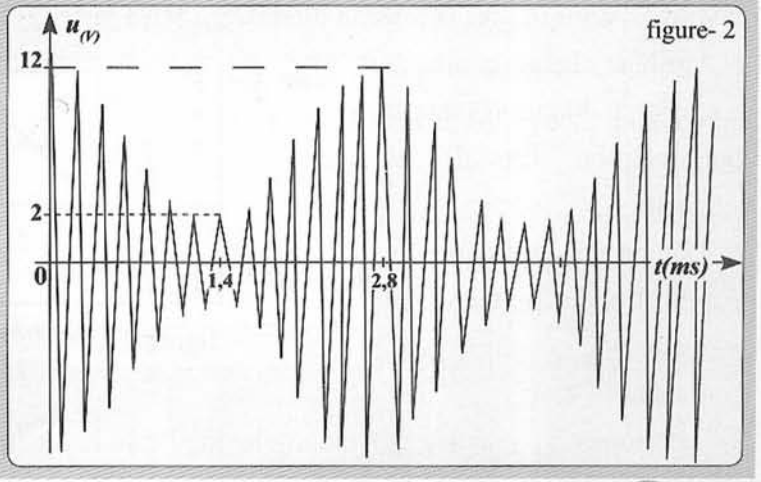


figure- 2



Solution

1- La composante portant le symbole (X) s'appelle le multiplieur.

2- D'après la figure, on constante que:

- Pour le signal $s(t)$:

$$T_s = 2,8ms = 2,8.10^{-3}s \Longrightarrow f = \frac{1}{T_s} = 357$$

- Pour la porteuse:

$$7T_p = 1,4ms \Longrightarrow T_p = 0,2ms = 2.10^{-4}s.$$

D'où: $F = 5.10^3 Hz$.

3- En remplaçant $p(t)$ et $s(t)$ par leurs expressions; dans l'expression du signal modulé obtenue à la sortie du multiplieur on a:

$$\begin{aligned} u_s(t) &= Ku_1(t).u_2(t) = K[U_0 + s(t)].p(t) \\ &= K[U_0 + S_m.\cos 2\pi f.t]P_m.\cos 2\pi F.t \\ &= KU_0P_m\left[1 + \frac{S_m}{U_0}\cos 2\pi f.t\right].\cos 2\pi F.t \\ &= KU_0P_m[1 + m\cos 2\pi f.t]\cos 2\pi F.t \end{aligned}$$

L'amplitude du signal modulé est donc:

$$U(t) = KU_0P_m[1 + m.\cos 2\pi f.t].$$

4- La valeur maximale de cette amplitude est obtenue en posant $\cos 2\pi f.t = 1$:

$$U_{max} = KP_mU_0[1 + m] \quad (1)$$

Et la valeur minimale est obtenue en posant $\cos 2\pi f.t = -1$:

$$U_{min} = KP_mU_0[1 - m] \quad (2).$$

Divisons (1) par (2): $\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1-m}{1+m}$.

$$(1+m)U_{min} = (-1m)U_{max}.$$

$$m(U_{max} + U_{min}) = U_{max} - U_{min}.$$

D'où: $m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$.

5- La courbe du signal modulant permet de lire:

$U_{max} = 12V$ et $U_{min} = 2V$;

alors: $m = \frac{12-2}{12+2} = 0,71$.

Les deux conditions $m < 1$ et $\frac{F}{f} >> 1$, sont bien vérifiées, la modulation est donc satisfaisante.

4 On réalise la modulation d'amplitude d'une onde porteuse à l'aide d'un signal sonore comme le montre la figure (1).

à l'aide d'un oscilloscope bicourbe on visualise sur la voie X la tension $u_1(t)$ et sur la voie Y, on visualise la tension modulée $u_s(t)$. figure (2).

1- Attribuer chaque courbe à la tension qui la représente. Que peut-on dire de la modulation?

2- Déterminer la fréquence F de l'onde porteuse et la fréquence f du signal modulant.

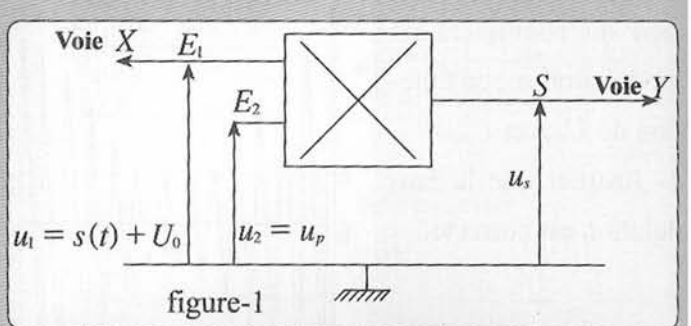
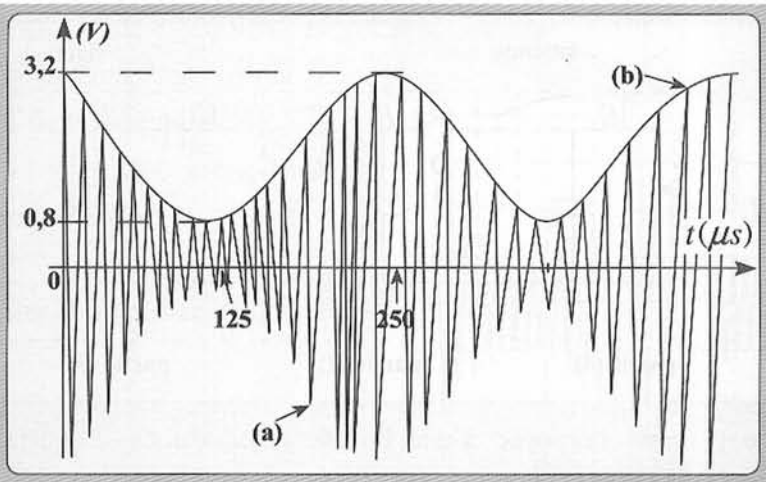


figure-1

3- Déterminer S_m puis U_0. En déduire la qualité de la modulation



Solution

1- Le signal modulant est caractérisé par une fréquence beaucoup plus faible, et par conséquent, une période beaucoup plus grande que la période de la porteuse. Il lui correspond alors la courbe (b).

Le signal modulant a une forme identique à l'enveloppe du signal modulé:

la modulation est donc correcte.

2- $f = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{250.10^{-6}} = 4KHz$

$T_p = \frac{1}{10}.125V = 12,5\mu s \Longrightarrow F = \frac{1}{T_p}$.

$F = 80KHz$

3- Exprimons les valeurs limites de la tension $u_1(t)$.

$u_1(t) = U_0 + s(t)$

$= U_0 + S_m \cos 2\pi f.t$

Alors: $U_{1max} = U_0 + S_m$;

et: $U_{1min} = U_0 - S_m$.

- La différence de deux expressions donne:

$U_{1max} - U_{1min} = 2.S_m$ d'où:

$S_m = \frac{U_{1max} - U_{1min}}{2}$.

$S_m = \frac{3,2 - 0,8}{2} = 1,2V$.

- La somme des mêmes expressions donne:

$U_{1max} + U_{1min} = 2U_0$, d'où:

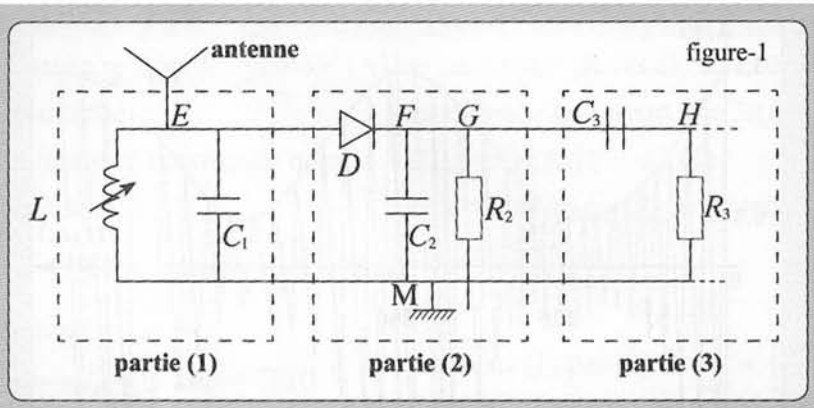
$U_0 = \frac{U_{1max} + U_{1min}}{2} = 2V$.

Le coefficient de modulation est alors:

$m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{1,2}{2} = 0,6 < 1$.

Les deux conditions ainsi réalisées ($m < 1$ et $F >> f$) montrent que la modulation est correcte.

5 Pour capter l'onde émise par une station radio, on utilise le montage simplifié contenant les circuits suivants. figure (1).



1- La partie (1) est composée d'une bobine d'inductance L variable et d'un condensateur de capacité $C_1 = 47nF$, montés en parallèle.

1.1- Quel est le rôle de la partie (1) de ce montage?

1.2- Pour capter une onde AM de fréquence $F = 160kHz$, il a fallu fixer le coefficient d'inductance de la bobine sur une valeur L_1. Calculer L_1.

2- Les deux parties (2) et (3) permettent l'obtention d'une démodulation du signal reçu. Quel est le rôle de chacune d'elles dans cette opération?

3- On visualise les tensions u_{EM}, u_{GM} et u_{HM} figure (2).

Attribuer chaque courbe à la tension qui lui convient.

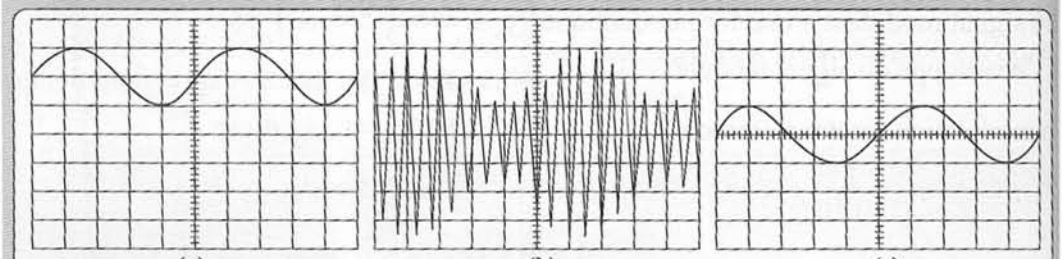


figure-2

Solution

1.1- La partie (1) permet de sélectionner le signal modulé.

1.2- La partie (1) doit réaliser la condition d'accord des fréquences $F_0 = F$ fréquence de la porteuse c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1.C_1}} = F.$$

d'où: $L_1 = \frac{1}{4\pi^2.C_1.F^2}$.

$$L_1 = \frac{1}{4\pi^2.47.10^{-9}(160.10^3)^2} \simeq 2,1.10^{-5}H$$

2- La partie (2) permet la détection de l'enveloppe du signal modulé.

La partie (3) permet de supprimer la composantes continue.

3- La courbe (a) correspond à u_{FM}, la courbe (b) à u_{EM} et (C) à u_{HM}.

6 Pour capter l'onde électromagnétique modulée représentée sur la figure (1). on utilise le dispositif représenté sur la figure (2).

1- Réception de l'onde modulée.

Sachant que la capacité C est $0,47nF$ et celle de la conductance L est $2H$:

1.1- Déterminer la fréquence f_p de l'onde porteuse.

1.2- Déterminer la fréquence f du signal modulant.

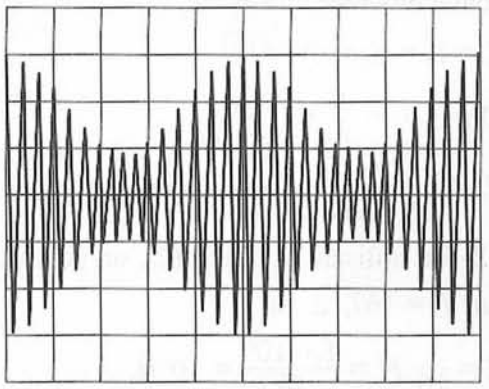


figure-1

2- Elimination de la porteuse.

On souhaite obtenir une démodulation de bonne qualité en choisissant la valeur de la capacité C_1 adaptée. La constante de temps R_1C_1 doit alors satisfaire aux conditions suivantes:

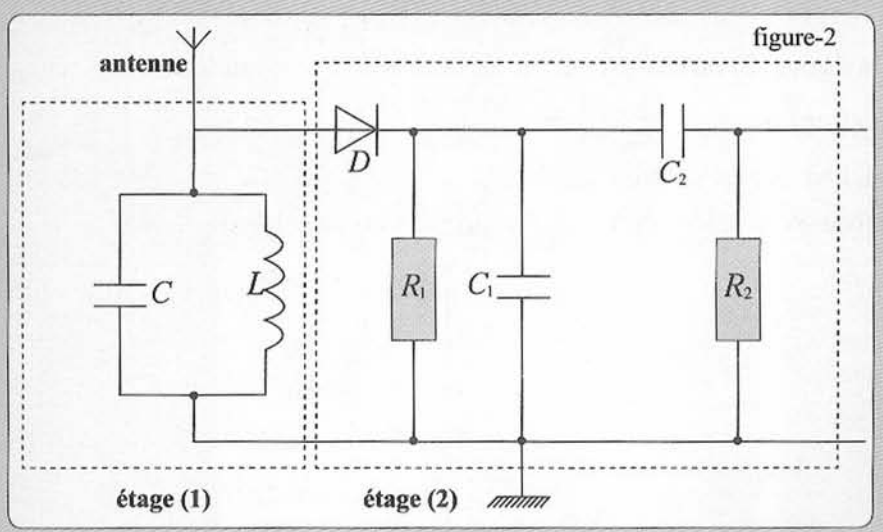
- $R_1C_1 < T_s$ avec T_s période du signal modulant;
- $R_1C_1 > 10T_p$ avec T_p période de la porteuse.

Le conducteur ohmique a une résistance $R_1 = 10k\Omega$.

Déterminer, dans la liste suivante, la valeur de la capacité C_1 permettant d'obtenir la meilleure démodulation possible.

Valeurs des capacités disponibles: $200pF$, $7nF$, $22nF$ et $220nF$.

figure-2



Solution

1.1- La condition à réaliser pour capter l'onde modulée émise est:

$T_s = T_p = T_{0s} = 2\pi\sqrt{LC}$.

Alors: $F_p = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

$F_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{2.10^{-3}.0,49.10^{-9}}} \simeq 1,6.10^5 Hz$.

1.2- En utilisant la figure (2), on constate que $T_s = 16T_p$ d'où:

$f_s = \frac{1}{16}.F_p = \frac{1,6.10^5}{16} = 10^4 Hz$.

2- Pour réaliser une bonne détection de l'enveloppe, il faut que:

$10T_p < R_1C_1 < T_s$.

on encore: $\frac{10}{F_p.R_1} < C_1 < \frac{1}{f_s.R_1}$.

$\frac{10}{1,6.10^5.10^4} < C_1 < \frac{1}{10^8}$.

$6,25.10^{-9}F < C_1 < 10^{-8}F$

$6,25nF < C_1 < 10nF$.

La valeur convenable est: $C_1 = 7nF$.

7 Pour transmettre un signal sonore $s(t)$ de fréquence $f = 4kHz$, on utilise une onde porteuse $p(t)$ de fréquence $F = 100kHz$.

Le montage utilisé est représenté sur la figure (1).

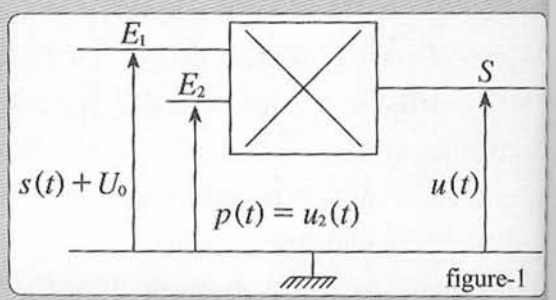


figure-1

On donne: $s(t) = S_m.\cos 2\pi f.t$.

$p(t) = P_m.\cos 2\pi F.t$.

$u(t) = k.u_1.u_2$.

1- Montrer que l'amplitude U de la tension modulé $u(t)$ peut s'écrire:

$U(t) = as(t) + b$.

2- Sur la figure (2) on représente les variations de l'amplitude U en fonction de s.

2.1- Montrer que: $m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$.

2.2- Calculer m. En déduire U_0.

2.3- Retrouver la valeur de U_0 en l'exprimant en fonction de a et b.

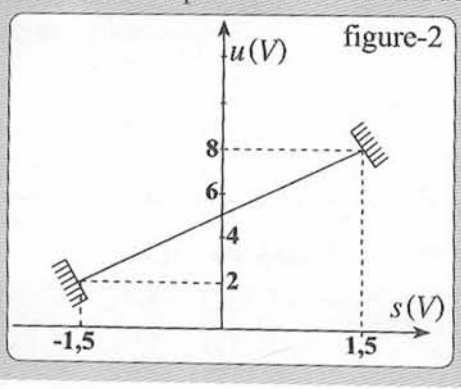


figure-2

Solution

1- En tenant compte des expressions de $s(t)$ et $p(t)$, la tension modulée $u(t)$ s'écrit:

$$u(t) = k[U_0 + s(t)]p(t) = k[U_0 + S_m] = kP_m[U_0 + s(t)].\cos 2\pi F.t$$

D'où: $U(t) = kP_m[U_0 + s(t)]$

$$= kP_m(st) + kP_mU_0$$

$$= a.s(t) + b$$

2.1- $U_{max} = a.S_m + b$ et $U_{min} = -aS_m + b$.

La somme de ces expressions donne:

$U_{max} + U_{min} = 2b = 2kP_mU_0$ (1)

et leur différence donne:

$U_{max} - U_{min} = 2aS_m = 2kP_mS_m$ (2).

En divisant (2) par (1) on obtient:

$$\frac{2kP_m.S_m}{2kP_m.U_0} = \frac{S_m}{U_0} = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$$

c'est-à-dire: $m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$.

2.2- $m = \frac{8-2}{8+2} = 0,6$; $U_0 = \frac{S_m}{m} = \frac{1,5}{0,6}$

$$U_0 = 2,5V$$

2.3- D'après la question (1) on a:

$a = kP_m$ et $b = kP_mU_0$.

alors: $U_0 = \frac{b}{a}$.

Graphiquement: $a = \frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{8-2}{3} = 2$ et $b = 5V$.

D'où: $U_0 = \frac{5}{2} = 2,5V$.

8 La figure (1) représente le circuit de modulation d'amplitude utilisé pour transmettre un signal sinusoïdal; $s(t) = S_m \cos 2\pi f.t$ à l'aide d'une onde porteuse $p(t) = P_m \cos 2\pi Ft$ de haute fréquence.

On donne: $f = 1kHz$ et $F = 20kHz$.

On applique, à l'entrée E_1 du multiplieur la tension $u_1(t)$ et à l'entrée E_2 la tension $u_2(t)$ telles que:

$u_1(t) = s(t) + U_0$ et $u_2(t) = p(t)$.

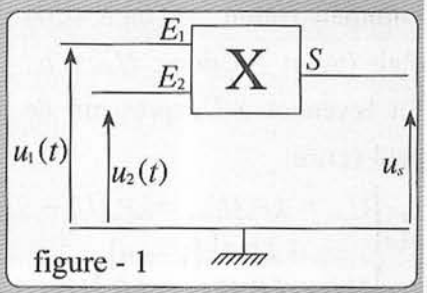


figure - 1

La tension obtenue à la sortie est: $u_s(t) = k.u_1(t)u_2(t)$.

Sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe, on obtient les tensions $u_1(t)$ et $u_s(t)$. Et, en utilisant le mode $(X-Y)$ pour éliminer le temps, on visualise u_s en fonction de u_1.

Le graphe obtenu est représenté sur la figure (2).

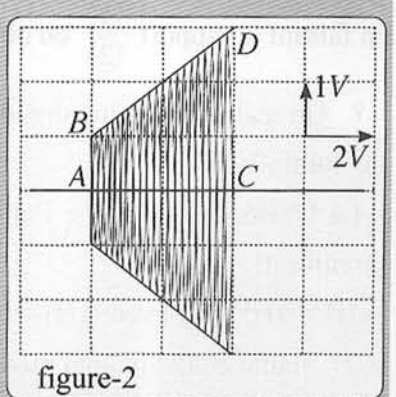


figure-2

1- Montrer que le coefficient de modulation défini par le rapport $m = \frac{S_m}{U_0}$ peut être exprimé par la relation

suivante: $m = \frac{H-h}{H+h}$, H étant la distance CD et h étant la distance AB.

2- Calculer m. Que peut-on déduire?

3- Déterminer, en exploitant le graphe, la valeur de S_m; amplitude du signal à transmettre.

4- En déduire la valeur de la tension de décallage.

Solution

1- La tension de sortie a pour expression:

$$u_s(t) = k.u_1(t).p(t)$$
$$= kP_m.u_1(t).\cos 2\pi F.t$$

Son amplitude $U(t)$ est alors:

$$U(t) = kP_m u_1(t) = kP_m.[U_0 + S_m \cos 2\pi f.t].$$

- Lorsque $u_1(t)$ est maximale (point C), alors $U_s(t)$ est aussi maximale (point D), donc $U_{max} = H$.

- De la même manière, lorsque $u_1(t)$ est minimale (point A), on a $U_s(t)$ est minimale (point B), donc: $U_{min} = h$.

En revenant à l'expression de $U(t)$ on peut écrire:

$$①\begin{cases} U_{min} = kP_m U_{1min} = kP_m[U_0 - S_m] \\ \quad = kP_m U_0[1-m] \end{cases}$$

$$②\begin{cases} U_{max} = kP_m U_{1max} = kP_m[U_0 + S_m] \\ \quad = kP_m U_0[1+m] \end{cases}$$

En faisant le rapport $\frac{①}{②}$ on obtient:

$$\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1-m}{1+m}$$

donne:

$$m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} = \frac{H-h}{H+h}.$$

2- $m = \frac{3-1}{3+1} = 0,5$, la modulation est correcte.

3- Sur l'axe des abscisses:

au point C: $u_1(C) = U_0 + S_m$ ③.

et au point A: $u_1(A) = U_0 - S_m$ ④.

La différence donne:

$$AC = (U_0 + S_m) - (U_0 - S_m)$$
$$= 2S_m$$

Ce qui donne: $S_m = \frac{AC}{2} = 2V$.

4- La tension de décalage est alors:

$$U_0 = \frac{S_m}{m} = 4V.$$

9 On réalise la modulation d'amplitude en utilisant un circuit intégré jouant le rôle de multiplieur.

- La tension appliquée à l'entrée E_1 de ce circuit est:

$u_1(t) = s(t) + U_0$ avec: $s(t) = S_m.\cos(2\pi f_s.t)$

$s(t)$: signal étudié (signal modulant).

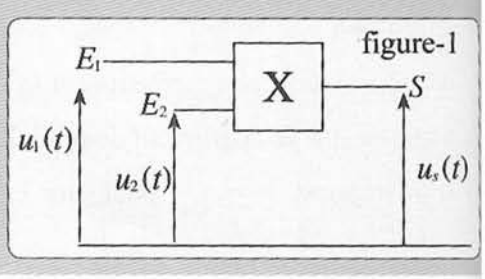


figure-1

U_0: composante continue.

- La tension appliquée à l'entrée E_2 est: $u_2(t) = U_m.\cos(2\pi.F_p.t)$.

F_p: fréquence de l'onde porteuse.

- La tension obtenue à la sortie du miltiplieur est: $u_s(t) = k.u_1(t).u_2(t)$.

k: constante dépendant du multiplieur.

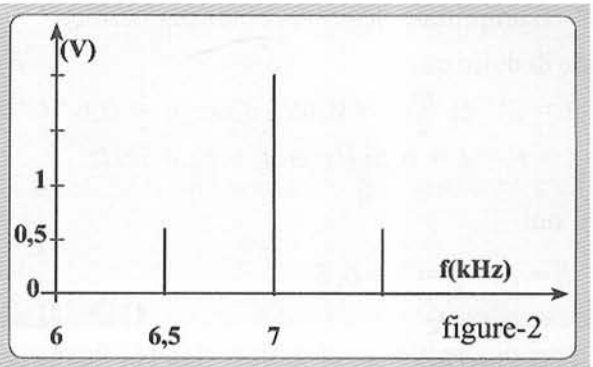


figure-2

On rappelle que: $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}.[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

1- Montrer que la tension $u_s(t)$ peut s'écrire sous la forme:

$u_s(t) = \frac{A.m}{2}.\cos(2\pi.f_1.t) + A.\cos(2\pi f_2.t) + \frac{A.m}{2}.\cos(2\pi.f_3.t)$.

2- La figure (2) représente le spectre en fréquence du signal modulé $u_s(t)$, composé de trois raies de fréquences f_1, f_2 et f_3.

Déterminer la valeur de m et f_s.

Que peut-on conclure?

3- Le circuit d'accord utilisé pour sélectionner l'onde modulée est composé d'une bobine d'inductance $L = 21,5mH$ et deux condensateurs montés en série, l'un de capacité $C_1 = 60nF$ et l'autre de capacité C_2 inconnue.

Déterminer valeur de la capacité C_2.

Solution

1- L'expression de $u_s(t)$ peut s'écrire:

$$u_s(t) = k.[U_0 + S_m \cos 2\pi f_s.t]U_m.\cos 2\pi F_p.t$$

$$= kU_0U_m[1 + m\cos 2\pi f_s.t]\cos 2\pi F_p.t \text{ avec: } m = \frac{S_m}{U_0}$$

$$= kU_0U_m\cos 2\pi F_p t + \frac{m}{2}.kU_0U_m\cos[2\pi(f_s + F_p)]\cos 2\pi[(F_p - f_s)t]$$

$$= \frac{m}{2}.kU_0U_m\cos 2\pi(F_p - f_s)t + kU_0U_m\cos 2\pi F_p.t + \frac{m}{2}kU_0U\cos 2\pi(F_p + f_s)t$$

$$= \frac{m}{2}A\cos 2\pi f_1 t + A\cos 2\pi f_2.t + \frac{m}{2}A\cos 2\pi f_3.t$$

Avec: $A = kU_0U_m$, $f_1 = F_p - f_s$, $f_2 = F_p$ et $f_3 = F_p + f_s$.

2- L'amplitude des raies obtenues permet de déduire que:

$A = 2V$ et $\frac{m}{2}A = 0,6V$, d'où: $m = 0,6$

$f_1 = F_p - f_s = 6,5kHz$ et $f_2 = F_p = 7kHz$.

d'où:

$$f_s = F_p - f_1 = 7 - 6,5$$
$$= 0,5kHz$$
$$= 500Hz$$

La modulation est correcte car $m < 1$ et $F_p >> f_s$.

3- Soit C la capacité du condensateur équivalent, se trouvant dans le circuit d'accord.

Pour que l'onde porteuse soit sélectionnée par ce circuit, il faut que:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = F_p.$$

C'est-à-dire:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L.F_p^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2.21,5.10^{-3}(7.10^3)^2} \simeq 2,4.10^{-8}F$$

Les deux condensateurs sont montés en série, on a donc:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1}.$$

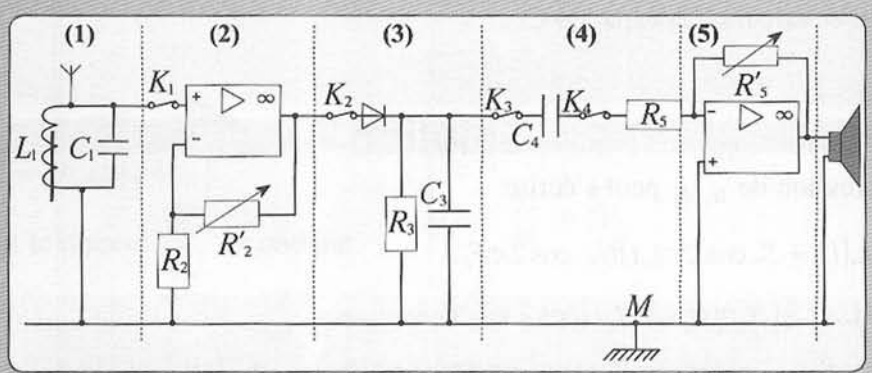
$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} = \frac{C_1 - C}{C_1.C}.$$

d'où:

$$C_2 = \frac{C_1.C}{C_1 - C}$$
$$= \frac{60.10^{-9}.2,4.10^{-8}}{60.10^{-9} - 2,4.10^{-8}} \simeq 4.10^{-8}F$$

10 On souhaite capter un signal modulé en amplitude et repérer l'allure du signal au niveau des différents étages du récepteur. (voir figure).

Le circuit d'accord permet de balayer un domaine de fréquences allant de $150kHz$ à $200kHz$.



Le signal modulé a pour expression:

$u_s = A[1 + m\cos 8\pi 10^3 t]\cos 2\pi Ft$.

1- Donner le nom de chaque circuit dans ce montage.

2- Le condensateur du circuit (1) a une capacité $C_1 = 1,0nF$.

Quelles sont les valeurs extrêmes de l'inductance L_1 de la bobine du circuit d'accord?

3- Le condensateur du circuit (3) a une capacité $C_3 = 1,0\mu F$.

Parmi les valeurs: 250Ω, 200Ω, 10Ω et 5Ω, trouver celle qui convient à la résistance R_3.

Solution

1- (1) circuit d'accord, (2) et (5) circuits d'amplification

(3) circuit de détection de l'enveloppe du signal modulé

(4) circuit d'élimination de la tension continue

2- La période propre T_0 du circuit d'accord doit être égale à la période de la porteuse, alors:

$\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = F$ avec $F \in [F_{min}; F_{max}]$;

donc: $F_{min} \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} \leq F_{max}$.

$\frac{1}{F_{max}^2} \leq 4\pi^2 L_1 C_1 \leq \frac{1}{F_{min}^2}$.

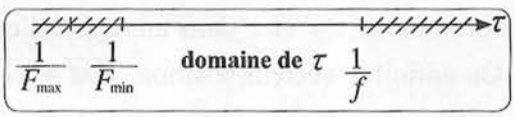
$\frac{1}{4\pi^2.10^9.(2.10^5)} \leq L_1 \frac{1}{4\pi^2.10^{-9}.(1,5.10^5)^2}$

$0,633mH \leq L_1 \leq 1,12mH$.

3- Pour que la détection de l'enveloppe soit correcte, la constante de temps du circuit (3) doit vérifier la condition suivante:

$T_p = \frac{1}{F} << \tau = R_3 C_3 < \frac{1}{f} = T_s$.

On peut schématiser cet intervalle comme suit:



Vu que $\tau >> \frac{1}{F}$, on déduit que:

$\frac{1}{F_{min}} << R_3 C_3 < \frac{1}{f}$.

alors: $\frac{1}{C_3.F_{min}} << R_3 < \frac{1}{C_3.f}$.

$\frac{1}{10^{-6}.1,5.10^5} << R_3 < \frac{1}{10^{-6}.4.10^3}$.

$6,66\Omega << R_3 < 250\Omega$.

La valeur convenable est $R_3 = 200\Omega$.

2 LES LOIS DE NEWTON

I- Généralites: Grandeurs cinématiques

La cinématique est la description du mouvement sans se préoccuper de ses causes qui sont les forces.

1 Position d'un point mobile.

1.1- Coordonnées cartésiennes.

La position d'un point matériel en mouvement peut être détérminée à l'aide de coordonnées x, y et z dans un repère d'espace $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à un référentiel.

- On définit le vecteur position: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Si le mouvement s'effectue dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Si le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$.

1.2- Repère de temps.

L'étude d'un mouvement nécessite un deuxième repère qui est le repère de temps, c'est un instant $(t = 0)$ pris comme origine des dates.

1.3- Equations horaires et équation de la trajectoire.

- Les coordonnées x, y et z du mobile varient en fonction du temps t. Ces fonctions son notées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ et appelées équations horaires.

Un point mobile passe successivement par différents points qui constituent une ligne appelée trajectoire. Cette trajectoire dépend du référentiel choisi.

La relation mathématique liant les coordonnées x, y, z est l'équation de la trajectoire.

Exemple: Les équations horaires d'un point mobile dans un repére $(O, \vec{i}, \vec{k})$ sont:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -5t^2 + 3t + 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

t en (s) et x, y, z en m.

a- Déterminer la position du mobile aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = 0,5s$ et $t_2 = 1s$.

b- Etablir l'équation de la trajectoire.

Quelle est sa nature?

Solution:

a- $M_0\begin{cases}0\\2m\\0\end{cases}$; $M_1\begin{cases}2m\\1,25m\\0\end{cases}$; $M_2\begin{cases}4m\\0\\0\end{cases}$

b- L'équation $x(t)$ donne: $t=\frac{x}{4}$

On remplace t dans (2) et on obtient.

$$y=-5\left(\frac{5}{4}\right)^2+3\left(\frac{x}{4}\right)+2=-\frac{5}{16}x^2+\frac{3}{4}x+2$$

C'est l'équation d'une parabole dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ car $z=0(\forall t)$.

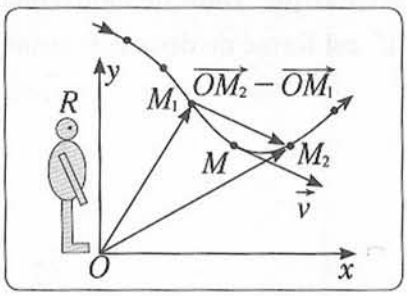
Il s'agit d'un mouvement parabolique dans le plan (Oxy).

3 Vitesse - vecteur vitesse

3.1- Vitesse moyenne

Un point mobile M se déplace sur une trajectoire du référentiel $\mathbb{R}$.

Entre les dates t_1 et t_2, il passe de la position M_1 à la position M_2 en parcourant l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ mesuré le long de la trajectoire.



• Sa vitesse v_m dans le référentiel $\mathbb{R}$ entre les instants t_1 et t_2 est: $v_m=\dfrac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{t_2-t_1}$

3.2- Vecteur vitesse instantanée

a- Introduction: A partir de cette exprons, on définit la relation vectorielle:

$$\vec{V_m}=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}=\frac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t}$$

Lorsque $\Delta t\longrightarrow 0$, $\vec{V_m}$ tend vers une limite qui définit le vecteur vitesse instantanée.

$$\vec{V}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t}$$

b- Définition: Dans un référentiel donné, le vecteur vitesse d'un point mobile M à un instant donné est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à cet instant.

$$\vec{v}=\frac{(d\overrightarrow{OM})}{dt}$$

c- Coordonées du vecteur vitesse.

Dans le repère d'étude $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ lié au référentiel donné, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est caractérisé par ses coordonnées $(x(t),y(t),z(t))$.

Celles du vecteur vitesse (v_x, v_y, v_z) sont alors les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées du vecteur position:

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$; d'où, par dérivation: $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{vmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{vmatrix}$

Les dérivées $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ et $\dfrac{dz}{dt}$ sont également notées $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

d- Caractéristiques du vecteur vitesse.

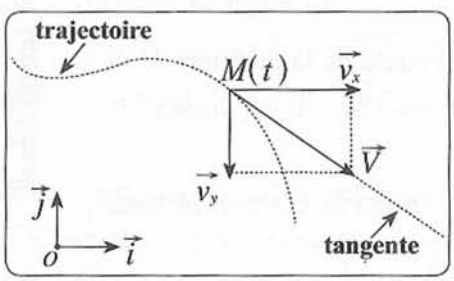
Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

Il est dirigé selon le sens du mouvement.

Sa norme est égale à la vitesse instantanée: $\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ $(v \text{ en } m.s^{-1})$.

Remarque: Dans un mouvement plan dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\vec{V} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$

$\vec{V}$ est formé de deux composantes $\vec{v_x}$ et $\vec{v_y}$.



Exercice d'application 1

Le vecteur position d'un point mobile dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:

$$\overrightarrow{OM} = -3t.\vec{i} + 4t.\vec{j}$$

Les valeurs numériques sont exprimées dans le système international d'unités.

Caractériser le vecteur $\vec{v}$ du point mobile aux dates 1 s et 3 s.

Solution

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = -3t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{vmatrix}$ d'où $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{vmatrix} \dot{x} = -3 \\ \dot{y} = 4 \\ \dot{z} = 0 \end{vmatrix}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

$v_x = -3$ et $v_y = +4$, alors: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 m.s^{-1}$.

Le vecteur vitesse est constant, indépendant du temps. Il est le même aux dates 1 s et 3s. Le mouvement est donc rectiligne uniforme.

3 Vecteur accélération:

3.1- Accélération moyenne:

Pendant une durée $\Delta t = t_2 - t_1$, le rapport $\frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t}$ définit ce que l'on appelle vecteur accélération moyenne.

$$\vec{a_m} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

3.2- Vitesse accélération instantanée:

a- Définition:

Dans un référentiel donné, le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile, à un instant donné est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point mobile:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

b- Coordonées dans un repére cartésien:

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}):\vec{v}$, $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}):\vec{v}$ $\left|\begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{array}\right.$ d'où $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \end{array}\right.$

Module de $\vec{a}$: $\vec{a}: a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

L'accélération se mesure en mètre par seconde carré $(m.s^{-2})$.

c- Coordonnées du vecteur accélération dans la base de Frenet

Dans certains mouvements curvilignes tels les mouvements circulaires, on préfère utiliser la base de Frenet $(\vec{u},\vec{n})$ pour déterminer l'accélération.

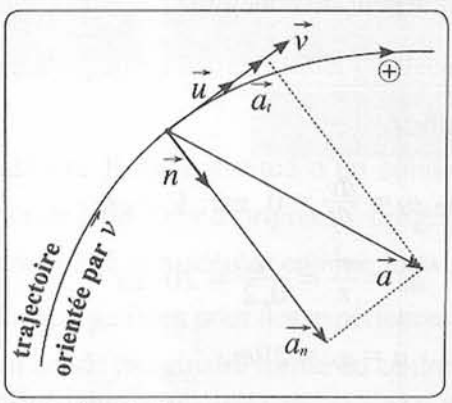
• $\vec{u}$: vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement;

• $\vec{n}$: vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

Cette base est bien appropriée pour distinguer d'une part la variation de la valeur v et d'autre part celle de la direction du vecteur vitesse.

Dans cette base, $\vec{v} = v.\vec{u}$, d'où:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}.\vec{u} + v.\frac{d\vec{u}}{dt}$$



5- Repère de Frenet.

Le terme $\frac{dv}{dt}$ correspond à la variation de la valeur v de la vitesse.

Le terme $v.\frac{d\vec{u}}{dt}$ correspond à la variation de $\vec{u}$, c'est-à-dire à la variation de la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$ sans que sa valeur v change. On montre que $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et dirigée selon $\vec{n}$: $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{v}{R}.\vec{n}$.

Dans le cas d'une trajectoire plane, la quantité $\frac{1}{R}$, homogène à l'inverse d'une longueur, exprime la courbure de la trajectoire en M. Elle est d'autant plus que R est petit. Dans le cas d'une trajectoire circulaire lorsque R tend vers l'infini, la trajectoire devient rectiligne de courbure nulle.

L'accélération s'écrit donc: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{u} + \frac{v^2}{R}.\vec{n}$, soit: $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = a_t.\vec{u} + a_n.\vec{n}$

avec: $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}.\vec{u}$ composante tangentielle et $\vec{a_n} = \frac{v^2}{R}.\vec{n}$ composante normale, toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire.

Module de $\vec{a}$: $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.

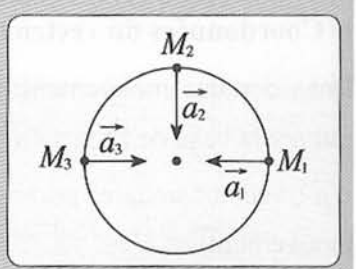
Exercice d'application 2

Un corps assimilable à un point matériel décrit un mouvement circulaire de rayon $r = 20cm$ à vitesse constante $V = 2m/s$. (voir figure)

a- Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération normale de ce mouvement.

En déduire accéleration a .

b- Représenter $\vec{a}$ au point M_1, M_2 et M_3 de la figure, que peut-on conclure?



Solution

a- $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$, car; $V = cte$

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{4}{0,2} = 20\ m.s^{-2}$$

$$a = a_N = 20m.s^{-2}$$

b- Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est centripète:

1 Mouvements accélérés ou retardés

Lorsque la valeur de la vitesse croît au cours du temps, le mouvement est dit accéléré.

Lorsque la valeur de la vitesse décroît au cours du temps, le mouvement est dit décéléré.

Le signe du produit scalaire $\vec{a}.\vec{v}$ permet de reconnaître si un mouvement est accéléré ou décéléré.

En effet, $\vec{a}.\vec{v} = (\vec{a_t} + \vec{a_n}).\vec{v} = \vec{a_t}.\vec{v}$, soit:

$\vec{a}.\vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}.\vec{u}\right).(v.\vec{u}) = v.\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d(v^2)}{dt}\right)$

- $\vec{a}.\vec{v} > 0$: $\frac{d(v^2)}{dt} > 0; v^2$ augmente, donc v aussi: le mouvement est dit accéléré;
- $\vec{a}.\vec{v} < 0$: $\frac{d(v^2)}{dt} < 0; v^2$ diminue, donc v auss: le mouvement est dit décéléré ;
- $\vec{a}.\vec{v} = 0$: $\frac{d(v^2)}{dt} = 0; v$ est constante, le mouvement est uniforme.

II- Les lois de Newton

1 Première loi de Newton ou principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieurs appliqueés à un solide est égale au vecteur nul, son centre d'inertie a un mouvement rectiligne uniforme, et réciproquement.

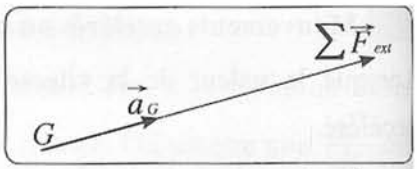
• Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galéléen est aussi galiléen.

• Le référnetiel héliocentrique est quasiment galiléen. Il est constitué d'un solide imaginaire formé du centre d'inertie S du soleil et de trois axes d'origine S dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes.

• Le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen pour des expériences n'excédant pas quelques jours. Il est constitué d'un solide imaginaire formé du centre d'inertie T de la Terre et de trois axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique.

• Le référentiel terrestre est constitué par la surface de la Terre. Il est en rotation par rapport au référentiel géocentrique. Cette rotation étant lente, nous pouvons avec une bonne approximation le considérer comme galiléen pour la plupart des expériences courantes.



La résultante des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ a même direction et même sens que le vecteur accélération du centre d'inertie.

2 Deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un solide est égale au produit de la masse m du solide par le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie: $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$

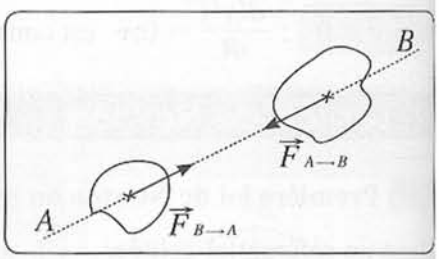
Remarques:

- Cette relation n'est valable que dans un repère galiléen.

- Cette loi permet d'exprimer l'unité d'une force (N) en fonction des unités fondamentales de la mécanique:

kg, m et s.

Le Newton est $1N = 1kg.m.s^{-2}$.



Troisième loi de Newton ou loi des actions réciproques

Considérons deux systèmes A et B en interaction;
la force $\vec{F}_{A\to B}$ modélise l'action de A sur B et la force $\vec{F}_{B\to A}$ modélise l'action de B sur A.

Ces forces ont la même droite d'action et elles vérifient la relation:

$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$

Cette loi est applicable si A et B sont au repos ou en mouvement.

Les forces $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ peuvent être des forces à distance ou de contact.

Comment résoudre un exercice de dynamique?

• Définir le référentiel par rapport auquel on effectue l'étude. En général, c'est le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen.

• Définir le système sur lequel porte l'étude demandée, en général c'est un solide.

• Faire le bilan des forces agissant de l'extérieur sur le solide étudié.

• Appliquer la deuxième loi de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$.

Si $\sum \vec{F} = \overrightarrow{cte} (\neq \vec{0})$ la masse m du solide est constante, alors l'accélération du centre de gravité G du solide est également constante:

$\vec{a}_G = \overrightarrow{cte}$ (non nulle).

• Calculer la valeur algébrique de l'accélération en transformant la relation vectorielle en une ou plusieurs relations algrébriques.

Pour cela, il existe une méthode générale: la méthode des projections:

- Choisir des axes de projections de telle façon que certains vecteurs aient une projection nulle sur les axes choisis;

- Ecrire la relation algégrique traduisant la projection de la relation vectorielle sur chaque axe choisi;

- En combinant les relations trouvées, déduire la grandeur recherchée.

1 Test de connaissances

1- Trouver les propositions fausses et les corriger.

a- Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point considéré.

b- Le vecteur accélération est toujours tangent à la trajectoire au point considéré.

c- Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$, le mouvement est retardé.

d- Une accélération tangentielle nulle implique un mouvement uniforme.

2- Choisir la bonne réponse:

a- Si le vecteur vitesse est constant, alors l'accélération est nulle.

b- Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est non nulle.

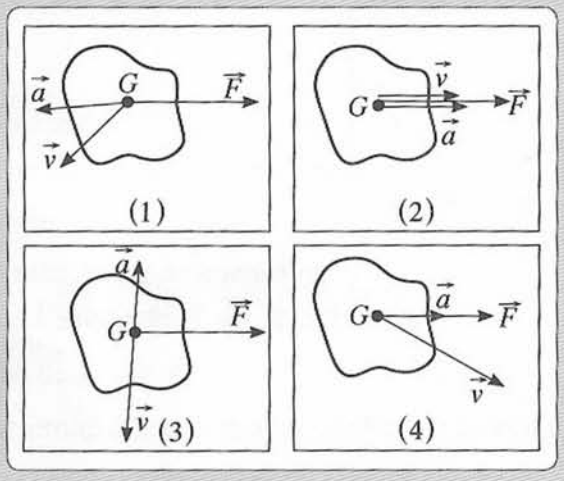
c- Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est centripète.

3- Soit $\vec{F}$ la somme des forces appliquées à un solide.

Parmi les schémas ci-dessous indiquer:

a- ceux qui sont incohérents avec les lois de la mécanique.

b- ceux qui correspondent à un mouvement accéléré.



Solution

1- La proposition fausse est (b). La direction de $\vec{a}$ dépend de la nature de la trajectoire et de la nature du mouvement (de $\frac{dv}{dt}$).

2.a- Vraie.

2.b- Vraie.

2.c- Vraie.

3.a- (1) et (3), il faut que $\vec{F}$ soit de même direction et même sens que $\vec{a}(\vec{F} = m\vec{a})$.

3.b- (2) et (4)

2 Un point mobile de position M est en mouvement rectiligne le long d'un axe (Ox) orienté de gauche à droite.

Son vecteur vitesse est $\vec{v} = v_x(t).\vec{i}$ et son vecteur accélération est $\vec{a} = a_x(t).\vec{i}, v_x(t)$ et $a_x(t)$ sont algébriques.

On considère quatre types de mouvement numérotés de 1 à 4.

Compléter le tableau en attribuant un type de ces mouvement à chaque case.

(1): M se dirige vers la droite en ralentissant.

(2): M se dirige vers la gauche en ralentissant.

(3): M se dirige vers la droite en accélérant.

(4): M se dirige vers la gauche en accélérant.

	$a_x > 0$	$a_x < 0$
$v_x > 0$		
$v_x < 0$		

Solution

	$a_x > 0$	$a_x < 0$
$v_x > 0$	(3) $\vec{v}$ $\vec{a}$	(1) $\vec{a}$ $\vec{v}$
$v_x < 0$	(2) $\vec{v}$ $\vec{a}$	(4) $\vec{v}$ $\vec{a}$

3 Un point matériel évolue dans un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les équations de vitesse de M sont:

$v_x = 5$ et $v_y = -4t + 3$; $t \geq 0$

t en (s) ; v_x et v_y en $m.s^{-1}$

A l'origine des dates $t = 0$, le point M a pour coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 1m$.

1- Exprimer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de ce mouvement.

2- En déduire l'équation $y = f(x)$ de sa trajectoire. Quelle est sa nature?

Solution

1- $\frac{dx}{dt} = v_x = 5 \longrightarrow x = 5t + C$

On a: $x(0) = 0$

Ce qui donne: $C = 0$

d'où: $x = 5t$ (1)

$\frac{dy}{dy} = v_y = -4t + 3 \Longrightarrow y = -2t^2 + 3t + C$

On a $y(0) = 1m$, donc:

$1 = 2.0^2 + 3.0 + C$

d'où: $C = 1m$

Donc: $y = -2t^2 + 3t + 1$ (2)

2- Equation de la trajectoire.

On a l'équation $x(t)$ donne $t = \frac{x}{5}$

En remplaçant dans (2), on obtient:

$$y = -2\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{5}\right) + 1$$

$$= -\frac{4}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + 1$$

ou bien $y = -0,16x^2 + 0,6x + 1$

La trajectoire est donc une portion de parabole dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4 Soit $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$ le vecteur position d'un point mobile M animé d'un mouvement rectiligne d'équation horaire:

$x(t) = -5t^3 + 30t + 10$, $t \geq 0$ et $x \geq 0$.

1- Quelle est la valeur de l'accélération a_x de ce mouvement?

2- A quelle date le mouvement de M change-t-il de sens?

Quelle est alors l'abcisse de M ?

3- Entre quels instants ce mouvement est-il accéléré? retardé?

4- Représenter $v_x = f(t)$. En déduire la représentation de $v = f(t)$.

5- A quelle date le mobile passe-t-il par l'origine des abscisses.

Solution

1- $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -10m.s^{-2}$

2- Le mobile doit s'arrêter pour changer de sens sur l'axe Ox.

Sa vitesse doit alors s'annuler:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10t + 30$$

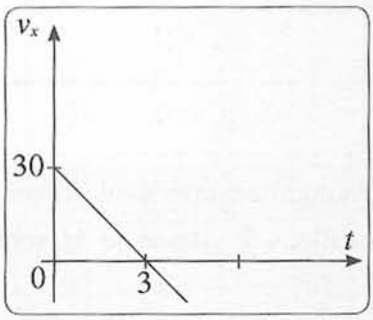
Le mobile s'arrête $(v_x = 0)$, lorsque $t = 3s$ et $x = 55m$.

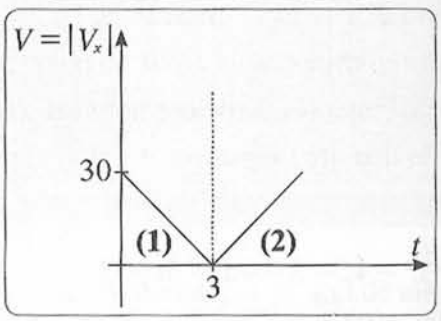
3- On a $a_x < 0$, la nature du mouvement dépend donc du signe de v_x.

- Lorsque $v_x > 0$, on a $-10t + 30 > 0$ donc $t < 3s$.
- Lorsque $v_x < 0$; on a: $t > 3s$.

t	0	3	
Signe de v_x.	> 0	0	< 0
Signe de a_x.($a_x = -10$)	< 0	0	> 0
Nature du mouvement	**retardé**		**accéléré**

4-





Remarquons que le mouvement est retardé dans la phase (1) car $v = f(t)$ décroît et il devient accéléré

$v = f(t)$ croit dans la phase (2).

5- Lorsque le mobile passe par l'origine des abscisses: $x = 0$;

C'est-à-dire: $-5t^2 + 30t + 10 = 0$

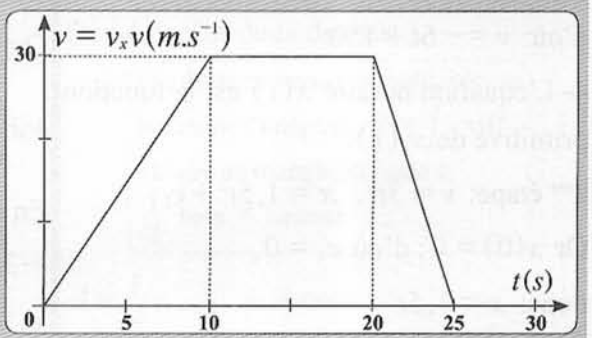
au bien: $-t^2 + 6t + 2 = 0$

La résolution de cette équation donne:

$t \simeq 6,3s$.

5 Un mobile décrit une trajectoire rectiligne comprenant trois parties AB, BC et CD.

On a représenté les variations de la vitesse v en fonction du temps.



L'origine des abscisses coïncide avec le point de départ A. Et l'origine des dates $(t = 0)$ coïncide avec l'instant de départ en A.

1- Décrire qualitativement le mouvement du mobile.

2- Pour chaque phase du mouvement, déterminer la valeur de l'accélération.

3- Etablir les équations de vitesse $v(t)$ pour chacune de ces phases.

4- Montrer que les équations horaires $x = f(t)$ de ce mouvement ont pour expressions.

1ère phase (AB)	2ème phase (BC)	3ème phase (CD)
$x = 1,5t^2$	$x = 30t - 150$	$x = -3t^2 + 150t - 1350$

5- En déduire les distances AD et CD.

Solution

1- Dans l'étape AB où $0 \leq t \leq 10s$; le mouvement est uniformément accéléré car $v = f(t)$ est linéaire croissante.

- Dans la deuxième étape, BC; où $10s \leq t \leq 20s$, le mouvement est rectiligne uniforme.

- Dans la troisième étape CD;

$(20s \leq t \leq 25s$; le mouvement est rectiligne, uniformément retardé, car $v = f(t)$ est une fonction affine décroissante.

2-

Etape	1	2	3
a_x en $m.s^{-2}$	3	0	- 6

3- 1ère étape

$v = a_x.t + c = 3t + c$

Condition initiale sur v:

$v(0) = 0$

Donc: $c = 0$ et $v = 3t$

2ème étape: $v = cte = 30m.s^{-1}$

3ème partie: $\frac{dv_x}{dt} = a_x = -6$

$v_x = -6t + c$; $20s \leq t \leq 25s$

Utilisons la condition intiale sur V pour l'étape (3)

$v(t = 20) = 30 - t \quad t + c$

$30 = -6.20 + c$

$c = 150m.s^{-1}$

d'où: $v = -6t + 150$

4- L'équation horaire $x(t)$ est la fonction primitive de $v_x(t)$.

1ère étape: $v = 3t^2$, $x = 1,5t^2 + c_1$

Or $x(0) = 0$; d'où $c_1 = 0$,

donc: $x = 1,5t^2$

2ème étape:

$v = cte = 30m.s^{-1} \longrightarrow x = 30t + c_2$

Dans cette étape $10s \leq t \leq 20s$.

Utilisons la condition: $x(t = 10s) = x_A$

$x_A = OA = 30.t_A + c_2 = 300 + c_2$

La première étape donne:

$x_1 = 1,5t_A^2 = 1,5(10^2) = 150m$

Donc: $c_2 = x_A - 300 = -150m$

D'où: $x(t) = 30t - 150$

3ème étape: On a $v = -t^2 + 150$

alors: $x = -3t^2 + 150t + c_3$

La condition initiale sur x ici est:

$x(t_C) = x_C$ (2)

Or: $x_C = OC = AB + BC = x_B + v.(t_C - t_B)$

$x_C = 1,5t_B^2 + v(t_C - t_B)$

$x_C = 1,5.(10)^2 + 30(20 - 10) = 450m$

En remplaçant dans (2)

$-3t_C^2 + 150t_C + c_3 = 450$

$c_3 = 3t_C^2 - 150t_C + 450$

$c_3 = 3.(20)^2 - 150(20) + 450 = -1350m$

On retient finalement:

$x = -3t^2 + 150t - 1350$

5- $AD = x_D = -3t_D^2 + 150t_D - 1350$

Avec $t_D = 25s$ on trouve:

$x_D = AD = 525m$

$CD = x_D - x_C = 525 - 450 = 75m$.

6 Un véhicule se déplace sur une route rectiligne.

Au départ, sa vitesse est nulle, puis dans une première phase, il subit une accélération uniforme de valeur a_1 jusqu'à la date t_1.

Puis, à partir de t_1, il est ralenti et la valeur absolue de son accélération est a_2.

Le mouvement s'arrête à la date t_2, lorsque la vitesse redevient nulle.

1- Tracer le graphe de la vitesse en fonction du temps.

2- Déduire du graphe une relation entre a_1, a_2, t_1 et t_2.

3- En déduire l'expression de la distance parcourue d en fonction de a_1, a_2 et t_1.

Calculer les dates t_1 et t_2, la vitesse maximale atteinte et la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = t_2$.

Données: $d = 100m$; $a_1 = 2m.s^{-2}$ et $a_2 = 4m.s^{-2}$.

Solution

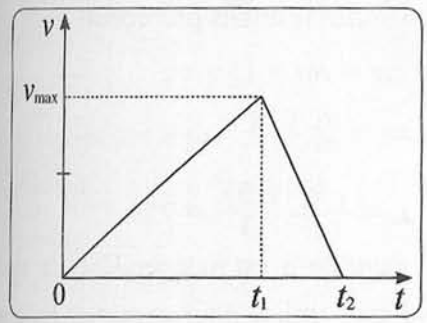
1- $a(t)$ est la dérivée de la vitesse $v(t)$; $v(t)$ est donc une primitive de $a(t)$, soit ici une fonction affine.

Première phase:

- la pente de $v(t)$ est a_1 et la droite passe par l'origine.

Seconde phase:

- la pente de $v(t)$ est $-a_2$ et la fonction $v(t)$ est continue en t_1.



2- On exprime les coefficients directeurs des deux droites à partir de v_{max}, t_1 et t_2 :

$a_1 = \frac{v_{max}}{t_1}$ et $-a_2 = \frac{0 - v_{mx}}{t_2 - t_1}$

On en déduit en éliminant v_{max} :

$a_1.t_1 = a_2.(t_2 - t_1)$ ou: $t_2 = t_1.\frac{a_1 + a_2}{a_2}$.

3- La distance parcourue est représentée géométriquement par l'aire du triangle formé par les deux droites:

> • La distance parcourue est donnée par la somme l'intégrale: $d = \int_{t_1}^{t_2} v dt$
> • L'aire du triangle est égale à: $\frac{1}{2}$ base × hauteur.

$d = \frac{1}{2} v_{max}.t_2$ ou encore:

$d = \frac{a_1.(a_1 + a_2)}{2a_2}.t_1^2$

Application numérique:

$t_1 = 8,2s$;

$t_2 = 12,2s$; $v_{max} = 16m.s^{-1}$;

$v_m = \frac{d}{t_2}$, soit: $v_m = 8,2m.s^{-1}$.

7 Les équations horaires d'un mobile M dans un plan (o,x,y) sont:

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

$r = 3m$ et $\omega = 5rad.s^{-1}$.

1- Trouver une relation liant x et y et r

En déduire la nature de la trajectoire du mobile M.

2- Exprimer v_x et v_y. En déduire la vitesse du mouvement. Conclure.

3- Exprimer les coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération.

En déduire la valeur de l'accélaration a.

4- Calculer, en utilisant la base de Frenet, la valeur de a.

Quelle remarque faites-vous?

Solution

1- Pour éliminer le paramètre t effectuons l'opération suivante:

$\cos\omega t = \frac{x}{r}$ et $\sin\omega t = \frac{y}{r}$

$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$

$1 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$

d'où: $x^2 + y^2 = r^2$

C'est l'équation du cercle de rayon r et de centre O dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le mouvement est donc circulaire

2- $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\omega t) = -r\omega\sin\omega t$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin\omega t) = r\omega\cos\omega t \cdot$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega = 3.5 = 15m.s^{-1} \cdot$

La vitesse du mouvement est donc constante.

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

3- $a_x = \frac{dv_x}{at} = -r\omega^2\cos\omega t$

et: $x_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

$a = 3.(5)^2 = 75m.s^{-2}$

4- Dans le repère de Frenet le vecteur accélération $\vec{a}$ a pour coordonnées:

$a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{r}$, alors $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

et pour module: $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

A partir des résultats précédents on a:

$V = cte = r\omega = 15m/s$;

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

Et: $a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(15)^2}{3} = 75m.s^{-2}$

La valeur de a est indépendante du système d'axes utilisé pour exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{a}$.

8 La valve d'une roue est animée d'un mouvement circulaire par rapport au cadre du vélo. Le rayon de la trajectoire est $R = 32cm$.

A un instant donné, la vitesse de la valve vaut $0,5m.s^{-1}$ et son accélération.

vaut: $1,34\ m.s^{-2}$.

Déterminer le module de l'accélération tangentielle de la valve à cet instant.

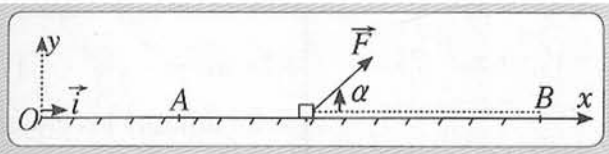
Solution

$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$ avec $\vec{a_T}$ et $\vec{a_N}$ perpendiculaires; on a: $a^2 = a_T^2 + a_N^2$

$|a_T| = \sqrt{a^2 - a_N^2} = \sqrt{a^2 - \frac{v^2}{R}}$

$= \sqrt{(1,34)^2 - \frac{(0,5)^2}{0,32}} \simeq 1m.s^{-2}$

9 Un solide S de masse $m = 100g$ se déplace sur une piste rectiligne et horizontale sous l'action d'une force de traction $\vec{F}$ constante faisant avec l'horizontale un angle $\alpha = 60°$ et d'intensité $F = 0,8N$.



Les frottements sont équivalents à une force constante $\vec{f}$ opposée au sens du mouvement et d'intensité $f = 0,1N$.

L'accélération de la pesanteur est constante et d'intensite $g = 10m.s^{-2}$.

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'accélération du mouvement s'exprime par:

$a_x = \dfrac{F\cos\alpha - f}{m}$, calculer a_x.

2- Sachant que le corps S passe par la position A; $(OA = 1m)$ à la date $t = 0$ à la vitesse $v_A = 2m/s$:

Etablir les équations $v(t)$ et $x(t)$.

3- Le corps passe par la position B avec la vitesse $v_B = 5m.s^{-1}$

3.1- En utilisant les équations $v(t)$ et $x(t)$ montrer que:

$v_B^2 - v_A^2 = 2a_x.AB$

3.2- En déduire la distance AB.

4- Déterminer l'intensité R de la force due à l'action de la piste AB sur le corps S.

Solution

1- $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m\vec{a_G}$

La mouvement est une translation rectiligne, tous les points de S ont même accéleration notée $\vec{a}$.

On a $\vec{R} = \vec{f}+\vec{N}$, $\vec{f}$: force de frottement.

Soit donc: $\vec{F}+\vec{P}+\vec{f}+\vec{N} = m.\vec{a}$

Ces vecteurs s'expriment dans le système Oxy comme suit:

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix}$ $\vec{P}\begin{vmatrix} P_x = O \\ P_y = -P = -mg \end{vmatrix}$ $\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = -f \\ R_y = N \end{vmatrix}$

$\vec{F}\begin{vmatrix} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha \end{vmatrix}$

En utilisant l'axe Ox on écrit:

$F.\cos\alpha + 0 - f = m.a_x$,

d'où: $a_x = \dfrac{F\cos\alpha - f}{m}$

$a_x = \dfrac{0,8.0,5 - 0,1}{0,1} = 3m.s^{-2}$

2- $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = cte$,

donc: $v_x = a_x.t + C = 1,5t + C$

$\vec{V} = V_x.\vec{i}$, $V_x > 0$ donc

$V = V_x = 3t + C$

à $t = 0$, on a $V = V_A$, donc $C = V_A$ alors

$V = a_x t + V_A$ (1)

• Ensuite: $\dfrac{dx}{dt} = V_x = a_x.t + V_A$,

alors: $x = \dfrac{1}{2}a_x t^2 + V_A t + C'$

à $t = 0$, $x = x_A$, d'où $C' = x_A$.

Donc: $x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_A.t + x_A$ (2)

Soit en remplaçant: $v =$, $3 + 2$

$$x = 1,5t^2 + 2t + 1$$

3- L'équation (1) donne au points B:

$$t_B = \frac{v_B - v_A}{ax}$$

Et en remplaçant dans (2) on obtient.

$$x_B = \frac{1}{2}a_x.t_B^2 + v_A.t_B + x_A$$

$$= \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_B - v_A}{a_x}\right)^2 + v_A\left(\frac{v_B - v_A}{a_x}\right) + x_A$$

$$x_B - x_A = \frac{(v_B - v_A)^2 + 2v_A(v_B - v_A)}{2a_x}$$

$$AB = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2a_x}$$

d'où: $v_B^2 - v_A^2 = 2a_x.AB$

3.2- $AB = \frac{5^2 - 4^2}{2.3} = 1,5m$

4- En utilisant les projections sur oy:

$$P_y + F_y + R_y = m.ay$$

Le mouvement est rectiligne sur ox;

donc: $OM = x\vec{i}$, $\vec{v} = v_x.\vec{i}$ et $\vec{a} = a_x.\vec{i}$

Donc: $\vec{a} \,//\, Ox \Longrightarrow a_y = 0$

En remplaçant: $-P + F\sin\alpha + R_y = 0$

$R_y = P - F\sin x$

$= 1 - 0,8\sin 60° \simeq 0,31N$

$R = \sqrt{R_x + Ry^2} = \sqrt{f^2 + R_y^2} = 0,32N$.

10 Pour estimer les forces de frottement exercées une automobile roulant à 60km.h^{-1} sur une route horizontale, on accélère jusqu'à 65 km.h^{-1}, puis on débraye. La voiture ralentit jusqu'à 55 km/h en 7,2s.

Calculer la valeur de la somme des forces de frottement en la supposant constante.

Donnée: masse totale du véhicule: $m = 1450kg$.

Solution

Appliquons la 2ème loi de Newton dans la phase de freinage.

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a_G}$; $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$;

alors: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a_G}$

Par projection sur l'axe ox collinéaire et de même sens que celui du mouvement:

$-f = ma_x$, f étant constant, il en est de même que o_x:

$a_x = cte \longrightarrow v = v_x = a_x t + c$

donc: $ax = \frac{\Delta v}{\Delta t}$;

$\Delta v = 55 - 65 - 10km/h = -2,78m.s^{-1}$

$f = -m.a_x = -m.\frac{\Delta v}{\Delta t}$

$f = 1450.\frac{2,78}{7,2} \simeq 560N$

11 Un palet autoporteur, de masse m, est lâché sans vitesse initiale d'un point A, sur une table inclinée d'un angle α sur le plan horizontal.

Données numériques: $m = 600g$; $g = 9,80m.s^{-2}$; $\alpha = 6,00°$

1- On néglige les frottements.

1.1- Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération.

1.2- Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie G du palet?

1.3- Calculer la vitesse v_B du mobile en B, après un parcours de longueur $l = 52,0cm$

2- En fait, sa vitesse en B est $v'_B < v_B$

En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer l'expression de l'intensité f de la force de frottement $\vec{f}$ supposée constante, en fonction de m, g, α, l, et v'_B.

Calculer f dans le cas où $v'_B = 0,94m.s^{-1}$.

Solution

1.1-

• Choisissons pour référentiel galiléen le laboratoire.

• Les forces appliquées au système autoporteur sont:

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

- l'action de l'air pulsé $\vec{R}$;

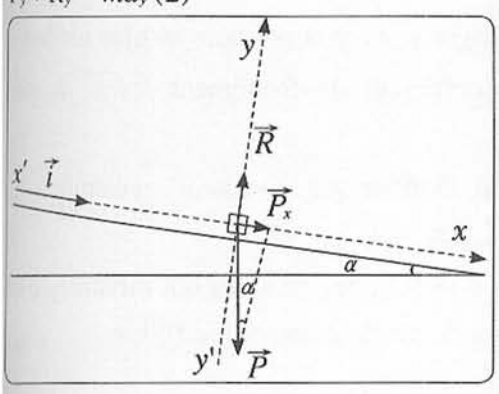
Les forces de frottement sont négligées: $\vec{R}$ est donc perpendiculaire à AB.

• La deuxième loi de Newton permet d'écrire: $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

En utilisant le système d'axes $x'x$ et $y'y$:

$P_x + R_x = ma_x$ (1)

$P_y + R_y = ma_y$ (2)



La trajectoire du palet est parallèle à $x'x$:

$\vec{a} = a_x.\vec{i}$ et $a_y = 0$.

(1) donne: $mg\sin\alpha + 0 = ma_x$;

$a_x = g\sin\alpha$; $a = a_x = g.\sin\alpha > 0$.

$\vec{a}$ de même sens que $\vec{v}$ (ceui de $\vec{i}$)

A.N:

$a = a_x = g.\sin\alpha = 9,80 \times \sin(6°)$

$= 1,02m.s^{-2}$

1.2- Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

1.3- $a_x = cte \longrightarrow v_x = a_x.t + c$

$v_x(0)$, donc: $c = 0$ et

$v = v_x = a_x.t = g.\sin\alpha.t$ (1)

$x = x(t)$ la fonction primitivite de $v_x(t)$ est: $x = \frac{1}{2}a_x t^2 + c'$

$x(0) = x_A$, alors: $c' = x_A$.

d'où: $x = \frac{1}{2}a_x.t^2 + x_A$

Lorsque le palet atteint le point B, à la date t_B.

$x_B = \frac{1}{2}a_x t_B^2 + x_A$ (2)

A cette date on a:

$v_B = a_x.t_B$, ce qui donne $t_B = \frac{v_B}{a_x}$

L'équation (2) donne:

$$x_B = \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_B}{a_x}\right)^2 + x_A$$

Ou encore: $x_B - x_A = \ell = \frac{v_B^2}{2a_x} = \frac{v_B^2}{2g\sin}$

$v_B = \sqrt{2\ell.g.\sin\alpha}$;

A.N: $v_B = \sqrt{2 \times 0,52 \times 9,80 \times \sin(6°)}$

$v_B = 1,03m.s^{-1}$

2- En présence des frottements représentés par la force constante $\vec{f}$:

$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$

Dans ce cas: $\vec{R}=\vec{f}+\vec{N}$;

alors: $\vec{P}+\vec{f}+\vec{N}=m\vec{a'}$

La projection sur l'axe $x'x$ donne:

$P.\sin\alpha - f + 0 = ma'_x$

$f = m(g\sin\alpha - a'_x)$

La relation (3) peut être appliquée dans ce cas: $\ell = \frac{v'^2_B}{2a'_x}$, $a'_x \neq a_x = g\sin\alpha$

$a'_x = \frac{v'^2_B}{2\ell}$

Donc: $f = m\left(g\sin\alpha - \frac{v'^2_B}{2\ell}\right)$

A.N:

$f = 0,600\times 9,80\times\sin(60°) - \frac{0,600\times 0,94^2}{2\times 0,520}$

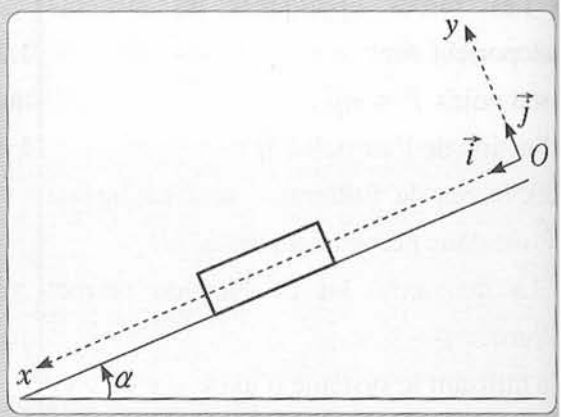
$f = 0,105N$

12 Un solide S de masse m, lâché sans vitesse initiale, glisse avec frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal.

La valeur de α est réglable.

Le repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$ est tel que:

- $\vec{i}$ dirigé suivant la ligne de plus grande pente orientée vers le bas (sens du mouvement).
- $\vec{j}$ est orthogonal au plan incliné.



La somme $\vec{R}$, supposée constante, des forces de contact réparties en surface et exercées par la plan sur le corps S fait un angle φ avec la normale au plan incliné.

φ: angle de frottement. On définit le coefficient de frottement solide k par $k = \tan\varphi$

1- En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que le vecteur accélération du corps S a pour expression $\vec{a_G} = g(\sin\alpha - k.\cos\alpha).\vec{i}$.

2- Dans le cas où α est fixée sur la valeur $\alpha = 30°$, des mesures ont montré que la vitesse du corps S varie de 14,7cm par seconde pendant une durée 100ms.

Déterminer la valeur k. En déduier φ.

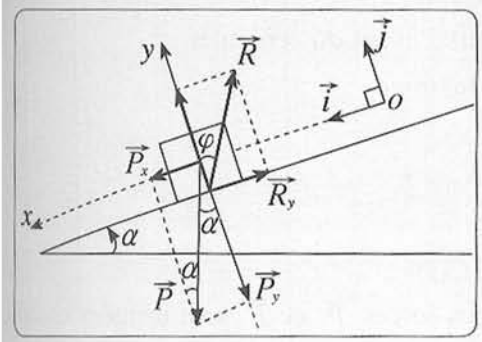
3- Déterminer en fonction de φ, les valeurs qu'on doit donner à l'angle α, pour obtenir sur ce plan incliné:

3.1- Un mouvement accéléré

3.2- Un mouvement retardé.

Solution

1- Selon la deuxième loi de Newton:



$\vec{P}+\vec{R}=m.\vec{a_G}$

avec: $\vec{P}\begin{vmatrix}P.\sin\alpha\\-P.\cos\alpha\end{vmatrix}$; $\vec{R}\begin{vmatrix}-R.\sin\varphi\\R.\cos\varphi\end{vmatrix}$; $\vec{a_G}\begin{vmatrix}a_x\\a_y\end{vmatrix}$

Par projection:

- sur l'axe (Ox):

$P.\sin\alpha - R.\sin\varphi = m.a_x$; (1)

- sur l'axe (Oy):

$-P.\cos\alpha + R.\cos\varphi = m.ay$

Le mouvement s'effectue sur le plan incliné, donc:

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}$, $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}$ et $\overrightarrow{O_G}=\ddot{x}\vec{i}=a_x.\vec{i}$

donc: $\vec{a}\ //\ \vec{i}$; alors: $ay=0$

Le relation (2) donne:

$$R=\frac{P\cos\alpha}{\cos\varphi}=mg\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

De (1) on déduit: $a_x=g\sin\alpha-\frac{R}{m}.\sin\varphi$

en remplaçant R:

$$ax=g\left(\sin\alpha-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.\cos\alpha\right)$$

$\vec{a_G}=a_x.\vec{i}=g(\sin\alpha-k.\cos\alpha)\vec{i}$

2- Calculons k à parti de a_x

On a: $a_x=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)$,

alors: $k\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{a_x}{g}$

$$k=\tan\alpha-\frac{a_x}{g\cos\alpha}\ ,\ ax=cte=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_x=\frac{14,7.10^{-2}}{0,1}=1,47m.s^{-2}$$

$$k=\tan 30°-\frac{1,47}{9,8.\cos 30}=0,4,$$

$\varphi=22°$

3- Le mouvement se fait dans le sens de l'axe ox, on a donc $v_x>0$.

- Pour avoir un mouvement accéléré, il faut imposer la condition $\vec{a}.\vec{v}>0$,

Ceci donne $a_x>0$.

En revenant à la question (1), on obtient:

$g(\sin\alpha-k\cos\alpha)>0$

$\tan\alpha>k=\tan\varphi$

$\alpha>\varphi$, $\alpha>22°$

- Si $a_x<0$ le mouvement est retardé.

D'une manière analogue à la précédente.

$\sin\alpha-k\cos\alpha<0$, $\tan\alpha<\tan\varphi$

$\alpha<\varphi=22°$

Remarque: Lorsque $\alpha=\varphi$, on aura $a_x=0$.

Dans ce cas, la première loi de Newton est vérifiée: le point G est, soit en état d'équilibre, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

13 Une bille de plomb de masse m est fixée à l'extrémité d'un fil fin et inextensible, l'autre extrémité est fixée au plafond d'une automobile. Les différents essais sont effectués sur une route horizontale et rectiligne parallèle à l'axe $(o,\vec{i})$ orienté dans le sens du mouvement.

1- Le fil est vertical. L'automobile est-elle à l'arrêt ou se déplace-t-elle à la vitesse constante? Justifier la réponse.

2- Le fil est incliné d'un angle $\alpha = 16,0°$ vers l'avant du véhicule.

2.1- L'automobile freine ou accélère t-elle? Justifier.

2.2- Etablir que: $a_x = -g.\tan\alpha$.

Calculer son accélération. On donne: $g = 10 m.s^{-2}$

Solution

1- Système étudié: la bille de plomb.

Repère galiléen choisi: un repère terrestre

Forces agissant sur le système: - le poids de la bille $\vec{P}$; - la tension du fil $\vec{T}$.

D'après la deuxième loi de Newton:

$\vec{p} + \vec{T} = m\vec{a_G}$ (1)

Comme la direction de $\vec{P}$ est verticale, la direction de $\vec{T}$ l'est également car le fil de suspension est vertical.

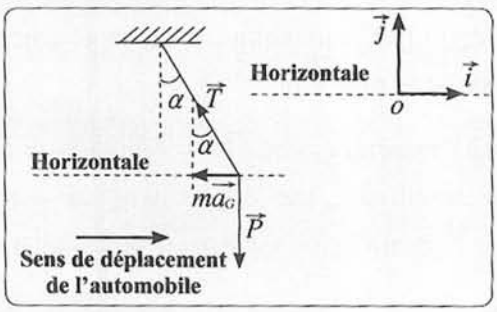
La trajectoire est horizontale. en projetant sur l'axe ox parallèle à la trajectoire on obtient: $P_x + T_x = m.a_x$; $o + o = m.a_x$,

d'où: $a_x = 0 \Longrightarrow v = v_x = cte$

• **Conclusion**: si le fil de suspension est vertical, on ne peut pas déterminer si l'automobile est à l'arrêt ou se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme.

2.1- D'après la 2ème loi doi Newton:

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$.



Les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont dirigées comme l'indique la figure.

Le vecteur $m\vec{a_G}$ resultante de $\vec{P}$ et $\vec{T}$ est horizontale vers la gauche.

Donc $\vec{a_G}$ est opposé à $\vec{V}$.

Le mouvement est donc rétardé: La voiture freine.

2.2- 1ère méthode

En projetant cette relation suivant l'axe $(O;\vec{i})$, on obtient:

$0 - T\sin\alpha = ma_x$ (1)

En projetant la relation vectorielle précédente suivant l'axe $(O;\vec{i})$, on obtient: $-P + T\cos\alpha = 0$;

$$T.\sin\alpha = mg \quad (2)$$

En divisant membre à membre les relations ( ) et ( ), on a: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ma_x}{mg}$

$$a_x = -g.\tan x$$

$a_x = -10.\tan 16 = -2,86 m.s^{-2}$

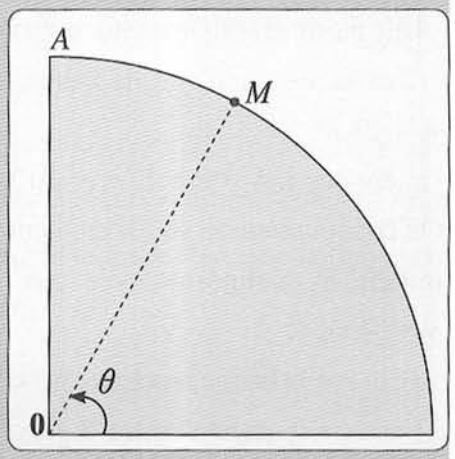
2ème méthode: On peut exploiter le triangle de la figure.

$$\tan\alpha = \frac{m|\vec{a_G}|}{P} = \frac{m|\vec{a_G}|}{mg} = \frac{|\vec{a_G}|}{g} = a$$

$|\vec{a_G}| = g.\tan\alpha$

$a_x = -|a_G| = -g.\tan\alpha$.

14 Un solide S de petite dimension, de masse m, assimilable à un point matériel est placé au sommet A d'une sphère de rayon $r = 1m$.



On déplace légèrement le point matériel de sorte qu'il quitte la position A avec une vitesse que l'on considère comme nulle, puis glisse sans frottement le long de la sphère (fig.).

1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, la position du point étant repérée par l'angle θ, exprimer la valeur du vecteur vitesse, en fonction de θ, avant qu'il quitte la sphère.

2- En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'intensité la réaction $\vec{R}$ de la sphère au point M a pour expression $R = mg(3\sin\theta - 2)$.

3- En déduire l'angle θ, lorsque le point quitte la sphère. Quelle est sa vitesse en ce point? On prendra $g \simeq 10m.s^{-2}$.

Solution

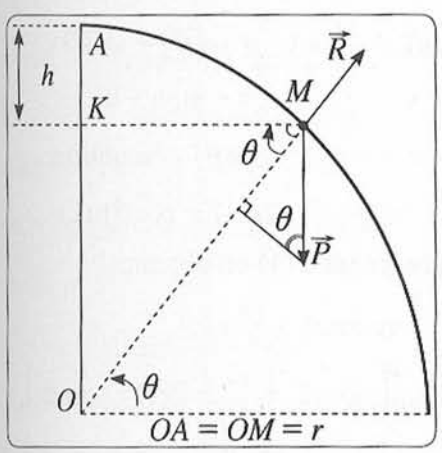
1- $E_C(M) - E_C(A) = w(\vec{P}) + w(\vec{R})$;

$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$;

$h = OA - OK = r - r\sin\theta$

$= r(1 - \sin\theta\ )$

On obtient: $v = \sqrt{2gr(1 - \sin\theta)}$.



2- $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a_G} = m\vec{a}$.

Pour obtenir l'intensité R, projetons cette relation sur l'axe normal MO dirigé vers le centre de la trajectoire.

$P_n + R_n = ma_n$, a_n: accélération normale

$P.\sin\theta - R = m\frac{v^2}{r}$

$R = m\left(g\sin\theta - \frac{v^2}{r}\right)$

En revenant au résultat de la première question: $R = m[g\sin\theta - 2g(1 - \sin\theta\ )]$

$= mg(3\sin\theta - 2)$

3- La réaction $\vec{R}$ est une force de contact.

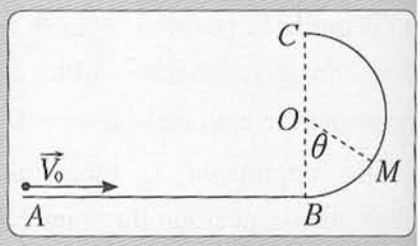
Au moment où le solide quitte la sphère, il n'y a plus de contact, la force $\vec{R}$ s'annulle.

En posant $R = 0$, on obtient:

$3\sin\theta - 2 = 0$, ce qui donne: $\sin\theta = \frac{2}{3}$ et $\theta = 41,8° \simeq 42°$.

15 Un solide de masse m, assimilable à un point matériel se déplace sans frottements sur une piste, se trouvant dans un plan vertical et composé de deux parties:

- Une partie rectiligne et horizontale.
- Une partie circulaire de centre O et de rayon $r = 40cm$.



On donne: $g = 10m.s^{-2}$, $m = 200g$.

On communique au solide au point A, une vitesse initiale $\vec{v_0}$ colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$, et de valeur $v_0 = 4m.s^{-1}$.

1- Choisir la bonne réponse.

La vitesse du solide lorsqu'il passe par le point B est:

(a): $v_B = v_0$ **(b):** $v_B > v_0$ **(c):** $v_B < v_0$

2- En utilisant la deuxième loi de Newton, exprimer l'intensité R de l'action de la piste au point M en fonction de m, g, r, v_0 et θ.

3- Montrer que le solide n'atteint le point C que si la vitesse v_0 est supérieure à une valeur minimale: $v_{0\min} = \sqrt{5gr}$.

Solution

1- Le corps se déplace sur l'axe horizontal et il est soumis à deux forces verticales $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

D'après la deuxième loi de Newton: $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.

Par une projection sur l'axe ox confondu avec $\overrightarrow{AB}$.

$P_x + R_x = ma_x$

$O + O = m.a_x$, on obtient $a_x = 0$.

Donc: $V = V_x = cte$; en tout point entre A et B

2- Application de la deuxième loi de Newton au solide au point M.

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.

En utilisant la normale centripète $(M;\vec{n})$

$P_n + R_n = ma_n$.

$-P\cos\theta + R = m.\frac{v_M^2}{r}$ (1)

Le théorème de l'energie cinétrique entre B et M donne:

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = w(\vec{P}) + w(\vec{R})$$
$$= -mgh + 0$$

avec: $h = r(1 - \cos\theta)$; on obtient:

$$v_M^2 = v_0^2 - 2gr(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

En revenant à (1) on obtient:

$$R = mg\cos\theta + \frac{m}{r}v_M^2$$

$$= m\left[g\cos\theta + \frac{v_0^2}{r} - 2g/1 - \cos\theta\right]$$

$$R = m\left[3g\cos\theta + \frac{v_0^2}{r} - 2g\right]$$

$R = R_{\min}$ correspond à $\cos\theta = -1$, c'est-

à-dire $\theta = \pi$.

$$R_{min} = m\left[\frac{v_0^2}{r} - 5g\right]$$

Pour que le solide reste en contact avec la piste au point C, il faut que $R\min > 0$.

Cette condition impose que $\frac{v_0^2}{r} > 5g$;

ou encore: $v_0 \geq \sqrt{5g.r} = v_{0min}$

Si: $v_0 = v_{0min} = \sqrt{5gr}$: le solide quitte la piste au point C.

Si, $v_0 > \sqrt{5gr}$, il passe par le point sans quitter la piste.

Si $v_0 < \sqrt{5gr}$, le solide quitte la piste avant le point C.

Remarque: L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique (relation (2) donne une valeur minimale de v_{0min} ne vérifiant pas l'adhérence de la piste $v_{0min} > \sqrt{4gr}$.

16 Un objet A, de très petite dimension, de masse m, est suspendu à un fil inextensible, de longueur l.

L'autre extrémité du fil est accorchée à un axe vertical (fig-1). L'axe tourne à la vitesse angulaire constante ω à l'aide d'un moteur et entraîne le fil et la masse qui s'écartent de l'axe d'un angle α (fig-2).

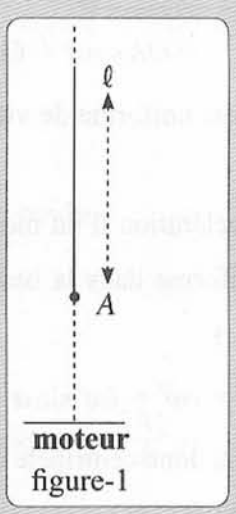


figure-1

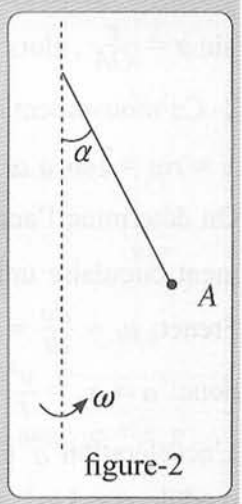


figure-2

Données numériques:

$m = 120g$; $l = 25cm$; $\omega = 10rad.s^{-1}$;

$g = 9,8m.s^{-2}$.

1- Préciser le plan, le centre et le rayon r du cercle décrit par A.

Exprimer le rayon r en fonction de l et α.

2- En déduire les caractéristiques du vecteur accélération de A.

3- En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que: $\cos\alpha = \frac{g}{\ell.\omega^2}$

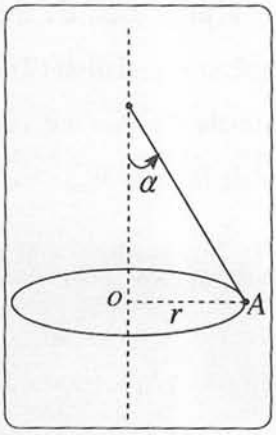
Calculer α.

4- Peut-on atteindre $\alpha = 90°$?

5- Quelle vitesse minimale ω_{min} doit-on donner au moteur pour que le fil et le corps A s'écartent de la verticale?

Solution

1- Le corps A décrit un mouvement dans le plan horizontal perpendiculaire à l'axe (Δ), de trajectoire circulaire, de centre O et de rayon r :



$\sin\alpha = \frac{r}{OA}$, alors: $r = OA\sin\alpha = \ell\sin\alpha$

2- Ce mouvement est uniforme de vitesse

$v = r\omega = \ell\sin\alpha.\omega$

On détermine l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme dans la base de Frenet: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$;

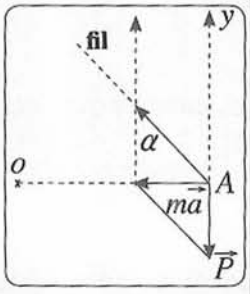
donc: $a = a_N = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \ell\omega^2\sin\alpha$

L'accélération $\vec{a}$ est donc centripète et de module $a = \ell.\omega^2.\sin\alpha$

3- $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$, P

- En projetant sur AO: $T\sin\alpha = ma$.
- en projetant sur la verticale:

$T\cos\alpha - P = 0$



Ces deux équations donnent:

$\tan\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{\ell\omega^2\sin\alpha}{g}$

On encore:

$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\ell\omega^2}{g}$, d'où $\cos\alpha = \frac{g}{\ell.\omega^2}$

Autre méthode:

On peut trouver aisément ce résultat en exploitant le triangle de la figure:

$$\tan\alpha = \frac{ma}{p} = \frac{a}{g} = \frac{\ell\omega^2\sin\alpha}{g}$$

A.N: $\cos\alpha = \frac{g}{\ell.\omega^2} = \frac{9,8}{0,25.10^2} = 0,392$

$\alpha \simeq 6$

4- La limite $\alpha = 90°$ est atteinte lorsque $\omega \longrightarrow \infty$.

5- Pour que le système soit écarté de la verticale, il faut que: $\alpha > 0$;

ceci implique: $\cos\alpha < 1$

C'est-à-dire: $\frac{g}{\ell\omega^2} < 1$, $g < \ell\omega^2$

$\omega^2 > \frac{g}{\ell}$, $\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_{min}$

$\omega_{min} = \sqrt{\frac{9,8}{0,25}} = 6,26\ rad/s$.

3 CHUTE VERTICALE D'UN SOLIDE

I- Chute libre verticale:

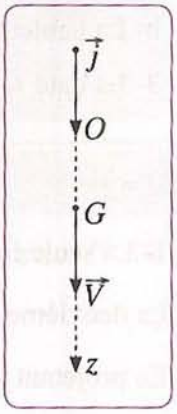
1 Définition:

Un solide est en chute libre dans le champs de pesanteur, lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids.

2 Chute libre dans l'air:

Lorsque l'action de l'air est négligeable par rapport au poids du corps. On peut assimiler la chute dans l'air à une chute libre.

C'est le cas des corps denses et compacts dans les deux premiers mètres du mouvement.



3 Accélération:

La seule force agissant sur une bille est alors son poids.

La deuxième loi de Newton donne:

$\vec{P} = m\vec{a}$ soit, $\vec{a} = \vec{g}$.

4 Equation différentielle:

La relation $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}$ peut s'écrire en utilisant l'axe Oz : $\frac{dV_z}{dt} = g_z$, avec $g_z = \pm g$.

Avec l'orientation choisie pour Oz on a: $\frac{dV}{dt} = g$.

5 Equations du mouvement:

L'équation (1) permet de déduire: $V_z = g_z.t + C$.

$V_z = g_z.t + V_z(0)$.

L'équation $z(t)$ peut être déduite de (3).

$\frac{dz}{dt} = V_z = g_z.t + V_z(0)$.

$z = \frac{1}{2} g_z.t^2 + V_z(0).t + C'$.

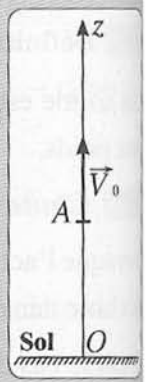
On détermine C' en utilisant la condition initiale sur z.

Si $z(0) = z_0$, on a: $z = \frac{1}{2} g_z.t^2 + V_0(z).t + z_0$.

Exercice d'application

On néglige l'action de l'air et on donne $g = 10m.s^{-2}$.

Une petite bille d'acier est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse $V_0 = 8m.s^{-1}$, à la date $t = 0$, à partir d'un point A situé à une hauteur $OA = h = 1,2m$ du sol.



Elle s'arrête au point B avant de rejoindre le sol.

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, établir les équations $v(t)$ et $z(t)$ de ce mouvement.

2- En déduire:

a- l'instant t_B, lorsque la bille atteint B.

b- La hauteur $H = AB$.

3- La date t_s d'arrivée au sol.

Solution

1- La seule force appliquée à la bille est son poids.

La deuxième loi de Newton s'écrit: $\vec{P} = m\vec{a}_G$, d'où : $\vec{a}_G = \vec{g}$.

En projetant sur l'axe Oz, on a: $a_z = g_z = g = cte$.

- De la relation: $\frac{V_z}{dt} = a_z$, on déduit que: $V_z = -gt + C$;

à $t = 0$, on a: $v_z = v_0$, d'où: $V_z(t) = -gt + V_0$.

- De la relation: $\frac{dz}{dt} = V_z = -gt + V_0$, on déduit $z(t)$: $z(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0.t + C'$.

Or: $z(t = 0) = z_A = h$, donc: $z(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0.t + h$.

2.a- Lorsque la bille atteint le point B, on a: $V_B = -gt_B + V_0$;

on a: $V_B = 0$, d'où: $t_B = \frac{V_0}{g} = \frac{8}{10} = 0,8s$.

2.b- $z_B = -\frac{1}{2} g.t_B^2 + V_0.t_B + h$.

$$AB = z_B - z_A = z_B - h = -\frac{1}{2} gt_B^2 + V_0.t_B = -5.(0,8)^2 + 8(0,8)$$
$$= 3,2m$$

3- Au sol on a: $z_s = 0 = -\frac{1}{2}gt_s^2 + V_0 t_s + h$.

ou encore $-5t_s^2 + 8t_s + 1,2 = 0$ ou trouve $t \simeq 1,7s$.

II- Chute verticale avec frottement:

1 Les forces dues à l'air:

1.1- Poussée d'Archimède:

Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de celui-ci une force opposée au poids du liquide déplacé par ce corps. Le vecteur poussée d'Archimède est donné par l'expression suivante:

$$\vec{F}_A = -\rho_0 . V_{corps} . \vec{g}$$

La poussée d'Archimède est toujours verticale vers le haut.

ρ_0: masse volumique du fluide $(kg.m^{-3})$.

V_{corps}: volume du corps immergé dans le fluide (m^3).

g: valeur du vecteur champ de pesanteur ($m.s^{-2}$ ou $N.kg^{-1}$).

1.2- Force de frottement fluide:

• La force de frottement fluide notée $\vec{f}$ qui s'exerce sur le centre de gravité G d'un solide possède les caractéristiques suivantes:

- **Direction**: même direction que la vitesse du mouvement.

- **Sens**: opposé au mouvement (au vecteur vitesse).

- **L'intensité:** f de la force de frottement fluide dépend:

- de la forme de l'objet, de ses dimensions, de la viscosité du fluide dans lequel il se déplace;

- de la vitesse de déplacement de l'objet par rapport au fluide.

• Pour un écoulement laminaire (dans le cas de petits objets profilés et pour un écoulement sous la forme de couches continues autour de l'objet), on a:

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

$f = kv$: f force de frottement fluide laminaire (N);

k coefficient de frottement fluide laminaire $(kg.s^{-1})$;

v valeur du vecteur vitesse de 'objet dans le fluide $(m.s^{-1})$.

• Pour un écoulement turbulent : dans le cas de corps gros ou dans le cas où vitesse est grande, on a:

$$\vec{f} = -kv\vec{v}$$

$f = k.v^2$: f force de frottement fluide (N);

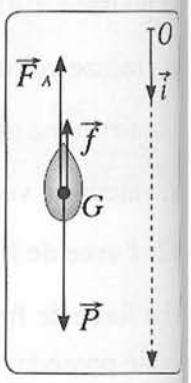
k coefficient de frottement fluide $(kg.m^{-1})$;

v valeur du vecteur vitesse du coups dans le fluide $(m.s^{-1})$.

2 Etude d'un exemple:

On se place dans le cas où la force de frottement fluide est modélisée par la loi $\vec{f} = -k.\vec{v}$.

2.1- Equation différentielle vérifiée par v.



Par rapport à un repère terrestre supposé galiléen, la deuxième loi de Newton donne:

$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - \rho_0.V.\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$

ou encore: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = (m - \rho_0.V)\vec{g} - k\vec{v}$.

En utilisant l'axe $(o;\vec{i})$: $m\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_0}{m}\right)g - \frac{k}{m}v$

$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{k}{m}v$

$\frac{dv}{dt} + Av = B$ où $A = \frac{k}{m}$ et $B = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$.

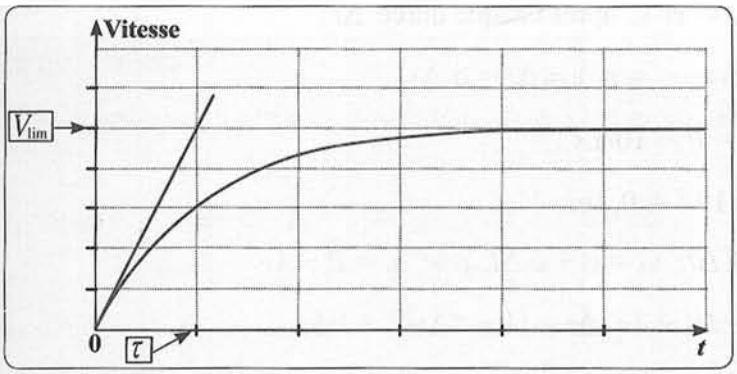
2.2- Vitesse limite de chute et temps caractéristique:

- La vitesse d'un corps dans un fluide devient constante en régime permanent.

Lorsque $v = cte = v_\ell$, $\frac{dv}{dt} = 0$, alors $v_\ell = \frac{B}{A} = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$.

Le temps caractéristique τ associé à l'équation différentielle est donné par l'expression:

$$\tau = \frac{m}{k}$$



2.3- **Accélération du mouvement:**

$a = \frac{dv}{dt} = B - A.v$

Accélération initiale: $a(t=0) = B - A.v_0$.

L'accélération diminue au cours de la chute pour s'annuler en régime permanent.

3 Méthode d'Euler:

La méthode d'Euler est une méthode de calcul approché qu'on utilise pour calculer la vitesse sans recourir à la solution de l'équation différentielle.

Elle est basée sur la formule approchée: $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \simeq \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$

$v(t_n + \Delta t) = v(t_n) + a(t_n).\Delta t$

ou encore: $v_{n+} = v_n + a_n.\Delta t$

- Δt s'appelle le pas d'itération ou pas de calcul.

-Il doit être très petit par rapport au temps caractéristique τ pour que les résultats obtenus par le calcul de méthode d'Euler soient proches de ceux donnés par l'expérience.

- Si Δt est bien choisi et les résultats de calcul sont éloignés de ceux de l'expérience, il faut revoir l'équation différentielle en changeant la modèle de la force de frottement.

Exemple: On donne l'équation différentielle d'une chute dans un fluide dans l'hypothèse où $f = kv$.

$\frac{dv}{dt} + A.v = B$.

$A = 4s^{-1}$; $B = 10m.s^{-2}$;

vitesse initiale $v(t=0) = 0$;

pas de calcul choisi: $\Delta t = 10^{-2}s$.

Calculons v_1, v_2 et v_3 après chaque durée Δt.

- à $t_1 = \Delta t$: on a: $v_1 = v_0 + a_0\Delta t = a_0\Delta t$.

$a_0 = B - Av_0 = B = 10m.s^{-1}$

d'où: $v_1 = 10.10^{-2} = 0,1m.s^{-1}$

à $t_2 = t_1 + \Delta t$; $v_2 = v_1 + a_1\Delta t$ avec $a_1 = B - Av_1$

$v_2 = v_1 + (B - Av_1)\Delta t = (1 - A\Delta t)v_1 + B\Delta t$

$v_2 = (1 - 4.10^{-2}).0,1 + 10.10^{-2} = 0,196m.s^{-1}$

à $t_3 = t_2 + \Delta t$: $v_3 = v_2 + a_2.\Delta t$;

$a_2 = B - Av_2$;

d'où: $v_3 = v_2(1 - A.\Delta t) + B.\Delta t$

$v_3 = 0,196(1 - 4.10^{-2}) + 0,1 \simeq 0,29m.s^{-1}$.

1 Test de connaissances

1- Une bille d'acier est abandonnée en chute libre sans vitesse initiale dans l'air. (g=9,8 m.s^{-2}).

Au bout de la première seconde de chute, elle parcourt la distance:

a- $1m$; b- $9,8m$; c- $4,9m$

2- Quelle est la dimension du coefficient λ dans l'expression $\vec{f}=-\lambda.\vec{V}$?

3- Dans l'expression $f=\lambda.v^2$, l'unité de λ est:

a- $N.s^{-1}$; b- $kg.s^{-1}$; c- $N.m^{-2}.s^2$; d- $kg.m^{-1}$

4- Pour calculer la vitesse v_n à la date t_n d'un corps en chute dans un fluide, à partir de l'accélération, laquelle (es) des formule (s) est (sont) correcte (s) :

a- $v_n=v_{n+1}+a_n.\Delta t$; c- $v_n=v_{n-1}+a_n.\Delta t$

b- $a_n=a_{n+1}+v_n.\Delta t$; d- $v_n=v_{n-1}+a_{n-1}.\Delta t$

5- Définir le temps caractéristique d'une chute verticale dans un fluide.

6- On se place dans le cas d'une chute verticale d'un corps de masse m dans un liquide où la poussée d'Archimède est négligée et l'intensité de la force de frottement fluide est $f=kv$.

La vitesse initiale de la chute est $v(t=0)=v_0$.

Choisir la ou les bonne (s) réponse (s):

6.1- Le temps caractéristique est:

a- $\frac{k}{m}$; b- $\frac{m}{k}$; c- $\frac{1}{k.m}$

6.2- La vitesse limite v_L est:

a- $\frac{g}{\tau}$; b- $\frac{\tau}{g}$; c- $g.\tau$

6.3- L'accélération initiale a_0 est:

a- $\frac{v}{\tau}$; b- $-\frac{v_0}{\tau}$; c- $v_0\tau-g$

d- $\frac{v_0}{\tau}$; e- $g\left(1-\frac{v_0}{v_L}\right)$

Solution

1- Réponse juste:

c- $z=\frac{1}{2}g.t^2=\frac{1}{2}.9,8.1^2=4,9m$.

2- $[\lambda]=\frac{[f]}{[V]}=\frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}}=M.T^{-1}$;

(λ en $kg.s^{-1}$).

3- c et d-

4- d-

5- Le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote horizontale et de la tangente à l'origine à la courbe $v(t)$.

6-

6.1- (b) ; **6.2-** (c) ; **6.3-** (e).

2 On lance une bille verticalement vers le bas avec une vitesse initiale: $v_0 = 13,3 m.s^{-1}$. Le sol est situé à une distance $D = 19,0m$ plus bas.

On néglige l'action de l'air et on prend $g = cte = 9,8 m.s^{-2}$.

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer la date t_s où la bille touche le sol.

2- Quelle est sa vitesse à cette date?

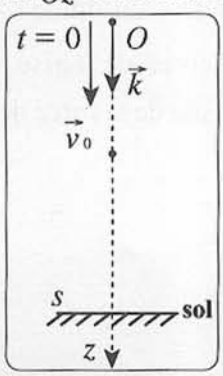
Solution

1- $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}_G$, ce qui donne:

$\vec{a}_G = \vec{g}$

donc: $a_z = g_z = cte$.

En choisissant Oz vers le bas:



$a_z = g$, $\frac{dv_z}{dt} = g$, alors

$v_z = v = gt + cte = gt + v_0$;

$\frac{dz}{dt} = gt + v_0 \Longrightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

Au point S, $z = D = \frac{1}{2}gt^2 + v_0.t$

$\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t - D = 0$

$t_s = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2Dg}}{g}$, $t_0 = 1,03s$ et

$t < 0$ (non solution).

2- $v_s = gt_s + v_0$; $v = 23,4 m.s^{-1}$.

3 **Données:** accélération de la pesanteur, $g = 10 m.s^{-2}$.

Une petite brindille de masse $m = 4,0g$ tombe, sans vitesse initiale, d'une hauteur $h = 8,0m$. Pendant sa chute, elle est soumise à une force due à l'air et de valeur $F = 24mN$, que l'on ne peut pas négliger. Le mouvement de son centre d'inertie est rectiligne vertical.

1- La bille est-elle en chute libre?

2- En utilisant un axe Ox dirigé verticalement vers le bas, déterminer son accélération.

3- Etablir l'équation horaire $x = f(t)$. En déduire la durée de la chute.

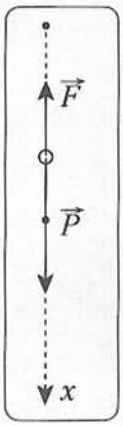
On considère que chute commence à $t = 0$, partir d'un point O pris comme origine des abscisses.

Solution

1- La chute n'est pas libre car bille est soumise en plus de son poids à une autre force.

2- Appliquons à la bille, la deuxième loi de Newton, dans un repère terrestre considéré comme galiléen.

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}_G$.



En projetant cette relation sur l'axe Ox :

$P - F = m.a_x$

$a_x = g - \frac{F}{m}$

$a_x = 10 - \frac{24.10^{-3}}{4.10^{-3}} = 4 m.s^{-2}$.

3- a_x est lié à v_x par la relation $\frac{dv_x}{dt} = a_x = 4$

$v_x = a_x.t + c_1$, $v_x > 0$, on écrit $v_x = v$

$v = 0,4t + c_1$

à $t = 0$, on a $v(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

La relation $\frac{dx}{dt} = v_x = 4t$ donne:

$x(t) = 2t^2 + c_2$

or: $x(0) = 0$ donc $c_2 = 0$,

d'où $x(t) = 2t^2$

- Lorsque $x = h$, on a: $h = 2t^2$;

avec: $t > 0$; $t = \sqrt{\frac{h}{2}} = 2s$.

4 On lance une bille verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 16,5 m.s^{-1}$. Elle revient à son point de départ.

Le point de lancement coïncide avec O, origine de l'axe Oz orienté verticalement vers le haut.

Origine des temps: l'instant du départ en O de la bille.

On néglige les frottements de l'air sur la bille.

1- Calculer la durée τ_1 du mouvement.

2- A quelle hauteur h_1 la bille est-elle montée?

3- En réalité, il existe des frottements dus à l'air. Que dire de la valeur réelle de h_1 ?

Solution

1- La deuxième loi de Newton donne:

$\vec{P} = m\vec{a}_G$, alors $\vec{a} = \vec{g}$.

Donc: $a_z = -g$; $v_z = -gt + v_0$;

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$.

Lorsque la bille retombe sur le sol: $z = 0$.

D'où: $0 = -\frac{1}{2}g\tau^2 + v_0\tau$;

$\tau\left(-\frac{g}{2}\tau + v_0\right) = 0$.

La durée du mouvement est alors:

$\tau_1 = \frac{2v_0}{g}$; $\tau_1 = 3,4s$.

2- La montée s'effectue pendant une durée égale à $\frac{\tau_1}{2}$. D'où: $z = h_1$ et $t = \frac{\tau_1}{2}$.

L'équation horaire des abscisses s'écrit donc: $h_1 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g}$;

$h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$; $h_1 = 13,9m$

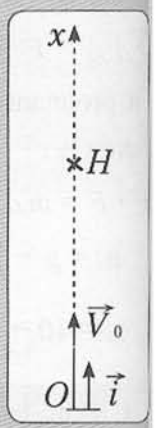
3- En réalité et compte tenu de la résistance

de l'air, la valeur réelle de h_1 est inférieure valeur théorique calculée.

La force de frottement fluide de l'air agissant sur la bille s'oppose constamment au mouvement de celle-ci.

5 On néglige les frottements et on prend $g = 10m^{-2}.s$.

On lance verticalement vers le haut, à partir d'un point O, une bille b_1 de masse m_1 avec une vitesse $V_0 = 8m.s^{-1}$. Elle monte jusqu'au point H avant qu'elle rebrousse son chemin.



L'origine des dates $t = 0$ coïncide avec l'instant de départ de b_1.

1- En application la deuxième loi de Newton, établir l'équation horaire $x_1(t)$ du mouvement de la bille.

2- En déduire la distance OH.

3- à la date $t = 1s$, on lance une deuxième bille b_2 de masse m_2 dans les mêmes conditions et à la même vitesse $\vec{V}_0$.

Montrer que l'équation horaire du mouvement de b_2 s'écrit sous la forme:

$x_2(t) = -5t^2 + 18t - 13$.

4- Les deux billes se rencontrent en un point C de l'axe Ox à une date t_C.

Déterminer V_{1x} et V_{2x} les vitesses respectives de b_1 et b_2 au point C.

Solution

1- Le mouvement de b_1 est une chute libre,

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}_1 \Longrightarrow \vec{a}_1 = \vec{g} = \overrightarrow{cte}$.

d'où: $\vec{V}_1 = \vec{g}.t + \vec{C}_1$.

Conditions initiale: $\vec{V}_1 = \vec{V}_0$ à $t = 0$;

donc: $\vec{V}_0 = \vec{C}_1$;

or: $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}_1) = \vec{V}_1 = \vec{g}.t + \vec{V}_0$;

donc: $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}.\vec{g}t^2 + \vec{V}_0.t + \vec{C}_1$;

à $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_1 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{C}_1 = \vec{0}$;

$\overrightarrow{OM}_1 = x_1\vec{i} = \frac{1}{2}(-g.t^2 + V_0.t)\vec{i}$;

$x_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.t = -5t^2 + 8t$.

2- Au point H,

$x_H = OH = -\frac{1}{2}gt_H^2 + V_0.t_H$;

et: $V_H = 0 = -gt_H + V_0$; $t_H = \frac{V_0}{g}$;

d'où: $OH = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0\left(\frac{V_0}{g}\right) = \frac{V_0^2}{2g}$

$$OH = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{8^2}{2.10} = 3,2m$$

3- De la même façon on trouve $\vec{a}_2 = \vec{g}$.

En utilisant l'axe Ox: $C_{2x} = g_x = -g$

$V_{2x} = -gt + C_2 = -g.t + C_2 = -10t + C_2$

à $t = 1s$ on a: $V_{2x} = V_0 \Longrightarrow V_0 = -g + C_2$

$C_2 = 8 + 10 = 18m.s^{-1}$

d'où: $V_{2x} = -10t + 18$

$x_2 = -5t^2 + 18t + C'_2$

À $t = 1s$ on a:

$x_2 = 0$, d'où $C'_2 = 5 - 18 = -13m$

donc: $x_2(t) = -5t^2 + 18t - 13$.

4- Lorsque b_1 et b_2 se rencontrent:

$x_1(t) = x_2(t)$

$-5t^2 + 8t = -5t^2 + 18t - 13$

$t_C = 1,3s$

$V_{1x} = -10t_C + 8 = -5m.s^{-1}$

$V_{2x} = -10t_C + 18 = +5m.s^{-1}$.

6

1- À partir d'un nuage, une goutte de pluie se forme en O, point situé à une altitude $H = 830m$ au-dessus du sol. À l'instant où elle commence à tomber, sa vitesse initiale est nulle; cet instant est pris comme origine des temps. Le repère d'espace considéré est le repère terrestre supposé galiléen $(O;\vec{i})$, avec $\vec{i}$ un vecteur unitaire vertical dirigé vers le sol. On suppose que pendant toute la durée de la chute, la masse de la goutte d'eau est constante: $m = 16mg$.

Dans un premier temps, on néglige la poussée d'Archimède et les forces de frottement fluide. La valeur de la pesanteur dans l'intervalle (0;830), en mètres est $g = 9,8m.s^{-2}$.

Calculer la vitesse de la goutte d'eau arrivant au sol en (km/h).

Doit-on revoir les hypothèses du départ?

2- La goutte de pluie au départ est supposée être sphérique. Comparer les valeurs de la poussée d'Archimède Π qui s'exercice sur la goutte et son poids P.

La masse volumique de l'eau est $\rho_0 = 1,00 \times 10^3 kg.m^{-3}$ et la masse volumique de l'air est $\rho_{air} = 1,21kg.m^{-3}$. Donner une conclusion à ce calcul.

3- La force de frottement fluide laminaire qui s'exerce sur la goutte a pour valeur $f = hv$, avec h coefficient de frottement fluide laminaire.

a- Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de chute de la goutte.

b- En réalité, la vitesse de la goutte arrivant au sol est de $9,5m.s^{-1}$.

Calculer le coefficient de frottement fluide laminaire.

Solution

1- a- Par hypothèse, la goutte de pluie n'est soumise qu'à son poids: elle est en chute libre.

D'après la deuxième loi de Newton:

$\vec{P} = m\vec{a}_G$, ce qui donne $\vec{a} = \vec{g}$.

ou encore $a_x = g_x = g$.

$\frac{dV}{dt} = a_x = g$, d'où:

$V = gt + cte$

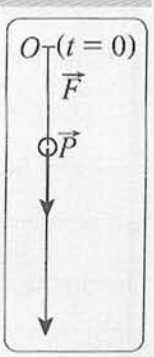
$V(0) = 0$, donc: $V = g.t$.

Par suite $\frac{dz}{dt} = V = gt$,

d'où: $z = \frac{1}{2}gt^2 + cte$

$z(0) = 0$, d'où: $z = \frac{1}{2}gt^2$.

Au sol: $z = H = \frac{1}{2}gt_H^2$,



donc: $t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

alors: $V_{sol} = g.t_H g\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

ou trouve:

$V_{sol} = 128 m.s^{-1} = 128.3,6 \simeq 461 km/h$

Ce résultat n'est pas conforme à la réalité, l'hypothèse de la chute libre est à revoir en tenant compte de l'action de l'air.

2- Comparaison des valeurs de la poussée d'Archimède et du poids de la goutte:

$\frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_{air} V_g}{mg} = \frac{\rho_{air} V}{\rho_0 V} = \frac{\rho_{air}}{\rho_0}$;

$\frac{\Pi}{P} = 0,0012 \cdot$

Compte tenu de la précision des données, de l'ordre du $1/100^e$, la poussée d'Archimède est donc négligeable devant le poids de la goutte.

3.a- La goutte est étudiée par rapport à un repère terrestre supposé galiléen. Les forces agissant sur l'objet sont le vecteur poids et le vecteur force de frottement fluide laminaire. La deuxième loi de Newton donne:

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$ $m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{v}$ ou encore

$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{V}$

$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{h}{m}\vec{V} = \vec{g} \cdot$

Cette équation différentielle caractérise le mouvement de chute de la bille.

En projetant cette équation sur l'axe $(O;\vec{i})$, vertical et dirigé vers le bas, on obtient:

$\frac{dV}{dt} + \frac{h}{m}V = g \cdot$

b- Lorsque la goutte de pluie atteint sa vitesse limite, $\frac{dV}{dt} = 0$. D'où:

$\frac{h}{m}V_{lim} = g$, avec $V_{lim} = 9,5 m.s^{-1}$.

Le coefficient de frottement fluide laminaire h est donc:

$h = \frac{mg}{V_{lim}}$; $h = 1,7 \times 10^{-5} kg.s^{-1}$.

7

1- La vitesse limite d'un objet de masse $93g$ en chute dans l'air est de $2,2 m.s^{-1}$. L'objet est soumis à une force de frottement fluide de valeur $f = \lambda V^2$ et il est lâché d'un point O sans vitesse initiale. On néglige la poussée d'Archimède et l'on donne: $g = 9,8 m.s^{-2}$.

a- Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet.

b- Calculer le coefficient de frottement fluide turbulent λ.

2- On ne néglige plus la poussée d'Archimède. L'équation différentielle régissant le mouvement de chute de l'objet est alors: $\frac{dV}{dt} + \frac{\lambda}{m}V^2 = \alpha g$, avec $\alpha = \frac{m - m'}{m}$.

On donne la masse volumique de l'objet $\rho = 1,78 \times 10^3 kg.m^{-3}$ et celle de l'air ambiant $\rho_{air} = 1,27 kg.m^{-3}$.

a- Calculer la nouvelle vitesse limite de chute de l'objet.

b- Dans cette étude, est-ce bien nécessaire de tenir compte de la poussée d'Archimède?

Solution

1.a- Le système étudié est l'objet, il est étudié par rapport à un repère terrestre $(O;\vec{i})$ supposé galiléen. On choisit le point O au point de lâcher, le vecteur unitaire $\vec{i}$ est vertical et dirigé vers le bas.

Les forces agissant sur l'objet sont son poids et la force de frottement. La deuxième loi de Newton, appliquée à l'objet en mouvement donne: $\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a}$.

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $(O;\vec{i})$, on a: $mg-\lambda V^2=ma_x$.

D'où: $\frac{dV}{dt}+\frac{\lambda}{m}V^2=g$ (1).

b- Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dV}{dt}=0$. La relation (1) devient:

$\frac{\lambda}{m}V_{lim}^2=g$.

Le coefficient de frottement fluide turbulent λ est donc: $\lambda=\frac{mg}{V_{lim}^2}$; $\lambda=0,19kg.m^{-1}$.

2.a- Par hypothèse, l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet est maintenant: $\frac{dV}{dt}+\frac{\lambda}{m}V^2=\alpha g$ (2), avec $a=\frac{m-m'}{m}$. Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dV}{dt}=0$. La relation (2) devient:

$\frac{\lambda}{m}V_{lim}^2=\alpha g$.

L'expression de la vitesse limite est donc: $V_{lim}=\sqrt{\frac{\alpha mg}{\lambda}}$.

Comme $\alpha=\frac{m-m'}{m}$ ou encore $\alpha=\frac{\rho V-\rho_{air}V}{\rho V}=1-\frac{\rho_{air}}{\rho}$, la relation précédente devient:

$V_{lim}=\sqrt{\frac{mg}{\lambda}\left(1-\frac{\rho_{air}}{\rho}\right)}$; $V_{lim}=2,2m.s^{-1}$.

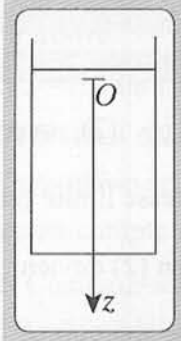
2- La poussée d'Archimède peut être négligée dans le cas de cette étude, le facteur $\alpha=1-\frac{\rho_{air}}{\rho}$ étant voisin de 1: $\alpha=0,9993$. Le résultat numérique trouvé est identique à celui calculé dans la première question où l'on ne tenait pas compte de la poussée d'Archimède.

8 On se propose d'étudier la chute, sans vitesse initiale, d'une petite bille (rayon R, volume $V=\frac{4}{3}\pi R^3$) d'acier dans l'air et dans un liquide visqueux, la glycérine. On admet que la bille, dont le centre est animé d'un mouvement de vitesse $\vec{v}$, dans un fluide (liquide ou gaz) de masse volumique ρ', est soumise à:

- son poids $\vec{P}=m\vec{g}$, si m est la masse de la bille et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur;

- la poussée d'Archimède: $\vec{F} = -\rho' V\vec{g}$;

- la résistance au mouvement, force complexe qui, dans les conditions de l'expérience, est donnée par la formule de Stockes: $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (η étant la viscosité du fluide, grandeur caractéristique de celui-ci et indépendante de la vitesse v).



Le mouvement est observé dans une éprouvette en verre de forme parallélépipédique (section horizontale carrée, hauteur $30cm$ environ).

La bille est lâchée sans vitesse initiale dans le fluide (air ou glycérine) en O, pris comme origine de l'axe des z, vertical et orienté vers le bas, et descend d'un mouvement rectiligne.

Données:

- rayon de la bille d'acier: $R = 1,5 \times 10^{-3} m$;
- volume de la bille: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1,4 \times 10^{-8} m$;
- masse de la bille: $m = \rho V = 1,1 \times 10^{-4} kg$;
- accélération de la pesanteur: $g \approx 10 m.s^{-2}$;
- masse volumique de l'acier: $\rho = 7800 kg.m^{-3}$;
- masse volumique de l'air: $\rho_0 = 1,3 kg.m^{-3}$;
- masse volumique de la glycérine: $\rho' = 1260 kg.m^{-3}$;
- viscosité de l'air: $\eta = 1,85 \times 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$;
- viscosité de la glycérine: ordre de grandeur: $\eta \approx 1 kg.m^{-1}.s^{-1}$.

1- Mouvement dans l'air:

a- On commence par négliger les forces autres que le poids de la bille.

Utiliser la deuxième loi de Newton pour trouver les expressions de la vitesse instantanée v_x et de la coordonnée instantanée x du centre de la bille en fonction du temps.

b- x vaut au maximum $30cm$. Calculer numériquement la vitesse maximale de la bille.

c- Montrer que les forces autres que le poids peuvent effectivement être négligées.

2- Mouvement dans la glycérine:

a- On tient compte des 3 forces $\vec{P}$, $\vec{F}$ et $\vec{f}$. Appliquer la deuxième loi de Newton à la bille pour trouver une équation liant $v(t)$ à sa dérivée par rapport au temps (équation différentielle).

Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$;

si on pose: $\tau = \frac{2\rho R^2}{9\eta}$ et $C = g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

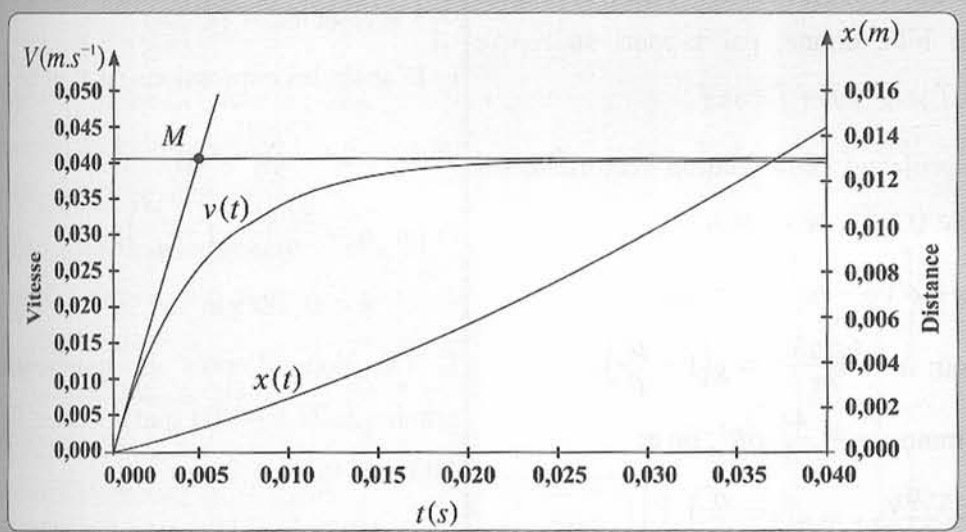
b- Quelle est l'unité qui permet d'exprimer la constante τ ?

c- L'expérience est réalisée. Il est facile de s'apercevoir que le mouvement de la bille devient très rapidement (c'est-à-dire, en fait, au bout d'une distance grès faible) rectiligne et uniforme de vitesse v_{lim} qui est de l'ordre de quelques centimètres par seconde. Comment faire une vérification expérimentale de ces phénomènes et mesurer v_{lim} ?

d- Vérifier que $v(t) = v_{lim}$ est solution de l'équation trouvée en a) à condition qu'il existe une relation entre v_{lim}, C et τ.

e- Les mesures donnent $v_{lim} = 4,2cm/s$. Quelle valeur de η peut-on en déduire?

f- Un logiciel de simulation donne, pour v et x fonctions du temps, les graphes ci-dessous. Ceux-ci sont-ils conformes aux résultats expérimentaux?



Avec l'aide de la figure 10, déterminer la valeur du temps caractéristique de la chute de la bille dans la glycérine.

Solution

1.a- Par rapport à un repère terrestre $(O;\vec{i})$ supposé galiléen, on a:

$\vec{P} = m\vec{a}$ au encoure $m\vec{g} = m\vec{a}$.

D'où: $\vec{a} = \vec{g}$.

En projetant cette relation sur l'axe $(O;\vec{i})$ vertical et dirigé vers le bas, on a:

$a_x = g = \ddot{x}$; $\dot{x} = v = gt + v_0$;

$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$.

b- Par hypothèse, $v_0 = 0$ et $x_0 = 0$. On a donc: $v = gt$ et $x = \frac{1}{2}gt^2$.

En éliminant le paramètre temps t, on obtient: $v^2 = 2gx$.

Si $x_{max} \approx 30cm$ alors $v = v_{max}$, d'où:

$v_{max} = \sqrt{2gx_{max}}$; $v_{max} = 2,4m.s^{-1}$.

c- Autres forces agissant sur la bille:

- La poussée d'Archimède $\vec{F}$.

$\frac{F}{P} = \frac{a_0 V_g}{mg} = \frac{a_0 V}{\rho V} = \frac{a_0}{\rho}$; $\frac{F}{P} = 1,7 \times 10^{-4}$.

F est négligeable devant P compte tenu de la précision des données.

- La force de frottement fluide $\vec{f}$.

$\frac{f}{P} = \frac{6\pi\eta R v_{max}}{mg}$; $\frac{f}{P} = 1,2 \times 10^{-3}$.

f est négligeable devant P compte tenu de la précision des données.

2.a- La deuxième loi de Newton appliquée à la bille donne, par rapport au repère $(O;\vec{i})$: $\vec{P}+\vec{F}+\vec{f}=m\vec{a}$.

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $(O;\vec{i})$, on obtient:

$mg - \rho' Vg - 6\pi\eta R v = ma$.

D'où: $a + \frac{6\pi\eta R}{m} v = g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

Comme $m = \frac{4\eta}{3}\rho R^3$, on a:

$a + \frac{9\eta}{2\rho R^2} v = g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

Équation différentielle de la forme:

$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ (1), avec $\tau = \frac{2\rho R^2}{9\eta}$

et $C = g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

b- D'après la relation précédente:

$\frac{v}{\tau}$ a la dimension d'une accélération et s'exprime en $m.s^{-2}$;

v a la dimension d'une vitesse et s'exprime en $m.s^{-1}$;

τ s'exprime donc en s et a la dimension d'un temps.

c- On peut enregistrer le mouvement à l'aide d'une interface reliée à un ordinateur, lequel est muni d'un logiciel approprié. Le traitement des mesures permet de tracer directement sur l'écran de l'ordinateur la courbe $v = f(t)$.

d- Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a: $\frac{dv}{dt} = 0$.

La relation (1) donne alors:

$\frac{v_{lim}}{\tau} = C$ et $v_{lim} = \tau C$.

e- D'après les expressions de τ et de C, on a: $v_{lim} = \frac{2\rho R^2}{9\eta} \times g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

D'où: $\eta = \frac{2\rho g R^2}{9 v_{lim}}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$;

$\eta = 0,78 kg.m^{-1}.s^{-1}$.

f- On note d'après la représentation graphique de $v = f(t)$ que la vitesse limite est bien: $v_{lim} = 4,2 cm.s^{-1}$.

Pour déterminer le temps caractéristique τ avec l'aide de la courbe $v = f(t)$, on trace la tangente à l'origine.

Le point d'intersection M de cette tangente avec la droite asymptotique, $v_{lim} = 4,2 cm.s^{-1}$ a pour ordonnée τ, temps caractéristique recherché.

D'après les tracés, on trouve: $\tau = 5ms$.

9 On étudie le mouvement de chute verticale d'une petite boule métallique de masse m et de rayon r dans le glycérol.

Données: - volume de la boule: $v = \frac{4}{3}.\pi.r^3$;

- masse volumique de la boule: $\rho_1 = 2,7.10^3 kg.m^{-3}$;

- masse volumique du glycérol: $\rho_2 = 1,26.10^3 kg.m^{-3}$;

- masse volumique de pesanteur: $g = 9,81 m.s^{-2}$.

La force de frottement due au glycérol est $\vec{f} = -9\pi.r.\vec{v}$.

1- Peut-on négliger la poussée d'Archimède?

2- Etablir l'équation différentielle suivante:

$\frac{dv}{dt} + A.v = B$ où $A = \frac{27}{4.\rho_1.r^2}$ et $B = g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)$

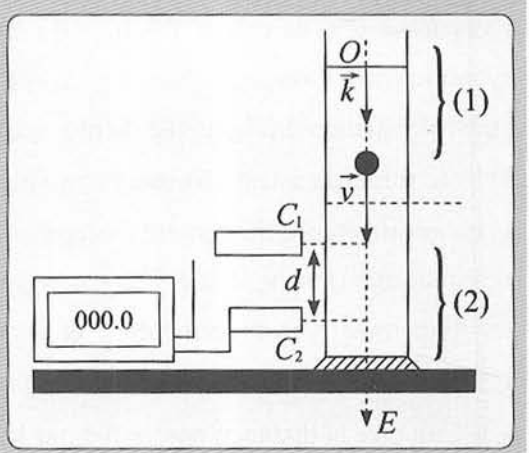
3- On abandonne la boule à la date $t_0 = 0$ à partir du point O sans vitesse initiale, elle prend un mouvement vertical accéléré entre $t_0 = 0$ et t_1 et à partir de cette date, le mouvement devient uniforme.

Un chronomètre électronique lié à deux calcules photoélectriques C_1 et C_2 a permis de mesurer la durée Δt nécessaire pour parcourir la distance $d = 20cm$ par la boule.

Cette mesure donne $\Delta t = 956ms$.

3.1- Déterminer la vitesse limite v_ℓ.

3.2- Déterminer le rayon r de la boule.



Solution

1- $\frac{F_A}{P} = \frac{\rho_2.V.g}{\rho_1.V.g} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1,26}{2,7} = 0,46$

La poussée d'Archimède est du même ordre de grandeur que le poids de la boule, on ne peut pas donc la négliger.

2- La deuxième loi de Newton permet d'écrire:

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{g}_G = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En projectif sur l'axe Oz:

$$mg - F_A - f = m\frac{dv}{dt}.$$

$$mg - \rho_2.V.g - 9\pi r.v = \frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\pi r}{m}v = \left(1 - \frac{\rho_2.V}{m}\right)g.$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{9\pi r}{\frac{4}{3}\pi r^3.\rho_1}v=\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g.$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{27}{4\rho_1.r^2}.v=\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}\right)g.$$

ou bien: $\frac{dv}{dt}+A.v=B$.

3.1- $v_\ell=\frac{d}{\Delta t}=\frac{20.10^{-2}}{956.10^{-3}}\simeq 0,21m.s^{-1}$.

3.2- En revenant à l'équation différentielle:

$$v_\ell=\frac{B}{A}=g\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}\right).\frac{4\rho_1.r^2}{27}$$

$$=\frac{4g(\rho_1-\rho_2).r^2}{27}$$

$$r=\sqrt{\frac{27.v_\ell}{4g(\rho_1-\rho_2)}}.$$

$$r=\sqrt{\frac{27.0,21}{4.9,81(2,7-1,26).10^3}}.$$

$r=10^{-2}m=1cm$

10 On considère la chute verticale d'une goutte d'eau sphérique dans l'atmosphère

Données: masses volumiques: $\mu_{eau}=1000kg.m^{-3}$; $\mu_{air}=1,3kg.m^{-3}$.

$r=50\mu m$; $\eta=18,5.10^{-6}N.s.m^{-2}$; $g=9,8N.kg^{-1}$.

1- Comparer, pour la goutte, le poids et la force de poussée d'Archimède; conclure.

2- Au cours de sa chute, la goutte est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v et de valeur $f=6\pi.r.\eta.v$ avec r le rayon de la goutte et η la viscosité dynamique de l'air.

Établir l'équation différentielle du mouvement de goutte (tenir compte de la question 1).

3- Déterminer la vitesse limite v_L atteinte par la goutte.

4- La goutte étant initialement au repos, la vitesse $v(t)$ à une date quelconque a pour expression: $v(t)=v_L(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$.

4.1- Exprimer τ en fonction de g et v_L. Calculer sa valeur.

4.2- Au bout de quelle durée la vitesse limite est-elle atteinte à 1% près?

4.3- Calculer la distance parcourue par la goutte au cours de cette durée.

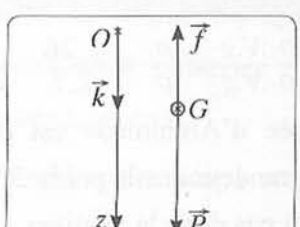
Solution

1- Pour comparer ces deux forces, calculons leur quotient:

$\frac{P}{F}=\frac{\mu_{eau}.V.g}{\mu_{air}.V.g}$ avec V le volume de la goutte.

$\frac{P}{F}=\frac{\mu_{eau}}{\mu_{air}}=7,7.10^2$.

Pour l'étude du mouvement, on pourra donc négliger l'influence de la poussée d'Archimède.



Le vecteur vitesse étant orienté vers le bas, la force de frottement est orientée vers le haut, soit: $\vec{f}=-f.\vec{k}$

2-

• Référentiel terrestre galiléen.

• Système: goutte d'eau.

• Repère: $(O;\vec{k})$ défini sur le schéma.

• Inventaire des forces: $\vec{P}$ et $\vec{f}$.

• Application de la deuxième loi de Newton:

$\vec{P}+\vec{f}=m.\vec{a}_G$.

En projetant sur l'axe (Oz) on obtient:

$m.g-f=m.a_G$ (1).

Or: $f=6\pi.r.\eta.v$ et $a_G=\dfrac{dv}{dt}$,

donc (1) s'écrit: $m.\dfrac{dv}{dt}=m.g-6\pi.r.\eta.v$;

soit: $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{6\pi.r.\eta}{m}.v=g$.

3- Lorsque la vitesse limite est atteinte $\dfrac{dv}{dt}=0$ donc: $v_L=\dfrac{m.g}{6\pi.r.\eta}$.

En remplaçant m par $\dfrac{4}{3}\pi.r^3.\mu_{eau}$, on obtient:

$v_L=\dfrac{2}{9}\dfrac{r^2.g.\mu_{eau}}{\eta}$, soit $v_L=0,29m.s^{-1}$.

4.1- L'expression de v_L donne:

$\dfrac{6\pi.r.\eta}{m}=\dfrac{g}{v_L}$.

L'équation différentielle s'écrit alors:

$\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{g}{v_L}v=g$.

En tenant compte de la solution:

$\dfrac{1}{\tau}v_t.e^{-\frac{t}{\tau}}+\dfrac{g}{v_L}v_L(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=g$.

$e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\dfrac{1}{\tau}v_L-g\right)=0$, d'où: $\dfrac{1}{\tau}v_L-g=0$

donc: $\tau=\dfrac{v_L}{g}$, $\tau=\dfrac{0,29}{9,8}\simeq 0,03s$.

4.2- À la date t_1, la vitesse de la goutte vaut: $v_1=0,99.v_L$.

Donc: $\dfrac{v_L-v_1}{v_L}=e^{-\frac{t_1}{\tau}}=0,01$;

soit: $t_1=-\tau.\ln 0,01=4,6\tau\approx 0,14s$.

4.3- A partir de la fonction $v(t)$ on peut déduire sa primitive $z(t)$.

En effet:

$\dfrac{dz}{dt}=v(t)=v_L(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=v_L-v_L.e^{-\frac{t}{\tau}}$

d'où: $z(t)=v_L.t+\tau.v_L.e^{-\frac{t}{\tau}}+cte$.

La condition initiale $z(t=0)=0$ permet de tirer la valeur de la constante:

$0=\tau.v_L+cte$, d'où: $cte=-\tau.v_L$

d'où: $z(t)=v_L.t+\tau.v_L(e^{-\frac{t}{\tau}}-1)$.

À $t_1=0,14s$;

on trouve $z_1=0,032m=3,2cm$.

11 On étudie le mouvement d'une bille dans l'air.

La poussée d'Archimède est négligeable devant le poids de la bille et la force de frottement fluide est modélisée par une force de type $\vec{f}=-k.\vec{v}$.

1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v du centre de gravité de la bille.

2- Sachant que cette équation différentielle a pour solution: $v(t)=A.e^{-\frac{t}{\tau}}+B$.

2.1- Exprimer les constantes τ, A et B en fonction des paramètres utiles parmi les paramètres du mouvement: m, g, k et v_0 vitesse initiale de la bille.

2.2- Justifier que: $v(t) = (v_0 - v_\ell).e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\ell$.

3- Représenter sans échelle l'allure de la courbe $v = f(t)$ dans chacun des cas suivants:

a- $v_0 = 0$; **b-** $v_0 < v_\ell$; **c-** $v_0 > v_\ell$ et **d-** $v_0 = v_\ell$.

4- Exprimer a_0 l'accélération de la chute à l'instant $t_0 = 0$ en fonction de g, v_0 et v_ℓ.

Donner son signe dans chacun des cas précédents.

Solution

1- $m\vec{g} + \vec{f} = m\vec{a}_G$,

$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$; $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$ (1)

2.1- On a d'après la solution $\frac{dv}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

On remplace $v(t)$ et $\frac{dv}{dt}$ dans l'équation différentielle:

$-\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{k}{m}(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B) = g$.

$A.e^{-\frac{t}{\tau}}\left[-\frac{1}{\tau} + \frac{k}{m}\right] = g - B.\frac{k}{m}$.

Cette égalité n'est vraie que lorsque:

$-\frac{1}{\tau} + \frac{k}{m} = 0$ et $g - B.\frac{k}{m} = 0$.

d'où: $B = \frac{mg}{k}$ et $\tau = \frac{m}{k}$.

On exprime A en utilisant la condition initiale sur la vitesse: $v(t = 0) = v_0$.

$v_0 = A + B$, d'où: $A = v_0 - B$.

2.2- $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = (v_0 - B)e^{-\frac{t}{\tau}} + B$.

- Lorsque $\frac{dv}{dt} = 0$ on a d'après (1):

- On peut également utiliser la solution $v(t)$:

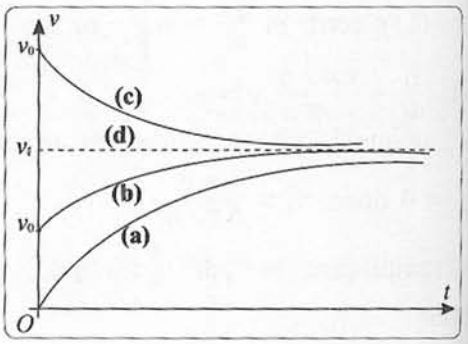
En régime permanent: $t \longrightarrow \infty$ et $v = v_\ell$.

alors: $v_\ell = Ae^{-\infty} + B = B$.

L'expression de $v(t)$ devient donc:

$v(t) = (v_0 - v_\ell)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\ell$.

3- Les courbes $v(t)$ sont portées sur la figure ci-contre



4- $a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}.v$.

$a_0 = g - \frac{k}{m}.v_0 = g - \frac{g}{v_\ell}.v_0 = \left(1 - \frac{v_0}{v_\ell}\right)g$.

ou bien $a_0 = \left(\frac{v_\ell - v_0}{v_\ell}\right)g$.

- Si $v_0 < v_\ell$ on a $a_0 > 0$, il s'agit de (a) et (b).

- Si $v_0 = v_\ell$ on a $a_0 = 0$ cas (d): mouvement uniforme.

- Si $v_0 > v_\ell$ on a $a_0 < 0$ cas (c).

12 Un parachutiste quitte sans vitesse initiale un hélicoptère immobile par rapport à la terre. Après un bref moment il ouvre son parachute, dans le but de freiner sa chute et arriver au sol en toute sécurité.

On étudie le mouvement vertical du système constitué par le parachutiste et ses accessoires, dans le repère $(O;\vec{k})$ supposé galiléen.

On modélise la résultante des forces dues à l'air par une force $\vec{f} = -k.v.\vec{v}$.

La poussée d'Archimède est négligée.

Données: - masse du parachutiste et ses accessoires : $m = 100kg$

- accélération de la pesanteur : $g = 9,8m.s^{-2}$.

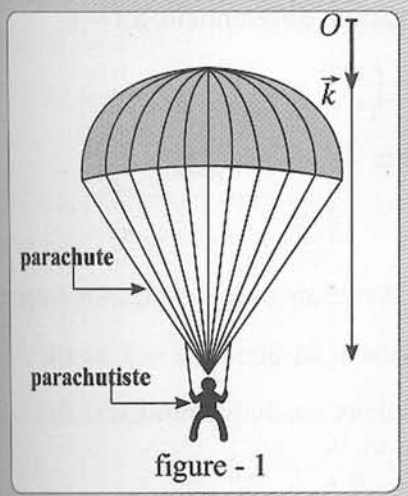


figure - 1

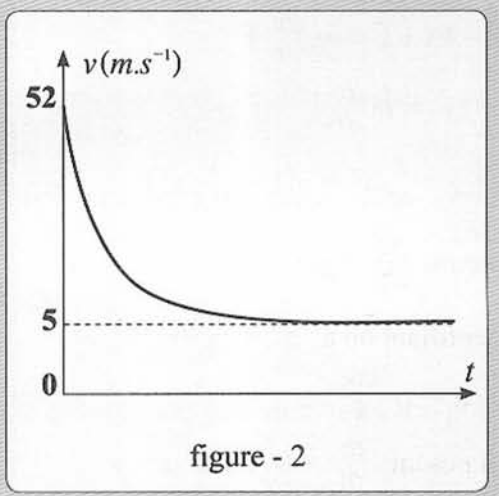


figure - 2

1- Montrer que la vitesse v du mouvement étudié vérifie l'équation différentielle: $\frac{dv}{dt} = g.\left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right)$;

α est à exprimer en fonction de m, g et k.

2- Choisir en justifiant la bonne réponse.

Le paramètre α représente:

a- la vitesse du système à l'instant $t = 0$.

b- l'accélération du système à l'instant $t = 0$.

c- la vitesse limite du système.

d- l'accélération du système en régime permanent.

3- Déterminer la valeur de α. En déduire la valeur de k et son unité dans le système international des unités.

4- La courbe présentée sur la figure 2 peut être obtenue à l'aide de la méthode d'Euler, en utilisant un pas de calcul Δt.

Si v_n est la vitesse du parachutiste à l'instant t_n et v_{n+1} sa vitesse à l'instant

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ on a: $v_{n+1} = -7,84.10^{-2}.v_n^2 + v_n + 1,96$; v_n et v_{n+1} sont en $(m.s^{-1})$.

Déterminer le pas de calcul Δt. **Bac S.M, Juin 2012**

Solution

1- Le système est soumis à deux forces: son poids et la force de frottement $\vec{f}$.

D'après la deuxième loi de Newton, dans le repère galiléen $(O;\vec{k})$ on a:

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$mg\vec{k} - k.v.v.\vec{k} = m.\frac{dv}{dt}.\vec{k}$$

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}.v^2 = g\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right)$$

ou encore $\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right)$;

en identifiant on a: $\alpha^2 = \frac{mg}{k}$

d'où: $\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

2- En posant $\frac{dv}{dt} = 0$, on a: $\alpha = v$

α représente la vitesse limite, la réponse correcte est c.

3- En utilisant le graphe:

$\alpha = v_L = 5m.s^{-1}$. $K = \frac{mg}{\alpha^2} = 39,2kg.m^{-1}$

4- D'après la formule d'Euler, on a:

$v_{n+1} = v_n + a_n.\Delta t$.

L'expression de a_n est fournie par l'équation différentielle à $t = t_n$:

$$a_n = \left(\frac{dv}{dt}\right)_n = g\left(1 - \frac{v_n^2}{\alpha^2}\right).$$

Donc: $v_{n+1} = v_n + g.\Delta t - \frac{g.\Delta t}{\alpha^2}.v_n^2$.

$$v_{n+1} = -\frac{g.\Delta t}{\alpha^2}.v_n^2 + v_n + g.\Delta t.$$

En identifiant avec l'expression proposée:

$g.\Delta t = 1,96$ et: $\frac{g.\Delta t}{\alpha^2} = 7,84.10^{-2}$.

Ces deux résultats fournissent Δt:

$\Delta t = \frac{1,96}{9,8} = 0,2s$;

ou encore: $\Delta t = \frac{7,84.10^{-2}.\alpha^2}{g} = 0,2s$.

13 On étudie la chute verticale d'une bille d'acier dans l'air et dans liquide visqueux.

Données:

masse volumique de la bille $\rho_1 = 2,70.10^3 kg.m^{-3}$;

masse volumique du liquide visqueux $\rho_2 = 1,26.10^3 kg.m^{-3}$;

volume de la bille $v = 4,20.10^{-6} m^3$;

accélération de la pesanteur $g = 9,80 m.s^{-2}$.

On abandonne la bille d'un point O confondu avec la position de son centre de gravité G à la date $t = 0$.

Le point O est situé à une haute H de la surface du liquide. contenu dans un tube en verre transparent fig (1).

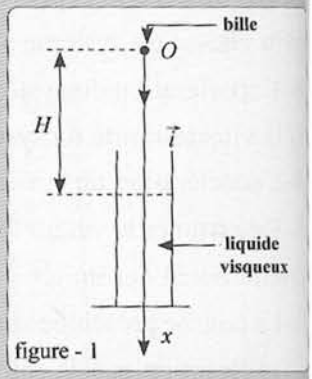


figure - 1

La courbe de la figure 2, représente l'évolution de la vitesse du centre de gravité de

la bille au cours de sa chute dans l'air, puis dans le liquide.

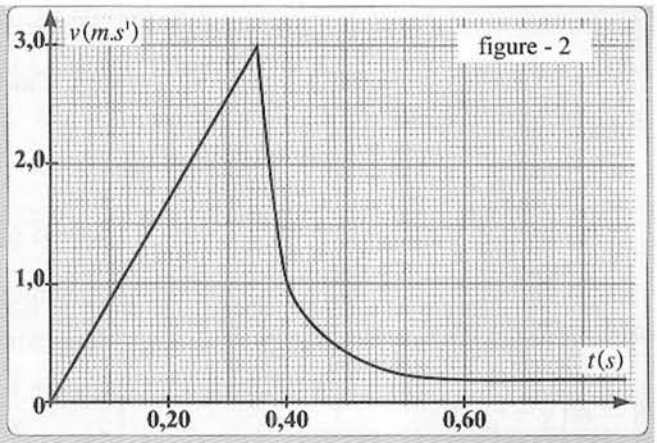


figure - 2

1- Mouvement de la bille dans l'air.

On modélise l'action de l'air sur la bille par une force $\vec{R}$ verticale et constante opposée au sens du mouvement.

On néglige le rayon de la bille devant la hauteur H.

Le centre de gravité G de la bille atteint la surface libre du liquide à la date t_1 et avec la vitesse v_1.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer l'intensité R en de V, g, ρ_l, v_1 et t_1.

1.2- En exploitant la courbe $v = f(t)$, calculer R.

2- Mouvement de la bille dans le liquide.

Pendant son mouvement dans le liquide, la bille est soumise en plus de son poids à:

- la force d'Archimède: $\vec{F} = -\rho_2.V.g.\vec{i}$.

- la force de frottement: $\vec{f} = -k.v.\vec{i}$.

On modélise l'évolution de la vitesse du centre de gravité de la bille, dans le système international des unités, par l'équation.

différentielle: $\frac{dv}{dt} = 5,2 - 26.v$ (1)

2.1- Trouver l'équation différentielle littérale vérifiée par la vitesse v.

2.2- En utilisant cette équation différentielle et la courbe de la figure 2, justifier l'équation différentielle (1).

2- À l'aide d'une équation aux dimensions déterminer la dimension de la constante k. Calculer la valeur de k.

2.4- La vitesse du centre de gravité de la bille à une date t_i est, $v_i = 2,38ms^{-1}$. Montrer en utilisant la méthode d'Euler, que la vitesse de G à la date $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ s'écrit:

$v_{i+1} = (1 - 26.\Delta t).v_i + 5,20.\Delta t$, Δt étant le pas de calcul.

Calculer v_{i+1} dans le cas où $\Delta t = 5,00ms$. ***Bac S.M, Juin 2011***

Solution

1.1-

$$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}_G=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=m\frac{d(v.\vec{i})}{dt}$$

$$=m\frac{dv}{dt}\vec{i}$$

$$P.\vec{i}-R\vec{i}=m\frac{dv}{dt}\vec{i}\ ;\ P-R=m\frac{dv}{dt};$$

$$R=m\left(g-\frac{dv}{dt}\right).$$

1.2- $v=f(t)$ est une droite:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-0}{t_1-0}=\frac{v_1}{t_1}.$$

$$R=m\left(g-\frac{v_1}{t_1}\right)=\rho V\left(g-\frac{v_1}{t_1}\right).$$

$$R=2,7.10^3.4,2.10^{-6}\left(9,80-\frac{3}{0,35}\right).$$

$$\simeq 1,4.10^{-2}N$$

2.1- On applique à la bille dans le repère galiléen $(O;\vec{i})$ la deuxième loi de Newton:

$$\vec{P}+\vec{F}_A+\vec{f}=m.\vec{a}_G=m\frac{dv}{dt}.\vec{i}\ .$$

$$mg\vec{i}-\rho_2.V.g.\vec{i}-k.v.\vec{i}=m\frac{dv}{dt}\vec{i}\ .$$

$$mg-\rho_2.V.g-kv=m\frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{dv}{dt}=g\left(1-\frac{\rho_2 V}{m}\right)-\frac{k}{m}.v.$$

$$\frac{dv}{dt}=g\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)-\frac{k}{\rho_1.V}.v.$$

2.2- Calculons $A=g\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ et

$$B=\frac{k}{\rho_1.V}.$$

$$A=9,80\left(1-\frac{1,26}{2,70}\right)\cong 5,22\simeq 5,2.$$

La valeur de k n'est pas donnée, on détermine B en fonction de A et de la vitesse limite.

On a: $\frac{dv}{dt}=A-B.v$; donc: $v_\ell=\frac{A}{B}$.

$$B=\frac{A}{v_\ell}=\frac{5,22}{0,2}\simeq 26;$$

d'où le résultat demandé:

$$\frac{dv}{dt}=5,2-26.v.$$

2.3- L'expression de la force f permet d'écrire:

$$[k]=\frac{[f]}{[v]}=\frac{[M].[a]}{[L].[T]^{-1}}=\frac{[M].[L].[T]^{-2}}{[L].[T]^{-1}}$$

$$=[M].[T]^{-1}$$

L'unité de k est $kg.s^{-1}$.

On tire la valeur de k à partir de B:

$$k=B.\rho_1.V=26.2,70.10^3.4,20.10^{-6};$$

$$k=0,294kg.s^{-1}$$

2.4- $v_{i+1}=v_i+a_i.\Delta t$.

Comme: $a_i=\left(\frac{dv}{dt}\right)_{ti}=15,2-26v_i;$

il vient: $v_{i+1}=v_i+5,2\Delta t-26v_i.\Delta t$

$$=(1-26\Delta t)v_i+5,2\Delta t$$

14 De l'étude de la chute libre à la chute avec frottement

Newton a supposé que tous les corps ont même mouvement de chute quelle que soit leur masse. Pour vérifier cette hypothèse Newton a réalisé l'expérience de chute dans un tube vide en utilisant des corps de masse et de formes différentes et on déduit que ce sont les forces de frottement fluides qui sont responsables de la différence des

vitesses de chute des corps vers la terre.

Ahmed et Myriam ont décidé de vérifier expérimentalement la déduction de Newton, pour cela ils ont utilisé deux billes en verre (a) et (b) ayant le même volume V et la même masse m.

Ils abandonnent les deux billes au même instant $t = 0$ et sans vitesse initiale d'une même hauteur h du sol fig (1).

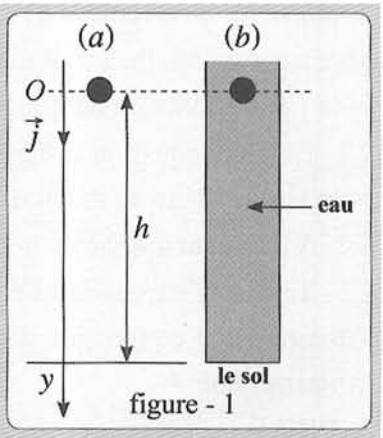


figure - 1

- Ahmed a lâché la bille (a) dans l'air;
- Myriam a lâché la bille (b) dans un tube transparent contenant de l'eau de hauteur h fig (1).

A l'aide d'un dispositif convenable Ahmed et Myriam ont obtenu les résultats suivants:

- La bille (a) atteint le sol à l'instant $t_a = 0,41s$;
- La bille (b) atteint le sol à l'instant $t_b = 1,1s$.

Données: accélération de la pesanteur $g = 9,80m.s^{-2}$;

$m = 6,0.10^{-3}kg$; $V = 2,57.10^{-6}m^3$; masse volumique de l'eau $\rho = 1000kg.m^{-3}$.

On suppose que la bille (a) n'est soumise au cours de sa chute dans l'air qu'à son poids.

La bille (b) est soumise au cours de sa chute dans l'eau à:

- Son poids d'intensité $P = mg$;
- La poussé d'Archimède d'intensité $F_A = \rho.g.V$;
- La force de frottement fluide d'intensité $f = K.v^2$ avec K une constante positive et v vitesse du centre d'inertie de la bille.

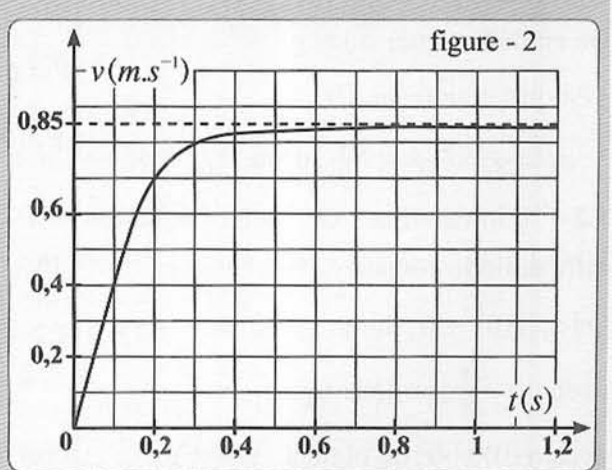


figure - 2

1- Étude du mouvement de la bille (a) dans l'air.

1.1- Établir l'équation différentielle que vérifie la vitesse du centre d'inertie de la bille (a) au cours de la chute.

1.2- Calculer la valeur de la hauteur h.

2- étude du mouvement de la bille (b) dans l'eau.

Myriam a enregistré à l'aide d'un dispositif convenable l'évolution de la vitesse de la bille (b) au cours du temps; Elle a obtenu le graphe représenté dans la figure 2.

2.1- Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille (b) au cours de sa chute dans l'eau en fonction des données du texte.

2.2- A l'aide du graphe de la figure 2, déterminer la valeur de la constant K.

2.3- Trouver l'expression de l'accélération a_{th} du centre d'inertie de la bille (b) à l'instant $t = 0$ en fonction de g, V, ρ et m. Vérifier qu'elle coïncide avec la valeur expérimentale a_{exp}.

3- Différence entre les durées de chute.

Ahmed et Myriam ont répété leur expérience dans les conditions précédentes mais cette fois la hauteur d'eau dans le tube est $H = 2h$ Ahmed et Myriam ont libéré les deux billes (a) et (b) sans vitesse initiale au même instant $t = 0$ et de la même hauteur $H = 2h$.

a- Exprimer Δt la durée qui sépare l'arrivée des deux billes (a) et (b) au sol en fonction de t_a, t_b, g, h et v_t.

b- Calculer la valeur de Δt.

Bac SM. Juin 2013

Solution

1- Mouvement de la bille (a) dans l'air.

1.1- Dans l'air, la chute est considérée comme libre; la deuxième loi de Newton, donne: $\sum \vec{F}_{ext} m\vec{g} = m.\vec{a}_G$.

On en déduit que: $\vec{a}_G = \vec{g}$.

- Par projection sur Oy:

$$ay = g = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt}, \text{ d'où: } \frac{dv}{dt} = g$$

1.2- L'intégration de cette équation différentielle donne: $v = gt + c$.

On a: $v(0) = 0$, donc: $c = 0$ et $v = g.t$.

avec $v = \frac{dy}{dt}$; on déduit que: $y = \frac{1}{2}gt^2 + c'$

avec $y(0) = 0$, on obtient: $y = \frac{1}{2}g.t^2$.

Au niveau du sol: $h = \frac{1}{2}gt_a^2 = 0,82m$.

2- Mouvement de la bille (b) dans l'eau.

D'après la deuxième loi de Newton:

$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}$.

Par projection sur Oy:

$P - F_A - f = ma_y = m\frac{dv}{dt}$.

$mg - \rho.V.g - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$;

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{\rho v}{m}\right)$;

2.2- Lorsque le régime permanent s'établit:

$v = v_t = cte$; $\frac{k}{m}v_t^2 = g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right)$;

ceci donne: $k = \frac{g}{v_t^2}(m - \rho.V)$.

On trouve: $k = 4,7.10^{-2} kg.m^{-1}$.

2.3- $a_{th} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right)$;

$a_{th} = 9,8\left(1 - \frac{10^3.2,57.10^{-6}}{6,0.10^{-3}}\right) = 5,60 m.s^{-2}$

$a_{exp} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_0$: pente de la tangente à $t = 0$.

$a_{exp} = \frac{0,85 - 0}{0,152 - 0} \simeq 5,6 m.s^{-2}$.

3.a- Soit t'_a, la durée nécessaire à la bille (a) pour parcourir la distance H :

$H = \frac{1}{2} g.t_a'^2$

$2h = \frac{1}{2} g.t_a^2$ (2), or $h = \frac{1}{2} g.t_a^2$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow t_a'^2 = 2t_a^2$; $t'_a = t_a\sqrt{2}$ (3).

La durée t'_b effectuée par la bille (b) pour parcourir $H = 2h$ peur s'écrire:

$t'_b = t_b + t''_b$.

Comme $t_b = 1,1s$, la bille (b) parcourt la deuxième distance h lorsque le régime permanent est atteint alors:

$t''_b = \frac{h}{v_\ell}$ et par suite: $t'_b = t_b + \frac{h}{v_\ell}$ (4).

Les relations (3) et (4) donnent:

$\Delta t = t'_b - t'_a = t_b + \frac{h}{v_\ell} - t_a\sqrt{2}$.

$\Delta t = 1,1 + \frac{0,82}{0,85} - 0,41\sqrt{2} = 1,48s$.

15 Tout corps immergé dans un fluide est soumis à la poussée d'Archimède, il est en mouvement de translation dans ce fluide, il est soumis en plus à une force de frottement fluide.

Cet exercice a pour objectif l'étude de l'évolution de la vitesse de deux billes (a) et (b) en verre homogène de rayons différents, en mouvement de translation de vitesse relativement faible dans une huile.

Données:

- masse volumique du verre: $\rho = 2600 kg.m^{-3}$;
- masse volumique de l'huile: $\rho_0 = 970 kg.m^{-3}$;
- viscosité de l'huile: $\eta = 8,00.10^{-2} N.m^{-2}.s$;
- accélération de la pesanteur: $g = 9,81 m.s^{-2}$;
- expression du volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi.r^3$.

On abandonne au même instant $t = 0$, les deux billes (a) et (b) à la surface de l'huile transparente dans un tube cylindrique vertical. La hauteur de l'huile est $H = 1,00m$ fig (1).

1- Etude du mouvement de la bille (a).

Pendant son mouvement par rapport au repère $(O;\vec{i})$ lié à la terre, la bille (a) est soumise aux forces suivantes:

- la poussée d'Archimède: $\vec{F} = -\rho_0.V.g.\vec{i}$;

- la force de frottement fluide: $\vec{f} = -6\pi.\eta.r.v.\vec{i}$;

v: vitesse de la bille.

- son poids: $\vec{P} = m.\vec{g}$.

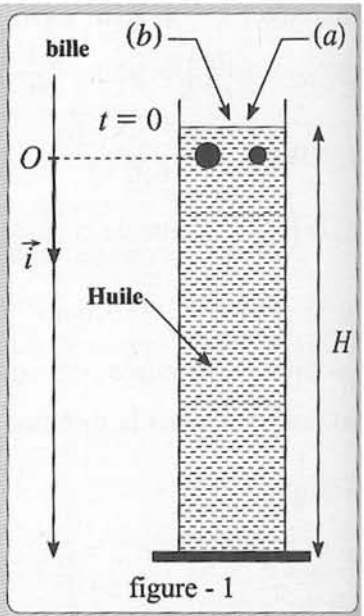


figure - 1

On désigne par τ le temps caractéristique du mouvement de la bille (a) et on considère que sa vitesse limite v_ℓ est atteinte au tout d'une durée 5τ.

1.1- Etablir l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$ du mouvement de la bille (a), en déterminant les expressions de τ et C.

Calculer τ sachant que $r = 0,25cm$.

1.2- Calculer la vitesse limite v_ℓ de la bille (a).

2- Etude comparative des mouvements des billes (a) et (b).

- Le rayon de la bille (b) est $r' = 2r$.

2.1- Déterminer en justifiant, la bille qui met plus de temps à atteindre sa vitesse limite.

2.2- On donne la distance parcourue dans le régime transitoire:

- Par la bille (a): $d_1 = 5,00cm$

- Par la bille (b): $d_2 = 80,0cm$

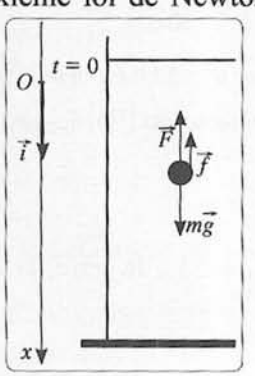
On néglige r et r' devant H.

Calculer la durée qui sépare l'arrivée des deux billes (a) et (b) au fond du tube.

Bac SM, Juin 2010

Solution

1.1- La deuxième loi de Newton permet d'écrire:



en utilisant $(O;\vec{i})$: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$;

$$P_x + F_x + f_x = m.a_G;$$

soit donc: $$mg - F - f = m.\frac{dv}{dt};$$

$$mg - 6\pi\eta.r.v - \rho_0.V.g = m.\frac{dv}{dt};$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta.r}{m}.v = g\left(1 - \rho_0\frac{V}{m}\right);$$

or: $$m = \rho.V = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

il vient: $\frac{dv}{dt}+\frac{9\eta}{2\rho.r^2}.v=g\left(1-\frac{\rho}{\rho}\right)$

ou encore: $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=C$;

avec: $C=g\left(1-\frac{\rho}{\rho}\right)$ et $\tau=\frac{2\rho.r^2}{9\eta}$

$$\tau=\frac{2.2600.(0,25.10^{-2})}{9,8.10^{-2}}.$$

$$=4,51.10^{-2}s$$

1.2- La vitesse limite est atteinte lorsque $\frac{dv}{dt}=0$

$$v_l=\tau.C=\tau.g\left(1-\frac{\rho}{\rho}\right)$$

$$v_l=4,51.10^{-2}9,81\left(1-\frac{970}{2600}\right).$$

$$=2,78.10^{-1}m.s^{-1}$$

2.1- Si la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent est 5τ, alors:

- pour la bille (a): $t_{ia}=5\tau=\frac{10.\rho.r^2}{9\eta}$ (1)

- pour la bille (b):

$$t_{ib}=5\tau'=\frac{10.\rho.r'^2}{9\eta}=\frac{40.\rho.r^2}{9\eta}.$$

$$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow\frac{t_{1b}}{t_{1a}}=\frac{5\tau'}{5\tau}=4.$$

La bille (b) met quatre fois plus de temps que la bille (a) pour atteindre le régime permanent.

2.2- Soit t_a durée mise par la bille (a) pour arriver au fond du tube en parcourant la distance H.

Cette distance est parcourue en deux étapes:

- l'étape transitoire, parcourue pendant $t_{1a}=5\tau$

- et l'étape du régime permanent de durée t_{2a}.

On a donc: $t_a=t_{1a}+t_{2a}=5\tau+t_{2a}$

Or: $t_{2a}=\frac{H-d_1}{v_\ell}$, donc:

pour la bille (a):

$$t_a=t_{1a}+t_{2a}=5\tau+\frac{H-d_1}{v_\ell};$$

pour la bille (b):

$$t_b=t_{2a}+t_{2b}=5\tau'+\frac{H-d_2}{v'_\ell};$$

avec: $\tau'=4\tau$ et $v'_\ell=\tau'.c=4v_\ell$;

on obtient : $\begin{cases}t_a=5\tau+\frac{H-d_1}{v_\ell}\\ t_b=20\tau+\frac{H-d_2}{4v_\ell}\end{cases}$

A.N:

$$t_a=5.4,51.10^{-2}+\frac{1,00-5,00.10^{-2}}{0,278}$$

$$t_a\simeq 3,64s$$

$$t_b=20.4,51.10^{-2}+\frac{100-80,00}{4.0,278}$$

$$t_b\simeq 1,80s$$

$$\Delta t=t_a-t_b$$

$$\Delta t=3,64-1,80$$

$$\Delta t\simeq 2,56s$$

Autre méthode:

$$\Delta t=t_a-t_b$$

$$\Delta t=-15\tau+\frac{(H-d_i)}{v_\ell}-\frac{(H-d_2)}{4v_\ell}$$

$$\Delta t=-15\tau+\frac{3H+d_2-4d_1}{4v_\ell}$$

$$\Delta t=-15.4,51.10^{-2}+\frac{3+0,8-0,2}{4.0,278}$$

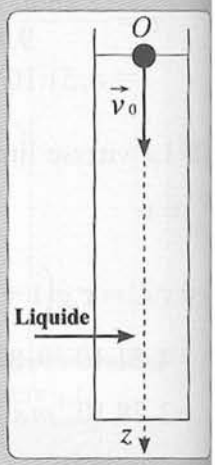
$$=2,56s$$

16 Cet exercice traite le cas particulier de la chute verticale d'un solide de masse m dans un liquide de même masse volumique que celle de ce corps.

La force de frottement due à ce liquide est modélisée par $\vec{f} = -k.\vec{v}$.

$\vec{v}$: vitesse du centre de gravité du corps.

A l'instant $t = 0$, on communique au corps au point O, une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dirigée verticalement vers le bas (voir figure).



1- Montrer que ce mouvement est régi par l'équation différentielle suivante: $\frac{dv}{dt} + \alpha.v = 0$.

Exprimer α en fonction des données.

2- Etablir la relation: $\alpha.z(t) = v_0 - v(t)$.

3- Calculer la profondeur maximale atteinte par le corps. dans le cas où $v_0 = 12m.s^{-1}$ $m = 40g$ et $k = 0,2(S.I)$.

Solution

1- $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}_G$.

On a: $P = m\vec{g} = \rho V.\vec{g}$ et $\vec{F} = -\rho_0.V.\vec{g}$.

Puisque $\rho = \rho_0$, les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{F}$;

d'où: $\vec{f} = m\vec{a}_G$

$$-k\vec{v} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$-kv = m\frac{dv}{dt}$$

ou bien: $\frac{dv}{dt} + \alpha.v = 0$ avec $\alpha = \frac{k}{m}$

2- On utilise la relation $v = \frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\frac{dz}{dt} = 0.$$

On passe aux primitives:

$$v + \frac{k}{m}.z = cte.$$

Les conditions initiales sont telles que:

$z(0) = 0$ et $v(0) = v_0$,

d'où: $v_0 + 0 = cte$;

donc: $v(t) + \frac{k}{m}z(t) = v_0$.

$\alpha.z(t) = v_0 - v(t)$.

3- Au cours de la chute z augmente et v diminue $z_{max} = \frac{v_0}{\alpha} - \frac{v_{min}}{\alpha}$.

La vitesse devient minimale lorsque le corps s'arrête.

$$z_{max} = \frac{v_0}{\alpha} = \frac{m.v_0}{k} = \frac{40.10^{-3}.12}{0,2}.$$

$$= 2,4m$$

17 Galilée, homme de sciences italien, s'intéressa à l'étude de la chute de divers corps. Selon la légende, il aurait effectué cette étude en lâchant ces corps du sommet de la tour de Pise.

Pour vérifier certains résultats avancés par Galilée, on se propose d'étudier dans cette partie la chute dans l'air de deux boules ayant le même rayon et des masses volumiques différentes.

L'étude du mouvement de chaque boule s'effectue dans un repère $R(O;\vec{k})$ associé à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère, à chaque instant, la position du centre d'inertie de chacune des deux boules par la cote z sur l'axe vertical $(O;\vec{k})$ orienté vers le haut et dont l'origine est prise au niveau du sol figure (1).

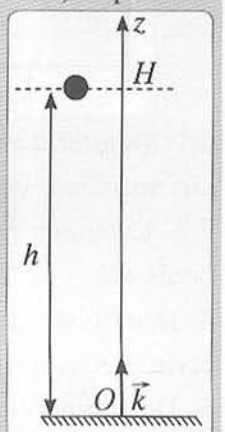


figure-1

Chaque boule est soumise, durant sa chute, à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement fluide $\vec{f}$ (On néglige la poussée d'Archimède devant ces deux forces).

On admet que l'intensité de la force $\vec{f}$ s'écrit: $f = 0,22.\rho_{air}.\pi.R^2.v_z^2$ où ρ_{air} est la masse volumique de d'inertie G de la boule à un instant t.

Données:

- Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$,
- L'intensité de la pesanteur $g = 9,8m.s^{-2}$,
- La masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1,3kg.m^{-3}$.

Cette étude est effectuée avec deux boules (a) et (b) homogènes ayant le même rayon $R = 6cm$ et des masses volumiques respectives $\rho_1 = 1,14.10^4 kg.m^{-3}$ et $\rho_2 = 94kg.m^{-3}$.

Les deux boules sont lâchées au même instant $t = 0$, sans vitesse initiale, du même plan horizontal auquel appartient le point H. Ce plan est situé à une hauteur $h = 69m$ du sol figure (1).

1- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z du centre d'inertie d'une boule s'écrit: $\frac{dv_z}{dt} = -g + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}.v_z^2$, où ρ_i désigne la masse volumique de la boule (a) ou (b).

2- Déduire l'expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule.

3- Les courbes obtenues sur les figures 2 et 3 représentent l'évolution de la cote $z(t)$ et de la vitesse $v_z(t)$ du centre d'inertie G de chacune des deux boules, au cours de la chute.

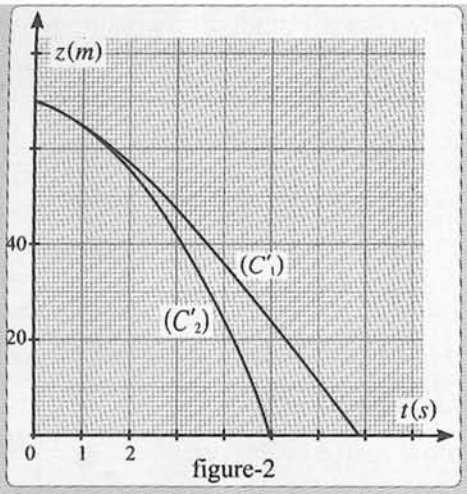


figure-2

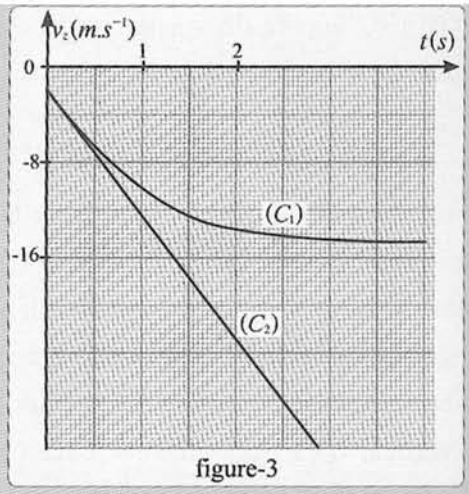


figure-3

3.1- Montrer, à l'aide de l'expression de la vitesse limite, que la courbe (C_1) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b).

3.2- Expliquer pourquoi la courbe (C_2) correspond aux variations de la côte de la boule (a).

4- Déterminer, à l'aide de la courbe (C_2), la nature du mouvement de la boule (a) et écrire l'équation horaire $z(t)$.

5- Déterminer la différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à l'instant où la première boule touche le sol (On néglige les dimensions des deux boules).

6- Sachant que la valeur algébrique de la vitesse de la boule (b) à l'instant de date t_n est $v_{zn} = -11,47 m.s^{-1}$, trouver, utilisant la méthode d'Euler, la valeur de l'accélération a_{zn} du mouvement à l'instant de date t_n et la vitesse $v_{z(n+1)}$ à l'instant de date t_{n+1}. On prend le pas du calcul $\Delta t = 125ms$.

Mécanique partie I: Etude de la chute de deux boules dans l'air (SM, Juin 2016)

Solution

1- Pour une boule de masse m, la deuxième loi de Newton s'écrit:

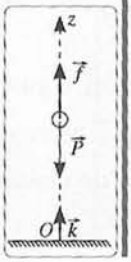
$$m_i.\vec{g} + \vec{f} = m_i.\vec{a}_G = m_i.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m_i(-g\vec{k}) + f.\vec{i} = m_i\frac{dv_z}{dt}.\vec{k}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{f}{m_i}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,22\rho_{air}.\pi.R^2.v_z^2}{\rho_i.v}$$

$$= -g + \frac{0,22.\rho_{air}\pi.R^2.v_z^2}{\frac{4}{3}\pi R^3.\rho_i}$$



$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,165}{R.\rho_i}.v_z^2$$

2- La vitesse limite est la vitesse constante atteinte en régime permanent.

En passant $\frac{dv_z}{dt} = 0$, on obtient:

$$(v_z)_\ell = -\sqrt{\frac{g.R.\rho_i}{0,165}}, \text{ car } v_z < 0.$$

Son module est: $v_\ell = \sqrt{\frac{g.R.\rho_i}{0,165}}$.

3.1- La vitesse limite est proportionnelle à $\sqrt{\rho_i}$.

- Pour la boule (a), on a:

$(v_l)_a = \sqrt{\dfrac{g.R}{0,165.\rho_{air}}.\rho_1}$.

- Pour la boule (b), on a:

$(v_l)_b = \sqrt{\dfrac{g.R}{0,165.\rho_{air}}.\rho_2}$.

$\dfrac{(v_l)_a}{(v_l)_b} = \sqrt{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}} = \sqrt{\dfrac{1,14.10^{14}}{94}} \simeq 11$.

La vitesse limite la plus faible correspond donc à la boule (b) la mains dense. Il lui correspond donc la courbe (C_1).

3.2- La figure (3) montre qu'après les premiers mètres de chute, la boule (a) (courbe C_2) est plus rapide car à une même date t, on remarque $|V_z|_a > |V_z|_b$.

Il en résulte que la boule (a) arrive au sol $(z = 0)$ avant la boule (b).

En revenant aux courbes $z = f(t)$, figure (2). On déduit que la boule (a) atteint le sol à la date $t_a \simeq 4,8s$. Il lui correspond donc la courbe (C'_2).

4- Pour la boule (a) on constante d'après la courbe (C_2) que $V_z = f(t)$ est une droite de la forme:

$V_z = C.t$ avec $C \simeq -\dfrac{12,5}{1,3} \simeq 9,6m.s^{-2}$.

Le mouvement de (a) est rectiligne sur l'axe Oz d'accélération $a_z = -9,6m.s^{-2}$.

Comme $a_z = cte$ et $a_z.v_z > 0$, c'est un mouvement rectiligne uniformément accéléré

On obtient $z(t)$ à partir de $V_z(t)$.

$\dfrac{dz}{dt} = V_z = -9,6t$, alors:

$z(t) = -4,8t^2 + C'$;

à $t = 0$, on $z(0) = h$, d'où: $C' = h$,

alors: $z(t) = -4,8t^2 + h = -4,8t^2 + 69$.

5- Lorsque la boule (a) touche le sol, alors $z = 0$, la courbe C'_2 ou l'équation horaire précédente fournit la date $t_a \simeq 4,8s$.

A cette date, d'après la courbe C'_1, la boule (b) est à la côte $z_{(b)} = 26m$.

La distance qui les sépare les boules à cet instant est $d = 26m$.

6- L'équation différentielle peut s'écrire:

$a_{zn} = -g + \dfrac{0,165.\rho_{air}}{R.\rho_1}v_z^2$

avec $v_z = -11,47m.s^{-1}$, il vient:

$a_{zn} = -9,8 + \dfrac{0,165.1,3.(-11,47)^2}{6.10^{-2}.94}$

$a_{zn} = -4,79m.s^{-2}$

La méthode d'Euler permet d'écrire:

$v_{z,n+1} = v_{z,n} + a_{z,n}.\Delta t$

$v_{z,n+1} = -11,47 - 4,79.0,125$

$v_{z,n+1} = -12m.s^{-1}$

18 Pour aller plus loin

On considère un mobile de masse m possédant un mouvement unidirectionnel d'axe Ox.

L'ensemble des forces appliquées à ce mobile se résume à une unique force dont l'expression est la suivante: $\vec{f} = -\alpha V^2 \vec{i}$.

1- Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V de ce mobile.

2- Montrer, en séparant les variables V et t de cette équation différentielle, que l'on aboutit à une nouvelle expression: $\dfrac{dV}{V^2} = -\dfrac{\alpha}{m}dt$.

On considère que le mobile possède à la date $t = 0$ le vecteur vitesse $\vec{V}_0 = V_0.\vec{i}$.

3- En intégrant judicieusement l'expression précédente, montrer que l'évolution de

la vitesse de ce mobile au cours du temps s'écrit:

$V(t) = \frac{V_0}{1+kt}$ avec k un coefficient que l'on explicitera.

4- Déterminer l'expression du temps pour lequel la vitesse du mobile vaut le dixième de la vitesse initiale V_0. Quelle différence fait apparaître cette expression par rapport à celle obtenue losque $f = \alpha.v$?

5- Faire l'application numérique. On prendra:

$m = 100g$; $\alpha = 0,20S.I$; et $V_0 = 10m.s^{-1}$.

Solution

1- En appliquant la 2ème loi de Newton au mobile, on a successivement:

$\sum \vec{F}_{ap} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{dV}{dt}\vec{i}$ de part la nature unidirectionnelle du mouvement $-\alpha V^2\vec{i} = m\frac{dV}{dt}\vec{i}$ en explicitant la résultante des forces appliquées

Finalement: $\frac{dV}{dt} + \frac{\alpha}{m}V^2 = 0$.

2- En séparant les variables V et t on obtient l'expression suivante:

$\frac{dV}{V^2} = -\frac{\alpha}{m}dt$.

3- On intègre l'expression précédente en veillant bien à la nature des bornes d'intégration:

Pour $t = 0$ la norme du vecteur vitesse vaut V_0. Pour une date quelconque t, la vitesse s'écrit $V(t)$. On vérifie alors:

$$\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV}{V^2} = -\frac{\alpha}{m_0}\int_0^t dt.$$

Soit: $\left[-\frac{1}{V}\right]_{V_0}^{V(t)} = -\frac{\alpha}{m}[t]_0^t$.

Puis: $\left(-\frac{1}{V(t)} + \frac{1}{V_0}\right) = -\frac{\alpha}{m}t$.

Finalement en isolant $V(t)$, on obtient l'expression: $V(t) = \frac{V_0}{1+\frac{\alpha V_0}{m}t} = \frac{V_0}{1+kt}$.

Avec: $k = \frac{\alpha V_0}{m}$.

4- Soit t_C la date recherchée, celle-ci vérifie:

$V(t_C) = \frac{V_0}{1+kt_C} = \frac{V_0}{10}$ soit $t_C = \frac{9}{k} = \frac{9m}{\alpha V_0}$.

Dans le cas où $f = \alpha v$ ou aura:

$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = 0$.

$v = v_0^{e-\frac{\alpha}{m}t}$

On trouve $t_C = \frac{m\ln(10)}{\alpha}$.

Cette expression ne fait pas apparaître la vitesse initiale V_0. Ainsi pour une force de frottement en V, la vitesse initiale n'influe pas sur le temps d'arrêt du mobile, ce qui n'est pas le cas dans le cadre d'une force de frottement en V^2 où le temps d'arrêt est inversement proportionnel à cette vitesse initiale.

5- L'application numérique donne:

$t_C = 0,45s$.

Valeur numérique qui montre qu'à vitesse initiale identique, le freinage est plus efficace avec une force de frottement en V^2.

4 MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

I- ACCÉLÉRATION:

Un projectile est un solide de masse m, lancé avec une vitesse initiale $\vec{V}_o$ dans le champ de pesanteur uniforme.

$\vec{V}_o$ fait avec l'axe horizontal Ox un angle α.

Le système étudié est le solide soumis à son poids $\vec{P}$.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

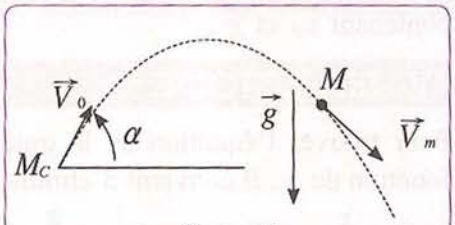


figure 1

Le théorème du centre d'inertie s'écrit : $m.\vec{a}_G = \vec{P} = m.\vec{g}$, soit $\vec{a}_G = \vec{g}$

Pour tout mouvement de chute libre, l'accélération du centre d'inertie du solide est égale au champ de pesanteur.

L'accélération ne dépend ni de la masse de l'objet ni de la manière dont il a été lancé. La masse n'intervient pas dans un mouvement de chute libre.

II- VITESSE:

On se place dans les conditions initiales de la figure (2).

La chute étant libre, on a toujours : $\vec{a}_G = \vec{g}$

Donc : $\vec{a}_G \begin{vmatrix} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = 0 \\ a_z = \ddot{z} = -g \end{vmatrix}$

Par intégration:

$\vec{V}_G \begin{vmatrix} V_x = cte = C_1 \\ V_y = C_2 \\ V_z = -gt + c_3 \end{vmatrix}$ or $\vec{v}_G(t=0) \begin{vmatrix} V_{Ox} = v_0.\cos\alpha \\ V_{Oy} = 0 \\ Voz = v_o.\sin\alpha \end{vmatrix}$

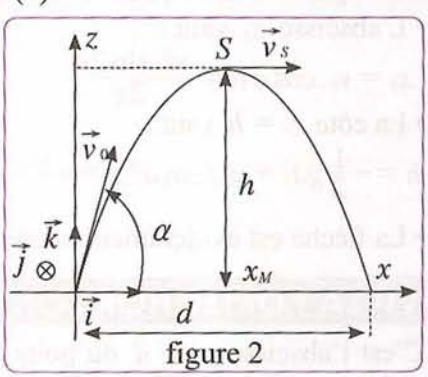


figure 2

Donc $C_1 = v_o\cos x$, $C_2 = 0$ et $C_3 = v_0\sin\alpha$, d'où: $\vec{v}_G \begin{vmatrix} v_x = \dot{x} = v_0.\cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = -g.t + v_{g.}.\sin\alpha \end{vmatrix}$

Donc : $C_1 = v_0\cos x$, $C_2 = 0$ et $C_3 = v_0\sin\alpha$, d'où: $\vec{v}_G \begin{vmatrix} v_x = \dot{x} = v_0.\cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$

III- EQUATIONS HORAIRES:

Une nouvelle intégration donne les équations du mouvement :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (V_0.\cos\alpha).t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t & (3) \end{cases} \quad \text{car } \overrightarrow{OG}(t=0)\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Ces équations montrent que :

• Les mouvements de G s'effectuent dans le plan (xOz), c'est-à-dire le plan vertical contenant $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$.

IV- TRAJECTOIRE:

Pour trouver l'équation de la trajectoire du centre d'inertie G, on exprime z en fonction de x. Il convient d'éliminer le temps t des équations (1) et (3) :

$t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha}$, d'où $z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos\alpha}x^2 + (\tan\alpha).x$.

La trajectoire du centre d'inertie d'un objet en chute libre, lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale, est une portion de parabole contenue dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.

IV- LA FLÈCHE:

C'est l'altitude maximale h atteinte par le corps. En ce point S, la tangente à la trajectoire est horizontale : $v_z = 0$. Cela se produit à la date t_S donnée par :

$0 = -g.t_S + v_0.\sin\alpha$, soit $t_S = \frac{v_0.\sin\alpha}{g}$

• L'abscisse x_S vaut :

$x_S = v_0.\cos a.t_S = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{2g}$

• La côte $z_S = h$ vaut :

$h = -\frac{1}{2}g.t_1^2 + v_0.(\sin\alpha).t = -\frac{v_0^2.\sin^2 a}{2g} + \frac{v_0^2.\sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin^2 a}{2g}$

• La flèche est évidemment maximale pour $a = \frac{\pi}{2}$ (tir vertical).

VI- LA PORTÉE HORIZONTALE:

C'est l'abscisse $x_P = d$ du point P de la trajectoire situé dans le plan horizontal passant par O, c'est-à-dire d'ordonnée nulle. Avec $z = 0$, on obtient:

$0 = -\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha).x$

$0 = x\left(-\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}x + \tan\alpha\right)$

La solution $x = 0$ correspond au point de lancement O, l'autre solution au point P d'où :

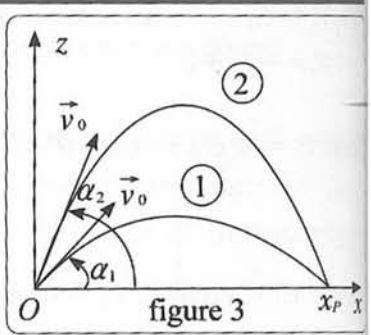


figure 3

$x_P = d = \frac{2v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{g} = \frac{2v_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$, soit $d = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$

Remarquons que $d = 2x_s$:

- Pour une vitesse initiale v_0 donnée, la portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$ soit $\alpha = 45^\circ$; d'où $d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$
- Pour $d < d_{max}$, $\sin 2\alpha = \frac{g.d}{v_0^2}$. Cette équation admet deux solutions, α_1 et α_2, telles que $2\alpha_2 = \pi - 2\alpha_1$, soit $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$.

Deux angles de tir sont donc possibles pour obtenir une même portée horizontale (tir tendu ou en cloche) (Figure 3)

Dans la réalité, la portée et la flèche sont plus faibles en raison de la résistance de l'air.

1 *Le canon de 75*

Le canon de 75 (75 car les obus qu'il envoyait avaient un calibre de 75mm) fut une arme très employée lors de la Première Guerre mondiale. Ses principaux atouts étaient une cadence de tir importante et un dispositif révolutionnaire pour l'époque qui permettait de compenser le recul du canon. Celui-ci pouvait envoyer des obus de 5,3kg à une distance pouvant varier de 800m à 11km!

L'espace est rapporté à un système d'axes Ox et Oy, Ox pour la direction horizontale et Oy pour la direction verticale. Le canon est placé à l'origine du système d'axes. On considère que le canon est disposé sur un sol parfaitement horizontal. L'obus est éjecté du tube du canon avec un vecteur vitesse $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. On considère que l'obus évolue dans le vide ce qui amène à négliger toute force de frottement.

On donne : $V_0 = 500 m.s^{-1}$ et $g = 9,8 m.s^{-2}$.

1- Etablir les équations paramétriques relatives à l'accélération, à la vitesse et à la position de l'obus.

2- En déduire l'expression de la trajectoire $y = f(x)$ de l'obus.

Le tube du canon est orientable et peut prendre des valeurs pouvant aller de $\alpha = -6°$ à $\alpha = 18°$.

3- Sachant que la portée maximale est atteinte pour $\alpha = 18°$, déterminer cette dernière ainsi que le «temps de vol» de l'obus pour atteindre le sol.

4- Le résultat obtenu est-il en accord avec les données de l'énoncé? Comment expliquer cette contradiction?

5- Déterminer l'altitude maximale atteinte par l'obus au cours de son mouvement.

Solution

1- L'obus se trouve soumis à l'action unique de son poids. La deuxième loi de Newton permet d'écrire dans un repère galiléen (le repère terrestre) : $\vec{P} = m\vec{g}$.

On obtient classiquement en intégrant successivement les composantes du vecteur accélération puis celle du vecteur vitesse, tout en veillant bien aux conditions initiales :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

$$\vec{V}\begin{cases} V_x(t) = V_0 \cos\alpha \\ V_y(t) = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha t \end{cases}$$

2- L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre l'équation paramétrique de $x(t)$ et $y(t)$.

La première équation donne:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \sin\alpha\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$$

équation qui correspond à une trajectoire parabolique de l'obus.

3- Sur un sol parfaitement horizontal, la protée de l'obus correspond à la distance pour laquelle celui-ci va toucher le sol, c'est-à-dire revenir à une altitude nulle $y = 0$. Ceci se traduit par l'équation :

$-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha x=0$

en factorisant par x :

$x\left(\tan\alpha-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x\right)=0$

Equation qui a deux solutions, la première correspondant à $x=0$ c'est-à-dire la position initiale de l'obus, la solution à retenir s'obtient en résolvant :

$\tan\alpha-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x=0$

c'est-à-dire $x=\frac{2V_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$

4- L'application numérique donne $x=1{,}50.10^4 m$ soit $15km$ distance bien supérieure à celle donnée par l'énoncé (11km). La différence s'explique dans la non prise en considération des frottements de l'air atmosphérique, frottements de l'air opposés au mouvement qui diminuent donc la portée maximale de l'obus.

5- L'altitude maximale atteinte par l'obus s'obtient en considérant que le vecteur vitesse de l'obus est horizontale lorsque cette altitude maximale est atteinte, autrement dit le vecteur vitesse n'a pas de composante suivant l'axe Oy à cette date. Ainsi, la date t_{hmax} pour laquelle l'altitude maximale est atteinte s'obtient en écrivant :

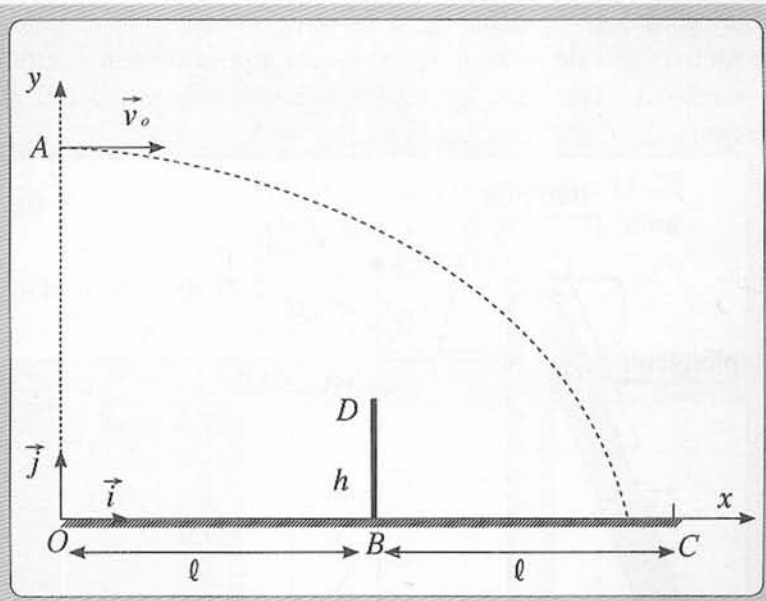
$-gt_{hmax}+V_0\sin\alpha=0$ et $t_{hmax}=\frac{V_0\sin\alpha}{g}$

$y=-\frac{1}{2}g.\left(\frac{V_0\sin\alpha}{g}\right)^2+V_0\sin\alpha.\left(\frac{V_0\sin\alpha}{g}\right)$

$y=\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2g}$

On trouve : $y=1218m$

2 Un joueur de tennis effectue un service en lançant la balle à partir d'un point A situé à la hauteur $H=2m$ du sol, avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$ horizontale (figure).



On étudie le mouvement de la balle dans le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- On néglige les frottements et on donne : $g=10m.s^{-2}$
- Longueur du terrain : $OC=2\ell$

$OB=BC=\ell=12m$

- Hauteur du filet : $h=1m$

1- Montrer que l'équation de la trajectoire de la balle est $y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2+H$

2- Trouver les deux valeurs limites $v_o(\max)$ et $v_0(\min)$ qui encadrent les valeurs de v_o pour que le service soit correct.

Solution

1- La deuxième loi de Newton:

donne $\vec{a} = \vec{g}$, d'où : $a_x = 0$ et $a_y = -g$,

d'où : $\vec{V}\begin{cases} V_x = cte = V_0 \\ V_y = -gt \end{cases}$ et

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = V_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{cases}$

Alors $y = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + H$

- La balle doit passer sans toucher le filet:

$y = f(x = \ell) > h$:

$-\frac{g}{2v_0^2}\ell^2 + H > h \Rightarrow H - h > \frac{g.\ell^2}{2v_0^2}$

$2(H-h)v_0^2 > g\ell^2$

$v_0^2 > \frac{g.\ell^2}{2(H-h)}$

$v_0 > \ell\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}} = v_{o\min}$

On trouve $v_{o\min} = 26,56 m.s^{-1}$

2- Un bon service vérifie la 2 ème condition:

lorsque $y = 0$, $x < 2\ell$

$-\frac{g}{2V_0^2}x^2 + H = 0 \Rightarrow x^2 = 2V_0^2.\frac{H}{g}$

$x = V_0\sqrt{\frac{2H}{g}} < 2$

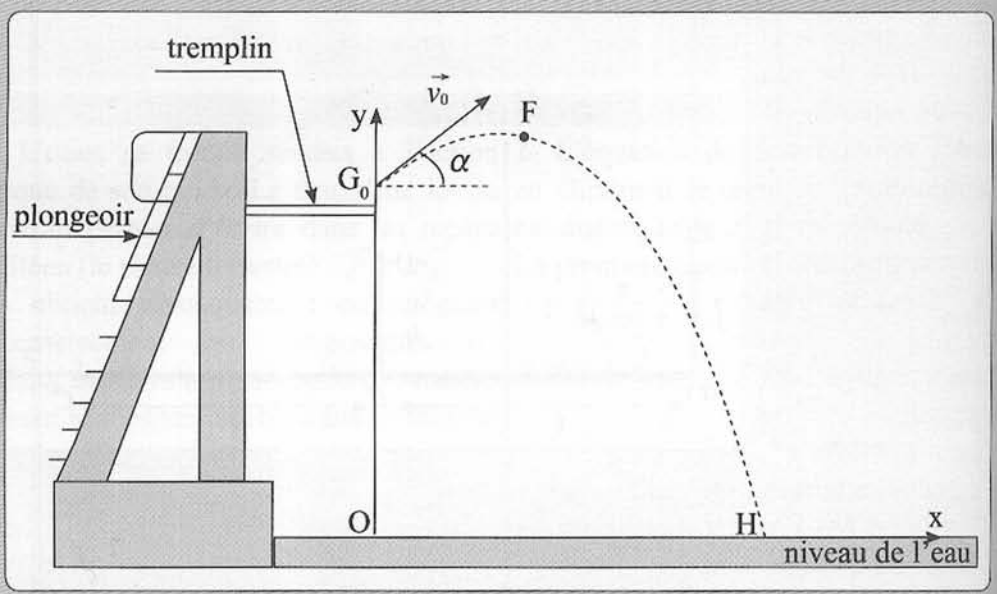
$v_0 < 2\ell\sqrt{\frac{g}{2H}} = \ell\sqrt{\frac{2g}{H}}$

$v_{\max} = \ell\sqrt{\frac{2g}{H}} = 37,56 m.s^{-1}$

en résumé :

$v_{0\min} = 26,56 m.s^{-1} < v < v_{\max} = 37,56 m.s^{-1}$

3 On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie d'un plongeur au cours d'un saut modélisé type «saut de l'ange». On négligera dans tout l'exercice le mouvement de rotation du plongeur autour de son centre d'inertie ainsi que les frottements avec l'air. Le repère d'étude xOy est défini à partir du schéma ci-dessous.



Après s'être lancé, le plongeur quitte le tremplin à l'instant $t = 0$ avec un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ incliné de $\alpha = 40°$ par rapport à l'horizontale.

Son centre d'inertie G est alors au point de G_0 coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 6,0m$.

On démontre que le mouvement de G est donné par
$\overrightarrow{OG} = (v_0.\cos\alpha).t.\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t + y_0\right).\vec{j}$.
1- Le sommet de la trajectoire étant atteint au point F d'abscisse $x_F = 1,0\ m$, en déduire la vitesse initiale v_0.
2- Le plongeur pénètre dans l'eau en H. Quelle est sa vitesse en H ?
Donnée : $g = 9,8 m.s^{-2}$

Solution

1- Au sommet F de la trajectoire, à la date t_1, la vitesse est horizontale et $v_y = 0$.
Or : $v_y = y = -g.t + v_0.\sin\alpha$
Donc : $0 = -g.t_1 + v_0.\sin\alpha$,

D'où : $t_1 = \dfrac{v_0.\sin\alpha}{g}$

Alors : $x_F = (v_0.\cos\alpha).t_1$

$= \dfrac{v_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$

$= \dfrac{v_0^2.\sin 2\alpha}{2g}$

Soit : $v_0 = \sqrt{\dfrac{2g.x_F}{\sin 2\alpha}}$

A.N. : $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\times 9,8\times 1}{\sin(2\times 40°)}}$

Soit $v_0 = 4,46 m.s^{-1}$

Remarque : On aurait pu trouver v_0 de la façon suivante :

en F, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x_F} = 0$ Soit :

$0 = \dfrac{-g.x_F}{v_0^2.\cos^2\alpha} + \tan\alpha$

D'où : $v_0^2 = \dfrac{g.x_f}{\cos^2_\alpha.\tan\alpha} = \dfrac{2g.x_F}{\sin 2\alpha}$

2- $y = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + y_0$
En H, à la date t_2, $y = 0$
D'où : $0 = -\frac{1}{2}g,\ t\frac{2}{2} + v_0.\sin\alpha.t_2 + y_0$
La solution de cette équation du second degré est $t_2 = 1,44 s$ (on rejettera la racine négative).
En H :

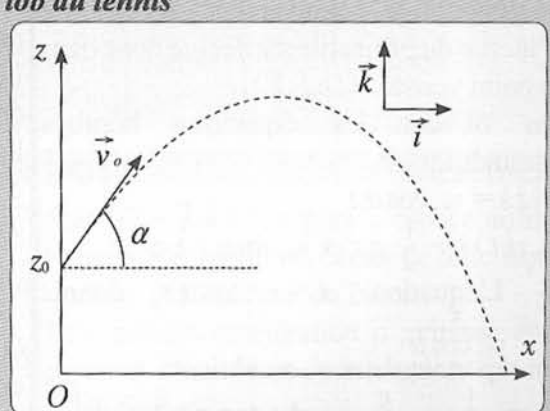
$\vec{v}_G \begin{cases} v_x = v_0.\cos\alpha = 3,42 \\ v_y = -g.t_2.v_0.\sin\alpha = -11,22 \end{cases}$

On trouve $v_x > 0$ et $v_y < 0$. d'où :
$v_G = \sqrt{(3,42)^2 + (11,22)^2}$
$= 11,7 m.s^{-1}$

4

Le lob au tennis

Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court. Le joueur 1, situé à $d_1 = 2,0\ m$ du filet, tape la balle à une hauteur $z_0 = 0,30\ m$ et lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical, de valeur $v_0 = 36\ km.\ h^{-1}$ et en formant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontale. On négligera les forces de frottement.



Données : $g = 9,8 m.s^{-2}$. La hauteur du filet h vaut $1,0 m$. La ligne de fond du court est située à $12,0\ m$ du filet.
1- Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère

$(O;\vec{i};\vec{k})$ représenté sur la figure (la balle est frappée à la date $t = 0$).

2- En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

3- La balle passe-t-elle au-dessus du filet?

4- Le joueur 2 est de l'autre côté du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle: le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur $h = 2,30\,m$. A quelle distance minimale du filet le joueur 2 doit-il se placer pour intercepter la balle?

5- Le joueur 2 se trouve à une distance $d_2 = 4,0\,m$ du filet. Peut-il intercepter la balle? le lob est-il réussi?

6- Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle lors de son impact sur le sol.

Solution

1- Référentiel terrestre galiléen.

• Système : la balle .

• La seule force extérieure est:

$\vec{P} = m.\vec{g} = -m.g.\vec{k}$ ($\vec{g}$ uniforme).

• Repère orthonormé : $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

• Application de la deuxième loi de Newton :

$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$

Soit : $\vec{a}_G = \vec{g} = -g.\vec{k}$

$\ddot{x} = 0$	$\dot{x} = cte$ $\dot{x}(0) = v_0.\cos\alpha$ donc: $\dot{x} = v_0.\cos\alpha$	$x(t) = v_0.\cos\alpha.t + cte$ $x(0) = 0$ donc $x(t) = v_0.\cos\alpha.t$
$\ddot{y} = 0$	$\dot{y} = cte$ $\dot{y}(0) = 0$ donc $\dot{y} = 0$	$y(t) = cte$ $y(0) = 0$ donc $y(t) = 0$
$\ddot{z} = -g$	$\dot{z} = -g.t + cte$ $\dot{z}(0) = v_0.\sin\alpha$ donc $\dot{z} = -g.t + v_0.\sin\alpha$	$z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + cte$ $z(0) = z_0$ donc $z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + z_0$

$y(t) = 0$; le mouvement du centre d'inertie du projectile s'effectue donc dans le point vertical $(O;\vec{i};\vec{k})$.

On obtient les équations horaires paramétriques:

$x(t) = v_0.\cos\alpha.t$

et $z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + z_0$

2- L'équation $x = v_0.\cos\alpha.t$ donne: $t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha}$

En reportant dans z, on obtient:

$$z = -\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x + z_0$$

$36km.h^{-1} = 10m.s^{-1}$

3- Calculons la valeur de z pour un point d'abscisse $x = 2,0\,m$ à l'aide de l'équation de la trajectoire: $z = 3,0m > 1,0\,m$, donc la balle passe au-dessus du filet.

4- Pour que le joueur puisse intercepter la balle, la valeur de z doit être inférieure à $h = 2,30\,m$ pour une abscisse x_1 correspondant à la position du joueur 2.

x_1 est solution de l'équation du second degré.

$$h = -\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x_1^2 + \tan\alpha.x_1 + z_0.$$

On obtient deux solutions $x'_1 = 1,4\,m$ et $x'_2 = 7,5\,m$. La solution $x'_1 < 2,0\,m$ ne convient pas. Le joueur 2 doit se trouver à une distance minimale de $5,5\,m$ du filet pour pouvoir intercepter la balle.

5- Le joueur, trop proche du filet, ne peut pas intercepter la balle.

Le lob est réussi si la balle rencontre le sol en un point d'abscisse x_2 situé avant la ligne de fond de court, c'est-à-dire si pour $z = 0$, $x < 14,0\,m$.

x_2 est solution de l'équation :

$$-\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x_2^2 + \tan\alpha.x_2 + z_0 = 0$$

On obtient $x_2 = 9,0\,m < 14,0\,m$; le lob est réussi.

6- Les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\vec{v}_G \begin{vmatrix} v_{G_x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{G_z} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Or : $x = v_0.\cos\alpha.t$

D'où : $t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

Les coordonnées s'écrivent:

$$\vec{v}_G \begin{vmatrix} v_{G_x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{G_z} = -\dfrac{g.x}{v_0.\cos\alpha} + v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Application numérique : $v_{G_x} = 5,0 m.s^{-1}$; $v_{G_z} = -9,0\ m.s^{-1}$

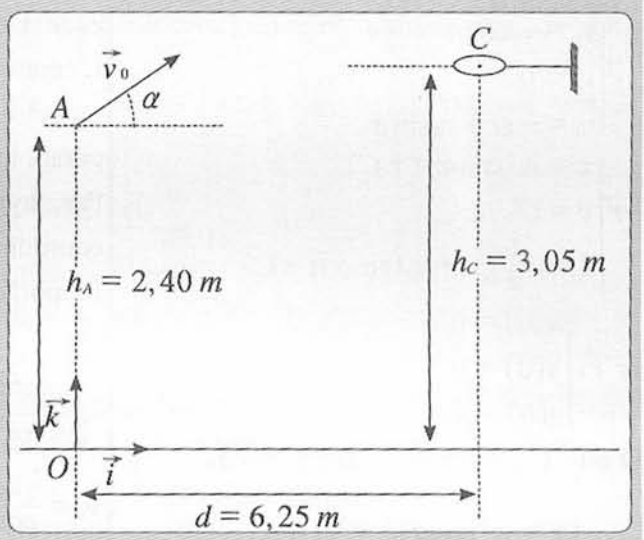
Le vecteur vitesse a une valeur égale à $\sqrt{v_{G_x}^2 + v_{G_z}^2} = 10,3 m.s^{-1}$

L'angle β que forme le vecteur vitesse avec le sol est tel que : $\tan\beta = \dfrac{|v_{G_z}|}{v_{G_x}} = 1,8$ et $\beta = 61°$

5

On étudie la trajectoire du centre d'inertie G d'un ballon de basket lancé vers le cercle du panier adverse par un joueur attaquant. On ne tiendra compte ni de la résistance de l'air ni de la rotation éventuelle du ballon.

Le lancer est effectué vers le haut ; on lâche le ballon lorsque son centre d'inertie et en A (fig, la figure n'est pas à l'echelle). Sa vitesse initiale est représentée par le vecteur $\vec{v}_0$ situé dans un plan vertical $(O;\vec{i};\vec{j})$ et faisant un angle aigu avec l'axe horizontal de mesure $\alpha = 40,0°$.



On utilisera les valeurs numériques des différentes grandeurs fournies sur la figure.

On étudie le mouvement de G par rapport au repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1- Etablir les équations paramétriques (équations horaires) du mouvement du centre d'inertie G du ballon. Montrer que la trajectoire de G est située dans un plan vertical et donner sa nature.

2- En déduire la valeur v_0 de la vitesse initiale du ballon pour que G passe exactement au centre G du cercle «panier». On donne g=9,81 $m.s^{-2}$.

Solution

1- Système étudié par rapport au repère terrestre supposé galiléen: le ballon.

La seule force agissant sur le ballon et son poids $\vec{P}$.

D'après la relation de la dynamique appliquée au système, on a :

$\sum\vec{f} = m\vec{a}_G$; $\vec{P} = m\vec{a}_G$

$m\vec{g} = m\vec{a}_G$; $\vec{a}_G = \vec{g}$

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ le repère d'espace utilisé: le repère temporel est choisi de telle façon que $t = 0$ à l'instant du lancer.

Les vecteurs accélération $\vec{a}$, vitesse $\vec{v}$ et position $\vec{r}$ ont pour coordonnées:

$$\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = -gt + C_3 \end{cases}$$

$$\text{or } \vec{v}_0\begin{cases} v_x(0) = v_0\cos\alpha \\ v_y(0) = 0 \\ v_z(0) = 0 + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

D'où : $C_1 = v_0\cos\alpha$; $C_2 = 0$; $C_3 = v_0\sin\alpha$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{r}\begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t + C'_1 \\ y = C'_2 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t + C'_3 \end{cases}$$

$$\text{or } \vec{r}_0\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h_A \end{cases}$$

D'où : $C'_1 = 0$; $C'_2 = 0$; $C'_3 = h_A$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t + h_A \end{cases}$$

Comme $y = 0$ quel que soit l'instant du mouvement considéré, la trajectoire de G est donc située dans le plan vertical $(O;\vec{i};\vec{k})$.

en éliminant le paramètre temps t, on a:

$$t = \frac{x}{v_0(\cos\alpha)}$$

et $z = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x + h_A$ (1)

avec $x \in [0;x_C]$

L'équation est celle d'une parabole ; la trajectoire de G est donc une portion de parabole située entre A et C.

Par hypothèse, G passe par C, de coordonnées $(x_C = d$ et $z_C = h_C)$.

En portant ces conditions dans (1), on a:

$$h_C = \frac{-gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + d\tan\alpha + h_A$$

$$2v_0^2\cos^2\alpha = \frac{-gd^2}{d\tan\alpha + h_A - h_C}$$

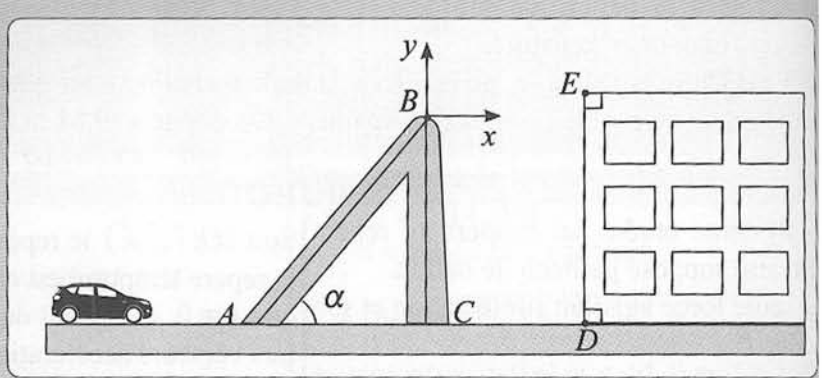
$$v_0 = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(d\tan\alpha + h_A - h_C)}}\ ;$$

$$v_0 = 8,43 m.s^{-1}$$

6

Un réalisateur de cinéma souhaite faire réaliser à un cascadeur professionnel un saut pour un film.

Ce cascadeur doit sauter avec sa voiture sur la piste horizontale du toit en terrasse d'un immeuble. Pour cela, il utilise un tremplin ABC formant un angle α avec le sol horizontal et placé à la distance $CD = 15\,m$ de l'immeuble.



On étudiera le mouvement du centre d'inertie G de l'ensemble (automobile-pilote) dans le référentiel terrestre.

On admettra qu'à l'instant initial, le centre d'inertie G de la voiture quitte le point B (origine du repère) avec la vitesse $\vec{V}_B$ et qu'il est confondu avec le point E à l'arrivée sur le toit.

Données : la masse du système (automobile-pilote) est $m = 1000kg$; $BC = 8\,m$; $DE = 10\,m$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

1- Etablir, dans le repère $(B;\vec{i};\vec{j})$ du schéma, les équations des coordonnées de l'accélération $\vec{a}(a;a)$ de la vitesse $\vec{V}(V_x;V_y)$ et de la position $G(x;y)$ du centre d'inertie du système.

Etablir aussi, dans le même repère, l'équation cartésienne de la trajectoire $y = f(x)$ du centre d'inertie G entre B et E.

2- Le centre d'inertie de la voiture doit atterir sur le toit en E avec une vitesse horizontale.

a- Que peut-on dire de V, en ce point?

b- Montrer alors que : $x_E = CD = \dfrac{V_B^2 \sin(2\alpha)}{2g}$ et $y_E = DE - BC = \dfrac{V_B^2 \sin^2\alpha}{2g}$

c- Exprimer le rapport $\dfrac{y_E}{x_E}$ en fonction de l'angle α, puis en déduire la valeur de α.

d- Calculer la valeur de la vitesse V_B au sommet du tremplin pour réussir la cascade.

Solution

1- La seule force à laquelle est soumis le système étudié est son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Si on applique la deuxième loi de Newton au centre d'inertie du système étudié, il vient : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$

Soit : $\vec{a} = \vec{g}$

en projetant sur les axes, on obtient les coordonnées du vecteur accélération:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

L'accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse. D'où:

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = 0 \\ a_y = \dot{v}_y = -g \end{cases}$$

Soit, en intégrant par rapport au temps:

$$\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -gt + C_2 \end{cases} \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes.}$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 avec les conditions initiales A $t = 0$:

$$\begin{cases} V_{ox} = V_{Bx} = V_B\cos\alpha \\ v_{oy} = V_{By} = V_B\sin\alpha \end{cases}$$

Finalement : $\vec{V}\begin{cases} V_x = V_B\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_B\sin\alpha \end{cases}$

De même, la vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

D'où : $\begin{cases} V_x = \dot{x} = V_B\cos\alpha \\ V_y = \dot{y} = -gt + V_B\sin\alpha \end{cases}$

en intégrant, il vient:

$$\begin{cases} x = (V_B\cos\alpha)t + C_3 \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (V_B\sin\alpha)t + C_4 \end{cases}$$

A l'instant initial, le point est en $B(0;0)$, donc les constantes C_3 et C_4 sont nulles.

On a :

$$BM\begin{cases} x = (V_B\cos\alpha)t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (V_B\sin\alpha)t \end{cases}$$

Enfin, on exprime t en fonction de x, puis on remplace dans l'expression de y pour obtenir l'équation cartésienne de la

trajectoire :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{V_B \cos\alpha} \\ y = \dfrac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)x \end{cases}$$

2.a- La vitesse en E est horizontale (comme le toit de l'immeuble), donc V_y est nulle.

b- La condition $V_y = 0$ permet de déterminer l'instant t_E auquel le système parvient en E.

$V_{Ey} = -gt_E + V_B \sin\alpha = 0$, d'où $t_E = \dfrac{V_B \sin\alpha}{g}$

Il suffit ensuite de remplacer t par t_E dans les expressions de x et y.

En utilisant le fait que $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, on obtient alors $x_E = \dfrac{V_B^2 \sin(2\alpha)}{2g}$ et $y_E = \dfrac{V_B^2 \sin^2\alpha}{2g}$

c- On effectue le rapport demandé :

$$\frac{y_E}{x_E} = \frac{\dfrac{V_B^2 \sin^2\alpha}{2g}}{\dfrac{V_B^2 \sin 2\alpha}{2g}}$$

Soit : $\dfrac{y_E}{x_E} = \dfrac{\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{2}\tan\alpha$

Application numérique :

$y_E = DE - BC$, soit $y_E = -2\,m$,

$x_E = CD$, soit $x_E = 15\,m$

$\dfrac{y_E}{x_E} = \dfrac{2}{15} = \dfrac{1}{2}\tan\alpha$

De $\tan\alpha = \dfrac{4}{15}$, on déduit : $\alpha = 14{,}9°$

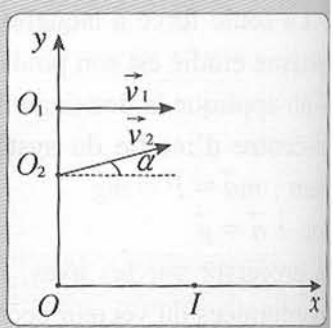
d- De l'expression de y_E, il vient :

$V_B^2 = \dfrac{2gy_E}{\sin^2 a}$, d'où $V_B = \dfrac{\sqrt{2gy_E}}{\sin\alpha}$

Application numérique :

$V_B = \dfrac{\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2}}{\sin 14{,}9} = 24{,}3 m.s^{-1}$

7



Deux balles B_1 et B_2 sont lancées respectivement depuis deux points O_1 et O_2 situés à la verticale de O, avec des vitesses $\vec{v}_{O1}$ et $\vec{v}_{O2}$ dans un même plan vertical et de même module ($v_{O1} = v_{O2} = v_O$). La balle B_1 est lancée après B_2, mais les deux balles atteignent le sol au point I.

En prenant pour origines des dates $t = 0$ le départ de B_2 et en négligeant l'action de l'air, les équations horaires selon l'axe O_x sont :

Pour B_1, $x_1 = 21t - 2{,}1$ et pour B_2, $x_2 = 20t$

On donne : $OI = 42m$, $OO_1 = h_1 = 20m$ et $g = 10 m.s^{-2}$

1- A quel instant a été lancée la bille B_1 ?

2- A quel instant t_I les deux billes atteignent-elles le point I ?

3- En utilisant la deuxième loi de Newton:

3.1- Déterminer v_0 et α.

3.2- Ecrire l'équation horaire $y_2(t)$ en déduire h la valeur de $h_2 = OO_2$.

3.3- Ecrire l'équation horaire $y_1(t)$.

Solution

1- La bille B_1 se trouve au départ au point O_1.

Alors : $x(o_1) = 0 = 21t - 2,1$

$t = \frac{2,1}{21} = 0,1s$

La bille B_1 est lancée $0,1s$ après la bille B_2.

2- Les deux équations fournissent au point I la valeur de t_I.

$x(I) = 42 = 21t_I - 2,1 \Rightarrow t_I = 2,1s$

ou bien $x(I) = 20t_I \Rightarrow t_I = \frac{42}{20} = 2,1s$

3.1- Les chutes sont libres, alors la 2ème loi de Newton permet de trouver $\vec{a} = \vec{g}$

D'où : $a_x = 0$ et $ay = -g$

Sur l'axe ox, on a $v_x = cte$

- Pour la bille B_2 :

$v_2 = cte = v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$

D'où $x_2 = v_0 \cos\alpha t + c_2 = v_0 \cos\alpha t$ car $C_2 = 0$

- Pour la bille B $v_1 = cte = v_0$

et $x_1 = v_0 t + c_1 t$

En identifiant $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les données on a:

$v_0 \cos\alpha = 20$ et $v_0 = 21\ m.s^{-1}$

$\cos\alpha = \frac{20}{21} = 0,952$, $\alpha = 17,75°$

3.2-

$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + h_2$ avec $t \geqslant 0$;

au point I :

$y = 0 = -\frac{1}{2}gt_I^2 + v_0 \sin\alpha t_I + h_2$

$h_2 = \frac{1}{2}gt_I^2 - v_0 \sin\alpha t_I$

$h_2 = 5.(2,1)^2 - 21.\sin(17,75).2,1 \simeq 8,6m$

3.3- On a : $v_{1y} = -gt + C = -10t + C$, $t \geqslant 0,1s$

Condition initiale : à $t_i = 0,1s$ on a $v_{1y} = 0$, car v_{01} est horizontale.

$C = 10.t_i = 1ms^{-1}$

donc $v_{1y} = -10t + 1$

On en déduit:

$y_1 = -5t^2 + t + C'\ (t \geqslant 0,1s)$

Condition initiale: à $t_i = 0,1$ on a $y_1 = h_1 \Rightarrow C' = h_1 + 5t_i^2 - t_i + h_1$

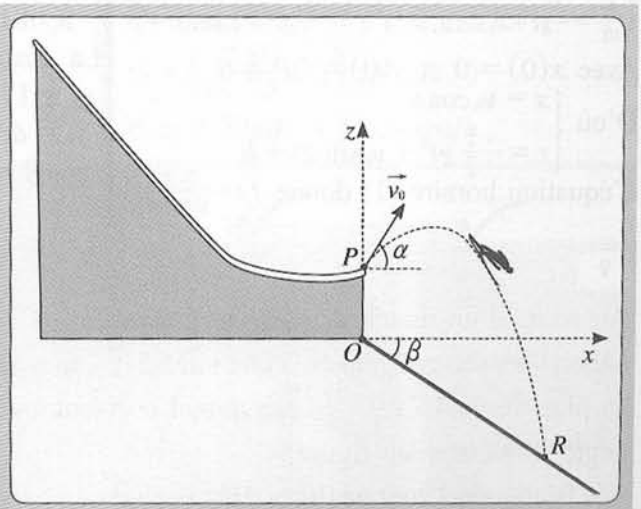
$20 + 5(0,1)^2 - 0,1 = 19,95m$

Donc : $y_1(t) = -5t^2 + t + 19,95$

8

Un champion de saut à ski, assimilable à un corps ponctuel, s'élance sur un tremplin de saut à ski. Au moment d'aborder le saut, sa vitesse v_0 est égale à $25m.s^{-1}$. Le bas de la piste est en outre incliné vers le haut d'un angle α égal à 10°.

Le skieur quitte la piste au point P.



On associe au référentiel terrestre le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$. Le point P se situe à $6m$ au dessus du point O. La piste de réception fait un angle $\beta = 50°$ vers le bas par rapport à l'axe horizontal Ox.

Données : $g = 9,8 m.s^{-2}$

On pose $OP = h$

1- Etablir les équations horaires de sa trajectoire dans l'air, puis donner l'expression de l'équation cartésienne de sa trajectoire.

2- Quelle est l'équation de la droite représentant la piste de réception?

3- Le skieur se réceptionne au point R. Quelles sont les coordonnées de ce point ? Quelle est la longueur L du saut $(L = OR)$?

Solution

1- Dans le référentiel lié à la terre et considéré comme galiléen, la deuxième loi de Newton s'écrit: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

Le système est soumis à une seule force: son poids;

alors: $P = m\vec{a}_G$, d'où $\vec{a}_G = \vec{g}$

Par projection sur ox et oz on a : $a_x = 0$ et $a_z = -g$

$\frac{dVx}{dt} = a_x = 0$ et $\frac{dVz}{dt} = a_z = -g = cte$

On déduit que:

$V_x = (t) = cte = V_e(t = 0) = V_0.\cos\alpha$

$V_z(t) = -gt + cte$, avec $v_z(0) = v_0 \sin\alpha$,

on tire: $cte = v_0 \sin\alpha$,

d'où $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha t$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = v_0\cos\alpha, d'où\ x = v_0\cos\alpha t + C_1 \\ \frac{dz}{dt} = -gt + v_0\sin\alpha, d'où\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + C_2 \end{cases}$

Avec $x(0) = 0$ et $y(0) = OP = 6$

D'où $\begin{cases} x = v_0\cos\alpha.t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + h \end{cases}$

L'équation horaire (1) donne $t = \frac{x}{v\cos\alpha}$

et la 2ème s'écrit alors:

$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha t\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) + h$

soit donc:

$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha.x + h$

2- La droite (Δ) passant par O et R a pour équation $z = ax$, avec $a = -\tan\beta$

Donc $z = -\tan\beta.x$

3- Le point R appartient à la trajectoire et à (Δ):

$z_R = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_R^2 + x_R.\tan\alpha + h = -\tan\beta.x_R$

$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_R^2 + (\tan\alpha + \tan\beta)x_R + h = 0$

Soit numériquement:

$\frac{-9,8}{2.(25)^2.\cos^2 1}x_R^2 + (\tan 10 + \tan 50°).x_R + 6 = 0$

$-8,0810^{-3}.x_R^2 + 1,368x_R + 6 = 0$

La résolution de cette équation donne

$x_R \simeq 173,6\ m$

$y_R = a.x_R = -\tan\beta.x_R = -206,8\ m$

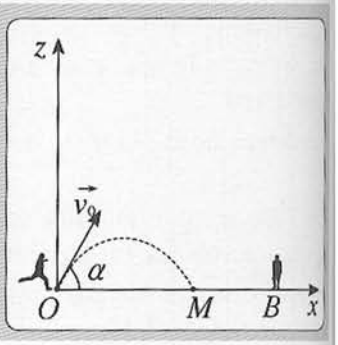
$\cos\beta = \frac{x_R}{L}$, $L = \frac{x_R}{\cos\beta} \simeq 270\ m$

9

Au cours d'un match de football, un joueur A tire le ballon vers son coéquipier, à une vitesse $\vec{v}_0$ appartenant au plan vertical (xz). $\vec{v}_0$ fait avec l'horizontal ox un angle $\alpha = 20°$ (voir figure).

Les frottements sont négligés dans la chute du ballon.

L'origine des dates $t = 0$, coïncide avec l'instant de



départ du ballon du point O.

données : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $v_0 = 15m.s^{-1}$; $d = AB = 25m$

L'équation de la trajectoire du centre de gravité du ballon supposé ponctuel est: $z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha.x$

1- Déterminer l'abscisse x_M du point M où le ballon touche le terrain.

2- Pour récupérer le ballon au point M, le joueur B se lance à la vitesse $\vec{V}_B$ dirigé vers M à la date $t = 0$.

Le moment est supposé rectiligne uniforme.

Déterminer la valeur de V_B.

Solution

1- Au point M, le ballon touche l'axe ox :

$$y_M = 0 = \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha x$$

$$\frac{gx^2}{2.V_0^2\cos^2\alpha} = \tan\alpha x$$

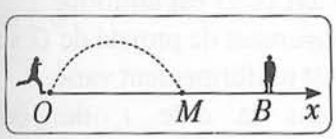
$$\frac{gx}{2.V_0^2\cos^2\alpha} = \tan\alpha \quad \text{donc: } x \neq 0$$

$$x = \frac{2.V_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{V_0^2}{g}.2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$x_M = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

$$x_M = \frac{15^2\sin 40}{9{,}8} \simeq 14{,}75m$$

2-



Les points O, M et B sont alignés, alors:

$OB = d = AM + MB = x_M + MB$

or $MB = V_B.t_M$, donc $V_B = \frac{d - x_M}{t}$ (1)

La durée t peut être déterminée à partir de l'équation horaire $x(t)$ du mouvement du ballon:

La 2ème loi de Newton donne $\vec{a} = \vec{g}$ d'où $a_x = 0$,

donc $V_x = cte = V_o\cos\alpha$, alors $x = v_o\cos\alpha t$ au point M : $t_M = \frac{x_M}{V_o\cos\alpha}$

en remplaçant t_M dans (1) on a:

$$V_B = \frac{d - x_M}{x_M/V_o\cos\alpha}$$

$$V_B = \left(\frac{d}{x_M} - 1\right)V_o.\cos\alpha$$

$$V_B = \left(\frac{25}{14{,}75} - 1\right).15.\cos 20$$

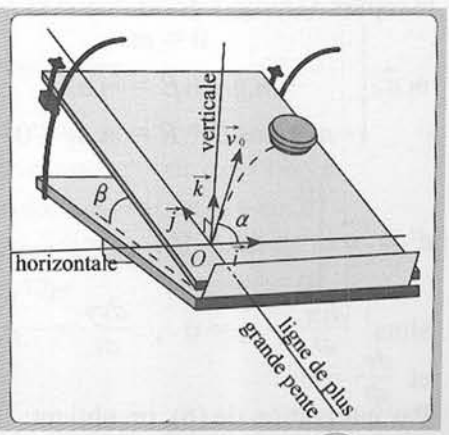
$$V_B \simeq 9{,}79m/s = 35{,}24km/h$$

10

Un mobile sur coussin d'air est lancé sur une table inclinée d'un angle β avec l'horizontale. La vitesse initiale $\vec{V}_0$, parallèle au plan incliné, n'est pas dirigée suivant une ligne de plus grande pente.

$\vec{V}_o$ fait un angle α avec l'axe $(O;\vec{i})$.

À l'origine des dates $(t = 0)$, le centre de gravité du mobile se trouve en O.



Le mobile glisse sans frottement sur le plan incline $(O;\vec{i};\vec{j})$ sans le quitter.
L'accélération du champ de pesanteur est constante.
En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les coordonnées du vecteur vitesse du point G vérifient les équations différentielles suivantes: $\frac{dv_x}{dt}=0$, $\frac{dvy}{dt}=-g\sin\beta$ et $\frac{dv_z}{dt}=0$
En déduire que la trajectoire de G a pour équation : $y=-\frac{1}{2}\frac{g\sin\beta}{v_0^2.\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha).x$.

Solution

1- Le système considéré est le mobile. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées au mobile sont le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ exercée par l'air pulsé et normale au plan.
Le théorème du centre d'inertie s'écrit : $\vec{P}+\vec{R}=m.\vec{a}_G$ (4)
Projetons cette relation dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ (doc 12), avec $\vec{i}$ selon la direction horizontale $\vec{j}$ parallèle aux lignes de plus grande pente et $\vec{k}$ perpendiculaire au plan incliné.
Dans ce repère :

$$P\begin{vmatrix}0\\-m.g.\sin\beta\\-m.g.\cos\beta\end{vmatrix},\ \vec{R}\begin{vmatrix}0\\0\\R\end{vmatrix}\ et\ \vec{a}_G\begin{vmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{vmatrix}$$

$a_z=0$, car $z_G=cte$: le mobile ne décolle pas du plan.
La relation (4) donne, par projection dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$$m.\vec{a}_G\begin{vmatrix}0=m.a_x\\-m.g.\sin\beta=m.a_y\\-m.g.\cos\beta+R=m.a_z=0\end{vmatrix},$$

d'où $\vec{a}_G\begin{vmatrix}0\\-g.\sin\beta\\0\end{vmatrix}$ (6) (5)
alors $\frac{dvx}{dt}=a_x=0$, $\frac{dvy}{dt}=-g.\sin\beta$ et $\frac{dv_z}{dt}=0$
Par intégration de (6), on obtient:

$$\vec{v}_G\begin{vmatrix}v_x=v_0.\cos\alpha\\v_y=-g.\sin\beta.t+v_0.\sin\alpha\\v_z=0\end{vmatrix},$$

$$\text{car } \vec{v}_G(t=0)\begin{vmatrix}vo_x=v_o.\cos\alpha\\vo_y=v_o.\sin\alpha\\vo_z=0\end{vmatrix}$$

Une nouvelle intégration donne:

$$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix}x=v_o.\cos\alpha.t\\y=-\frac{1}{2}g.\sin\beta.t^2+(v_o.\sin\alpha).t,\\z=0\end{vmatrix}$$

$$\text{car } \overrightarrow{OG}(t=0)\begin{vmatrix}x_o=0\\y_0=0\\z_0=0\end{vmatrix}$$

Le mouvement du projeté de G sur l'axe horizontal (Ox) est uniforme.
Le mouvement de projeté de G sur l'axe (Oy) est uniformément varié.
Eliminons la date t des équations horaires. Nous obtenons l'équation de la trajectoire :

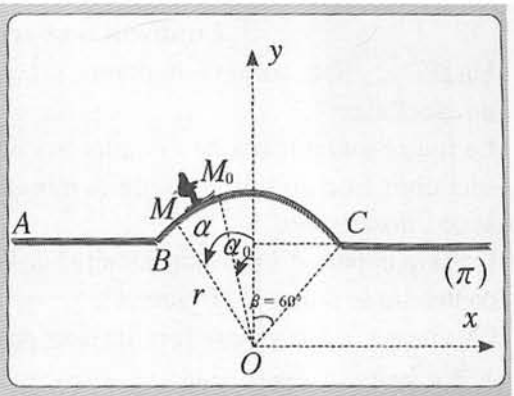
$$y=-\frac{1}{2}\frac{g.\sin\beta}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2+(\tan\alpha).x.$$

La trajectoire du centre d'inertie G est une portion de parabole contenue dans un plan parallèle au plan incliné.
Remarque : On obtient des équations analogues à une chute libre, g étant remplacé par $g.\sin\beta$, composante active de $\vec{g}$ sur le plan incliné.

11

La figure ci-contre montre un joueur de skateboard sur une piste circulaire de rayon r et de centre O, il quitte cette piste au point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_o$ appartenant au plan vertical $(O;x;y)$.

La vitesse $\vec{v}_o$ est tangente à la piste circulaire $\overset{\frown}{BC}$.



Données : $g = 10m.s^{-2}$; $v_o = 8m.s^{-1}$, $r = 5,4m$, $\alpha_0 = 22°$ et $\beta = 60°$

On néglige les frottements et on prend comme origine de temps $(t = 0)$, l'instant où le joueur passe par M_o.

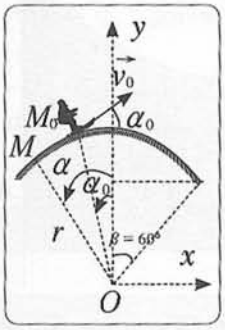
1- En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du skieur qu'on assimile à un point matériel.

2. Le skieur tombe sur le plan (π) au point N.

- Déterminer l'instant t_N.
- En déduire la distance CN.

Solution

1- la deuxième loi de Newton appliqué au skieur en chute libre s'écrit : $\vec{P} = m\vec{a}_G$



Ceci donne : $\vec{a}_G = \vec{g}_i$

D'où: $a_x = o$

et $a_y = -g$

Or $\frac{dv_x}{dt} = a_x = 0$,

d'où $V_x = cte = V_x(t = 0) = V_0 \cos\alpha_o$

et, $\frac{dvy}{dt} = -g$ alors $v_y = -gt + C$

$C = V_{oy} = V_o \sin\alpha_o$

$$\begin{cases} x = V_o \cos\alpha_o t + x_o \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha t + y_o \end{cases}$$

$x_o = -r\sin\alpha_o$ et $y_o = r\cos\alpha_o$

Donc $$\begin{cases} x = v_o \cos\alpha_o .t - r\sin\alpha_o \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o \sin\alpha .t + r\cos\alpha_o \end{cases}$$

2- Sur le plan (π), on a $y = r.\cos\beta$

Or $y = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_o \sin\alpha_o t + r\cos\alpha_o$

$r\cos\beta = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o \sin\alpha t + r\cos\alpha_o$

$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha_0 t + r(\cos\alpha_0 - \cos\beta)$

$-5t^2 + 3t + 2,306 = 0$;

$t = \frac{-3 \pm \sqrt{55,12}}{-10} \simeq 1s$

On rejette la solution négative car $t \geqslant 0$

- On peut écrire :

$CN = x_N - x_C$

$CN = (v_0 \cos\alpha_0 t_N - r\sin\alpha_0) - r\sin\beta$

$CN = v_0 \cos\alpha_0 t_N - r(\sin\alpha_0 + \sin\beta)$

$CN = 8\cos(22°).1 - 5,4(\sin(22°) + \sin(60°))$

$CN \simeq 0,72m$

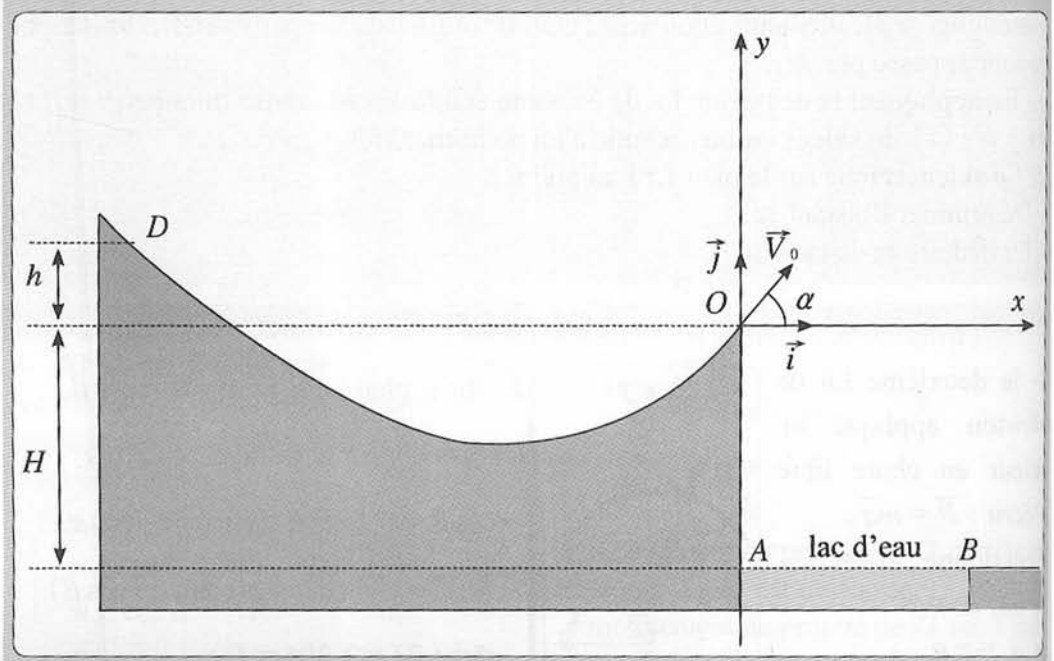
12 **Etude du mouvement d'un skieur**

Un skieur glisse sur une montagne recouverte de glace, au pied de laquelle se trouve un lac d'eau.

La figure suivante donne l'emplacement de ce lac par rapport au point O où le skieur sera obligé de quitter le sol de la montagne avec une vitesse $\vec{v}_o$ faisant un angle α avec l'horizontale.

Le skieur part d'un point D situé à la hauteur h par rapport au plan horizontal contenant le point O (figure -1).

La vitesse v du skieur lors de son passage au point O s'exprime par la relation $v = \sqrt{2g.h}$.



Dans un essai le skieur passe par le point O origine du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec une certaine vitesse il tombe alors dans l'eau du lac.

On veut déterminer la valeur minimale h_m de la hauteur h du point O à partir duquel doit partir le skieur sans vitesse initiale pour qu'il ne tombe pas dans le lac.

Données :

- Masse du skieur et ses accessoires $m = 60kg$
- Accélération de la pesanteur $g = 10m.s^{-2}$;
- La hauteur $H = 0,50m$;
- L'angle : $\alpha = 30°$;
- Longueur du lac $AB = d = 10m$

On assimile dans cet exercice, le skieur à un point matériel G et on néglige les frottements et toute autre action de l'air.

1- Le skieur quitte le point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation différentielle que vérifie chacune des coordonnées du vecteur vitesse dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.2- Montrer que l'équation de la trajectoire du skieur s'écrit dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ s'écrit : $y=-\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha}+x.\tan\alpha$

2- Déterminer la valeur minimale h_m de la hauteur h pour que le skieur ne tombe pas dans le lac d'eau.

Bac Sc. Math, Session normale 2011

Solution

1.1- Le skieur est soumis uniquement à son poids $\vec{P}=m\vec{g}$.

On lui applique la 2ème loi de Newton dans le repère terrestre $(O;\vec{i};\vec{j})$ considéré comme galiléen :

$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$, qui s'écrit $\vec{P}=m\vec{a}_G$,

D'où $\vec{a}_G=\vec{g}$; alors $\vec{a}\begin{vmatrix}a_x=g_x=0\\a_y=g_y=-g\end{vmatrix}$

Les coordonnées de $\vec{V}$ sont déduites de celles de $\vec{a}_G$:

- La relation : $\frac{dvx}{dt}=a_x=0$, donne $v=cte=v_x(t=0)=v_0.\cos\alpha$

- La relation $\frac{Vy}{dt}=ay=-g$ donne $v_y=-gt+C$

Or à $t=0$ on a $v_y=v_0\sin\alpha$, donc $C=v_0\sin\alpha$

alors $v_y=-gt+v_0\sin\alpha$

$\vec{v}\begin{vmatrix}v_x=v_0\cos\alpha\\v_y=-gt+v_0\sin\alpha\end{vmatrix}$

1.2 - La vitesse $\vec{v}$ est liée à $\overrightarrow{OG}$ par la relation $v=\frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt}$

En utilisant le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on a:

$\frac{dx}{dt}=v_x=v_0.\cos\alpha$,

alors $x=v_0.\cos\alpha t+C_1$

Or $x(t=0)$, donc $C_1=0$

$\frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha$,

donc $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha t+C_1$

avec $y(t=0)$, on obtient $C_2=0$

L'équation $x(t)$ donne $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$ et un remplaçant t dans l'équation $y(t)$ on écrit:

$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2+v_0\sin\alpha.\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$

$y=-\frac{1}{2}g-\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha}+x.\tan\alpha$

2- Lorsqu'il touche le plan horizontal passant par A et B, les coordonées du skieur sont telles que

$y=-H=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha$.

En revenant à l'expression $v_0=\sqrt{2gh}$, on écrit :

$-H=-\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{2gh.\cos^2\alpha}+x\tan\alpha$

$\frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}=H+x\tan\alpha$

$h=\frac{x^2}{4(H+x\tan\alpha).\cos^2\alpha}$

- Lorsque h augmente x ..... augmente et le skieur tombe plus loin sur le plan du lac.

- Pourqu'il ne tombe pas dans l'eau, il faut que : $x>x_{min}=d$, correspond à h_{min}

$h_{min}=\frac{d^2}{4(H+d.\tan\alpha).\cos^2\alpha}$

$h_{min}=\frac{10^2}{4(0,5+10\tan 30).\cos^2(30)}$

$h_{min}\simeq 5,3m$

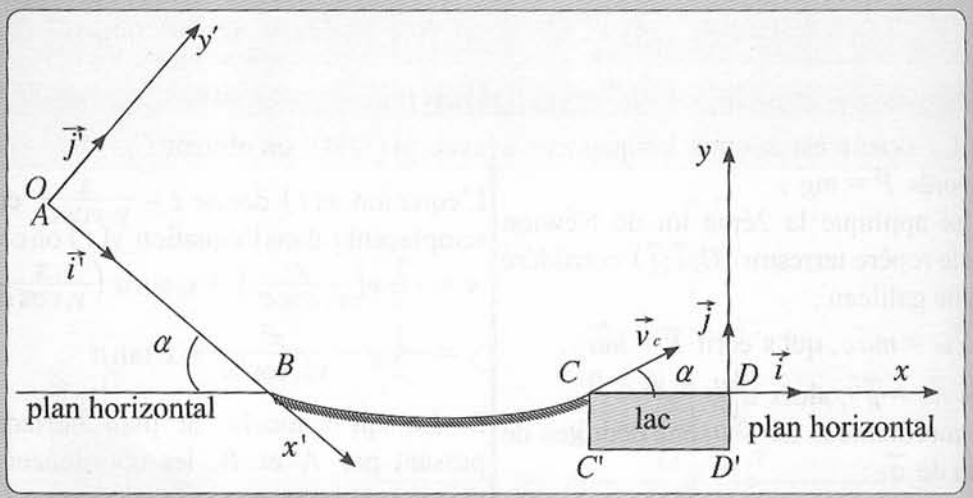
13

Etude du mouvement d'un skieur

Première partie: étude du mouvement d'un skieur (Bac Sc math-2014, session ordinaire)

Un skieur veut s'exercer sur une piste modélisée par la figure 1.

Avant de faire un premier essai, le skieur étudie les forces qui s'exercent sur lui lors du glissage sur la piste ABC.



Données:

- Intensité de pesanteur $g = 9,8 m/s^2$.
- AB est un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport au plan horizontal passant par le point B.
- La largeur du lac $C'D' = L = 15m$

On modélise le skieur et ses accessoires par un solide (S) de masse $m = 80kg$ et de centre d'inertie G.

On considère sur la partie AB que les frottements ne sont pas négligeables et on les modélise par une force constante.

1- Etude des forces appliquées sur le skieur entre A et B.

Le skieur part du point A d'abscisse $x'_A = 0$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ sans vitesse initiale à un instant que l'on considère comme origine des temps $t = 0s$ (fig 1). Le skieur glisse sur le plan incliné AB suivant la ligne de la plus grande pente avec une accélération constante a et passe par le point B avec une vitesse $V_B = 20m/s$.

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, trouver en fonction de α, a et g l'expression du coefficient de frottement $\tan\varphi$. Avec φ l'angle de frottement, défini par la normale à la trajectoire et la direction de la force appliquée par le point incliné sur le skieur.

1.2- A l'instant $t_B = 10s$ le skieur passe par le point B ; calculer la valeur de l'accélération a. En déduire la valeur du coefficient de frottement $\tan\varphi$.

1.3- Montrer que l'intensité de la force $\vec{R}$ exercée par le plan AB sur le skieur s'écrit sous la forme : $R = mg.\cos\alpha.\sqrt{1+(\tan\varphi)^2}$; calculer R.

2- L'étape du saut:

A l'instant $t = 0$ que l'on considère comme une nouvelle origine des temps, le skieur quitte la partie BC au point C avec une vitesse v_C dont le vecteur $\vec{v}_C$ forme l'angle $\alpha = 20°$ avec le plan horizontal.

Lors du saut, les équations horaires du mouvement de (S) dans le repère $(D;\vec{i};\vec{j})$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_C.\cos\alpha.t - 15 \\ y(t) = -\frac{g}{2}.t^2 + v_C \sin\alpha.t \end{cases}$$

2.1- Déterminer dans le cas où $v_C = 16,27 ms^{-1}$ les coordonnées du sommet de la trajectoire de (S).

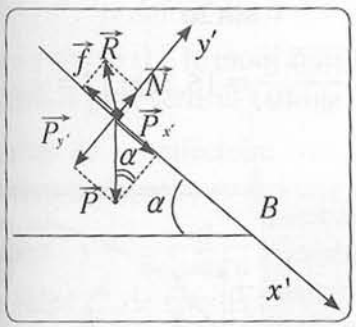
2.2- Déterminer en fonction de g et α la condition que doit vérifier la vitesse v_C pour que le skieur ne tombe pas dans le lac.

En déduire la valeur minimale de cette vitesse.

Solution

1- Étude des forces appliquées entre A et B:

1.1-



On applique au skieur dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ considéré comme galiléen, la deuxième loi de Newton:

$$\vec{P}+\vec{R} = m\vec{a}_G$$

Par projection on a: $\begin{cases} P_{x'} + R_{x'} = ma_{x'} \\ P_{y'} + R_{y'} = ma_{y'} \end{cases}$

Le mouvement se fait sur l'axe Ox', donc $a_G = a_{x'}$ et par conséquent et $a_{y'} = 0$

$a_{y'} = 0$ et $a_{x'} = a$.

En expliquant la figure on a:

$$\begin{cases} P\sin\alpha - f = ma \\ -P\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = m(g\sin\alpha - a) \quad (1) \\ N = mg\cos\alpha \quad (2) \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{f}{N} = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}$$

$$\tan\varphi = \tan\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}$$

1.2- L'accélération du mouvement étant constante, la vitesse s'écrit alors:

$$v = a.t + cte$$

or $v(t=0) = 0$, donc $cte = 0$ et par suite $v = a.t$

À $t = 10s$; $a = \frac{v}{t} = \frac{20}{10} = 2m.s^{-2}$

$$\tan\varphi = \tan\alpha - \frac{a}{g.\cos\alpha}$$

$$\tan\varphi = \tan 20° - \frac{2}{9,8.\cos 20°}$$

$$\tan\varphi = 0,147 \simeq 0,15$$

1-3 $\vec{R} = \vec{f} + \vec{N}$ $\qquad R = \sqrt{f^2 + N^2}$

L'expression de $\tan\varphi$ donne :

$f = N.\tan\varphi$

donc:

$$R = \sqrt{N^2.\tan^2\varphi + N^2} = N\sqrt{\tan^2\varphi + 1}$$

En revenant à l'expression $N = mg\cos\alpha$,

On obtient $R = mg.\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\varphi}$

$R = 80.9,8\cos 20°\sqrt{1+(0,15)^2} \simeq 745N$

2- Etape du saut:

2.1- Au sommet de la trajectoire, l'ordonnée y est maximale, il en résulte que:

(1): $\frac{dy}{dt} = 0$, cela entraîne $v_y = 0$

(2): $\frac{dy}{dx} = 0$, on peut exploiter dans ce cas l'équation de la parabole $y = f(x)$.

En utilisant la méthode (1), on écrit au sommet S de la trajectoire.

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_s = -gt_s + v_c.\sin\alpha = 0$$

On déduit que $t_s = \frac{v_c.\sin\alpha}{g}$

On remplace t_s dans les équations $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x_s = v_c\cos\alpha.\frac{v_c.\sin\alpha}{g} - 15 \\ y_s = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_c.\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_c\sin\alpha\left(\frac{v_c.\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_c^2.\sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

2.2- Pour que le skieur puisse dépasser le lac, il faut que : $\begin{cases} x_p > x_D = 0 \\ y_p = 0 \end{cases}$

$$y_p = 0 = -\frac{1}{2}g.t_p^2 + v_c.\sin\alpha.t_p$$

$$t_p\left(-\frac{g}{2}.t_p + v_c.\sin\alpha\right) = 0$$

$$t_p = \frac{2v_c.\sin\alpha}{g} \qquad \text{donc } t_p \neq 0$$

En revenant à l'équation $x(t)$:

$$x_p = v_c.\cos\alpha.t_p - 15$$

$$x_p = \frac{v_c.\cos\alpha.2v_c.\sin\alpha}{g} - 15$$

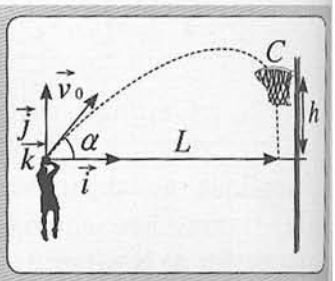
$$x_p = \frac{v_c^2\sin 2\alpha}{g} - 15$$

$$x_p > 0 \Rightarrow \frac{v_c^2.\sin 2\alpha}{g} > 15$$

D'où : $v_c > \sqrt{\frac{15g}{\sin 2a}}$

$$v_c > \sqrt{\frac{15.9,8}{\sin 40}} = 15,12m.s^{-1} = v_{min}$$

14 La figure ci-contre montre un joueur de basket-ball en train de toucher le centre du panier. La balle est lancée à la date $t = 0$, avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan du repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $\vec{v}_0$ fait avec l'axe l'horizontal ox un angle α.



La balle atteint le contour supérieur du panier en son centre C se trouvant à la hauteur h de l'axe $(o;\vec{i})$ et la distance L de l'axe $(o;\vec{j})$.

- Le champ de pesanteur de vecteur $\vec{g}$ est uniforme.
- On néglige l'action de l'air.

1- Montrer que le mouvement de G est plan, et établir l'équation cartésienne de sa trajectoire.

2- Etablir que $V_0^2 = \frac{g.L}{2\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \frac{h}{L}\right)}$.

3- La vitesse $\vec{V}_C$ du centre de gravité de la balle au point C fait avec l'axe $(o;\vec{i})$ un angle θ. Montrer que $\tan\theta = \tan\alpha - \frac{2h}{L}$

Solution

1- La 2ème loi de Newton, appliquée au ballon, soumis à la seule action de son poids permet dans un repère terrestre considéré comme galiléen :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{a}_G$, d'où $\vec{a}_G = \vec{g}$

En utilisant le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ g_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse de G à la date sont donc :

$$\text{à } t : \vec{V}_G \begin{cases} v_x = cte = v_{ox} = v_o \cos\alpha \\ v_y = -gt + cte = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha.t + C,\ donc\ C = 0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + C',\ C' = 0\ car\ y(0) = 0 \\ z(t) = C'' \quad or\ z(0) = 0,\ donc\ C'' = 0 \end{cases}$$

On a : $z = 0\ (\forall t)$; le mouvement se fait donc dans le plan vertical $(O;\vec{i};\vec{j})$.

L'équation de sa trajectoire $y = f(x)$ est obtenue en replaçant $t = \frac{x}{v_0}$ dans $y(t)$

On trouve : $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha.x.$

2- Le point C de coordonnées $x = L$ et $y = h$ vérifie l'équation de la trajectoire en effet :

$$h = \frac{-g}{2V_0^2.\cos^2\alpha} L^2 + \tan\alpha.L$$

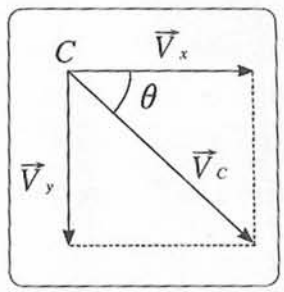
$$\frac{g}{2V_0^2.\cos^2\alpha}.L^2 = L.\tan\alpha - h$$

$$\frac{2V_0^2.\cos^2\alpha}{g.L^2} = \frac{1}{L.\tan\alpha - h}$$

$$2V_0^2.\cos^2\alpha = \frac{g.L^2}{L.\tan\alpha - h}$$

$$V_0^2 = \frac{g.L}{2.\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \frac{h}{L}\right)}$$

3- Exprimons l'angle θ en représentant $\vec{V}_C$:



$$\tan\theta = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|V_x\|} = \frac{\|Vy\|}{\|V_x\|},\ V_x > 0$$

Or $V_x = V_0.\cos\alpha$,

et $V_u = -gt + V_0 \sin\alpha$

Exprimons t_C à partir $x(t)$, sont:

$x_C = L = v_0 \cos\alpha.t_C$

$$t_C = \frac{L}{V_0.\cos\alpha}$$

d'où $v_y = -g.\frac{L}{v_0 \cos\alpha} + V_0 \sin\alpha$

$$V_y < 0, |V_y| = \frac{gL}{V_0 \cos\alpha} - V_0.\sin\alpha$$

Donc : $\tan\theta = \frac{|V_y|}{V_x} = \frac{gL}{(V_0 \cos\alpha)^2} - \tan\alpha$

D'après la question (2), on a:

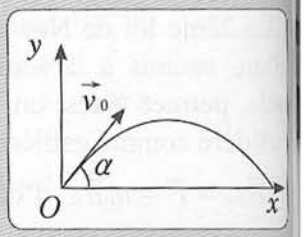
$$\frac{gL}{V_0^2.\cos^2\alpha} = 2\left(\tan\alpha - \frac{h}{L}\right);$$

D'où

$$\tan\theta = 2\left(\tan\alpha - \frac{h}{L}\right) - \tan\alpha$$

$$\tan\theta = \tan\alpha - \frac{2h}{L}$$

15 Parabole de sûreté



On lance un corps ponctuel de masse m, à partir du sol avec un vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$ incliné d'un angle α par rapport à un plan horizontal (voir figure).

L'équation de la trajectoire du centre de gravité de ce corps dans le plan vertical oxy est : $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x.\tan\alpha$

On considère que $\vec{V}_0$ constante et que le seul paramètre qu'on puisse faire varier est l'angle α.

1- Montrer que quelque soit α, on a: $y \leqslant \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2$

On rappelle que $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1$

2- En déduire que les points accessibles G et les points non accessibles à G sont séparés par une courbe dont l'équation et les caractéristiques sont à déterminer.

On considère uniquement le cas $x \geqslant 0$

Solution

1- On a : $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan\alpha$

En écrivant que $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 a$

On obtient une équation du second degré en $\tan\alpha$, soit

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha) + x\tan\alpha$$

$$gx^2 \tan^2\alpha - 2V_0^2 x \tan\alpha + gx^2 + 2yV_0^2 = 0$$

Pour que cette équation ait une solution réelle en α, on doit avoir $\Delta = 4V_0^4 x^2 - 4gx^2(gx^2 + 2yV_0^2) \geqslant 0$

On obtient ainsi

$$4x^2(V_0^4 - g^2x^2 - 2ygV_0^2) \geqslant 0$$

C'est-à-dire

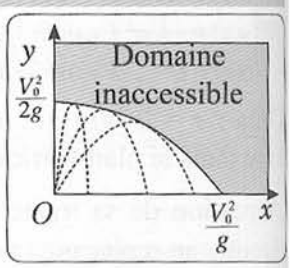
$$y \leqslant \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2 .$$

2- Il suffit maintenant de tracer la courbe représentative de la fonction:

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2$$

qui constitue la frontière séparant les points accessibles des points inaccessibles.

Cette courbe est une parabole appelée parabole de sûreté: elle est représentée ci-contre.



Cette courbe rencontre l'axe oy pour $x = 0$ et $y = \frac{V_0^2}{2g}$

Et, elle rencontre l'axe ox pour $y = 0$ et $x = \frac{V_0^2}{g}$

Remarque: Les valeurs $x_{max} = \frac{V_0^2}{g}$ et $y_{max} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}$ peuvent être obtenues en utilisant l'ordonnée de la flèche lorsqu'elle est maximale

$h = \frac{V_0^2 \sin\alpha}{2g}$, $h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$, lorsque $\alpha = 90°$

Et l'abscisse x_p de la portée $x_p = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

x_p est maximal pour $\alpha = 45°$

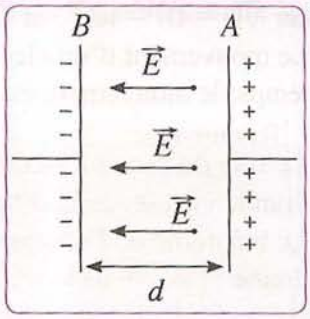
5 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

I- CHAMP ÉLECTRIQUE-FORCE ÉLECTRIQUE (RAPPEL):

1- Champ électrique uniforme:

On peut obtenir un champ électrique uniforme en appliquant une tension électrique continue, entre deux plaques métalliques parallèles.

Entre ces deux plaques régne un champ électrique uniforme (figure) dont le module est $E = \frac{U_{AB}}{d}$



2- Force électrique:

Toute particule de masse m et de charge électrique q, placée dans la zône où regne un champ electrique $\vec{E}$ est soumise à une force électrique de vecteur $\vec{F}$ tel que: $\vec{F} = q.\vec{E}$

Remarque:

Le poids des particules (électron , proton, ions) est négligeable devant la force $\vec{F}$ due au champ électique.

II- ACCÉLEUR LINÉAIRE DE PARTICULES: (CANON À ÉLECTRONS)

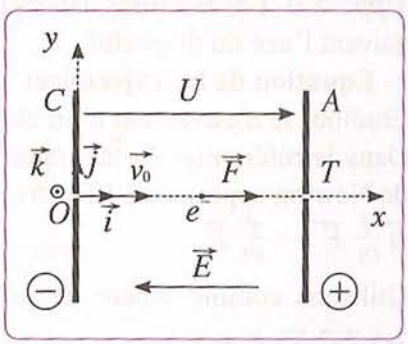
Une particule chargée, de masse m et de charge q, placée dans un champ électrique $\vec{E}$, est soumise à la force: $\vec{F} = q.\vec{E}$

Le poids sera toujours négligé devant cette force.

Dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen, la deuxième loi de Newton donne $\vec{F} = m.\vec{a}$, d'où $m.\vec{a} = q.\vec{E}$,

soit: $\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E}$

Dans un champ électrique, l'accélération dépend de la masse m de la particule, ce qui n'est pas le cas dans un champ de gravitation.



Dans le cas d'un électron: $\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E} = -\frac{e}{m}.\vec{E}$

Utilisons comme repère de projection, le repère $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i}$ parallèle et de sens opposé à $\vec{E}$ nous obtenons:

$$\vec{a}\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}\begin{vmatrix}E_x = -E\\ E_y = 0\\ E_z = 0\end{vmatrix}, \text{ d'où: } \vec{a}\begin{vmatrix}\ddot{x} = \frac{e}{m}.E\\ \ddot{y} = 0\\ \ddot{z} = 0\end{vmatrix}$$

Etudions le mouvement d'un électron émis à la date $t = 0$, du point O, à la vitesse $\vec{v} = v_0.\vec{i}$.

Par intégration: $\vec{v}\begin{vmatrix}\dot{x}=\frac{e}{m}.E.t+v_0\\ \dot{y}=0\\ \dot{z}=0\end{vmatrix}$

une nouvelle intégration donne: $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}x=\frac{1}{2}\frac{e}{m}.E.t^2+v_0.t\\ y=0\\ z=0\end{vmatrix}$

car $\vec{v}(t=0)=v_0.\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}(t=0)=\vec{0}$.

Le mouvement d'un électron est donc rectiligne. La vitesse croît linéairement avec le temps: le mouvement est uniformément accéléré.

Remarque:

Le rôle du canon à électrons est d'accélérer des électrons, de leur communiquer une grande vitesse, donc d'accroître leur énergie.

Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à l'électron entre la cathode et l'anode, donne $= W_{CA}=q.U_{CA}$; $=(-e)(-u)=e.U$

$\frac{1}{2}m.v_A^2-\frac{1}{2}m.v_C^2=-e.U_{CA}=e.U$

$\frac{1}{2}m.v_A^2=\frac{1}{2}m.v_C^2+e.U$

le dispositif accélère donc les électrons.

III- DÉFLEXION ÉLECTRIQUE DES ÉLECRONS:

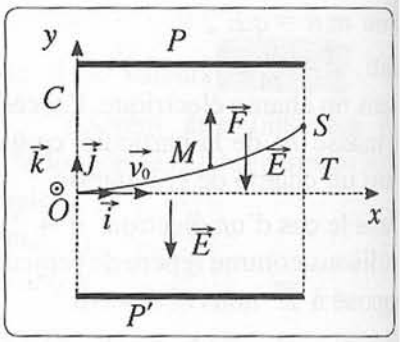
Le dispositif de **déflexion** ou de **déviation** est constitué de deux plaques parallèles et horizontales P et P' entre lesquelles est appliquée une tension électrique constante $Upp'>0$. Les électrons, lancés avec la vitesse $\vec{v_0}$ acquise à la sortie du canon, arrivent suivant l'axe du dispositif.

a- Equation de la trajectoire:

Etudions le mouvement d'un électron dans ce champ électrique $\vec{E}$.

Dans le référentiel du laboratoire, la deuxième loi de Newton appliquée à l'électron donne:

$\vec{a}\frac{q}{m}.\vec{E}=-\frac{e}{m}.\vec{E}$



Utilisons comme repère de projection, le repère $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ indiqué sur le schéma; avec $\vec{E}=-E\vec{j}$ (E est la valeur du champ éléctrique), nous obtenons:

$\vec{a}\begin{vmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{vmatrix}$ et $\vec{E}\begin{vmatrix}0\\ -E\\ 0\end{vmatrix}$, d'où: $\vec{a}=-\frac{e}{m}.\vec{E}\begin{vmatrix}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=\frac{e}{m}.E\\ \ddot{z}=0\end{vmatrix}$

A l'instant $t=0$: $\vec{v}=v_0.\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}=\vec{0}$

Par deux intégrations successives, nous obtenons:

$$\vec{v}\begin{vmatrix}\dot{x}=v_0\\ \dot{y}=\frac{e}{m}.E.t\\ \dot{z}=0\end{vmatrix} \text{ puis } \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}x=v_0.t\\ y=\frac{1}{2}\frac{e}{m}.E.t^2\\ z=0\end{vmatrix}$$

Le mouvement s'effectue dans le plan (Ox,Oy) du dispositif, puisque la coordonnée z reste nulle.

L'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant la variable t entre les équations horaires de x et y: $t=\frac{x}{v_0}$

donc $y=\left(\frac{e.E}{2m}\right).\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$, soit $y=\frac{e.E}{2m.v_0^2}.x^2$.

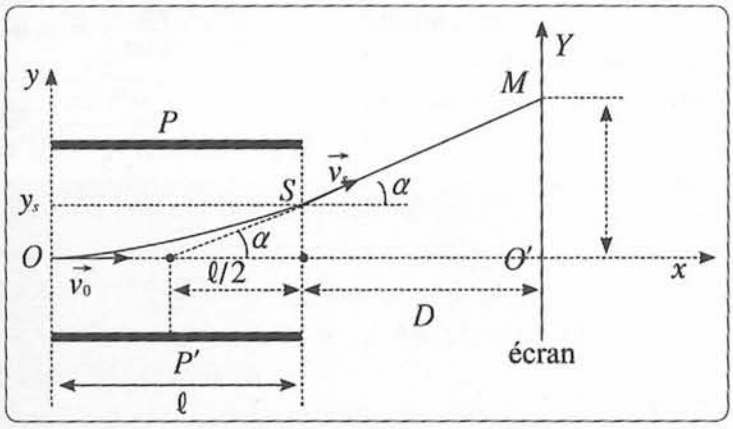
avec $0<x<l$ (l, longueur des plaques).

La trajectoire est un arc de parabole de sommet O

b- Déflexion (déviation) électrique:

Le dispositif précédent est utilisé pour faire dévier le faisceau d'électrons dans un oscilloscope. L'impact du faisceau sur l'écran du tube produit un point lumineux appelé spot.

On appelle **déflexion**, ou **déviation la distance** entre le point d'impact O' en l'absence de champ et le point d'impact M lorsqu'une tension U est appliquée entre les plaques.



c- Vitesse à la sortie du champ électrique:

A la sortie des plaques, le point S a pour coordonnées:

$x_S=l$ et $y_S=\frac{e.E.l^2}{2m.v_0^2}$

En ce point, à la date $t=\frac{l}{v_0}$, la vitesse de l'électron est $\vec{v}_S\begin{vmatrix}v_S=v_0\\ v_{S_y}=\frac{e.E.l}{v_0.m}\end{vmatrix}$

Ce vecteur vitesse fait un angle α (déviation angulaire) par rapport à la direction horizontale dont la valeur est déterminée par:

$\tan\alpha=\frac{v_{S_y}}{v_{S_x}}=\frac{e.E.l}{m.v_0^2}=\frac{e.U.l}{m.d.v_0^2}$; car: $E=\frac{U}{d}$.

d- Mouvement après la sortie du champ:

A la sortie des plaques, l'électron n'est soumis à aucune force (son poids est négligeable). Il est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$. Il décrit le segment SM tangent en S à l'arc de parabole $\widehat{OS}$.

Le triangle $IO'M$ permet d'écrire: $y = IO'$

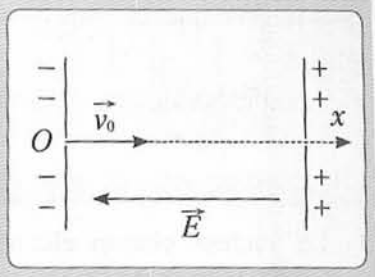
comme $IO' = \frac{l}{2} + D$ et $\tan\alpha = \frac{e.U.l}{m.d.v_0^2}$;

il vient $y = \frac{el}{m.d.v_0^2}\left(\frac{l}{2} + D\right).U = k.U$; avec $k = \frac{el\left(\frac{l}{2} + D\right)}{m.d.v_0^2}$

On a aussi: $U = \frac{1}{k}y = S_v.y$, S_v: sensibilité verticale.

Cette dernière expression est à la base de la mesure des tensions électriques lors de l'utilisation d'un oscilloscope.

1 Données: charge élémentaire: $e = 1,6.10^{-19}C$ et masse de l'électron $m = 0,91.10^{-30}kg$. On négligera le poids des particules devant les forces électriques.
Un électron, un proton, un ion calcium Ca^{2+} sont successivement soumis dans le vide à un champ électrique uniforme de valeur $6.10^{3}V.m^{-1}$.



1- Compléter le tableau suivant à l'aide de: e, E et m.

Particule	masse $m(kg)$	charge $q(C)$	accélération $a_x(m.s^{-2})$
électron	$9,1.10^{-31}$	(1)	(4)
proton	$1,67.10^{-27}$	(2)	(5)
ion Ca^{2+}	$6,68.10^{-26}$	(3)	(6)

2- Quelle est la nature de chacun de ces mouvements?

Solution

1- (1): $q = -e$; (2) $q = +e$; (3) $q = 2e$

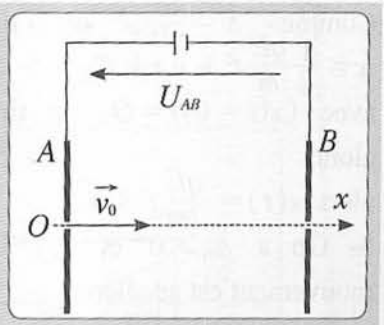
4) $q\vec{E} = m\vec{a} \Longrightarrow a_x = q\dfrac{Ex}{m(e)} = \dfrac{e}{m}E$

5) $a_x = \dfrac{q.Ex}{m(P)} = -\dfrac{eE}{m(P)}$

6) $ax = \dfrac{2e.Ex}{m(Cu^{2+})} = -\dfrac{2eE}{m(Cu^{2+})}$

2- Nature du mouvement:
- L'électron: mouvement rectiligne sur Ox, uniformément accéléré.
- Le proton et l'ion Ca^{2+}: mouvement rectiligne sur Ox, uniformément retardé.

2 Un proton H^+ de masse $m = 1,67.10^{-27}kg$, et de charge électrique $e = 1,6.10^{-19}C$, d'une vitesse $\vec{v_0}(v_0 = 1500km.s^{-1})$, pénètre entre deux plaques parallèles A et B, distantes de 10cm, entre lesquelles est appliquée la tension $U_{AB} = +10kV$.
Le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ est orthogonal au plan des plaques (schéma ci-contre).



Données:
Charge électrique élémentaire: $e = 1,6.10^{-19}C$.
accélération de la pesanteur: $g = 10m.s^{-2}$.

1- Représenter le vecteur champ électrique entre les plaques. Calculer son module
2- Comparer le poids du proton à la force électrique. Conclure.
3- Ecrire la relation entre le vecteur accélération $\vec{a}$ du proton et le vecteur champ électrique $\vec{E}$.

4- Déterminer les équations horaires du mouvement du proton entre O et S.

5- Montrer que ce mouvement est rectiligne et uniformément accéléré entre les plaques.

6- Calculer la valeur v_S de la vitesse au passage par l'orifice S et la durée τ du trajet OS.

Solution

1- Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est dirigé de A vers B.

$$E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{10.10^3}{10.10^{-2}} = 10^5 V.m^{-1}$$

2- $\frac{P}{F} = \frac{mg}{|q|.E} = \frac{1,67.10^{-27}.10}{1,6.10^{-19}.10^5} \simeq 10^{-12}$

$F \simeq 10^{12}.P$!

Le poids du proton est négligeable devant la force du champ électrique.

3- La deuxiéme loi de Newton permet d'écrire:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

4- $a_x = \frac{q}{m}E_x = \frac{q}{m}E$

$v_x = v = \frac{q}{m}E.t + cte$

Or $t = 0$ on a $v = v_0$, donc $cte = v_0$

alors: $v = \frac{qE}{m}t + v_0$

Comme $v = \frac{dx}{dt}$, on déduit que $x = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_0 t + C$

avec $(x(t=0)) = O$, on tire $C = 0$; alors:

alors $x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t$

5- On a $a_x > 0$ et $v_x > 0$, donc le mouvement est accéléré.

Autrement: Le module v de la vitesse croît avec le temps d'une façon affine, le mouvement est donc uniformément accéléré.

6- On a $x = \frac{1}{2}a_x.t^2 + v_0.t$

Or $t = \frac{v - v_0}{a_x}$, d'où:

$$x = \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v - v_0}{a_x}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a_x}\right)$$

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x}$$

en S:

$$v_S^2 - v_0^2 = 2.a_x.x_S = \frac{2qE.OS}{m} = \frac{2q.U_{AB}}{m}$$

$$v_S = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e.U_{AB}}{m}}$$

$$v_S = \sqrt{(1,5.10^6)^2 + \frac{2.1,6.10^{-19}.10^4}{1,67.10^{-27}}}$$

$$v_S \simeq 2,43.10^6.m.s^{-1}$$

Durée du trajet: $\tau = t_S = \frac{v_S - v_O}{a_x}$

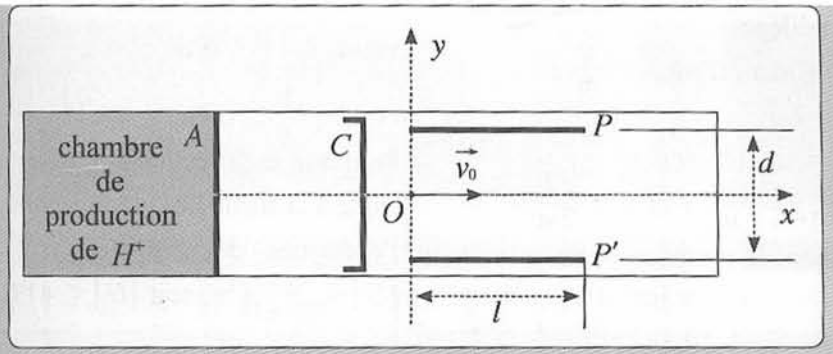
$$\tau = \frac{(v_S - v_O).m}{eU_{AB}}$$

$$\tau = \frac{(2,43 - 1,5).10^6.1,67.10^{-27}}{1,6.10^{-19}.10^4}$$

$$\tau = 0,97.10^{-6}s \simeq 1\mu s$$

3

Dans le dispositif ci-contre, règne un vide poussé. Un faisceau homocinétique de protons est d'abord accéléré par une tension appliquée entre deux plaques A et C. Les protons pénètrent en O avec une vitesse $v_0 = 800km.s^{-1}$ entre deux plaques parallèles P et P', distantes de $d = 2,5cm$ et de longueur $l = 10cm$, comme le montre le schèma ci-après.



Données: La force de pesanteur est négligeable; $m_P = 1,67.10^{-27} kg$ et $e = 1,6.10^{-19} C$.

1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique,

Calculer la valeur de U_{AC} sachant que les protons sont issus de A sans vitesse initiale.

2- On applique entre les plaques P et P' la tension $U = U_{PP'}$ créant un champ uniforme de valeur E.

a- Quel doit être le signe de U pour que la déviation soit dirigée vers le haut?

b- Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire entre les plaques est donnée par $y = \dfrac{q.E}{2m.v_0^2}.x^2$

c- Calculer numériquement la valeur de U à ne pas dépasser si l'on veut que le faisceau ne soit pas capté par l'une des plaques.

Solution

1- entre les plaques A et C, proton du faisceau est soumis uniquement à la force électrique due au champ électrique régnant entre ces deux plaques:

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$E_C(C) - E_C(A) = W(\vec{F}) = q.\vec{E}.AC = q.U_{AC}$

Comme $E_C(A) = 0$; il vient: $\frac{1}{2}mv_C^2 = qU_{AC}$, $A \to C$

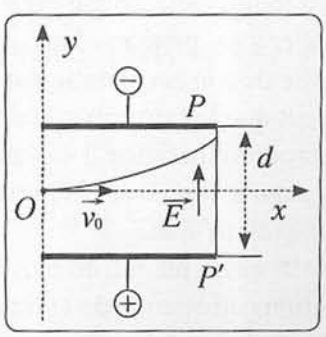
Entre C et O le champ est nul, la force est donc nulle: les protons conservent la même vitesse, leur énergie cinétique ne varie pas, donc $v_C = v_O$

d'où: $U_{AC} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m.v_0^2}{q} = \dfrac{m.v_0^2}{2e}$, soit $U_{AC} = 3,3kV$

Remarquons que $U_{AC} > 0$, donc $\vec{E}$ est dirigé de A vers C.

2.a- La force $\vec{F}$ doit être orientée de P' vers P; q étant positive, le champ $\vec{E}$ doit être aussi orienté de P' vers P. On a donc: $V_P < V_{P'}$ et $U = V_P - V_{P'} < 0$.

b-



L'accélération est donnée par la deuxième loi de Newton appliquée au proton; le référentiel du laboratoire est considéré

comme galiléen.

$\vec{F} = q.\vec{E} = m.\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E}$

Avec $\vec{E} = E.\vec{j}$:

$\ddot{x} = 0, \dot{x} = v_0$ et $x = v_0.t$;

$\ddot{y} = \frac{q}{m}.E, \dot{y} = \frac{q.E}{m}.t$ et $y = \frac{q.E}{2m}.t^2$

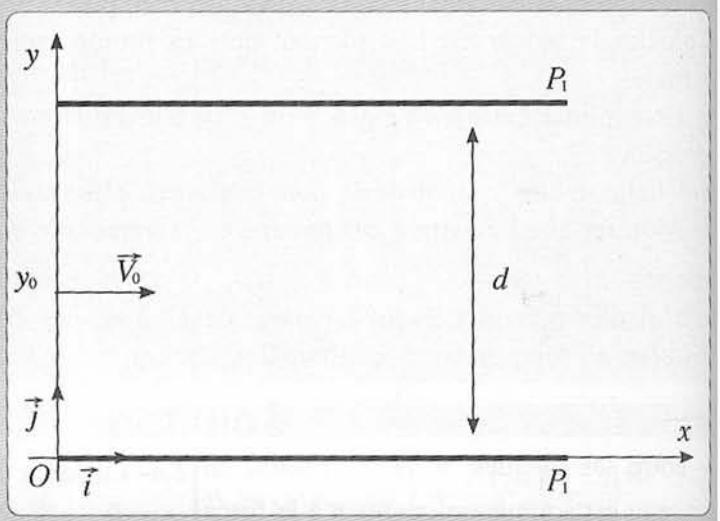
En éliminant le temps t entre x et y, il vient: $t = \frac{x}{v_0}$, d'où $y = \frac{q.E}{2m.v_0^2}.x^2$.

c- $E = \frac{|U|}{d}$, donc $y = \frac{q.|U|}{2m.v_0^2.d}.x^2$.

Pour que le faisceau de protons ne soit pas capté à la sortie des plaques lorsque $x = l$, l'ordonnée doit vérifier $y < \frac{d}{2}$. Donc $|U| < \frac{m.v_0^2.d^2}{e.l^2}$, soit $|U| < 417V$.

4

Un champ électrique $\vec{E}$ est créé par un condensateur plan constitué de deux plaques parallèles et horizontales (P_1 et P_2) reliées à un générateur de tension constance U et séparées d'une distance d, comme l'indique la figure ci-dessous.



Données: masse de l'électron $m = 9,1.10^{-31}kg$

charge de l'électron $q = -e = -1,6.10^{-19}C$

champ de pesanteur $g = 9,81m.s^{-2}$

$U = 205V$; $d = 0,040m$.

Tous les électrons pénètrent dans le champ $\vec{E}$, supposé uniforme, à l'ordonnée y_0 et sont animés de la même vitesse $\vec{V_0}$ parallèle aux plaques.

1- Montrer, par un calcul, qu'il est légitime de négliger la force de peseanteur par rapport à la force électrique pour l'électron.

2- Un électron pénètre dans le champ à l'instant initial $(t = 0)$. L'expression vectorielle de son accélération $\vec{a_1}$ en fonction de e, m et $\vec{E}$.

3- On veut que le faisceau soit dévié vers le bas.

3.1- Reproduire la figure 1 et représenter (sans souci d'échelle):

- la force qui s'exerce sur la particule à son entrée dans le champ ;
- le champ électrique.

3.2- Quelle est la plaque de plus haut potentiel? Justifier la réponse.

4- Equation cartésienne de la trajectoire.

4.1- Donner les composantes du vecteur accélération dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ indiqué sur la figure 1 et établir les équations horaires du mouvement de la particule dans ce repère.

4.2- Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire est de la forme $y = Ax^2 + B$

où A et B sont des constantes.

4.3- Vérifier que la constante A est liée à la valeur de l'accélération $\vec{a_1}$ par la relation $A = \frac{a_1}{2.v_0^2}$

4.4- Application numérique. Calculer A pour $V_0 = 1,5.10^7 m.s^{-1}$.

Solution

1- On a: $\|\vec{F}_e\| = eE$ et $\|\vec{P}\| = mg$

D'où: $\frac{F_e}{P} = \frac{eE}{mg} = \frac{eU}{mgd}$; $\left(E = \frac{U}{d}\right)$

A.N: $\frac{F_e}{P} = 9,19 \times 10^{13}$

Donc $F_e \gg P$

2- On utilise un repère terrestre assimilable à un repère galiléen.

Appliquons la 2ème loi de Newton à cet électron:

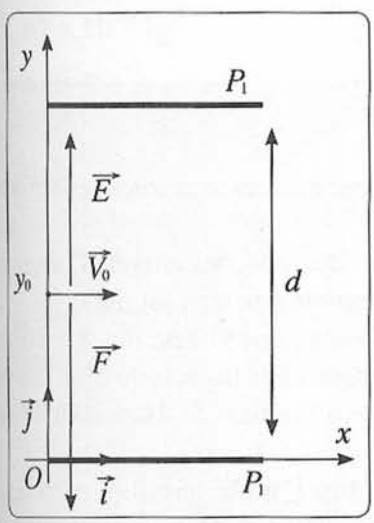
$\sum(\vec{F}_{ext}) = m\vec{a}$

La seule force appliquée à l'électron est la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$, car $\vec{P}$ est négligeable devant cette force.

On a donc: $-e\vec{E} = m\vec{a}$ d'où: $\vec{a_1} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

3.1- Représentation de $\vec{F}$;

Représentation de $\vec{E}$



3.2- $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

P_1 est donc la plaque de plus haut potentiel.

4- Equation de la trajectoire

Equations horaires du mouvement

$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 & car\ E_x = 0 \\ a_y = -\frac{e}{m}E & car\ Ey = E \end{cases}$

$a_x = 0 \Longrightarrow v_x = cte = C_1$

$ay = -\frac{e}{m}E \Longrightarrow v_y = -\frac{e}{m}Et + C_1'$

$At = 0$, $\vec{v} = \vec{V_0} \Longrightarrow v_{0x} = V_0$ et $v_{0y} = 0$

donc: $v_{0x} = C_1 = V_0$ et $v_{0y} = C_1' = 0$

d'où: $\vec{v}\begin{cases} v_x = V_0 & (1) \\ v_y = -\frac{e}{m}Et & (2) \end{cases}$

$(1) \Longrightarrow x = V_0 t + C_2$

$(2) \Longrightarrow y = -\frac{e}{2m}Et^2 + C_2'$

$At = 0$, $x = 0$ et $y = y_0 = \frac{d}{2}$

d'où: $x_0 = 0 = C_2$

et $y_0 = C_2' = \frac{d}{2}$

Soit: $x = V_0 t$ (3)

$y = -\frac{e}{2m}Et^2 + \frac{d}{2}$ (4)

(4)

4.2-

(3) $\Longrightarrow t = \frac{x}{V_0} \Longrightarrow y = -\frac{eE}{2mV_0^2}x^2 + \frac{d}{2}$

(5)

4.3- Identifions (5) avec $y = Ax^2 + B$:

$A = -\frac{eE}{2mV_0^2}$

$a_1 = \|\vec{a_1}\| = \frac{eE}{m} \Longrightarrow A = -\frac{a_1}{2V_0^2}$

4.4- On a $a_1 = \frac{e}{m}\frac{U}{d}$ car $E = \frac{U}{d}$

D'où: $A = -\frac{eU}{2mdV_0^2}$

A.N: $e = 1,6 \times 10^{-19} C$, $U = 205V$,

$m = 9,1 \times 10^{-13} kg$

$d = 0,040m$ $V_0 = 1,5 \times 10^{+7} m.s^{-1}$

$A = -2,0m^{-1}$

5

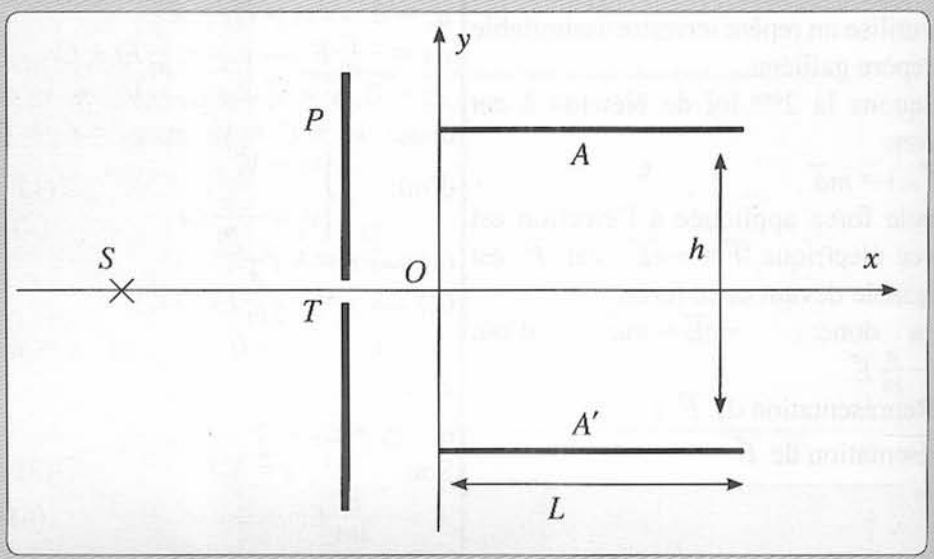
On négligera l'action de la pesanteur sur les ions

Une source S produit des ions positifs monoatomiques de charge $q = e$ et de masse m. Une plaque métallique verticale P, percée en son centre T, est située à la distance ST de S.

Une différence de potentiel U_{PS} est établie entre S et la plaque P. Les ions sont ainsi accélérés et franchissent en T la plaque P.

Les ions issus de S et passant en T pénètrent ensuite en O parallèlement aux armatures horizontales A et A' d'un condensateur plan, situées à la distances h l'une de l'autre; soit L la longueur des armatures (figure 1).

On applique entre les armatures A et A' une tension $U_{AA'} > 0 (U_{AA'} = U')$.



Données: (Masse d'un ion: $m = 1,67 \times 10^{-27} kg$

Charge élémentaire: $e = 1,6 \times 10^{-19} C$

1- Justifier le signe que doit avoir la tension U_{PS} pour que ces ions soient effectivement accélérés entre S et P.

2- En posant $|U_{PS}| = U$, établir l'expression de la vitesse v_T des ions en T en fonction de U, m et e en supposant qu'en S la vitesse initiale des ions est nulle.

En déduire la valeur de U qui donnerait à des protons une vitesse de: $8 \times 10^5 m.s^{-1}$

3- Etablir dans le système d'axes Ox, Oy, l'équation de la trajectoire d'un ion positif entre les armatures du condensateur (on négligera l'action de la pesanteur sur les ions).

4- La déviation angulaire de ces ions (c'est-à-dire l'angle que font entre eux les vecteurs vitesse à la sortie et à l'entrée du condensateur) étant α, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de h, L, U et U' et donner le sens de la déviation.

5- En réalité, divers ions positifs, différents entre eux par la valeur de leur charge ou de leur masse, sortent sans vitesse initiale de la source S. Comparer leurs déviations.

Solution

1- Entre S et T les ions sont soumis uniquement à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Or: $q > 0$, donc $\vec{F}$ et $\vec{F} = q\vec{E}$ ont même sens.

$\vec{E}$ étant dans la direction des potentiels décroissants, le potentiel de la plaque P doit être inférieur à celui de la source S: $U_{PS} < 0$.

2- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron:

$$E_{C_T} - E_{C_S} = \frac{1}{2}mv_T^2 - 0 = W(\vec{F}ext)_{S\to T}$$

La seule force extérieure étant la force électrique $\vec{F}$ (on néglige le poids $\vec{P}$ par rapport à cette force électrique),

On a: $\frac{1}{2}mv_T^2 = q|U_{PS}| = eU$

Soit: $v_T = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ $\qquad mv_T^2$

Valeur de U: $\qquad U = \frac{mv_T^2}{2e}$

Application numérique:

$m = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$

$v_T = 8 \times 10^5 m.s^{-1}$

$e = 1{,}6 \times 10^{-19} C$

$U = 3340V$

3- Appliquons la deuxième loi de Newton à un ion: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$.

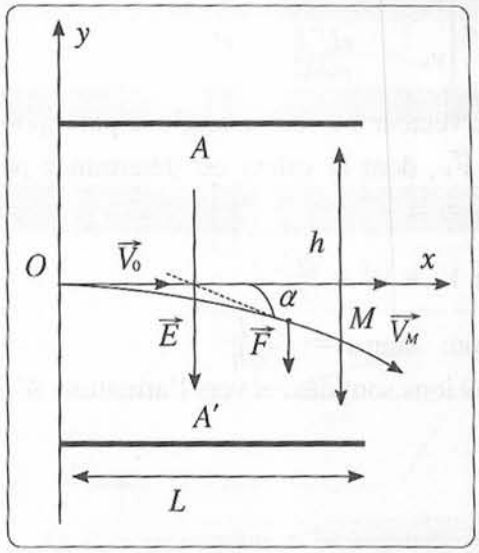
La seule force appliquée à l'électron est la force électrique:

$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$

d'où: $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ (1) avec $q = e$

$\vec{E}$ est dirigé suivant les potentiels décroissants.

Comme $U_{AA'}$ est positif, $\vec{E}$ est dirigé de A vers A': il en est de même pour $\vec{a}$.



Projetons l'équation (1) suivant les axes Ox et Oy, on a:

$a_x = 0$ et $a_y = -\frac{eE}{m} = -\frac{eU'}{mh}$

D'où: $v_x = K$ et $v_y = -\frac{eU'}{mh}t + K'$

$A't = 0$, on a: $\vec{V} = \vec{V_0} = \vec{V_T}$

Soit: $v_{x0} = K = V_0$ et $v_{y_0} = K' = 0$

donc: $\vec{V}\begin{cases} v_x = V_0 & (2) \\ v_y = -\frac{eU'}{mh}t & (3) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x = V_0 t + K''$ et (3)

$\Rightarrow y = -\frac{eU'}{2mh}t^2 + K'''$

$A't = 0$, on a: $x_0 = K'' = 0$

et $y_0 = K''' = 0$

Donc: $\begin{cases} x = V_0 t & (4) \\ y = -\frac{eU'}{2mh}t^2 & (5) \end{cases}$

Eliminons t entre les deux équations (4) et (5).

(4) $\Rightarrow t = \frac{x}{V_0} \overset{(5)}{\Rightarrow} y = -\frac{eU'}{2mhV_0^2}x^2$

4- Déviation angulaire des ions

A' la sortie des plaques, le point M a pour coordonnées:

$x_M = L$ et $y_M = -\frac{2U'L^2}{2mhV_0^2}$

En ce point, à la date $t = \frac{L}{V_0}$, la vitesse de

l'électron est:

$$\vec{v}_M \begin{cases} v_{Mx} = V_0 \\ v_{My} = -\dfrac{eU'L}{mhV_0} \end{cases}$$

Ce vecteur $\vec{v}_M$ fait un angle α par rapport à $\vec{V}_0$, dont la valeur est déterminée par:

$\tan\alpha = \dfrac{v_{My}}{v_{Mx}} = -\dfrac{eU'L}{mhV_0^2}$

Or $V_0^2 = V_T^2 = \dfrac{2eU}{m}$

d'où: $\tan\alpha = -\dfrac{U'L}{2Uh}$

Les ions sont déviés vers l'armature A'.

5- Comparaison des déviations

• Ions de même masse et de charges différentes.

• Ions de même charge et de masses différentes.

L'expression de tan α est indépendante de la masse et de la charge de l'ion positif.

Tous les ions positifs subissent la même déviation.

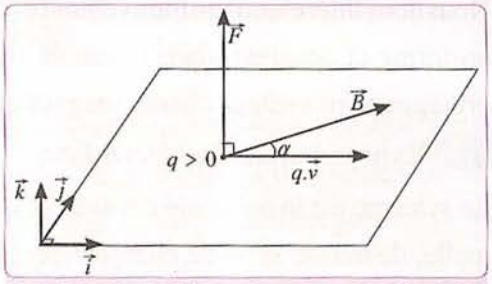
6 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

I- Force magnétique:

1 Relation de Lorentz:

Un porteur de charge électrique q, en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à une force magnétique $\vec{F}$ donnée par la relation vectorielle:

$$\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$$



La force magnétique $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan $(\vec{v},\vec{B})$ et orientée vers le haut si la particule porte une charge positive.

Cette relation, qui fait intervenir le produit vectoriel étudié en mathématiques, permet, connaissant les caractéristiques des vecteurs q. $\vec{v}$ et $\vec{B}$, de déduire celles de la force $\vec{F}$.

2 caractéristiques de la force $\vec{F}$.

Les caractéristiques de la force sont:

• Le point d'application:

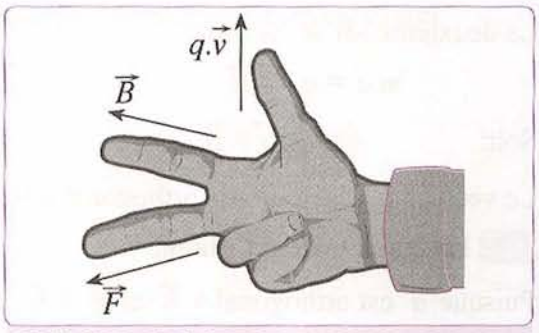
La particule considérée comme ponctuelle;

• La direction:

orthogonale à la fois au vecteur $\vec{v}$ et au vecteur $\vec{B}$, donc au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$;

• Le sens:

Le trièdre formé par $q.\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ est direct (appliquer une règle d'orientation directe de l'espace);



Règle des trois doigts:
Le pouce, l'index, le majeur de la main droite, pris dans cet ordre, sont placés suivant les axes $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. on peut donc trouver le sens d'une force magnétique puisque le trièdre $(q.\vec{v},\vec{B},\vec{F})$ associé est direct.
Attention! Si $q < 0$, $q.\vec{v}$ a le sens opposé à $\vec{v}$.

• La valeur:

$F = |q.v.B.\sin\alpha|$, avec q: charge électrique exprimée en coulomb (C),

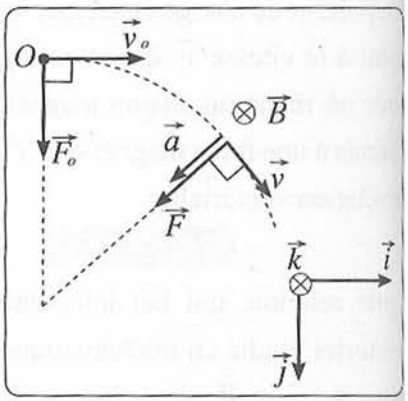
v : vitesse de la particule en $m.s^{-1}$, B : champs magnétique en tesla (symbole: T).

Remarquons que si:

- $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont parallèles, alors $\sin\alpha = 0$ et $F = 0$;
- $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux, alors $\sin\alpha = 1$ et $F = |q|.v.B$.

II- Étude du mouvement:

Nous nous intéressons au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant, dans le cas où le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule est orthogonal au vecteur champ magnétique $\vec{B}$.



1 Expression de l'accélération:

Le système est la particule considérée comme ponctuelle, de masse m et de charge électrique q.

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen.

La seule force agissant sur la particule est la force de Lorentz due au champ magnétique uniforme $\vec{B}$, soit:

$$\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La deuxième loi de Newton:

$$m.\vec{a} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Soit: $$\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le vecteur $\vec{a}$ est toujours orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$ (1)

2 La trajectoire est plane:

Puisque $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$ et $\vec{B} \,//\, \vec{k}$, alors $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{k}$; $a_z = 0$

D'où $v_z = cte(\forall t)$, or $v_z(0) = 0$ d'où $v_z = 0(\forall t)$

Une intégration donne $z(t) = cte = 0 \quad (\forall t)$

Le mouvement s'effectue dans le plan $(x;y)$ contenant $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$

3 Le mouvement est circulaire uniforme:

Dans la base de Frenet $(\vec{u};\vec{n})$: $\vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$

Puisque $\vec{a} \perp \vec{u}$, alors $\vec{a}.\vec{u} = 0$

$\vec{a}$ est perpendiculaire à la tangente à la trajectoire, elle est donc normale à cette trajectoire, d'où $\vec{a} = \vec{a}_N$, $a_T = 0$

Le résultat $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ donne $v = cte = v_0$

Le mouvement est donc uniforme.

Revenons à l'expression de $\vec{F}$:

$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_N$

Soit en module: $F = ma_N$;

ou encore $|q|.V.B = m.\frac{V^2}{\rho}$

D'où: $\rho = \frac{m.V}{|q|.B} = cte$: la trajectoire est circulaire.

Une particule chargée pénétrant dans un champ magnétique uniforme constant avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{B}$ est animée, dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ et contenant $\vec{v}$, d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse v et de rayon R.

Le rayon a pour expression: $R = \frac{m.v}{|q|.B}$.

La vitesse angulaire de la particule est égale à:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|.B}{m}$$

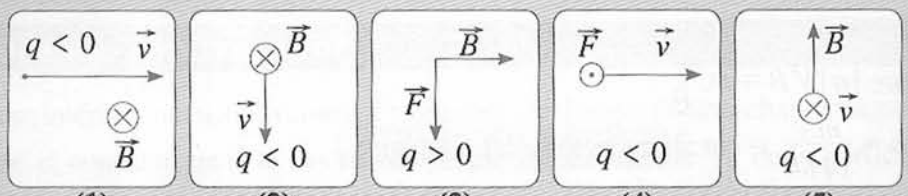
Sa période T de révolution est:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}$$

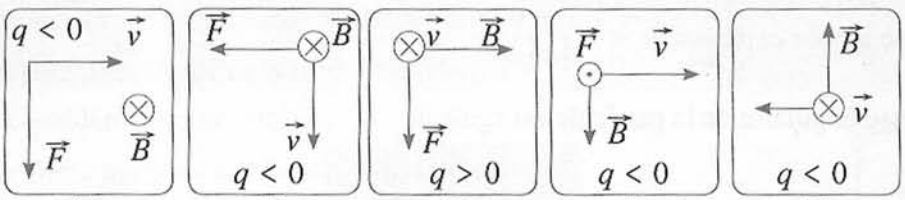
Elle ne dépend ni de v ni de R ; elle est d'autant plus faible que B est grand.

1 Sur chacun des schémas suivants doivent figurer les trois vecteurs orthogonaux vitesse $\vec{v}$, champs magnétique $\vec{B}$ et force de Lorentz $\vec{F}$.

Représenter, dans chaque cas, le vecteur manquant.



Solution



2 Dans un accélérateur de particules, des ions hélium He^{2+}, de masse $m_{He} = 6,68.10^{-27} kg$, sont accélérés jusqu'à une vitesse $v_0 = 1,25.10^7 m.s^{-1}$. Ils pénètrent dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme de valeur $B = 1,30T$. Leur vecteur vitesse $\vec{v_0}$ est perpendiculaire au vecteur champ magnétique $\vec{B}$.

Données: Charge électrique élémentaire: $e = 1,6.10^{-19} C$; $g = 10\ N.kg^{-1}$

1- Calculer la valeur de la force magnétique. F_m. La comparer au poids de la particule α.

2- Donner la nature du mouvement d'une particule α.

3- Calculer:

a- le rayon de la trajectoire:

b- la durée d'un demi-tour.

Solution

1- $F_m = |q|.V_0.B.\sin(\vec{v_0},\vec{B}) = 2e.v_0.B$

$F_m = 2.1,6.10^{-19}.1,25.10^7.1,30 = 5,2.10^{-12} N$

$P = mg = 6,68.10^{-26} N$

Le poids des ions He^{2+} est négligeable devant la force due au champ magnétique.

2- Le mouvement d'un ion dans un champ magnétique uniforme dans le cas où $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux est un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{m.v}{|q|.B}$.

3. a- $R = \dfrac{mv}{|q|.B} = \dfrac{6,68.10^{-27}.1,25.10^{7}}{2.1,6.10^{-19}.1,30}$

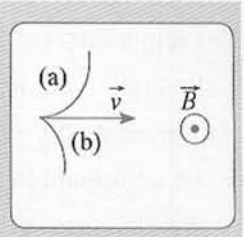
$= 2,0.10^{-1} m$

$= 20cm$

b- $\Delta t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi R}{v}$

$= \dfrac{\pi m}{|q|.B} \simeq 5.10^{-8} s$

3 Deux ions X_1^{2+} et X_2^{2-} de masses respectives m_1 et m_2 entrent dans un zone où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$, à la même vitesse $\vec{V_0}$ (voir figure).



1- Donner l'expression du rayon de la trajectoire R_1 de l'ion X_1^{2+} et R_2 de l'ion X_2^{2-}.

2- La figure donne le trajet de chacun de ces ions dans le champ $\vec{B}$.

Faire correspondre à chacun des ions le trajet qui lui convient.

3- A quoi est due la différence entre R_1 et R_2?

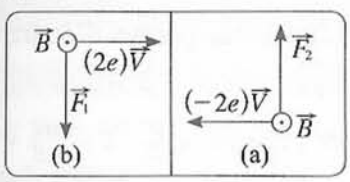
4- Sachant que les deux rayons R_a et R_b sont tels que $R_b = 0,85\, R_a$, calculer le rapport $\dfrac{m_1}{m_2}$.

Solution

1- $R_1 = \dfrac{m_1 V_0}{2eB}$ et $R_2 = \dfrac{m_2 V_0}{2eB}$

2- Pour l'ion positif X_1^{2+}, la force de lorentz $\vec{F_1}$ qui lui est appliqué est donnée.

sur la schéma (b) Pour l'ion X_2^{2-} on a la figure (a).

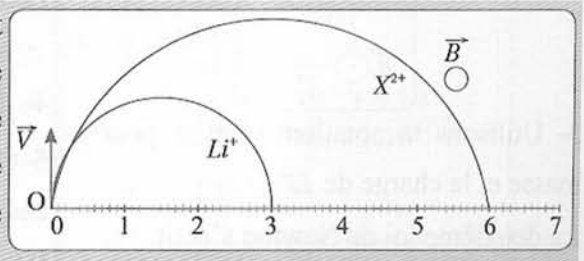


3- La différence entre R_1 et R_2 est due au fait que les masses m_1 et m_2 sont différentes.

4- $\dfrac{R_b}{R_a} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{m_1 v_0 / 2eB}{m_2 v_0 / 2eB} = \dfrac{m_1}{m_2}$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{R_b}{R_a} = 0,85$

4 Deux particules chargées Li^+ et X^{2+} arrivent au point O, à la même vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ (figure).



La charge électrique de l'ion X^{2+} est notée q_x et sa masse est notée m_x.

Les deux particules Li^+ et X^{2+} sont soumises uniquement à la force de Lorentz.

Données: $V = 10^5 m.s^{-1}$; $B = 0,5T$, $e = 1,6.10^{-19} C$

$m(Li) = 6,015u$; $1u = 1,66.10^{-27}kg$

Sur la figure, on a représenté la trajectoire de chacune des deux particules.

1- Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la force de Lorentz appliquée à la particule Li^+, au point O.

2- Indiquer le sens de $\vec{B}$ en utilisant l'un des deux symboles ⊙ et ⊗.

3- En appliquant la deuxième loi de Newton, dans un repére galiléen, montrer que le mouvement de l'ion Li^+ est uniforme et de trajectoire circulaire, de rayon $R_{Li} = \frac{m_{Li}.v}{e.B}$

4- En exploitant la figure, déterminer le rapport $\frac{R_X}{R_{Li}}$, où R_X rayon de X^{2+}.

5- Reconnaitre la particule X^{2+} parmi les particules qui figurent dans le tableau suivant:

L'ion	$^{24}_{12}Mg^{2+}$	$^{26}_{12}Mg^{2+}$	$^{40}_{20}Ca^{2+}$
sa masse en (u)	23,985	25,983	39,952

Solution

1- Les deux particules sont déviées vers la droite sur la figure sous l'effet de la force magnétique qui est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

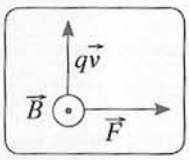
$\vec{F}$ est donc dirigée vers la droite.

$F = |q|.V.B.\sin(90°) = e.V.B$ ·

$= 1,6.10^{19}.10^{7}.0,5$

$= 8.10^{-13}N$

2-



3- Utilisons la notation m et q pour la masse et la charge de Li^+.

La deuxième loi de Newton s'écrit:

$\vec{F} = m\vec{a}$ (1)

or $\vec{F} = q.\vec{V} \wedge \vec{B}$ (2)

Donc: $m\vec{a} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ ou encore $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$

Ce résultat montre que $\vec{a} \perp \vec{V}$

Puisque $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, alors $\vec{a}$ est normale à la trajectoire, d'où:

$a = a_N$ et $a_T = 0$

- Le résultat $a_T = 0$ donne $v = cte$; le mouvement est donc uniforme.

- Le résultat $a = a_N$ permet d'écrire:

$F = ma = ma_N$.

ou encore $|q|.V.B = m.\frac{V^2}{R}$; $R = \frac{mV}{e.B} = cte$

La trajectoire est donc circulaire de rayon $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$.

4- $\frac{R_X}{R_{Li}} = \frac{2R_X}{2.L_i} = \frac{6}{3} = 2$ (1)

5- On utilise l'expression de R pour chacun des ions: $R_X = \frac{m_X.V}{2e.B}$ et $R_{Li} = \frac{m_{Li}.V}{e.B}$

D'après (1) on a $R_X = 2Li$;

donc: $\frac{m_X.V}{2.eB} = \frac{2.m_{Li}.V}{eB}$

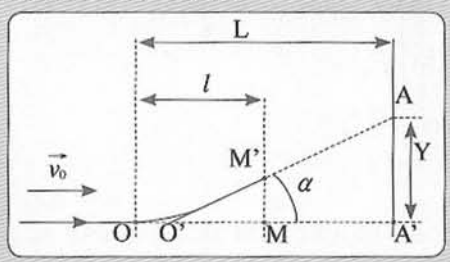
$m_X = 4m_{Li} \simeq 24u$

Cette valeur correspond à $^{24}_{12}Mg^{2+}$.

5 Un faisceau homocinétique d'électrons pénètre en O dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à la vitesse $\vec{v_0}$ des électrons.

Données: largeur de la zone de champ $\vec{B}$: $l = 3.10^{-3}m$.

$OA' = L = 0,3m$, $AA' = Y = 3,5cm$ et $v_0 = 10^7 m.s^{-1}$



1.a- Compte tenu de la déviation Y représentée sur le schéma, quel est le sens du champ magnétique $\vec{B}$?

b- Représenter en un point quelconque de l'arc $\overset{\frown}{OM'}$ la force magnétique s'exerçant sur un électron.

2- Donner l'expression du rayon de courbure R de la trajectoire représentée par l'arc $\overset{\frown}{OM'}$.

3- En admettant que l est négligeable devant L et en supposant petit l'angle α, exprimer la déflexion magnétique Y en fonction de L, l, B, e, m et v_0

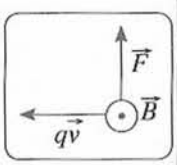
4- Dans le cadre de ces approximations, calculer la valeur du champ magnétique $\vec{B}$.

On prend: $m = 9,1.10^{-31}kg$, $e = 1,6.10^{-19}C$ et $\tan\alpha \approx \alpha$.

Solution

1.a- Le sens de $\vec{B}$ est indiqué sur le schéma ci-contre

1.b- $\vec{F_m}$ est perpendiculaire à la tangente $M'A$ au point M'.



2- $R = \dfrac{m.v_0}{e.B}$

3- $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{Y}{O'A'} \simeq \dfrac{Y}{L}$

L'angle α correspond à l'arc $\overset{\frown}{OM'}$, donc:

$\overset{\frown}{OM'} = R.\alpha$ et $\overset{\frown}{OM'} \simeq OM = \ell$.

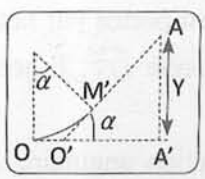
donc: $\alpha \simeq \dfrac{\ell}{R}$ (2)

On peut donc écrire en comparant (1) et (2): $y = \dfrac{L.\ell}{R} = \dfrac{L.\ell.eB}{m.v_0}$

4- $B = \dfrac{m.v_0.y}{e.L.\ell}$

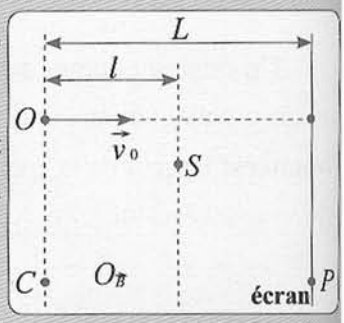
$= \dfrac{9,1.10^{-31}.10^7.3,5.10^{-2}}{1,6.10^{-19}.0,3.3.10^{-3}}$

$B = 2,2.10^{-3}T$



6 Un faisceau homocinétique de protons pénètre à la vitesse.

$\vec{v}_0$ en un point O d'une région où règne un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ (cf. schéma).



Dans cette région, de largeur l, leur trajectoire est circulaire, de centre C et de rayon $R = \frac{m.v_0}{e.B}$. Les protons sortent de cette région en un point S.

1- Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}$.

2- On considère l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CO})$.

Montrer que $\sin\alpha = \frac{\ell}{R}$.

3- Quelle est la nature du mouvement des protons après leur sortie du champ magnétique?

4- Les protons heurtent en un point P, un écran situé à la distance $L = OO'$ du point O. En supposant L nettement supérieure à l, donner une valeur approchée de $\tan\alpha$ en fonction de la déviation $D = O'P$ et de L.

5- On suppose que l'angle α est petit; par conséquent $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$. Exprimer alors la déviation D en fonction du rapport $\frac{e}{m}$ de la vitesse v_0, B, L et ℓ.

Solution

1- Le sens de B est indiqué sur le schéma.

2- L'arc $\overset{\frown}{OS}$ est intercepté par l'angle au centre $\alpha = (\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{CS})$ tel que:

$$\sin\alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{l}{R}.$$

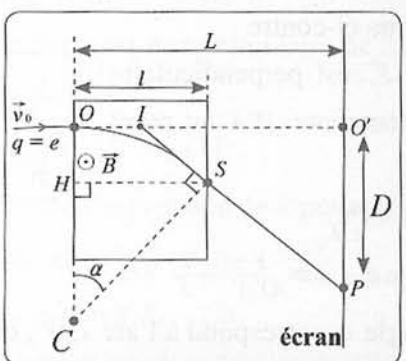
3- A la sortie de la région du champ magnétique, le proton qui n'est plus soumis à aucune force (l'influence de son poids est négligeable), est animé d'un mouvement rectiligne uniforme; sa trajectoire est portée par la tangente en S à l'arc de cercle $\overset{\frown}{OS}$. Il heurte l'écran au point P.

4- La déviation angulaire α est donnée par la relation $\tan\alpha = \frac{O'P}{lO'} = \frac{D}{lO'}$

• Première approximation:

$l \ll L$, alors $lO' \approx OO' \approx L$

et: $\tan\alpha \approx \frac{D}{L}$.



Le schéma n'est pas à l'échelle.
en fait, $l \ll L$ et α est petit (inférieur à 10°).

5- Seconde approximation:

l'angle α est petit, donc:

α (en radian) $\approx \sin\alpha \approx \tan\alpha$

Nous obtenons ainsi:

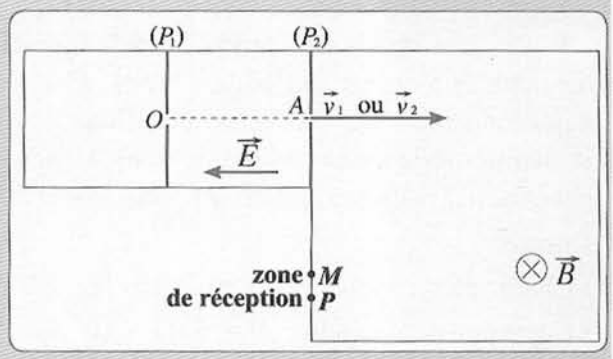
$\frac{l}{R} \approx \frac{D}{L}$ soit $D \approx L.\frac{l}{R}$

or: $R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$, donc:

$$D = \frac{L.l.|q|.B}{m.v_0} = \frac{e}{m}.\frac{Ll}{v_0}.B$$

7 A l'aide d'un spectromètre de masse schématisé ci-contre, on se propose de séparer des ions $^{79}Br^-$ et $^{81}Br^-$ de masses respectives: $m_1 = 1,3104.10^{-25}kg$ et $m_2 = 1,3436.10^{-25}kg$

Les ions Br^- pénètrent en O dans un champ électrique uniforme et constant, créé par une tension U appliquée entre les deux plaques verticales P_1 et P_2, pour y être accélérés jusqu'en A.



1- Les ions $^{79}Br^-$ et $^{81}Br^-$ sortent en A avec les vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Leurs vitesses sont négligeables en O. Exprimer littéralement les valeurs de v_1 et v_2.

2- Les ions Br^- pénètrent en A dans un champs magnétique $\vec{B}$, orthogonal aux vecteurs vitesse $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et parviennent dans la zone de réception indiquée. Calculer la distance MP séparant les points d'impact des deux types d'ions.

Données: $U = 4,00.10^3V$ et $B = 1,00.10^{-1}T$.

Solution

Le système étudié est un ion. Dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$, il est soumis à la force électrique constante $\vec{F} = q.\vec{E}$ dirigée de O vers A.

Le poids de l'ion est négligeable.

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

Le théorème de l'energie cinétique s'exprime sous la forme:

$$\frac{1}{2}m.v_A^2 - \frac{1}{2}m.v_0^2 = q.(V_0 - V_A) = e.(V_A - V_0) = e.U_{AO} = e.U$$

Or v_0 est négligeable, d'où:

$v_A = \sqrt{\frac{2e.U}{m}}$ Pour: $^{79}Br^-: v_1 = \sqrt{\frac{2e.U}{m_1}}$;

pour: $^{81}Br^-: v_2 = \sqrt{\frac{2e.U}{m_2}}$

2- Les ions pénètrent dans un champ magnétique uniforme et constant avec un vecteur vitesse initiale orthogonal à $\vec{B}$.

Dans ces conditions, leur mouvement est circulaire et uniforme dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Le rayon de leur trajectoire vaut $R = \frac{m.v}{e.B}$ et la distance AM (ou AP) vaut:

$D = 2R = \frac{2m.v}{e.B}$, avec $v = \sqrt{\frac{2e.U}{m}}$ (établi au 1), soit:

$$D = \frac{2m}{e.B}.\sqrt{\frac{2e.U}{m}} = \sqrt{\frac{8U}{e.B^2}}.\sqrt{m}$$

Les ions $^{81}Br^-$ ayant une plus grande masse $(m_2 > m_1)$, ils parviennent en P $(D_2 > D_1)$

$$MP = D_2 - D_1 = \sqrt{\frac{8U}{e.B^2}}.(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

A.N: $MP = 2,04.10^{-2}m = 2,04cm$

8 Les ions lourds sont produits par le GANIL situé à Caen. Un générateur produit des ions faiblement chargés $(q < 5e)$. Ces ions sont accélérés et passent par des «éplucheurs» en général constitués d'une fine membrane de carbone où ils perdent la totalité ou la quasi-totalité de leurs électrons. On obtient des ions extrêmement chargés, par exemple $^{129}_{54}Xe^{52+}$ et $^{129}_{54}Xe^{54+}$

Données:

- Charge élémentaire: $e = 1,60 \times 10^{-19}C$; $1MeV = 1,6.10^{-13}J$
- Constante d'Avogadro: $N = 6,02 \times 10^{23}mol^{-1}$
- Masse atomique molaire du xénon: 129: $M(^{129}_{54} \times e) = 128,9g.mol^{-1}$.

Dans tout l'exercice, on suppose que le mouvement des ions, dont on néglige le poids se fait dans le vide. Bien que les ions très chargés soient obtenus par «épluchage» d'atomes $^{129}_{54}Xe$, on suppose que la source émet de tels ions animés d'une vitesse très faible.

On admettra que la masse d'un ion est pratiquement égale à celle de l'atome.

1- On produit des ions positifs de charge q et de masse m. Ces ions sont émis en O_1 avec une vitesse négligeable puis sont accélérés par une tension U dans la chambre d'accélération (A) entre deux plaques parallèles P_1 et P_2. La valeur absolue de la tension U est égale à $100kV$.

a- Quel doit être le signe de la tension $U = V_{P1} - V_{P2}$ pour que ces ions soient accélérés?

b- Donner l'expression de l'énergie cinétique de ces ions lorsqu'ils sont en O_2 en fonction de q et U. En déduire leur vitesse V_0.

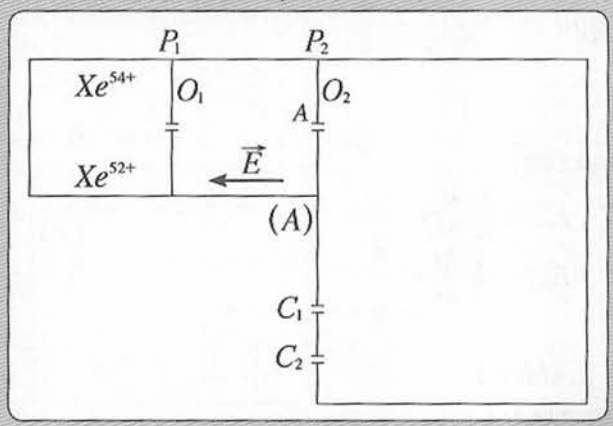
Quel est l'intérêt d'utiliser des ions très chargés?

c- Les ions émis en O_1 sont $^{129}_{54}Xe^{54+}$ et $^{129}_{54}Xe^{52+}$.

Calculer les valeurs numériques de leurs vitesse respectives v_0 et v'_0 ainsi que leurs énergies cinétiques exprimées en MeV.

2- Les ions Xe^{52+} et Xe^{54+} pénètrent, avec une vitesse perpendiculaire à P_2, dans la

chambre de déviation D où règne un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan de la figure et d'intensité $B = 1,0T$.



a- Quel doit être le sens du champs magnétique $\vec{B}$ pour que les ions parviennent en C_1 ou C_2 ?

b- Montrer que le mouvement des ions est circulaire uniforme.

Etablir l'expression du rayon R de la trajectoire en fonction de q, U, m et B.

c- Quel est l'ion recueilli en C_1 ?

d- Calculer numériquement la distance C_1C_2.

Solution

1- Chambre d'accélération

a- Signe de la tension $U = V_{P_1} - V_{P_2}$

L'unique force agissant sur un ion est la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$, $(q > 0)$.

La force $\vec{F}_e$ doit être dirigée de O_1 vers O_2. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le champ électrique soit dirigé de P_1 vers P_2. Le champ électrique étant orienté suivant les potentiels décroissants, on en déduit que: $U = V_{P_1} - V_{P_2} > 0$

b- Vitesse des ions en O_2

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un ion.

Sa variation d'énergie cinétique entre l'instant où il se trouve en O_1 et celui de son passage en O_2 est égale au travail de la force due au champ électrique durant cet intervalle de temps qui, par définition du potentiel, est qU (le poids de l'ion est négligé).

Donc: $\Delta E_C = \frac{1}{2}m_i v_0^2 - 0 = qU$; soit:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m_i}}$$

Des ions très chargés permettent d'avoir des vitesses de passage en O_2 élevées (v_0 est proportionnelle à $\sqrt{q}$).

c- Valeurs numériques de v_0 et v'_0

Comme la masse d'un ion est sensiblement égale à celle de l'atome, on a:

$$m_i = \frac{M \leftarrow \text{masse atomique molaire}}{N \leftarrow \text{nombre d'avogadro}}$$

Pour l'ion $^{129}_{54}Xe^{54+}$, $q = 54e$ et:

$$v_0 = \sqrt{\frac{108eUN}{M}}$$

Pour l'ion $^{129}_{54}Xe^{52+}$, $q = 52e$ et:

$$v'_0 = \sqrt{\frac{104eUN}{M}}$$

A.N.: $e = 1,6.10^{-19}\,C$; $U = 100.10^{3}V$

$N = 6,02.10^{23}\,mol^{-1}$;

$M = 0,128\ 9\,kg.mol^{-1}$

$v_0 = 2,841.10^{6}\,m.s^{-1}$;

$v'_0 = 2,788.10^{6}\,m.s^{-1}$

Leur énergie cinétique est:

- Pour l'ion $^{129}_{54}Xe^{54+}$: $E_{C_0} = \frac{1}{2}\frac{M}{N}v_0^2$

- Pour l'ion $^{129}_{54}Xe^{52+}$: $E'_{C_0} = \frac{1}{2}\frac{M}{N}v'^2_0$

A.N:

$E_{c_0} = 864.10^{-15}J = 5,4MeV$;

$E'_{c_0} = 832.10^{-15} = 5,2MeV$;

2- Chambre de déviation

a- Sens du champ magnétique $\vec{B}$

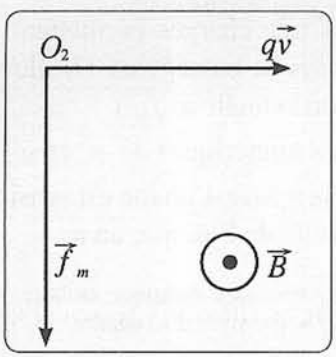
Chaque ion est soumis à une force magnétique de Lorentz: $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$q\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{f}_m$ forment un trièdre direct.

Lorsqu'un ion arrive en O_2, il faut que la force $\vec{f}_m$ soit dirigée vers C_1 (ou C_2) pour qu'il soit dévié vers le bas.

b- D'après la 2ème loi de Newton, appliquée à un ion de masse m et de charge q: $\vec{f} = m.\vec{a}$; or $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Donc: $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$.

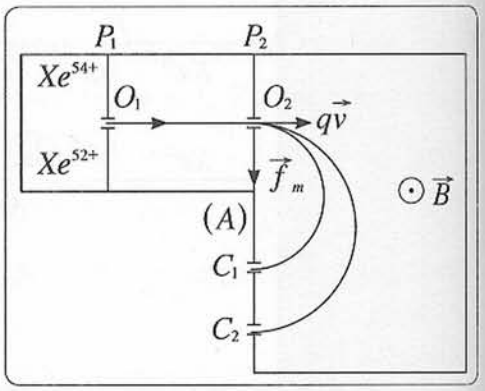


- $\vec{a}$ est donc $\perp$ à $\vec{V}$; c'est à $\perp$ à la tangente;

- $\vec{a}$ est donc normale à la trajectoire;

D'où $a = a_N$ et $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

- On déduit que: $v = cte$ (le mouvement est uniforme).



- Et, $f_m = m.a_N = ma_N$, alors:

$|q|.V.B = m.\frac{v^2}{R}$, donc: $R = \frac{m.v}{|q|.B} = cte$

La trajectoire est donc circulaire.

Comme: $m = \frac{M}{N}$

Et: $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

nous obtenons: $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2UM}{qN}}$

c- Ion recueilli en C_1

R est inversement proportionnel à $\sqrt{q}$.

C'est l'ion qui a la charge la plus forte qui suit la trajectoire de rayon le plus petit:

c'est l'ion $^{129}_{54}Xe^{54+}$ qui est recueilli en C_1.

d- Distance C_1C_2

On a: $C_1C_2 = 2R_2 - 2R_1$

Soit: $C_1C_2 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2UM}{52eN}} - \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2UM}{54eN}}$

D'où: $C_1C_2 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2UM}{eN}}\left(\frac{1}{\sqrt{52}} - \frac{1}{\sqrt{54}}\right)$

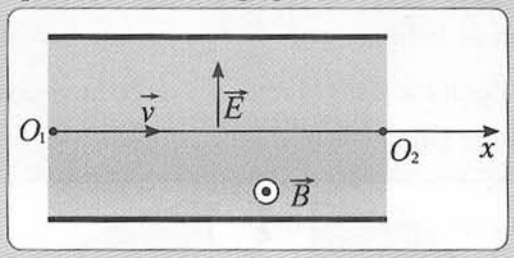
A.N.: $C_1C_2 = 2,68.10^{-3}m$

10 filtre de vitesse:

Une source d'ions émet les deux isotopes $^6Li^+$ et $^7Li^+$. Ces ions pénètrent en O_1 dans une zone où règnent simultanément un champ électrique uniforme vertical $\vec{E}$ et un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$.

$\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de figure et dirigé vers l'avant. Les vitesses d'entrée des ions en O_1 ont des valeurs différentes, mais les vecteurs vitesse ont tous la même direction O_1x (cf. schéma).

Donnée: l'action de la pesanteur sera négligée.



1- Donner la direction, le sens et l'expression littérale de la force électrique $\vec{F}_e$ s'exerçant sur un ion lithium pénétrant dans cette zone.

2- Donner la direction, le sens et l'expression littérale de la force magnétique $\vec{F}_m$ s'exerçant en O_1 sur un ion animé de la vitesse $\vec{v}$.

3.a- Des ions pénétrant en O_1 avec une vitesse donnée $\vec{v}_0$ sortent en O_2 en n'ayant subi aucune déviation.

Déterminer la relation existant alors entre les valeurs E, B et v_0.

b- Justifier le nom du dispositif.

Solution

1- La force électrique $\vec{F}e$ a le même sens que $\vec{E}$ car $q = e > 0$.

2- La force magnétique $\vec{F}_m$ est dirigée vers le bas sur la figure.

3- Pour que les ions ne soient pas déviés, il faut que $\vec{v}$ soit porté par l'axe Ox.

$v = v_x.\vec{i}$ d'où $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{i} = a_x.\vec{i}$

D'après la 2ème loi de Newton:

$\vec{F}e + \vec{F}_m = m\vec{a}$.

- Par projection sur l'axe ox on a:

$a_x = o$

- Par projection sur oy on a: $F_e - F_m = 0$

D'où $F_e = F_m$;

Soit: $|q|.E = |q|.V.B\sin(90°)$

$$v = \frac{E}{B}$$

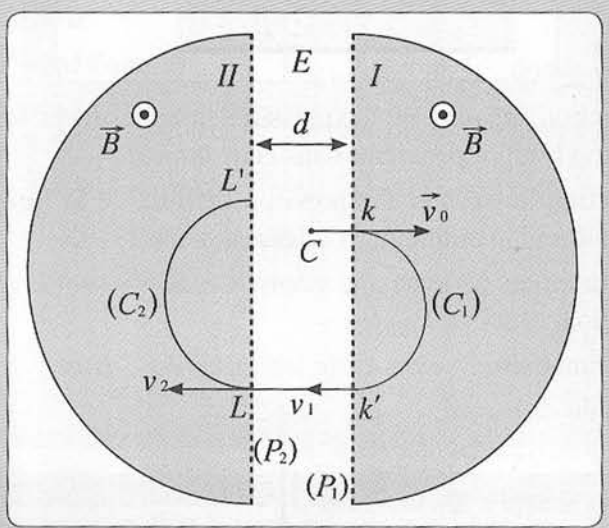
b- Il s'agit d'un filtre de vitesse car les seuls ions qui sortent par O_2 ont une vitesse qui vérifient la condition précédente.

11 Cyclotron

Une particule, de masse m et de charge q, pénètre en C, avec une vitesse négligeable, dans un espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ (cf. schéma). Cet espace est limité par deux grilles planes P_1 et P_2, assimilables à deux plaques métalliques distantes de d. On applique entre ces plaques une tension électrique $U_{P_2P_1}$ positive, $(U_{P_2P_1} = U)$. La particule s'accélère de C en K où elle arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$.

De part et d'autre des grilles règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant, perpendiculaire au plan de la figure.

La particule pénètre au point k dans la région I avec la vitesse $\vec{v}_0$ précédente. Elle décrit alors une trajectoire circulaire (C_1).



1.a- Exprimer l'énergie cinétique de la particule en k' en fonction de m et v_0.

Quel est le rôle du champ magnétique $\vec{B}$?

b- Exprimer le rayon R_1 de la trajectoire (C_1) en fonction de m, q, v_0 et B.

2- Quel est le signe de q ?

3- Lorsque la particule est dans l'espace I, le signe de la tension U_{p2p1} change. Entre (P_1) et (P_2) la particule est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré et décrit la trajectoire $k'L$.

Exprimer son énergie cinétique en L en fonction de m, q, v_0 et U_{p2p1}. Quel est l'intérêt du passage de la particule dans la zone (E) ?

4- La particule décrit ensuite la trajectoire circulaire (C_2).

a- Exprimer le rayon R_2 de la trajectoire (C_2) en fonction de m, q, v_0, B et U. Vérifier que R_2 est supérieur à R_1.

b- Exprimer la durée du demi-tour LL' et la comparer à la durée du demi-tour kk'.

Solution

1.a- $E_c(K') = \frac{1}{2}mv_0^2$, car la vitesse est constante entre K et K'.

Le rôle du champ $\vec{B}$ est de dévier le mouvement des particules sans changer le module de leur vitesse $(v_1 = v_0)$.

b- $R_1 = \frac{mv_0}{|q|.B}$.

2- La charge q est positive car la particule s'accélère vers la plaque négative (P_1).

3- $E_c(L) = E_c(K') + qU_{K'L}$

$= \frac{1}{2}mv_1^2 + q.U_{P_1P_2}$

$= \frac{1}{2}mv_0^2 + qU$

Entre K' et L, la tension change de signe:

$U_{P_2P_1} = -U < 0$

donc: $U_{P_1P_2} = U$

On a donc: $v_2 > v_1$

L'intérêt du champ $\vec{E}$ est d'augmenter la vitesse de la particule

4.a- $R_2 = \frac{m.v_2}{q.B} > R_1$ car, $v_2 > v_1$

b- $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi.m}{q.B}$

La durée est la même, car elle est indépendante de v et de R.

7 MOUVEMENT DES SATELLITES ET PLANÈTES

I- SATELLITES ET PLANETES:

1 Lois empiriques de Kepler:

On étudie les mouvements des planètes du système solaire, dans le référentiel héliocentrique.

Le référentiel héliocentrique est défini par le centre du soleil et trois étoiles très éloignées, fixes sur la voûte céleste.

Enoncés des lois

L'énoncé de ces lois est basé uniquement sur des constatations d'observation des mouvements des planètes et non sur une étude théorique.

- **1re loi:**

Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est un foyer.

- **2e loi:**

Pour une planète donnée, la surface que balaye par unité de temps le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ est la même quelle que soit la position de la planènte sur sa trajectoire (fig-1).

- **3e loi:**

Le rapport entre le carré de la période de révolution T d'une planète et le cube du demi-grand axe a de l'ellipse trajectoire est indépendant de la planète: $\frac{T^2}{a^3} = Cte$

Cette constante dépend de l'astre attracteur.

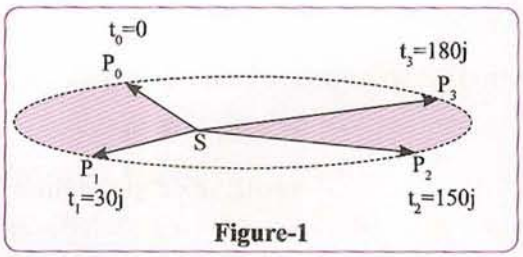


Figure-1

2 Propriétés du mouvement circulaire uniforme:

Considérons un corps de masse m, dont le centre d'inertie G possède un mouvement

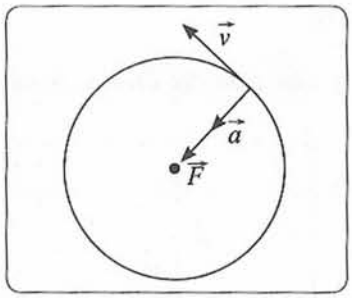
circulaire uniforme de rayon R par rapport au repère terrestre.

Si $\vec{F}$ est la résultante des forces agissant sur le corps, la deuxième loi de Newton donne: $\vec{F} = m\vec{a}$

Les composantes de $\vec{a}$ dans la base de Frenet sont:

$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, car $v = Cte$, et $a_n = \frac{v^2}{R}$; d'où $\vec{a} = \vec{a_N}$

et $\vec{F} = m\vec{a_n}$.



Dans un mouvement circulaire uniforme et à un instant donné quelconque, le vecteur accélération $\vec{a}$, tout comme le vecteur force $\vec{F}$, sont centripètes (dirigés vers le centre O de la trajectoire de G).

3 Loi de gravitation:

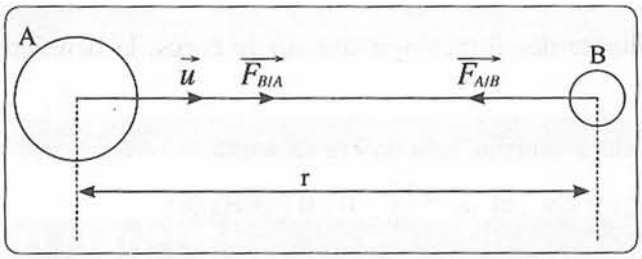
• D'après la troisième loi de Newton, deux corps A et B, dont la répartition des masses est à symétrie sphérique et la distance grande devant leur taille, exercent l'un sur l'autre des forces attractives $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ de même direction, de même valeur mais de sens opposés (fig-4):

$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$.

• La loi de gravitation s'exprime par la relation suivante:

$F = G\frac{m_A m_B}{d^2}$	F valeur des forces de gravitation (N).
avec: $F_{A/B} = F_{B/A} = F$	m_A masse de A (kg).
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, u.S.I$	m_B masse de B (kg).
	d distance AB (m).
	G constante de gravitation $(N.m^2.kg^{-2})$.

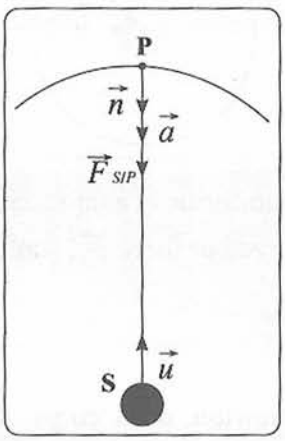
En utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$ on a:



$\vec{F}_{A/B} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$.

4 Etude du mouvement d'une planète ou (satellite):

Expression de la vitesse:



On se place dans le cas général où un corps de centre P (une planète, par exemple) de masse m gravite autour d'un corps de centre S (le Soleil), de masse M et supposé fixe.

On appelle r la distance SP entre les centres des deux corps. Les deux corps ne sont soumis qu'à l'interaction gravitationnelle.

La deuxième loi de Newton, appliquée au corps P dans un référentiel galiléen centré sur le corps S, donne: $m\vec{a} = \sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{F}_{S/P} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}$

Soit encore, en divisant par la masse m: $\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u} = G\frac{M}{r^2}\vec{n}$ (1)

Si le corps P a un mouvement circulaire uniforme autour du corps S à une distance r, on doit avoir: $\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$ (2)

L'accélération étant unique, les deux expressions (1) et (2) représentent le même vecteur.

Il faut donc que: $\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$, soit $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

Période de révolution. Troisième loi de Kepler:

La période de révolution est le temps mis par le corps pour décrire complètement son orbite.

$$T = \frac{périmètre}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM}$$

ou encore:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cons\tan te\ indépendante\ de\ la\ planète$$

On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire uniforme. Le rapport $\frac{r^3}{T^2}$ ne dépend que de l'astre attracteur.

Les satellites géostationnaires:

a- Définition: Un satellite est dit géostationnaire s'il reste en permanence à la verticale d'un point de la surface terrestre. Il occupe une position fixe dans le référentiel terrestre.

b- Conditions de stationnarité:

Un satellite ne peut être géostationnaire que si:

- Son orbite appartient au plan de l'équateur.
- Le sens de son mouvement est celui de la terre autour de l'axe polaire.
- Sa période de révolution est la même que la période de rotation de la terre autour de l'axe polaire $T_{Satellite} = T_{Terre} = 23h56\min 48s$.

1 On considère un satellite géostationnaire.

Afin de préciser le mouvement d'un satellite géostationnaire, répondre aux questions suivantes:

1- La période de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles est 1 jour sidéral, soit 86164s. Dans quel référentiel cette période de rotation est-elle mesurée?

2.a- Dans quel référentiel le satellite géostationnaire est-il immobile?

b- Quelle est sa période de rotation dans le référentiel géocentrique?

3- La trajectoire du satellite géostationnaire, dans le repère géocentrique, peut-elle être dans un plan:

a- méridien passant par l'axe des pôles?

b- passant par l'équateur?

c- contenant Casablanca.

4- L'altitude d'un tel satellite est-elle environ égale à:

a- $360km$? ; b- $3600km$? ; c- $36000km$?

Solution

1- Par rapport au référentiel géocentrique.

2.a- Par rapport au repère terrestre (lié au sol).

2.b- 1 jour sidéral.

3.a- Non

3.b- Oui

3.c- Non

4.c-

2 Le satellite SPOT2 est un satellite artificiel évoluant sur une trajectoire circulaire à une altitude $h = 832km$ de la Terre.

Sa vitesse est exprimée par la relation:

$$V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T + h}}.$$

Données: $G = 6,67.10^{-11}(u.S.I)$

$R_T = 6378km$, $M_T = 5,98.10^{24}kg$

1- à l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer les unités de la constante G dans le système international des unités.

2- Calculer la vitesse V de SPOT2.

3- Calculer sa période.

Solution

1- L'expression de V permet d'avoir:

$$V^2 = \frac{G.M_T}{R_T + h}$$

d'où: $G = \frac{V^2.(R_T + h)}{M_T}$

donc:

$$[G] = \frac{[V^2].[R_T + h]}{[M_T]} = \frac{L^2.T^{-2}.L}{M}$$
$$= L^3.T^{-2}.M^{-1}$$

G s'exprime en $m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

2- $V = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{(6378+832).10^3}}$.

$\simeq 7438 m.s^{-1}$

3- $T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{V}$

$= \frac{2\pi.(6378+831).10^3}{7438}$

$\simeq 6090 s \simeq 1h41\,\text{min}$

3 On propose trois trajectoires hypothétiques de satellite en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre.

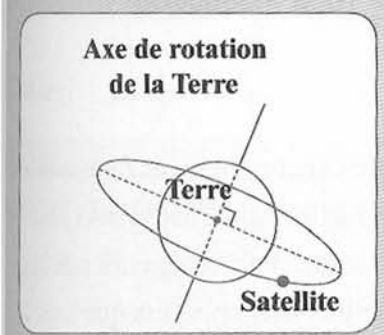


figure-1

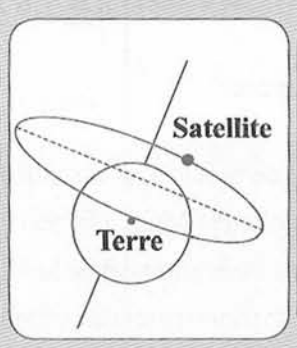


figure-2

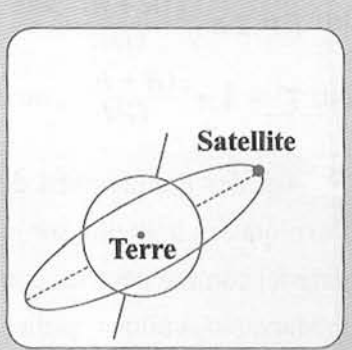


figure-3

1- Montrer que, seule, l'une de ces trajectoires est incompatible avec les lois de la mécanique.

2- Quelle est la seule trajectoire qui peut correspondre au satellite géostationnaire? Justifier la réponse.

Solution

1- La force à laquelle est soumis le satellite doit être dirigée vers le centre de la Terre.

Le centre de la trajectoire du satellite coïncide avec le centre de la Terre.

La trajectoire de figure (2) est impossible.

2- Le satellite géostationnaire évolue dans le plan de l'équateur perpendiculaire à l'axe des pôles.

C'est la figure (1) qui vérifie cette condition.

4 On sait que la période T d'un satellite de la Terre (de masse M et de rayon R) situé à l'altitude h vérifie la relation $T = 2.\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$.

1- Donner la définition des satellites géostationnaires.

2- **On donne:** $M = 6,0 \times 10^{24} kg$; $R = 6400 km$ et $G = 6,7 \times 10^{-11}$ (S.I).

Déterminer l'altitude h des satellites géostationnaires.

Solution

1- Un satellite est géostationnaire s'il est immobile par rapport à un référentiel terrestre.

2- On a alors:

$$T = 24h = 24 \times 3600 = 86400s$$

Or: $T = 2.\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$,

soit: $T^2 = 4.\pi^2 \frac{(R+h)^3}{GM}$, ou encore:

$$(R+h)^3 = \frac{T^2.GM}{4.\pi^2}$$

D'où:

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2.GM}{4.\pi^2}} - R$$

$$= \sqrt[3]{\frac{86400^2 \times 6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{4.\pi^2}} - 6,4 \times 10^6$$

$$h = 3,6 \times 10^7 m = 36000 km.$$

5 Un des grands défis de ce siècle (ou du suivant) sera d'envoyer une mission d'exploration humaine sur la planète Mars. On peut imaginer une base relais (pour le matériel comme pour les communications avec la Terre) sur Phobos, un des satellites de Mars. Nous allons étudier le mouvement de ce satellite. On supposera que tous les objets étudiés sont à répartition sphérique de masse.

Données: $G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$.

- distance entre le centre de Mars et celui de Phobos: $r = 9,38 \times 10^3 km$;
- masse de Mars $m_M = 6,42 \times 10^{23} kg$;
- la masse de Phobos sera notée m_P;
- période de rotation de Mars $T_M = 24h37\,\text{min}$.

On supposera que Phobos a un mouvement circulaire uniforme autour de Mars de vitesse v et on supposera que l'on travaille dans un référentiel galiléen centré sur Mars.

1- Donner la définition d'un mouvement circulaire uniforme.

2- Représenter le point d'application, la direction et le sens du vecteur accélération de Phobos sur un schéma.

3- Donner l'expression (sans justification) de la norme du vecteur accélération de Phobos en fonction de v et r.

4- Appliquer la deuxième loi de Newton à ce satellite.

5- En déduire que l'expression de sa vitesse de révolution autour de Mars est: $v = \sqrt{\frac{G m_M}{r}}$.

6- Déterminer l'expression reliant v, r et T_p (T_p étant la période de révolution de Phobos autour de Mars).

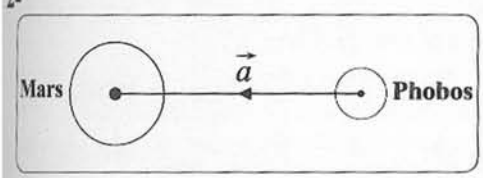
7- Calculer que: $\frac{T_p^2}{r^3}$.

8- En déduire la valeur de T_p.

Solution

1- Un mouvement est circulaire si sa trajectoire est un cercle. Il est uniforme si la valeur de la vitesse est constante.

2-



3- On sait que Phobos a un mouvement circulaire uniforme donc: $a = \frac{v^2}{r}$.

4- La seule force qui s'applique sur ce satellite est la force de gravitation.

$\vec{F} = -G\frac{m_M . m_p}{r^2}\vec{u}$ (dont la valeur est $F = G\frac{m_M . m_p}{r^2}$).

Dans le référentiel galiléen centré sur Mars, d'après la 2e loi de Newton, on a:

$\vec{F} = m_p . \vec{a}$.

5- On a donc: $F = m_p . a$,

soit: $G\frac{m_M . m_p}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r}$, d'où $G\frac{m_M}{r} = v^2$,

soit: $v = \sqrt{G\frac{m_M}{r}}$.

6- On a: $T_p = \frac{2.\pi.r}{v}$.

7- Alors: $T = \frac{2.\pi.r}{\sqrt{\frac{G.m_M}{r}}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.m_M}}$.

En élevant au carré: $T^2 = 4.\pi^2 \frac{r^2}{G.m_M}$.

D'où:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.m_M} = \frac{2.\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 10^{23}}$$
$$= 9,22 \times 10^{-13} s^2.m^{-3}$$

8- Alors:

$$T = \sqrt{9,22 \times 10^{-13} . r^3}$$
$$= \sqrt{9,22 \times 10^{-13} \times (9,38 \times 10^6)^3}$$
$$T = 2,27 \times 10^4 s = 7h40\,\text{min}.$$

6 La lune est l'unique satellite naturel de la Terre.

Données:

- constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11} U.S.I$;
- masse de la Terre: $M_T = 5,98 \times 10^{24} kg$;
- rayon de la Terre: $R_T = 6,37 \times 10^3 km$;
- masse de la Lune: $M_L = 7,34 \times 10^{22} kg$;

• rayon de la Lune: $R_L = 1,74 \times 10^3 km$;

période de révolution sidérale T de la lune $T = 27,3$ jours;

• 1 jour $= 8,64.10^4 s$.

La Terre et la Lune seront considérées comme des astres à répartition sphérique de masse.

On suppose que la Lune a un mouvement circulaire uniforme de rayon r autour de la Terre.

1- Donner l'expression vectorielle de la force $\vec{F}$ exercée par la Terre sur la Lune.

2- En utilisant la deuxième loi de Newton; déterminer l'expression de la vitesse V de la Lune en fonction de G, r et M_T.

3- En déduire la période sidérale T de rotation de la Lune autour de la Terre (c'est-à-dire) le temps que met la Lune pour effectuer un tour complet autour de la Terre) en fonction de G, r et M_T.

4- Calculer le rayon r du centre de la Lune autour de la Terre.

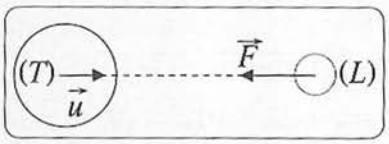
5- En déduire la distance de séparant la surface de la Lune à celle de la Terre.

Solution

1- La Lune est soumise à:

$\vec{F} = -G\frac{M_T.M_L}{r^2}\vec{u}$.

2- Dans le référentiel géocentrique considèré comme galiléen, d'après la 2e loi de Newton, on a: $\vec{F} = M_L.\vec{a}$.



Donc: $M_L.\vec{a} = -G\frac{M_T.M_L}{r^2}\vec{u}$, soit

$\vec{a} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}$, ou encore: $a = G\frac{M_T}{r^2}$.

Or, on sait que le mouvement est circulaire et uniforme, donc: $a = \frac{V^2}{r}$.

Alors: $\frac{V^2}{r} = G\frac{M_T}{r^2}$.

donc: $V = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$.

3- On a:

$$T = \frac{2.\pi.r}{V} = \frac{2.\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M_T}{r}}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}.$$

4- L'expression précédente de T donne:

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{GM_T}$,

d'où:

$r = \sqrt[3]{\frac{T^2.G.M_T}{4.\pi^2}}$

$= \sqrt[3]{\frac{(2,36 \times 10^6)^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{4.\pi^2}}$

$= 38310^6 m$

5-

$d = r - (R_T + R_L)$

$= 383 \times 10^3 - (6,37 \times 10^3 - 1,74 \times 10^3)$

$= 375 \times 10^3 km$

7

1- Le tableau ci-contre comporte des données relatives à deux types de satellites artificiels de la Terre en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique.

	MÉTÉOSAT	SPOT
date de lancement	1977 1981	1986 1990
altitude (km)	35800	832
période (min)	1436	102
champ d'observation au sol	quasiment la moitié de la surface terrestre	carré de $3600km^2$

a- L'un de ces satellites est dit géostationnaire. Indiquer lequel et justifier la réponse.

b- L'autre satellite est appelé «satellite à défilement»; il évolue dans le plan contenant l'axe des pôles. Donner une explication de ce terme.

2- Connaissant l'altitude de chacun de ces satellites, on se propose de vérifier par le calcul leur période de révolution.

La valeur du champ de pesanteur (attraction terrestre) à l'altitude h est donnée par: $g_h = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$, avec g_0 : intensité de la pesanteur au sol et R : rayon de la Terre.

a- En appliquant la deuxième loi de Newton au mouvement circulaire uniforme du satellite, déterminer l'expression de la vitesse de chaque satellite.

b- Définir la période de révolution de chaque satellite et donner son expression en fonction de g_0, R et h.

c- Calculer les périodes des deux satellites connaissant leurs altitudes.

Données: $R = 6380km$ et $g_0 \approx 9,8m.s^{-2}$.

Solution

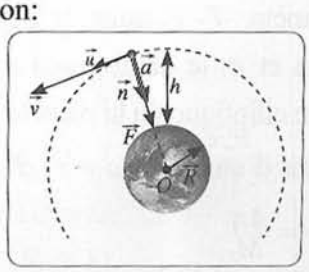
1.a- Le satellite MÉTÉOSAT placé en orbite auteur de la Terre à environ $36000km$ d'altitude, est géostationnaire.

En effet, sa période donnée dans le tableau ci-dessus est égale au jour sidéral:

$$T = 1436 \times 60 = 86160s.$$

b- Dans le référentiel terrestre, le plan de la trajectoire de ce satellite n'est pas fixe, mais tourne autour de l'axe des pôles. Ce satellite «balaie» la surface de la Terre.

2.a- D'après la 2e loi de Newton:



$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$,

soit $\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$, $\vec{a} = \vec{g}$.

Soit, dans le repère de Frenet:

$$\begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = g_h = \dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

À l'altitude h, $r = R + h$, alors:

$$g_h = g_0 . \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)},$$

d'où: $v = R.\sqrt{\dfrac{g_0}{R+h}}$.

b- Par définition,

$$T = \frac{2\pi.r}{v} = 2\pi.\frac{(R+h)}{R\sqrt{\dfrac{g_0}{R+h}}}, \text{ soit}$$

$$T = \frac{2\pi}{R}.\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

c- A.N: $T = 86200s$, soit 1437 min pour MÉTÉOSAT.

$T = 6090s$, soit 102 min pour SPOT.

8 On donne dans le tableau ci-dessous, quelques caractéristiques de la Terre, celles de Jupiter et de leurs mouvements de révolution autour du soleil, considérés de trajectoire circulaire de rayon r.

Planète	Terre	Jupiter
r	$149,6.10^6 km$	
Période de révolution autour du soleil	1an	$11,86 ans$

1- Écrire l'énoncé de la troisième loi de Kepler.

L'exprimer dans le cas d'un mouvement circulaire du centre de gravité d'une planète autour du soleil de masse M_S.

2- En appliquant cette loi, calculer la donnée manquante dans le tableau précédent.

3- Cette loi permet-elle de calculer la masse de Jupiter?

4- Calculer la masse du soleil.

On donne $1an = 365$ jours et 1 jour = 24h.

Solution

1- La troisième loi de Kepler montre en particulier que pour une planète donnée, le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ est indépendant de la masse de la planète. T désigne la période de révolution et a le demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la planète.

Dans le cas d'un cercle $a = r$, d'où:

$$\frac{T^2}{r^3} = cte = \frac{4\pi}{M_S}.$$

2- La troisième loi de Kepler s'écrit $\dfrac{T^2}{a^3} = K_S$ où la constante K_S est indépendante de la planète étudiée.

Donc: $\dfrac{T^2_{Terre}}{a^3_{Terre}} = \dfrac{T^2_{Jupiter}}{a^3_{Jupiter}}$.

On en déduit: $a_{jupiter} = a_{Terre}\left(\dfrac{T_{Jupiter}}{T_{Terre}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

A.N: $a_{Jupiter} = 778.10^6 km$

3- Non, car la constante K_S est liée uniquement à la masse du soleil.

4- On a: $\dfrac{T^2}{r^3}.\dfrac{4\pi^2}{G.M_S}$ d'où: $M_S = \dfrac{4\pi^2.r^3}{G.T^2}$.

En prenant l'une des deux planètes, on peut calculer la masse M_S.

$$M_S = \frac{4\pi^2.r_T^3}{G.T_T^2} = \frac{4\pi^2(149,6.10^9)^3}{6,67.10^{-11}.(365.24.3600)^2}$$

$$M_S = 1,99.10^{30}kg$$

9 La Terre est supposée sphérique, de rayon R_T et de masse M_T. La répartition des masses est de symétrie sphérique. Le champ gravitationnel terrestre, à l'altitude h, a pour expression $g = G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$, où G est la constante de gravitation universelle.

Données: $G = 6,67.10^{-11}(U.S.I)$ et $g_0 = 9,8m.s^{-2}$.

g_0 intensité du champ de gravitation au sol.

1- établir l'expression de la valeur du champ gravitationnel g à l'altitude h en fonction de h, R_T et g_0.

2- On considère un satellite artificiel de la Terre décrivant une trajectoire circulaire de centre O, à l'altitude $h = 350km$.

a- Nommer le référentiel d'étude du mouvement du satellite.

b- Donner l'expression du vecteur accélération du satellite.

c- Justifier le fait que le mouvement est uniforme.

d- Calculer la vitesse du satellite et calculer sa période. $R_T = 6376km$

Solution

1- Au niveau du sol où $h = 0$, on a:

$$g_0 = G.\frac{M_T}{(R_T+0)^2} = G.\frac{M_T}{R_T^2}.$$

On déduit que: $G.M_T = g_0.R_T^2$.

En revenant à l'expression de g dans l'énoncé, il vient:

$$g = \frac{g_0R_T^2}{(R_T+h)^2} = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2.$$

2.a- Le référentiel géostationnaire.

b- D'après la deuxième loi de Newton:

$\vec{F}_{\frac{T}{S}} = m.\vec{a}$.

Avec $\vec{F}_{\frac{T}{S}} = m\vec{g}$, il vient $\vec{a} = \vec{g}$.

c- Le mouvement est circulaire;

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}$ est centripète (vers le centre de la terre), alors: $a_T = 0$, ou encoure $\frac{dv}{dt} = 0$, donc $v = cte$.

d- $F_{\frac{T}{S}} = ma_N$;

- Comme $F_{\frac{T}{S}} = ma_N = m\frac{V^2}{r}$

$$mg = m.\frac{V^2}{r}$$

$$V^2 = g.r$$

$$V^2 = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2(R_T+h)$$

$$V^2 = \frac{g_0.R_T^2}{(R_T+h)}$$

$$V = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

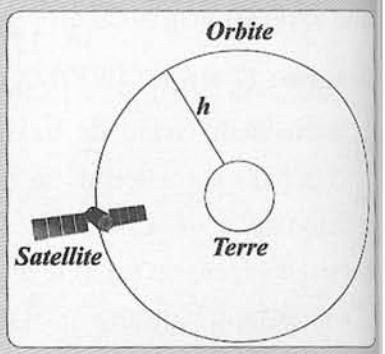
$$V = 6376.10^3\sqrt{\frac{9,8}{(6376+350)10^3}}$$

$$V \simeq 7,7.10^3 m/s$$

$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V} = 5344s$$

10 De nombreuses activités humaines demandent un repérage précis (latitude, longitude, altitude) sur le globe terrestre ou dans son voisinage.

Actuellement, le Global Positioning System (GPS) a supplanté toutes les autres technologies, permettant de repérer, sur le globe terrestre, avec une précision voisine de $20m$, un mobile équipé, d'un récepteur. Le principe est le suivant: au lieu d'utiliser des repères terrestres ou de suivre les étoiles, l'utilisateur, muni d'un récepteur, mesure la distance entre lui-même et au moins 4 des 24 satellites de la constellation Navstar. Le récepteur convertit ces distances pour retrouver la latitude, la longitude et l'altitude. Répartis sur six orbites circulaires inclinées de 55° par rapport à l'équateur, ces satellites évoluent à une altitude de $20180km$.



Avec une vitesse proche de $14000km.h^{-1}$, ils accomplissent un tour du monde en 12 heures. Leur configuration mouvante a été calculée pour qu'au moins quatre d'entre eux soient toujours en vue (99,9% du temps) depuis n'importe quel endroit de la planète.

On rappelle que l'orbite des satellites est circulaire.

Données:

- masse de la Terre $M_t = 5,98 \times 10^{24} kg$;
- rayon de la Terre $R_T = 6380km$;
- constante de gravitation $G = 6,67 \times 10^{-11} N.kg^{-2}.m^2$.

1- Quelle est l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}_G$ d'un satellite en fonction des données de l'énoncé?

2- Montrer que ce mouvement circulaire est uniforme.

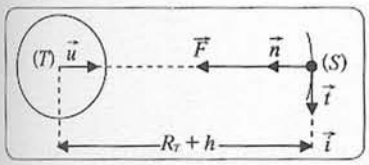
3- Quelle est l'expression de sa vitesse en fonction de G, R_T, M_T, h dans un référentiel géocentrique? (h est l'altitude du satellite).

4- Vérifier que la vitesse des satellites sur leur orbite et la période T de rotation, données dans le texte, sont compatibles avec l'altitude.

5- Un tel satellite est-il géostationnaire? Justifier.

Solution

1- Le satellite est soumis à $\vec{F} = -G\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}\vec{u}$.



Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen,

d'après la 2e loi de Newton, on a:

$\vec{F} = m.\vec{a}_G$

donc: $m.\vec{a}_G = -G\frac{M_T.m}{(R_T+h)^2}\vec{u}$,

soit alors: $\vec{a}_G = -G\frac{M_T}{(R_T+h)}\vec{u}$.

2-Comme le mouvement est circulaire, on utilise le repère de Frénet.

On a donc:

$$-G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u} = \frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{(R_T+h)^2}\vec{n}.$$

Or: $-\vec{u} = \vec{n}$ donc:

$$G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{(R_T+h)}\vec{n}.$$

En identifiant, on a:

$m\frac{dV}{dt} = 0$ donc: $V = cte$.

Le mouvement est uniforme.

3- En identifiant sur $\vec{n}$:

$G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{V^2}{(R_T+h)}$, d'où:

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}.$$

4- Si $h = 20180km$,

$$V = \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,98\times10^{24}}{26560\times10^3}}$$

$$V = 3880m.s^{-1} = 14000km.h^{-1}$$

Et:

$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V} = \frac{2\pi\,26560\times10^3}{3880}$$

$$= 4,30\times10^4 s$$

$$= 11,9h \approx 12h$$

Ces valeurs sont biens compatibles avec les données du problème.

5- Un satellite est géostationnaire s'il est immobile par rapport à un référentiel terrestre donc si sa période est de $24h$.

Ici T=12h Ce satellite n'est donc pas géostationnaire.

11 En juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne. Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance R_T de Saturne. L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.

Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.

On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés

grands devant leur taille.

Données:

- $G = 6,67 \times 10^{-11} S.I$ (constante de gravitation universelle).
- $R_T = 1,22 \times 10^6 km$ (rayon de l'orbite de Titan).
- $M_S = 5,69 \times 10^{26} kg$ (masse de Saturne).

1- Forces:

On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne. Représenter sur un schéma clair Saturne, Titan et la force exercée par Saturne sur Titan. Donner l'expression vectorielle de cette force.

2- Mouvement de Titan:

a- Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

b- Déterminer l'expression de la vitesse V de Titan sur son orbite autour de Saturne.

c- Définir la période T_T de révolution de Titan autour de Saturne. Montrer que sa valeur est de 15,9 jours terrestres.

3- Un autre satellite de Saturne:

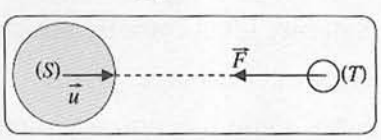
Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005. On peut considérer que, dans le référentiel saturno-centrique, Encelade a un mouvement circulaire uniforme dont la période est $T_E = 1,37$ jour terrestre et le rayon est R_E.

Déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

Solution

1- Titan subit la force gravitationnelle exercée par Saturne.

On a: $\vec{F} = -G\dfrac{M_T.M_S}{R_T^2}\vec{u}$.



2.a- D'après la 2e loi de Newton:

$\vec{F} = M_T\vec{a}$.

Comme le mouvement est circulaire, on se place dans le repère de Frénet. On a donc:

$$-G\frac{M_T.M_S}{R_T^2}\vec{u} = M_T\left(\frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{r}\vec{n}\right).$$

En projetant sur $\vec{t}$:

$\dfrac{dV}{dt} = 0$ donc: $V = cte$.

Le mouvement est uniforme.

b- En projetant sur $\vec{n}$:

$$\frac{V^2}{R_T} = G\frac{M_S}{R_T^2};$$

d'où $V = \sqrt{G\dfrac{M_S}{R_T}}$.

c- La période de révolution T est le temps

au bout duquel le satellite fait un tour.

On a:

$T = \frac{2.\pi.R_T}{V} = \frac{2.\pi.T_T}{\sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}}$. En simplifiant:

$T = 2.\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_S}}$.

A.N:

$T = 2.\pi\sqrt{\frac{(1,22\times10^9)^3}{6,67\times10^{-11}\times5,69\times10^{26}}}$.

$T = 1,37\times10^6 s = \frac{1,37\times10^6}{24\times3600} = 16,9$ jours.

Il ne faut pas oublier de convertir les distances en mètres.

3- D'après la 3e loi de Kepler, $\frac{T^2}{R^3} = cte$.

Puisque les deux satellites tournent autour de Saturne, on peut écrire:

$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{T_T^2}{T_T^3}$, soit

$R_E = R_T\sqrt[3]{\frac{T_E^2}{T_T^3}}$

$= 1,22\times10^6\times\sqrt[3]{\left(\frac{1,37}{15,9}\right)^2}$.

$= 2,38\times10^5 km$

On peut laisser les périodes en jours car elles apparaissent sous forme de rapport. Le résultat est en km car R_T est exprimé en km.

12 Etude du mouvement d'un satellite artificiel

Le satellite HOTBIRD apparaît immobile pour un observateur fixe sur la surface de la terre.

Ce satellite est utilisé pour les télécommunications et les émissions radio et télévisées.

Les paraboles fixées à la surface de la Terre et orientées vers le satellite HOTBIRD captent les ondes électromagnétiques provenant de ce dernier sans qu'elle soient munies d'un dispositif permettant de suivre le mouvement du satellite HOTBIRD. (fig-1).

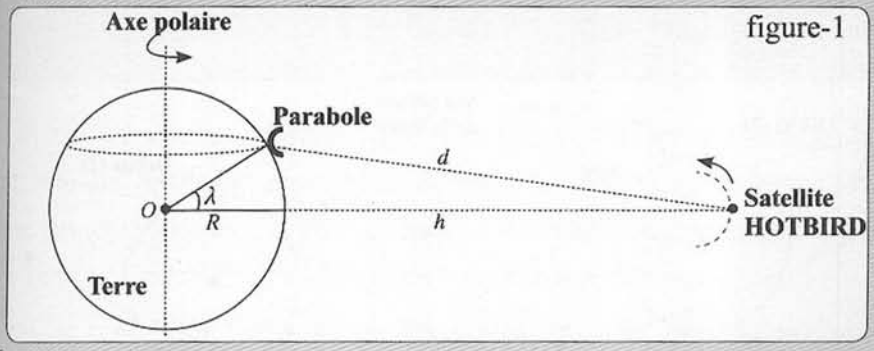


figure-1

Données:

- Masse de la Terre: $M_T = 5,98.10^{24} kg$;
- Rayon de la Terre: $R = 6400 km$;
- Constante d'attraction gravitationnelle: $G = 6,67.10^{-11}(S.I)$;

- On suppose que la Terre est une sphère à répartition massique symétrique;

- La Terre effectue un tour complet autour de se son axe polaire en $T = 23h56\min 4s$;

- La hauteur de l'orbite du satellite HOTBIRD par rapport à la surface de la Terre est $h = 36000km$.

1- La parabole et la réception des ondes électromagnétiques.

Une parabole est fixée sur le toit d'une maison qui se trouve à la latitude $\lambda = 33,5°$.

1.1- Calculer dans le référentiel géocentrique la vitesse V_p de la parabole concave supposée ponctuelle.

1.2- Justifier pourquoi il n'est pas nécessaire que la parabole soit munie d'un système rotatoire qui permet de suivre le mouvement du satellite HOTBIRD.

2- Etude du mouvement du satellite HOTBIRD.

On assimile le satellite HOTBIRD à un point matériel de masse m_s.

2.1- En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la vitesse V_s du satellite HOTBIRD sur son orbite en fonction de G, M, R et h. Calculer V_s.

2.2- On considère deux orbites hypothétiques (1) et (2) d'un satellite en mouvement circulaire uniforme comme l'indique la figure (2).

Choisir la réponse juste en justifiant votre choix:

L'orbite qui correspond au satellite HOTBIRD est:

a- L'orbite (1).

b- L'orbite (2).

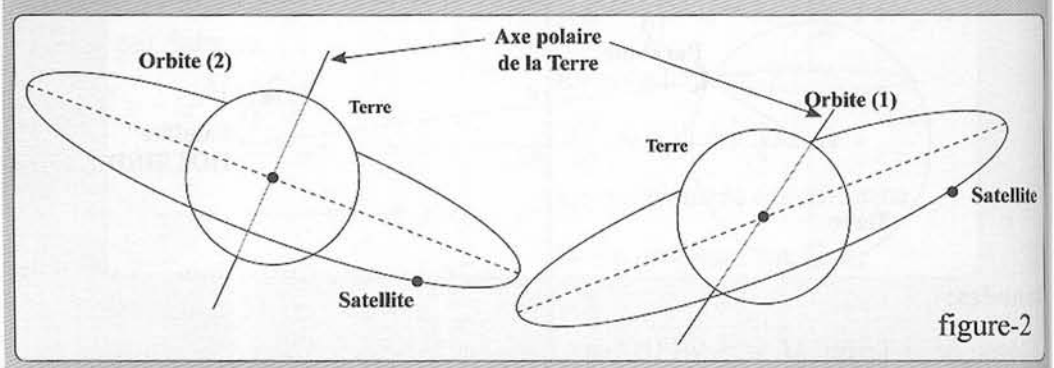
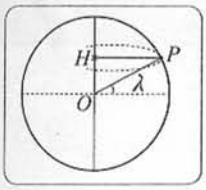


figure-2

Bac SM, Rattrapage, 2011

Solution

1- $V_p = r\omega = PH.\omega = PH.\frac{2\pi}{T}$;



$PH = OP.\cos\lambda = R\cos\lambda$;

donc: $V_p = \frac{2\pi.R\cos\lambda}{T}$;

$$V_p = \frac{2\pi.6400.10^3.\cos 33,5}{86164}.$$

$$\simeq 3,9.10^2 m.s^{-1}$$

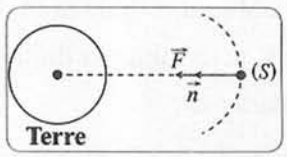
2- La parabole n'a pas besoin d'un système rotatoire pour suivre HOTBIRD, car, ce dernier est géostationnaire et par conséquent, il est immobile par rapport à la parabole.

2.1- La deuxième loi de Newton s'écrit:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\frac{G.M.m_s}{r^2}\vec{n} = m_s.\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \frac{G}{r^2}.$$



L'accélération $\vec{a}_G$ est donc normale:

$a = a_N = \frac{V^2}{r}$; alors: $\frac{G.M}{r^2} = \frac{V^2}{r}$,

donc: $V = \sqrt{\frac{G.M}{r}} = \sqrt{\frac{G.M}{R_T + h}}$

$$= 3,07.10^3.m.s^{-1}$$

2.2- Hotbird est un satellite géostationnaire, son orbite se trouve dans le plan de l'équateur. Il lui convient donc l'orbite (2).

13

De l'orbite circulaire basse à l'orbite circulaire haute

Johannes Kepler (1571-1630) a posé les trois lois qui permettent de décrire le mouvement des planètes et celui des satellites naturels.

Le mouvement des satellites artificiels autour de la Terre hors de l'atmosphère est régi par les lois de Kepler.

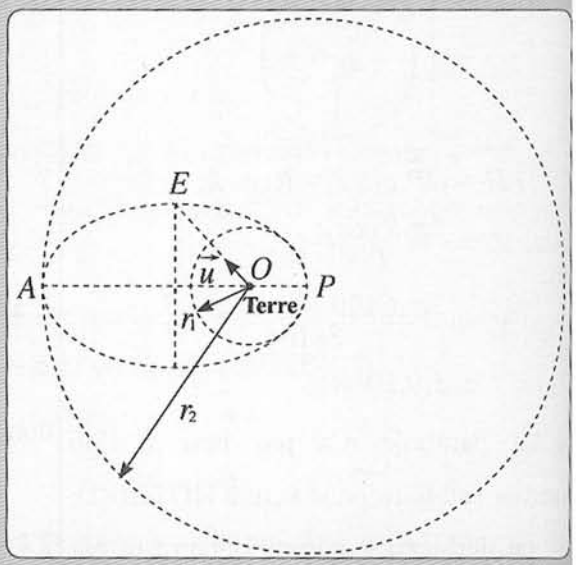
Le transfert d'un satellite artificiel terrestre (S) sur une orbite circulaire basse de rayon r_1 vers une orbite circulaire haute de rayon r_2 se fait en passant par une orbite elliptique tangente aux deux orbites circulaires comme l'indique la figure. Le centre O de la Terre constitue l'un des foyers de la trajectoire elliptique.

Données: $r_1 = 6700km$; $r_2 = 42200km$, constante de gravitation universelle $G = 6,67.10^{-11} S.I$.

Masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24} kg$; on rappelle la propriété de l'ellipse de foyer O et O' et de demi-grand axe a: $OM + O'M = 2a$ avec M un point appartenant à l'ellipse.

On suppose que le satellite artificiel (S) est ponctuel et n'est soumis qu'à l'attraction de la Terre et que la Terre effectue un tour complet autour de son axe de rotation en $24h$.

On étudie le mouvement de (S) dans le repère géocentrique.



1- En utilisant l'équation aux dimensions, déterminer la dimension de la constante G.

2- On note T_1 et T_2 les périodes respectives de (S) sur l'orbite circulaire basse et l'orbite circulaire haute.

Exprimer T_1 en fonction de r_1, r_2 et T_2. Calculer la valeur de T_1 sachant (S) est géostationnaire sur l'orbite circulaire haute.

3- On considère le point E qui appartient au petit axe de la trajectoire elliptique défini par $\overrightarrow{OE} = OE.\vec{u}$ et $\|\vec{u}\| = 1$.

Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_S$ de (S) au point E en fonction de G, M et OE.

Calculer $\|\vec{a}_S\|$ au point E.

Bac SM. Juin 2013.

Solution

1- La force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite a pour intensité:

$F_{\frac{T}{S}} = \dfrac{G.M_T.m}{r^2}$

alors: $G = \dfrac{F_{\frac{T}{S}}.r^2}{M_T.m}$

L'équation aux dimensions s'écrit:

$[G] = [F][r]^2.[m]^{-2} = M.L.T^{-2}.L^2.M^{-2}$

$[G] = L^3.M^{-1}.T^{-2}$.

L'unité de G est donc: $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

2- Exprimons tout d'abord, la période du mouvement de (S).

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au satellite (S):

$\vec{F}_{\frac{T}{S}} = m\vec{a}_G = m\vec{a}$.

Soit: $\dfrac{G.M_T.m}{r^2}\vec{n} = m.\vec{a}$;

donc: $\vec{a} = \dfrac{G.M_T}{r^2}\vec{n}$,

d'où: $a = a_N$ et $a_T = 0$;

- alors: $\frac{dV}{dt} = a_T = 0$,

d'où: $v = cte$, le mouvement est donc uniforme.

- Et: $a = a_N = \frac{v^2}{r}$, donc: $\frac{GM_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$

d'où: $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$, r est donc constant car V est constante.

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

Sa période est:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{V} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$.

Pour les deux trajectoires ou peut écrire:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{G.M_T}}}{2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{G.M_T}}} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}};$$

alors: $T_1 = T_2\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$;

$$T_1 = 24\sqrt{\left(\frac{6700}{42200}\right)^2} = 1,52h.$$

3- On a: $\vec{F}_{\frac{T}{S}} = \frac{-G.M_T.m}{(OE)^2}\vec{u} = m\vec{a}_S$;

alors: $\vec{a}_S = -\frac{G.M_T}{(OE)^2}\vec{u}$.

et son module est:

$\|\vec{a}_S\| = \frac{G.M_T}{(OE)^2}$.

D'après la propriété de l'ellipse on a:

$OE + O'E = 2a$ et puisque $O'E = OE$, il vient: $2OE = 2a$, d'où: $OE = a$

D'autre part on a d'après la figure:

$PA = PO + OA$

C'est-à-dire: $2a = r_1 + r_2$

d'où: $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$

Donc: $OE = a = \frac{r_1 + r_2}{2}$

$$OE = \frac{6700 + 42200}{2}$$
$$= 24450km$$
$$= 2,445.10^7 m$$

$$\|\vec{a}_S\| = \frac{G.M_T}{(OE)^2} = 0,667m.s^{-2}.$$

14 La planète Uranus a été découverte en 1781. La sonde Voyager 2 lancée en 1977 est passée à proximité d'Uranus le 24 janvier 1986. Cette planète possède vingt et un satellites.

Les différents corps sont tous supposées avoir une répartition de masse à symétrie sphérique.

Données: $T = 84,01$ années terrestres; $1u.a.$ = la distance moyenne entre le centre du Soleil et celui de la Terre. On supposera que l'orbite terrestre est circulaire.

$G = 6,67.10^{-11} S.I$.

I- Distance Soleil Uranus.

Dans le référentiel héliocentrique, Uranus décrit une trajectoire pratiquement circulaire dont le centre est le centre du Soleil. Seule l'interaction entre le Soleil et Uranus est prise en compte.

1- Montrer que le mouvement d'Uranus dans le référentiel héliocentrique est uniforme.

2- Établir l'expression de la période de révolution T d'Uranus autour du Soleil en fonction du rayon r de l'orbite, de la masse M_S du Soleil et de la constante de gravitation universelle G.

3- En déduire le rayon de l'orbite d'Uranus autour du Soleil en unité astronomique $(u.a)$.

II- Masse d'Uranus.

Les cinq satellites d'Uranus les plus massifs ont été découverts entre 1787 et 1948. Le mouvement de ces satellites est étudié dans un référentiel $\mathscr{R}_U$ considéré comme galiléen, défini par le centre d'Uranus et trois étoiles fixes. Les données relatives aux satellites sont rassemblées dans le tableau ci-après. Pour les calculs, on supposera les orbites circulaires.

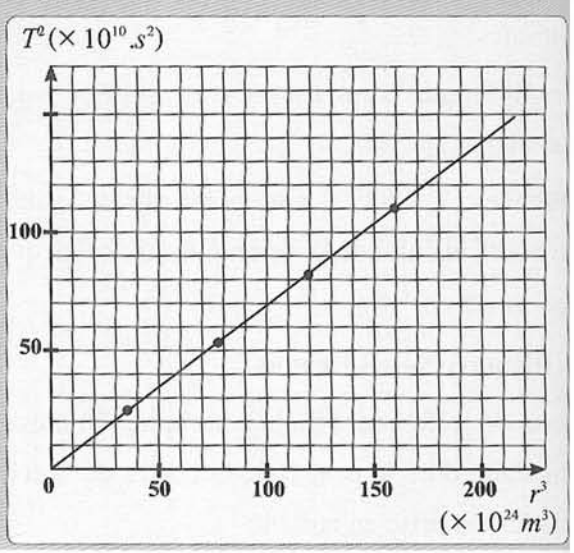
Satellite	**Rayon moyen de l'orbite** $(\times 10^6 m)$	**Période de révolution (en jours terrestres)**	**Diamètre** (km)
Titania	435,8	8,71	1578
Obéron	582,6	13,50	1523
Umbriel	266,0	4,14	1169
Ariel	191,2	2,52	1158
Miranda	129,8	1,41	472

1- Dans le référentiel $\mathscr{R}_U$, exprimer la période de révolution de ces satellites (en mouvement circulaire et uniforme) en fonction du rayon r de leur orbite, de la masse m_U d'Uranus et de la constante de gravitation G.

On ne considérera que l'interaction satellite-planète.

2- On reporte sur la figure ci-centre la représentation de T^2 en fonction de r^3.

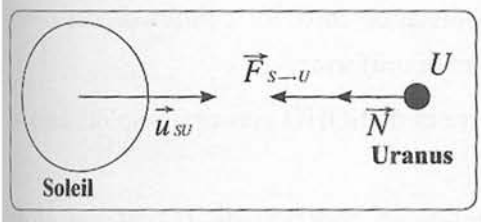
Déduire de ce tracé la masse d'Uranus.



Solution

I.1- Référentiel: héliocentrique.

• Système: Uranus de masse m_U et de centre U.



• Inventaire des forces: force d'attraction gravitationnelle centripète exercée par le Soleil sur Uranus:

$\vec{F}_{S\to U} = -G.\frac{M_S.m_U}{r^2}.\vec{u}_{SU}$.

• Application de la deuxième loi de Newton:

$\vec{F}_{S\to U} = m_U.\vec{a}_U$.

$\vec{a}_U$ est donc un vecteur accélération centripète.

Or pour un mouvement circulaire (voir le chapitre 1):

$\vec{a}_U = \frac{dV}{dt}.\vec{T} + \frac{V^2}{r}.\vec{N}$ avec ici $\vec{u}_{SU} = -\vec{N}$.

On en déduite que $\frac{dV}{dt} = 0$.

La vitesse a une valeur constante:

le mouvement est circulaire uniforme.

2- La deuxième loi permet d'écrire:

$-G.\frac{M_S.m_U}{r^2}.\vec{u}_{SU} = m_U.\vec{a}_U$.

$G.\frac{M_S.m_U}{r^2}.\vec{N} = m_U.\frac{V^2}{r}.\vec{N}$,

soit: $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$;

d'où: $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$.

3- De l'expression de T, on déduit:

$r = \sqrt[3]{\frac{T^2.G.M_S}{4\pi^2}}$ et $r_T = \sqrt{\frac{T^2_{Terre}.G.M_S}{4\pi^2}}$.

$r_T = 1u.a$:

$\frac{r}{r_T} = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_{Terre}}\right)^2}$, soit $r = 84,01^{\frac{2}{3}}r_T$ et donc: $r = 19,2u.a$.

II. 1- L'expression de la période est similaire à la précédente. La masse du Soleil est remplacée par la masse d'Uranus, qui constitue l'astre attracteur.

Dans ce cas, r représente la distance entre le centre du satellite et le centre d'Uranus, on a: $T = 2\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.m_U}}$.

2- En élevant au carré l'expression précédente, on obtient: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G.m_U}r^3$.

La représentation graphique est une droite de coefficient directeur:

$\frac{4\pi^2}{G.m_U}$.

3- Le coefficient directeur vaut:

$6,9.10^{-15}s^2.m^{-3}$.

Le calcul de la masse d'Uranus donne:

$m_U = 8,6.10^{25}kg$.

15 Le satellite SOHO

Le satellite SOHO, d'observation solaire, a été lancé en 1995. Il se trouve au point de Lagrange L_1, situé entre la Terre et le Soleil. Ce satellite reste constamment a la même distance du Soleil sur la droite joignant le centre de la Terre au centre du soleil.

Nous considérons que la Terre et le Soleil ont une répartition de masses à symétrie sphérique.

1- En ne considérant que l'interaction Terre-Soleil, exprimer la vitesse angulaire de rotation du centre de la terre autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique, en fonction de G, la masse du soleil M_S et la distance entre les centres de ces corps notée a. Le mouvement est supposé circulaire et uniforme.

2- Comparer les vitesses angulaires de la Terre et de SOHO autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique.

3- Exprimer le vecteur accélération du satellite en fonction de G, M_S, a et de la distance x entre le centre de la Terre et le satellite. Pour simplifier on posera $M_S = K.m_T$.

4- En appliquant la deuxième loi de Newton au satellite subissant l'action du soleil et de la Terre pour obtenir une relation liant a, x et K.

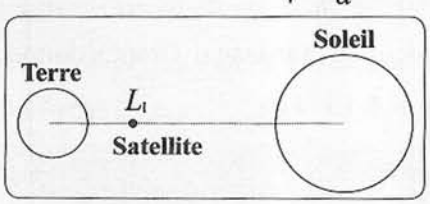
5- Le point L_1 est beaucoup plus proche de la Terre que du Soleil $\left(\frac{x}{a} << 1\right)$. En tenant compte de l'approximation $(1+\varepsilon)^n = 1 + n.\varepsilon$ si $\varepsilon << 1$, établir la relation $x = \frac{a}{\sqrt[3]{3K}}$

Calculer x.

On donne: $a = 1,50.10^{11} m$; $K = 3,33.10^5 S.I$.

Solution

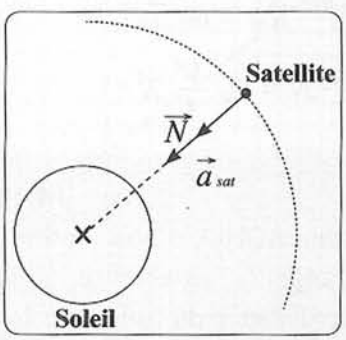
1- En reprenant une étude similaire à celle présentée dans les exercices précédents on obtient la vitesse v du centre de la Terre: $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{a}}$.



La vitesse angulaire vaut:

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{G.M_S}{a^3}}$$

2- Puisque le centre de la Terre, celui de SOHO et le centre du Soleil restent constamment alignés, les vitesses angulaires de rotation de la Terre et de SOHO sont les mêmes.



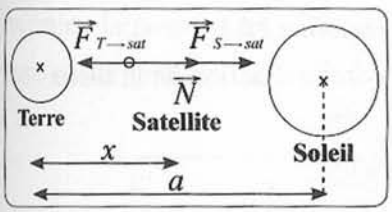
3- Le mouvement de SOHO est circulaire

uniforme dans le référentiel héliocentrique galiléen. Son accélération dans ce référentiel vaut:

$\vec{a}_{sat} = \omega^2(a-x).\vec{N}$, soit en remplaçant ω par son expression:

$$\vec{a}_{sat} = \frac{G.M_S}{a^3}(a-x).\vec{N}$$

$$= \frac{G.K.m_T}{a^3}(a-x).\vec{N}$$



4- Le satellite est soumis aux forces d'attraction gravitationnelle exercées par la Terre et Soleil:

$\vec{F}_{T\to sat} + \vec{F}_{S\to sat} = m_{sat}.\vec{a}_{sat}$.

soit:

$$-G.\frac{m_T.m_{sat}}{x^2}.\vec{N} + G.\frac{Km_T.m_{sat}}{(a-x)^2}.\vec{N}$$

$$= m_{sat}.G\frac{K.m_T}{a^2}(a-x).\vec{N}$$

Après simplification:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{K}{(a-x)^2} = \frac{K}{a^3}(a-x). \quad (1)$$

5- Compte tenu de l'approximation proposée, on obtient:

$$\frac{K}{(a-x)^2} \approx \frac{K}{a^2}\left(1+\frac{2x}{a}\right),$$

d'où: $-\frac{1}{x^2} + \frac{K}{a^2}\left(1+\frac{2x}{a}\right) = \frac{K}{a^3}(a-x)$.

Après simplification, on obtient $x = \frac{a}{\sqrt[3]{3K}} = 1,495,10^9 m$, c'est-à-dire pratiquement $\frac{1}{100}$ de la distance entre les centres de la Terre et du Soleil.

8 ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

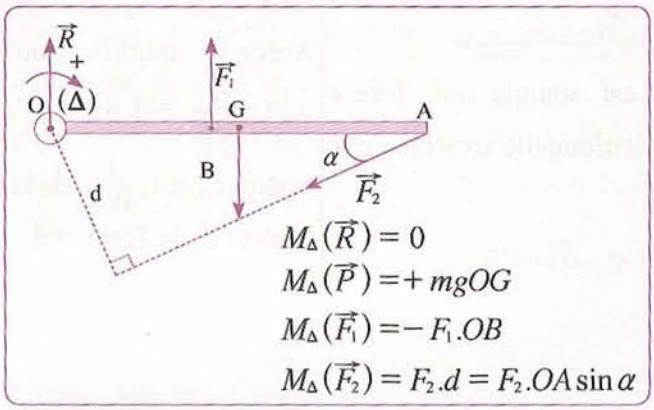
I- Moment d'une force ou d'un couple de forces:

1 Moment d'une force:

Le moment d'une force est une grandeur algébrique utilisée pour traduire la capacité d'une force à faire tourner un solide autour d'un axe fixe (Δ).

$M_A(\vec{F}) = \pm F.d$ d: distance entre l'axe (Δ) et la droite d'action de la force.

Exemple d'illustration:



$M_\Delta(\vec{R}) = 0$

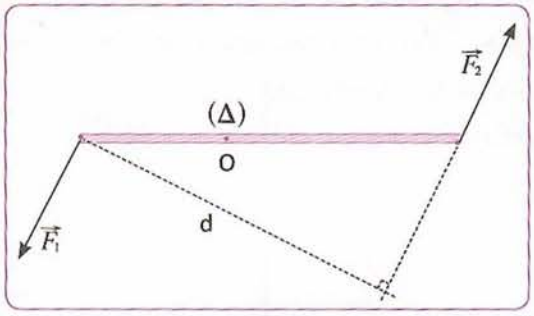
$M_\Delta(\vec{P}) = + mgOG$

$M_\Delta(\vec{F_1}) = - F_1.OB$

$M_\Delta(\vec{F_2}) = F_2.d = F_2.OA\sin\alpha$

2 Moment d'un couple de forces:

Couple de deux forces:



$M_C = \pm F.d$

Couple de plusieurs forces:

- Les couples moteurs utilisés pour actionner les poulies, les machines à laver, les mixeurs,....

- Les couples de frottements dus à l'axe (Δ).
- Les couples de torsion d'un fil métallique ou d'un ressort en spirales.

II- Propriétés du mouvement de rotation autour d'un axe fixe:

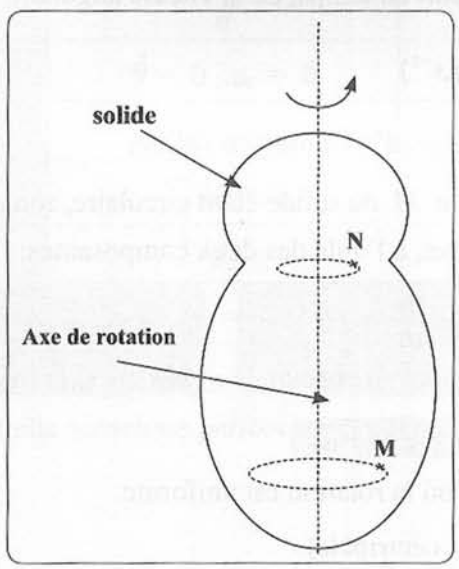
1 Mouvement d'un point:

- Tout point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, effectue un mouvement circulaire dont la trajectoire est centrée sur cet axe.

2 Abscisse angulaire, abscisse curviligne:

On détermine la position on d'un point M du solide par l'abscisse angulaire θ. ou, l'abscisse curviligne s.

$$\underset{(m)}{s} = \underset{(m)}{r}.\ \underset{(rad)}{\theta}$$

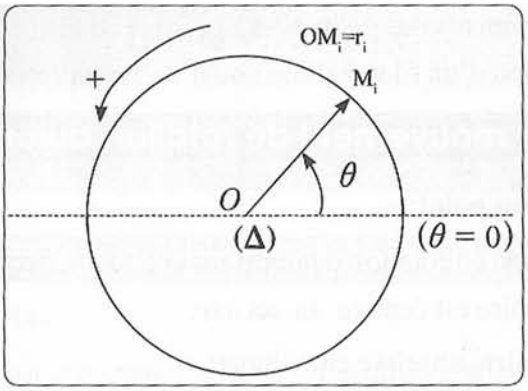


3 Vitesse angulaire:

Tous les points du solide ont à chaque instant, la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (rad.s^{-1})$$

4 Vitesse linéaire:



La vitesse linéaire d'un point M_i du solide est: $V_i = r_i.\dot{\theta}$

Plus le point M_i est éloigné de l'axe, plus sa vitesse linéaire est grande.

5 Accélération angulaire:

C'est la dérivée par rapport au temps, de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ en $(rad.s^{-2})$

6 Accélération linéaire, d'un point du solide:

Le mouvement d'un point M du solide étant circulaire, son accélération $\vec{a}$ est exprimée dans la base de Frenet, à l'aide des deux composantes:

$a_T = \frac{dv}{dt} = r.\ddot{\theta}$ ($m.s^{-2}$; $m\ rad.s^{-2}$)

$a_N = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2$ ($m.s^{-2}$; $m\ rad.s^{-1}$)

Le module de $\vec{a}$ est: $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

- Dans le cas particulier où la rotation est uniforme:

$a_T = 0$ et $a = a_N$ ($\vec{a}$ est centripète)

7 Equation horaire angulaire (Exemples simples):

Nature du mouvement	$\ddot{\theta}$	$\dot{\theta}(t)$	$\theta(t)$
Rotation uniforme	$\ddot{\theta} = 0$	$\dot{\theta} = cte$	$\theta = \dot{\theta}t + \theta_0$
Rotation uniformément accélérée	$\ddot{\theta} = cte > 0$	$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$ $\dot{\theta} = f(t)$ croissante	$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$
Rotation uniformément retardée	$\ddot{\theta} = cte < 0$	$\dot{\theta} = \ddot{\theta}.t + \dot{\theta}_0$ $\dot{\theta} = f(t)$ décroissante	$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

N.B: **Le signe $\oplus$ est celui du mouvement.**

8 Relation fondamentale de la dynamique de rotation:

Lorsqu'un solide est en mouvement de rotation, dans un repère galiléen, par rapport à un axe fixe, alors la somme algébrique des moments des forces et des couples de forces, auxquels il est soumis, est égale au produit de son moment d'inertie et de son accélération angulaire.

Cette relation s'exprime par: $\sum M_{\Delta} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$.

9 Analogie entre rotation autour d'un axe fixe et translation sur un axe (ox):

	Rotation	Translation
abscisse	θ	x
vitesse	$\dot{\theta}$	V_x
accélération	$\ddot{\theta}$	a_x
Mouvement uniforme	$\ddot{\theta} = 0\ ;\ a_T = 0$	$a_x = 0$
	$\dot{\theta} = cte$	$V_x = cte$
	$\sum M_{\Delta} = 0$	$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$
Inertie	J_{Δ}	m
Loi de la dynamique	$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$	$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$

Remarque: Même si un solide est en mouvement de rotation, la deuxième loi de Newton reste valable, et elle renseigne parfois sur les forces dont les moments sont nuls.

1 L'équation horaire $\theta(t)$ du mouvement d'un solide autour d'un axe (Δ) fixe est: $\theta = 4t^2 + 3t.(rad)$

1- Calculer l'accélération angulaire de ce mouvement.

2- On considère un point A de ce solide situé à $16\,cm$ de l'axe (Δ)

2.1- Déterminer la vitesse du point A à l'instant $t = 0,2s$

2.2- Déterminer l'accélération linéaire de A à la même date.

Solution

1- $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 8\ rad.s^{-2}$

2.1- $V = r\dot{\theta}$, $\dot{\theta} = 8t + 3$

$V_A = r_A.\dot{\theta} = 0,16(8.0,2 + 3)$

$= 0,736\ m.s^{-1}$

2.2- $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$,

$a_T = r\ddot{\theta} = 0,16.8 = 1,28\ m.s^{-2}$;

$a_N = \dfrac{V_A^2}{r} = \dfrac{}{0,16} = 3,4\ m.s^{-2}$

$a = \sqrt{(1,28)^2 + (3,4)^2}$

$= 3,62\ m.s^{-2}$

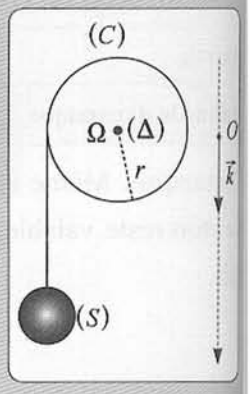
2 La figure ci-contre représente:

- Un cylindre (C) homogène de rayon r et de moment d'inertie par rapport à un axe fixe (Δ) horizontal passant par son centre, $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$

M: masse du cylindre

- Un solide (S) de masse m,

attaché un cylindre par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable.



On néglige les frottements et on donne:

$M\ m = 300g\ ; r = 10cm\ ; g = 10\ m.s^{-2}$

1- par application de la deuxième loi de Newton au solide (S);

exprimer l'intensité T de la force exercée par le fil sur S en fonction de m, g et a, accélération de S.

2- En étudiant le mouvement du cylindre (C), exprimer l'intensité T' de la force exercée par le fil sur le (C), en fonction $M, r, \ddot{\theta}$.

3- Montrer que: $a = \dfrac{2mg}{M + 2m}$

4- Calculer M. On donne: $a = 2\ m.s^{-2}$.

Solution

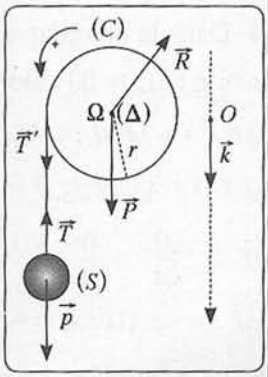
1- La 2ème loi de Newton, appliquée à (S) s'écrit:

En utilisant l'axe O_z:

$+\vec{T} = m\vec{a}$

$mg - T = ma$ (1)

$T = m(g-a)$



2- On applique au cylindre, la relation fondamentale de la dynamique de rotation.

$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{T}') = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$0 + 0 + T'.r = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$T'.r = \frac{1}{2}Mr^2.\ddot{\theta}$ $\quad T' = \frac{Mr.\ddot{\theta}}{2}$ (2)

3- Le fil est inextensible, alors $a = r\ddot{\theta}$

Le fil est sans masse alors $T = T'$

L'identification des expressions (1) et (2) donne:

$m(g-a) = \frac{Mr\frac{a}{r}}{2}$ ou bien:

$2mg - 2ma - M.a$,

d'où: $a = \frac{2mg}{M+2m}$

4- $a = \frac{2mg}{M+2m}$

$M = \frac{1}{a}(2mg - 2ma)$

$M = \frac{1}{2}(2.0,3.10 - 2.0,3.2) = 2,4kg$

3 Une roue homogène de masse m et de rayon $r = 20cm$, tourne dans le plan vertical autour d'un axe fixe et horizontal (Δ), grâce à un couple moteur de moment constant M_m (fig.1). Le moment d'inertie de la roue par rapport à (Δ): $J_{\Delta} = 0,05kg.m^2$.

La figure (2) représente les variations de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la roue aux cours du temps.

t_1 est l'instant auquel on supprime le couple moteur.

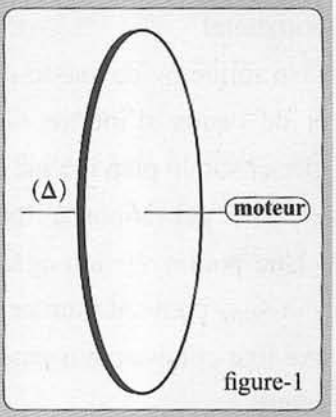


figure-1

1- Quelle est la nature de ce mouvement dans chaque phase?

2- Calculer la valeur de la vitesse angulaire dans la première phase en utilisant les unités du système international.

3- En vous aidant de la première phase, justifier l'existence des frottements dus à l'axe (Δ).

4- En exploitant la deuxième phase, déterminer l'accélération angulaire.

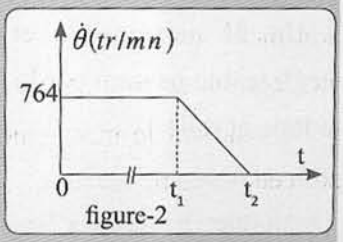


figure-2

En déduire M_C, le moment du couple de frottements supposé constant.

5- En déduire la valeur du moment M_m du couple moteur. On donne $t_2 = t_1 + 20(s)$.

Solution

1- Dans la première phase $[0,t_1]$, le mouvement est une rotation uniforme.

Dans l'intervalle de temps $[t_1,t_2]$, le mouvement devient uniformément retardé.

2-

$\dot{\theta} = 764tr/mn = 764.\frac{2\pi}{60} = 80\ rad.s^{-1}$

3- Dans la première pha, on a $\ddot{\theta} = 0$

donc: $\sum M_\Delta = 0$

On a: $M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$

Si on considère les frottements dus à l'axe (Δ) négligeables alors: $M_m = 0$

Ceci contredit l'énoncé.

Donc: $M_m + M_C = 0$

$M_C = -M_m < 0$

4- Dans la deuxième phase, le moteur est arrêté $(M_m = 0)$, alors;

$M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$0 + 0 + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{0-80}{t_2-t_1} = -4rad.s^{-2}$

$M_C = -5.10^{-2}.4 = -0,2\ N.m$

5- La relation de la question (4) donne.

$M_m = -M_C = 0,2\ N.m$

4 Le système représenté sur la figure suivante comprend:

- Un solide S_1 de masse $m_1 = 100g$ et de centre d'inertie G_1, pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal.
- Un solide S_2 de masse $m_2 = 200g$ et de centre d'inertie G_2 pouvant glisser sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^0$ par rapport à l'horizontale.
- Une poulie P homogène de rayon $r = 5cm$ pouvant tourner autour d'un axe fixe et horizontal passant par son centre.
- Un fil inextensible et de masse négligeable passant par le gorge de la poulie et relié à S_1 et à S_2.

On donne: $g = 10m.s^{-2}$.

On abandonne le système et on en registre les positions de G_1.

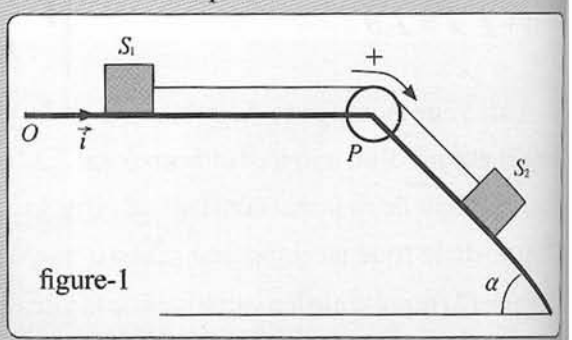


figure-1

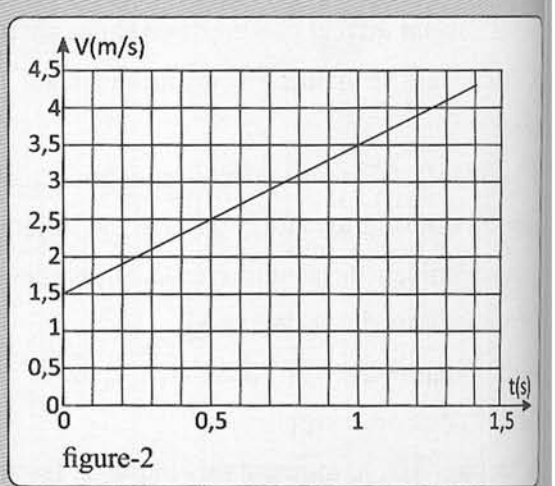


figure-2

Cet enregistrement de G_1 a permis d'obtenir la courbe $V = f(t)$ reportée sur la figure (2).

1- Quelle est la nature du mouvement de S_1 ?

Déterminer son accélération a_1.

2- Ecrire l'equation horaire $x_1 = f(t)$

3- Trouver l'expression de l'intensité T_2 de la force exercée par le fil sur S_2 en fonction de a_1, m_2, g et α.

4- Trouver l'expression de l'intensité T_1 de l'action du fil sur S_1 en fonction de a_1, m_1.

5- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, montrer que le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe (Δ) s'exprime:

$$J_\Delta = \left[m_2\left(\frac{g.\sin\alpha}{a_1} - 1\right) - m_1\right].r^2$$

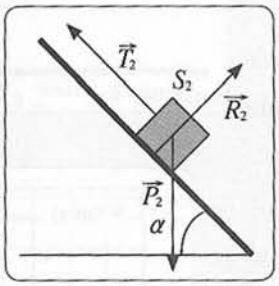
Calculer J_Δ.

Solution

1- $V_1 = f(t)$ est une fonction de la forme:

$V = a_1 t + V_{01}.a_1 s0$

Le mouvement de S_1 est un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré



$$a_1 = \frac{dv}{dt} = \frac{2,5 - 1,5}{0,5 - 0} = 2\ m.s^{-2}$$

2- $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + V_{01}.t + x_0 = t^2 + 1,5t + x_0$

à $t = 0$ on $x = 0$,

donc: $x_1 = t^2 + 1,5t$

3- $\vec{T_2} + \vec{P_2} + \vec{R_2} = m_2\vec{a_2}$

$-T_2 + m_2 g\sin\alpha + 0 = m_2.a_2$ (1)

Le fil est inextensible: $a_2 = a_1$

$T_2 = m_2(a_1 + g\sin\alpha)$

4- $\vec{T_1} + \vec{P_1} + \vec{R_1} = m_1\vec{a_1}$

$T_1 + 0 + 0 = m_1.a_1$; $T_1 = m_1.a_1$ (2)

5-

$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M(\vec{T_1}') + M_\Delta(\vec{T_2}') = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$0 + 0 - T_1'.r + T_2'.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$

Le fil est sans masse, donc: $T_1' = T_1$

et $T_2' = T_2$.

Le fil est inextensible: $\ddot{\theta} = \frac{a_1}{r}$

Donc: $-T_1 + T_2 = \frac{J_\Delta}{r^2}a_1$

ou encore: $-T_1 + T_2 = \frac{J_\Delta}{r^2}a_1$

Reprenons les relations (1), (2) et (3):

$-T_2 + m_2 g\sin\alpha = m_2 a_1$

$T_1 = m_1 a_1$

$-T_1 + T_2 = \frac{J_\Delta}{r^2}$

La somme de ces trois α expressions donne:

$-T_2 + m_2 g\sin\alpha + T_1 - T_1 + T_2$

$= m_2 a_1 + m_1 a_1 + \frac{J_\Delta}{r^2}a_1$

$$m_2 g\sin\alpha = \left(m_2 + m_1 + \frac{J_\Delta}{r^2}\right).a_1$$

$$m_2 + m_1 + \frac{J_\Delta}{r^2} = \frac{m_2 g\sin\alpha}{a_1}$$

$$m_1 + \frac{J_\Delta}{r^2} = m_2\left(\frac{g\sin\alpha}{a_1} - 1\right)$$

$$J_\Delta = \left[m_2\left(\frac{g\sin\alpha}{a_1} - 1\right) - m_1\right]r^2$$

$$J_\Delta = \left[0,2\left(\frac{10.0,5}{2} - 1\right) - 0,1\right].(5.10^{-2})$$

$$J_\Delta = 5.10^{-4} kg.m^2$$

5 Le dispositif de la figure comprend:

- Un disque homogène de rayon $r = 5cm$ pouvant tourner autour d'un axe fixe et horizontal (Δ) passant par son centre.

Son moment par rapport à cet axe est $J_\Delta = 4,5.10^{-4} kg.m^2$

- Un solide (S) de masse $m = 0,2kg$ pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal.

- Un fil inextensible et de masse négligeable enroulé sur le disque (Δ) est attaché à (S).

Le fil ne glisse par sur le cylindre.

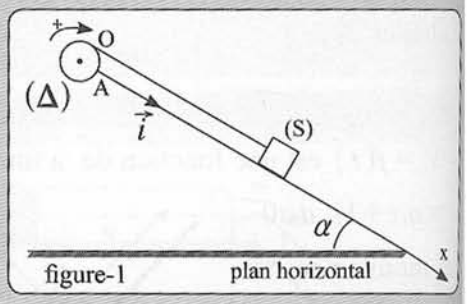


figure-1

On donne: $g = 10\ m.s^{-2}$

A la date $t = 0$, le centre de gravité G de (S) par O, origine du repère $(O,\vec{i})$. suivant lequel se fait la translation du corps (S).

La figure (2) représente les variations de v^2 en fonction de l'abscisse x du centre de gravité G de (S) à la même date, v étant la vitesse de G.

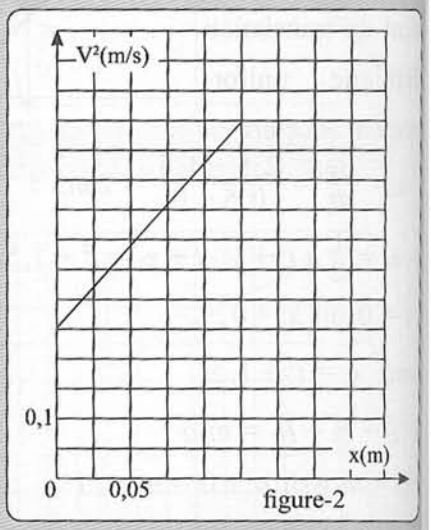


figure-2

1- En exploitant la figure (2), exprimer v^2 en fonction de x.

Par dérivation de cette expression, déduire la valeur de l'accélération $a = a_x$ du mouvement de (S).

2- Ecrire l'équation horaire de (S).

3- Les frottements dus à l'axe (Δ) sont équivalents à un couple de moment constant M

En étudiant le mouvement du corps (S) et du disque, trouver l'expression de M en fonction de J_Δ, m, r, a, α et g.

Calculer ce moment.

Solution

1- La fonction $V^2 = f(x)$ est affine:

$V^2 = kx + b$

En dérivant par rapport à t :

$\frac{d}{dt}(V^2) = \frac{d}{dt}(kx + b)$

$2V.\frac{dv}{dt} = k.\frac{dx}{dt} = k.v \ , \left(V = V_x = \frac{dx}{dt}\right)$

$2\frac{dv}{dt} = k$, Or $\frac{dv}{dt} = a_x = a$

D'où: $a = \frac{k}{2}$

$k = \frac{\Delta V^2}{\Delta x} = \frac{0,4 - 0,25}{0,05} = 3m/s^2$

$a = 1,5m/s^2$

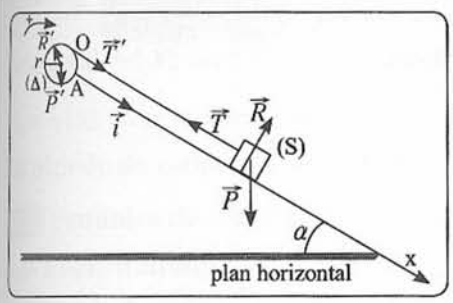
2-

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$

$V_0 = \sqrt{0,25} = 0,5m/s$

$x(t) = 0,75t^2 + 0,5t$

3- L'application de la 2ème loi de Newton, au corps (S) donne:



$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

$mg\sin\alpha + 0 - T = ma$

$T = m(g\sin\alpha - a)$

Pour le disque (D), la relation fondamentale de la dynamique de rotation s'écrit:

$M_\Delta(\vec{T}') + M_\Delta(\vec{P}') + M_\Delta(\vec{R}') + M = J_\Delta\ddot{\theta}$

$T'r + 0 + M = J_\Delta\ddot{\theta}$

Le fil est de masse négligeable, donc $T = T'$; et il est inextensible, $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$;

$m.r(g\sin\alpha - a) + M = J_\Delta\frac{a}{r}$;

$M = J_\Delta\frac{a}{r} - m.r(g\sin\alpha - a)$;

$M = -2,15.10^{-2}N.m$.

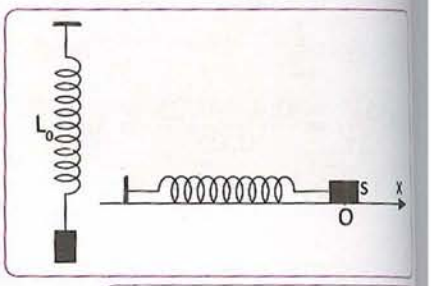
9 LES OSCILLATEURS MÉCANIQUES

I- SYSTÈMES MÉCANIQUES OSCILLANTS:

1 Le pendule élastique:

1.1- Définition:

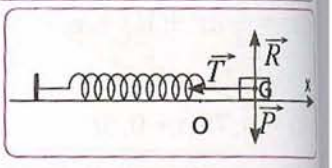
Il est constitué d'un objet de masse m assimilable à un point matériel G, lié à un point fixe par un ressort de constante de raideur K.



1.2- Force du ressort:

Lorsqu'on écarte un ressort de sa position de repos, celui-ci exerce une force, appelée force de rappel, notée $\vec{T}$. Cette force est parallèle à l'axe du ressort, en sens opposé à la déformation. Sa valeur est $T = k|\Delta l|$, où $|\Delta l|$ est la longueur de la déformation et K la raideur du ressort.

Dans le cas où le ressort est horizontal $\Delta l = x$.



1.3- Equation différentielle du pendule horizontal, non amorti:

L'application de la 2ème loi de Newton permet de trouver: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

1.4- Grandeurs caractéristiques des oscillations:

- Solution de l'équation.
- Equation horaire: $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$
- Période propre: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
- Accélération: $a_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{K}{m}x$

1.5- Aspects énergétiques:

1.5.1- Energie potentielle élastique :

Un ressort de raideur k par rapport à sa position de repos (prise comme référence) a une énergie potentielle élastique E_{pe} telle que :

$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$ Δl en (m), k en $(N.m^{-1})$ et E_{pe} en (J)

- Cas d'un pendule élastique horizontal: $\Delta l = x$, d'où: $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$.
- Variation : $\underset{1\to2}{\Delta E_p} = E_{pe}(2) - E_{pe}(1) = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$
- Expression du travail de la force $\vec{T}$ du ressort: $\underset{1\to2}{W(\vec{T})} = \frac{1}{2}k(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2) = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$

$$\Delta E_{pe} = -W(\vec{T})$$

1.5.2- Energie cinétique du pendule élastique:

$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$

1.5.3- Energie mécanique du pendule élastique horizontal:

$$E_m = E_C + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

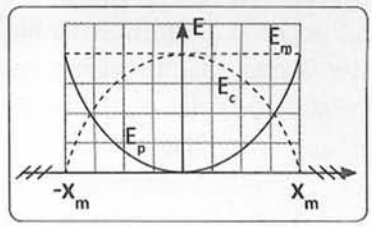
1.5.4- Différents types d'oscillations libres:

• S'il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique se conserve, les oscillations sont périodiques.

• Si les frottements sont faibles, on a des oscillations amorties et on dit que le mouvement est pseudo-périodique. Dans ce cas, on peut considérer que la pseudo-période T est pratiquement égale à la période propre T_0.

• Si les frottements sont importants, il n'y a plus d'oscillations, le mouvement est apériodique.

1.6- Diagramme des énergies:



1.6.1- En fonction de l'abscisse x:

$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$; $E_{pe} = f(x)$ parabole $E_C = E_m - E_{pe}$

$E_c = cte - \frac{1}{2}kx^2 = g(x)$: parabole.

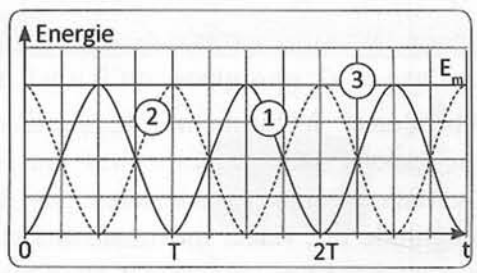
1.6.2- En fonction du temps:

Dans le cas où $x = X_m \cos\frac{2\pi}{T_0}t$: courbe (1)

$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$: courbe (2)

$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}X_m^2.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 = cte$: courbe (3)



La période de variations des énergies E_C et E_{pe} vaut: $T = \frac{1}{2}T_0$.

2 Pendules de torsion:

2.1- Présentation:

La pendule de torsion est constitué d'une tige homogène suspendue à un fil d'acier (figure-1).

On peut aussi construire un pendule de torsion en utilisant un ressort à spirale (figure-2).

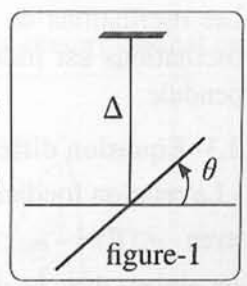


figure-1

2.2- Etude dynamique:

- Le fil d'acier et le ressort spirale, exercent sur le solide un couple de rappel, analogue à la force du ressort dans le pendule élastique.
- Le moment de ce couple est:

$$\mathcal{M}_\Delta = -C\theta$$

C : constante de torsion $(N.m.rad^{-1})$.

- La relation fondamentale donne dans le cas de la figure (1).

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0 \qquad T_0 = 2\pi\frac{J_\Delta}{C}$$

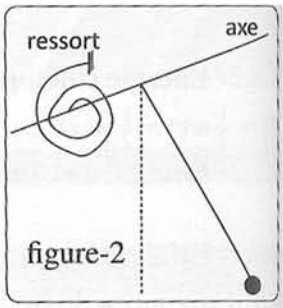


figure-2

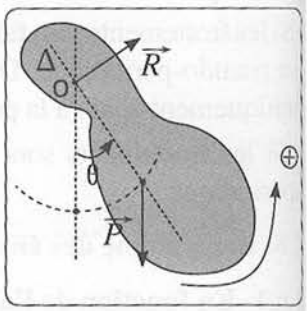
2.3- Aspect énergétique:

$$E_m = E_{p_e} + E_C = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2$$

E_{p_e} : Energie potentielle de torsion.

3 Pendule pesant:

3.1- Présentation:



Un pendule pesant est un solide pouvant tourner autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie, dans le champ de pesanteur terrestre.

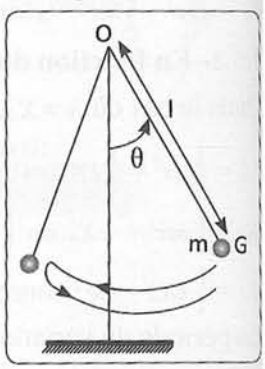
La position du pendule est repérée par l'abscisse angulaire $\theta(t)$.

La position d'équilibre stable du pendule est $\theta = 0$.

Remarque: - Cette position est dite stable car si on écarte le pendule de celle-ci, il a tendance à y revenir.

- Il existe une position d'équilibre instable : $\theta = \pi$.
- L'abscisse angulaire $\theta(t)$ repère l'écart par rapport à l'équilibre.

3.2- Oscillations libres du pendule non amorti:



Le pendule non amorti n'est soumis qu'à son poids et à la réaction de l'axe en O: on suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Abandonné à lui-même, le pendule pesant effectue des oscillations périodiques; c'est un système oscillant. Les oscillations sont caractérisées par leur période T et leur amplitude θ_m, valeur maximale de l'abscisse angulaire.

Remarque: L'abscisse angulaire varie donc dans l'intervalle $-\theta_m \leq \theta(t) \leq \theta_m$.

Les oscillations de faible amplitude sont isochrones c'est-à-dire que la période des oscillations est indépendante de l'amplitude θ_m, et est appelée période propre du pendule.

3.3- Equation différentielle - période propre:

- La relation fondamentale de la dynamique de rotation donne: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg.OG.\sin\theta$,

on obtient dans le cas des faibles amplitudes: $\ddot{\theta} + \frac{m.g.OG}{J_\Delta}.\theta = 0$

- La période propre des oscillations sinusoïdales est alors: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g.OG}}$

3.4- Aspect énergétique du pendule pesant :

L'énergie mécanique : $E_m = E_C + E_{p_e}$

$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2$ et $E_{pe} = mgz = mgOG(1 - \cos\theta)$

3.5- Le pendule simple:

- Il est constitué d'un solide de masse m, assimilable à un point G, suspendu à un fil de masse négligeable et de longueur L, lui-même fixé à l'autre extrémité en un point C immobile. Lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le lâche, il effectue des oscillations libres.

S'il n'y a pas de frottement, le mouvement est périodique. Le temps T_0 que met le pendule pour faire un aller-retour est appelé période propre du pendule.

- Elle est indépendante de la masse m et vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, où g est l'intensité de la pesanteur au lieu considéré.

Remarque:

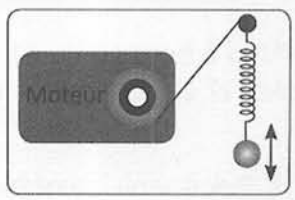
- Dans le cas des oscillations de faible amplitude, la période est indépendante de l'amplitude des oscillations. C'est l'isochronisme des petites oscillations.
- L'équation différentielle des oscillations est: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

Elle peut être établie de deux manières:

- Soit par application de la relation fondamentale de la dynamique de rotation, en prenant $J_\Delta = ml^2$.
- Soit par application de la deuxième loi de Newton au solide (S) soumis à son poids et à la force $\vec{T}$ du fil, et en projetant cette relation sur la tangente (Frenet).

II- OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES:

1 Excitateur et résonateur:



Un système mécanique oscillant réel est toujours amorti par des frottements.

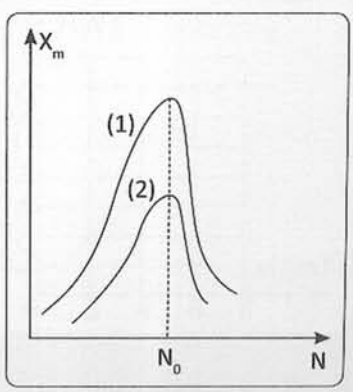
Pour compenser l'effet de ces frottements, il faut apporter de l'énergie par un système extérieur. un excitateur est un système apportant de l'énergie de façon périodique à un système oscillant, qui s'appelle alors résonateur.

Exemple:

On peut apporter de l'énergie périodiquement à un dispositif solide-ressort vertical en imposant un mouvement périodique vertical à l'extrémité supérieure du ressort.

Si est la fréquence de l'excitateur, le mouvement du résonateur en régime permanent est périodique, de même fréquence N.

Les oscillations du résonateur sont alors forcées par celles de l'excitateur.



2 Le phénomène de résonance:

L'amplitude x_m des oscillations d'un résonateur dépend de la fréquence f de l'excitateur. Lorsque cette fréquence

est voisine de la fréquence propre N_0 du résonateur, l'amplitude des oscillations du résonateur devient très importante : c'est le phénomène de résonance.
L'amplitude x_m des oscillations du résonateur est maximale pour N voisine de N_0.
L'allure générale de l'évolution de l'amplitude des oscillations du résonateur en fonction de la fréquence de l'excitateur est donnée sur la figure, x_0 étant l'amplitude des oscillations de l'excitateur.
Courbe (1): amortissement faible (résonance aiguë)
Courbe (2): amortissement élevé (résonance floue)

1 L'équation horaire d'un pendule élastique horizontal, non amorti a pour expression $x(t) = X_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

1- En déduire la période propre T_0 en fonction de K et m.

2- A l'instant $t = 0$, le centre du solide passe par un point M_0 d'abscisse $x_0 = 2cm$, à la vitesse $v_0 = 0,2m.s^{-1}$ en se dirigeant vers les abscisses négatives.

2.1- Trouvez la valeur de la phase initiale φ et celle de l'amplitude x_m.

2.2- A quel instant t, le solide passe par l'origine des abscisses pour la deuxième fois? On donne: $m = 100g$; $K = 10N.m^{-1}$; $\pi^2 = 10$.

Solution

1- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

2.1- D'après $x(t)$ on a:

$\frac{dx}{dt} = -x_m.\omega_0.\sin(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0$, $x(0) = x_m.\cos\varphi$

et $v_{0x} = -x_m.\omega_0.\sin\varphi$

On a : $v_{0x} < 0$, donc : $v_{0x} = -v_0$, alors:

$$\begin{cases} x(0) = x_m.\cos\varphi & (1) \\ v_0 = x_m.\omega_0.\sin\varphi & (2) \end{cases}$$

La combinaison de ces deux résultats donne:

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{x_m.\omega_0} = \frac{v_0}{x_m.\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{0,2}{2.10^{-2}\sqrt{\frac{10}{0,1}}} = 1$$

comme $0 \le \varphi < \pi$, on a : $\varphi = \frac{\pi}{4} rad$.

L'une des deux relations (1) et (2) fournit la valeur de x_m :

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos\varphi} = \frac{2.10^{-2}}{\cos\frac{\pi}{4}} \simeq 2,83cm$$

2.2- $x_m = X\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\omega t + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{N}$

car $\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\frac{2}{T_0}t = k + \frac{1}{4}$

$t = \left(k + \frac{1}{4}\right).\frac{T_0}{2}$

Le 1er passage par O, correspond à la 1ère valeur permise de k. $(k = 0)$, à la date $t_1 = \frac{T_0}{8}$.

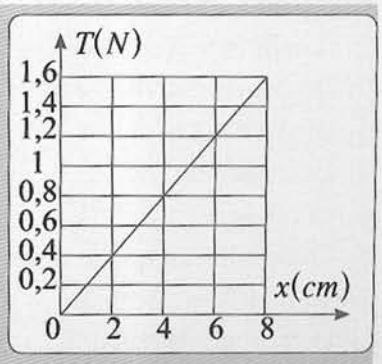
Le 3ème passage correspond donc à $k = 2$.

$t_3 = \left(2 + \frac{1}{4}\right)\frac{T_0}{2} = \frac{9}{8}T_0 = \frac{9}{8}.2 = 2,25s$.

2 La force $\vec{T}$ exercée par un ressort horizontal a pour expression $\vec{T} = -T.\vec{i}$. L'intensité T en fonction de l'allongement x du ressort est donnée sur le graphe ci-contre.

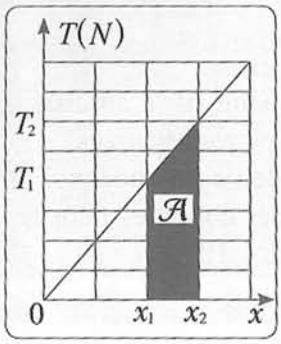
1- Déterminer graphiquement le travail de $\vec{T}$ quand on allonge le ressort de $x_1 = 2cm$ à $x_2 = 6cm$.

2- Calculer ce travail d'une autre manière.



Solution

1- Travail élémentaire :



$$dW = \vec{T}.d\vec{\ell} = -T\vec{i}.d\vec{x} = -T.\vec{i}.dx.\vec{i}$$

$$dW = -T.dx = -d\mathcal{A}$$

$$W_{x_1 \to x_2} = \sum dW = -\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{2} = \frac{T_2.x_2 - T_1.x_1}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(1,2.6 - 0,4.2).10^{-2}}{2}$$

$$\mathcal{A} = 3,2.10^{-2}J$$

$$W = -3,2.10^{-2}J$$

2-

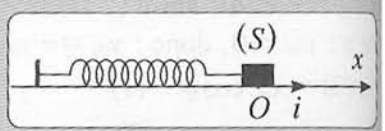
$$W = \int_{x_1}^{x_2} dW = -\int_{x_1}^{x_2} Kxdx = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

Graphiquement:

$$K = \frac{T}{x} = \frac{0,4}{2.10^{-2}} = 20N.m^{-1}$$

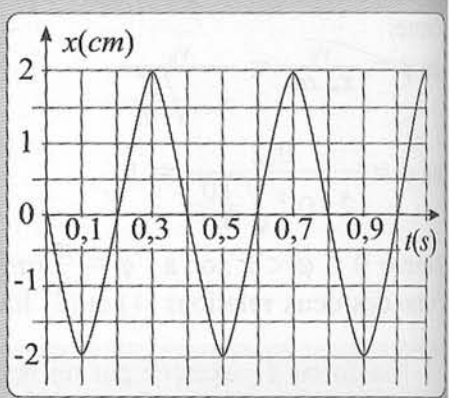
$$W = \frac{1}{2}20(2^2 - 6^2).10^{-4} = -3,2.10^{-2}J.$$

3 La figure (1) représente un pendule élastique horizontal, non amorti, constitué par :



- Un solide (S) de masse $M = 300g$;
- Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K.

Un enregistrement du mouvement de cet oscillateur a permis d'obtenir la courbe de la figure (2) où x représente l'abscisse à la date t du centre de gravité G du corps (S) dans le repère $(O;\vec{i})$.



A l'équilibre, l'abscisse de G est nul.

L'équation horaire du mouvement a pour expression: $x = x_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

On prend : $\pi^2 = 10$.

1- Déterminer X_m, T_0 et φ.

2- Déterminer la vitesse maximale V_{max} de (S).

3- Quelle est à la date $t = 2,1s$, la vitesse de (S)?

4- Exprimer la vitesse V_x de (S) lorsqu'il passe par la position d'abscisse x, en fonction de x, x_m et T_0.

5- En déduire, en quelle position la vitesse v est maximale. et, en quelle position elle est minimale.

6- Déterminer la valeur maximale de l'intensité de la force du ressort.

Solution

1- Graphiquement:

$X_m = 2cm$, $T_0 = 0,4s$

$\cos\varphi = \dfrac{x(t=0)}{X_m} = 0$;

d'où : $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2} rad$

- Une deuxième condition initiale, sur la vitesse initiale est : $\dfrac{dx}{dt} = V_{0x} < 0$.

$\dot{x} = -\dfrac{2\pi}{T_0} x_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$\dot{x}(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0} x_m \sin\varphi$

donc : $\sin\varphi > 0$, d'où : $\varphi = +\dfrac{\pi}{2} rad$

2- $V_x = -\dfrac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$V_{max} = |V_x| = -\dfrac{2\pi}{T_0} x_m \left|\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right|$

$V_{max} = \dfrac{2\pi}{T_0} x_m$

$V_{max} = \dfrac{2\pi}{0,4}.2.10^{-2} = 0,31 m.s^{-1}$

3- A la date $t = 2,1s$ on a:

$\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(5\pi.2,1 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc : $V_x = 0$

4- On a : $\begin{cases} x = x_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ V_x = -\dfrac{2\pi}{T_0} x_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{cases}$

En posant : $\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = \alpha$, on élimine t :

$\cos\alpha = \dfrac{x}{x_m}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{V_x}{x_m}.\dfrac{T_0}{2\pi}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\dfrac{x^2}{x_m^2} + \left(\dfrac{V_m}{x_m}.\dfrac{T_0}{2\pi}\right)^2 = 1$

$\left(\dfrac{V_x.T_0}{2\pi}\right) = x_m^2 - x^2$

$V_x = \pm\dfrac{2\pi}{T_0}\sqrt{x_m^2 - x^2}$

5- La vitesse est maximale lorsque $x = 0$.

Et, elle est nulle lorsque $x = \pm x_m$

6- $F = K\Delta\ell = Kx$

$F_{max} = K.x_{max}$;

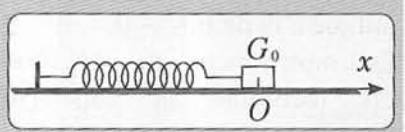
or $K = \dfrac{4\pi^2 m}{T_0^2}$, donc:

$F_{max} = \dfrac{4\pi^2 m}{T_0^2} x_{max}$

$F_{max} = \dfrac{4\pi^2.0,3.2.10^{-2}}{(0,4)^2} = 1,5N$

4

On considère un pendule élastique constitué d'un solide (S) de masse $m = 27g$ et un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur K. (fig)



A l'équilibre le centre de gravité G de (S) coïncide avec l'origine de l'axe Ox.

L'équation horaire des oscillations non amorties de ce pendule s'écrit:

$x = 4,6.10^{-2}\sin\left(23t + \dfrac{\pi}{2}\right)$; x en (m) et t en (s)

- L'énergie potentielle élastique du système est nulle à l'état d'équilibre.
- L'énergie potentielle de pesanteur est nulle au niveau horizontal passant par G.

1- A l'aide d'une étude énergétique, établir l'équation différentielle des oscillations de ce système.

2- Déterminer à l'instant initial $(t = 0)$, l'abscisse de G et l'abscisse de la vitesse $\vec{V}_0$ de G.

3- Calculer la période propre T_0 de ces oscillations. En déduire la valeur de K.

4- Déterminer l'abscisse et la vitesse de G à la date $t = \dfrac{T_0}{8}$.

5- En déduire l'énergie mécanique E_m du pendule.

Solution

1-

$E_m + E_C + E_{Pr} + E_{Pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0 + \frac{1}{2}K\Delta\ell^2$

Le pendule étant horizontal : $\Delta\ell = x$,

Les oscillations s'effectuent sans amortissement: $E_m = cte$;

alors: $\frac{dE_m}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0,\ \forall t$;

donc: $\dot{x} \neq 0$ et $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0;\ \forall t$.

2- $x_0 = 4,6.10^{-2}.\sin\frac{\pi}{2} = 4,6cm$

$V_x(0) = \dot{x}(0) = 4,6.10^{-2}.23\cos\frac{\pi}{2} = 0$

3- $T_0 = \frac{2\pi}{23} = 2,73.10^{-1}s$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$;

$K = \frac{4\pi^2.m}{T_0^2} = 19,6 \simeq 20N.m^{-1}$

4-

$x\left(\frac{T_0}{8}\right) = x_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.\frac{T_0}{8} + \frac{\pi}{2}\right)$

$x\left(\frac{T_0}{8}\right) = x_m.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3,25cm$

$v_x\left(\frac{T_0}{8}\right) = 4,6.10^{-2}.23.\cos\frac{3\pi}{4} \simeq 0,748m.s^{-1}$

5-

$E_m = E_C\left(\frac{T_0}{8}\right) + E_{Pr}\left(\frac{T_0}{8}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$

$E_m = \frac{1}{2}.37.10^{-3}(-0,748)^2 + \frac{1}{2}.20(3,25.10^{-2})^2$

$E_m \approx 2,1.10^{-2}J$

5 On fixe une bille de masse $m = 200g$ à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable et de raideur K.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G de la bille dans le repère $(O;\vec{i})$.

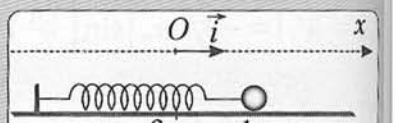


figure -1

A l'équilibre $x_G = 0$ et le ressort est non déformé (figure 1).

On écarte la bille de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t_0 = 0$.

Le mouvement de G est rectiligne et son diagramme des espaces $x = f(t)$ est porté sur la figure (2).

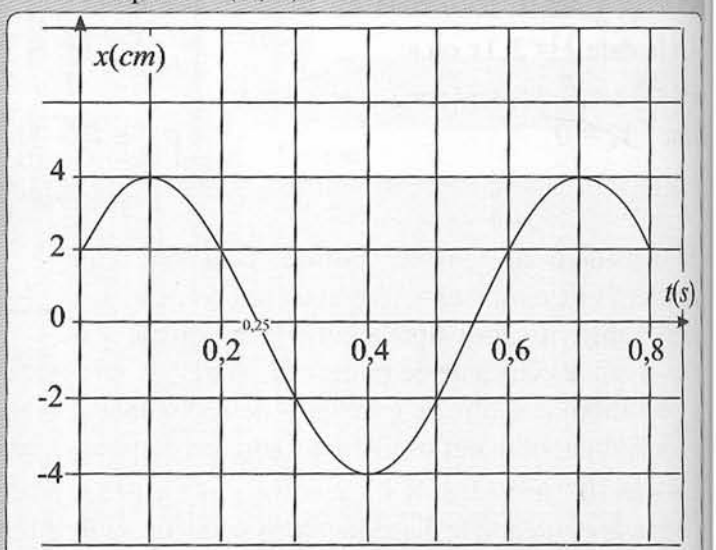


figure -2

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement de G

2- La solution de cette équation différentielle s'écrit: $x(t) = X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

a- Déterminer X_m, T_0 et φ.

b- Calculer la valeur de la constante K.

c- Ecrire l'expression de $\dot{x}(t)$ de la vitesse de G.

En déduire la valeur de $\dot{x}$ au moment de passage de G par sa position d'équilibre pour la première fois.

d- Calculer $\ddot{x}$ coordonnée de l'accélération de G à l'instant $t = \frac{T_0}{2}$.

Solution

1- $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}_G$

$P_z+R_z+T_z=ma_x=m\ddot{x}$

$0+0-T=m\ddot{x}$

$T=K\Delta\ell=Kx$

$-Kx=m\ddot{x}\Rightarrow\ddot{x}+\frac{K}{m}x=0$ (1)

2.a- $X_m=4cm=4.10^{-2}m$; $T_0=0,6s$

à $t=0$; $x(0)=X_m\cos\varphi$

$\cos\varphi=\frac{x(0)}{X_m}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}rad$

or $\frac{dx}{dt}>0$ à $t=0$

$\frac{dx}{dt}=X_m.\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=-X_m.\frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$

Puisque : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0>0$ on a : $\sin\varphi<0$

Donc : $\varphi=-\frac{\pi}{3}rad$

2.b-

$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\ddot{x}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.x$

$\ddot{x}+\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.x=0$

L'identification de (2) et (1) donne:

$\frac{K}{m}=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$; $\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{2\pi}{T_0}$

D'où : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

On tire : $K=\frac{4\pi^2m}{T_0^2}$

$K=\frac{4\pi^2.200.10^{-3}}{(0,6)^2}\simeq 22N.m^{-1}$

2.c- $\dot{x}(t)=-\frac{2\pi}{T_0}X_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

Lorsque la bille passe pour la première par sa position d'équilibre O, sa vitesse en valeur absolue est maximale, car la pente de la tangente devient maximale. Il en résulte que $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ est maximale.

$|\dot{x}(t)|=\frac{2\pi}{T_0}X_m$ car $\left|\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\theta\right)\right|=1$

$\dot{x}(t)_{max}=\frac{2\pi}{T_0}X_m=\frac{2\pi}{0,6}.4.10^{-2}\simeq 0,42m.s^{-1}$

2.d- On a : $\ddot{x}+\frac{K}{m}x=0$,

d'où : $\ddot{x}=-\frac{K}{m}x$

$x\left(\frac{T}{2}\right)=X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.\frac{T_0}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=X_m\cos\frac{2\pi}{3}$

$=-\frac{X_m}{2}$

$\ddot{x}=\frac{K}{m}.\frac{X_m}{2}=\frac{22}{0,2}.\frac{4.10^{-2}}{2}=2,2ms^{-2}$

Autre méthode:

$\ddot{x}=-X_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}-\frac{\pi}{3}\right)\simeq 2,2ms^{-2}$

6



On considère un oscillateur mécanique horizontal constitué d'un solide de masse attaché à un ressort de masse négligeable et de raideur K.

Pour provoquer les oscillations périodiques de ce système, on écarte (S) d'une distance $d=OA$ et on le lance à la vitesse $\vec{v}_A$, il passe par l'origine des abscisses à la vitesse $2\vec{v}_A$.

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que l'amplitude X_m du mouvement est exprimée en fonction d comme suit : $X_m=\frac{2}{\sqrt{3}}d$.

On prend $E_{P_r}=0$ le long de l'axe $x'x$ et $E_{P_e}=0$ alors que : $x=0$.

Solution

La conservation de E_m s'écrit :

$E_C(A)+E_{Pe}(A)=E_C(O)+E_{Pe}(O)$

$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}Kd^2=\frac{1}{2}m(2v_A)^2+0$

$Kd^2=3mv_A^2$, d'où : $v_A^2=\frac{K}{3m}d^2$

Appliquons maintenant cette conservation entre A et B point d'arrêt de (S) à $x_B=-X_m$.

$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}Kd^2=\frac{1}{2}K(-X_m)^2+\frac{1}{2}mv_B^2$

$mv_A^2+Kd^2=KX_m^2+0$

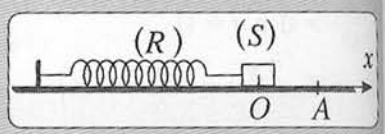
$m.\frac{K}{3m}d^2+Kd^2=KX_m^2$

$d^2\left(\frac{1}{3}+1\right)=X_m^2$

$X_m^2=\frac{4}{3}d$

$X_m=\frac{2}{\sqrt{3}}d$

7



On considère le pendule élastique de la figure suivante où:

(S) est un solide de masse $m=40g$.

(R) est un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur $K=100N.m^{-1}$.

On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre O d'une distance $OA=d=3cm$ et on le lance horizontalement vers O avec une vitesse $v_A=2m.s^{-1}$. Il prend par la suite un mouvement oscillatoire sur l'axe Ox, autour de la position O.

Les frottements sont négligeables.

• Le plan horizontal passant par O est pris comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{Pp}=0$.

La position de (S) à l'équilibre est prise comme état de référence de l'énergie potentielle élastique $(E_{Pe}=0)$

1- Définir l'amplitude d'un mouvement oscillatoire.

2- La distance $d=OA$ représente-t-elle l'amplitude de ce mouvement?

3- En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que l'amplitude X_m des oscillations s'écrit :

$$X_m=\sqrt{d^2+\frac{m}{K}v_0^2}$$

4- Calculer X_m.

Solution

1- L'amplitude d'un mouvement oscillatoire est la valeur maximale de l'abscisse, ici x.

2- Lorsque l'abscisse est égale à l'amplitude, le corps s'arrête.

Au point A, le corps (S) possède une vitesse non nulle v_A, donc $d=OA$ n'est pas une amplitude.

3- Considérons le point B où (S) s'arrête, alors x_B représente l'amplitude.

L'énergie mécanique se conserve, donc $E_m(B)=E_m(A)$.

$E_{Pp}=0$, $E_{Pe}=\frac{1}{2}K\Delta\ell^2=\frac{1}{2}Kx^2$

Soit alors : $E_{C_B} = E_{PP_B} = E_{C_A} + E_{PP_A}$

$$0 + \frac{1}{2}Kx_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Kx_A^2$$

$$KX_m^2 = mv_0^2 + Kd^2$$

$$X_m^2 = d^2 + \frac{m}{K}v_A^2$$

$$X_m = \sqrt{d^2 + \frac{m}{K}v_A^2}$$

$$X_m = \sqrt{(3.10^{-2})^2 + \frac{40.10^{-3}}{100}.2^2}$$

$$X_m = 5.10^{-2}m = 5cm$$

8

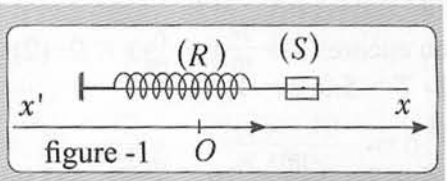


figure -1

Un oscillateur mécanique est obtenu en attachant un solide de masse m à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur K, (figure 1).

On étudie les oscillations horizontales de ce système dans le repère $(O;\vec{i})$ lié à la terre et considéré comme galiléen.

A l'équilibre, le centre de gravité G du système coïncide avec l'origine O de l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$.

Les forces de frottements sont modélisées par une force $\vec{f} = -\mu.\vec{v}$, μ étant un coefficient positif constant et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G.

Un appareillage approprié a permis d'obtenir les documents des deux figures (2) et (3).

Données : $m = 250g$; $K = 10N.m^{-1}$ et $\mu = 500g.s^{-1}$.

On considère que l'énergie potentielle de la pesanteur est nulle.

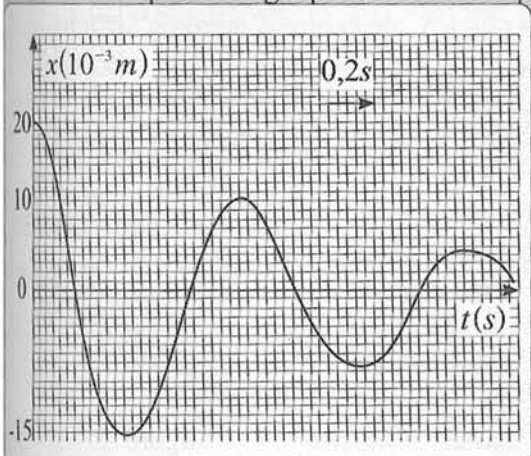


figure - 2

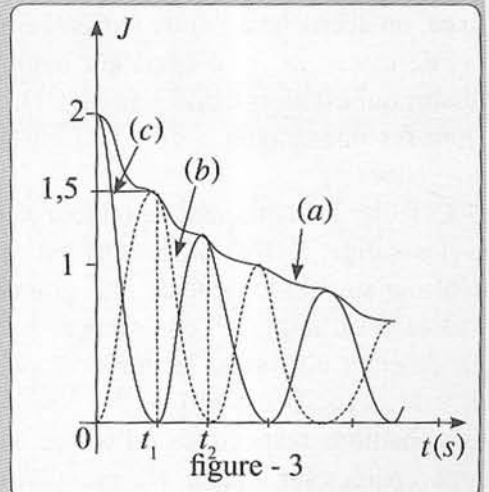


figure - 3

1- En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que : $\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

2- En exploitant la figure (2), déterminer la pseudo-période T des oscillations. La comparer à la période propre T_0 de cet oscillateur.

3- Montrer que l'énergie mécanique E_m du système vérifie la propriété : $\frac{dE_m}{dt} = -\mu.v^2$.

4- Attribuer à chacune des énergies E_m, E_C et E_{P_e}, la courbe qui lui est associée.

5- Déterminer f_1 et f_2 intensité de la force f à t_1 et à t_2.

Solution

1- $\vec{P}+\vec{R}_N+\vec{f}+\vec{T}=m\vec{a}_G$

La projection sur l'axe Ox donne:

$f_x+T_x=ma_x=m\ddot{x}$

$-\mu v_x-Kx=m\ddot{x}$

$m\ddot{x}+\mu\dot{x}+Kx=0$ (1)

ou encore: $\ddot{x}+\frac{\mu}{m}\dot{x}+\frac{K}{m}x=0$ (2)

2- $T=5.0,2=1s$

et

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{0,25}{10}}=0,99s\approx T$

3- $E_m=E_C+E_{Pe}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Kx^2$

$\frac{dE_m}{dt}=\dot{x}[m\ddot{x}+Kx]=\dot{x}$

Or, l'équation (1) donne: $m\ddot{x}+Kx=-\mu\dot{x}$; d'où:

$\frac{dE_m}{dt}=\dot{x}[-\mu\dot{x}]=-\mu\dot{x}^2=-\mu v_x^2=-\mu v^2$

4- La fonction $E_m=f(t)$ est décroissante $(\forall t)$, il lui correspond la courbe (a).

Les conditions sont telles que $x_0\neq 0$, donc $E_{Pe}\neq 0$, il lui correspond la courbe (c) et la courbe (b) correspond à $E_C(t)$.

5- A la date t_1 on a: $E_{Pe}=0$ et $E_C=1,5J$.

Or $E_C(1)=\frac{1}{2}mv_1^2$, alors: $v_1=\sqrt{\frac{2E_C(1)}{m}}$

or $f_1=\mu v_1$, d'où : $f_1=\mu\sqrt{\frac{2E_C(1)}{m}}$

$f_1=0,5\sqrt{\frac{2.1,5}{0,25}}=1,73N$

A la date t_2, on remarque que $E_C=0$ d'où $v=0$ et par conséquent $f_2=0$.

9

Soit un ressort idéal vertical, à spires non jointives de coefficient de raideur K, et de longueur à vide ℓ_0. Une de ses extrémités étant fixée, on accroche à l'autre extrémité un objet S, de centre d'inertie G, de masse m, et d'épaisseur négligeable devant la longueur du ressort qui est alors égale à ℓ_1 (fig. 1).

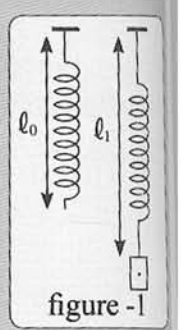


figure -1

Données numériques : $\ell_0=12,0cm$; $\ell_1=14,0cm$; $m=100g$; $g=10m.s^{-2}$.

1- Calculer le coefficient de raideur k du ressort.

2- Le solide S fixé au ressort est alors astreint à se déplacer suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (fig. 2). S étant au repos, la longueur du ressort est alors $\ell_2=11,5cm$, G est en G_0.

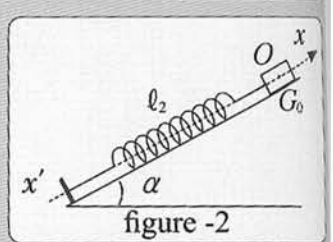


figure -2

Les positions respectives du centre de masse G de S sont repérées sur un axe $x'x$ parallèle à la ligne de plus grande pente, orienté vers le haut, et dont l'origine O coincide avec G_0.

2.1- Calculer l'angle α.

2.2- On déplace légèrement le solide S et on amène son centre de masse de G_0 en G_1 tel que :

$\overrightarrow{OG_1}=x_1\vec{i}$ avec $x_1=+4,5cm$, et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t=0$.

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S sur le plan incliné.

b- Sachant que l'équation horaire du mouvement a pour expression:

$$x(t) = X_m \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi\right)$$

Calculer la période propre des oscillations T_0.

Solution

1- La condition d'équilibre de S s'écrit:
$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

Projetons cette relation sur un axe vertical $y'y$ orienté positivement vers le bas:
$P - T = 0$

soit $mg - k(\ell_1 - \ell_0) = 0$ d'où:

$$K = \frac{mg}{(\ell_1 - \ell_0)}$$

$$K = \frac{100 \times 10^{-3} \times 10}{(14,0 - 12,0) \times 10^{-2}} = 50 N.m^{-1}$$

2.1- *Conseil:* Etudier l'équilibre du système S.

Attention, le ressort est comprimé.

Le système choisi est toujours S, étudié dans le même référentiel.

Les forces extérieures appliquées sont: son poids $\vec{P}$, la relation $\vec{R}$ du plan, la tension $\vec{T}_0$ du ressort (fig. 3).

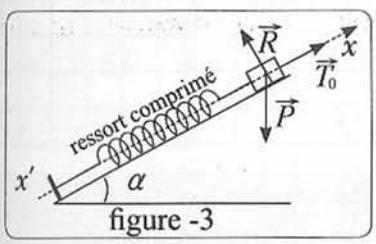


figure -3

La condition d'équilibre de S s'écrit:
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

Soit $\ell_2 - \ell_1$ la déformation du ressort, dans ces conditions, la tension $\vec{T}_0$ du ressort a pour expression : $\vec{T}_0 = -k(\ell_2 - \ell_1)\vec{i}$

La relation précédente peut s'écrire:
$m\vec{g} + \vec{R} - k(\ell_2 - \ell_0)\vec{i} = \vec{0}$ (1)

Projetons-la sur l'axe $x'x$:
$-mg\sin\alpha - k(\ell_2 - \ell_0) = 0$

d'où : $\sin\alpha = \dfrac{k(\ell_0 - \ell_2)}{mg}$

$$\sin\alpha = \frac{50 \times (12,0 - 11,5) \times 10^{-2}}{100 \times 10^{-3} \times 10} = 0,25$$

$\alpha = 14°$

2.2.a- Les forces extérieures appliquées sont: son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du plan, la tension $\vec{T}$ du ressort (fig.4).
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

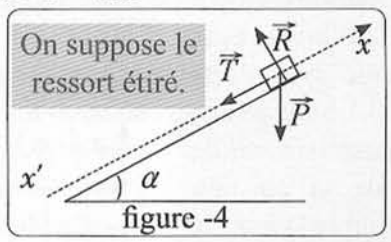


figure -4

Prenons pour origine des abscisses, la position G_0 du centre d'inertie S de lorsqu'il est à l'équilibre sur le plan incliné.

Conseil: Attention, ne pas confondre abscisse et déformation du ressort

Dans ces conditions:

- l'abscisse du centre d'inertie G est G est x telle que : $\overrightarrow{G_0G} = x\vec{i}$
- la déformation du ressort est $\Delta\ell = \Delta\ell_e + x$; $\Delta\ell_e = \ell_2 - \ell_0$.

d'où : $\vec{T} = -k[\Delta\ell_2 + x]\vec{i}$

soit : $m\vec{g} + \vec{R} - k[\Delta\ell_e + x]\vec{i} = m\vec{a}$

d'après la relation (1) établie à la question précédente : $m\vec{g} + \vec{R} - K.\Delta\ell_e.\vec{i} = \vec{0}$

d'où : $-kx\vec{i} = m\vec{a}$

Projetons cette relation sur l'axe $x'x$:
$-kx = ma_G = m\ddot{x}$,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

b- Une solution de l'équation différentielle

donne l'équation horaire du mouvement : $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

- ω_0 est la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- déterminons φ et x_m en considérant les conditions initiales.

• $t = 0$: $x = x_1$ et $v_x = 0$

$x_1 = x_m \cos\varphi$ soit $\cos\varphi = \frac{x_1}{x_m} > 0$

$\varphi = 0$

$v_x = -\omega_0 x_m \sin\varphi$ soit $\sin\varphi = 0$

$x_m = x_1$

L'équation horaire est : $x = x_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

$x_1 = 4,5.10^{-2} m$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{50}{100.10^{-3}}} = 22 rad.s^{-1}$

$x = 4,5.10^{-2} \cos 22t \ (SI)$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{22} = 0,29s$

10 ***Changement des conditions initiales du mouvement d'un oscillateur non amorti***

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m lié à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est liée à un support fixe (fig 1). A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O du repère d'espace $(O;\vec{i})$ lié à la terre.

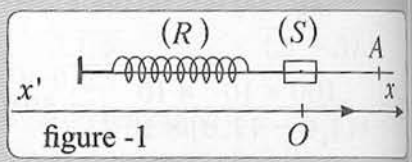


figure -1

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre dans le sens positif jusqu'à ce que son centre de gravité G coïncide avec un point A situé à une distance d de O.

On considère les deux cas suivants:

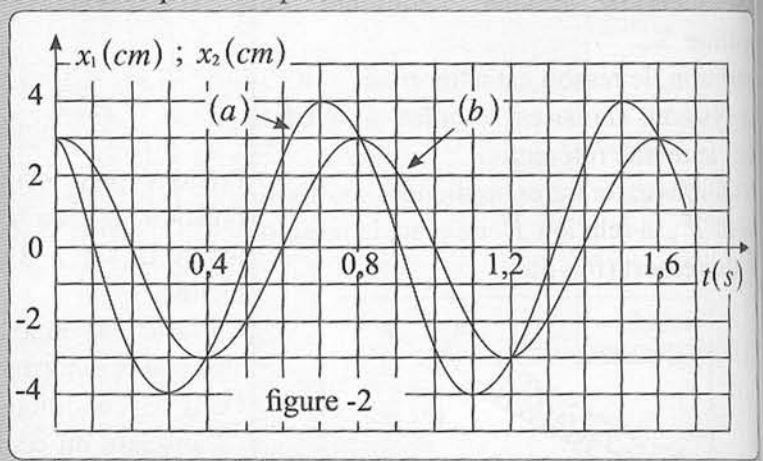


figure -2

- 1er cas : On abandonne (S) au point A, sans vitesse initiale, à $t = 0$.

2ème cas : on lance (S) à partir de A, à la date $t = 0$, avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ dans le sens négatif.

Dans les deux cas, le solide (S) effectue un mouvement oscillatoire, autour de sa position d'équilibre O.

1- Etablir l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x du centre G du solide (S).

2- Trouver l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que l'équation $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$, soit solution de l'équation différentielle.

3- A l'aide d'un dispositif approprié, on obtient la courbe d'évolution de x_1 et x_2, abscisses de G, dans le 1er et le 2ème cas, comme l'indique la figure (2). Préciser en justifiant, la courbe qui correspond au 1er cas.

4- On considère l'oscillateur dans le 2ème cas et on désigne l'amplitude de son mouvement par x_{m2} et la phase à l'origine des dates par φ_2.

4.1- Déterminer graphiquement à partir de la figure (3), la valeur de la distance d et la valeur de x_{m2}.

4.2- En appliquant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que:

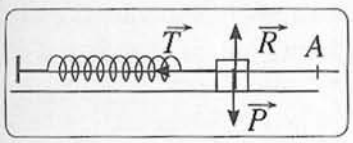
$x_{m2} = \sqrt{\frac{m.v_A^2}{K} + d^2}$

4.3- Trouver l'expression de $\tan\varphi_2$ en fonction de d et x_{m2}.

Bac SM, Juin 2010

Solution

1- D'après la deuxième loi de Newton :



$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}_G$

A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=0$

or $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ donc $T_e = k\Delta_e = 0$

A l'équilibre, le ressort n'est pas déformé,

donc : $\vec{T}=m.\vec{a}_G$

$-k.\overrightarrow{OG} = m.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt}$

$-kx\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i}$

$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

2- On a :

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ (1)

$x = X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\dot{x} = -X_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\ddot{x} = -X_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$ (2)

(1)=(2) d'où: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m}$

$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

3- Dans la 1ère expérience, le corps (S) part sans vitesse initiale du point. Il s'arrête donc à la position symétrique de A d'abscisse $x = -d$

Il s'agit donc de la courbe (a).

4.1- L'amplitude du mouvement (1) est $x_{m1} = d = 3cm$.

L'amplitude du mouvement (2) est $x_{m2} = 4cm$ car à l'instant ou (S) s'arrête la tangente est horizontale et $v_x = \frac{d_x}{dt} = 0$

4.2- Appliquons au mouvement (2), la conservation de l'énergie mécanique entre A et B.

$E_{C_A} + E_{pe(A)} = E_{C(B)} + E_{pe(B)}$

$\frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = 0 + \frac{1}{2}k.X_{m_2}^2$

$mV_A^2 + k.d^2 = kX_{m2}^2$

$X_{m2}^2 = d^2 + \frac{m}{k}.V_A^2$

$X_{m2} = \sqrt{d^2 + \frac{m}{k}.V_A^2}$

4.3-

$x_2(t) = X_{m2}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi_2\right)$

$x_2(0) = x_A = d$

(1) $d = X_{m2}.\cos\varphi_2$

$x_2 = -X_{m2}\left(\frac{2\pi}{T_0}+\varphi_2\right)$

(2) $x_2(0) = -V_A = -X_{m2}.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin\varphi_2$

D'où :

$$\begin{cases} \sin\varphi_2 = \dfrac{V_A}{X_{m2}} \cdot \dfrac{T_0}{2\pi} \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{d}{X_{m2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\varphi_2 = \dfrac{V_A.T_0}{2\pi d} = \dfrac{V_A}{d} \cdot \sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ x_{m2} = \sqrt{\dfrac{m}{k}.V_A^2 + d^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m^2 - d^2 = \dfrac{m}{k}.V_A^2 \\ \tan^2\varphi_2.d^2 = \dfrac{m}{k}.V_A^2 \end{cases}$$

$$\tan^2\varphi_2.\ d^2 = x_m^2 - d^2$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{x_m^2 - d^2}{d^2} = \sqrt{\frac{x_m^2}{d^2} - 1}$$

11 ***Les deux parties sont indépendantes:***

L'oscillateur harmonique est un oscillateur idéal, son évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence ne dépendant que des caractéristiques du système mécanique. L'importance de ce mode réside dans sa capacité de décrire l'évolution de tous système physique oscillant autour de sa position d'équilibre stable.

1- Etude dynamique:

On considère un ressort à spires non jointives et de constante de raideur» K et de masse négligeable suspendu à un support fixe. On suspend à l'extrémité libre de ressort un corps solide (S) de masse m. On représente l'allongement du ressort à l'équilibre de (S) par $\Delta\ell_0$ et on repère la position du centre d'inertie sur un axe Oy orienté vers le haut dont l'origine coïncide avec la position du centre d'inertie de (S) à l'équilibre.

On écarte (S) verticalement de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance $d = 2cm$ et on le libère sans vitesse initiale à un instant $t = 0$ choisi comme origine du temps.

Données : $\Delta\ell_0 = 10,0cm$, l'intensité de pesanteur $g = 9,81N.kg^{-1}$

1.1- Trouver, à l'équilibre, l'expression de K en fonction de m, g et $\Delta\ell_0$.

1.2- En appliquant la deuxième loi de Newton, établir que l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse y s'écrit sous la forme $\dfrac{d^2y}{du^2} + \dfrac{K}{m}y = 0$.

1.3- La solution de cette équation s'écrit sous la forme $y = y_m\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$; Déterminer la valeur de φ et de T_0.

1.4- On note F la tension du ressort. Choisir la bonne réponse: Quand l'abscisse $y > 0$, on a :

a- $F > mg$; b- $F = mg$; c- $F < mg$

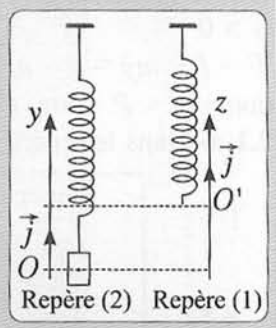
2- Etude énergétique:

On repère la position du centre du solide (S) à l'aide de deux repères:

Le repère 1: l'origine O' de l'axe coïncide avec l'extrémité libre du ressort (à vide) et l'axe $O'z$ est vertical et orienté vers le haut. On prend comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O'.

- Le repère 2 : l'origine O de l'axe coïncide avec la position du centre d'inertie du

solide (S) à l'équilibre et l'axe Oy est vertical et orienté vers le haut. On prend comme état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$ au point O. Pour les deux repères, on prend comme état de référence de l'énergie potentielle élastique $Epe = 0$ quand le ressort est à vide.



2.1- On écarte le solide (S) verticalement vers le bas d'une distance $d < \Delta\ell_0$ de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant $t = 0$ choisi comme origine du temps.

Écrire l'expression de l'énergie mécanique de l'oscillateur:

a- Dans le repère 1 en fonction de Z, m, k et v vitesse du centre d'inertie.

b- Dans le repère 2 en fonction de Y, m, k, $\Delta\ell_0$ et v vitesse du centre d'inertie.

c- Dans quel repère l'expression de l'énergie mécanique ne dépend pas de l'énergie potentielle?

2.2- On écarte verticalement (S) de sa position d'équilibre vers le bas d'une distance $d = 2cm$ et on le lance vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, le solide (S) effectue alors des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre d'amplitude $D = 7cm$.

Sachant que l'énergie mécanique de l'oscillateur se conserve;

Trouver l'expression de v_0 en fonction de g, $\Delta\ell_0$, d et D. Calculer v_0.

***Bac SM, rattrapage* 2013**

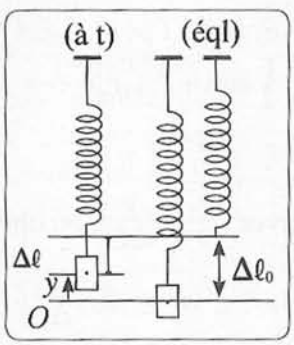
Solution

1.1- A l'équaibre: $\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0}$,

d'où $T_e = mg$

donc : $k = \dfrac{Te}{\Delta\ell_0} = \dfrac{mg}{\Delta\ell_0}$

1.2- Considérons une position à la date t, telle que $y > 0$: on a alors $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - y$



La deuxième loi de Newton donne:

$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

en utilisant Oy: $T - P = may = m\ddot{y}$

$k\Delta\ell - mg = m\ddot{y}$

$k(\Delta\ell_0 - y) - mg = m\ddot{y}$

$\underbrace{(k\Delta\ell_0 - mg)}_{=0} - ky = m\ddot{y}$, $\ddot{y} + \dfrac{k}{m}y = 0$

Ou encore $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k}{m}y = 0$

1.3- Conditions initiales:

$y(0) = -d = y_m \cos\varphi$;

et $V_0 = \dot{y}(0) = 0 = -\dfrac{2\pi}{T_0} y_m \sin\varphi$

Ceci donne $\sin\varphi = 0$, alors $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

Or $\cos\varphi = -\dfrac{d}{y_m} < 0$, d'où $\varphi = \pi(rad)$

Calcul de T_0 : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

La condition d'équilibre donne:

donc $\frac{m}{k} = \frac{\Delta\ell_0}{g}$; d'où:

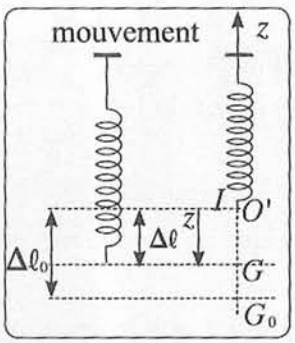
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell_0}{g}} = 0,63s$

1.4- D'après la question 1-2) on a pour $y > 0$

$F = P + m\ddot{y} = P - ky$

donc : $f < P = mg$. (Réponse c)

2.1-a- Dans le repère (1) Epp s'exprime:



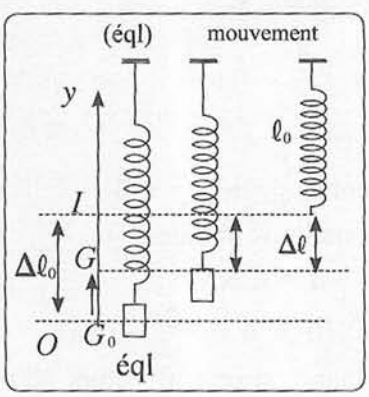
$Epp = mgz + cte = mgz$ car $Epp = 0$ pour $z = 0$

$Epe = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2, \Delta\ell = -z(z < 0)$

D'où: $Epe = \frac{1}{2}kz^2$

alors: $Em = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2$

2.1-b -



$Epp = mgy + c$;

$Epp = 0$ lorsque $y = 0$, donc $c = 0$, d'où $Epp = mgy$

$Epe = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + C$

On a : $Epe = 0$ lorsque $\Delta\ell = 0$ donc $C = 0$

et $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - y$

D'où : $Ep_e = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_0 - y)^2$

$Ep = Epp + Epe$

$Ep = mgy + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_0 - y)^2$

$Ep = mgy + \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 - k\Delta\ell_0 y + \frac{1}{2}ky^2$

$Ep = \left(\underbrace{mg - k\Delta\ell_0}_{0}\right) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2$

$Ep = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2$

Donc : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2$

2.1-c- C'est dans le repère (2) que l'énergie mécanique ne dépend pas de Epp.

2-2- Appliquons la conservation de l'énergie E_m dans le repère (2), entre les deux états suivants:

- Etat initial: $v = v_0$ et $y = -d$

- Etat final: $v = 0$ et $y = y_{max} = D$

$Ec(i) + Ep(i) = Ec(f) + Ep(f)$

$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = 0 + \frac{1}{2}kD^2$

$v_0^2 = \frac{k}{m}(D^2 - d^2)$

avec $\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta\ell_0}$, on obtient:

$v_0 = \sqrt{(D^2 - d^2).\frac{g}{\Delta\ell_0}}$

A.N: $v_0 = 0,664m.s^{-1}$

12 **Étude énergétique d'un oscillateur libre amorti**

L'objectif de cet exercice est l'étude d'un oscillateur mécanique constitué d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur $k = 20N.m^{-1}$ et un solide de masse $m = 200g$.

On néglige les frottements et on prend $g = 9,81N.kg^{-1}$

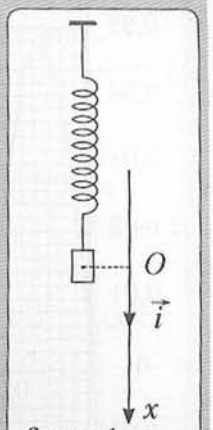


figure 1

1- Oscillations libres non amorties:

On repère la position du solide par l'abscisse x sur l'axe verticale $(O;\vec{i})$ orienté vers la bas . (fig 1). L'origine de l'axe est confondue avec G_0 position du centre d'inertie G à l'équilibre. A l'instant $t = 0$, on lance le solide avec une vitesse initiale vers le bas $\vec{v}_0 = v_o\vec{i}$ de norme $v_0 = 0,50m.s^{-1}$.

1.1- Trouver l'allongement $\Delta\ell_e$ du ressort à l'équilibre.

1.2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x au cours du temps.

1.3- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $x(t) = x_m\cos\left(\frac{2\pi.t}{T_0} + \varphi\right)$

Déterminer la valeur des constantes φ et x_m.

2- Energie de l'oscillateur:

Les états de référence de l'énergie sont:

- Energie potentielle de pesanteur: $E_{pp} = 0$ dans le plan horizontal contenant G_0;
- Energie potentielle élastique: $E_{pe} = 0$ quand le ressort n'est pas déformé.

2.1- Trouver l'expression de l'énergie potentielle de l'oscillateur en fonction de k, $\Delta\ell_e$, x, g et m.

2.2- Trouver, à partir de l'énergie mécanique, l'expression de la vitesse du centre d'inertie G au passage par la position de l'équilibre dans le sens positif en fonction de k, x_m et m.

3- Oscillations libres amorties:

L'enregistrement du mouvement de l'oscillateur (fig 2) à l'aide d'un oscillateur montre que l'amplitude des oscillations varie au cours du temps.

3.1 - Justifier la diminution de l'amplitude des oscillations.

3.2- La pseudo-période T dans le cas d'amortissement faible s'exprime par la relation $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu.T_0}{4\pi.m}\right)^2}}$.

Déterminer, à l'aide du graphe, le coefficient d'amortissement μ.

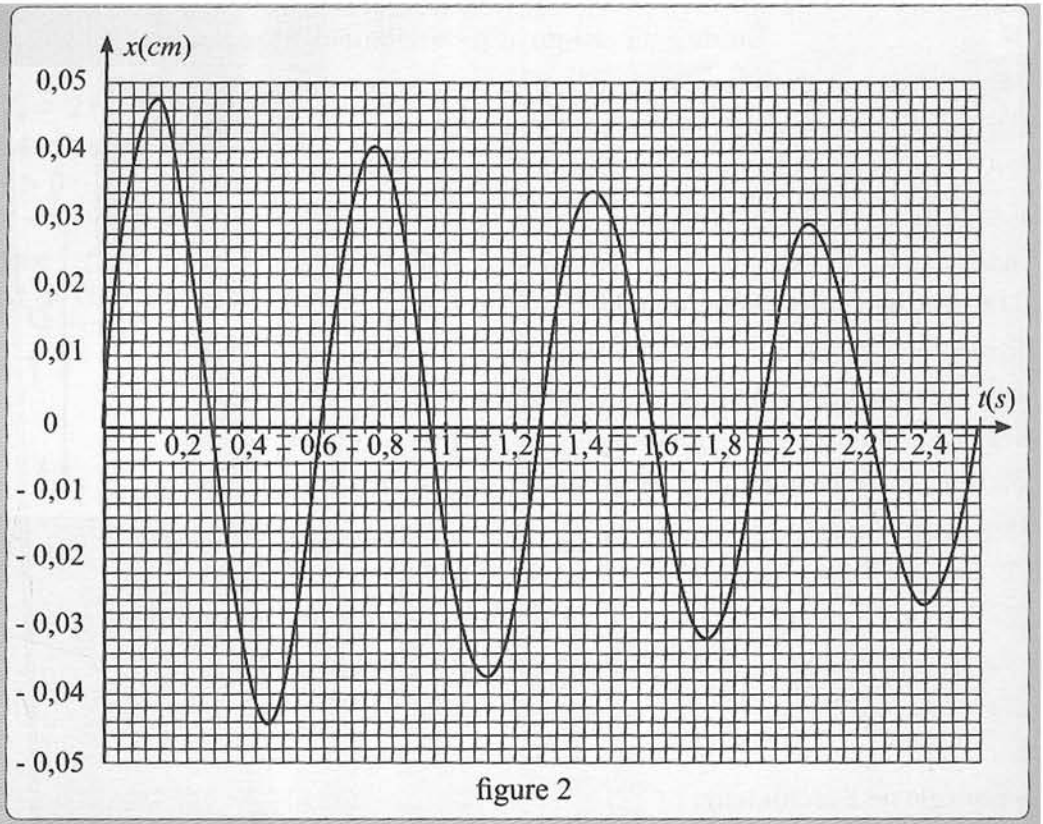


figure 2

***Bac Sc. Math, rattrapage* 2014**

Solution

1.1- A l'équilibre, les deux forces $\vec{mg}$ et $\vec{T}_e$ sont égales en intensité:

$T_e = k\Delta\ell_e = mg$, d'où $\Delta\ell_e = \dfrac{mg}{k}$

$\Delta\ell_e = \dfrac{0,2.9,81}{20} = 9,81cm$

1.2- En état de mouvement : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

Par projection sur ox : $P - T = ma_x = m\ddot{x}$;

$\Delta\ell = \Delta\ell_e + x \Rightarrow mg - \Delta\ell_e - kx = m\ddot{x}$;

d'où : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

1.3- Déterminons φ :

Les conditions initiales sont: $x(0) = 0$

et $v_x(0) = v_0 = 0,50m.s^{-1}$

L'équation horaire $x(t)$ donne à $t = 0$: $x(0) = x_m\cos\varphi$; d'où $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}(rad)$

- Et, l'équation

$\dot{x}(t) = -\dfrac{2\pi}{T_0}x_m\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

donne:

$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_0 = -\dfrac{2\pi}{T_0}x_m\sin\varphi$ (1)

v_0 étant positif, donc $\sin\varphi < 0$

D'où : $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}rad$

Déterminons x_m à partir de l'équation (1)

$v_0 = -\dfrac{2\pi}{T_0}x_m\sin\varphi = \dfrac{2\pi}{T_0}x_m$

D'où $x_m = \dfrac{v_0.T_0}{2\pi} = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$x_m = 0,50\sqrt{\dfrac{0,2}{10}} = 5.10^{-2}m = 5cm$

2.1- $Ep = Epp + Epe$;

$Epp = mgz + cte = -mgx + cte$

Epp est nulle au niveau horizontal de 0, d'où $cte = 0$

donc : $Epp = -mgx$

$Epe = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + C' = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$,

car $Epe = 0$ pour $\Delta\ell = 0$

On a : $\Delta\ell = \Delta\ell_e + x$ pour un état $(x > 0)$

donc : $Ep = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_e + x)^2 - mgx$

2.2- Au passage par la position d'équilibre à position (1) à la vitesse $\vec{v}$ vers le bas $(v_x = v)$

$E_m(1) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_e^2$

Lorsque le solide s'arrête à $x_2 = x_m$:

$E_m(2) = E_C(2) + Ep(2)$

$E_m(2) = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_e + x_m)^2 - mgx_m$

La conservation de E_m s'écrit :

$E_m(1) = E_m(2)$, ou encore:

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_e^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_e + x_m)^2 - mgx_m$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 + k\Delta\ell_e x_m - mgx_m$

En tenant compte de la condition d'équilibre :

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$; d'où $v = x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$

3.1- L'amplitude diminue à cause des frottements

3.2- D'après le graphe on a $T = 0,64s$

- La période propre est

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,628s$

- L'expression de T permet d'obtenir:

$\sqrt{1 - \left(\frac{\mu T_0}{4\pi m}\right)^2} = \frac{T_0}{T}$;

Ou encore : $\left(\frac{\mu T_0}{4\pi m}\right)^2 = 1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2$

D'où : $\mu = \frac{4\pi m}{T_0}\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2}$

$\mu = \frac{4\pi.0,20}{0,628}\sqrt{1 - \frac{0,628}{0,64}} \approx 0,77kg.s^{-1}$

13

Le pendule élastique est un système mécanique effectuant un mouvement oscillaire autour de sa position d'équilibre stable.

Cet exercice a pour objectif la détermination de certaines grandeurs de ce pendule à l'aide d'une étude énergétique.

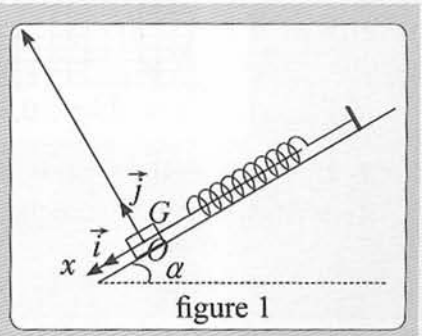


figure 1

Un pendule élastique est formé d'un solide (S), de centre d'inertie G et de masse $m = 100g$, fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe.

Le solide (S) peut glisser sans frottement, sur la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal (fig 1).

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère orthonormé $R(O;\vec{i};\vec{j})$ lié au repère terrestre, considérée galiléen. On repère la position de G à l'instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O;\vec{i})$. A l'équilibre G est confondu avec O.

On prend $\pi^2 = 10$

1- Exprimer à l'équilibre, l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort, en fonction de m, k, α et g.

2- On écarte (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, d'une distance X_0 et on lui communique à un instant $t = 0$, une vitesse initiale $\vec{V}_0 = -V_0.\vec{i}$.

2.1- Le plan horizontal passant par G à l'équilibre est pris comme état de référence $(Epp = 0)$ de l'énergie potentielle de pesanteur. Et, l'état d'équilibre où le ressort est allongé est pris comme état de référence de l'énergie potentielle élastique $Ep_e(0) = 0$.

Trouver à un instant t, l'expression de l'énergie potentielle $Ep = Epp + Epe$, de l'oscillateur en fonction de k et x.

2.2- À l'aide d'une étude énergétique, trouver l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x.

2.3- La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

T_0 étant la période propre de l'oscillateur.

La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'énergie potentielle de l'oscillateur en fonction du temps.

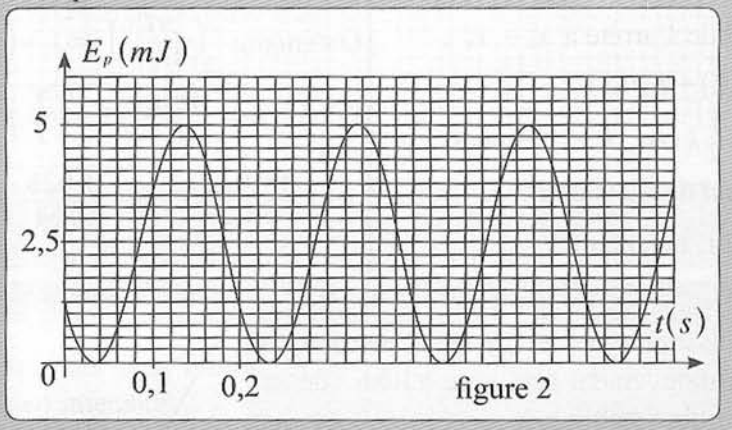


figure 2

2.3.1- Trouver les valeurs de k, X_m et φ.

2.3.2- À l'aide d'une énergétique, trouver l'expression de V_0 en fonction de k, m et X_m.

***Bac SM, Juin* 2015**

Solution

1- Le solide (S) est soumis à trois forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$.

À l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_e = \vec{0}$

en utilisant l'axe $(O;\vec{i})$:

$P\sin\alpha + 0 - T_e = 0$

Soit $mg\sin\alpha - k\Delta\ell_0 = 0$

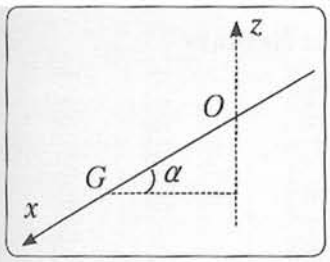
Donc : $\Delta\ell_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k}$

2.1- L'énergie Epp s'exprime par:

$Epp = mgz + C$;

l'axe z est orienté vers le haut.

Le schéma suivant donne:



$\sin\alpha = \frac{OH}{OG} = \frac{-z}{x}$; $(z < 0)$

Donc $z = -x\sin\alpha$

Alors $Epp = -mg.x + C$

D'après le choix du texte: $Epp(x = 0) = 0$,

donc $C = 0$.

D'où $Epp = -mg\sin\alpha.x$

L'énergie potentielle élastique s'écrit:

$Epe = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + C'$

À l'équilibre : $Epe = 0$ et $\Delta\ell = \Delta\ell_0$

donc : $C' = -\frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2$

À une date où G a pour abscisse x

$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$

Rq : Ce résultat ne change pas si $x < 0$

$Epe = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + x)^2 - \frac{1}{2}K\Delta\ell_0^2$

$= \frac{1}{2}k(x^2 + 2\Delta\ell_0.x) = \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta\ell_0.x$

$= \frac{1}{2}kx^2 + mg\sin\alpha.x$

$Ep = Epe + Epp$

$Ep = \frac{1}{2}kx^2 + mg\sin.x - mg\sin.x$

$Ep = \frac{1}{2}kx^2$

2-2- $Em = E_C + Ep = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

Les oscillations ne sont pas amorties, l'énergie mécanique du système se conserve.

$\frac{dEm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$

On trouve $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

2.3.1-

$Ep(t) = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KX_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

La courbe (2) fournit $\begin{cases} Ep(0) = 1,25mJ \\ Ep_{max} = 5mJ \end{cases}$

Or $Ep(0) = \frac{1}{2}KX_m^2.\cos^2\varphi$ (1)

$Ep_{max} = \frac{1}{2}KX_m^2$ (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{Ep(0)}{Ep(\max)} = \frac{1,25}{5} = \frac{1}{4}$

D'où : $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$ et $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}(rad)$

La vitesse initiale est telle que $\vec{V}_0 = -V_0\vec{i}$,

C'est-à-dire $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 < 0$

ou encore $-\frac{2\pi}{T_0}X_m\sin\varphi < 0$

D'où : $\sin\varphi > 0$

On déduit que $\varphi = \frac{\pi}{3}(rad)$

La période de l'énergie Ep est:

$T = \frac{T_0}{2}$, d'où : $T_0 = 2T = 0,4s$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, $K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$

$K = \frac{4\pi^2.0,1}{(0,4)^2} = 25N.m^{-1}$

$Ep(\max) = \frac{1}{2}Kx_m^2$, $X_m = \sqrt{\frac{2Ep(\max)}{K}}$

$X_m = \sqrt{\frac{2.5.10^{-3}}{25}} = 2cm$

2.3.2- Comme E_m se conserve, on peut écrire:

$E_m(t_x = X_0) = E_m(x = X_m)$

Comme $E_C(x = X_m) = 0$;

$\frac{1}{2}KX_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}KX_m^2 + 0$

Ce qui donne : $V_0^2 = \frac{K}{m}(X_m^2 - X_0^2)$ (1)

- D'après le graphe, on a : $t = 0$

$Ep(0) = \frac{1}{4}Ep(\max)$

sont : $\frac{1}{2}KX_0^2 = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}KX_m^2$

D'où : $X_0^2 = \frac{1}{4}X_m^2$ (2)

Vu ce résultat, la relation (1) devient:

$V_0^2 = \frac{K}{m}\left(X_m^2 - \frac{1}{4}X_m^2\right) = \frac{3}{4}\frac{K}{m}X_m^2$

$v_0 = \frac{X_m}{2}\sqrt{\frac{3K}{m}}$

14 Etude du mouvement d'un pendule élastique

Un oscillateur mécanique vertical est constitué d'un solide S de masse $m = 200g$ et d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k.
L'une des extrémités du ressort est attachée à un support fixe, et l'autre porte le corps S (fig 1)
On étudie le mouvement du centre d'inertie G du corps S dans le repère $\mathcal{R}(O;\vec{k})$ lié à la terre et on le considère comme galiléen.
On détermine la position de G à une date t par la côte z sur l'axe $(O;\vec{k})$.
A l'équilibre, la position de G coïncide avec O.
On prend $\pi^2 = 10$.

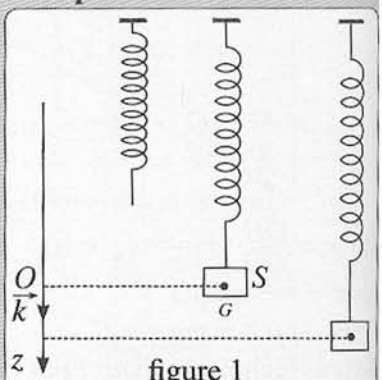


figure 1

1- Les frottements sont négligés:.
On écarte S de sa position d'équilibre, verticalement, et on lui communique à la date $(t = 0)$, une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_{oz}\vec{k}$.
Sur la figure (2) sont portées les variations de la cote $z(t)$ du centre d'inertie G en fonction du temps.

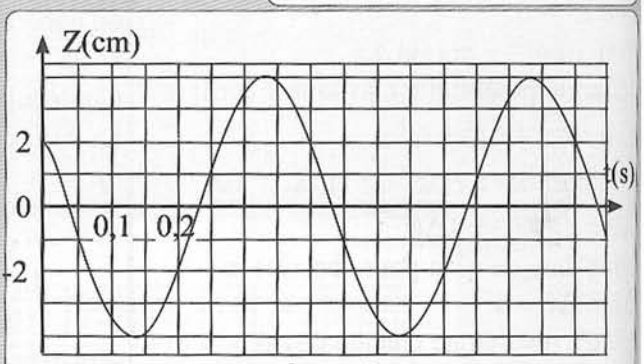


figure 2

1.1- Déterminer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort à l'équilibre, en fonction de m, k et g.
1.2- Établir l'équation différentielle vérifiée par z.
1.3- L'équation différentielle admet comme solution $z = z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$, T_0 étant la période propre de l'oscillateur.
Déterminer k et v_{oz}.

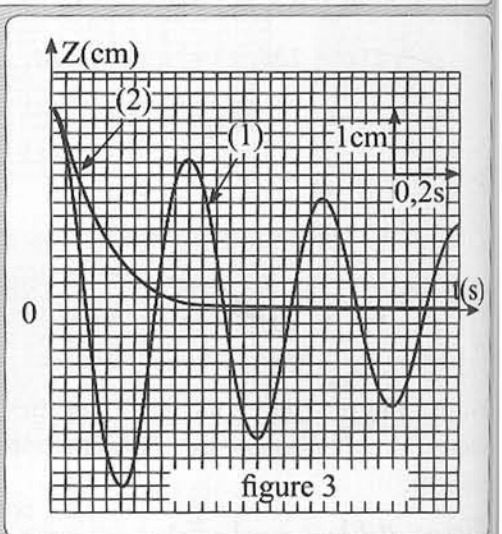


figure 3

2- Les frottements ne sont pas négligés:
On réalise deux expériences en utilisant deux liquides différents.
On introduit l'oscillateur dans chacun de ces liquides, on écarte S verticalement de sa position d'équilibre d'une distance z_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $(t = 0)$. Les courbes (1) et (2) représente les variations de $z(t)$ cote de G lorsque le solide oscille dans chacun des deux liquides.
2.1- Faire attribuer à chacune des deux courbes le type d'oscillations qui lui

convient.

2.2- On choisit l'énergie potentielle de pesanteur nulle à l'origine O et on choisit l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort n'est pas déformé.

- En considérant les oscillations de la courbe (1) :

2.2.1- Trouver, à la date t l'expression de l'énergie potentielle $Ep = Epp + Epe$, en fonction de k, z et $\Delta\ell'_0$, allongement du ressort à l'équilibre dans le liquide.

2.2.2- Calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 0,4s$.

Bac SM, 2016 rattrapage

Solution

1.1- A l'équilibre : $P = T_e = k\Delta\ell_0$, d'où $\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}$.

1.2- La deuxième loi de Newton s'écrit, à une date t où l'allongement du ressort est $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + z$: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$.

Par projection sur $(O;\vec{k})$ on a:

$P - T = ma_z = m\ddot{z}$

$mg - k(\Delta\ell_0 + z) = m\ddot{z}$

or $mg - k\Delta\ell_0 = 0$, donc : $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$

1.3- Graphiquement, on lit

$T_0 = 8div = 0,4s$

En dérivant $z(t)$ on obtient :

$$\dot{z}(t) = V_z = -\frac{2\pi}{T_0}Z_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{z}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 z(t)$$

cette dernière expression, comparée à l'équation différentielle, donne $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

D'où:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = \frac{4.10.0,200}{(0,4)^2} = 50.N.m^{-1}$$

- On exploite les conditions initiales:

(a): $z(0) = z_m \cos\varphi$;

(b): $V_z(0) = -\frac{2\pi}{T_0}z_m \sin\varphi$

La courbe (2) donne : $Z(0) = 2cm$;

$z_m = 4cm$ et $v_z(0) = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 < 0$

Donc: $\cos\varphi = \frac{z(0)}{z_m} = \frac{1}{2}$

d'où $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}rad$

or $v_z(0) < 0$, on a d'après (b) $\sin\varphi > 0$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{3}rad$

$$v_z(0) = -\frac{2\pi}{T_0}z_m \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_z(0) = \frac{2\pi}{0,4}.4.10^{-2}.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$v_z(0) = -0,54m.s^{-1}$$

2.1- Les oscillations sont libres et pseudo-périodiques dans le cas de la figure (1) et elles sont libres et apériodiques dans le cas de la figure (2).

2.2.1- $Epp(z) = -mgz + cte$,

$Epp(0) = 0$ lorsque $z = 0$ d'où:

$Epp(z) = -mgz$

$Epe = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + cte = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$

car $cte = 0$

$\Delta\ell = \Delta\ell'_0 + z$, $z > 0$

$$Ep = -mgz + \frac{1}{2}k(\Delta\ell'_0 + z)^2$$

$$= -mgz + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell'_0)^2 + k\Delta\ell'_0 z$$

Si la condition d'équilibre est telle que $mg = k\Delta\ell'_0$ résultat obtenu en négligeant la poussée d'archimède, alors:

$$Ep = \frac{1}{2}k[(\Delta\ell'_0)^2 + z^2]$$

2.2.2- À la date $t = 0$ on a $E_C = 0$

Graphiquement:

$z_1 = 3cm$, $Ep(1) = \frac{1}{2}k[\Delta\ell'^2 + z_1^2]$ et $E_C = 0$

À la date $t_2 = 0,4s$ on a $z_2 = 2,2.10^{-2}m$

$V_z(t_2) = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_2} = 0$ car la tangente est horizontale

Donc: $E_p = \left(\frac{1}{2}k.[\Delta\ell'^2_0 + z_2\right]$ et $E_C(2) = 0$

$\underset{1\to 2}{\Delta E_m} = \underset{1\to 2}{\Delta E_p} = \frac{1}{2}k[z_2^2 - z_1^2]$

$\Delta E_m = \frac{1}{2}.50[(2,2)^2 - 3^2].10^{-4}$

$\Delta E_m = -10^{-2}J$

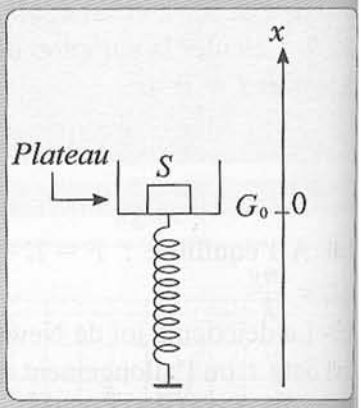
15

On considère un ressort à spires non jointives, de masse négligeable de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k.

Ce ressort est fixé verticalement par son extrémité inférieure à un support fixe et par son extrémité supérieure à une plateau de masse M.

On pose sur le plateau un solide (S) de masse m.

À l'équilibre, le centre d'inertie G_0 du système formé par le plateau et le solide (S) coïncide avec le centre O du repère $(O;\vec{i})$ parallèle à l'axe du ressort.



Données : $k = 100N.m^{-1}$; $M = 300g$; $m = 200g$ et $g = 10.m.s^{-2}$

On néglige tous les frottements

1- En appliquant la deuxième loi de Newton dans le repère $(O;\vec{i})$ lié à la terre et supposé galiléen, montrer que l'équation différentielle vérifiée par x abscisse de G à la date t, s'écrit sous la forme : $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$

w_0 : constante à exprimer en fonction de k, M et m.

2- On écarte le système de sa position d'équilibre d'une amplitude X_m, il prend alors un mouvement sinusoïdal d'équation horaire : $x(t) = X_m.\cos(w_0 t)$.

2.1- En utilisant la 2ème loi de Newton, montrer que l'intensité de la force $\vec{R}$, exercée par le plateau sur le solide (S), à une date t, s'exprime par : $R = m\left(g - \frac{k}{M+m}x\right)$.

2.2- Dans le cas où l'amplitude est $X_m = 2cm$, calculer :

a- R_{max} la valeur maximale de l'intensité R.

b- R_{min}, la valeur minimale de cette intensité.

2.3- Calculer R_{min} si $X_m = 6cm$. Que remarquez vous?

2.4- Dans quel intervalle doit-on choisir les valeurs de l'amplitude X_m pour que le solitde ne perde pas contact avec le plateau?

Solution

1- Système étudié: plateau+(S)

$\vec{P} + \vec{T} = (M+m).\vec{a}_G$

$\vec{T} = -K.\overrightarrow{IG}$

or $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG}$

Donc : $\vec{P} - K\overrightarrow{IO} - K\overrightarrow{OG} = (M+m)\vec{a}_G$

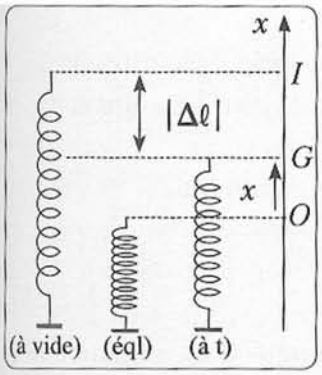
La condition d'équilibre donne

$\vec{P} - K\overrightarrow{IO} = \vec{O}$

D'où : $-k.\overrightarrow{OG} = (M+m)\vec{a}_G$

$-k.x\vec{i} = (M+m)\ddot{x}.\vec{i}$

$-k.x = (M+m)\ddot{x}$



$\ddot{x}+w_0^2.x=0$; $w_0^2=\dfrac{k}{M+m}$

Autre méthode :

$P-T=m_{aG}=m\ddot{x}$; $T=k|\Delta\ell|$

$|\Delta\ell|=IO-OG=|\Delta\ell_{éq}|-x$

Donc : $\underbrace{p-k|\Delta\ell_{éq}|}_{=0}-kx=m\ddot{x}$

2.1- Le solide (S) est soumis à deux forces ; son poids et la force $\vec{R}$ exercée par le plateau:

$$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$$

en utilisant l'axe $(O;\vec{i})$, on a:

$-p+R=ma_x=m.\ddot{x}$

L'accélération du mouvement de (S) est celle des oscillations établies dans la question (1) : c'est-à-dire : $\ddot{x}=-w_0^2.x$;

$R=mg+m\ddot{x}$

D'où : $R=m(g+\ddot{x})=m(g-w_0^2.x)$

$$R=m\left(g-\frac{k}{M+m}x\right)$$

2.2.a- $R_{max}=m\left(g+\dfrac{k}{M+m}X_m\right)=2,8N$

2.2.b- $R_{min}=m\left(g-\dfrac{k}{M+m}X_m\right)=1,2N$

2.3-

$R_{min}=0,2\left(10-\dfrac{100}{0,5}6.10^{-2}\right)=-0,4N$

Ceci n'est pas possible, le solide n'est plus en contact avec le plateau dans cette position sur la trajectoire.

2.4- $R_{min}>0$

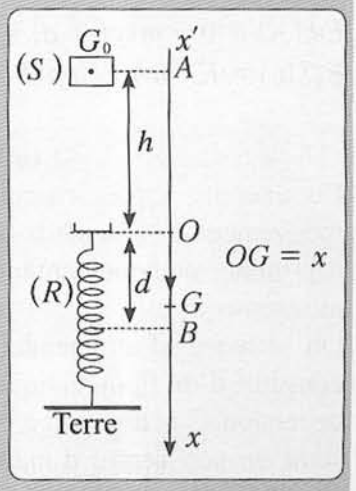
$g-\dfrac{k}{M+m}X_m>0$

$X_m<\dfrac{(M+m)g}{k}=5cm$

Pour que (S) reste en contact avec le plateau, à chaque instant pendant les oscillations, il faut que l'amplitude soit dans l'intervalle : $0<X_m<5cm$.

16

Un ressort de masse négligeable est fixé sur un support horizontal, son extrémité supérieure est soudée à un plateau de masse négligeable (figure).



1- On pose sur le plateau un solide (S) de masse $m=200g$, le ressort se comprime d'une distance d_0 lorsque le solide est en équilibre.

On donne $g=10(S.I.)$ et on prend $\pi^2=10$.

1.1- On crée les oscillations du système autour de sa position d'équilibre, on mesure la durée de 10 oscillations et on trouve $\Delta t=4s$.

Sachant que la période propre des oscillations est exprimée par $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Calculer k.

1.2- Déterminer d_0 .

2- On arrête les oscillations, on enlève (S) et on l'abandonne sans vitesse initiale à

partir d'un point A situé à la hauteur h du plateau.
On considère que le solide reste attaché au plateau, après l'avoir touché.
Le ressort se comprime d'une distance maximale d, dans un autre état d'équilibre repéré par le point B.
En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, établir que :

$$d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

Calculer d dans le cas où $h = 12cm$.
On prend $Ep_e = 0$ lorsque le ressort est à vide et $Epp = 0$ au niveau du point B.
On néglige les dimensions du solide (S).

Solution

1.1- $k = 50N.m^{-1}$

1.2- $d_0 = \frac{mg}{k} = 4cm$

2- $E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 + c; c = 0$,

$Epp = -mgx + c'; E_{pp} = 0$ à $x = d$,

donc $c' = mgd$,

alors $E_{pp} = -mgx + mgd$

L'énergie cinétique et l'énergie Epp, du ressort sont nulles.

Au point A :

$Em(A) = E_C(A) + Epp(A) + Epe(A)$

$Em(A) = 0 + m(gh + d) + 0$

$E_m(B) = E_C(B) + Epp(B) + Epe(B)$

$E_m(B) = 0 + 0 + \frac{1}{2}kd^2$ (B)

L'égalité $E_m(A) = E_m(B)$

donne : $+mgh + mgd = \frac{1}{2}kd^2$

soit $-\frac{1}{2}kd^2 + mgd + mgh = 0$

ou bien : $d^2 - \frac{2mg}{k}d - \frac{2mgh}{k} = 0$

Cette équation du 2e degré en d a comme solutions : $d = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mg}{k}h}$

Puisque $d > 0$, la solution à retenir est :

$$d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mg}{k}h}$$

AN : $d = 14,6cm$

17 **Etude du mouvement d'un pendule de torsion**

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement d'un pendule de torsion et de déterminer quelques grandeurs liées à ce mouvement.

On dispose d'un pendule de torsion constitué d'un fil métallique, de constante de torsion C et d'une tige MN homogène fixée en son centre d'inertie G à l'une des extrémités du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point P d'un support (figure 1).

La tige peut effectuer un mouvement de

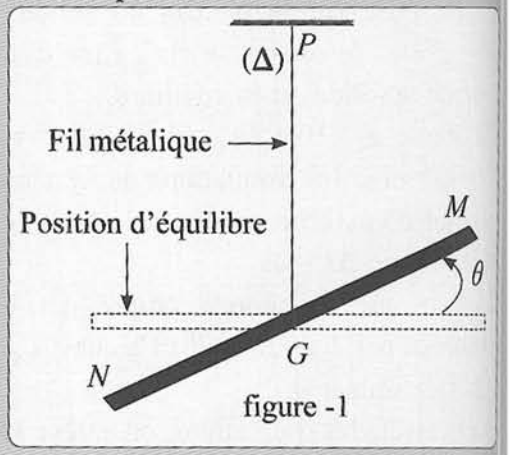


figure -1

rotation sans frottement autour de l'axe (Δ) confondu avec le fil métallique. Le moment d'inertie de la tige MN par rapport à cet axe est $J_\Delta = 4.10^{-4} kg.m^2$.

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la tige MN à chaque instant par son abscisse angulaire θ par rapport à sa position d'équilibre stable (figure 1).

On choisit la position d'équilibre stable comme référence de l'énergie potentielle de torsion $(E_{pt} = 0)$ et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pt} = 0)$.

On prendra $\pi^2 = 10$.

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{4} rad$. L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe de la figure 2 représentant les variations de la vitesse angulaire de l'oscillateur en fonction du temps.

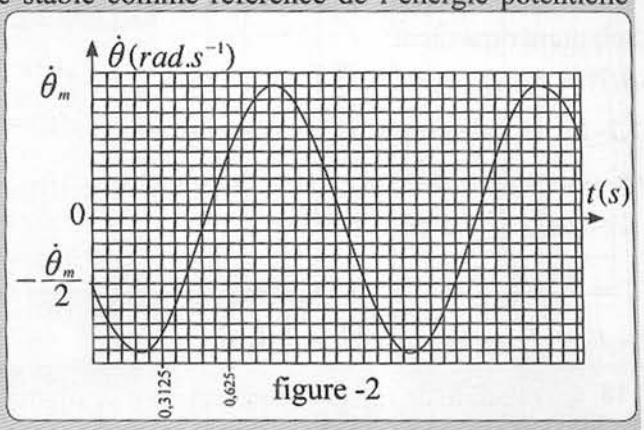


figure -2

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

2- La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme:
$\theta(t) = \theta_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.

2.1- Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire, exprimée en $rad.s^{-1}$ s'écrit : $\theta(t) = 4\sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$.

2.2- Déterminer la valeur de la constante de torsion C du fil.

3- Trouver la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates $t = 0$.

Bac SM, Juin 2016

Solution

1-

$\sum \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta . \ddot{\theta}$

$0 + 0 - C.\theta = J_\Delta . \ddot{\theta}$, soit $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$.

2.1- Graphiquement $T_0 = 1,25s$ et $\dot{\theta}(0) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$.

D'après la solution, on déduit $\dot{\theta}(t)$:

$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m . \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$.

La vitesse angulaire maximale est $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0}\theta_m$.

La condition initiale $\dot{\theta}(0) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$ donne :

$-\frac{\pi}{T_0}\theta_m \sin\varphi = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$;

ou encore $\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\varphi = \frac{2\pi}{2T_0}\theta_m$

$\sin\varphi = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\varphi = \frac{\pi}{6} rad$.

$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

$\dot{\theta}(t) = \frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left[\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \pi\right]$.

Soit numériquement:

$\dot{\theta}(t) = 4\sin\left(1,6\pi t + 7\frac{\pi}{6}\right)$.

2.2- La période propre T_0 peut être déduite en utilisant la dérivée $\ddot{\theta}(t)$; on obtient $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{c}}$, d'où $C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2}$.

$C = \frac{4\pi^2.4.10^{-4}}{(1,25)^2} \simeq 1.10^{-2} N.m.rad^{-1}$.

3- $E_m = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2$.

Pour simplifier, on pose $\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = \alpha$.

$E_m = \frac{1}{2}C.\theta_m^2.\cos^2\alpha + \frac{1}{2}J_\Delta.\left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}\right)^2.\theta_m^2.\sin^2\alpha$

$= \frac{1}{2}C.\theta_m^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}C.\theta_m^2$

$E_m = \frac{1}{2}.10^{-2}.\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 3,12.10^{-3} J$.

$E_{pe}(0) = E_m - E_c(0) = E_m - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(0)$.

$E_p(0) = E_m - \frac{1}{2}J_\Delta.\left(-\frac{\dot{\theta}_m}{2}\right)^2$

$E_p(0) = E_m - \frac{1}{2}J_\Delta.\left(\frac{\pi}{T_0}\theta_m\right)^2$

$E_p(0) = 3,12.10^{-3} - \frac{1}{2}.4.10^{-4}.\frac{10\pi^2}{(1,25)^2.16}$

$E_p(0) \simeq 2,32.10^{-3} J$

18 Le pendule de torsion représenté sur la figure 1 est constitué d'un fil de torsion de constante de torsion C_0 et de longueur ℓ,

et d'une tige homogène AB par son milieu au fil de torsion en un point O qui divise le fil en deux parties :

- Une partie OM de longueur z et de constante de torsion C_1;
- Une partie ON de longueur $\ell - z$ et de constante de torsion C_2.

Lorsque le fil est tordu d'un angle θ, la partie OM exerce sur la tige un couple de torsion de moment $M_1 = -C_1\theta$, et la partie ON exerce sur la tige un couple de torsion de moment $M_2 = -C_2\theta$.

On exprime la constante de torsion C d'un fil de torsion de longueur L par la relation $C = \frac{k}{L}$ avec k une constante qui dépend du matériau constituant le fil de torsion et du diamètre de ce fil.

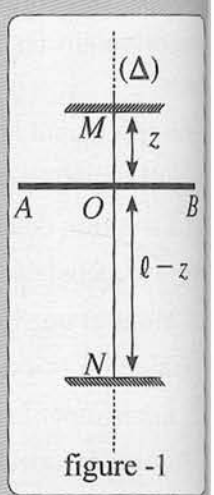


figure -1

J_Δ représente le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ) confondu avec le fil de torsion.

Au début le fil de torsion est non tordu et la tige AB est horizontale.

On fait tourner la tige AB autours de l'axe (Δ) d'un angle θ_m de sa position d'équilibre stable et on l'abandonne sans vitesse initiale, elle effectue alors des oscillations dans le plan horizontal.

On repère la position de la tige AB à une date t par l'abscisse angulaire θ que fait la tige à cet instant avec la droite horizontale confondue avec la position d'équilibre de la tige.

On néglige tous les frottements.

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation, montrer que l'équation différentielle du mouvement de ce pendule s'écrit:

$\ddot{\theta}+\frac{C_0.\ell^2}{J_\Delta.z.(\ell-z)}.\theta=0$.

2- Trouver l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que la solution de l'équation différentielle soit : $\theta=\theta_m.\cos\left(\frac{2\pi.t}{T_0}\right)$.

3- La courbe de la figure 2 représente la variation de l'accélération angulaire de la tige en fonction de l'abscisse angulaire θ dans le cas où $z=\frac{\ell}{2}$.

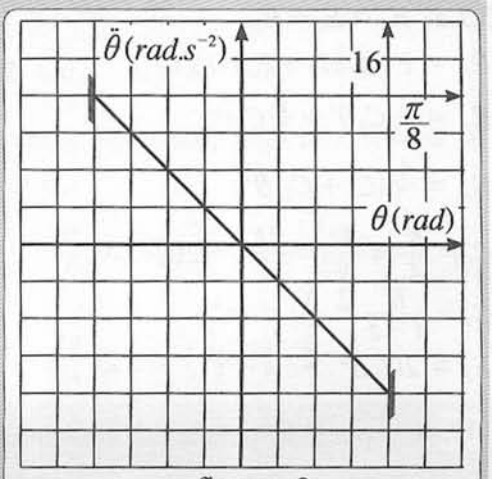


figure - 2

3.1- Déterminer la valeur de T_0 dans ce cas.

3.2- On choisit le plan horizontal qui contient la tige AB comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur et on choisit comme état de référence de l'énergie potentielle de torsion la position d'équilibre de la tige où $\theta=0$.

a- Déterminer dans le cas où $z=\frac{\ell}{2}$, l'expression de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur à un instant t en fonction de J_Δ, C_0, θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la tige AB.

b- Sachant que $E_m=4.10^{-3}J$. Calculer C_0. On prend $\pi^2=10$.

Bac SM, rattrapage 2012

Solution

1- La tige AB est soumisse à cinq actions : son poids, les deux forces dus aux fils OM et ON et les couples de torsions dus à ces deux fils.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})+\mathcal{M}(\vec{R}_1)+\mathcal{M}(\vec{R}_2)+\mathcal{M}_c(1)+\mathcal{M}_c(2)=J_\Delta.\ddot{\theta}$.

$\vec{P}$, $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ sont verticales et passant par (Δ), donc leur moment est nul.

$\mathcal{M}_c(1)=-C_1.\theta$ et $\mathcal{M}_c(2)=-C_2.\theta$.

d'où : $C_1-(C_1+C_2)=\theta=J_\Delta.\ddot{\theta}$.

Par ailleurs, $C_1=\frac{K}{OM}=\frac{K}{z}$ et $C_2=\frac{K}{\ell-z}$.

$J_\Delta.\ddot{\theta}+\left(\frac{K}{z}+\frac{K}{\ell-z}\right)\theta=0$.

$J_\Delta.\ddot{\theta}+\frac{K.\ell}{z(\ell-z)}\theta=0$.

or : $\frac{K}{\ell}=C_0$, d'où : $K=\ell.C_0$.

$J_\Delta.\ddot{\theta}+\frac{C_0.\ell^2}{z(\ell-z)}\theta=0$.

$\ddot{\theta}+\frac{C_0.\ell}{J_\Delta.z(\ell-z)}\theta=0$.

2- Les dérivations de $\theta(t)$ permettent d'avoir: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta.z(\ell-z)}{C_0.\ell^2}}$.

3.1- L'équation différentielle peut s'écrire :

$\ddot{\theta}=-A.\theta$

avec : $A=\frac{C_0.\ell^2}{J_\Delta.z(\ell-z)}$.

Graphiquement:

$-A=\frac{\Delta\ddot{\theta}}{\Delta\theta}=\frac{-32-0}{\frac{\pi}{4}-0}\simeq-40,7s^{-2}$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} = 0,98s$.

3.2.a- $E_m = E_c + E_{pt}$

$E_{pt} = E_p(OM) + E_p(ON)$

$E_{pt} = \frac{1}{2}C_1\theta^2 + \frac{1}{2}C_2\theta^2$

$E_{pt} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\theta^2$

$C_1 = \frac{K}{z} = \frac{K}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2K}{\ell} = 2C_0$

$C_2 = \frac{K}{\ell - z} \overset{\frac{\ell}{2}}{=} \frac{K}{\frac{\ell}{2}} = 2C_0$

$E_{pt} = 2C_0.\theta^2$

Donc : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + 2C_0.\theta^2$.

b- $E_m = cte = 4.10^{-3}J$.

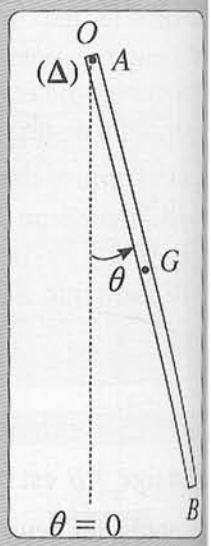
Les oscillations sont sinusoïdales d'amplitude θ_m, alors la vitesse s'annule lorsque $\theta = \pm\theta_m$.

donc : $E_m = 0 + 2.C_0.\theta_m^2$.

D'où : $C_0 = \frac{E_m}{2.\theta_m^2}$.

$\theta_m = \frac{\pi}{4}rad$, $C_0 = 3,2.10^{-3}N.m.rad^{-1}$.

19 Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène AB de masse m et de longueur ℓ, mobile sans frottement, autour d'un axe fixe et horizontale (Δ) passant par son extrémité A.



Les positions de la tige sont repérées à l'aide de l'abscisse angulaire θ, à partir de la position d'équilibre stable (voir figure).

On écarte la tige de la position $(\theta = 0)$ d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{20}rad$, et l'abandonne de cette position à une date prise comme origine du temps $t = 0$.

Données :

- Moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) $J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$:
- Intensité de la pesanteur : $g = 10N.kg^{-1}$
- L'action de l'air est négligée.

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, dans la cas des oscillations faibles $(\sin\theta \approx \theta)$, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la tige s'écrit : $\ddot{\theta} + \frac{3}{2}.\frac{g}{\ell}.\theta$.

2- Sachant que cette équation différentielle admet comme solution:

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right);$$

exprimer la période T_0 en fonction de ℓ et g.

3- Au passage de la tige par sa position d'équilibre stable, le vecteur accélération de son centre d'inertie G est noté $\vec{a}_0$.

3.1- Montrer que $\vec{a}_0$ est centripète.

3.2- Calculer sa norme a_0.

4- Quelle longueur ℓ' doit avoir un pendule simple, synchrone au pendule pesant faisant l'objet de cette étude? On exprimera ℓ' en fonction de ℓ.

Solution

1- La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à la tige, dans un repère galiléen (terrestre) s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta.\ddot{\theta} = \frac{1}{3}m\ell^2.\ddot{\theta}.$$

On a: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -P.AH$

$$= -mg.AG.\sin\theta$$

D'où : $-mg.\frac{\ell}{2}.\sin\theta = \frac{1}{3}m\ell^2.\ddot{\theta}.$

Les oscillations sont de faibles amplitudes :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0 \quad (1)$$

2- On dérive $\theta(t)$ et on obtient:

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad (2);$$

et $\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ (3).

Cette dernière expression s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta = 0;$$

et par analogie avec (1) on a:

$$\frac{3g}{2\ell} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

d'où : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$.

3.1- Le mouvement de G étant circulaire, de rayon $r = \frac{\ell}{2}$, les composantes de $\vec{a}_G$ dans la base de Frenet sont :

$a_T = \dot{v} = r\ddot{\theta}$ et $a_N = \frac{v^2}{r} = r.\dot{\theta}^2$.

Au passage par la verticale on a : $\theta = 0$.

Et, en revenant à l'équation différentielle :

$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2\ell}\theta = 0$, d'où : $a_T = 0$.

Donc : $\vec{a}_0 = \vec{a}_N$.

3.2- On a : $a_0 = a_N = r\dot{\theta}_0^2 = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}_0^2$.

D'après les conditions initiales on a : $\varphi = 0$.

$$\dot{\theta} = -\frac{\pi}{T_0}.\theta_m.\sin\frac{2\pi}{T_0}t = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}\theta_m.\sin\frac{2\pi}{T_0}.$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2\ell}\theta_m^2.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$= \frac{3g}{2\ell}\theta_m^2\left[1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right] = \frac{3g}{2\ell}[\theta_m^2 - \theta^2]$$

Lorsque $\theta = 0$, on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2\ell}\theta_m^2$.

D'où : $a_0 = \frac{\ell}{2}.\frac{3g}{2\ell}.\theta_m^2 = \frac{3}{4}.g.\theta_m^2$.

$a_0 = \frac{3}{4}.10.\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 \simeq 1,85 m.s^{-2}$.

Autre méthode:

On résout l'équation $\theta(t)$ où l'inconnue est t.

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\theta = \theta_m.\cos\frac{2\pi}{T_0}t = 0 \Longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t = (2k+1).\frac{\pi}{2}$

d'où : $t = (2k+1)\frac{T_0}{4}$

alors : $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}(2k+1)\right)\frac{T_0}{4}$

$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m(\pm 1) = \pm\frac{2\pi}{T_0}$

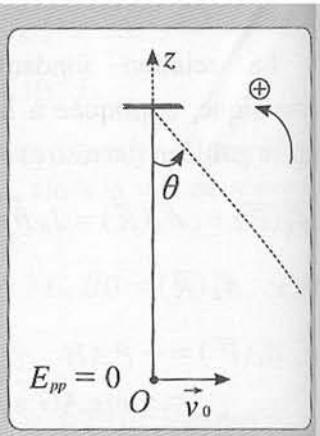
d'où : $\dot{\theta}^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta_m^2 = \frac{3g}{2\ell}\theta_m^2$.

4- La période $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}$ du pendule simple doit vérifier l'isochronisme des oscillations $T'_0 = T_0$.

Ce qui donne : $\frac{\ell'}{g} = \frac{3\ell}{3g}$;

donc : $\ell' = \frac{2}{3}\ell$.

20



La figure ci-contre représente un pendule simple constitué d'un solide ponctuel (S) de masse m et d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 57cm$.
On communique au solide (S) à partir de la position d'équilibre stable une vitesse initiale $\vec{v}_0$ (voir figure) de norme: $v_0 = 0,5m/s$.
Le pendule effectue par la suite des oscillations d'amplitude θ_m.
On néglige les frottements et on prend $g = 10N.kg^{-1}$.
On considère que les oscillations sont de petites amplitudes: $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, θ en (rad).

1- Montrer que $E_{pp}(\theta) = a.\theta^2$, avec a constante dont l'expression est à déterminer.
2- En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, exprimer θ_m en fonction de v_0 g et ℓ, l'amplitude θ_m des oscillations.
Vérifier que $\theta_m = 12°$.
3- Etablir en utilisant une méthode énergétique l'équation différentielle du mouvement de (S) en fonction de θ, $\ddot{\theta}$, g et ℓ.
4- Sachant que l'équation différentielle admet la solution $\theta = \theta_m.\cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$.
Déterminer la vitesse maximale $|\dot{\theta}|$ du mouvement. En quelle position le solide (S) possède-t-il cette vitesse? Justifier.
5- En utilisant la deuxième loi de Newton, exprimer la tension T du fil en fonction de m, g, ℓ, θ et $\dot{\theta}$.
6- Exprimer T_{max} et T_{min} n fonction de m, g, et θ_m.

Solution

1- $E_{pp} = mgz + cte$, à $z = 0$ on a $E_{pp} = 0$ donc $cte = 0$

$z = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1 - \cos\theta)$

$z = \frac{\ell}{2}.\theta^2$.

D'où : $E_{pp} = \frac{mg\ell}{2}.\theta^2 = a.\theta^2$,

avec : $a = \frac{mg\ell}{2}$.

2- Soit A le point où (S) s'arrête, après l'avoir lancé de 0. on a :

$E_m(0) = E_m(A)$

$E_c(0) + E_{pp}(0) = E_c(A) + E_{pp}(A)$

$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{mg\ell}{2}\theta_m^2$

$\theta_m = \frac{v_0}{\sqrt{g\ell}}$

$\theta_m = \frac{0,5}{\sqrt{10.0,57}} \simeq 0,21rad \approx 12°$.

3-

$E_m = E_c(S) + E_{pp}(S) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg\ell}{2}.\theta^2$.

$\frac{dE_m}{dt} = m.\dot{v}.v + mg\ell.\dot{\theta}.\theta = 0$.

on a : $v = r\dot{\theta} = \ell\dot{\theta}$ et $\dot{v} = \ell\ddot{\theta}$

donc : $m.\ell\ddot{\theta}.\ell\dot{\theta} + mg\ell.\dot{\theta}.\theta = 0$.

$m\ell\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g.\theta) = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

4- $\dot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta_m \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}.t$

$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.\theta_m$.

Cette vitesse est obtenue aux dates t telles que : $\left|\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right| = 1$.

$\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}.t = \pm 1$

$\sqrt{\frac{g}{\ell}}t = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

$\theta = \theta_m.\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$.

La vitesse est maximale au passage du pendule par origine $\theta = 0$.

• *Autre méthode :*

on $E_m = cte = E_c + E_{pp}$.

$E_c + a\theta^2 = cte$.

$E_c = cte - a\theta^2$

E_c est maximale lorsque $\theta = 0$.

5- (S) est soumis à deux forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$.

La projection sur la normale centripète donne :

$T - P.\cos\theta = ma_N = m.\frac{v^2}{\ell}$

$T = mg.\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$.

$T = mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + m\ell\dot{\theta}^2$.

Exprimons $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ^2.

on a : $\begin{cases} \theta = \theta_m \cos\omega t \\ \dot{\theta} = -\omega\theta_m \sin\omega t \end{cases}$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega\theta_m}\right)^2 = 1$

$\theta^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega} = \theta_m^2$

$\dot{\theta}^2 = \omega^2(\theta_m^2 - \theta^2)$

donc, $T = mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + m\ell.\frac{g}{\ell}(\theta_m^2 - \theta^2)$

$T = mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \theta_m^2 - \theta^2\right)$

$T = mg\left(1 + \theta_m^2 - \frac{3}{2}\theta^2\right)$

6- T est décroissante en fonction de θ^2.

$T_{max} = mg(1 + \theta_m^2)$, lorsque $\theta = 0$.

$T_{min} = mg\left(1 - \frac{\theta_m^2}{2}\right)$.

21 Etude énergétique d'un pendule pesant

On considère un pendule pesant effectuant des oscillations libres non amorties.

Le pendule étudié est une tige AB homogène de masse m et de longueur $AB = \ell = 60,0cm$ pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe (Δ) horizontal passant par son extrémité A, figure (1).

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{3}m.\ell^2$.

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié au référentiel terrestre que l'on suppose galiléen.

On repère à chaque instant la position du pendule par l'abscisse angulaire θ que fait la tige avec la verticale passant par A.

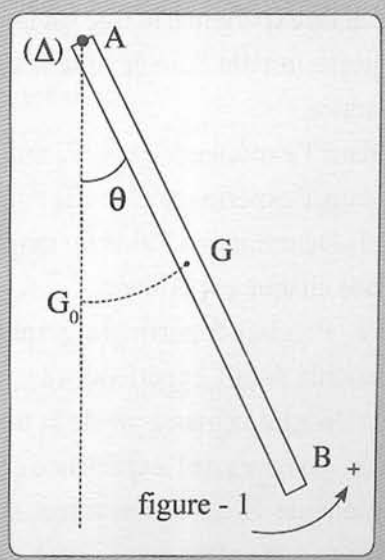


figure - 1

On choisit le plan horizontal passant par G_0, position du centre d'inertie de la tige AB dans la position d'équilibre stable, comme état de référence pour l'énergie potentielle

de pesanteur ($E_p = 0$).

On admet dans le cas de faibles oscillations que $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ avec θ en radian et on prend $g = 9,80 m.s^{-2}$.

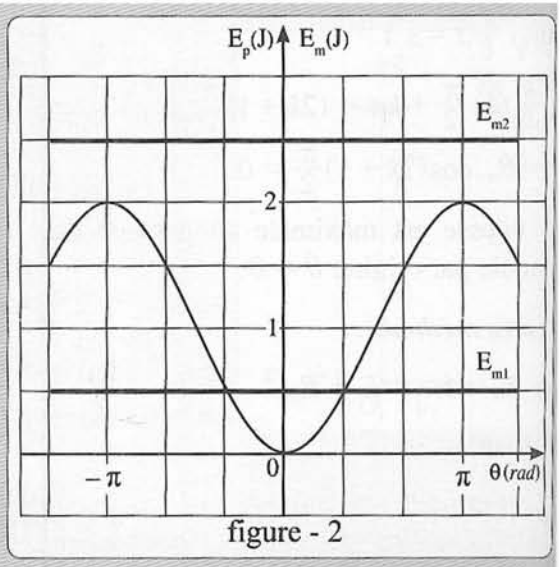


figure - 2

1- Equation différentielle du mouvement du pendule.

1.1- Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la tige peut s'écrire sous la forme $E_p = m.g.\frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta)$.

1.2- Dans le cas de faibles oscillations, écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la tige à un instant en fonction de m, ℓ, g, θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

1.3- Déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire dans le cas de faibles oscillations.

2- Etude énergétique.

On lance la tige AB à partir de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale qui lui permet d'acquérir une énergie mécanique E_m.

La figure (2) donne le diagramme de l'évolution de l'énergie potentielle E_p et de l'énergie mécanique E_m de la tige AB pour deux expériences différentes. Dans chaque expérience la tige est lancée à partir de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale donnée; elle acquiert dans chaque expérience une énergie mécanique donnée:

- dans l'expérience (1) : $E_m = E_{m1}$;
- dans l'expérience (2) : $E_m = E_{m2}$.

2.1- Déterminer à l'aide du graphe, de la figure (2), la nature du mouvement de la tige dans chaque expérience.

2.2- Préciser à partir du graphe la valeur maximale de l'abscisse angulaire θ du pendule dans l'expérience (1).

En déduire la masse m de la tige.

2.3- Au cours de l'expérience (2), l'énergie cinétique de la tige varie entre une valeur minimale $E_{c(min)}$ et une valeur maximale $E_{c(max)}$.

Trouver la valeur de $E_{c(min)}$ et celle de $E_{c(max)}$.

***Bac SM, Rattrapage* 2010**

Solution

1.1- On a : $E_p = mg.z + cte = mgz$

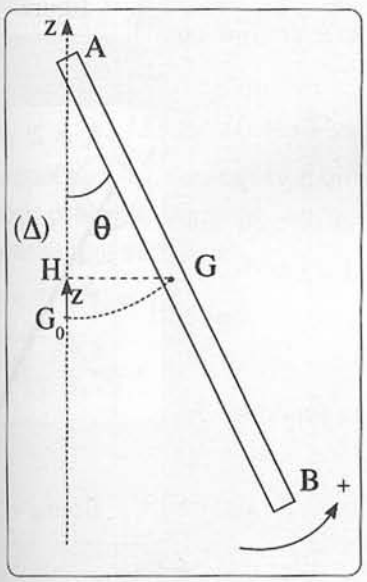
car $E_p(z=0) = 0$, d'où : $cte = 0$.

$z = OH = OA - AH$

$z = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}.\cos\theta$

$z = \frac{\ell}{2}(1\cos\theta)$

• $E_p = mg\frac{\ell}{2}(1-\cos\theta)$.



1.2-

$E_m = E_p + E_c$

$E_m = mg\frac{\ell}{2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$E_m = mg\frac{\ell}{2}.\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}m\ell^2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$E_m = mg\frac{\ell}{4}.\theta^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$.

1.3- E les oscillations sont non amorties :

E_m se conserve;

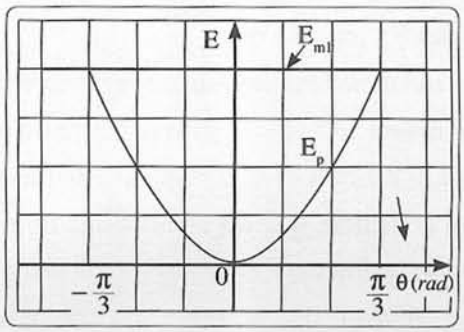
alors : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$\frac{d}{dt}\left[\frac{m.g.\ell}{4}.\theta^2 + \frac{1}{6}.m.\ell.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = 0$

$\frac{m.g.\ell}{4}.2.\theta.\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6}m.\ell^2.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$m\ell.\frac{d\theta}{dt}\left[\frac{g}{2}.\theta + \frac{1}{3}\ell.\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$

2.1-



Dans l'expérience (1), la droite $E_m(1)$ coupe la courbe $E_p(\theta)$ en deux positions qui sont: $\pm\frac{\pi}{3}(rad)$.

En ces deux postions on a $E_c = 0$.

Le mouvement est oscillatoire d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{3}rad$.

Dans l'expérience (2) $E_m(2) > E_p$, $(\forall\theta)$.

Ceci entraine : $E_c = E_m(2) - E_p > 0$.

Le mouvement se fait sans arrêt, c'est une rotation à sens unique.

• $E_{pmax} = 0,5J$ et $\theta_m = \frac{\pi}{3}rad$

$E_{pmax} = \frac{m.g.\ell}{2}(1-\cos\theta_m)$

$m = \frac{2E_{pmax}}{g.\ell(1-\cos\theta_m)}$

$m = \frac{2.0,5}{9,80.0,60\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)} = 0,34kg$

2.3- $E_m = E_c + E_p$, E_c et E_p varient en sens opposés.

$E_{cmin} = E_m - E_{pmax} = 2,5 - 2 = 0,5J$ et

$E_{cmax} = E_m - E_{pmin} = 2,5 - 0 = 2,5J$.

Etude énergétique d'un pendule pesant

Le principe de fonctionnement des horloges est basé sur les oscillations du pendule pesant.

On modélise le balancier d'une horloge par le pendule pesant schématisé ci-contre (fig1). Il est constitué d'une tige d'acier soudée à un disque.

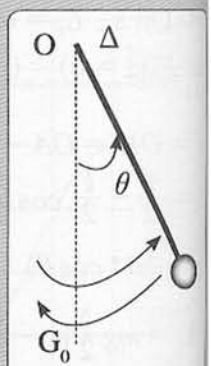


figure - 1

Le balancier est mobile autour d'un axe fixe et horizontal (Δ).

Sa masse $m = 500g$ et son centre de gravité G est situé à la distance $OG = a = 80cm$, de l'axe (Δ).

On considère que les oscillations libres du balancier se font sans amortissement.

Au niveau de la mer où l'altitude est nulle $(h = 0)$ et $g_0 = 9,81m.s^{-2}$ la période propre du balancier d'une horloge est $T_0 = 2s$. On dit que l'horloge bat la seconde, c'est-à-dire qu' elle effectue un battement (demi-oscillation) pendant 1 seconde.

La période propre des oscillations sinusoïdales de ce pendule a pour expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{m.g_0.a}}$.

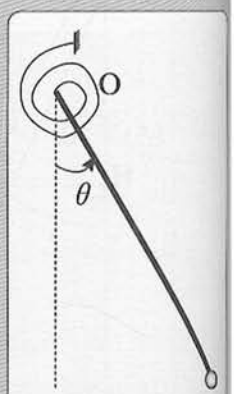


figure - 2

À une altitude h du sol, l'horloge ne bat pas la seconde. Sa période est notée T_h.

1- Comment expliquer la différence entre T_h et T_0 de ce pendule.

2- Exprimer T_h en fonction de T_0, g_0 et g_h intensité de la pesanteur à l'altitude h.

3- À l'altitude h, cette horloge est-elle en avance ou en retard par rapport à ses oscillations sur le sol $(h = 0)$?

4- Déterminer la durée ΔT de cette avance ou ce retard. On donne $g = 9,79m.s^{-2}$.

5- Quel est le retard Δt pendant 1 jour $(24h)$?

6- Pour régler l'horloge placée à l'altitude h, afin que ses oscillations soit isochrones à celles obtenues sur le sol, on lui ajoute un ressort à spirales dont le couple de rappel a pour moment $\mathcal{M}_c = -C\theta$ (figure -2).

6.1- Etablir l'équation différentielle du mouvement des oscillations corrigées de ce pendule.

6.2- En déduire la valeur de la constante de torsion C.

Solution

1- Cette différence est due à la variation de g avec l'altitude.

2- Comparons d'abord g_h à g_0.

$P_0 = mg_0$ et $P_0 = \dfrac{G.M_T.m}{R_T^2} = m.g_0$ (1)

et $P_h = \dfrac{G.M_T.m}{(R_T+h)^2} = m.g_h$ (2)

Le rapport $\dfrac{(2)}{(1)}$ donne : $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{R_T}{(R_T+h)^2}$.

$T_h = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{mgg_h.a}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{m.g_0.a}}$

donc : $\dfrac{T_h}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g_h}}$

ou bien $T_h = T_0\sqrt{\dfrac{g_0}{g_h}}$

3- Puisque $g_0 > g_h$, on déduit que $T_h > T_0$. L'horloge présente un retard par rapport à son mouvement sur le sol.

4- $\Delta T = T_h - T_0 = T_0\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{g_h}} - 1\right)$

$\Delta T = 2\left(\sqrt{\dfrac{9,81}{9,79}} - 1\right) \simeq 2.10^{-3}s = 2ms$

5- À chaque période T_0 correspond le retard ΔT,

donc à une durée t, le retard est Δt :

$\dfrac{\Delta t}{t} = \dfrac{\Delta T}{T_0}$, $\Delta t = \dfrac{\Delta T}{T_0}.t$

$\Delta t = \dfrac{2.10^{-3}}{2}.24h = 0,024h = 86,4s$

6- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$-m.g_h.d + 0 - C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$-m.g_h.a.\sin\theta - C\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \dfrac{m.g_h.a + C}{J_\Delta}.\theta = 0$

$T_h = \sqrt{\dfrac{J_\Delta}{m.g_h.a + C}}$

$T_h = T_0$

$\dfrac{J_\Delta}{m.g_h.a + C} = \dfrac{J_\Delta}{m.g_0.a}$

$C = m.a(g_0 - g_h)$

$C = 0,5.0,8(9,81 - 9,79).$

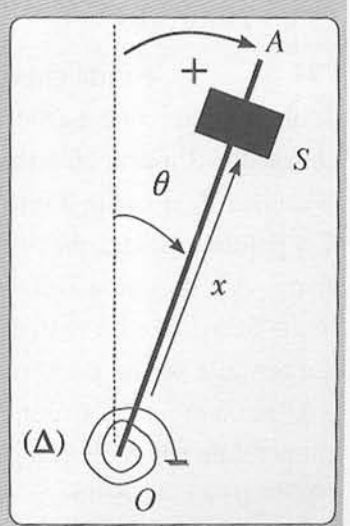
$C = 8.10^{-3}N.m.rad^{-1}$

23

Une tige OA de masse négligeable, porte une masselotte ponctuelle (S) de masse m, se trouvant à la distance $x = OS$. x est réglable.

La tige est mobile autour d'un axe fixe et horizontal (Δ) passant par son extrémité O.

On réalise l'équilibre de la tige au dessus de l'axe (Δ) à l'aide d'un ressort spirale dont l'une de ses extrémités est liée à la tige et l'autre extrémité est attachée à un support fixe (voir figure).



On modélise l'action du ressort par un couple rappel de moment:

$\mathcal{M}_c = -C\theta$. par rapport à (Δ).

Les frottements sont négligeables.

Pour des valeurs de la distance x convenablement choisies, on constate que les oscillations sont sinusoïdales dans le cas des petits angles ($\sin\theta = \theta(rad)$). Le moment d'inertie d'un solide ponctuel de masse se trouvant à la distance d'un axe fixe est $J_\Delta = m.d^2$.

Données : $C = 3,2.10^{-2} N.m.rad^{-1}$

$m = 20g$, $g = 10N.kg^{-1}$

$\pi^2 = 10$

1- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir que : $\ddot{\theta} + \frac{C - mgx}{J_\Delta}\theta = 0$.

2- Comment faut-il choisir x pour que les oscillations soient sinusoïdales?

3- Cet instrument est utilisé pour suivre le rythme musical dans les orchestres. Quelle valeur doit-on choisir pour x afin que les musiciens suivent des oscillations de ce pendule de période $1s$?

Solution

1- $\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$.

$mgx\sin\theta + 0 - C\theta = mx^2\ddot{\theta}$.

$\ddot{\theta} + \frac{C - mgx}{mx^2}.\theta = 0$

2- $C - mgx > 0$ et $x \neq 0$.

$0 < x < x_{max} = \frac{C}{mg}$.

$x_{max} = \frac{3,2.10^{-2}}{20.10^{-3}.10} = 0,16m = 16cm$.

3- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mx^2}{C - mgx}}$

$\frac{mx^2}{C - mgx} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{1}{40}$

$40.20.10^{-3}.x^2 = 3,2.10^{-2} - 0,2x$

$0,8x^2 + 0,2x - 3,2.10^{-2} = 0$

ou bien $4x^2 + x - 0,16 = 0$

ou trouve $x \simeq 0,11m = 11cm$

24 Etude énergétique d'un pendule pesant

L'objectif de cette partie est la détermination de la position du centre d'inertie G d'un système oscillant et son moment d'inertie J_Δ à l'aide d'une étude énergétique et dynamique.

Un pendule pesant de centre d'inertie G, est constitué d'une barre AB de masse $m_1 = 100g$ et d'un corps (C) de masse $m_2 = 300g$ fixé a l'extrémité B de la barre.

Le pendule pesant peut tourner autour d'un axe fixe horizontal (Δ) passant par l'extrémité A (fig2). Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est J_Δ.

$AG = d$ est la distance entre le centre d'inertie et l'axe de rotation.

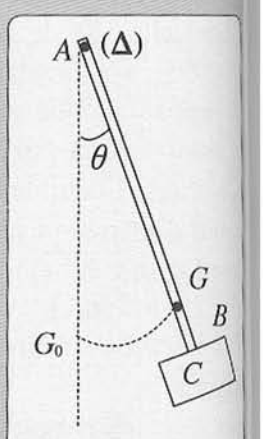


figure - 1

On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_m petit et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps $(t = 0s)$, le pendule effectue alors un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre.

On considère que tous les frottements sont négligeables et on choisit le plan horizontal passant par le point G_0, position de G à l'équilibre stable, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{pp} = 0$). On repère à chaque instant, la position du pendule pesant par son abscisse angulaire θ formé par la barre et la ligne verticale passant par le point A, on note $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire du pendule pesant à un instant t.

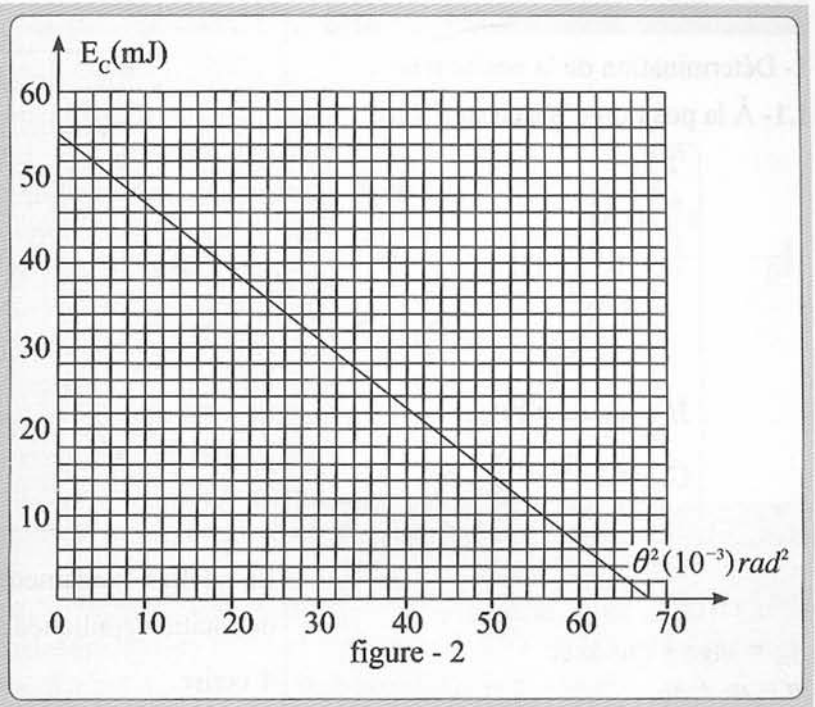


figure - 2

- La figure (3) représente la courbe de l'évolution de l'énergie cinétique E_c du pendule pesant en fonction du carré de l'abscisse angulaire θ^2.
- On prend $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta = \theta(rad)$.
- L'intensité de la pesanteur est $g = 9,8 m.s^{-2}$.

1- Détermination de la position du centre d'inertie G du système.

1.1- Soit E_m l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de petites oscillations;
Montrer que $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{(m_1 + m_2).g.d}{2}$.

1.2- A l'aide du graphe de la figure (3), déduire la valeur de d.

2- Détermination du moment d'inertie J_Δ.

2.1- Trouver en appliquant la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant.

2.2- Trouver l'expression de la fréquence propre N_0 de ce pendule en fonction de J_Δ, m_1, g, m_2 et d pour que la solution de l'équation différentielle s'écrive sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(2\pi N_0 t + \varphi)$.

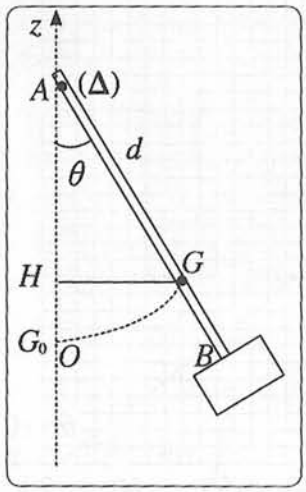
2.3- Sachant que la valeur de la fréquence propre est $N_0 = 1Hz$. Calculer J_Δ.

Bac SM, session normale 2014

Solution

1- Détermination de la position de G.

1.1- À la position d'abscisse θ on a :



$E_{pp} = mgz + cte$ avec
$m = m_1 + m_2$.
En G_0, où $z = 0$ et $\theta = 0$, on a $E_{pp} = 0$ donc $cte = 0$.

$z = OH = OA - AH$

$z = d - d.\cos\theta = d(1 - \cos\theta)$.

$z = \frac{d\theta^2}{2}$

$E_m = E_{pp} + E_c = mgz + E_c$

$E_m = (m_1 + m_2)g\frac{d}{2}\theta^2 + E_c$

Donc : $E_c = E_m - \frac{(m_1 + m_2)gd}{2}\theta^2$.

D'après la figure (3), E_c s'annule à $\theta = \theta_m$;

d'où : $E_m = \frac{(m_1 + m_2)gd}{2}\theta_m^2$

au bien $\frac{E_m}{\theta_m^2} = \frac{(m_1 + m_2)gd}{2}$.

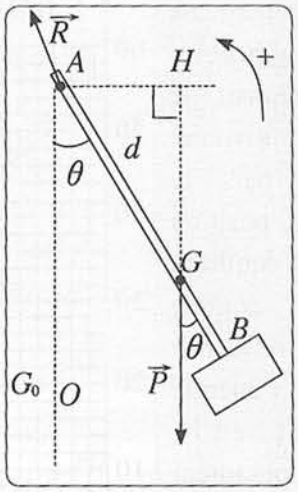
1.2-

La droite $E_c = f(\theta^2)$ a pour pente:

$K = -\frac{(m_1 + m_2)gd}{2}$.

d'où : $d = -\frac{2K}{(m_1 + m_2)g}$

$$d = \frac{-2\left(\frac{0-42}{68-16}\right)}{400.10^{-3}.9,8} \approx 0,40m$$



La relation fondamentale de la dynamiqu de rotation appliqueé à la barre AB perme d'écrire:

$\sum \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$.

c'est-à-dire : $-m.g.AH = J_\Delta.\ddot{\theta}$

en encore : $-(m_1 + m_2)g.AG.\sin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

ou bien : $\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g.d}{J_\Delta}\theta = 0$ (1).

2.2- En dérivant $\theta(t)$ on obtient:

$\dot{\theta}(t) = -2\pi N_0\theta_m\sin(2\pi N_0 t + \varphi)$;

et, $\ddot{\theta}(t) = -(2\pi N_0)^2\theta_m\cos(2\pi N_0 t + \varphi)$

$\ddot{\theta}(t) = -(2\pi N_0)^2\theta$

En comparant (1) et (2) on déduit que:

$(2\pi N_0)^2 = \frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta}$.

d'où : $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gd}{J_\Delta}}$ (3)

2.3- On déduit J_Δ de l'expression (3); soit:

$J_\Delta = \frac{(m_1 + m_2)gd}{4\pi^2 N_0^2}$

$J_\Delta = \frac{0,4.9,8.0,4}{4\pi^2.1} \approx 4.10^{-2}kg.m^2$

25

Le pendule pesant est un système mécanique en mouvement de rotation oscillatoire autour d'un axe horizontal. Sa période dépend généralement de l'amplitude du mouvement. L'objectif de cet exercice est d'étudier un oscillateur formé d'un pendule pesant et d'un fil de torsion et comment le transformer en un oscillateur de période indépendante de l'amplitude du mouvement.

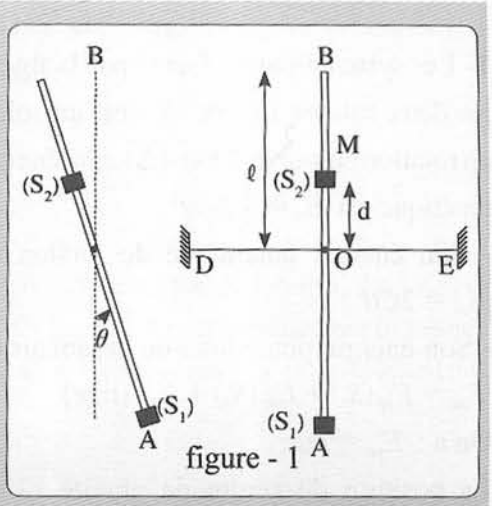


figure - 1

On fixe au milieu d'un fil tendu horizontalement, de constante de torsion C, une tige de longueur $AB = 2\ell$ et de masse négligeable. A l'extrémité inférieure A de la tige est fixé un corps ponctuel (S_1) de masse $m_1 = m$.

La tige porte sur sa partie supérieure en un point M situé à une distance d du point O un solide ponctuel (S_2) de masse $m_2 = 2m$. La position de (S_2) sur la tige est règlable.

Lorsque le fil de torsion n'est pas tordu, la tige prend une position verticale.

On désigne par J_Δ le moment d'inertie du système constitué par la tige AB et les solides (S_1) et (S_2) par rapport à l'axe de rotation (Δ), confondu avec le fil de torsion.

On écarte la tige AB de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m dans le sens positif puis on la libère sans vitesse initiale, elle effectue alors des oscillations dans un plan vertical.

On repère à chaque instant la position de la tige AB par l'angle θ qu'elle forme avec la verticale passant par O, et comme état de référence pour l'énergie potentielle de torsion la position dans laquelle le fil n'est pas tordu $(\theta = 0)$.

1- Montrer que l'expression de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur s'écrit sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\cos\theta + 2C\theta^2$.

2- On considère le cas de faibles oscillations : $0 < \theta < \frac{\pi}{18}(rad)$

et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2_{(rad)}}{2}$

2.1- Etalbir l'expression de l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.

2.2- Trouver l'expression littérale de la période propre T_0 de l'oscillateur pour que la solution de l'équation différentielle soit : $\theta(t) = \theta_m\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$.

3- On règle la position de (S_2) sur la tige à la distance d_0 du point O, puis on écarte de nouveau la tige de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m et on la libère sans vitesse initiale.

Déterminer la distance d_0 en fonction de ℓ pour que le mouvement de l'oscillateur soit un mouvement de rotation sinusoïdale, quelle que soit la valeur de θ_m appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Bac SM, session Rattrapage **2014**

Solution

1- Le système étudié formé par la tige et les deux solides (S_1) et (S_2) est un solide en rotation autour de l'axe (Δ), son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2$.

- Son énergie potentielle de torsion est $E_{pt} = 2C\theta^2$.

- Son énergie potentielle de pesanteur est $E_{pp} = E_{pp}(S_1) + E_{pp}(S_2) + E_{pp}$ (tige)

On a : $E_{pp} = mgz$.

La position du centre de gravité G du système (tige $+S_1 + S_2$) n'est pas donnée pour pouvoir appliquer la formule $E_p = MgZ_G$.

$E_{pp}(tige) = 0$, car sa masse est négligeable.

$E_{pp}(S_1) = m_1 g z_1 = -m_1 g \ell \cos\theta$

$E_{pp}(S_1) = -mg\ell . \cos\theta$

$E_{pp}(S_2) = m_2 g z_2 = m_2 . g . d . \cos\theta$

$= 2mgd . \cos\theta$

Pour le système,

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pt}$

$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2 + 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\cos\theta + 2C\theta^2$

2.1- Dans le cas des petits angles:

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2 + 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + 2C\theta^2 = 0$

$\dot{\theta}\left(J_\Delta . \ddot{\theta} - 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\theta + 4C\theta\right) = 0.$

$\dot{\theta} \neq 0,\ \ddot{\theta} + \frac{4C - 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)}{J_\Delta} = 0.$

2.2- $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{4C - 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)}}$

3- Dans le cas général où l'amplitude θ_m peut être grande, on a:

$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2 + 2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\cos\theta + 2C\theta^2$

$\frac{dE_m}{dt} = \dot{\theta}\left[J_\Delta . \ddot{\theta} + -2mg\left(d - \frac{\ell}{2}\right)\sin\theta + 4C\theta\right] = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{2mg\left(\frac{\ell}{2} - d\right).\sin\theta}{J_\Delta} + \frac{4C}{J_\Delta}\theta = 0.$

Cette équation différentielle n'admet une solution sinusoïdale que si elle est de la forme : $\ddot{\theta} + \frac{A}{B}\theta = 0$

avec $\frac{A}{B} = cte > 0$.

Dans notre cas, ceci n'est vérifié que si le terme en $\sin\theta$ est nul $(\forall\theta)$ ce qui impose que: $d = d_0 = \frac{\ell}{2}$.

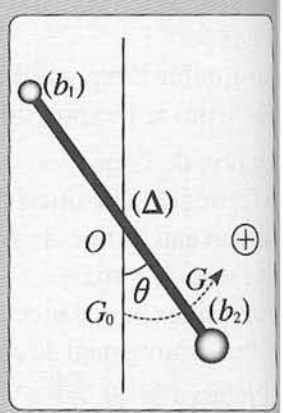
26

On réalise un pendule pesant à l'aide d'une tige de longueur $L = 2\ell = 0,40m$ et de masse négligeable portant à ses deux extrémités deux boules assimilables à un point matériel, (b_1) et (b_2), de masses respectives $m_1 = 50g$ et $m_2 = 4m_1$.

Ce système est mobile sans frottement autour d'un axe (Δ) fixe et horizontal passant par le centre de la tige (figure)

À l'équilibre, le centre de gravité du système est en G_0 et, à une date t, $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OG_0}; \overrightarrow{OG}}\right)$.

On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle



$\theta_m = \frac{\pi}{20} rad$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

Données :

- Moment d'inertie du système $(b_1 \ , \ b_2)$: $J_\Delta = (m_1 + m_2)\ell^2$;
- $OG = \frac{3}{5}\ell$; On pose $m = m_1 + m_2$
- $g = 9,8 N.kg^{-1}$
- Pour les petits angles, on prend $\sin\theta = \theta(rad)$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

1- Etablir en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de rotation, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire θ, dans le cas des petites oscillations.

2- En admettant que la solution de cette équation différentielle a pour expression $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ établir que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5\ell}{3g}}$.

3- Ecrire $\theta = f(t)$.

4- On désigne par $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ respectivement la composante tangentielle et la composante normale de la force $\vec{R}$ exercée par l'axe (Δ) sur le pendule étudié.

En appliquant la 2ème loi de Newton :

4.1- Etablir que $R_T = \frac{16}{25} mg.\theta$.

4.2- Etablir que $R_N = mg\left[\cos\theta + \frac{9}{25}(\theta_m^2 - \theta^2)\right]$.

4.3- En déduire l'intensité R dans chacun des deux cas suivants:

a- Lorsque $\theta = \theta_m$.

b- Lorsque $\theta = 0$.

Solution

1- $\sum \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$.

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg.OG\sin\theta$, on a:

$-mg.OG.\sin\theta = m\ell^2\ddot{\theta}$

$\sin\theta \simeq \theta$, alors : $\ddot{\theta} + \frac{gOG}{\ell}\theta = 0$

ou encore : $\ddot{\theta} + \frac{3g}{5\ell}\theta = 0$ (1)

2- L'équation $\theta(t)$ donne par dérivation:

$\ddot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)$

ou encore : $\ddot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta = 0$ (2)

L'identification de (2) à (1) donne:

$\frac{3g}{5\ell} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

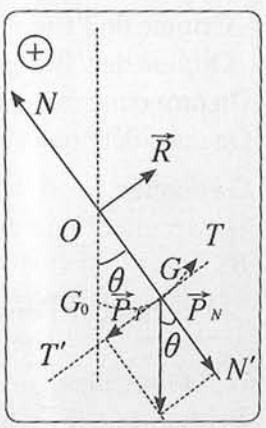
d'où : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5\ell}{3g}}$.

3- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5\ell}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0,20}{3.9,81}} \approx 1,16s$

$\theta(t) = \frac{\pi}{20}\cos\frac{2\pi}{T_0}t = 0,157\cos(5,42t)$,

θ en (rad) et t en (s)

4.1- Le centre de gravité G d'un système, obéit toujours à la deuxième loi de Newton, même si le système est mouvement de rotation autour d'un axe fixe.



$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$ avec $m = m_1 + m_2$.

On projette cette expression sur l'axe tengent T'T:

$-P.\sin\theta + R_T = m.a_T$

d'où $R_T = m[g\sin\theta + a_T]$;

Or $a_T = \dot{v} = r\ddot{\theta} = OG\ddot{\theta} = \frac{3}{5}\ell\ddot{\theta}$.

L'équation différentielle donne:

$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{5\ell}\theta$

alors $a_T = -\frac{9}{25}g\theta$;

donc

$R_T = m\left[g\sin\theta - \frac{9}{25}g\theta\right]$

$R_T = mg\left[\theta - \frac{9}{25}\theta\right] = \frac{16}{25}m.g.\theta$

4.2- Sur la normale $N'N$ on obtient:

$- P.\cos\theta + R_N = m.a_N = m\frac{v^2}{r}$

$= mr\dot{\theta}^2 = \frac{3}{5}m\ell\dot{\theta}^2$

$R_N = m\left[g\cos\theta + \frac{3}{5}\ell\dot{\theta}^2\right]$.

Exprimons $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ:

$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$.

$\dot{\theta}^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta_m^2\left[1 - \cos^2\frac{2\pi}{T_0}t\right] = \frac{3g}{5\ell}(\theta_m^2 - \theta^2)$

$R_N = m\left[g\cos\theta + \frac{9g}{25}(\theta_m^2 - \theta^2)\right]$.

$R_n = mg\left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{9}{25}(\theta_m^2 - \theta^2)\right]$

4.2.a- Lorsque $\theta = \theta_m$

$R_T = \frac{16}{25}mg.\theta_m$ et

$R_N = mg(\cos\theta_m) = mg\left(1 - \frac{\theta_m^2}{2}\right)$.

$R_T = 0,251N$, $R_N = 2,47N$ et

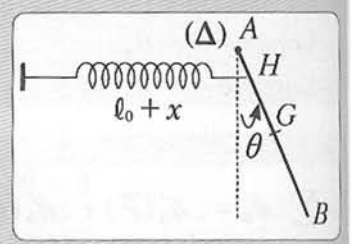
$R = \sqrt{R_T^2 + R_N^2} \simeq 2,48N$.

4.2.b- Lorsque $\theta = 0$, au passage par la position verticale.

$R_T = 0$, $R_N = mg\left[1 + \frac{9}{25}\theta_m^2\right]$ et

$R = R_N = 2,52N$.

27



On considère une barre homogène AB, de masse m et de longueur ℓ, mobile autour d'un axe fixe et horizontal passant par son extrémité A.

Au point H, situé à la distance $AH = \frac{\ell}{4}$ on fixe sur la barre un ressort à spires non jointives, de masse négligeable de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K.

à l'équilibre, la barre est verticale et le ressort est non déformé.

Moment d'inertie de la barre par rapport à (Δ) : $J_\Delta = \frac{1}{3}m\ell^2$.

- Origine de l'énergie potentielle de pesanteur: la position d'équilibre de la barre.
- Origine de l'énergie potentielle élastique: la position d'équilibre.

On provoque des oscillations de faible amplitude de la barre.

On considère que l'extrémité H du ressort se déplace horizontalement.

On donne : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta = \theta$, θ en (rad).

1- Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de m, g, ℓ et θ.

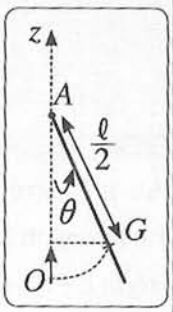
2- Montrer que l'énergie potentielle du système s'écrit sous la forme : $E_{pp} = \frac{1}{2}C.\theta^2$, avec : $C = \frac{1}{2}\ell\left(mg + \frac{1}{8}k\ell\right)$.

3- Montrer que l'équation différentielle de ce mouvement est:

$\ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{16m}\right)\theta = 0$.

Solution

1- $E_{pp} = mgz + cte = mgz$, car $E_{pp} = 0$ lorsque $z = 0$.



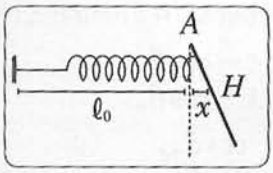
$z = OA - AH = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\theta$

$z = \ell(1 - \cos\theta)$

$E_{pp} = mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta)$.

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

$E_{pp} = \frac{mg\ell}{4}.\theta^2$.



2- $E_{pe} = \frac{1}{2}k.\Delta\ell^2$; $\Delta\ell = x$.

$\sin\theta = \frac{IH}{AH} = \frac{x}{\ell/4}$.

$x = \frac{\ell\theta}{4}$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k\frac{\ell^2}{16}.\theta^2$.

$E_p = \frac{1}{4}m.g.\ell.\theta^2 + \frac{1}{2}k.\frac{\ell^2}{16}.\theta^2 = \frac{1}{2}C.\theta^2$

avec $C = \frac{1}{2}m.g.\ell + \frac{1}{16}k.\ell^2$.

3- $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + E_p$

$= \frac{1}{6}m.\ell^2.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C.\theta^2$

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}m.\ell^2.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C.\theta^2\right) = 0$.

$\frac{1}{6}.m.\ell^2.2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + \frac{1}{2}.C.2\theta.\dot{\theta} = 0$.

$\frac{m.\ell^2}{3}.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$.

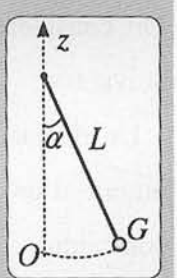
$\ddot{\theta} + \frac{3C}{m.\ell^2}.\theta = 0$.

$\ddot{\theta} + \frac{3\left(m.g.\frac{\ell}{2} + \frac{k.\ell^2}{16}\right)}{m\ell^2}.\theta = 0$.

$\ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{16m}\right).\theta = 0$.

28

Dans un jardin public, un enfant joue sur une balançoire constituée d'une planche, servant de siège, suspendue par deux cordes. Pour simplifier, on assimilera l'ensemble à un pendule simple en considérant que tout se passe comme si la balançoire était une corde unique de longueur $L = 3m$, de masse négligeable, et que l'enfant a pour masse, supposée ponctuelle, $M = 20kg$.



On considère que l'énergie potentielle de l'enfant est nulle dans à la position d'équilibre (figure).

1- Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de m, g, L et θ.

2- Abandonné sans vitesse initiale à partir de la position $\theta_{m,0} = 60°$ (amplitude initiale), le mouvement de l'enfant est faiblement amorti et, l'énergie mécanique de l'oscillateur perd, à chaque arrêt, la fraction $r = \frac{1}{20}$ de sa valeur.

2.1- Exprimer l'énergie mécanique initiale $E_{m,0}$ de l'oscillation en fonction de M, g L et $\theta_{m,0}$.

2.2- À l'arrêt numéro n, l'amplitude du mouvement notée $\theta_{m,n}$ vaut 25°.

Etablir : $n = \dfrac{\ln \dfrac{1-\cos\theta_{m,0}}{1-\cos\theta_{m,n}}}{\ln(1-r)}$

Calculer n.

Solution

1- On a $E_{pp} = Mgz = MgL(1-\cos\theta)$

2.1- Lorsqu'il est abandonné sans vitesse, à l'état initial on a :

$E_m = E_c(0) + E_{pp}(0)$

$E_m = 0 + MgL.(1-\cos\theta_m)$

2.2- Au 1er arrêt l'énergie E_m perd $\frac{1}{20}$ de $E_{m,0}$ et elle vaut :

$E_m(1) = (1-r).E_m(0)$.

Au 2ème arrêt:

$E_m(2) = (1-r)E_m(1) = (1-r)^2 E_m(0)$.

Au 3ème arrêt:

$E_m(3) = (1-r)E_m(2) = (1-r)^3.E_m(0)$.

Au n^{ieme} arrêt : $E_m(n) = (1-r)^n.E_m(0)$.

En revenant à l'expression de E_m, on écrit:

$MgL(1-\cos\theta_{m,n}) = (1-r)^n.MgL(1-\cos\theta_{m,0})$

alors: $1-\cos\theta_{m,n} = (1-r)^n.(1-\cos\theta_{m,0})$

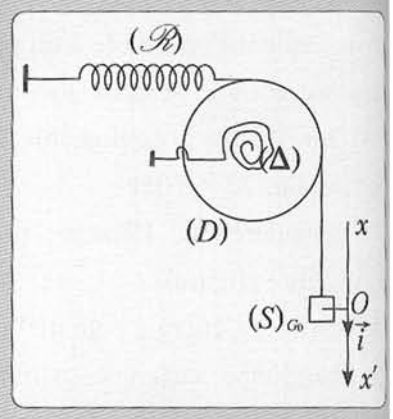
$(1-r)^n = \dfrac{1-\cos\theta_{m,n}}{1-\cos\theta_{m,0}}$.

$n = \dfrac{Ln\dfrac{1-\cos\theta_{m,n}}{1-\cos\theta_{m,0}}}{Ln(1-r)}$

A.N : $n = \dfrac{Ln\dfrac{1-\cos 25°}{1-\cos 50°}}{Ln(1-0,05)} \simeq 26$.

29

On considère l'oscillateur mécanique de la figure suivante, composé des parties suivantes :



- Un disque homogène (D) de rayon r, mobile autour d'un axe fixe et horizontal (Δ) passant par son centre.

Son moment d'inertie par rapport à cet axe est J_Δ.

Un solide (S) de masse m, suspendu à un fil inextensible et de masse négligeable.

- Un ressort $(\mathscr{R})$ à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k.

Ce ressort est fixé à un support et lié par l'autre extrémité au fil portant le corps (S) et passant par la gorge du disque.

- Un ressort à spirale $(\mathscr{R}')$ de masse négligeable et de constante de torsion C, fixé au disque et attaché par son autre extrémité à un point fixe.

- Avant de suspendre le corps (S) au fil, les deux ressorts ne sont pas déformés.

- À l'équilibre, le ressort $(\mathscr{R})$ s'allonge de $\Delta\ell_e$, le disque et le ressort $(\mathscr{R}')$ tournent d'un angle α et le centre de gravité G_0 de (S) coïncide avec l'origine O de l'axe $(O;\vec{i})$.

Les frottements sont négligés.

1- Etablir la condition d'équilibre: $\left(k+\frac{C}{r^2}\right)\Delta\ell_e = mg$.

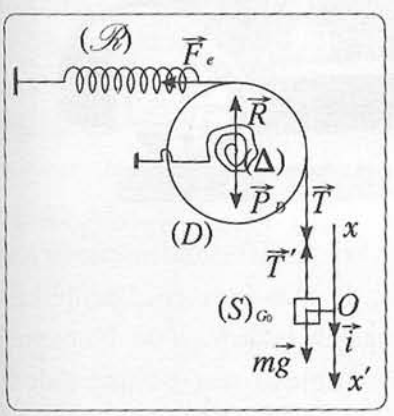
2- On écarte (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonne, on constate que le système effectue des oscillations périodiques autour de sa position d'équilibre.

Au cours des oscillations, la position du disque et de $(\mathscr{R}')$, à une date t est déterminée par rapport à la position d'équilibre à l'aide de l'abscisse angulaire θ.

En appliquant la deuxième loi de Newton et la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir l'équation différentielle suivante : $\ddot{x}+\frac{C+kr^2}{J_\Delta+mr^2}x = 0$.

Solution

1-



La condition d'équilibre s'écrit :

- Pour le corps (S) : $T' = mg$ (1)

- Pour le disque :

$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_e)+\mathscr{M}_c+\mathscr{M}(\vec{T})+\mathscr{M}(\vec{P}_D)+\mathscr{M}(\vec{R}) = 0$

$-F_e.r - C.\alpha + T.r + 0 + 0 = 0$

$Tr = k\Delta\ell_e.r + C.\alpha$ (2)

- Le fil est sans masse : $T = T'$.

- Le fil est inextensible : $\Delta\ell_e = r.\alpha$

donc (2) devient :

$T'.r = k\Delta\ell_e.r + C.\frac{\Delta\ell_e}{r}$

$mgr = \left(kr+\frac{C}{r}\right)\Delta\ell_e$;

ou bien $\left(k+\frac{C}{r^2}\right)\Delta\ell_e = mg$.

2- En état de mouvement :

$\vec{P}+\vec{T}' = m\vec{a}_G$, ce qui donne:

$mg - T' = ma_x = m\ddot{x}$ (3)

$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F})+\mathscr{M}_\Delta(\vec{T})+\mathscr{M}_c = J_\Delta.\ddot{\theta} = J_\Delta.\frac{\ddot{x}}{r}$ (4)

Attention:

$\mathscr{M}_c = -C$ (angle de torsion)

$= -C(\alpha+\theta)$

L'angle de torsion est déterminé par rapport à l'état initial où le ressort n'est

pas tordu.

L'abscisse θ est définie ici, par rapport à l'état d'équilibre où le ressort est tordu de α.

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = -F.r = -k\Delta\ell.r = -k(\Delta\ell_e + x).r$.

La relation (4) devient :

$-k\Delta\ell_e.r - k.x.r + T.r - C(\alpha + \theta) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$.

Or : $T = T' = mg - m\ddot{x}$;

donc :

$-k\Delta\ell_e.r - k.x.r + mgr - m.r\ddot{x} - C\alpha - C\theta = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

ou encore:

$(-k\Delta\ell_e - C\alpha + mg) - kx - C\frac{\theta}{r} = m\ddot{x} + J_{\Delta}\frac{\ddot{\theta}}{r}$

$\theta = \frac{x}{r}$ et le 1er terme traduit la condition d'équilibre;

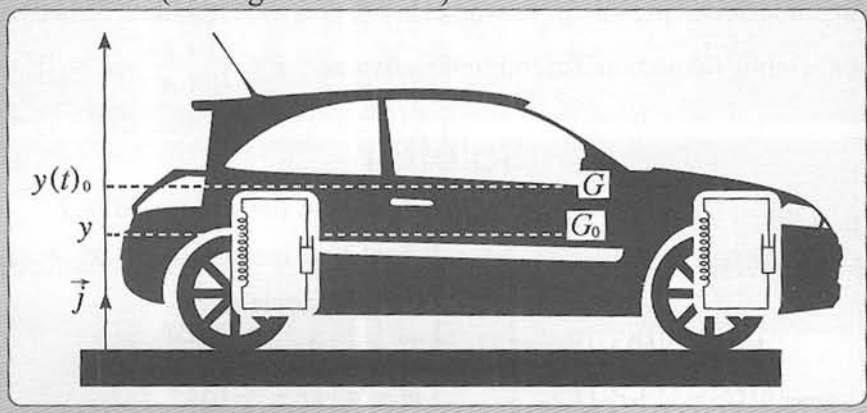
il vient : $-kx - \frac{C}{r^2} = m\ddot{x} + \frac{J_{\Delta}}{r^2}.\ddot{x}$;

ou encore : $\left(m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}\right)\ddot{x} + \left(k + \frac{C}{r^2}\right).x = 0$;

d'où : $\ddot{x} + \frac{k.r^2 + C}{mr^2 + J_{\Delta}}\theta$.

30

La suspension d'un véhicule permet d'atténuer les vibrations verticales qui nuisent au confort et à la sécurité des passagers, par exemple lors du passage du véhicule dans un trou sur une route. Elle est constituée au niveau de chaque roue d'un ressort et d'un amortisseur (voir figure ci-dessous)



On note G le centre d'inertie du véhicule. Lorsqu'on écarte le véhicule de sa position d'équilibre G_0 et qu'on le lâche, il oscille autour de cette position. L'amplitude des oscillations décroît suivant le degré d'amortissement de la suspension. L'ensemble du véhicule est équivalent à un oscillateur mécanique **unique** vertical amorti de masse m de raideur k.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G seulement suivant la verticale. On repère son ordonnée y sur un axe (Oy) orienté vers le haut. La position du centre d'inertie du système à l'équilibre G_0 (ressort comprimé) est prise pour origine O de l'axe.

Données :

- masse $m = 1,5.10^3 kg$;

- constante de raideur du ressort équivalent $k = 6,0.10^5 N.m^{-1}$;
- la force de frottement qui s'exerce sur la masse m est opposée à la vitesse du point G suivant la verticale, on peut l'écrire $\vec{F} = -\lambda V_y \vec{j}$, où V_y est la composante verticale de la vitesse du point G par rapport à l'axe de la roue et λ une constante positive appelée coefficient d'amortissement ou de frottement.

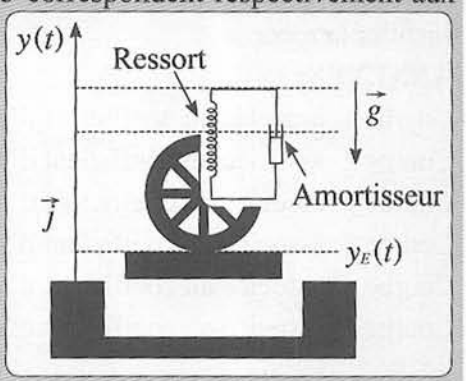
On s'intéresse par la suite à 'influence de ce coefficient d'amortissement sur la qualité de la suspension.

A. Oscillations libres de la suspension

1- Le document 1, donne trois courbes représentant $y = g(t)$ pour trois véhicules dont seules les valeurs du coefficient d'amortissement sont différentes :

Courbe n° 1	Courbe n° 2	Courbe n° 3
$\lambda_1 = 1,5.10^4 kg.s^{-1}$	$\lambda_2 = 5,0.10^4 kg.s^{-1}$	$\lambda_3 = 1,5.10^5 kg.s^{-1}$

A.1- Expliquer pourquoi les courbes n°1 et n°3 correspondent respectivement aux coefficients d'amortissement λ_1 et λ_3.



2- L'une des courbes du document 1 est une sinusoïde amortie, dont on définit la pseudo-période comme étant la durée entre deux maxima consécutifs.

Déterminer graphiquement la valeur de cette pseudo-période.

3- Le confort et la sécurité des passagers sont les meilleurs quand le régime correspond au retour le plus rapide vers le repos. Quelle valeur du coefficient d'amortissement convient le mieux parmi les trois valeurs proposées?

B. Test des amortisseurs, oscillations forcées.

Pour tester chacun des amortisseurs, on soumet les roues à une même excitation sinusoïdale produite par un support placé sous chaque roue (figure ci-contre).

L'amplitude Y_m des oscillations du centre d'inertie G du véhicule dépend alors de deux facteurs : l'amplitude Y_E et la fréquence f_E de l'excitation sinusoïdale.

La résolution des questions suivantes ne demande aucune mise en équation.

On admettra que le comportement qualitatif du système s'apparente à celui d'un oscillateur amorti à une force excitatrice sinusoïdale.

1- L'amplitude Y_E de l'excitation sinusoïdale est maintenue constante. Le document 2, donne les courbes représentant $Y_m = g(f_E)$ pour les trois valeurs du coefficient d'amortissement du paragraphe A.1.

a- Pourquoi est-il important de préciser que l'amplitude Y_E de l'excitation est maintenue constante?

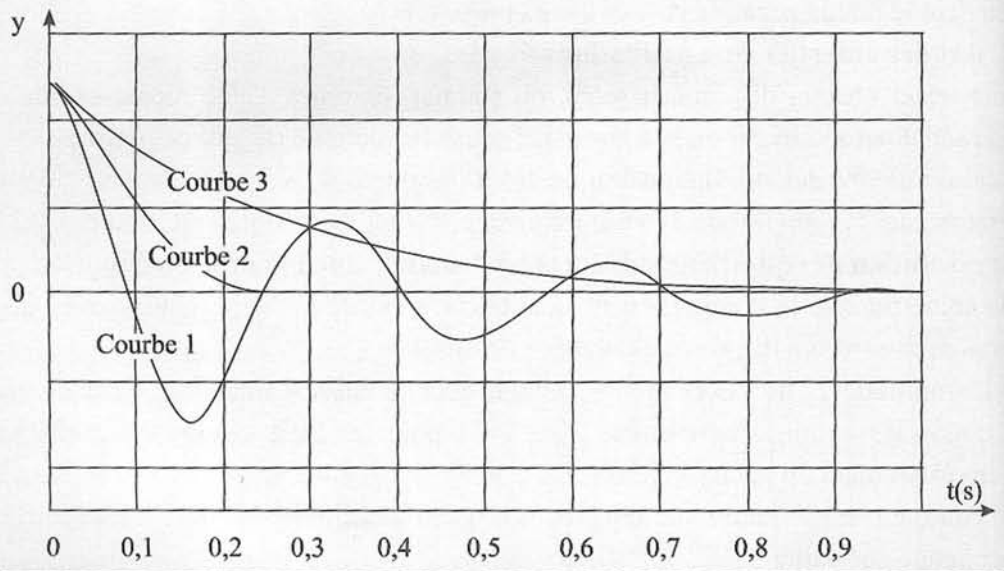
b- Que peut-on dire de l'amplitude Y_m à la résonance?

c- Pour le véhicule équipé de l'amortisseur de coefficient le plus faible, déterminer graphiquement la fréquence de résonance f_r.
Comparer sa valeur à la fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ de l'oscillateur mécanique {masse, ressort}. On prend $\frac{1}{\pi} \approx 0,3$.
d- Préciser à l'aide des courbes du document 2, si la fréquence de résonance est fonction du coefficient d'amortissement.
2- À la fréquence $f' = 45Hz$, l'amplitude des oscillations Y_m est la même pour les trois oscillateurs.
Quel amortisseur faut-il choisi pour équiper le véhicule sachant que plus l'amplitude des oscillations est faible, meilleure est la qualité des amortisseurs :
- pour les fréquences excitatrices f_E telles que $f_E < f'$?
- pour les fréquences excitatrices $f_E > f'$?
Quel amortisseur donne le meilleur compromis quelle que soit la fréquence excitatrice? Justifier la réponse.

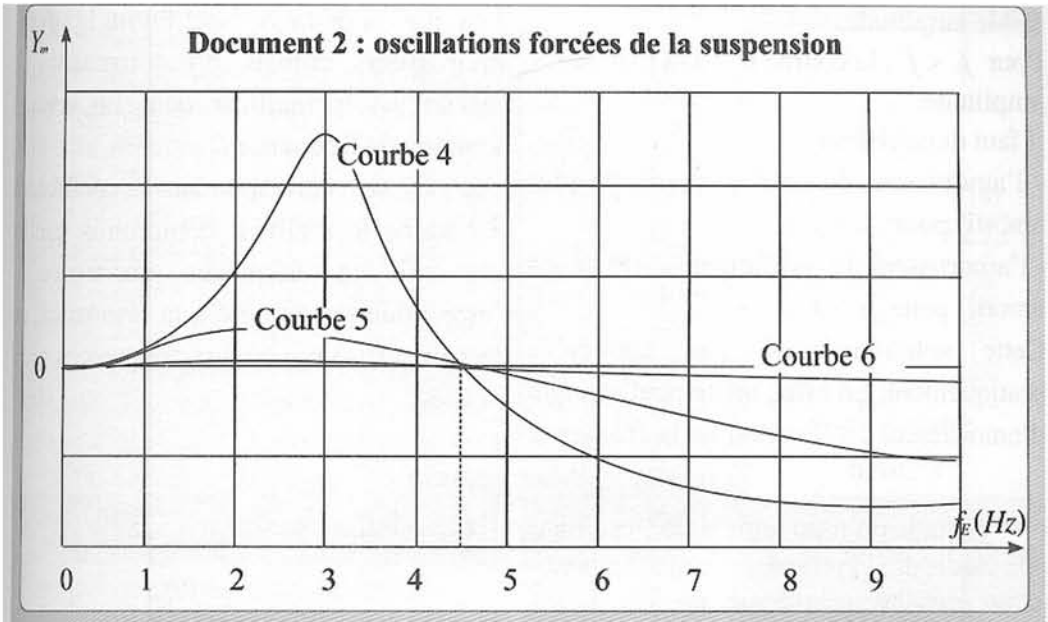
ANNEXES:

Courbe 1: associée au coefficient d'amortissement λ_1
Courbe 2: associée au coefficient d'amortissement λ_2
Courbe 3: associée au coefficient d'amortissement λ_3
Courbe 4: associée au coefficient d'amortissement λ_1
Courbe 5: associée au coefficient d'amortissement λ_2
Courbe 6: associée au coefficient d'amortissement λ_3

Document 1 : oscillations libres de la suspension



Document 2 : oscillations forcées de la suspension



Solution

A.1- La courbe n°1 est un régime pseudo-périodique amorti, tandis que les deux autres décrivent un régime amorti sans oscillations.

La courbe n°1 correspond donc au plus faible amortissement, c'est-à-dire à la plus faible valeur du coefficient d'amortissement : λ_1.

La courbe n°3 décrit le retour le plus long vers l'équilibre; elle correspond donc à l'amortissement le plus important, c'est-à-dire au coefficient d'amortissement λ_3 qui est le plus élevé.

2- On lit $T = 0,32s$.

3- La courbe n°2 décrit le retour le plus rapide vers l'équilibre; elle correspond au coefficient d'amortissement λ_2, qui convient donc le mieux pour le confort et la sécurité des passagers.

B.1.a- Il faut préciser que l'on maintient l'amplitude Y_E constante, pour pouvoir interpréter les différences entre les courbes à partir des variations du seul coefficient d'amortissement.

On peut déduire des courbes que l'amplitude de l'excitation est constante : on constate que Y_m a la même valeur Y_E pour les trois courbes quand f tend vers 0.

b- L'amplitude Y_m est maximale à la résonance.

c- Le véhicule équipé d'amortisseur de coefficient le plus faible correspond à la résonance la plus aiguë, c'est-à-dire à la courbe n°4.

On lit $f_r = 3Hz$. On calcule:

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{0,3}{2}\sqrt{\frac{6,0.10^5}{1,5.10^3}} = 3Hz.$$

La fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur à la résonance dans le cas de l'amortissement faible.

d- La fréquence de résonance varie entre les trois courbes; elle est donc fonction du coefficient d'amortissement.

2- Pour $f_E < f'$, la courbe n°6 a la plus

faible amplitude.
Pour $f_E < f'$, la courbe n°4 a la plus faible amplitude.
il faut donc choisir :
- l'amortisseur de coefficient λ_3 (le plus amorti) pour $f_E < f'$;
- l'amortisseur de coefficient λ_1 (le moins amorti) pour $f_E > f'$.
Cette solution n'est pas applicable pratiquement. En effet, on ne peut changer d'amortisseur en fonction de la fréquence d'excitation de la voiture! Parmi les deux amortisseurs choisis précédemment, si chacun est le meilleur dans un certain domaine de fréquences.
L'amortisseur correspondant au coefficient λ_2 donne le meilleur compromis quelle que soit la fréquence excitatrice : l'amplitude reste faible à la résonance, et décroît suffisamment aux fréquences plus élevées.

31 Etude du mouvement de l'oscillateur (corps solide-ressort)

On étudie dans cette partie le mouvement d'un oscillateur mécanique élastique dans deux situations :
- l'oscillateur est horizontal,
- l'oscillateur est vertical.

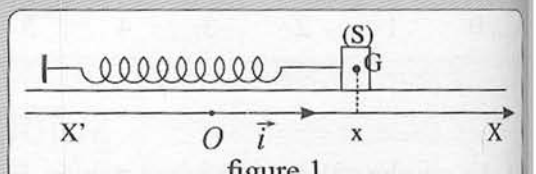


figure 1

L'oscillateur mécanique étudié est modélisé par un système (solide-ressort) constitué d'un solide (S) de masse m et d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K.
On note T_0 la période propre de cet oscillateur.
On étudie le mouvement du centre d'inertie G du solide (S) dans un repère lié à un référentiel terrestre considéré galiléen.
On néglige les frottements et on prend $\pi^2 = 10$.

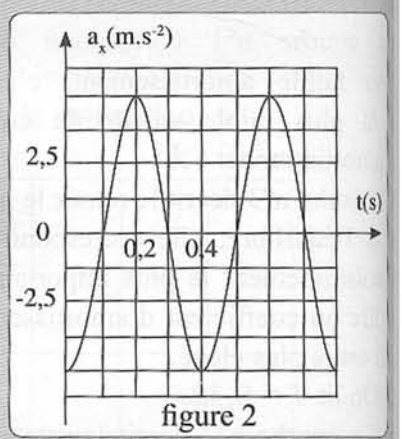


figure 2

1- Etude de l'oscillateur mécanique horizontal:
Le ressort est horizontal, une de ses extrémités est fixe. On accroche à son autre extrémité le solide (S). Ce solide peut glisser sur le plan horizontal.
On repère la position de G à un instant t par l'abscisse x sur l'axe $(O;\vec{i})$. À l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O du repère (figure 1).
On écarte (S) de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à un instant choisi comme origine des dates $(t = 0)$.
La courbe de la figure 2 représente l'évolution au cours du temps de l'accélération a_x du centre d'inertie G.
1.1- Etablir, en appliquant la deuxième loi de Newton, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$.
1.2- La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Déterminer la valeur de x_m et celle de φ.

2- Etude de l'oscillateur mécanique vertical:

On fixe maintenant le ressort étudié comme l'indique la figure 3; l'une des deux extrémités du ressort est liée au solide (S) et l'autre est fixée à un support.

On repère la position de G à un instant t par la côte z sur l'axe $(O;\vec{k})$. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O du repère $R(O;\vec{k})$ (figure 3).

On écarte, verticalement vers le bas, le corps (S) de sa position d'équilibre stable puis on le libère sans vitesse initiale à un instant choisi comme origine des dates $(t = 0)$. L'oscillateur effectue alors un mouvement oscillatoire selon l'axe (Oz).

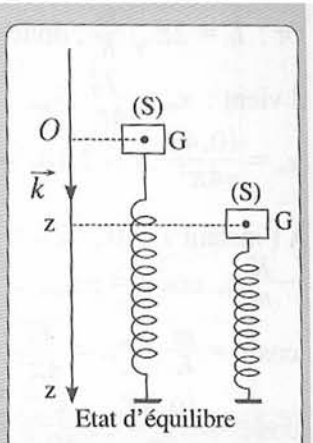


figure 3

On choisit comme référence $(E_{pp} = 0)$ de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} le plan horizontal auquel appartient le point O et comme référence $(E_{pe} = 0)$ de l'énergie potentielle élastique E_{pe} l'état où le ressort n'est pas déformé.

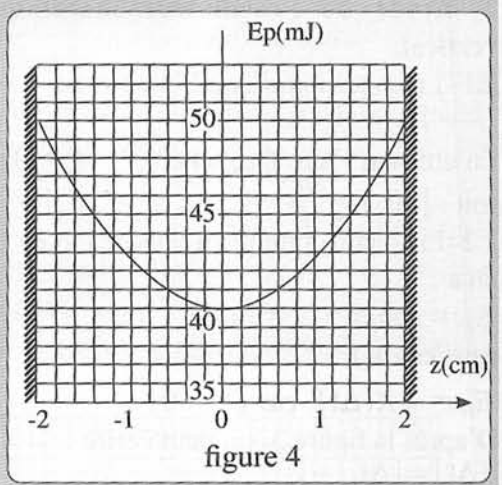


figure 4

2.1- Déterminer, à l'équilibre, l'expression de l'allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0$ du ressort en fonction de m, K et de l'intensité de la pesanteur g, avec ℓ la longueur du ressort à l'équilibre et ℓ_0 sa longueur à vide.

2.2- Montrer qu'à un instant t, l'expression de l'énergie potentielle totale E_p de l'oscillateur s'écrit sous la forme : $E_p = Az^2 + B$ où A et B sont deux constantes.

2.3- La courbe de la figure 4 représente les variations de l'énergie potentielle totale en fonction de la cote z.

2.3.1- Trouver la valeur de $\Delta\ell_0$ et celle de K.

2.3.2- Trouver, en se basant sur la variation de l'énergie potentielle totale E_p, le travail de la force de rappel $\vec{T}$ appliquée par le ressort sur le corps (S) lorsque G se déplace de la position de côte $z_1 = 0$ à la position de côte $z_2 = 1,4cm$.

***D'après BAC SM, Rattrapage* 2017**

Solution

1- Etude de l'oscillateur mécanique horizontal:

1.1- La deuxième loi de Newton s'écrit : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

L'utilisation de l'axe $(O;\vec{i})$ permet d'obtenir : $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

1.2- D'après la solution $x(t)$ et l'équation différentielle, on peut écrire :

$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x = -\frac{K}{m}.x_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

D'où : $\ddot{x}_{max} = \frac{K}{m}x_m$, alors : $x_m = \frac{m}{K}\ddot{x}_{max}$

Or : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, donc : $\frac{m}{K} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$;

il vient : $x_m = \frac{T_0^2}{4\pi^2}\ddot{x}_{max}$

$x_m = \frac{(0,4)^2}{4\pi^2}.5 \simeq 2.10^{-2}m$.

A l'instant $t = 0$, $(\ddot{x})_0 = -\ddot{x}_{max}$; soit :

$-\frac{K}{m}x_m.\cos\varphi = -\ddot{x}_{max}$

$\cos\varphi = \frac{m}{K}.\frac{\ddot{x}_{max}}{x_m} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}.\frac{\ddot{x}_{max}}{x_m}$

$\cos\varphi = \frac{(0,4)^2}{4\pi^2}.\frac{5}{2.10^{-2}} = 1$

$\varphi = 0$

2- Etude de l'oscillateur mécanique vertical:

2.1- La condition d'équilibre s'écrit:

$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0}$,

En utilisant l'axe Oz, on a : $P - T_e = 0$;

soit : $|\Delta\ell_0| = \frac{mg}{K}$; $\Delta\ell_0 = -|\Delta\ell_0|$

2.2- En tenant compte du sens de l'axe Oz, on a :

$E_{pp} = -mgz + C = -mgz$ (car $C = 0$ dans ce cas).

$E_{pe} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$ car $C' = 0$.

D'après la figure 3, on peut écrire :

$|\Delta\ell| = |\Delta\ell_0| + z$

$E_{pe} = \frac{1}{2}K(|\Delta\ell_0| + z)^2$

L'énergie potentielle totale s'exprime alors:

$E_p = -mgz + \frac{1}{2}K(|\Delta\ell_0| + z)^2$

$= -mgz + \frac{1}{2}K|\Delta\ell_0|^2 + K|\Delta\ell_0|z + \frac{1}{2}Kz^2$

$= \frac{1}{2}Kz^2 + \underbrace{\left(K|\Delta\ell_0| - mg\right)}_{=0}.z + \frac{1}{2}K\Delta\ell_0^2$

$= Az^2 + B$

2.3.1- Lorsque $z = 0$, on a:

$E_p(0) = B = \frac{1}{2}K.\Delta\ell_0^2$ (1)

Lorsque $z = z_{max}$,

on a : $E_p(\max) = Az_m^2 + B$ (2)

L'opération (2)-(1) donne:

$E_p(\max) - E_p(0) = Az_{max}^2 = \frac{1}{2}K.z_{max}^2$

alors : $K = \frac{2}{z_{max}^2}[E_p(\max) - E_p(0)]$

A.N.: $K = \frac{2.(50-40).10^{-3}}{(2.10^{-2})^2} = 50N.m^{-1}$

En revenant à (1), on déduit la valeur de $\Delta\ell_0$ sans oublier de remarquer que $\Delta\ell_0 < 0$:

$\Delta\ell_0 = -|\Delta\ell_0| = -\sqrt{\frac{2.E_p(0)}{K}}$

$\Delta\ell_0 = -\sqrt{\frac{2.40.10^{-3}}{50}} = -4.10^{-2}m$

2.3.2- Par définition:

$W(\vec{T}) = -\Delta E_p(e)$

Or $E_{pe} = E_p - E_{pp}$, alors:

$\Delta E_{pe} = \Delta E_p - \Delta E_{pp}$

d'où: $\underset{1\to2}{W(\vec{T})} = \underset{1\to2}{\Delta E_{pp}} - \underset{1\to2}{\Delta E_p}$

soit: $\underset{1\to2}{W(\vec{T})} = -mg(z_2 - z_1) - \underset{1\to2}{\Delta E_p}$

ou encore:

$\underset{1\to2}{W(\vec{T})} = -K|\Delta\ell_0|(z_2 - z_1) - \underset{1\to2}{\Delta E_p}$

$= -50.4.10^{-2}(1,4.10^{-2} - 0) - (45-40).10^{-3}$

$\underset{1\to2}{W(\vec{T})} = -3,3.10^{-2}J$

32 Etude du mouvement d'un pendule de torsion

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement d'un pendule de torsion et de déterminer quelques grandeurs liées à ce mouvement.

On dispose d'un pendule de torsion constitué d'un fil métallique, de constante

de torsion C et d'une tige MN homogène fixée en son centre d'inertie G à l'une des extrémités du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point P d'un support (figure 4).

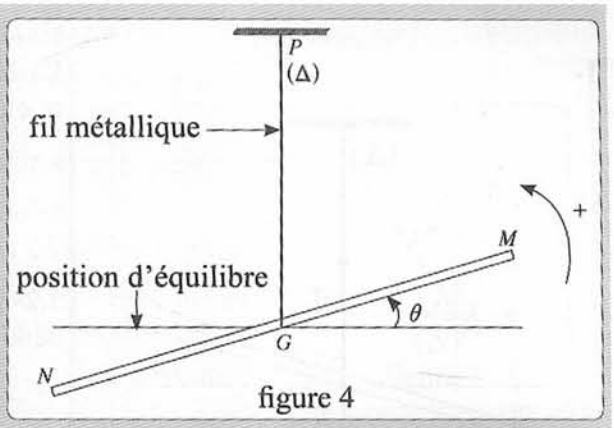


figure 4

La tige peut effectuer un mouvement de rotation sans frottement autour de l'axe (Δ) confondu avec le fil métallique. Le moment d'inertie de la tige MN par rapport à cet axe est $J_\Delta = 4.10^{-4} kg.m^2$.

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la tige MN à chaque instant t par son abscisse angulaire θ par rapport à sa position d'équilibre stable (figure 4).

On choisit la position d'équilibre stable comme référence de l'énergie potentielle de torsion $(E_{pt} = 0)$ et le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pt} = 0)$.

On prendra $\pi^2 = 10$.

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{4} rad$. L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe de la figure 5 représentant les variations de la vitesse angulaire de l'oscillateur en fonction du temps.

1- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

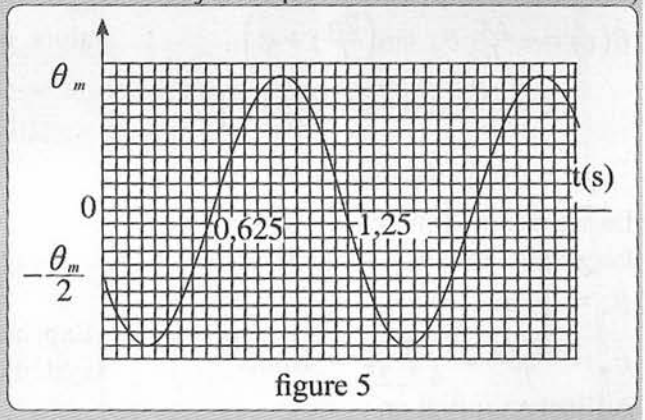


figure 5

2- La solution de cette équation différentiel s'écrit sous la forme: $\theta(t) = \theta_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.

2.1- Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire, exprimée en $rad.s^{-1}$, s'écrit:

$\dot{\theta}(t) = 4.\sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$.

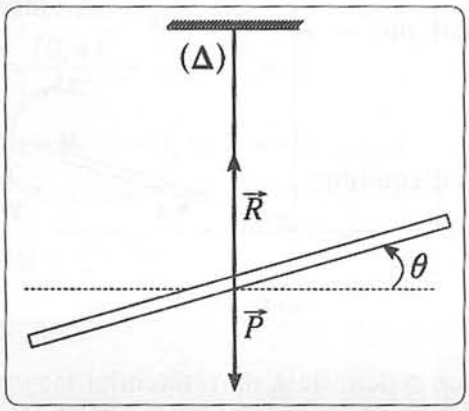
2.2- Déterminer la valeur de la constante de torsion C du fil.

3- Trouver la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates $t = 0$.

Bac SM* 2016, *Session normale

Solution

1-



En appliquant la relation fondamentale de la dynamique de rotation à la tige soumise à trois actions, on écrit:

$$M_\Delta(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$0 + 0 - C.\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

2.1- En dérivant l'équation l'équation horaire $\theta = f(t)$ on obtient:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}.\theta_m.\sin\left(\frac{2n}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$= \frac{2\pi\theta_m}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi + \pi\right)$$

$$= \dot{\theta}_m\sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi + \pi\right)$$

La vitesse maximale est $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0}\theta_m$

Le graphe donne $T_0 = 1,25s$ et on a:

$$\theta_m = \frac{\pi}{4}rad$$

$$\dot{\theta}_m = \frac{2\pi\theta_m}{T_0} = \frac{2\pi.\pi}{4.1,25} = 4rad.s^{-1}$$

A l'instant initial on a:

$$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_m\sin(\varphi + \pi)$$

Le graphe donne $\dot{\theta}(t=0) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$

donc $-\frac{\dot{\theta}_{mar}}{2} = \dot{\theta}_m\sin(\varphi + \pi)$

$$\sin(\varphi + \pi) = -\frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} \varphi + \pi = -\frac{\pi}{6} \\ \varphi + \pi = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

La 1ère solution donne $\varphi = -\frac{7\pi}{6}$ est à rejeter car: $-\pi < \varphi \leq \pi$

La 2ème est à retenir: $\varphi = \frac{\pi}{6}rad$.

D'où:

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \pi\right) = 4\sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

2.2- La constante de torsion C est déduire de T_0.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \quad , \quad C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{CT_0^2}$$

A.N: $C = \frac{4\pi^2.4.10^{-4}}{(1,25)^2}$

$$C \simeq 10^{-2}\ N.m.rad^{-1}$$

3- Lorsque la vitesse $\dot{\theta}$ est maximale, on a $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \dot{\theta}$ sa dérivée est nulle $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = 0$ et en utilisant l'équation différentielle:

$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$; On obtient $\theta = 0$; d'où

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 = 0$$

alors $E_m = E_C(\max) + E_{pt}$

$$= \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}_m^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$$

$$= \frac{1}{2}40.10^{-4}.(4)^2$$

$$= 3,20.10^{-3}J = 3,2mJ$$

Exprimons l'énergie mécanique du système à l'instant initial:

$$E_m = E_{pt}(t=0) + E_C(t=0)$$

$$= E_{pt}(0) + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}_0^2$$

$$E_{pt} = E_m - \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}_0^2 = E_m - \frac{1}{8}J_\Delta.\dot{\theta}_m^2$$

$$= 3,2.10^{-3} - \frac{1}{8}.4.10^{-4}.4^2$$

$$= 2,4.10^{-3}J = 2,4mJ$$

33 Etude du mouvement d'un oscillateur : Le gravimètre

Un gravimètre est un instrument qui permet de mesurer l'intensité de la pesanteur g avec une bonne précision.

On modélise un gravimètre par un oscillateur constitué par :

- une tige OA de centre d'inertie G, de masse m et de moment d'inertie J_A par rapport à l'axe de rotation (Δ) horizontal passant par le point O. La tige est susceptible de tourner autour de l'axe (Δ) dans le plan vertical (Oxy) et son centre d'inertie G se trouve à la distance $OG = \ell$ de l'axe (Δ) (figure 3).

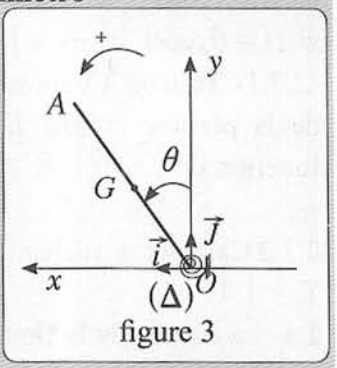


figure 3

- Un ressort spirale tend à ramener la tige en position verticale en exerçant sur celle-ci un couple de moment $M_\Delta = -C.\theta$ par rapport à l'axe de rotation (Δ) où C est une constante positive et θ l'angle de rotation exprimé en radian.

Données : - $m = 0,1kg$; $\ell = 58,4cm$;

- $J_\Delta = 2,5.10^{-2}kg.m^2$; $C = 1,4N.m.rad^{-1}$

- Pour les petits angles : $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta = \theta$ où θ est exprimé en radian ;

- On prend : $\pi^2 = 10$

On néglige les frottements.

On repère la position de la tige OA à chaque instant t par son abscisse angulaire θ par rapport à sa position d'équilibre stable.

On écarte la tige de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m petit dans le sens positif et on la lâche sans vitesse initiale à l'instant de date $t = 0$.

On étudie le mouvement de l'osciallateur dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

1- Etablir, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire θ dans le cas de faibles amplitudes.

2- On choisit la position où $\theta = 0$ comme état de référence de l'énergie potentielle de torsion ($E_{pt} = 0$)

et le plan horizontal passant par O comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_{pp} = 0)$.

2.1- Montrer que l'expression de l'energie potentielle totale de l'oscillateur $E_p = E_{pp} + E_{pt}$ à un instant est : $E_p = \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 + mg\ell$.

2.2- Par une étude énergétique, établir de nouveau l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles amplitudes.

2.3- Dans le cas où $C > mg\ell$, la solution de l'équation différentielle

s'écrit sous la forme : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

2.3.1- Trouver l'expression de la période propre T_0 en fonction de C, m, ℓ, J_Δ et g.

2.3.2 Calculer g sachant que $T_0 = 1,1s$

2.4- La courbe de la figure 4 représente les variations de l'énergie potentielle totale E_p, en foncton de θ.

2.4.1- Déterminer graphiquement la valeur de l'énergie mécanique.

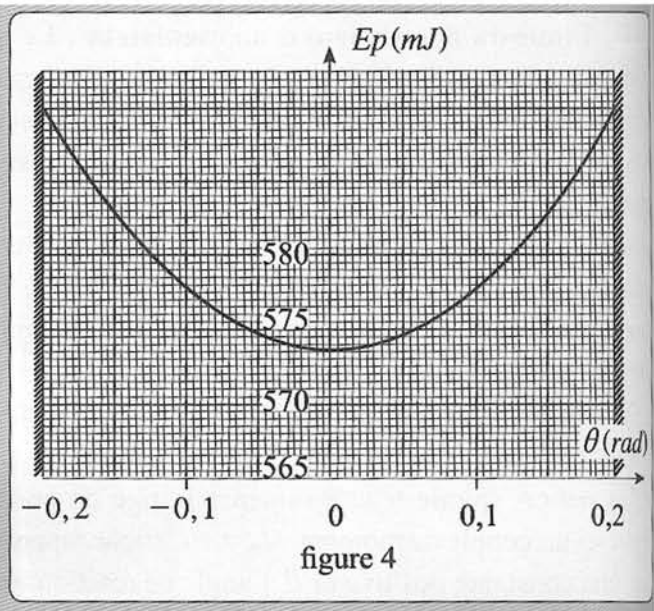


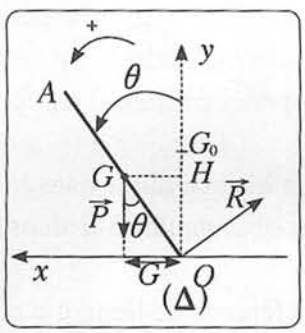
figure 4

2.4.2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ pour $= 0,125rad$

Bac SM* 2019, *Session normale

Solution

1-



La tige est soumise à trois action : son poids $\vec{P}$; l'axe du support $\vec{R}$ et le couple de torsion de moment $\mathcal{M}_{Oc}$

D'après la relation de la dynamique :

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$mgd + 0 - C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

$mg.OG.\sin\theta - C\theta = J_0.\ddot{\theta}$

$mg\ell\sin\theta - C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

$(mg\ell - C)\theta = J_0.\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{C - mg\ell}{J_\Delta}.\theta = 0$

2.1- $E_p = E_{pp} + E_{pt}$

$E_{pp} = mgy + Cte$; $Epp = 0$ lorsque $y_G = 0$ donc $d_e = 0$

$Epp = mgy = mg.OH$

$Epp = mg\ell\cos\theta$

$Epp = mg\ell\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$

$Ept = \frac{1}{2}C\theta^2 + cte = \frac{1}{2}C\theta^2$ (car $cte = 0$)

Alors $E_p = mg\ell\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{2}C\theta^2$

$$E_p = \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 + mg\ell$$

2.2- A un instant t ; l'energie mécanique de l'oscillateur a pour expression :

$E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 + mg\ell$

En absence de frottement, la conservation de cette énergie permet d'écrire:

$\frac{dE_m}{dt} = 0$

c'est-à-dire :

$\frac{1}{2}J_\Delta.2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(C - mg\ell)2\theta\dot{\theta} + 0 = 0$

$\dot{\theta}\left[J_\Delta\ddot{\theta} + (C - mg\ell)\theta\right] = 0 \qquad \forall t$

$\dot{\theta}$ ne peut pas être nul, $\forall t$. donc:

$\ddot{\theta} + \frac{C - mg\ell}{J_\Delta}\theta = 0 \quad (1)$

2.3.1- D'après la solution proposée on déduit que :

$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta\,(t)$

ou encore : $\ddot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta = 0 \quad (2)$

Par identification des deux expressions (1) et (2) on a :

$\frac{C - mgl}{J_\Delta} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$; alors

$\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = \sqrt{\frac{J_\Delta}{C - mg\ell}}$

d'où $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C - mg\ell}}$

2.3.2- $T_0^2 = \frac{4\pi^2.J_\Delta}{C - mg\ell}$;

$C - mg\ell = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2}$

$mg\ell = C - \frac{4\pi^2.J_\Delta}{T_0^2}$

$g = \frac{1}{m\ell}\left[C - \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2}\right]$

A.N : $g = \frac{1}{0,1.58,4.10^{-2}}\left[1,4 - \frac{4.2,5.10^{-2}}{(1,1)^2}\right]$

$g \approx 9,82 m.s$

2.4.1- $E_m = E_p(\max) = 590mJ$

2-4.2-

$E_C = E_m - E_p = E_m - \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 - mg\ell$

$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 = E_m - \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 - mg\ell$

$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_\Delta}\left[E_m - \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 - mg\ell\right]$

$|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2}{J_\Delta}\left[E_m - \frac{1}{2}(C - mg\ell)\theta^2 - mg\ell\right]}$

$|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2}{2,5.10^{-2}}\begin{bmatrix}0,590 - 0,5(1,4 - 0,1.9,82.0,584) \\ (0981.0,584125)^2 \\ - 0,1.9,82.0,584\end{bmatrix}}$

$|\dot{\theta}| = 0,89 rad.s^{-1}$

10 L'ATOME ET LA MÉCANIQUE DE NEWTON

- Un satellite peut graviter à une distance quasi quelconque d'un astre, il n'en est pas de même pour l'espace occupé par les électrons autour du noyau d'un atome.

La mécanique newtonienne ne permet pas de rendre compte de la structure atomique et d'expliquer les caractéristiques de l'atome.

- Hypothèse de Planck (1900)**:** les échanges énergetiques par un atome se font par des «quantums d'énergie».

- Hypothèse des photons (Einstein 1905)

L'énergie d'une lumière monochromatique de fréquence υ est portée par des photons (quanta).

Chaque photon a pour énergie: $E = h\upsilon$ ou $E = \frac{h.c}{\lambda}$

h: constante de Planck, $h = 6,62.10^{-34} J.s$

λ: longueur d'onde dans le vide.

- Postulats de Bohr (1913):

L'énergie d'un atome d'un élément donné ne peut pas prendre n'importe quelle valeur mais uniquement des valeurs discontinues propres à l'élément considéré. On dit que l'énergie de l'atome est quantifiée.

Les différents niveaux d'énergie d'un élément peuvent être représentés sur un diagramme énergétique:

- le niveau le plus bas correspond au niveau d'énergie fondamentale;

- les niveaux intermédiaires correspondent aux différents états excités.

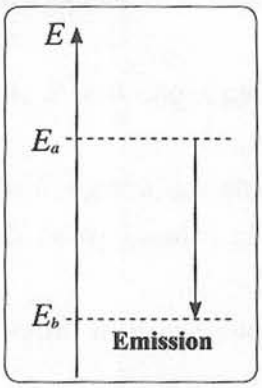
Spectre d'émission:

Quand l'atome passe (en général, spontanément) d'un niveau d'énergie E_a à un niveau d'énergie E_b inférieur, il perd de l'énergie.

Soit ΔE l'énergie perdue, on a $\Delta E = E_a - E_b$.

Cette énergie est perdue sous forme d'énergie lumineuse: il y a émission d'un photon

de longueur d'onde λ telle que: $\Delta E = \frac{h.c}{\lambda}$

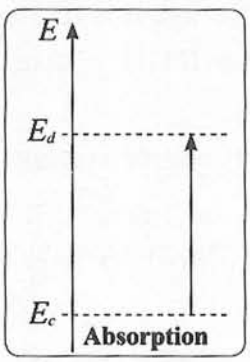


Comme les énergies E_a et E_b et, par suite, ΔE ne peuvent prendre que certaines valeurs, les radiations émises ne peuvent avoir que des longueurs d'onde bien déterminées qui constituent le spectre de raies d'émission de l'atome.

Spectre d'absorption:

Quand l'atome est dans un niveau d'énergie. E_c, s'il reçoit un photon de longueur d'onde λ telle que son énergie est exactement l'énergie qu'il faut pour que l'atome passe dans un niveau d'énergie supérieur E_d.

(c'est-à-dire: $E_d - E_c = \frac{h.c}{\lambda}$, le photon est absorbé.

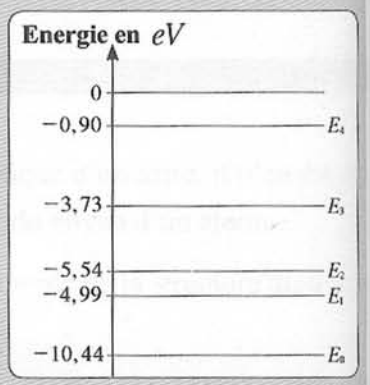


Les longueurs d'onde des radiations absorbées ne peuvent avoir que des valeurs bien déterminées; elles constituent le spectre de raies d'absorption de l'atome.

Remarque: Les radiations émises du spectre d'émission de l'atome sont les mêmes que les radiations absorbées du spectre d'absorption de ce même atome.

Elles sont caractéristiques de cet atome.

1 Le diagramme ci-dessous représente quelques niveaux d'énergie de l'atome de mercure.



1- Comment désigne-t-on le niveau le plus bas E_0 sur le diagramme énergétique?

2- Un électron cède une partie de son énergie à un atome de mercure. L'énergie de celui-ci passe du niveau E_0 au niveau E_1.

Comment qualifie-t-on l'état dans lequel se trouve alors l'atome de mercure?

3- Retour vers E_0.

Lors de la transition du niveau E_1 vers le niveau E_0, l'atome de mercure perd de l'energie.

On donne:

La valeur de la constance de Planck: $h = 6,63 \times 10^{-34} S.I$;

La valeur de la célérité de la lumière dans le vide: $c = 3,00 \times 10^{8} m.s^{-1}$.

$1\,eV = 1,60 \times 10^{-19} J$.

a- Comment se manifeste cette perte d'énergie?

b- Calculer la longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$ correspondante dans le vide.

c- Après avoir rappelé les limites des longueurs d'onde dans le vide du spectre visible, dire dans quel domaine, ultraviolet $(U.V.)$, visible ou infrarouge $(I.R.)$, se situe la radiation de longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$.

4- Les niveaux d'énergie de l'atome de mercure sont quantifiés.

a- Que signifie cette phrase?

b- Justifier à partir de ce terme la discontinuité du spectre d'émission de l'atome de mercure.

Solution

1- Le niveau le plus bas est appelé niveau fondamental.

2- L'atome de mercure passe dans un état excité.

3-

a- L'atome de mercure perd cette énergie sous forme d'énergie lumineuse: il y a émission d'un photon.

b- On a:

$\Delta E = E_1 - E_0 = \dfrac{h.c}{\lambda_{1\to 0}}$ donc:

$\lambda_{1\to 0} = \dfrac{h.c}{(E_1 - E_0)}$

Attention pour calculer λ, il faut convertir les énergies données en joules.

Or:

$E_1 - E_0 = (-5,54) - (-10,44)$

$= 10,44 - 5,54 = 4,90eV$

$= 4,90 \times 1,60 \times 10^{-19} J$

Donc: $E_1 - E_0 = 7,84 \times 10^{-19} J$

Alors: $\lambda_{1\to 0} = \dfrac{6,63 \times 10^{34} \times 3,00 \times 10^{8}}{7,84 \times 10^{-19}}$

$\lambda_{1\to 0} = 2,54 \times 10^{-7} m$

$= 254 \times 10^{-9} m$

$= 254nm$

Il faut penser à convertir la longueur d'onde en nm pour pouvoir comparer sa valeur aux longueurs d'onde du visible.

c- Les longueurs d'onde du spectre visible sont comprises entre 400 et 800 nm.

Ici, $\lambda_{1\to 0} < 400nm$, donc la longueur d'onde $\lambda_{1\to 0}$ correspond à un rayonnement situé dans le domaine $U.V$

4.a- «Les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés» siginfie que l'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs bien déterminées.

b- Alors, quand l'atome passe d'un état d'énergie E_a à un état d'énergie E_b inférieur, il perd une énergie $\Delta E = E_a - E_b$ qui ne peut prendre que des valeurs bien déterminées. Or: $\Delta E = \dfrac{h.c}{\lambda}$, donc les radiations émises ne peuvent avoir que des longueurs d'onde bien déterminées. Ce qui explique la discontinuité du spectre d'émission.

2 Dans le spectre de l'hydrogène, la série de Balmer contient des radiations visibles dont trois correspondent aux longueurs d'onde 656,3nm, 486,1nm et 434,1nm.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés en eV par la formule $E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}$ où n est un nombre entier positif (ou nombre quantique).

Les 3 raies citées correspondent à une transition d'un niveau $n = k$ vers le niveau $n = 2$.

Données: $c = 3,00.10^{8} m.s^{-1}$ et $h = 6,62.10^{-34} J.s$.

1- Indiquer les fréquences des rayonnements correspondant à ces trois raies.

2- Exprimer la relation liant la fréquence ν_k au nombre k.

3- En déduire les nombres quantiques k des niveaux d'énergie de départ correspondant à chacune de ces raies.

Solution

1- On utilise la relation $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ pour compléter le tableau ci-dessous:

Longueur d'onde (nm)	656,3	486,1	434,1
Fréquence (Hz)	$4,57.10^{14}$	$6,17.10^{14}$	$6,91.10^{14}$

2- Puisque les transitions se font vers le niveau $n = 2$ et que $E_k > E_2$, la relation de Bohr s'écrit: $h\nu_k = E_k - E_2$

Or: $E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}$.

On a donc:

$hv_k = (13,6 \times 1,6.10^{-19})\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2}\right)$,

soit: $v_k = 3,28.10^{15}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2}\right)$ en Hz.

3- La relation précédente peut se mettre sous la forme: $k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{v_k}{3,28.10^{15}}}}$

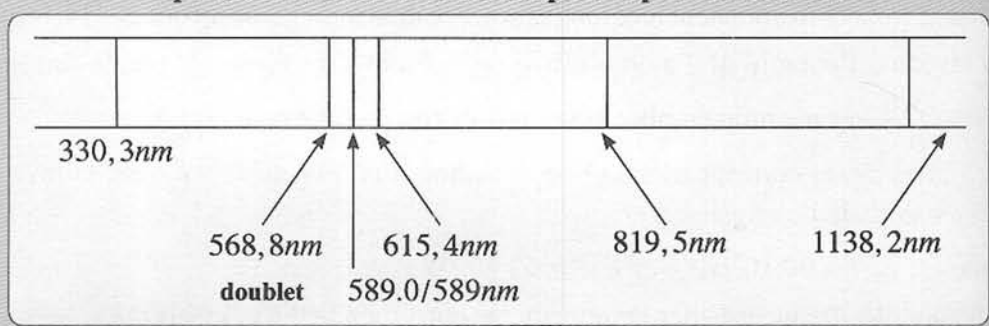
Fréquence (Hz)	**4,57.10¹⁴**	**6,17.10¹⁴**	**6,91.10¹⁴**
Nombre quantique k	**3**	**4**	**5**

3 On utilise les lampes à vapeur de sodium pour éclairer des tunnels routiers. Ces lampes contiennent de la vapeur de sodium à trés faible pression. Cette vapeur est excitée par un faisceau d'électrons qui traverse le tube. Les atomes de sodium absorbent l'énergie des électrons. L'énergie est restituée lors du retour à l'état fondamental sous forme de radiations lumineuses. Les lampes à vapeur de sodium émettent surtout de la lumière jaune.

Données: $h = 6,62 \times 10^{-34} J.s$; $c = 3,00 \times 10^{8} m.s^{-1}$; $e = 1,60 \times 10^{-19} C$.

I- L'analyse du spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium révèle la présence de raies de longueur d'onde λ bien définie.

Spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium



1- Que représentent les grandeurs h, c et e (données présentées en début de l'exercice?

2- Quelles sont les longueurs d'onde des raies appartenant au domaine du visible? au domaine des ultraviolets? au domaine de l'infrarouge?

3- S'agit-il d'une lumière polychromatique ou monochromatique? Justifier la réponse.

4- Quelle est la valeur de la fréquence f de la raie de longueur d'onde:

$\lambda = 589,0nm$?

Solution

1- h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière dans le vide et e la charge électrique élémentaire (ou valeur absolue de la charge de l'électron).

2- Les radiations qui sont dans le domaine:

• du visible $(400nm < \lambda < 800nm)$ sont $568n8nm$, $589,0/589,6nm$ et $615,4nm$;

• des $UV(\lambda < 400nm)$ sont $330,3nm$;

• des $IR(\lambda > 800nm)$ sont $819,5nm$ et $1138,2nm$.

3- Il s'agit d'une lumière polychromatique car elle contient plusieurs radiations (de longueurs d'onde différentes).

4- On a $\lambda = \frac{c}{f}$ donc la fréquence:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{589,0 \times 10^{-9}}.$$
$$= 5,09 \times 10^{14} Hz$$

4 On rappelle que l'atome d'hydrogène peut exister à différents niveaux d'énergie; les énergies de ces niveaux sont données par la relation:

$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$, avec $E_0 = 13,6eV$.

E_n est mesurée en électron-Volt: n est un entier positif.

Indiquez si les affirmations suivantes sont exactes ou fausses en justifiant votre réponse éventuellement par un calcul.

Données:

$1eV = 1$ électron-Volt $= 1,60 \times 10^{-19}$ Joule ;

$1nm = 1nanomètre = 10^{-9} mètre$.

1- La valeur de l'énergie de l'atome d'hydrogène au niveau $n = 3$ est de: $-2,42 \times 10^{-19}$ joule.

2- L'atome d'hydrogène peut avoir une énergie égale à $-2,8eV$.

3- Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.

4- Le niveau d'énergie $0(eV)$ correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).

5- L'atome d'hydrogène peut émettre la radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 103nm$ en passant du niveau d'énergie $n = 3$ au niveau d'énergie $n = 1$.

6- On peut exciter l'atome d'hydrogène grâce à une radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 103nm$.

7- L'énergie minimale d'un électron capable de provoquer par choc l'excitation d'un atome d'hydrogène à partir de son état fondamental vaut $11eV$.

Solution

1- D'après la relation donnant l'énergie des niveaux de l'atome d'hydrogène:

$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ (1), E_n en eV,

pour $n = 3$, $E_3 = -1,51eV$

Soit en joules, $E_3 = -2,42 \times 10^{-19} J$.

L'affirmation est exacte.

2- D'après la relation (1), le rapport $\left|-\frac{13,6}{E_n}\right|$ est égal au carré d'un nombre entier, ce qui n'est pas vrai pour $|E_n| = 2,8eV$.

3- Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène qui revient à son état fondamental est discontinu: chaque photon émis correspond à la transition entre deux niveaux.

L'affirmation est fausse.

4- L'état fondamental (état stable) correspond à la valeur minimum de l'énergie $(n = 1\ E_0 = -13,6eV)$. Le niveau d'énergie $0\ eV$ est la plus grande valeur que puisse prendre $E_n (n \longrightarrow \infty; E = 0)$: l'atome est ionisé.

Conventionnellement, l'énergie d'un atome est toujours négative. Attention, l'énergie est d'autant plus petite que n est plus petit.

L'affirmation est fausse.

5- Lors du passage du niveau 3 au niveau 1, l'atome émet un photon d'énergie $E = E_3 - E_1$ avec $E = \frac{hc}{\lambda}$.

On en déduit:

$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1}$; $\lambda = 103\ nm$.

L'affirmation est exacte.

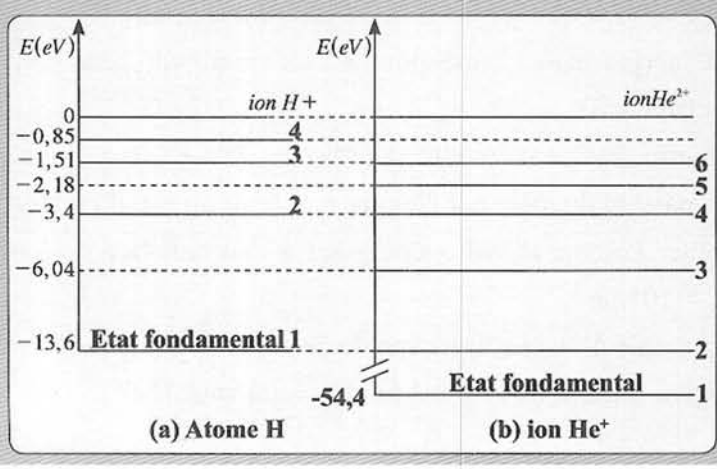
6- Le processus inverse fait passer l'atome du niveau 1 au niveau 3 par absorption d'un photon $\lambda = 103nm$.

L'affirmation est exacte.

7- Pour le passage du niveau 1 au niveau 2, $E = E_2 - E_1$ soit $E = 10,2eV$.

L'affirmation est fausse.

5 La figure suivante donne les valeurs approchées des niveaux d'énergie de l'ion He^+ comparés à ceux de l'atome H.



Données: Constante de Planck, $h = 6,62 \times 10^{-34} J.s$.

La relation dans les unités du système international,

$$\frac{hc}{\lambda} = -2,18 \times 10^{-18}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

permet de calculer la longueur d'onde dans le système $(S.I)$ émise lors de la désexcitation du niveau n au niveau p.

n étant le niveau de départ de la transition et p le niveau d'arrivée.

1- Calculer pour l'atome H les longueurs d'ondes des trois premières raies de la série de Lyman (désexcitation sur le niveau $p = 1$) et de la série de Balmer (désexcitation sur le niveau $p = 2$). Situer ces raies.

2- Calculer les longueurs d'onde des photons émis par l'ion He^+ lors de la désexcitation du niveau 2 au niveau 1, du niveau 3 au niveau 2. A quel domaine appartiennent-ils?

3.a- Quelle relation numérique simple existe-t-il entre l'énergie d'ionisation de l'atome $H, E_i(H)$, et celle de l'ion He^+, $E_i(He^+)$?

b- En admettant pour l'ion He^+ la relation retrouver les niveaux d'énergie de l'ion He^+.

$$E_n = -\frac{E_i(He^+)}{n^2}$$

c- Justifier qu'une partie des spectres de H et He^+ soit similaire.

Solution

1- Pour calculer une longueur d'onde, on a donné la relation suivante dans les unités S.I: $\frac{hc}{\lambda} = -2,18 \times 10^{-18}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$

• Série de Lyman: $p = 1$, $n = 2,3,4,....$

$\lambda_{2,1} = 122nm$; $\lambda_{3,1} = 103nm$;

$\lambda_{4,1} = 97,4nm$;

c'est de l'ultraviolet.

• Série de Balmer: $p = 2$, $n = 3,4,5,...$

$\lambda_{3,2} = 657nm$; $\lambda_{4,2} = 487nm$;

$\lambda_{5,2} = 435nm$.

Ces raies sont dans le visible.

2- A partir des niveaux d'énergie de la figure (b), on calcule les longueurs d'onde demandées.

$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$; d'où: $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$.

$$\lambda_{2,1} = \frac{6,62.10^{-34}.3.10^8}{(54,4 - 13,6).1,6.10^{-19}}$$

$\lambda_{2,1} = 30,4nm$; $\lambda_{3,2} = 0,164nm$. C'est de l'ultraviolet.

3.a- L'énergie d'ionisation est celle qui'l faut apporter à l'atome dans son état fondamental pour l'ioniser.

$E_i(H) = 13,6eV$; $E_i = (He^+) = 54,4eV$

$E_i(He^+) = 4E_i(H)$.

b- En appliquant la relation de l'énoncé pour: $n = 1,2,3,4,5,6$, on retrouve les niveaux d'énergie de l'ion He^+ donnés dans le diagramme.

c- Les atomes ou ion «hydrogénoïdes» (un seul électron) tels que H, He^+, Li^{2+}, ont des spectres présentant des similitudes; ceci est lié au fait que ce sont les électrons périphériques qui sont responsables des spectres lumineux. Le facteur 4 vu en a) s'explique par une plus grande attraction ente l'unique électron et le noyau d'hélium de charge 2e.

6 Un atome d'hydrogène, constitué d'un proton et d'un électron, a des niveaux d'énergie (en eV) quantifiés données par: $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ où n est un entier positif.

Rappeler la définition de l'état fondamental et donner la valeur de ce niveau d'énergie.

Quelle est la valeur maximale de l'énergie de ce système? L'état correspondant est celui d'un atome d'hydrogène ionisé: que signifie cela?

L'énergie d'agitation thermique correspondant à une température T exprimée en kelvins est donnée par la relation $E = k_B T$ où $k_B = 1,38.10^{23} J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Estimer la température nécessaire pour que l'agitation thermique suffise à ioniser un atome d'hydrogène.

Solution

L'état fondamental est l'état d'énergie minimale. Il correspond à $n = 1$, soit à une énergie: $E_1 = -13,6eV$.

La valeur maximale de l'énergie de système est $E_\infty = 0$. Ce niveau d'énergie est celui de l'atome ionisé, c'est-à-dire que l'électron de cet atome d'hydrogène est infiniment éloigné du proton qui constitue le noyau de cet atome.

La température T qui permet à l'agitation thermique d'ioniser un atome d'hydrogène est telle que:

$k_B T = (E_\infty - E_1)$, soit

$T = \frac{E_\infty - E_1}{k_B} = 1,6.10^5 K$.

Cette température est assez considérable mais reste inférieure à la température centrale du Soleil voisine de 10 millions de kelvins.

CHIMIE



1 CRITÈRE D'ÉVOLUTION SPONTANÉE D'UN SYSTÉME CHIMIQUE

I - Evolution spontanée vers l'etat d'équilibre:

1 Quotient de réaction Q_r dans un état quelconque:

On considère un système chimique constitué des espèces $A(aq)$, $B(aq)$, $C(aq)$ et $D(aq)$, siège d'une transformation chimique non totale, modélisée par la réaction d'équation:

$$\underbrace{aA(aq)+bB(aq)}_{\text{les réactifs}} \rightleftarrows \underbrace{c\,C(aq)+d\,D(aq)}_{\text{les produits}}$$

Le quotient de réaction dans un état quelconque noté Q_r a pour expression:

$$Q_r = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

est une grandeur sans unité.

• Son expression ne comporte que les espèces dissoutes à l'exclusion du solvant : $[H_2O] = 1$ et $[\text{solide}] = 1$

Sa valeur se calcule à partir des valeurs des concentrations, exprimées en, $mol.L^{-1}$, dans un état donné du système.

• L'état initial d'un système chimique est l'état dans lequel se trouvent les constituants avant réaction. Il met en jeu les concentrations initiales apportées des espèces introduites.

2 Le quotient de réaction initiale s'écrit:

$$Q_{r,i} = \frac{[C]_i^c[D]_i^d}{[A]_i^a[B]_i^b}$$

3 L'état d'équilibre:

L'état final est l'état d'équilibre atteint par le système. il met en jeu les concentrations effectives dans l'état final des espèces en solution.

Cet état est caractérisé par une constante d'équilibre notée k tel que: $K = Q_{r,éq}$

4 critère d'évolution spontanée:

Le critère d'évolution spontanée:

• Tout système évolue spontanément de manière à ce que la valeur du quotient de réaction tende vers celle de la constante d'équilibre K.

• Le sens d'évolution d'un système se détermine en comparant la valeur du quotient de réaction dans l'état initial Q_{ri} à la valeur de la constante d'équilibre K ou en examinant la valeur du rapport $Q_r K$.

Trois cas se présentent:

• Le quotient de réaction pour l'état est inférieur à K:

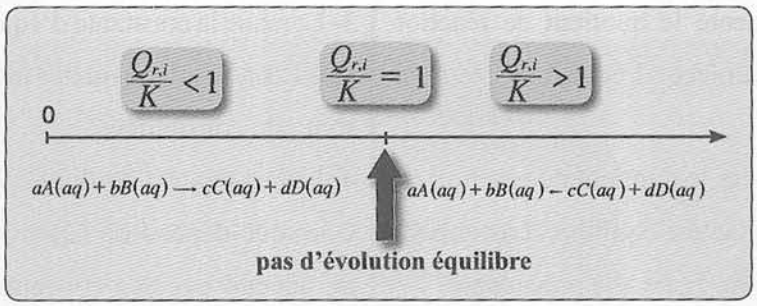
$Q_{ri} < K$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} < 1$: le système évolue dans le sens direct.

• Le quotient de réaction pour l'état initial est égal à K:

$Q_{ri} = k$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} = 1$: le système n'évolue pas.

• Le quotient de réaction pour l'état initial est supérieur à K:

$Q_{ri} > K$, soit $\frac{Q_{r,i}}{K} > 1$: le système évolue dans le sens indirect.



1

1- Lorsqu'à une solution où existe un équilibre chimique, on rajoute l'un des produits, on déplace l'équilibre.

(a) vers la droite (b) vers la gauche

2- On a un équilibre chimique dans une solution S. On rajoute l'un des réactifs, l'équilibre se déplace. Lorsque le nouvel équilibre est atteint, la nouvelle valeur du quotient de réaction est: (a) inférieure (b) supérieure (c) égale à la précédente.

3- Lorsque la constante d'équilibre d'une réaction est très petite, on peut considérer que: (a) La réaction est quasi totale (b) Les réactifs sont peu consommés

4- La constante d'équilibre d'une réaction chimique dépend:

(a) du volume du bécher (b) des concentrations (c) de la température

Solution

1- On augmente le quotient de réaction donc on déplace l'équilibre vers la gauche.

2- A l'équilibre le quotient de réaction est égal à la constante d'équilibre. La nouvelle valeur est donc égale à la précédente.

3- Lorsque la constante d'équilibre est très petite, on peut considérer que les réactifs sont peu consommés.

4- La constante d'équilibre d'une réaction chimique dépend de la température. Elle ne dépend pas des concentrations ni du volume du milieu réactionnel.

2 On considère une réaction chimique dans laquelle les réactifs et les produits sont représentés, pour simplifier, par A, B, C et D.

Son équation est: $\underset{(aq)}{A} + \underset{(aq)}{B} \rightleftarrows \underset{(aq)}{C} + \underset{(aq)}{D}$

Les coefficients stoechiométriques sont tous égaux à 1

La constante d'équilibre associée à cette équation est $K = 4$.

On considère les deux mélanges suivants:

Numéro du mélange	A	B	C	D
1	0,4 mol	0,4 mol	0,5 mol	0,5 mol
2	0,3 mol	0,6 mol	0,8 mol	0,9 mol

1- Lequel de ces deux mélanges représente un état d'équilibre chimique?

2.1- Dans quel sens évolue l'autre mélange?

2.2- Déterminer sa composition molaire finale.

Solution

1- Calculons le quotient de réaction pour chacun des deux mélanges:

$$Q_{r,1} = \frac{[C][D]}{[A][B]} = \frac{\frac{0,5}{v}\cdot\frac{0,5}{v}}{\frac{0,4}{v}\cdot\frac{0,4}{v}} = 1,56 \quad ;$$

$$Q_{s,2} = \frac{\frac{0,8}{v}\cdot\frac{0,9}{v}}{\frac{0,3}{v}\cdot\frac{0,6}{v}} = 4$$

C'est le deuxième mélange qui se trouve dans un état d'équilibre.

2.1- $Q_{r,1} < K$, le système (1) évolue spontanément dans le sens direct.

2.2- Un tableau d'avancement donne à l'état d'équilibre:

$$Q_{r,e} = K = \frac{(0,5+x_e)^2}{(0,4-x_e)^2} = \frac{0,5+x_e}{0,4-x_e}$$

$$\frac{0,5+x_e}{0,4-x_e} = \sqrt{K} = 2$$

$0,5+x_e = 0,8-2x_e$, ce qui donne $x_e = 0,1mo$

D'où: $n_e(C) = n_e(D) = 0,6mol$

et $n_e(A) = n_e(B) = 0,3mol$.

3 On considère la réaction modélisée par l'équation: $A_{(aq)} + B_{(aq)} \rightleftarrows C_{(aq)} + D_{(aq)}$.

On considère un mélange formé par:

$n_0(A) = n_0(B) = n_0(C) = n_0(D) = 0,3mol$.

La constante d'équilibre associée à cette équation est $K = 0,25$

1- Le système à l'état initial, est-il en équilibre?

Si non, dans quel sens évolue-t-il ?

2- Trouver la composition du mélange à l'état final.

Solution

1-

$$Q_{r,i} = \frac{[C][D]}{[A][B]} = \frac{\frac{3}{V}\cdot\frac{3}{V}}{\frac{3}{V}\cdot\frac{3}{V}} = 1 > K == 0,25$$

Le système est hors équilibre, et se déplaçe spontanément dans le sens inverse.

2- La constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction inverse est $K' = \frac{1}{K} = 4$.

		$C + D \rightleftarrows A + B$			
E.I	$x = 0$	1 mol	1 mol	1 mol	1 mol
E.F	$x = x_e$	$1-x_e$	$1-x_e$	$1+x_e$	$1+x_e$

$$K' = \frac{[A]_e[B]_e}{[C]_e[D]_e} = \frac{(0,3+x_e)^2}{(0,3-x_e)^2} = \left(\frac{0,3+x_e}{0,3-x_e}\right)$$

Ce qui donne: $\frac{0,3+x_e}{0,3-x_e} = \sqrt{K'} = 2$; on trouve $x_e = 0,1mol$.

La composition molaire du mélange à l'état

final est: $n_e(A) = n_e(B) = 0,4mol$ | et $n_e(C) = n_e(D) = 0,2mol$.

4 Les ions cobalt (II) peuvent réagir avec le nickel pour donner du cobalt et des ions nickel (II) selon l'équation: $Co^{2+}(aq) + Ni(s) \rightleftarrows Co(s) + Ni^{2+}(aq)$

La constante d'équilibre associée à cette équation vaut $K = 0,12$ à 25°C.

1.a- Un système obtenu en introduisant du nickel dans $V_0 = 100mL$ de solution de chlorure de cobalt (II) à $C_0 = 0,010mol.L^{-1}$ va-t-il évoluer à 25°C?

b- Déterminer la composition finale de la solution.

2.a- Comment évolue, à 25°C, un système obtenu en mélangeant $V_1 = 100mL$ de la solution de chlorure de cobalt (II) à $C_1 = 0,020mol.L^{-1}$ avec $V_2 = 10mL$ d'une solution de chlorure de nickel (II) à $C_2 = 0,010mol.L^{-1}$ et en introduisant du nickel et du cobalt dans la solution ainsi obtenue?

b- Déterminer la composition finale de la la solution.

3.a- Comment évolue, à 25°C, un système obtenu en mélangeant $V_3 = 50mL$ de la solution de chlorure de cobalt (II) à $C_0 = 0,010mol.L^{-1}$ avec $V_4 = 50mL$ d'une solution de chlorure de nickel (II) à $C_4 = 0,040mol.L^{-1}$ et en introduisant du nickel et du cobat dans la solution ainsi obtenue?

b- Etablir un tableau d'avancement volumique en tenant compte de sens de l'évolution spontanée prévue.

c- Déterminer la composition finale de la solution.

Solution

1.a- Pour la réaction d'équation:

$Co^{2+}(aq) + Ni(s) \rightleftarrows Co(s) + Ni^{2+}(aq)$

le quotient initial de réation s'écrit: $Q_{r,i} = \dfrac{[Ni^{2+}]_i}{[Co^{2+}]_i}$

Initialement, $[Ni^{2+}]_i = 0$; d'où: $Q_{r,i} = 0$.

Comme $Q_{r,i} < K$: le système va évoluer spontanément dans le sens direct de l'équation donnée en 1, qui est le sens de la consommation du nickel.

b- Un tableau d'avancement établi en concentrations conduit à:

Equation	$Co^{2+}(aq)$ +	$Ni(s) \rightleftarrows Co(s) + Ni^{2+}(aq)$		
Etat initial $(mol.L^{-1})$	0,010	solide	solide	0
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$0,010 - x_{v,éq}$	solide	solide	$x_{v,éq}$ avancement volumique: $x_v = \dfrac{x}{V}$

A l'équilibre, lorsque le système n'évolue plus, $K = Q_{r,éq}$:

soit: $K = \dfrac{x_{v,éq}}{(0,010 - x_{v,éq})}$

La résolution de l'équation du premier degré correspondante permet d'obtenir:

$x_{v,éq} = 1,1.10^{-3} mol.L^{-1}$

La composition finale s'en déduit:

$[Ni^{2+}]_{éq} = x_{v,éq} = 1,1.10^{-3} mol.L^{-1}$;

$[Co^{2+}]éq = 9.10^{-3} mol.L^{-1}$.

2.a- Dans l'état initial, avant toute réaction, il y a dilution, d'où:

$$[Ni^{2+}]_i = \frac{n_i(Ni^{2+})}{V_{tot}} = \frac{C_2.V_2}{V_1 + V_2}$$
$$= 9,1.10^{-4} mol.L^{-1}$$

$$[Co^{2+}]_i = \frac{n_i(Co^{2+})}{V_{tot}} = \frac{C_1.V_1}{V_1 + V_2}$$
$$= 1,8.10^{-2} mol.L^{-1}$$

$$Q_{r,i} = \frac{[Ni^{2+}]}{[Co^{2+}]_i} = \frac{9,1.10^{-4}}{1,8.10^{-2}} = 0,050$$

Comme $Q_{r,i} < K$: le système va évoluer spontanément dans le sens direct de l'équation donnée en 1.

b- Un tableau d'avancement établi en concentrations conduit à:

Equation	$Co^{2+}(aq) + Ni(s) \rightleftharpoons Co(s) + Ni^{2+}(aq)$			
Etat initial $(mol.L^{-1})$	0,018	solide	solide	$9,1.10^{-4}$
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$0,018 - x_{v,éq}$	solide	solide	$9,1.10^{-4} + x_{V,éq}$

A l'équilibre, lorsque le système n'évolue plus, $K = Q_{r,éq}$:

soit: $K = \dfrac{9,1.10^{-4} + x_{V,éq}}{0,018 - x_{V,éq}} = 0,12$

La résolution de l'équation du premier degré correspondante permet d'obtenir:

$x_{V,éq} = 1,1.10^{-3} mol.L^{-1}$

D'où: $[Ni^{2+}]_{éq} = 2,0.10^{-3} mol.L^{-1}$ et $[Co^{2+}]_{éq} = 1,7.10^{-2} mol.L^{-1}$.

3.a- Dans l'état initial, avant toute réaction:

$$[Ni^{2+}]_i = \frac{n_i(Ni^{2+})}{V_{tot}} = \frac{C_4.V_4}{V_3 + V_4} ;$$
$$= 2,0.10^{-2} mol.L^{-1}$$

$$[Co^{2+}] = \frac{n_i(Co^{2+})}{V_{tot}} = \frac{C_0.V_3}{V_3 + V_4}$$
$$= 5,0.10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$Q_{r,i} = \frac{[Ni^{2+}]_i}{[Co^{2+}]_i} = \frac{2,0.10^{-2}}{5,0.10^{-3}} = 4,0$$

Comme $Q_{r,i} > K$: le système va évoluer spontanément dans le sens inverse de l'équation donnée en 1.

b- Un tableau d'avancement établi en concentrations, tenant compte du fait que le système évolue dans le sens de la consommation des ions nickel (II) et de la formation des ions cobalt (II) conduit à:

Equation	$Co^{2+}(aq) + Ni(s) \rightleftarrows Co(s) + Ni^{2+}(aq)$			
Etat initial $(mol.L^{-1})$	$5,0.10^{-3}$	solide	solide	$2,0.10^{-2}$
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$5,0.10^{-3} - x_{v,éq}$	solide	solide	$2,0.10^{-2} - x_{v,éq}$

Alors: $K = \dfrac{2,0.10^{-2} - x_{v,éq}}{5,0.10^{-3} + x_{v,éq}} = 0,12$

La résolution de l'équation du premier degré correspondante permet d'obtenir:

$x_{v,éq} = 1,7.10^{-2} mol.L^{-1}$

D'où: $[Ni^{2+}]_{éq} = 3.10 mol.L^{-1}$

et $[Co^{2+}]_{éq} = 2,2.10^{-2} mol.L^{-1}$

5 L'ammoniac NH_3 réagit avec le phénol C_6H_5OH pour donner des ions ammonium NH_4^+ et phénolate $C_6H_5O^-$ selon l'équation:

$NH_3(aq) + C_6H_5OH(aq) \rightleftarrows NH_4^+(aq) + C_6H_5O^-(aq)$

La constante d'équilibre associée à cette équation est égale à $K = 0,16$ à $25°C$.

1- A cette température, on mélange $V = 20,0mL$ d'une solution d'ammoniac à $C = 0,040 mol.L^{-1}$ avec $V' = 30,0mL$ d'une solution de phénol à $C' = 0,050 mol.L^{-1}$.

a- Comment évolue ce système?

b- Quelle est la valeur de l'avancement volumique de la réaction lorsque le système n'évolue plus?

c- En déduire la composition finale du système.

2- Comment évoluent les deux systèmes chimiques obtenus en mélangeant $V = 10,0mL$ de chacune des solutions suivantes:

a- Ammoniac à $C_1 = 0,040 mol.L^{-1}$, phénol à $C_2 = 0,040 mol.L^{-1}$, chlorure d'ammonium, $NH_4^+ + Cl^-$, à $C_3 = 0,010 mol.L^{-1}$ et phénolate de sodium, $C_6H_5O^- + Na^+$, à $C_4 = 0,010 mol.L^{-1}$?

b- Ammoniac à $C_1 = 0,040 mol.L^{-1}$, phénol à $C_2 = 0,040 mol.L^{-1}$, chlorure d'ammonium, $NH_4^+ + Cl^-$, à $C_3' = 0,10 mol.L^{-1}$ et phénolate de sodium, $C_6H_5O^- + Na^+$ à $C_4' = 0,10 mol.L^{-1}$?

Solution

1.a. Pour la réaction d'équation:

$NH_3(aq) + C_6H_5OH(aq) \rightleftarrows NH_4^+(aq) + C_6H_5O^-(aq)$

Le quotient de réaction s'écrit:

$Q_r = \dfrac{[NH_4^+].[C_6H_5O^-]}{[NH_3]_i.[C_6H_5OH]_i}$

Initialement $[NH_4^+]_i = [C_6H_5OH]_i = 0$;

soit: $Q_{r,i} = \dfrac{[NH_4^+].[C_6H_5O^-]}{[NH_3]_i.[C_6H_5OH]_i} = 0$

Comme $Q_{r,i} < K$, le système évolue dans le sens direct de l'équation de la réaction.

b. Etablissons un tableau d'avancement volumique, en tenant compte de la dilution qui a lieu lors du mélange des solutions:

$[NH_3]_i = \dfrac{C.V}{V+V'} = 1,6.10^{-2} mol.L^{-1}$

$[C_6H_5OH]_i = \dfrac{C'.V'}{V+V'} = 3,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

Equation	$NH_3(aq) + C_6H_5OH(aq) \rightleftarrows NH_4^+(aq) + C_6H_5O^-(aq)$			
Etat initial $(mol.L^{-1})$	$1,6.10^{-2}$	$3,0.10^{-2}$	0	0
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$1,6.10^{-2} - x_v$	$3,0.10^{-2} - x_v$	x_v	x_v

A l'équilibre:

$K = Q_{r,éq} = \dfrac{x_V^2}{(1,6.10^{-2} - x_v).(3,0.10^{-2} - x_V)}$

$= 0,16$

La résolution de l'équation du second degré correspondante conduit à deux solutions: $x_{V1} = 6,1.10^{-3} mol.L^{-1}$ et $x_{V2} = -0,15 mol.L^{-1}$.

Comme le système évolue dans le sens direct, x_{V1} est la seule solution acceptable.

D'où:

$[NH_4^+]_{éq} = [C_6H_5O^-]_{éq} = 6,1.10^{-3} mol.L^{-1}$;

$[NH_3]_{éq} = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

et $[C_6H_5OH]_{éq} = 2,4.10^{-2} mol.L^{-1}$

2.a- Initialement,

$[NH_4^+]_i = \dfrac{C_3.V}{4V} = \dfrac{C_3}{4} = 2,5.10^{-3} mol.L^{-1}$

$[C_6H_5O^-]_i = \dfrac{C_4.V}{4V} = \dfrac{C_4}{4} = 2,5.10^{-3} mol.L^{-1}$

$[NH_3]_i = \dfrac{C_1.V}{4V} = \dfrac{C_1}{4} = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

$[C_6H_5OH]_i = \dfrac{C_2.V}{4V} = \dfrac{C_2}{4} = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[NH_4^+]_i.[C_6H_5O^-]}{[NH_3]_i.[C_6H_5OH]_i}$

$= \dfrac{2,5.10^{-3} \times 2,5.10^{-3}}{1,0.10^{-2} \times 1,0.10^{-2}} = 0,0625$

Comme $Q_{r,i} < K$, le système évolue dans le sens direct de l'équation.

b- Initialement,

$[NH_4^+]_i = \dfrac{C_3.V}{4V} = \dfrac{C_3}{4} = 2,5.10^{-2} mol.L^{-1}$

$[C_6H_5O^-]_i = \dfrac{C_4.V}{4V} = \dfrac{C_4}{4} = 2,5.10^{-2} mol.L^{-1}$

$[NH_3]_i = \dfrac{C_1.V}{4V} = \dfrac{C_1}{4} = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

$[C_6H_5OH]_i = \dfrac{C_2.V}{4V} = \dfrac{C_2}{4} = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[NH_4^+]_i.[C_6H_5O^-]_i}{[NH_3]_i.[C_6H_5OH]_i}$

$= \dfrac{2,5.10^{-2} \times 2,5.10^{-2}}{1,0.10^{-2} \times 1,0.10^{-2}} = 6,25$

Comme $Q_{r,i} > K$, le système évolue dans le sens inverse de l'équation.

6 Dans une solution S de sulfate de plomb de concentration $c = 0,1 mol.L^{-1}$, on introduit de la poudre d'étain en excès. On donne dans les conditions de l'expérience la constante de l'équilibre suivant:

$Pb + Sn^{2+} \rightleftarrows Sn + Pb^{2+}$; $K = 0,45$.

1- Quelle réaction se produit? Justifier qualitativement qu'elle n'est pas totale.

2- Calculer la concentration finale des espèces dissoutes dans la solution S.

Solution

1- On considère la réaction suivante, suspectible de se produire dans le milieu réactionnel: $Sn + Pb^{2+} \rightleftarrows Sn^{2+} + Pb$

La constante de cet équilibre est l'inverse de celle donnée dans l'énoncé:

$K' = \frac{1}{0,45} = 2,2$

Initialement, le quotient de réaction de cet équilibre est nul, puisque l'on n'a pas d'ion étain (II) dans la solution: $[Sn^{2+}] = 0 mol.L^{-1}$, donc:

$Q_r = \frac{[Sn^{2+}]}{[Pb^{2+}]} = 0$

Nous avons: $Q_r < K'$ donc l'équilibre est déplacé vers la droite, c'est-à-dire que l'étain réduit les ions plomb (II) pour produire des ions étain (II) et du plomb métallique. Toutefois cette réaction n'est pas totale car la constante de l'équilibre associé n'est pas très grande. On s'attend donc à une réaction limitée.

2- On présente les états, initial et final, sous forme d'un tableau:

Etat:	Pb^{2+}	+	$Sn \rightleftarrows Pb$	+	Sn^{2+}
Initial	c	−	−		0
Final	$c-x$	−	−		x

où x est l'avancement volumique en $mol.L^{-1}$. A l'équilibre, le quotient de la réaction est égal à la constante de l'équilibre, donc: $K' = \frac{x}{c-x}$

ce qui donne: $K'c = x + K'x$

donc: $x = \frac{K'c}{1+K'}$

L'application numérique donne:

$x = \frac{2,2 \times 0,1}{1+2,2} \approx 6,9.10^{-2} mol.L^{-1}$

donc on en déduit les concentrations:

- $[Sn^{2+}] = 6,9.10^{-2} mol.L^{-1}$

• $[Pb^{2+}] = 0,1 - 6,9.10^{-2} = 3,1.10^{-2} mol.L^{-1}$

Ces concentrations sont du même ordre de grandeur (ce qui n'est pas surprenant puisque la constante de l'équilibre n'était ni très grande ni très petite). On a donc ici une réaction d'oxydoréduction qui n'est pas totale.

On vérifie, pour s'assurer de la justesse du raisonnement et de l'application numérique, que le quotient de réaction est égal à la constante de l'équilibre:

$$Q_r = \frac{[Sn^{2+}]}{[Pb^{2+}]} = \frac{6,9.10^{-2}}{3,1.10^{-2}} = 2,2 = K'.$$

7 On considère la réaction d'hydrolyse suivante:

$(CH_3CO_2C_2H_5)_{(aq)} + H_2O \rightleftarrows CH_3CO_2H_{(aq)} + C_2H_5OH_{(aq)}$

Dans les conditions de l'expérience, la constante de cet équilibre est: $K = 0,1$. La solution initiale contient en concentrations égales de l'éthanoate d'éthyle, de l'acide éthanoïque et de l'éthanol $(c = 0,05 mol.L^{-1})$.

1- L'équilibre est-il déplacé? Si oui, dans quel sens?

2- Quelles sont les concentrations finales?

Solution

1- Calculons le quotient de la réaction dans les conditions initiales. Il vaut:

$$Q_r = \frac{[C_2H_5OH][CH_3CO_2H]}{[CH_3CO_2C_2H_5]} = \frac{0,05 \times 0,05}{0,05} < K$$

Puisque le quotient de réaction est inférieur à la constante d'équilibre, celui-ci est déplacé vers la droite.

2- On présente les états initial et final sous forme d'un tableau:

Etat:	$CH_3CO_2C_2H_5$	+	$H_2O \rightleftarrows CH_3CO_2H$	+	C_2H_5OH
Initial	c	−	c		c
Final	$c-x$	−	$c+x$		$c+x$

où x est l'avancement volumique de la réaction, en $mol.L^{-1}$. A l'équilibre, le quotient de la réaction est égal à la constante d'équilibre, donc:

$$\frac{(c+x)^2}{c-x} = K$$

$$(c+x)^2 = K(c-x)$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = Kc - Kx$$

$$x^2 + (2c+K)x + (c^2 - Kc) = 0$$

$$x^2 + 0,2x - 2,5.10^{-3} = 0$$

On doit résoudre cette équation

polynomiale du second degré. Le discriminant est:

$\Delta = 0,2^2 + 4 \times 2,5.10^{-3} = 5.10^{-2}$, donc les racines sont:

$$x_1 = \frac{-0,2 + \sqrt{0,05}}{2} \approx 1,18.10^{-2}$$

et: $x_2 = \frac{-0,2 - \sqrt{0,05}}{2} \approx -0,212$

On élimine la seconde racine. En effet, si on l'utilise pour calculer les concentrations en acide étanoïque et éthanol, qui sont $c+x$, on trouve une valeur négative. La seule valeur qui a un sens physique est donc la première racine, positive (on retrouve bien le fait que l'équilibre doit être déplacé vers la droite). On obtient en définitive les concentrations suivantes:

$$[C_2H_5OH] = [CH_3CO_2H] = c + x \approx 6,18.10^{-2} mol.L^{-1}$$

et:

$$[CH_3CO_2H_5] = c - x \approx 3,82.10^{-2} mol.L^{-1}$$

Dans ce genre d'exercice, il est bon de vérifier la validité des résultats en calculant le quotient de réaction et en vérifiant qu'il est égal à la constante d'équilibre.

Ici, on a:

$$Q_r = \frac{(6,18.10^{-2})}{3,82.10^{-2}} \approx 1,00.10^{-1} = K$$

8 Les ions mercure (II) Hg^{2+}, peuvent réagir avec le mercure Hg pour donner des ions mercures (I) Hg_2^{2+} selon la réaction d'équation $Hg^{2+}_{(aq)} + Hg(\ell) \rightleftarrows Hg_2^{2+}{}_{(aq)}$

La constante d'équilibre associée à cette équation vaut $K = 91$ à $25°C$.

Le mercure, seul métal liquide à $25°C$, n'est pas soluble dans l'eau.

1- Donner l'expression du quotient de réaction associé à cette équation.

2.a- Comment évolue un système constitué en introduisant du mercure dans le mélange de $V_1 = 10,0mL$ de la solution de chlorure de mercure (II), $Hg^{2+} + 2Cl^-$, à $C_1 = 2,0.10^{-3} mol.L^{-1}$ avec $V_2 = 40,0mL$ d'une solution de chlorure de mercure (I), $Hg_2^{2+} + 2Cl^-$, à $C_2 = 1,0.10^{-3} mol.L^{-1}$?

b- Déterminer la composition finale de la solution.

3.a- Comment évolue un système constitué en introduisant du mercure dans le mélange de $V_3 = 1,0mL$ de la solution de chlorure de mercure (II) à $C_1 = 2,0.10^{-3} mol.L^{-1}$ avec $V_4 = 100,0mL$ d'une solution de chlorure de mercrure (I) à $C_4 = 1,0.10^{-2} mol.L^{-1}$?

b- Déterminer la composition finale de la solution.

Solution

1- Pour la réaction d'équation:

$Hg^{2+}(aq) + Hg(\ell) \rightleftarrows Hg_2^{2+}(aq)$

Le quotient de réaction s'écrit:

$Q_r = \dfrac{[Hg_2^{2+}]}{[Hg^{2+}]}$

2.a- Initialement:

$[Hg_2^{2+}]_i = \dfrac{C_2.V_2}{V_1+V_2} = 8,0.10^{-4} mol.L^{-1}$

$[Hg^{2+}]_i = \dfrac{C_1.V_1}{V_1+V_2} = 4,0.10^{-4} mol.L^{-1}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[Hg_2^{2+}]_i}{[Hg^{2+}]_i} = \dfrac{8,0.10^{-4}}{4,0.10^{-4}} = 2,0$

Comme $Q_{r,i} < K$: le système va évoluer spontanément dans le sens direct de l'équation de la réaction qui est le sens de la consommation du mercrure.

b- Un tableau d'avancement, établi en concentrations, conduit à:

Equation	$Hg^{2+}(aq)$ +	$Hg(\ell) \rightleftarrows Hg_2^{2+}(aq)$	
Etat initial $(mol.L^{-1})$	$4,0.10^{-4}$	liquide	$8,0.10^{-4}$
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$4,0.10^{-4} - x_{v,éq}$	liquide	$8,0.10^{-4} + x_{v,éq}$

A l'équilibre, lorsque le système n'évolue plus: $K = Q_{r,éq}$;

soit: $K = \dfrac{8,0.10^{-4} + x_{v,éq}}{4,0.10^{-4} - x_{v,éq}} = 91$

La résolution de l'équation du premier degré correspondante permet d'obtenir:

$x_{v,éq} \gg 3,9.10^{-4} mol.L^{-1}$.

D'où: $[Hg_2^{2+}]_{éq} = 11,9.10^{-4} mol.L^{-1}$ et $[Hg^{2+}]_{éq} = 1.10^{-5} mol.L^{-1}$

3.a- Initialement:

$[Hg_2^{2+}]_i = \dfrac{C_2.V_2}{V_1+V_2} = 9,9.10^{-3} mol.L^{-1}$;

$[Hg^{2+}]_i = \dfrac{C_1.V_1}{V_1+V_2} = 2,0.10^{-5} mol.L^{-1}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[Hg_2^{2+}]_i}{[Hg^{2+}]_i} = \dfrac{9,9.10^{-3}}{2,0.10^{-5}} \simeq 5,0.10^{2}$

Comme $Q_{r,i} > K$: le système va évoluer spontanément dans le sens inverse de l'équation de la réaction, celui de la formation du mercure.

b- Un tableau d'avancement, établi en concentrations, conduit à:

Equation	$Hg^{2+}(aq)$ +	$Hg(\ell) \rightleftarrows Hg_2^{2+}(aq)$	
Etat initial $(mol.L^{-1})$	$2,0.10^{-5}$	liquide	$9,9.10^{-3}$
Fin d'évolution $(mol.L^{-1})$	$2,0.10^{-5} + x_{v,éq}$	liquide	$9,9.10^{-3} - x_{v,éq}$

A l'équilibre, lorsque le système n'évolue plus: $K = Q_{r,éq}$;

soit $K = \dfrac{9,9.10^{-3} - x_{v,éq}}{2,0.10^{-5} + x_{v,éq}} = 91$

La résolution de cette équation permet d'obtenir: $x_{v,éq} = 8,8.10^{-5} mol.L^{-1}$

D'où $[Hg_2^{2+}]_{éq} = 9,8.10^{-3} mol.L^{-1}$

et $[Hg^{2+}] = 1,08.10^{-4} mol.L^{-1}$

9 On introduit de la poudre de zinc dans une solution de volume $v = 100mL$ contenant du chlorure d'argent. On donne, dans les conditions de l'expérience, la constante de l'équilibre: $2Ag^+ + Zn \rightleftharpoons 2Ag + Zn^{2+}$, $K = 10^{52}$

1- Que se passe-t-il?

2.a- Exprimer K en fonction de $[Zn^{2+}]$ et $[Ag^+]$ à l'équilibre.

b- Sachant que l'on introduit du zinc en excès, et que la concentration initiale de la solution en chlorure d'argent était $c = 0,1 mol.L^{-1}$, calculer la concentration finale en ions argent (I) dans la solution.

c- A combien d'ions cela correspond-il? Comment interpréter ce résultat?

Données: Constante d'Avogadro: $N_a = 6,02.10^{23} mol^{-1}$,

masse de l'ion: $m(Ag^+) = 2,2.10^{-27} kg$

Solution

1- La constante de l'équilibre indiqué dans l'énoncé est très grande, donc la réaction

$2Ag^+ + Zn \longrightarrow 2Ag + Zn^{2+}$

peut être considérée comme quasi totale. Donc les ions Ag (I) oxydent le zinc pour donner de l'argent métallique et des ions zinc (II).

2- (a) A l'équilibre, la constante K est égale au quotient de réaction, donc;

$$K = \frac{[Zn^{2+}]}{[Ag^+]^2}$$

(b) On présente les états initial et final sous forme d'un tableau:

Etat	$2Ag^+(aq) + Zn_s \rightleftharpoons 2Ag + Zn^{2+}_{(aq)}$			
Initial	c	−	0	0
Final	$c - 2x$	−	$2x$	x

A l'équilibre, nous avons donc:

$$\frac{x}{(c-2x)^2} = 10^{52}$$

Ce résultat est extrêmement grand. Puisque l'on a nécessairement $2x < c$

(on ne peut pas consommer plus d'ions argent que l'on n'en avait au départ), x est inférieur à 0,05. Donc si le quotient du membre de gauche est très grand, ce n'est pas parce que son numérateur est très grand, mais nécessairement parce que son dénominateur est très petit. On a donc:

$(c-2x)^2 \approx 0$ soit: $x \approx \frac{c}{2}$

On a ainsi: $\frac{x}{[Ag^+]^2} = \frac{\frac{c}{2}}{2[Ag^+]^2} = 10^{52}$

donc:

$[Ag^+] = \sqrt{\frac{c}{2 \times 10^{52}}} \approx 2,2.10^{-27} mol.L^{-1}$

(c) La quantité de matière en ions argent (I) présents après réaction dans la solution est: $n = v[Ag^+]$

et le nombre d'entités correspondant est:

$$N = n.N_a = N_a v[Ag^+]$$
$$= 6,02 \times 10^{23} \times 0,1 \times 2,2 \times 10^{-27}$$
$$\approx 1,3.10^{-4}$$

Bien évidemment, on ne peut pas avoir un nombre fractionnaire d'ions argent (I). Cela signifie simplement que la plupart du temps dans la solution il n'y a pas un seul ion argent présent. Il est dans ce cas évidemment légitime de considérer que la réaction est totale, et la notion même d'équilibre chimique, se produisant dans les deux sens à vitesses égales, se trouve ici poussée à son extrême limite.

2 LES PILES ELECTROCHIMIQUES

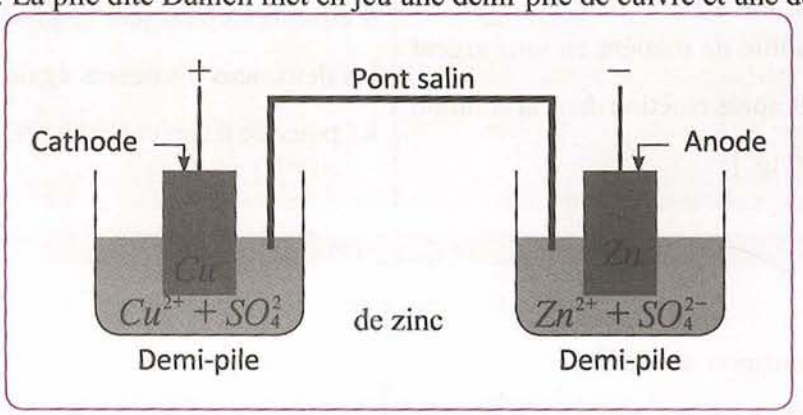
I- LES PILES:

1 Description d'une pile électrochimique:

Constitution:

• Une pile électrochimique est constituée de deux demi-piles composées chacune d'une électrode métallique d'un métal M et d'une solution contenant des ions du même métal M^{n+} (solution électrolytique), chaque demi-pile met en jeu un couple oxydant/réducteur.

• Exemple: La pile dite Daniell met en jeu une demi-pile de cuivre et une demi-pile



• On peut remplacer les électrodes de métal M par des électrodes inattaquables de platine ou de graphite.

Fonctionnement

• En fonctionnement générateur le courant d'intensité I circule à l'extérieur de la pile du pôle +, la cathode, vers le pôle -,

l'anode. Pour que le courant circule, le circuit doit être fermé à l'aide d'une résistance R , par exemple.

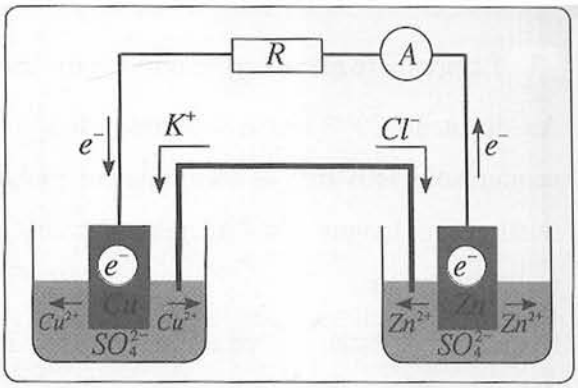
• La pile électrochimique convertit (une partie) de l'énergie chimique.

• Le pont salin contient une solution ionique conductrice qui assure la fermeture du circuit électrique (par exemple une solution de KCl).

• Les électrons circulent dans les conducteurs métalliques en sens inverse du courant d'intensité I.

• Pour respecter la neutralité électrique des solutions, les ions migrent (les cations vers

le pôle +, les anions le pôle -) y compris dans le pont salin.



Polarité de la pile:

• Polarité des électrodes:

Il y a oxydation à l'anode ⊖

Il y a réduction à la cathode ⊕

Exemple: anode: $Zn \rightleftharpoons Zn^{2+} + 2e^-$

cathode: $Ag^+ + e^- \rightleftharpoons Ag$

bilan: $2Ag^+ + Zn \rightleftharpoons Zn^{2+} + 2Ag$

on symbolise cette pile de façon conventionnelle:

$\ominus Zn/Zn^{2+}//Ag^+/Ag \oplus$

• Force électromotrice:

On mesure la fém (force électromotrice) de la pile en circuit ouvert ($I = 0$), c'est-à-dire que seul le voltmètre (de résistance supposée très grande voire infinie) est branché aux bornes de la pile: $\Delta E = E^+ - E^-$

Cela indique la polarité de la pile.

2 Relations électriques:

Quantité d'électricité débitée par une pile:

• La quantité d'électricité Q, lorsque la pile débite le courant constant d'intensité I pendant une durée Δt s'écrit:

$$Q = I.\Delta t$$

• On note 1 faraday ($1F$) la quantité d'électricité d'une mole d'électrons:

$1F = N_A.|q_{e^-}| = 6,022.10^{23} \times 1,6.10^{-19}$

$1F \approx 96500 C.mol^{-1}$

où N_A est le nombre d'Avogadro et q_{e^-} la charge électrique de l'électron, avec $N_A = 6,022.10^{23} mol^{-1}$ et $q_{e^-} = -1,6.10^{-19} C$

• la quantité d'électricité Q est directement reliée à la quantité de matière d'électrons échangée lorsque la pile débite:

$$Q = n_e.F$$

• si x_{max} est l'avancement maximal de la réaction d'oxydoréduction de la pile et z le nombre d'électrons échangés lors de la réaction, alors la quantité Q d'électricité maximale lors de la décharge de la pile peut s'écrire: $Q_{max} = z.x_{max}.F$

1 La première pile électrochimique fut inventée par Alessandro Volta en 1800.

Au début du 20ème siècle Thomas Edisson inventa la première pile rechargeable connue sous le nom : «l'accumulateur nickel-cadmium» légère et de durée de vie relativement longue. On s'intéresse dans cet exercice à l'étude simplifiée de la pile : nickel-cadmium.

Données : Constante d'équilibre associée à la réaction spontanée, dans la pile : $K = 4,5.10^{5}$.

Constante de Faraday : $1F = 9,65.10^{4} C.mol^{-1}$

On réalise à $25°C$, une pile nickel-cadium à deux compartiments séparés par un pont salin :

- Le premier-compartiment est formé d'une plaque de nickel immergée dans une solution ionique de sulfate de nickel : $Ni^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$.
- Le deuxième compartiment est formé d'une plaque de cadmium immergée dans une solution ionique de sulfate de cadmium $Cd^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$.

Les deux solutions ont le même volume $V = 0,2L$ et la même concentration molaire initiale $[Cd^{2+}]_0 = [Ni^{2+}]_0 = 0,1 mol.L^{-1}$.

Un ampèremètre relié aux deux pôles de la pile indique l'intensité $I = 0,2A$.

Sachant que la plaque de nickel représente le pôle positif, répondre aux questions suivantes :

1- Représenter le schéma du montage expérimental de cette pile.

2- Écrire l'équation bilan de la réaction.

3- Écrire l'équation de la réaction qui se produit sur chaque électrode et l'équation bilan qui se produit lors du fonctionnement de la pile étudiée.

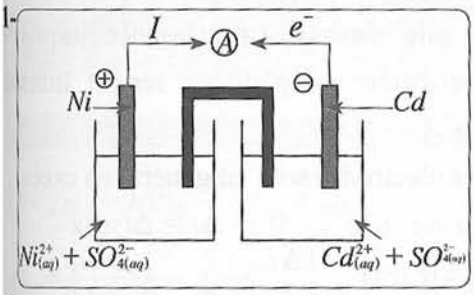
4- Calculer la valeur de quotient de réactif initial. Q_{ri} du système chimique.

Justifier le sens de l'évolution spontané de ce système.

5- Trouver la concentration des ions $Ni^{2+}_{(aq)}$ restants après une durée $\Delta t = 60\,\text{min}$ de fonctionnement de cette pile.

Solution

1-



2- $Cd \longrightarrow Cd^{2+} + 2e^-$; au pôle ⊖ : oxydation anodique

$Ni^{2+} + 2e^- \rightarrow Ni$: au pôle ⊕ : réduction cathodique

$Cd + Ni^{2+} \rightarrow Cd^{2} + Ni$

3- $Q_{r,i} = \dfrac{[Cd^{2+}]_0}{[Ni^{2+}]_0} = \dfrac{0,1}{0,1} = 1$

$Q_{r,i} < k$ le système évolue spontanément dans le sens direct.

4- $[Ni^{2+}] = \dfrac{n(Ni^{2+})}{V} = \dfrac{n_i(N_i^{2+}) - x}{V} = [N_i^{2+}] - \dfrac{x}{V}$

$n(e^-) = \dfrac{I.\Delta t}{\mathcal{F}} x$;

D'après le tableau d'avancement de la réduction : $n(e^-) = 2x$,

donc : $2x = \dfrac{I.\Delta t}{F}$,

d'où $x = \dfrac{I.\Delta t}{2F}$;

alors $[Ni^{2+}] = [Ni^{2+}]_0 - \dfrac{I.\Delta t}{2F.V}$

$[Ni^{2+}] = 0,1 - \dfrac{0,2.60.60}{2.9,65.10^4.0,2} = 0,08 mol.L^{-1}$

2 A l'aide des couples $Cu^{2+}_{(aq)}/Cu_{(s)}$ et $Zn^{2+}_{(aq)} / Zn_{(s)}$,

On réalise une pile en immergeant l'électrode de cuivre dans une solution $Cu^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$ de volume $V = 200mL$ et de concentration initiale $[Cu^{2+}_{(aq)}]_i = 10^{-2} mol.L^{-1}$ et l'électrode de zinc dans une solution : $Zn^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{(aq)}$ de volume $V = 200mL$ et de concentration initiale $[Zn^{2+}_{(aq)}] = 10^{-2} mol.L^{-1}$.

Les deux solutions sont reliées par l'intermédiaire d'un point ionique.

La transformation ayant lieu pendant le fonctionnement de cette pile est modélisée par l'équation : $Zn_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)} \overset{1}{\underset{2}{\rightleftharpoons}} Zn^{2+}_{(aq)} + Cu_{(s)}$

Données :

- Constante d'équilibre associée à l'équation précédente $k = 5.10^{36}$.
- Constante de Faraday : $F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$

1- Déterminer, en justifiant le sens de l'évolution spontané du système chimique constituant la pile.

2- Représenter le schéma conventionnel de la pile étudiée.

3- Cette pile débite un courant d'intensité $I = 75mA$.

Exprimer en fonction de $[Cu^{2+}_{(aq)}]_i$, V, F et I.

La durée maximale Δt_{max}

Solution

1- $Q_{ri} = \dfrac{[Zn^{2+}]_i}{[Cu^{2+}]_i} = \dfrac{10^{-2}}{10^{-2}} = 1 < K = 5.10^{36}$

Le système évolue spontanément dans le sens direct (sens 1).

2- Electrode $Zn(-): Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$

Electrode $Cu(+): Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$

$\ominus Zn_{(s)} | Zn^{2+}_{aq} // Cu^{2+}_{(aq)} | Cu_{(s)} \oplus$

3- $[Cu^{2+}] = \dfrac{n(Cu^{2+})}{V} = \dfrac{[Cu^{2+}]_i V}{V} - \dfrac{x}{V}$

$n(e^-) = 2x_{max}$ et $n(e^-) = \dfrac{I.\Delta t}{F}$

D'où $[Cu^{2+}] = [Cu^{2+}]i - \dfrac{I.\Delta t}{2F.V}$

La pile continue à fonctionner jusqu'à la disparition complète du réactif limitant Cu^{2+}.

Les électrodes sont en général en excès.

Donc : $[Cu^{2+}] = 0$ et $\Delta t = \Delta t \max$

$0 = [Cu^{2+}]_i - \dfrac{I.\Delta t_{max}}{2.F.V}$

$\Delta t_{max} = \dfrac{2F.V.[Cu^{2+}]_i}{I}$

$\Delta t_{max} = \dfrac{2.9,65.10^4.200.10^{-3}.10^{-2}}{75.10^{-3}}$

$\Delta t_{max} \simeq 5147s = 1h25\min 46s$

3 On réalise la pile constituée des deux couples ox/red $Ni^{2+}_{(aq)}/Ni_{(s)}$ et $Zn^{2+}_{(aq)}/Zn_{(s)}$ en immergeant une électrode de nickel dans un volume $V = 100mL$ d'une solution de sulfate de nickel $Ni^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$ de concentration initiale $[Ni^{2+}_{(aq)}]_i = 5.10^{-2} mol.L^{-1}$.

Et, une électrode de zinc dans un volume $V = 100mL$ d'une solution de sulfate de zinc $(Zn^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)})$ de concentration $[Zn^{2+}_{(aq)}]_i = 5.10 mol.L^{-1}$.

Les deux électrodes sont reliées par un pont ionique.

Données : - masses molaires atomiques :

$M(Zn) = 65,4 g.mol^{-1}$, $M(Ni) = 58,7 g.mol^{-1}$

- Le faraday : $1F = 9,65.10^4 \quad C.mol^{-1}$

La constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction :

$Zn_{(s)} + Ni^{2+}_{(aq)} \rightleftarrows Zn^{2+}_{(aq)} + Ni_{(s)}$, à $25°C$ est : $K = 10^{18}$.

Lorsqu'on relie les deux électrodes Zn et Ni par un conducteur ohmique, un ampèremètre indique le passage d'un courant d'intensité $I = 0,1A$.

1.1- Calculer le quotient de réaction. $Q_{r,i}$, à l'état initial et montrer que le système formée par la pile évolue dans le sens direct.

1.2- Justifier le sens du courant électrique transversant le conducteur ohmique.

2- On considère que la réaction est totale et que les électrodes sont en excès.

2.1- Déterminer la durée maximale Δt_{max} de fonctionnement de la pile.

2.2- En déduire la variation de masse Δm de l'électrode de nickel.

Solution

1.1- $Zn_{(s)} + Ni^{2+}_{(aq)} \rightleftarrows Zn^{2+}_{(aq)} + Ni_{(s)}$

$$Q_{r,i} = \frac{[Zn^{2+}_{(aq)}]_i}{[Ni^{2+}_{(aq)}]_i} = \frac{5.10^{-2}}{5.10^{-2}} = 1 < K$$

Le système chimique formant la pile évolue spontanément dans le sens direct.

1.2- Sur l'électrode de zinc il se produit l'oxydation : $Zn_{(s)} \longrightarrow Zn^{2+}_{(aq)} + 2e^-$.

Cette électrode joue le rôle d'anode $\ominus$.

- Sur l'électrode de nickel, il se produit la réduction.

$Ni^{2+}_{(aq)} + 2e^- \longrightarrow Ni_{(s)}$

Cette électrode joue le rôle de cathode $\oplus$.

Dans le conducteur ohmique, le courant passe de l'électrode de nickel vers l'électrode de zinc.

2.1- Le réactif limitant étant les ions Ni^{2+} car Zn est en excès, donc $x_{max} = n_i(Ni^{2+}) = (Ni^{2+}).V = 5.10^{-3} mol$.

On a : $n(e^-)_{max} = 2x_{max}$;

$Q_{max} = n(e^-)_{max}.\mathcal{F}$ et $Q_{max} = I.\Delta t_{max}$

Alors : $\Delta t_{max} = \frac{n(e^-)_{max}.\mathcal{F}}{I} = \frac{2x_{max}.\mathcal{F}}{I}$

$$\Delta t_{max} = \frac{2.5.10^{-3}.9,65.10^4}{0,1} = 9,65.10^3 s$$

$$= 2h40mn50s$$

2.2- Au bout de la durée Δt_{max}, la variation de la masse de nickel est :

$\Delta m = (\Delta n)_{max} M = (n_f - n_i).M = x_{max}.M(n_i)$

$\Delta m = 5.10^{-3}.58,7 = 0,294g$

4 On associe par un pont salin une demi-pile obtenue en introduisant une plaque de zinc fraîchement décapée dans $V = 100mL$ d'une solution de sulfate de zinc (II), $Zn^{2+} + SO_4^{2-}$, de concentration $C = 0,10 mol.L^{-1}$ et une demi-pile obtenue en introduisant une tige d'argent dans $V' = 100mL$ d'une solution de nitrate d'argent, $Ag^+ + NO_3^-$, de concentration $C' = 5,0.10^{-2} mol.L^{-1}$. Lors du fonctionnement de cette pile, la masse de l'électrode d'argent augmente alors que celle de l'electrode de zinc diminue. Cette pile fonctionne pendant 5,0 heures en débitant un courant d'intensité considéré comme constante $I = 15mA$.

Donnée : $\mathcal{F} = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$; $M(Ag) = 108g.mol^{-1}$

1- Écrire l'équation de fonctionnement de cette pile en précisant le sens d'évolution de ce système.

2- Quelle est la quantité d'électricité alors mise en jeu?

3- Quelle est la variation de la masse de l'électrode d'argent pendant cette expérience?

4- Quelle est la variation correspondante de la concentration des ions zinc (*II*) dans l'autre demi-pile? Déterminer la concentration finale en ions zinc (*II*).

5- Déterminer la capacité de cette pile.

Solution

1- Vu l'évolution des masses des électrodes, un dépôt d'argent se produit pendant que du zinc est consommé. Le système évolue donc dans le sens direct de l'équation :

$Zn(s) + 2Ag^+(aq) \rightleftharpoons Zn^{2+}(aq) + 2Ag(s)$.

2 - Par définition :

$Q = I.\Delta t = 15.10^{-3} \times 5,0 \times 3600 = 2,7.10^2 C$

3- La quantité initiale d'ions argent est égale à :

$n_0(Ag)^+ = C'.V' = 5,0.10^{-3} mol$.

Établissons un tableau d'avancement relatif à la réaction qui se produit sur l'électrode d'argent :

Equation	$Ag^+ + e^- \rightleftharpoons Ag$		
Etat initial (mol)	$5,0.10^{-3}$		$n_0(Ag)$
Etat en cours d'évolution (mol)	$5,0.10^{-3} - y$		$n_0(Ag) + y$

La quantité d'électrons échangés au cours de la transformation est reliée à l'avancement y de cette réaction : $n(e^-) = y$.

Or cette quantité d'électrons est aussi reliée à la quantité d'électricité que la pile a fait circuler pendant la même durée : $Q = n(e^-)..\mathcal{F}$.

L'avancement de la réaction à l'électrode d'argent s'en déduit : $y = \frac{Q}{\mathcal{F}}$.

On peut alors exprimer la variation correspondante de la quantité d'argent par: $n(Ag) - n_0(Ag) = y = \frac{Q}{\mathcal{F}}$.

La variation de la masse de l'électrode d'argent s'en déduit :

$$\Delta m(Ag) = (n(Ag)) - n_0(Ag).M(ag)$$

$$= \frac{Q.M(Ag)}{\mathcal{F}} = 0,30g$$

4- Puisque la masse de l'électrode de zinc diminue lorsque la pile débite un courant, c'est qu'au cours de la transformation le zinc est consommé.

La seule possibilité est la réaction d'oxydation du zinc en ions zinc (II) Zn^{2+}.

La quantité initiale d'ions zinc (II) est égale :

$n_0(Zn^{2+}) = C.V = 1,0.10^{-2} mol$

Établissons un tableau d'avancement relatif à la réaction qui se produit sur l'électrode de zinc :

Equation	$Zn = 2e^- + Zn^{2+}$		
Etat initial (mol)	$n_0(Zn)$		$1,0.10^{-2}$
Etat en cours d'évolution (mol)	$n_0(Zn) - y'$		$1,0.10^{-2}$

La quantité d'électrons échangés au cours de la transformation est reliée à l'avancement y' de cette réaction : $n(e^-) = 2y'$.

Or cette quantité d'électrons est aussi reliée à la quantité d'électricité que la pile a fait circuler pendant la même durée : $Q = n(e^-).\mathcal{F}$.

L'avancement de la réaction à l'électrode de zinc s'en déduit : $2y' = \frac{Q}{\mathcal{F}}$

On peut alors exprimer la variation correspondante de la quantité d'ions zinc (II) :

$n(Zn^{2+}) - n_0(Zn^{2+}) = y' = \frac{Q}{2.\mathcal{F}}$

La variation de la concentration en ions zinc (II) s'en déduit :

$\Delta[Zn^{2+}] = \frac{n(Zn^{2+}) - n_0(Zn^{2+})}{V}$

$y' = \frac{Q}{2.\mathcal{F}.V} = 1,4.10^{-2} mol.L^{-1}$

La concentration finale en ions zinc (II) vaut alors :

$[Zn^{2+}] = [Zn^{2+}]_0 + \Delta[Zn^{2+}] = 0,11 mol.L^{-1}$

5- Lors du fonctionnement de la pile, les solides sont a priori en excès, le réactif limitant est donc l'ion argent Ag^+.

D'après le tableau d'avancement établi en 3., l'avancement maximal y_{max} est tel que $n(Ag^+) = 5,0.10^{-3} - y_{max} = 0$; d'où : $y_{max} = 5,0.10^{-3} mol$.

La capacité Q_{max} de la pile est la quantité maximale d'électricité qu'elle peut faire circuler.

Puisque $Q = y.\mathcal{F}$

$Q_{max} = y_{max}.\mathcal{F} = 4,8.10^2 C$

5 Les piles électrochimique sont conçues à obtenir de l'énergie électrique à partir de l'énergie chimique que produit une réaction d'oxydoréduction.

On s'intéresse dans cet exercice à la pile nickel-cobalt.

Données :

- $1F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$
- $M(Ni) = 58,7 g.mol^{-1}$

La constante d'équilibre associée à la réaction : $Ni^{2+}_{(aq)} + Co_{(s)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} Ni_{(s)} + Co^{2+}_{(aq)}$ est $K = 10^2$ à $25°C$.

On réalise une pile en introduisant une plaque de nickel dans un bécher contenant un volume $V = 100mL$ d'une solution aqueuse de sulfate de nickel II $Ni^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$ et

de concentration molaire initiale $C = [Ni^{2+}_{(aq)}]_i = 3.10^{-2} mol.L^{-1}$ et, une plaque de cobalt dans un autre bécher contenant un volume $V = 100mL$, d'une solution acqueuse de sulfate de de coblat II $CO^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$ de volume $V = 100mL$ et de concentration initiale $C = [CO^{2+}_{(aq)}]_i = 3.10^{-2} mol.L^{-1}$.

On relie les deux solutions par un point salin et on monte en série, entre les deux électrodes de la pile, un ampèremètre et un interrupteur.

Lorsqu'on ferme le circuit à l'instant $t_0 = 0$, il est alors traversé par un courant électrique dont l'intensité est considérée constante I.

1- Choisir la bonne réponse parmi les propositions qui suivent:

a- Le sens spontané de l'évolution du système chimique formant la pile est le sens (2).

b- L'électrode de cobalt est la cathode.

c- Les électrons circulent dans le pont salin pour assurer la neutralité électrique.

d- A L'extérieur de la pile, le sens du courant électrique est de l'électrode de nickel vers l'électrode de cobalt.

e- L'oxydation se fait à la cathode.

2- Montrer que la durée Δt_e nécessaire à atteindre l'état d'équilibre chimique a pour expression :

$$\Delta t_e = \frac{2CV.F}{I} \cdot \frac{K-1}{K+1}$$

Calculer Δt_e sachant que $I = 100mA$.

3- Calculer la variation Δm de la masse de nickel entre les instants $t_0 = 0$ et $t = t_e$

Solution

1- a) Le quotient de réaction à l'initial est :

$$Q_{r,i} = \frac{[Co^{2+}]_i}{[Ni^{2+}]i} = \frac{C}{C} = 1 < k = 10^2$$

Le système se déplace spontanément dans le sens direct (sens 1).

La proposition est donc fausse

b) Faux . C'est le nickel qui est la cathode.

c) Faux, les e^- ne circulent pas dans le pont le salin.

d) Faux.

e) Faux.

2- Le tableau d'avancement de la réaction bilan permet d'écrire, à l'équilibre

$$K = \frac{[Co^{2+}]_e}{[Ni^{2+}]_e} = \frac{\frac{CV + xe}{V}}{\frac{CV - x_e}{V}} = \frac{CV + x_e}{CV - x_e}$$

$$CV.K - x_e K = CV + x_e$$

alors : $x_e = CV\dfrac{(K-1)}{K+1}$

Le nombre de moles des e^- échangés est :

$n(e^-) = 2.x_e$ avec $n(e^-) = \dfrac{Q}{F} = \dfrac{I\Delta te}{F}$

$$x_e = \frac{I.\Delta te}{2F} \quad (2)$$

il vient :

En remplaçant x_e dans (1) ;

$$\frac{I.\Delta te}{2F} = CV.\frac{K-1}{K+1}$$

$$\Delta t_e = \frac{2FCV}{I}\frac{K-1}{K+1}$$

$$\Delta t_e = \frac{2.9,65.10^4.3.10^{-2}.0,1}{0,1}\ \frac{100-1}{100+1}$$

$$\Delta t_e = 5,675.10^3 s$$

3- $\Delta m = \Delta n.M = (n_f - n_i).M = x_e.M$

$$= \frac{I.\Delta te}{2F}M$$

$$\Delta m = \frac{0,1.5,675.10^3.58,7}{2.9,65.10^4} = 0,1726g$$

6 Une pile Leclenché est constituée d'une électrode de zinc de forme cylindrique constituant l'enveloppe de la pile.

A l'intérieur de la pile, la cathode est une électrode de graphite immergée dans une solution électrolytique gélifiée de $(NH_4^+ + Cl^-)$ contenant de la poudre de dioxyde de manganèze MnO_2.

Le mélange réactionnel contient initialement $m_1 = 1g$ de MnO_2, $m_2 = 19,6g$ de zinc et un excès de protons H^+ fourni par NH_4^+.

Données : $M(H) = 1g.mol^{-1}$; $M(Zn) = 65g.mol^{-1}$; $M(Mn) = 55g.mol^{-1}$; $M(O) = 16g.mol^{-1}$; $F = 96500C.mol^{-1}$

- Les couples intervenant sont : Zn^{2+}/Zn ; $MnO_2/MnOOH$
- Le symbole conventionnel de la pile est le suivant :

$(-)Zn/Zn^{2+} \| MnO_2H | MnO_2 | C(+)$

1- Écrire l'équation de l'oxydation et celle de la réduction.

En déduire l'équation bilan de la réaction ayant lieu lorsque la pile débite.

Cette réaction sera considérée totale.

2- Déterminer l'avancement maximal de la réaction bilan de la pile.

3- On laisse la pile fonctionner pendant une durée $\Delta t = 1h30\,\text{min}$ en débitant un courant d'intensité $I = 50mA$.

3.1- Calculer la variation de masse de l'électrode de zinc.

3.2- La pile est-elle consommée pendant la durée $\Delta t = 1h30\,\text{min}$.

3.3- Déterminer la durée au bout de laquelle la pile s'arrête de fonctionner spontanément.

Solution

1- Oxydation anodique : $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$

Réduction cathodique :

$MnO_2 + H^+ + e^- \rightarrow MnO_2H$

Equation bilan :

$Zn + 2MnO_2 + 2H^+ \rightarrow Zn^{2+} + 2MnO_2H$

2- Le mélange initial des réactifs est :

$$n_1 = n_0(Zn) = \frac{m}{M(Zn)} = 0,30mol$$

$$n_0 = n_0(MnO_2) = \frac{m_2}{M(MnO_2)}$$

$$= 1,15.10^{-2}mol$$

Etat de système	x	$n(Zn)$	$n(MnO_2)$	$n(Zn^{2+})$	$n(MnO_2H)$
Etat initial $(t_0 = 0)$	$x = 0$	n_1	n_2	0	0
Etat final $(\Delta t = t)$	x_f	$y - x$	x_f	x_f	$2x_f$
$x_{max} = x_f = 5,75.10^{-3}mol$					

3.1- $\Delta m = m_f(Zn) - m_i(Zn)$

$$= (n_f - n_i).M = -x_f.M$$

$$= -\frac{n(e^-)}{2}.M(Zn)$$

$$\Delta m = -\frac{Q.M(Zn)}{2.\mathcal{F}} = -\frac{I.\Delta t.M(Zn)}{2.\mathcal{F}}$$

$$\Delta m = -\frac{50.10^{-3}.1,5.3600.65}{2.96500}$$

$$= -0,091g$$

3.2- Calculons la masse consommée en MnO_2 pendant la durée $\Delta t = 1h30\,\text{min}$.

$$\Delta m(MnO_2) = \Delta n.M_2$$

$$= -2x.M_2 = -2.\frac{n(e^-)}{2}M_2$$

$$= -\frac{Q}{F}.M_2$$

$$= -\frac{I.\Delta t.M_2}{F}$$

$$\Delta m = \frac{-50.10^{-3}.1,5.3600.87}{96500} \simeq -0,24g$$

La réaction étant totale et elle ne s'arrête que lorsque le réactif limitant disparaît totalement.

La pile n'est pas totalement consommée car le réactif limitant MnO_2 n'a pas perdu que $0,24g$ de sa masse initiale $1g$.

3.3- $Q_{max} = n(e^-)_{max}F$ et ; $ne^- = x'_{max}$

et $Q_{max} = I.\Delta t_{max}$

x'_{max} : avancement maximal de la réduction

x_{max} : avancement maximal de l'équation bilan.

$x_{max} = \frac{n_2}{2}$ et $x'_{max} = \frac{n_2}{1}$; d'où :

$x'_{max} = 2x_{max}$

alors : $I\Delta t_{max} = 2x_{max}.F$

D'où : $\Delta t_{max} = \frac{2x_{max}F}{I}$

$$\Delta t_{max} = \frac{2.5,75.10^{-3}.96500}{50.10^{-3}}$$

$$= 2,22.10^4 s \simeq 6h10\,\text{min}$$

7 Une pile bouton de diamètre $1cm$ et d'épaisseur $4mm$, produit un courant électrique d'intensité $I = 100\mu A$ pendant une durée $\Delta t = 10^3 h$ au cours de laquelle la tension entre l'anode et la cathode est considérée constante $U = 1,6V$. Son fonctionnement fait intervenir les deux couples suivants : $Zn(OH)_4^{-2}/Zn$ et Ag_2O/Ag.

La réaction ayant lieu dans cette pile a pour équation :

$$Zn + Ag_2O + 2HO^- + H_2O \rightleftarrows Zn(OH)_4^{2-} + 2Ag$$

Donées

Les couples intervenants sont : Ag_2O/Ag et $Zn(OH)_4^{2-}/Ag$

$F = 96500C.mol^{-1}$; $M(Ag) = 108g.mol^{-1}$; $M(Zn) = 65g.mol^{-1}$; $M(O) = 16g.mol^{-1}$.

1- Ecrire la demi-équation au niveau de chaque électrode.

2- Déterminer la quantité d'électricité fournie par la pile.

3- Calculer l'énergie volumique de la pile en Wh/cm^3.

4- Déterminer la masse minimale de chacun des réactifs.

Solution

1- $Zn + 4HO^- \rightleftarrows Zn(OH)_4^{2-} + 2e^-$

$Ag_2O + H_2O + 2e^- \rightleftarrows 2Ag + 2HO^-$

2- $Q = I.\Delta t = 100.10^{-16}.10^3.3600 = 360\,C$

3- $\mathscr{E} = \dfrac{E}{V} = \dfrac{U.I.\Delta t}{V}$

$V = S.e = \pi r^2.e = \pi\,(0,5)^2.0,4$

$= 0,314cm^3$

$\mathscr{E} = \dfrac{1,6.10^{-4}.10^3}{0,314} \simeq 0,51wh.cm^{-3}$

4- Les deux demi-équations, (oxydation et réduction ont le même avancement qui est le même que celui de l'équation bilan.

Cet avancement, après la durée Δt est :

$$x = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{Q}{2.\mathscr{F}} = 1,865.10^{-3}mol$$

Un tableau d'avancement permet d'écrire :

$n_f(Zn) = n_i(Zn) - x \geqslant 0 \Rightarrow m_i(Zn)$

$\geqslant x.\,M(Zn)$

$m_i(Zn) \geqslant m(\min) = x.\,M(Zn) = 0,12g$

$n_f(Ag_2o) = n_i(Ag_2O) - x \geqslant 0$

$\Rightarrow m_i(Ag_2O) \geqslant x.M(Ag_2O)$

$m'(\min) = x\,M(Ag_2O) = 0,43g$

8 Un accumulateur nickel-cadmium exploite les deux couples redox $NiO(OH)/Ni(OH)_2$ et $Cd(OH)_2/Cd$. Les réactions ont lieu en milieu basique, et le cadmium subit une oxydation.

1- Donner les deux demi-équations des réactions se produisant aux électrodes.

2- Écrire l'équation de la réaction de fonctionnement.

3- Quelle est la borne négative ? et la borne positive?

Solution

1- Puisque le cadmium subit une oxydation, il faut considérer le réducteur dans le couple $Cd(OH_2)/Cd$. On commence donc par écrire (sans l'équilibrer) l'équation : $Cd = Cd(OH)_2 + e^-$.

On équilibre les atomes d'oxygène en milieu basique, non pas avec de l'eau, mais avec des ions hydroxyde HO^-.

On équilibre, enfin, les charges : $Cd + 2HO^- = Cd(OH)_2 + 2e^-$ (1)

De même, pour l'élément nickel qui subit cette fois-ci une réduction :

$NiO(OH) + e^- = Ni(OH)_2$

Comme il y a des charges négatives à gauche, il en faudra aussi à droite. On fait intervenir des ions hydroxyde :

$NiO(OH) + H_2O + e^- = Ni(OH)_2 + HO^-$ (2)

2- L'équation de la réaction de fonctionnement combine les deux équations (1) et (2) de manière à ne plus faire apparaître d'électrons dans le bilan : (1) +2 (2) donne :

$Cd + 2HO^- + 2NIO(OH) + 2H_2O$
$= Cd(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 + 2HO^-$

Soit après simplification :

$Cd + 2NiO(OH) + 2H_2O$
$= Cd(OH)_2 + 2Ni(OH)_2$

3- A la borne négative du générateur, il y a émission extérieure d'électrons, donc une oxydation : c'est le cadmium. La borne positive est celle formée par le couple du nickel.

9 Les accumulateurs au plomb peuvent être utilisés dans les véhicules. Ils résultent généralement de l'association d'éléments plus petits produisant chacun environ une fem de $2V$.

Sur un accumulateur, on peut relever les indications suivantes : $12V$, $40\ AH$, $250\ A$.

Les couples utilisés sont $PbO_2/PbSO_4$ et $PbSO_4/Pb$

Données : masse molaire atomique (en $g.mol^{-1}$) : $M(Pb) = 207$, $M(PbO_2) = 239$
$M(H_2SO_4) = 98$

1- Quelle est la signification de chacune des indications figurant sur l'accumulateur ?

2- Dans l'accumulateur étudié, combien y a-t-il de sous-piles et comment les a-t-on associées?

3- En milieu fortement acidifié (par de l'acide sulfurique), le plomb s'y oxyde en Pb^{2+} qui donne ensuite un précité : $PbSO_4$.

Écrire les équations ses produisant aux électrodes.

4- Préciser l'équation globale de fonctionnement et les électrodes positive et négative.

5- La réaction étant totale, quelles masses minimales en réactifs faut-il prévoir?

6- Quelle est la durée théorique de fonctionnement de cet accumulateur s'il débite en permanence un courant d'intensité $I = 10A$?

Solution

1- La valeur $12V$ représente la tension délivrée par la batterie.

La valeur $250A$ est l'intensité maximale qu'elle peut débiter.

La valeur $40Ah$ est la quantité d'électricité maximale qu'elle peut produire.

2- Pour produire une tension de $12V$ à partir d'éléments produisant chacun une tension de $2V$, il faut en associer 6 en série.

3- Le plomb s'oxyde ; soit :

$Pb \rightarrow Pb^2 + 2e^-$;

Ensuite $Pb^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4$;

D'où $Pb + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4 + 2e^-$ (1)

- Dans l'autre couple, il se produit la réduction de PbO_2.

$PbO_2 + 2e^- + So_4^{2-} + 4H^+ \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O$ (2)

(On commence par équilibrer l'élément soufre S, puis oxygène O avec des molécules d'eau. Et on termine par l'équilibrage des charges grâce à des ions H^+ car on travaille en milieu acide).

4- La combinaison de l'oxydation (1) et la réduction (2) donne :

$PbO_2 + Pb + 2SO_4^{-2} + 4H^+$

$\rightarrow 2Pb^-SO_4 + 2H_2O$

L'oxydation se fait à l'anode : électrode de Pb (pôle négatif de la pile) et la réduction se fait à la cathode : électrode de PbO_2 (pôle positif de la pile).

5- Le tableau d'avancement de l'oxydation de Pb permet d'écrire :

$$n_i(Pb) = x_{max} = \frac{n(e^-)\max}{2} = \frac{Q_{max}}{2F}$$

$$n_f(Pb) = n_i(Pb) - x_{max} = 0$$

$$n_i(Pb) = \frac{Q_{max}}{2F}$$

$$n_i(Pb) = \frac{Q_{max}}{2F}.M(Pb)$$

A N : $n_i(pb) = \frac{40-3600}{2-96500}207 = 154g$

De la même pour PbO_2 :

$n_f(PbO_2) = n_i(pbO_2) - x \geqslant 0$

$n_i(PbO_2) \geqslant x.M(PbO_2) = \frac{n(e^-)}{2}.M(PbO_2)$

$= \frac{Q}{2F}.M(PbO_2)$

A N : $n_i(PbO_2) = \frac{40.3600}{2.96500}.239 = 178g$

il faut aussi considérer l'acide sulfurique :

$n_i(H_2SO_4) = \frac{1}{2}n_i(H^+)$ car $H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}$

$n_i(H_2SO_4) = 2.x$

$n_f(H^+) = n_i(H^+) - 4x = n_i(H^+) - 4.\frac{n(e^-)}{2} \geqslant 0$

$n_i(H^+) = 2n(e^-) = 2.\frac{Q}{F}$

$2n_i.(H_2SO_4) \geqslant 2.\frac{Q}{F}$

$n_i(H_2SO_4) = \frac{Q}{F}.M(H_2SO_4)$

$n_i(H_2SO_4) = \frac{40.3600}{96500}.98 = 146g$

6- Comme $Q = I.t$, (on suppose l'intensité constante), on a : $t = \frac{Q}{I}$

$t = \frac{40 \times 3600}{10}$

$t = 3600 \times 4s$

$t = 4$ *heures*

10 Les piles à combustible, utilisées depuis longtemps notamment pour des missions spatiales, sont actuellement envisagées pour remplacer les moteurs à explosion dans les véhicules. Une telle pile exploite le réaction d'oxydoréduction entre du dihydrogène gazeux et du dioxygène gazeux; elle produit ainsi de l'eau liquide. selon la réaction bilan suivante :

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

On donne : $R = 8,314(SI)$: Constante des gaz parfaits.

$T(K) = 273,15 + \theta(°C)$ $M(H) = 1g.mol^{-1}$ $M(O) = 16g.mol^{-1}$

Les gaz sont supposés parfaits. eau=1kg/L

1- quels couples Redox sont mis en jeu ici ?

2- La réaction libère environ $250kJ$ par mole d'eau liquide produite à 25°C. Une pile d'engin spatial libère au total environ 150 L d'eau. Quelle énergie peut être libérée par la pile ?

3- La pile a été conçue pour emmagasiner une énergie chimique totale initiale de $5.10^5 W.h.$. Quel est le taux global de conversion de l'énergie chimique en énergie électrique?

4- Quels volumes faut-il emporter en gaz réactifs, sachant que, pour limiter leur encombrement, ils sont pressurisés sous 300 bars et refroidis à 10°C ?

Solution

1- Les deux couples Redox en jeu sont ceux de l'eau (par définition même, le dioxygène est un oxydant) : O_2/H_2O et H_2O/H_2.

2- Le volume $V = 150\ L$ d'eau correspond à une masse $m = 150kg$ d'eau. Sachant qu'une mole d'eau pèse $M = 18g$, on a libéré une quantité de matière $n = \frac{m}{M}$ en eau. $n = \frac{150\,000}{18} = 8,3.10^3\ mol$.

L'énergie libérée est donc théoriquement : $E = 250kJ/mol \times 8,3.10^3 mol = 2,1.10^6 kJ$.

3- La pile a été conçue pour emmagasiner une énergie chimique totale initiale de $5.10^5 W.h$, soit une énergie $E' = 5.10^5 \times 3600J = 1,8.10^6 kJ$.

Le taux de conversion est :

$$\frac{E'}{E} = \frac{1,8}{2,1} = \frac{6}{7} = 86\%$$

4- La production de la quantité de matière n en eau correspond à la consommation de la même quantité n en dihydrogène et la consommation de la quantité $\frac{n}{2}$ en dioxygène, selon l'équation : $2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O$.

Donc il faut emporter $n_{H_2} = 8,3.10^3 mol$ et la quantité $n_{O_2} = 4,15.10^3 mol$ en dioxygène.

Ces deux réactifs sont des gaz, ils satisfont donc l'équation d'état des gaz parfaits $PV = nRT$, soit $V = \frac{nRT}{P}$.

La pression doit être exprimée en pascal ($1bar = 10^5 Pa$) et la température en kelvins. Le volume de dihydrogène est donc :

$$V = \frac{8,3.10^3 \times 8,314 \times (273,15 + 10)}{300.10^5}$$

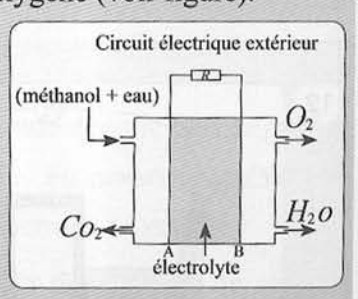
$$= \frac{8,3 \times 8,314 \times 283,15}{3.10^4} = 0,65m^3 = 650L$$

De même, le volume de dioxygène est :

$$V' = \frac{V}{2} = 0,32m^3 = 0,325m^3 = 325L$$

11 Une pile à combustile est formée par deux compartiments séparés par un électrolyte jouant le rôle de pont ionique et de deux électrodes A et B.

Cette pile est alimentée par le méthanol liquide et le dioxygène (voir figure).



Données :

- Constante de Faraday $F = 96500C.mol^{-1}$.
- Masse volumique du méthanol liquide : $\rho = 0,79g.cm^{-3}$;
- Masse molaire du méthanol : $M(CH_3OH) = 32g.mol^{-1}$;
- Couples ox/red intervenant dans cette transformation : $O_2(g)/H_2O(\ell)$ et $CO_2(g)/CH_3OH(\ell)$

- Sur l'une des électrodes, il se produit pendant le fonctionnement de cette pile, la

transformation suivante : $CH_3OH + H_2O \rightarrow CO_2 + aH^+ + b.e^-$.

1- Déterminer les coefficients a et b.

2- Sur lequel des deux électrodes A et B se produit cette transformation? Justifier.

3- Écrire l'équation modélisant la transformation qui a eu lieu sur l'autre électrode. Attribuer à chaque électrode le nom qui lui correspond.

4- Cette pile fournit au circuit extérieur un courant d'intensité $I = 4,5A$ pendant une durée $\Delta t = 1h30\,\text{min}$ de fonctionnement.

Trouver le volume V de méthanol consommé.

Solution

1- Equilibrage de l'élément H: $4 + 2 = a \Rightarrow a = 6$

Equilibrage des charges:

$O = +1a(+1) + b(-1) = a - b$

D'où : $b = a = 6$

2- La réaction précédente est l'oxydation du méthanol qui arrive à l'électrode A pour subir cette oxydation et fournit les électrons vers l'extérieur.

3- Sur l'électrode B, il se produit la réduction de O_2 appartenant au couple O_2/H_2O :

$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$

4- Le tableau descriptif de l'oxydation nous permet d'écrire pour l'alcool : $n = n_0 - x$

n : quantité de matière restante après Δt.

La quantité consommée est alors :

$$n_C = n_0 - n = x = \frac{n(e^-)}{6}$$

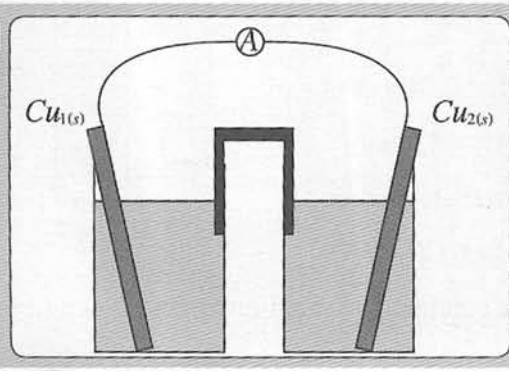
$\frac{m_C}{M} = \frac{Q}{6F} = \frac{I\Delta t}{6F}$, m_C : consommée ; ou encore $\frac{\rho V}{M} = \frac{I.\Delta t}{6F}$

Le volume V consommée est :

$$V = \frac{I.\Delta t.M}{6\rho.F}$$

$$V = \frac{4,5.5400.32}{6.0,79.96500} = 1,7cm^3$$

12



Attention:

On veillera bien dans cet exercice à faire attention aux indices 1 et 2 des demi-piles, les deux couples rédox pour cette pile étant identiques à savoir $Cu^{2+}{}_{(aq)}/Cu_{(s)}$

On donne l'équation bilan de la transformation associée au fonctionnement de cette pile, à savoir : $Cu^{2+}{}_{1(aq)} + Cu_{2(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+}{}_{2(aq)} + Cu_{1(s)}$

On précise d'autre part que la valeur du quotient de réaction à l'équilibre (constante d'équilibre) vaut : $Q_{r,éq} = K = 1$.

$[Cu^{2+}]_{1,i} = Co_1 = 1,0.10^{-1} mol/L$; $[Cu^{2+}]_{2,i} = Co_2 = 1,0.10^{-3} mol/L$

1- D'après l'équation-bilan de la transformation, déterminer les polarités de cette pile ainsi que le sens de circulation des électrons et celui du courant.

2- Donner l'expression littérale du quotient de réaction de cette transformation. En déduire la valeur du quotient de réaction initiale $Q_{r,i}$ compte tenu des valeurs de l'énoncé. Justifier alors le sens d'évolution du système et en conséquence le sens de l'écriture choisi pour l'équation-bilan.

3- Compte tenu de la valeur du quotient de réaction à l'équilibre, que peut-on dire des concentrations en ions Cu^{2+} dans chacune des demi-piles?

4- Compléter le tableau d'avancement suivant :

	$Cu_{2(s)} + Cu^{2+}{}_{1(aq)} \rightarrow Cu_{1(s)} + Cu^{2+}{}_{2(aq)}$			
Etat initial $x = 0$	excès	$n_{01} = C_{01} V_0$	excès	$n_{02} = C_{02} V_0$
Etat final $x = x_{éq}$				

Compte tenu de la question 3. Et en utilisant le tableau d'avancement, déterminer la valeur de l'avancement à l'équilibre $x_{éq}$.

5- Déterminer la quantité d'électricité qui aura circulé jusqu'à obtenir l'état d'équilibre.

Solution

1- D'après l'équation-bilan, le métal cuivre du couple 2 est oxydé selon la demi-équation rédox :

$Cu_{2(s)} \rightarrow Cu^{2+}{}_{2(aq)} + 2e^-$

Il y a donc production d'électron à l'électrode 2 - celle de droite - cette dernière constitue donc le pôle négatif de la pile étudiée. En conséquence, le pôle positif est l'électrode de gauche !

2- L'expression du quotient de réaction s'écrit en affectant la valeur $(+1)$ à toutes les phases solides.

$$Q_{r,i} = \frac{[Cu^{2+}{}_2]}{[Cu^{2+}{}_1]}$$

Sa valeur considérée dans l'état initial s'écrit :

$$Q_{r,i} = \frac{[Cu^{2+}{}_2]_i}{[Cu^{2+}{}_1]_i} = \frac{C_{02}}{C_{01}} = \frac{1,0.10^{-3}}{1,0.10^{-1}} = 1,0.10^{-2}.$$

La valeur calculée est bien inférieure à la constante d'équilibre k. L'évolution de la transformation aura donc bien lieu dans le sens direct.

3- La constante d'équilibre s'écrit :

$$Q_{r,éq} = \frac{[Cu^{2+}{}_2]_{éq}}{[Cu^{2+}{}_1]_{éq}} = 1$$

Ainsi, lorsque l'équilibre est atteint, on vérifie $[Cu^{2+}{}_1]_{éq} = [Cu^{2+}{}_2]_{éq}$. Ce qui signifie que la pile débitera un courant électrique jusqu'à ce que les concentrations dans les deux compartiments s'égalisent.

	$Cu_{2(s)} + Cu^{2+}{}_{1(aq)} \rightarrow Cu_{1(s)} + Cu^{2+}{}_{2(aq)}$			
Etat initial $x = 0$	excès	$n_{01} = C_{01}V_0$	excès	$n_{02} = C_{02}V_0$
Etat final $x = x_{éq}$	excès	$C_{01}V_0 - x_{éq}$	excès	$C_{02}V_0 + x_{éq}$

A l'équilibre, les concentrations devant être égales, le volume des deux compartiments étant le même, cela revient à dire que le nombre de moles en ions cuivre est le même dans chaque compartiment, on a alors :

$C_{01}V_0 - x_{éq} = C_{02}V_0 + x_{éq}$ soit

$$x_{éq} = \frac{C_{01}V_0 - C_{02}V_0}{2}$$

L'application numérique donne :

$$x_{éq} = \frac{C_{01}V_0 - C_{02}V_0}{2} = 4,95.10^{-3} mol$$

4- La demi-équation rédox montre que lorsqu'une mole de cuivre réagit, deux moles d'électrons sont mises en circulation, on a en conséquence : $n_{e^-} = 2x_{éq} = 9,90.10^{-3} mol$.

Il y correspond une quantité d'électricité : $Q = n_e.F = 9,90.10^{-3} \times 96500 = 955C$.

13 Il est possible de réaliser une pile à partir d'une lame de zinc et de l'air ambiant, plus précisément le dioxygène. En milieu basique, le dioxygène peut oxyder du zinc métallique. Il se forme alors de l'oxyde de zinc (II).

1- Préciser les deux couples Redox qui interagissent ici.

2- Donner l'équation de la réaction d'oxydoréduction étudiée. On rappelle que l'étude est faite en milieu alcalin (basique).

3- La pile débite un courant d'intensité constante $I = 1mA$. Sa capacité électrique est de $50Ah$. Sa fem est $E = 1,2V$.

Calculer la durée de fonctionnement théorique de cette pile.

4- Quelle masse de zinc a disparu en fin de fonctionnement ? on donne la masse molaire du zinc atomique : $M = 65,4g.mol^{-1}$.

5- Quel volume d'air a été consommé ?

Dans les conditions de fonctionnement le volume molaire gazeux est $24L$ et l'air est supposé constitué de 80% de diazote et de 20% dioxygène.

Solution

1- D'après l'enoncé, le zinc est oxydable, donc c'est un réducteur, conjugué de l'oxyde de zinc (II) ZnO. Le premier couple est donc : ZnO/Zn. L'autre couple associe l'oxydant dioxygène. Il s'agit du couple O_2/H_2O, ou comme ici en milieu basique, O_2/HO^-.

2- $Zn \rightleftharpoons Zn^{2+} + 2e^-$ et $O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightleftharpoons 4HO^-$

On combine ces deux demi-équations pour faire disparaître les électrons. Il suffit de les ajouter : $2Zn + O_2 + H_2O \rightarrow 2Zn^2 + HO^-$.

3- L'unité $A.h$ (ampère-heure) est une unité associée au produit d'une intensité par une durée. C'est donc une charge, ou plus précisément la quantité d'électricité que peut débiter le générateur. t doit être convertie en secondes. $Q = I.t$.

La durée théorique de fonctionnement de la pile est donc : $t = \frac{Q}{I}$.

$t = \frac{50}{1.10^{-3}} = 50,000$ heures.

Dans une année, il y a environ 365 jours de 24h. Chacun : une année contient 8760 heures. La pile peut donc fonctionner pendant 5,7 années.

4- À la quantité d'électricité Q est associée une quantité de matière en électrons n telle que $Q = n.F$, où F est le faraday (charge d'une môle d'électrons).

D'après les équations d'échanges d'électrons, s'il circule une quantité n d'électrons, alors il y a eu oxydation de la quantité $\frac{n}{2}$ de zinc. La masse de zinc disparue est donc : $m_{zinc} = \frac{M_{Zn}Q}{(2F)}$

$$m_{Zn} = \frac{65,4 \times 50 \times 3600}{(2 \times 96500)}$$
$$= \frac{65,4 \times 25 \times 3,6}{96,5} = 60,6$$

5- L'oxydation de la quantité $\frac{m}{M}$ de zinc correspond à une réduction de la quantité $\frac{m}{2M}$ en dioxygène, d'après

l'équation globale de fonctionnement. On a donc consommé une quantité. On a donc consommé en O_2 la quantité :

$$n(O_2) = \frac{n(Zn)}{2} = \frac{I.\Delta t}{4F} = 0,466\ mol.$$

En tenant compte du volume molaire, ceci occupe un volume $V = 0,466 \times 24 = 11,2L$ de dioxygène.

Or, dans l'air, il n'y a que 20% de dioxygène.

Le volume d'air utilisé est donc $V' = \frac{11,2}{0,20} = 56$ litres d'air.

14 Les piles électrochimiques les plus simples à réaliser, dites de première espèce, sont des piles constituées, de deux couples de type M^{n+}/M où M est un métal.

On réalise une pile de ce type en immergeant une électrode de nickel Ni dans un volume $V_1 = 100mL$ de solution aqueuse de sulfate de nickel $(Ni^{2+}_{+} + SO^{2-}_{4(aq)})$ et une électrode de cobalt Co dans un volume $V_2 = 100mL$ de sulfate de cobalt $(Co^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)})$.

Les deux solutions sont reliées par un pont salin de nitrate d'ammonium $(NH^{+}_{4} + NO^{-}_{3})$ gélifié.

Un voltmètre dont la borne (COM) reliée à l'électrode de nickel indique le résultat: $U = -90mV$.

$IF = 96500C.mol^{-1}$, $M(Co) = 58,9g.mol^{-1}$, $M(Ni) = 58,7g.mol^{-1}$.

1- Donner la définition d'une pile électrochimique.

2- Déterminer la polarité de cette pile et sa force électromotrice.

3- Représenter le schéma conventionnel de cette pile.

4- Écrire l'équation de réaction au niveau de chaque électrode et en déduire l'équation-bilan.

5- On relie maintenant les deux électrodes par un ampèremètre et on laisse la pile fonctionner pendant une durée $\Delta t = 20h$, en débitant un courant d'intensité constante $I = 30mA$.

5.1- Représenter le schéma de la pile en précisant le sens et la nature des porteurs de charge.

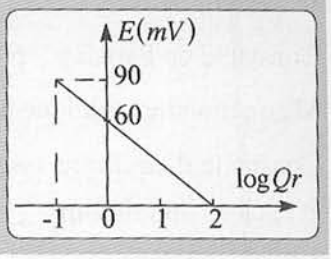
5.2- Calculer la variation de masse de chacune des électrodes.

5.3- La figure ci-contre représente les variations de la f.e.m E de la pile mesurée au cours du fonctionnement de la pile, en fonction $\log Q_r$.

Qr étant le quotient de réaction.

a- Calculer $Q_{r,i}$, quotient de réaction à l'état initial.

b- Déterminer la constante d'équilibre K de la réaction étudiée.



Solution

1- Une pile électrochimique est un système qui produit de l'énergie électrique à partir d'une réaction d'oxydo-réduction.

2- La tension mesurée par une voltmètre s'écrit :

$U = V_{\oplus} - Vcom$

Dans ce cas $U = V_{(Co)} - V(Ni) < 0$, donc $V(Co) < V(Ni)$

C'est l'électrode de nickel qui joue le rôle de pôle positif.

Autre méthode : Si on inversait le branchement du voltmètre, on devrait avoir l'indication : $90mV$.

Dans ce cas : $U = V_{(Ni)} - V_{(Co)} > O$

d'où : $V_{(Ni)} > V(Co)$

3- $\ominus Co/Co^{2+}_{(aq)}//Ni^{2+}_{(aq)}/Ni \oplus$

4- $Ni^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Ni$; $Co \leftrightarrows Co^{2+} + 2e^-$

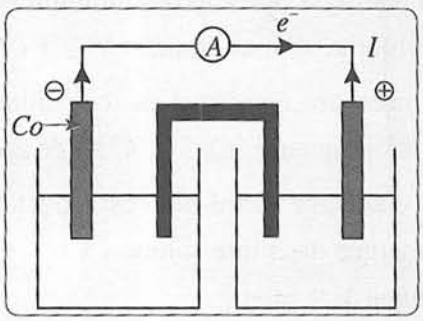
Equation de la réaction :

$Ni^{2+}_{(aq)} + Co_{(s)} \rightleftarrows Ni_{(s)} + Co^{2+}_{(aq)}$

5.1- Le schéma de la pile est représenté ci-haut.

5.2- Les trois réactions précédentes ont le même avancement noté x.

Le tableau d'avancement de la réduction permet d'écrire :



$n_f(Ni) = n_i(Ni) + x$, d'où : $\Delta n(Ni) = x$, encore :

$$\frac{\Delta m(Ni)}{M(Ni)} = x = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{Q}{2F} = \frac{I.\Delta t}{2F}$$

$$\Delta m(Ni) = \frac{I.\Delta t}{2F} M(Ni)$$

$$= \frac{30.10^{-3}.20.3600}{2.96500} = 0,657g$$

$n_f(Co) = n_i(Co) - x$, d'où $\Delta n(Co) = x = \frac{I.\Delta t}{2F}$

alors : $\Delta m(Co) = -\frac{I.\Delta t}{2F} M(Co) = -0,659g$

5.3- a) La fem de la pile au moment de sa réalisation est $U_0 = 90mV$.

D'après la figure, il lui correspond $\log Qr = -1$, d'où $Q_r = 10^{-1} = 0,1$

5.3- b) A l'état d'équilibre, la pile s'arrête spontanément de fonctionner et ne produit plus d'électricité, sa fem devient nulle.

On a : $\log Q_{r,éq} = 2$, d'où $K = Q_{r,éq} = 10^2$

15 On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de la pile cuivre-aluminium

Données :

Constante de Faraday : $F = 96500 C.mol^{-1}$

Masse molaire atomique de l'aluminium $M = 27 g.mol^{-1}$

Constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre le cuivre métallique et les ions aluminium :

$3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} 3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)}$ est $K = 10^{-20}$.

On réalise la pile cuivre-aluminium en reliant les deux demi-piles par un pont salin de chlorure d'ammonium $(NH_4^+ + Cl^-)$.

La première demi-pile est constituée d'une plaque de cuivre immergée dans une solution aqueuse $(Cu^{2+} + SO_4^{2-})$ de volume $V = 50mL$ et de concentration molaire C_o.

La deuxième demi-pile est constituée d'une plaque d'aluminium partiellement immergée dans une solution $(Al^{3+} + 3Cl^-)$ de même concentration C_o et de même volume $V = 50mL$.

Entre les deux électrodes sont insérés : un conducteur ohmique, un ampèremètre et un interrupteur k (fig 1).

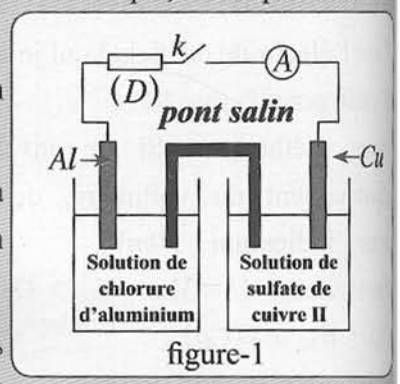


figure-1

À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit et il y passe un courant d'intesité constante I.

La courbe - 2 représente les variations de la concentration $[Cu^{2+}]$ dans la première demi-pile en fonction du temps.

1.1- En se basant sur le critère d'évolution spontanée, déterminer le sens d'évolution du système chimique formant la pile.

1.2- Donner le schéma conventionnel de la pile étudiée.

2.1- Exprimer la concentration $[Cu^{2+}]$, à la date t, en fonction de t, C_o, I, V et F.

2.2- En déduire l'intensité I du courant électrique traversant le circuit.

3- La pile est totalement consommée à l'instant t_C.

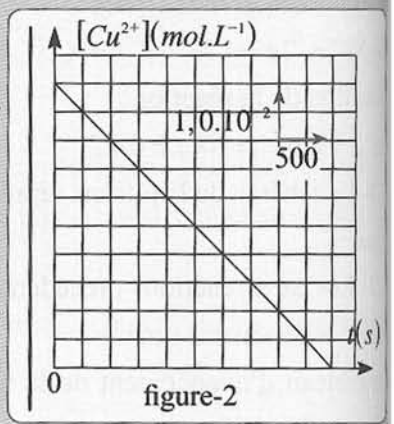


figure-2

Trouver en fonction de t_c, F, I et M, la variation Δm de la masse de la plaque d'aluminium lorsque la pile est totalement consommée. Calculer Δm.

Solution

1.1- $3Cu_{(s)} + 2Al^{3+}_{(aq)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} 3Cu^{2+}_{(aq)} + 2Al_{(s)}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[Cu^{2+}]_i^3}{[Al^{3+}]_i^2} = \dfrac{C_0^3}{C_0^2} = C_o = 5,0.10^{-2}$

$Q_{r,i} > k$; le système évolue spontanément dans le sens inverse (sens 2).

1.2-1- À la cathode (Cu) :

$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$

À l'anode Al : $Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$

$\ominus Al/Al^{3+}_{(aq)}//cu^{2+}_{(aq)}/Cu_{(s)} \oplus$

2.1- Le tableau descriptif de la réduction permet d'écrire :

$n(Cu^{2+}) = n_i(Cu^{2+}) - x$ avec $x = \dfrac{n(e^-)}{2}$

alors $n(Cu^{2+}) = n_i(Cu^{2+}) - \dfrac{Q}{2F}$

D'où $[Cu^{2+}] = [Cu^{2+}]_i - \dfrac{Q}{2V.F}$

ou bien $[Cu^{2+}] = C_o - \dfrac{I.t}{2V.F}$

2.2- La courbe de la figure 2 peut s'écrire :

$[Cu^{2+}] = a + b.t$ avec $a = C_o$ et $b = \dfrac{-I}{2VF}$

D'où $I = -2VFb$

$b = \dfrac{0 - C_o}{t_{max}} = \dfrac{-5.10^{-2}}{5.500} = -2.10^{-5} mol.L^{-1}s$

$I = 2.5.10^{-2}.96500.2.10^{-5} = 0,193A$

3- Lorsque la pile est totalement consommée, on a $[Cu^{2+}] = 0$, alors l'expression précédente s'écrit :

$O = C_o - \dfrac{I.t_c}{2V.F}$

D'où : $t_c = \dfrac{2C_oV.F}{I}$

Le tableau descriptif de l'oxydation donne à la date t_c.

$n_f(Al) = n_i(Al) - x'$ avec

$x' = \dfrac{n(e^-)}{3} = \dfrac{Q}{3F} = \dfrac{I.t_c}{3F}$

$\dfrac{m_f - m_i}{M} = -x' = -\dfrac{I.t_c}{3F}$

$\Delta m = -\dfrac{I.t_c.M}{3F} = -4,43.10^{-2}g$

3 ÉLECTROLYSE

I- L'ELECTROPOLYSE:

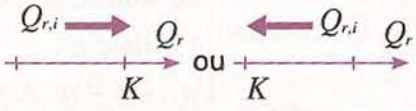
1 Définition:

Une éléctrolyse est une transformation d'oxydo-réduction forcée due à la circulation d'un courant électrique imposé par un générateur.

2 Sens d'évolution:

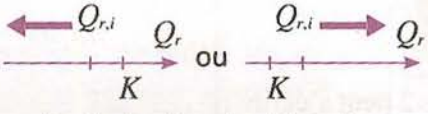
Lors d'une transformation forcée, le quotient de réaction Q_r s'éloigne toujours de la constante d'équilibre K.

- Lors de la transformation spontannée d'un système chimique, celui-ci évolue vers un état d'équilibre.



évolution spontannée: Pile

- Lors de la transformation forcée d'un système chimique, celui-ci évolue par apport d'énergie en s'éloignant de son état d'équilibre.



évolution forcée: Eletrolyse

3 Réactions d'électrode:

L'anode est l'electrode où se déroule la réaction d'oxydation.

La cathode est l'electrode où se déroule la réaction de réduction

Le générateur joue le rôle d'une pompe qui arrache les électrons à une espèce chimique sur l'anode et les donne à une autre espèce chimique sur la cathode.

A la cathode, les électrons apportés par le circuit électrique extérieur participent à une réaction de réduction. Suivant le cas, il y a réduction de l'électrode, d'un ion présent dans la solution, ou de l'eau (en dihydrogène).

A l'anode, se produit une réaction d'oxydation et les électrons captés par le générateur

partent dans le circuit extérieur. Suivant le cas, il s'agit de l'oxydation de l'électrode, d'un ion présent dans la solution, ou de l'eau (en dioxygène).

Le bilan électrique global correspond à un transfert d'électrons de l'anode vers la cathode par le circuit électrique extérieur.

4 quantité d'électricité:

• La quantité d'électricité Q qui traverse une section du circuit est liée à la quantité d'electrons transférés $n(e^-)_{transf}$ d'une électrode à l'autre: $Q = n(e^-)_{transf} \mathcal{F}$

Q exprimé en coulomb (C)

$n(e^-)_{transf}$ exprimé en mole (mol)

La constante de Farady $\mathcal{F}$ exprimée en coulomb par mole $(C.mol^{-1})$.

Si l'intensité de courant est constante: $I = \frac{Q}{\Delta t}$

5 Applications de l'electrolyse:

Le phénomène d'électrolyse est employé pour:

Obtenir des métaux:

- préparation d'un métal à partir d'un minéral (ex.: aluminium),
- purification d'un métal impur,
- formation d'une couche protectrice (ex. : argenture) ;

préparer des gaz:

- obtention de dihydrogène à partir de l'eau,
- obtention de dichlore à partir de solutions de chlorure de sodium ou d'eau de mer;

recharger les accumulateurs:

La charge d'un accumulateur est une transformation non spontanée obtenue par le passage d'un courant électrique fourni par un générateur, et les réactions qui se produisent aux électrodes sont les réactions qui se produisent aux électrodes sont les réactions inverses de celles de la décharge de la pile.

Exemple: cas d'un accumulateur au plomb:

à l'anode, le sulfate de plomb s'oxyde en dioxyde de plomb:

$PbSO_4(S) + 2H_2O(1) = PbO_2(S) + 4H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq) + 2e^-$; à la cathode, le sulfate de plomb subit une réduction en plomb (métal): $PbSO_4(S) + 2e^- \rightleftharpoons Pb(S) + SO_4^{2-}(aq)$

1 Repondre par vrai ou faux. A chaque question peuvent correspondre aucune, une ou plusieurs propositions correctes.

1- Au cours d'une électrolyse, il se produit:

a- une réaction acide-base

b- une réaction d'oxydo-réduction.

2- Dans un électrolyseur:

a- L'anode est le pôle $-$;

b- La cathode est le pôle $+$;

c- Il y a réduction à l'anode et oxydation à la cathode.

3- Un électrolyseur en fonction contient:

a- Un système chimique en équilibre ;

b- Un système chimique hors équilibre.

c- On ne peut rien dire ; cela dépend du système considéré.

4- Lors du fonctionnement d'un électrolyseur ;

a- Q_r s'éloigne de K ;

b- Q_r tend vers K ;

c- Q_r rejoint, puis dépasse K.

5- Dans un électrolyseur:

a- Les porteurs de charges sont les ions ;

b- Les porteurs de charges sont des électrons ;

c- Les cations se dirigent vers l'anode et les anions vers la cathode.

6- Lors d'une électrolyse:

a- Il se forme des gaz ;

b- Il se forme des liquides ;

c- Il se forme des solides.

d- On ne peut rien dire, cela dépend des cas.

Solution

Réponses justes:

1- b) **2-** c) **3-** b) **4-** a) **5-** a) **6-** d)

Les autres sont fausses.

2 Le fer blanc est obtenu en recouvrant par électrolyse, une pièce d'acier d'une fine couche d'étain Sn.

Le fer blanc est utilisé dans la fabrication des boîtes de conserve.

On s'interesse à la détermination de la masse d'étain nécessaire pour couvir par électrolyse une plaque d'acier.

Données: Couples ox/réd intervenants dans cette électrolyse: $Sn^{2+}_{(aq)}/Sn_{(s)}$; $O_2/H_2O_{(\ell)}$;

- Le Faraday: $1F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$;

- Masse molaire de l'étain $M(S_n) = 118,7g/mol$

Dans une solution de sulfate d'étain $(Sn^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_4)$, on immerge complètement la pièce d'acier et on réalise l'électrolyse de cette solution entre l'électrode formée par la pièce d'acier et une électrode de graphite.

1- La pièce d'acier doit-elle jouer le rôle d'anode ou de cathode dans cette électrolyse ? justifier.

2- On observe la formation d'un gaz au niveau de l'électrode de graphite.

Ecrire l'équation de réaction de cette électrode.

3- Cette électrolyse a été réalisée pendant une durée $\Delta t = 10\,\text{min}$ à l'aide d'un courant d'intensité constante:

$I = 5A$.

En déduire la masse d'étain déposée sur la pièce d'acier.

Solution

1- Le dépôt d'étain sur la pièce d'acier est due à la transformation suivante:

$$S_n^{2+} + 2e^- \longrightarrow Sn$$

Il s'agit d'une réduction qui a eu lieu sur la surface de la pièce d'acier jouant ainsi le rôle de cathode.

2- Au voisinage de l'anode (électrode de graphite) ; il se produit l'oxydation de molécules d'eau:

$$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$$

L'équation bilan s'écrit:

$$2S_n^{2+}{}_{(aq)} + 2H_2O_{(\ell)} \longrightarrow 2Sn_{(s)} + O_{2(g)} + 4H^+_{(aq)}$$

3- Le tableau d'avancement de la réduction donne:

$n(e^-) = 2x$ et $n(Sn) = x$

alors, $n(Sn) = \dfrac{m(Sn)}{M(Sn)} = xf = \dfrac{n(e^-)}{2}$

$$= \frac{Q}{2F} = \frac{I.\Delta t}{2F}$$

donc $m(Sn) = \dfrac{I.\Delta t.M(Sn)}{2F} = 1,85g$

3 Plus de la moitié de la production mondiale de zinc métallique est obtenue par électrolyse de solutions du sulfate de zinc acidifiée.

Cette électrolyse, utilisant des électrodes de graphite, fait intervenir les deux couples $Z^{2+}_{(aq)}/Zn$ et $O_{2(g)}/H_2O_{(\ell)}$

Il se dépose du zinc sur l'une des électrodes et il se forme le dioxygène gazeux au niveau de l'autre.

Données: $F = 96500C.mol^{-1}$; $M(Zn) = 65g.mol^{-1}$.

1- Ecrire l'équation de réaction à l'anode et l'équation de réaction à la cathode.

2- En déduire l'équation bilan de l'électrolyse

3- On réalise cette électrolyse à l'aide d'un courant d'intensité $I = 8.10^4 A$.

3.1- Calculer m la masse de zinc obtenue après une durée d'électrolyse $\Delta t = 24h$.

3.2- On considère une solution aqueuse de volume constant $V = 1,0.10^3 L$ contenant des ions zinc à la concentration initiale $[Z_n^{2+}]_i = 0,2 mol.L^{-1}$.

Trouver la durée $\Delta t'$ nécessaire pour que la concentration des ions zinc devienne égale à $[Z_n^{2+}] = 0,70 mol.L^{-1}$ sachant que cette électrolyse est réalisée à l'aide de la même intensité de courant $I = 8.10^4 A$.

Solution

1- A la cathode: $Zn^{2+} + 2e^- \longrightarrow Zn$.

A l'aide: $2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$

ou encore $H_2O \longrightarrow O_2 + 4H_3O^+ + 4e^-$

2- Equation bilan:

$2H_2O + 2Z_n^{2+} \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 2Zn$.

3-1. Un tableau descriptif de l'avancement de la réduction permet d'écrire:

$n(Zn) = x$ et $n(e^-) = 2x$, alors

$n(Zn) = \dfrac{n(e^-)}{2}$

La masse de zinc formé est donc:

$m(Zn) = n(Zn).M(Zn) = \dfrac{n(e^-)}{2}.M(Zn)$

Or $n(e^-) = \dfrac{Q}{F} = \dfrac{I.\Delta t}{F}$

D'où $m(Zn) = \dfrac{I.\Delta t.M(Zn)}{2F}$

$= 2,33.10^6 g = 2,33.10^3 kg$

3-2. Le tableau d'avancement de la réduction à la date $t' = \Delta t'$ permet d'écrire:

$n(Z_n^{2+}) = n_i(Z_n^{2+}) - x$ d'où

$[Zn^{2+}] = [Zn^{2+}]_i - \dfrac{x}{V}$

Or $x = \dfrac{n(e^-)}{2} = \dfrac{I\Delta t'}{2F}$

alors d'où $[Zn^{2+}] = [Zn^{2+}]_i - \dfrac{I.\Delta t'}{2V.F}$

d'où: $\Delta t' = 2([Zn^{2+}]_i - [Zn^{2+}])\dfrac{V.F}{I}$

$\Delta t' = 3,136.10^3 s \simeq 52 \min 16 s$.

4 On envisage de chromer entièrement un pare-chocs métallique d'automobile en y déposant une couche de chrome, d'une épaisseur $e = 50 \mu m$. Le pare-chocs est considéré comme un bloc parallélépipédique de longueur $L = 2,0m$, de largeur $l = 0,10m$ et de hauteur $h = 5,0mm$.

On plonge le pare-chocs dans une solution contenant des ions chrome (III), $Cr^{3+}(aq)$, puis on électrolyse cette solution, entre l'électrode constituée par le pare-chocs et une seconde électrode de nature adéquate. L'opération est réalisée pendant une durée $t = 10$ heures.

1. a- Ecrire l'équation de la réaction d'électrode qui permet la formation de chrome métallique à partir d'ions chrome (III).

b- Le pare-chocs constitue t-il l'anode ou la cathode de l'électrolyseur? Est-ce le pôle positif ou négatif de la cellule d'électrolyse?

2. a- Calculer le volume V de la couche de chrome que l'on souhaite déposer sur le pare-chocs.

b- En déduire la masse de chrome à déposer, $m(Cr)$, puis sa quantité de matière $n(Cr)$.

c- Indiquer la relation liant $n(Cr)$ et la quantité d'électricité Q ayant traversé l'électrolyseur pendant l'opération.

d- Calculer Q.

e- Quelle est la valeur de l'intensité I du courant qui traverse la cuve d'électrolyse pendant l'opération?

Données. Couple oxydant/réducteur: $Cr^{+3}(aq)/Cr(S)$.

Masse molaire du chrome: $M(Cr) = 52,0 g.mol^{-1}$.

Masse volumique du chrome: $\rho(Cr) = 7,2 g.cm^{-3}$.

$F = 96500 C.mol^{-1}$.

Solution

1.a- $Cr^{3+}(aq) + 3e^- \longrightarrow Cr(s)$.

b- Cette équation est celle d'une réduction. Le pare-chocs doit donc constituer la cathode de l'électrolyseur. Il s'agit du pôle $\ominus$.

2.a- $V = (2L.\ell + 2l.h + 2L.h).e = 2,1.10^{-5} m^3$

b- On en déduit: $m(Cr) = \rho(Cr).V = 7,2 \times 21 = 1,5.10^2 g$

Soit: $n(Cr) = m(Cr)/M(Cr) = 1,5.10^2/52 = 2,9 mol$

c-

Réaction d'électrode		$Cr^{3+}(aq) + 3e^- \longrightarrow Cr(s)$			n_{e^-} (mol)
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$n(Cr^{3+})_i$	−	0	0
A l'instant t	x	$n(Cr^{3+})_i - x$	−	$n(Cr) = x$	$3x$

D'après le tableau, le dépôt de x (mol) de chrome nécessite le transfert de $3 \times mol$ d'électrons dans le circuit extérieur. Donc, le dépôt de x (mol) de chrome nécessite

le transfert d'une quantité d'électricité: $Q = 3\,x.F.$

$Q_{th} = 0,95\,Q$, soit: $Q = 3\,x.F/0,95$ ou encore: $Q = 3n(Cr).F$

d- $Q = 3 \times 2,9 \times 96500 = 8,36.10^5 C$

e- $Q = I.t$ soit $I = \dfrac{Q}{t} = \dfrac{8,36.10^5 C}{10 \times 3600} = 23,2A.$

5 Une pièce métallique a la forme d'un cylindre dont la hauteur est $h = 5cm$ et le rayon de la base est $r = 1cm$

On désire recouvrir cette pièce de l'extérieur d'une fine couche de cuivre d'épaisseur $e = 25\mu m$, à l'aide de la technique d'électrolyse.

Le matériel utilisé à cet effet est le suivant:

- La pièce métallique, une électrode de cuivre ;
- Une solution de sulfate de cuivre II: $cu^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)}$
- Un générateur de courant débitant un courant d'intensité constante $I = 5A$;
- Une cuve à électrolyse, des fils de connexion et un ampèremètre.

Données: masse volumique du cuivre: $\rho = 8,9.10^3 kg/m^3$

$M(cu) = 63,5g.mol^{-1}$;

$F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$;

Couple $ox/réd$ mis en jeu: $Cu^{2+}/Cu_{(s)}$

1- Représenter le schéma du montage utilisé, en précisant le pôle du générateur auquel doit être connecté la pièce métallique.

2- Écrire l'équation au niveau de chaque électrode.

3- Montrer que la quantité de matière initiale des ions Cu^{2+} est conservée au cours de la réaction.

4- Montrer que la masse $m(cu)$ à déposer sur la pièce métallique peut s'écrire.

$m(Cu) = 2\pi.r.e(r+h)$. Calculer sa valeur.

5- Déterminer la durée Δt nécessaire à cette électrolyse.

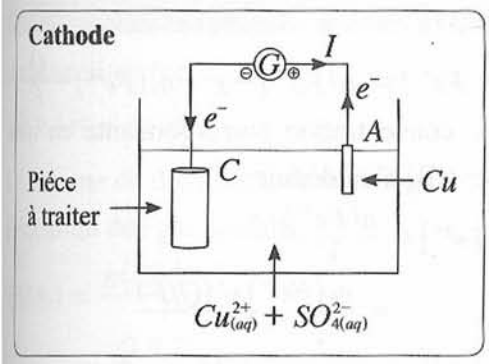
Solution

1- Pour obtenir un dépôt de cuivre métallique sur la pièce, il faut que cette dernière soit le siège de la réaction suivante: $Cu^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Cu$.

Elle doit être reliée au pole du générateur.

2- A la cathode: $Cu^{2+}_{(aq)} 2e^- \rightleftarrows Cu_{(s)}$

A l'anode: $Cu_{(s)} \rightleftarrows Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-$



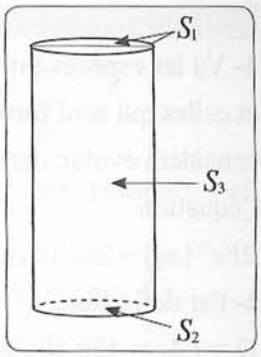
3- Equation bilan:

Cu^{2+} + $Cu_{(A)}$ ⟶ $Cu_{(C)}$ + Cu^{2+}(formé)		
$t=0$	n_0	0
à t	$n_0 - x$	x

A l'état final: $n(Cu^{2+}) = n_0 - x + x = n_0$.

Tout se passe comme si la masse de cuivre perdue par l'anode A était recupérée par la cathode C et les ions Cu^{2+} de la solution initiale sont conservés.

4-



$m(Cu) = \rho.V(Cu)$;

V : volume

$V(Cu) = S.e$

$= S_1 + S_2 + S_3$

On a:

$S_1 = S_2 = \pi r^2$ et

$S_3 = 2\pi r.h$

alors, $S = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$;

donc: $m(Cu) = 2\pi r.e.\rho.(r+h)$

$m(Cu) = 2\pi.10^{-2}.25.10^{-6}.8,9.10^{3}(10^{-2} + 5.10^{-2})$

$= 8,388.10^{-4} kg \approx 0,84g$

5- $\Delta t = \dfrac{Q}{I} = \dfrac{n(e^-).F}{I} = \dfrac{2F}{I} = \dfrac{2n(Cu).F}{I}$

d'où $\Delta t = \dfrac{2m(Cu).F}{I.M(Cu)}$

$= \dfrac{2.0,84.96500}{5.63,5}$

$\simeq 8\,\text{min}\,30s$

6 On réalise l'électrolyse de 250mL d'une solution de chlorure de fer (III), $Fe^{3+} + 3Cl^-$, de concentration $C = 2,00.10^{-2} mol.L^{-1}$ dans un tube en U avec des électrodes de graphique. On obtient un dégagement de dichlore à une électrode et des ions fer (II) Fe^{2+} à l'autre. L'électrolyse dure 15 minutes, l'intensité du courant électrique qui traverse l'électrolyseur est maintenue constante et églae à 420 mA. La température est égale à 20°C et la pression vaut $p = 1,0.10^5 Pa$.

Données: $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$; $F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$.

1- Ecrire l'équation de la réaction d'électrolyse en précisant le sens d'évolution du système considéré.

2- Quelle est la quantité d'électricité alors mise en jeu?

3- Quelle est la concentration finale des ions fer (III)?

4- Quel est le volume de dichlore qui s'est dégagé?

5- Quelle est la concentration finale des ions chlorure?

Solution

1- Vu les espèces initialement présentes et celles qui sont formées, le système considéré évolue dans le sens direct de l'équation:

$2Fe^{3+}(aq) + 2Cl^{-}(aq) \rightleftarrows 2Fe^{2+}(aq) + Cl_2(g)$

2- Par définition:

$Q = I.\Delta t = 420.10^{-3} \times 15 \times 60 = 3,8.10^{2} C$

3- Au cours de cette électrolyse, les ions fer (III) sont réduits en ions fer (II).

La quantité initiale en ions fer (III) est égale à :

$n_0(Fe^{3+}) = C.V = 5,00.10^{-3} mol$

Il n'y a pas d'ions fer (II) initialement: $n_0(Fe^{2+}) = 0$.

Etablissons un tableau d'avancement:

Equation	Fe^{3+} +	e^{-} $\rightleftarrows$	Fe^{2+}
Etat initial (mol)	$5,00.10^{-3}$		0
Etat en cours d'évolution (mol)	$5,00.10^{-3} - x$		x

La quantité d'électrons échangés au cours de la transformation est reliée à l'avancement x de cette réaction:

$n(e^{-}) = x$

Or, cette quantité d'électrons est aussi reliée à la quantité d'électricité qui a circulé pendant la même durée:

$Q = n(e^{-}).F$

L'avancement de la réaction s'en déduit:

$x = \frac{Q}{F}$

On peut alors exprimer la quantité correspondante d'ions fer (III):

$n(Fe^{3+}) = n_0(Fe^{3+}) - x = n_0(Fe^{3+}) - \frac{Q}{F}$

La concentration correspondante en ions fer (III) s'en déduit:

$[Fe^{3+}] = \frac{n(Fe^{3+})}{V}$

$= \frac{n_0(Fe^{3+}) - (Q/F)}{V}$

$= [Fe^{3+}]_0 - \frac{Q}{F.V}$

$[Fe^{3+}] = 4.10^{-3} mol.L^{-1}$.

4- Au cours de cette électrolyse, les ions chlorure sont oxydés en dichlore.

La concentration initiale en ions chlorure est égale à 3 C. La quantité initiale d'ions chlorure s'en déduit:

$n_0(Cl^{-}) = 3C.V = 1,50.10^{-2} mol$.

Il n'y a pas de dichlore initialement. Un tableau d'avancement conduit à:

Equation	$2Cl^{-}$ $\rightleftarrows$	$2e^{-}$ +	Cl_2
Etat initial (mol)	$1,50.10^{-2}$		0
Etat en cours d'évolution (mol)	$1,50.10^{-2} - 2x'$		

La quantité d'électrons échangés au cours de la transformation est reliée à l'avancement x' de cette réaction:

$n(e^{-}) = 2x'$.

Or, cette quantité d'électrons est aussi reliée à la quantité d'électricité qui a circulé pendant la même durée:

$Q = n(e^{-}).F$.

L'avancement de la réaction s'en déduit:

$x' = \frac{Q}{2F}$

On peut alors exprimer la quantité de dichlore alors formé par:

$$n(Cl_2) = x' = \frac{Q}{2F}$$

Le volume de dichlore s'en déduit grâce à l'équation des gaz parfaits:

$$V(Cl_2) = \frac{n(Cl_2).R.T}{P}$$

$$= \frac{Q.R.T}{2F.p} = 4,8.10^{-5} m^3 = 48mL$$

5- D'après le tableau établi en 4.

$$n(Cl^-) = 1,50.10^{-2} - 2x'$$

$$= 1,50.10^{-2} - \frac{Q}{F}$$

La concentration en ions chlorure s'en déduit:

$$[Cl^-] = \frac{n(Cl^-)}{V} = 4,4.10^{-2} mol.L^{-1}.$$

7 L'étamage électrolytique du fer des boîtes de conserve est réalisé en le recouvrant d'étain par électrolyse. L'électrolyte est constitué par une solution de sulfate d'étain (II), $Sn^{2+} + SO_4^{2-}$, à $t = 50g.L^{-1}$ et d'acide sulfurique, $2H^+(aq) + SO_4^{2-}$, à $150g.L^{-1}$. La cathode est constituée par la boîte de fer, de surface totale $S = 300cm^2$ et l'anode est en étain.

Lors de l'électrolyse, l'intensité du courant est maintenue constante et égale à $I = 2,40A$.

Données: masse volumique de l'étain: $\mu = 7,3g.cm^{-3}$.

Couples oxydant-réducteur:

$Sn^{2+}_{(aq)}/Sn_{(s)}$; $S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} / SO_4^{2-}{}_{(aq)}$; $SO_4^{2-}{}_{(aq)} / SO_{2(g)}$;

$H^+(aq)/H_2(g)$; $O_2(g) / H_2O$.

1- Faire un schéma légendé de cette électrolyse en précisant le sens de branchement du générateur et le sens de déplacement des différents porteurs de charge.

2- Ecrire les équations des réactions susceptibles de se produire aux électrodes.

3- En fait, les ions sulfate ne donnent aucune réaction aux électrodes et on peut considérer en première approximation qu'aucun gaz ne se dégage aux électrodes.

a- Ecrire l'équation globale de cette électrolyse.

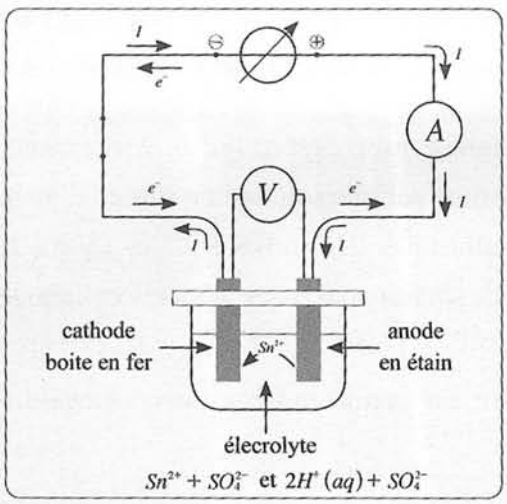
b- Déterminer la durée minimale de l'électrolyse pour réaliser un dépôt d'épaisseur $e = 1,0\mu m$ sur la surface S de la boîte.

4- En réalité, on constate que la durée nécessaire pour réaliser ce dépôt est supérieure à celle calculée en 3. Proposer une explication.

Solution

1- Le schéma du montage expérimental nécessaire pour réaliser une électrolyse est représenté ci-après.

Dans la solution contenue dans l'électrolyseur, les porteurs de charge sont les ions:



• Les cations, Sn^{2+} et $H^+(aq)$, se déplacent dans le sens du courant imposé par le générateur ; ils vont donc vers la cathode.

• Les anions, SO_4^{2-}, se déplacent en sens inverse du courant; il vont donc vers l'anode.

2- Plusieurs oxydations peuvent se produire à l'anode; elles ont pour équation:

(1) $Sn(s) \rightleftarrows Sn^{2+}(aq) + 2e^-$

(2) $2SO_4^{2-}(aq) \rightleftarrows S_2O_8^{2-}(aq) + 2e^-$

(3) $2H_2O \rightleftarrows O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

Plusieurs réductions peuvent se produire à la cathode ; elles ont pour équation:

(4) $Sn^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftarrows Sn(s)$

(5) $2H^+(aq) + 2e^- \rightleftarrows H_2(g)$

(6) $SO_4^{2-}(aq) + 4H^+(aq) + 2e^- \rightleftarrows SO_2(g) + 2H_2O$

3.a- Comme les ions sulfate ne donnent aucune réaction et qu'aucun gaz ne se dégage aux électrodes, on peut considérer que la réaction (1) se produit à l'anode et que la réaction (4) se produit à la cathode.

L'équation globale de l'électrolyse s'en déduit:

$Sn^2(aq) + Sn(s) \rightleftarrows Sn(s) + Sn^{2+}(aq)$

b- Etablissons un tableau d'avancement pour la réduction cathodique.

La concentration initiale en ions étain (II) est égale à: $[Sn^{2+}]_0 = \dfrac{n(Sn^{2+})}{V}$

$$= \frac{m(SnSO_4)}{V.M(SnSO_4)}$$

$$= \frac{t}{M(SnSO_4)}$$

$$[Sn^{2+}]_0 = 0,23 mol.L^{-1}$$

Equation	$Sn^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Sn$		
Etat initial (mol)	$0,23.V$		0
Etat en cours d'évolution (mol)	$0,23.V - y^{(**)}$		y

La quantité d'électrons échangés au cours de la transformation est reliée à l'avancement y de cette réaction:

$n(e^-) = 2y$.

Or, cette quantité d'électrons est aussi reliée à la quantité d'électricité qui a circulé pendant la même durée:

$$Q = n(e^-).F$$

L'avancement de la réaction s'en déduit: $y = \frac{Q}{2F}$.

La quantité d'étain qui s'est déposé sur la boîte est donc égale à:

$n(Sn) = y = \frac{Q}{2F} = \frac{I.\Delta t}{2F}$.

La masse d'étain correspondante s'en déduit: $m(Sn) = n(Sn).M(Sn)$

Le volume v du dépôt réalisé est le volume occupé par cette masse:

$$v = \frac{m(Sn)}{\mu}.$$

Le dépôt s'est fait sur toute la surface S de la boîte, l'épaisseur du dépôt s'en déduit:

$$e = \frac{v}{S} = \frac{m(Sn)}{\mu.S} = \frac{I.\Delta t.M(Sn)}{2F.\mu.S}$$

D'où la durée Δt de l'électrolyse:

$$\Delta t = \frac{2F.\mu.S.e}{I.M(Sn)} = 1,5.10^2 s = 2,5\,\text{min}$$

4- Si la durée nécessaire à la réalisation de ce dépôt est supérieure à celle qui vient d'être déterminée, c'est que des réactions parasites se produisent aux électrodes.

8 Une canette cylindrique en fer, de diamétre $D = 6,4cm$, de hauteur $H = 11cm$ et d'épaisseur négligeable, est étamée, sur ses deux faces, par dépôt électrolytique d'étain à l'aide d'une solution de sulfate d'étain(II) $Sn^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq)$ à $0,50mol.L^{-1}$.

Le volume d'électrolyse utilisé est de $V = 300mL$. Le taux d'étamage souhaité est $\tau = 5,6g.m^{-2}$, la masse volumique de l'étain est $\mu = 7,3g.cm^{-3}$. L'intensité du courant utilisé est de $300mA$.

1- A quelle pôle doit être reliée la boite en fer? Ecrire l'équation de la réaction qui s'y déroule.

2- Déterminer l'épaisseur e du dépôt correspondant au taux d'étamage souhaité.

3- Quelle doit être la durée minimale de l'électrolyse pour réaliser ce dépôt?

Données: $F = 96,5 \times 10^3 C.mol^{-1}$.

Solution

1- Le dépôt sera obtenu par réduction des ions étain (II) selon l'équation:

$Sn^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftarrows Sn(s)$ (1)

Cela sera réalisé à l'électrode reliée au pôle $\ominus$ du générateur, c'est-à-dire la cathode.

2- La boîte est constituée d'un cylindre de surface $S_1 = \pi.D.H$ et de deux extrémités circulaires de surface $S_2 = \frac{\pi.D^2}{4}$.

Le dépôt atant effectué sur les deux faces la surface S à recouvrir vaut:

$$S = 2(S_1 + 2S_2)$$

D'épaisseur e, ce dépôt a une masse:

$m = \mu.v = 2\mu.e.S$

La masse du dépôt peut aussi s'exprimer en fonction du taux d'étamage:

$m = 2\tau.S$

d'où:

$$e = \frac{\tau}{\mu} = \frac{5 \times 10^{-3}}{7,3 \times 10^{3}} = 0,77 \times 10^{-6} m$$

soit $e = 0,77\ \mu m$

3- La quantité $n_d(Sn)$ d'étain déposé vaut $nd(Sn) = \frac{m}{M(Sn)}$

La quantité d'électrons correspondante est, d'après (1): $n(e^-) = 2n_d(Sn)$

La quantité d'électricité ayant traversé le circuit s'écrit :

$$Q = n(e^-).F = 2n_d(Sn).F = \frac{2m.F}{M(Sn)} = \frac{2 \times 2\tau.S.F}{M(Sn)}$$

Or: $Q = I.\Delta t$, d'où:

$$\Delta t = 4\tau(S_1 + S_2).\frac{F}{I.M(Sn)}$$

$$= 4\tau\left(\pi.D.H + 2\pi.\frac{D^2}{4}\right).\frac{F}{I.M(Sn)}$$

$$\Delta t = \frac{4 \times (5,6 \times 10^{-5}) \times \pi(0,064 \times 0,11 + 0,50 \times 0,064^2) \times (96,5 \times 10^3)}{0,300 \times 0,119}$$

$\Delta t = 1,7 \times 10^3 s$; soit $\Delta t = 29\,\text{min}$

9 Le fer-blanc est un acier recouvert d'étain. Il est utilisé pour fabriquer certaines boîtes de conserve. L'étaamage est réalisé par voie électrolytique grâce à une solution contenant des ions étain (II) $Sn^{2+}(aq)$. Une des électrodes utilisées est en étain, l'autre électrode est la boîte de conserve.

Actuellement, les dépôts d'étain ont une épaisseur de $90\mu m$ et une masse de $0,50g$ par mètre carré d'acier.

On souhaite étamer l'intérieur et l'extérieur d'une boîte de conserve cylindrique de rayon $r = 4,0cm$ et de hauteur $h = 8,0cm$ grâce à un courant d'intensité $1 = 6,0A$.

On néglige l'épaisseur de la couche d'étain devant les dimensions de la boîte

Données:

- Couples oxydant/réducteur: $Sn^{2+}(aq)/Sn(s); O_2(g)/H_2O(\ell)$;
- Masse molaire atomique: $M(Sn) = 118,7g.mol^{-1}$

1- La boîte de conserve joue-t-elle le rôle d'anode ou de cathode?

2- Ecrire les demi-équations des réactions d'oxydation et de réduction aux électrodes.

3- Montrer que la surface à étamer est telle que:

$S = 6,0 \times 10^{-2} m^2$.

4- Calculer la masse d'étain à déposer et la durée Δt de l'électrolyse.

Solution

1- La boîte de conserve joue le rôle de cathode, car elle sera le siège de la formation de l'étain Sn à partir des ions Sn^{2+} selon une réduction.

2- $Sn^{2+} + 2e^- \rightleftarrows Sn$

$Sn \rightleftarrows Sn^{2+} + 2e^-$

3- La surface d'une des deux faces de la

boîte est:

$s = 2\pi r^2 + 2\pi r.h$

$S = 2s = 4\pi r^2 + 4\pi rh$

$S = 4\pi r[r + h] = 2\pi.4.10^{-2}[4.10^{-2} + 8,.10^{-2}]$

$\simeq 6,0.10^{-2} m^2$

4- La masse surfacique de la couche est $\sigma = \frac{m}{s}$ avec $\sigma = 0,50 g/m^2$

$m = \sigma.S = 0,50.6,0.10^{-2} = 3,0.10^{-2} g$

10 La duplication en grande quantité d'un disque compact nécessite la réalisation d'un glassmaster en nickel. Le procédé se déroule en plusieurs étapes:

• Fabrication du glassmaster: le disque de base gravé (Glassmaster) est métallisé par une fine couche d'argent.

• Galvanoplastie: le glassmaster métallisé est immergé pendant deux heures dans une solution acide de sulfamate de nickel (II) où il subit une électrolyse, l'autre électrode étant du nickel. Il se forme un dépôt de nickel sur le glassmaster. Ce dépôt de nickel constitue le «père», un disque de nickel d'une masse $m = 113 g$.

On place le «père» dans le moule d'une presse qui permet de dupliquer le disque en grand nombre.

1- Schématiser l'électrolyse en précisant le sens du courant et la polarité des bornes du générateur. Justifier la réponse.

2- Nommer les électrodes et préciser les équations des réactions qui s'y déroulent.

3- Déterminer la quantité de matière de nickel déposé lors de l'électolyse.

4- Quelle doit être la valeur de l'intensité constante du courant qui circule dans le circuit?

Données: Couple oxydant/réducteur: $Ni^{2+}(aq)/Ni(s)$.

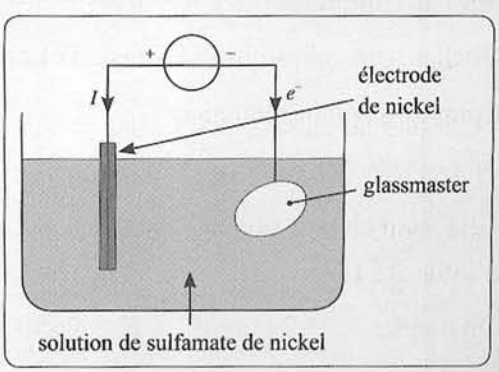
• Masse volumique et masse molaire du nickel: $\rho = 8,90 g.cm^{-3}$; $M = 58,7 g.mol^{-1}$

• Charge élémentaire $e = 1,60 \times 10^{-19} C$.

• Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23} mol^{-1}$.

Solution

1- Pour être réduits en nickel métallique, les ions nickel (II) captent des électrons au contact du glassmaster. Celui-ci doit donc être relié à la borne négative du générateur qui fournit ces électrons.



2- Le glassmaster est la cathode puisqu'il s'y déroule la réaction de réduction:

$$Ni^{2+}(aq)+2e^{-} \rightleftarrows Ni(s)$$

L'alectrode de nickel est l'anode où a lieu la réaction d'oxydation:

$$Ni(s) \longrightarrow Ni^{2+}(aq)+2e^{-}.$$

3- La quantité de matière de nickel contenue dans le glassmaster est:

$$n(Ni)=\frac{m}{M}=\frac{113}{58,7}=1,93mol$$

4- Le tableau d'évolution du système chimique à la cathode s'écrit:

équation		$Ni^{2+}(aq)+2e^{-} \longrightarrow Ni(s)$			$n(e^{-})$
état	avancement (mol)	quantités de matière (mol)			
initial	$x=0$	$n(Ni^{2+})_i$		0	
final	$x=x_f$	$n(Ni^{2+})_i-x_f$		x_f	$2x_f$

La quantité de matière de nickel formé au cours de l'électrolyse est telle que $n(Ni)=x_f$.

Ceci nécessite la consommation de la quantité de matière d'électrons.

$n(e^{-})=2x_f$; d'où $n(e^{-})_i=2x_f=2n(Ni)$.

Cette quantité de matière d'électrons transférés est liée à la quantité d'électricité Q:

$Q=n(e^{-})_i\mathcal{F}=2n(Ni)\mathcal{F}$ or $\mathcal{F}=N_Ae$

et $Q=I\Delta t$ donc $I=\frac{2n(Ni)N_Ae}{\Delta t}$

$$I=\frac{2\times 1,93\times 6,02\times 10^{23}\times 1,60\times 10^{-19}}{2\times 3600}$$

$$=51,5A$$

11

Une solution aqueuse d'acide sulfurique $(2H^{+}(aq)+SO_4^{2-}(aq))$ est introduite dans un électrolyseur à électrodes inattaquables en platine.

1- Dresser l'inventaire de toutes les espèces chimiques présentes en solution.

2- Ecrire les demi-équations des réactions d'oxydation et de réduction susceptibles de se produire à chacune des électrodes.

3- On observe le dégagement d'un gaz à chacune des électrodes. Quelles sont les espèces chimiques qui s'oxydent?

Quelles sont celles qui se réduisent? Ecrire l'équation de la réaction d'électrolyse.

Couples oxydant/réduction:

$H^{+}(aq)/H_2(g); S_2O_8^{2-}(aq)/SO_4^{2-}(aq); O_2(g)/H_2O(\ell)$.

4- Quels volumes obtient-on de ces gaz , pendant une heure, avec un courant d'intensité 15A.

On donne: $V_m=24L.mol^{-1}$, $F=96500C.mol$

Solution

1- La solution contient: $H^+_{(aq)}$, $So^{2-}_{4\,(aq)}$ et $H_2O(\ell)$

2- Les électrodes sont inattaquables, les espèces qui peuvent réagir aux électrodes sont:

$H^+_{(aq)}$; $SO^{2-}_{4(aq)}$ et $H_2(\ell)$

Les couples correspondants sont:

H^+/H_2, $S_2O^{2-}_8/SO^{2-}_4$ et O_2/H_2O

H^+ est la seule espèce qui peut réduire:

$2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftarrows H_2(g)$ (1)

- Les deux autres espèces de la solution SO^{2-}_4 et H_2O peuvent s'oxyder:

$2SO^{2-}_{4\,(aq)} \rightleftarrows S_2O^{2-}_{8\,(aq)} + 2e^-$ (2)

$2H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows O_2 + 4H^+ + 4e^-$ (3)

3- A la cathode; il se produit la réaction (1):

A l'anode; il se forme aussi un gaz, il s'agit donc de O_2, obtenue par la réaction (3)

$$\begin{cases} 2H^+ + 2e^- \rightleftarrows H_2 \\ 2H_2O \rightleftarrows O_2 + 4H^+ + 4e^- \end{cases}$$

Bilan d'électrolyse:

$4H^+ + 2H_2O \rightleftarrows 2H_2 + O_2 + 4H$

ou bien: $2H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows 2H_{2(g)} + O_{2(g)}$

4- Le tableau d'avancement de la réduction, par exemple, donne:

$n_f(H_2) = x$ et $n(e^-) = 2x$.

Donc: $n_f(H_2) = \dfrac{n(e^-)}{2}$

ou encore: $\dfrac{V(H_2)}{V_m} = \dfrac{Q}{2F} = \dfrac{I.\Delta t}{2F}$

D'où: $v(H_2) = \dfrac{I.\Delta t.V_m}{2F}$

$v(H_2) = \dfrac{15.3600.24}{2.96500} = 6,715L$

L'équation de l'oxydation ou l'équation bilan dans $v(O_2) = \dfrac{1}{2}v(H_2) = 3,358L$

12 Électrolyse d'une solution aqueuse de nitrate d'argent

On effectue l'électrolyse d'une solution aqueuse de nitrate d'argent $Ag^+_{(aq)} + NO^-_{3\,(aq)}$ acidifiée par une solution aqueuse d'acide nitrique $H_3O^+_{(aq)} + NO^-_{3\,(aq)}$ en utilisant deux électrodes en graphite. Le volume du mélange dans l'électrolyseur est $V = 400mL$.

Données:

- Les deux couples Ox/red intervenant dans cette réaction sont: $O_{2(g)}/H_2O_{(\ell)}$; $Ag^+_{(aq)}/Ag_{(s)}$.
- Le faraday: $1F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$.

On mesure le pH du mélange avant la fermeture du circuit et on trouve $pH_0 = 3$, puis on ferme le circuit à un instant choisi comme origine des dates $(t = 0)$. Un courant électrique d'intensité constante $I = 2,66.10^2 mA$ circule alors dans le circuit.

L'équation bilan de la réaction est: $6H_2O_{(\ell)} + 4Ag^+_{(aq)} \longrightarrow O_{2(g)} + 4H_3O^+_{(aq)} + 4Ag_{(s)}$

1- Ecrire l'équation de la réaction qui se produit à l'anode.

2- A l'aide du tableau d'avancement de la réaction, montrer que l'expression de l'avancement x de la réaction à un instant t est: $x = \frac{V}{4}(10^{-pH} - 10^{-pH_0})$ où pH représente la valeur du pH du mélange à cet instant.

3- Déterminer l'instant t_1 où le pH du mélange prend la valeur $pH_1 = 1,5$.

Bac SM, Juin 2016

Solution

1-

		$6H_2O$	$\leftrightharpoons$	O_2	+	$4H_3O^+ + 4e^-$	$n(e^-)$
à $t_0 = 0$	$x = 0$	excès		0		n_0	
à t_1	x	excès		x		$n_1 = n_0 + 4x$	$n(e^-) = 4x$

2- La relation $n_1 = n_0 + 4x$ s'écrit:

$x = \frac{1}{4}(n_1 - n_0) = \frac{1}{4}([H_3O^+]_1 V - [H_3O^+]_0 V)$

$x = \frac{V}{4}(10^{-pH_1} - 10^{-pH_0})$

3- A la date t_1 on a: $n(e^-) = 4x$

Or $n(e^-) = \frac{Q}{\mathcal{F}} = \frac{I.t_1}{\mathcal{F}}$

donc $x = \frac{It_1}{4.\mathcal{F}}$

En revenant à l'expression de x on a:

$\frac{I.t_1}{4.\mathcal{F}} = \frac{1}{4}[10^{-pH_1} - 10^{-pH}]$

$t_1 = \frac{V..\mathcal{F}}{I}(10^{-pH_1} - 10^{-pH_0})$

A.N: $t_1 = \frac{0,4.9,65.10^4}{2,66.10^{-1}}(10^{-4,5} - 10^{-3})$

$= 4,44.10^3 s$

13 L'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium permet d'obtenir différentes espèces chimiques, suivant les conditions dans lesquelles elle est effectuée.

1- Avec un électrolyseur à cathode de mercure et anode de carbone, on obtient du sodium métallique (qui s'associe au mercure pour former un amalgame) et du dichlore.

Ecrire les équations des réactions aux électrodes et le bilan global de cette électrolyse.

2- Avec les deux électrodes en carbone, et en séparant les compartiments anodique et cathodique, on obtient également du dichlore à l'anode. A la cathode, il se forme du dihydrogène et de la soude.

Ecrire l'équation de la réaction cathodique.

3- Avec les deux électrodes en carbone, et en agitant la solution, la soude réagit avec le dichlore pour former de l'eau de Javel.

Celle-ci est une solution aqueuse contenant des ions hypochlorite $(C\ell O^-)$, chlorure, et sodium.

a- Ecrire l'équation de cette réaction. Quelle constatation faites vous?

b- Calculer la quantité d'électricité nécessaire pour obtenir $1L$ d'eau de Javel titrant 12 degrés chlorométriques. Le degré chlorométrique correspond au volume de dichlore gazeux nécessaire pour fabriquer 1L d'eau de Javel, ce volume étant mesuré en litre dans les conditions normales.

Données: $F = 9,65.10^4 C.mol^{-1}$; $V_m = 22,4L.mol^{-1}$.

Quelques couples d'oxydoréduction pouvant intervenir:

Na^+/Na , Cl_2/Cl^- , Cl_2/ClO^- , O_2/H_2O , H_2O/H_2.

Solution

1- La solution de chlorure de sodium contient des ions sodium Na^+ et chlorure Cl^-.

A la cathode, il y a réduction des ions sodium: $Na^+ + e^- \rightleftarrows Na$

A l'anode, il y a oxydation des ions chlorure: $2Cl^- \rightleftarrows Cl_2 + 2e^-$

En combinant ces deux équations, on obtient le bilan global:

$2Na^+(aq) + 2Cl^-(aq) \longrightarrow Cl_2(g) + 2Na$ (amalgame).

Il peut y avoir, à la cathode, réduction des cations (ici, Na^+) ou de l'eau, et, à l'anode, oxydation des anions (Cl^-) ou de l'eau.

2- La formation de dihydrogène à la cathode est due à la réduction de l'eau (plus facile dans ces conditions que celle du sodium) selon:

$2H_2O + 2e^- \rightleftarrows H_2 + 2OH^-$.

Les ions hydroxyde restent en solution, ainsi que les ions sodium, qui ne réagissent pas: on obtient ainsi une solution de soude (hydroxyde de sodium): $Na^+(aq) + OH^-(aq)$.

3.a- Le dichlore réagit avec les ions OH^-.

$Cl_2(aq) + 2OH^-(aq) \longrightarrow ClO^-(aq) + Cl^-(aq) + H_2O(\ell)$

Les réactions aux électrodes dépendent de la nature des électrodes et des conditions de l'expérience (agitation).

b- Le volume de dichlore nécessaire pour fabriquer 1L d'eau de Javel titrant 12 degrés chlorométriques est $V = 12L$.

La quantité de matière correspondante vaut: $n_{Cl_2} = \frac{V}{V_m} = \frac{12}{22,4} = 0,54mol$.

D'après l'équation $2Cl^- \rightleftarrows Cl_2 + 2e^-$, la quantité de matière d'électrons transférés est le double de la quantité de matière de dichlore: $n_{e^-} = 2n_{Cl_2}$

La quantité d'électricité est donnée par $q = F.n_{e^-}$

$q = 9,65.10^4 \times 2 \times \frac{12}{22,4} = 1,034.10^5$;

La fabrication d'un litre d'eau de Javel à 12° nécessite une quantité d'électricité de $1,0.10^5 C$.

14 Pour lui donner son aspect métallique brillant, on «chrome» un pare-chocs en y déposant une très fine pellicule de chrome Cr, d'une épaisseur de 5,0mm. Le pare-chocs métallique a une longueur de 2,0 m et une largeur de 15 cm. L'électrolyse est réalisée de la manière suivante: le pare-chocs est immergé pendant 12 heures dans une solution riche en ions chrome (III) et constitue l'une des électrodes. Une seconde électrode appropriée à l'électroylse est aussi utilisée. On considère que le rendement de l'électrolyse est de 90%.

1- Quelle électrode doit constituer le pare-chocs? Est-ce l'anode ou la cathode?

2- Donner les deux demi-équations se produisant à chacune des deux électrodes.

3- Déterminer la quantité de matière n de chrome à déposer.

4- En déduire la quantité d'électricité Q qui doit traverser l'électrolyseur.

5- Quel courant faut-il maintenir constant pour mener à bien cette électrolyse?

Données: masse atomique du chrome $52g.mol^{-1}$; masse volumique du chrome $7,2g.cm^{-3}$.

Solution

1- Il faut déposer du chrome métallique sur le pare-chocs. Il faut donc réduire les ions chrome (III). Il faut donc apporter des électrons extérieurs sur le pare-chocs, qui doit être relié à la borne $\ominus$ du générateur extérieur: le pare-chocs est donc la cathode.

2- $Cr^{3+}_{(aq)} + 3e^- \rightleftarrows Cr_{(s)}$.

L'autre électrode sera le siège d'une oxydation, c'est-à-dire que l'électrode métallique (anode) va progressivement se solubiliser pour produire des ions et fournir des électrons.

3- Le volume V de chrome à déposer est: $V = 2,0 \times 0,15 \times 5,0.10^{-3} = 1,5.10^{-3}m^3$.

A ce volume correspond la masse $m = \mu.V$ de chrome pur, où μ est la masse volumique. On peut retenir que $1g.cm^{-3} = 10^3 kg.m^{-3}$.

Donc $m = 7,2 \times 1,5kg = 10,8kg$

A cette masse correspond une quantité de matière $n = \frac{m}{M}$. La quantité de matière en chrome à déposer est donc

$n = \frac{10800}{52} = 207,7mol$.

4- Selon l'équation $Cr^{3+}_{(aq)} + 3e^- \rightleftarrows Cr_{(s)}$, le dépôt de la quantité n de chrome nécessaire la circulation de la quantité $3n$ moles d'électrons. Donc $Q = 3.n.F$.

$Q = 3 \times 207,7 \times 96500C = 6,0.10^7 C$

5- Or $Q = I.t$ si le courant est constant. Il faut donc théoriquement un courant d'intensité

$I = \frac{Q}{t} = \frac{6,0.10^7 C}{(12 \times 3600)} = \frac{10^7}{7200} = \frac{10^4}{7,2} = 1,4kA.$

En réalité, il faut aussi tenir compte du rendement de l'électrolyse qui n'est que de 90%. Cela signifie qu'un courant d'intensité de 1A produit le même effet qu'un courant de $0,9A$. Comment on a concrètment besoin de $1,4kA$, il faut appliquer un courant de $\frac{1,4}{0,9} = 1,5kA$.

4 CHIMIE ORGANIQUE

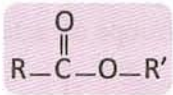
I - esterification et hydrolyse.

1 Les esters:

Les esters sont des composés odorants, que l'on trouve en abondance dans les fruits mûrs (ananas, poire, banane...) et qui entrent souvent dans la composition des huiles essentielles, comme celle de la lavande.

Ils sont utilisés dans la fabrication des parfums ou comme aromatisants dans l'industrie alimentaire.

Les esters sont une famille de composés organiques de formule générale:



2 Nomenclature des composés mis en jeu:

Les alcools:

Un alcool contient le groupe caractéristique hydroxyle $-OH$ lié à un groupe alkyle.

Un alcool se note généralement $R-OH$ où $R-$ est le groupe alkyle.

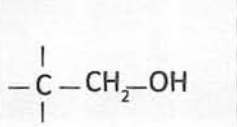
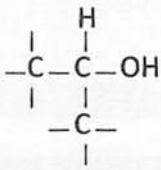
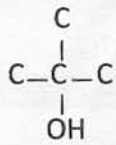
L'atome de carbone lié au groupe $-OH$ est le carbone fonctionnel.

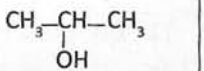
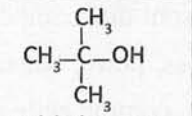
Exemples:

CH_3-OH :méthanol	CH_3-CH_2-OH :éthanol
$CH_3-CH_2-CH_2-OH$ propan $-1-ol$	$H_3C-\underset{\underset{OH}{\vert}}{CH}-CH_3$ propan $-2-ol$
$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{\vert}}{CH}-CH_2-OH$ 2- méthylpropan $-1-ol$	$C_3H_3-\underset{\underset{CH_3}{\vert}}{CH}-\underset{\underset{OH}{\vert}}{\overset{\overset{CH_3}{\vert}}{C}}-CH_3$ 2.3- diméthylbutan $-2-ol$

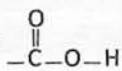
On distingue trois types d'alcools selon le nombre (1,2 ou 3) d'atome (s) de carbone porté(s) par le carbone fonctionnel (lié à OH).

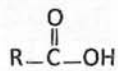
On désigne ainsi trois classes d'alcools: alcool primaire, secondaire ou tertiaire.

		
alcool primaire	alcool secondaire	alcool tertiaire

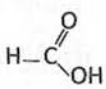
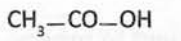
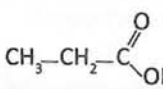
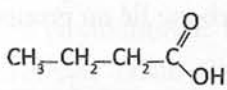
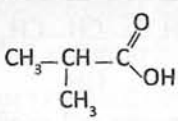
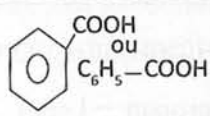
butan $-1-ol$	 propan $-2-ol$	 méthylpropan $-2-ol$
alcool primaire	alcool secondaire	alcool tertiaire

■ **Les acides carboxyliques:**

Un acide carboxylique contient un groupe caractéristique carboxyle 

Un acide carboxylique se note souvent: 

(avec R: groupe alkyle).

 acide méthanoïque	 acide éthanoïque
 acide propanoïque	 acide butanoïque
 acide 2-méthyl propanoïque	 acide benzoïque

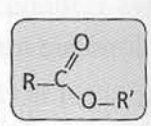
■ **Les esters:**

Les esters possèdent un groupe caractéristique ester: $-COOR'$, qu'on peut noter aussi: $-CO_2R'$

Leur formule générale est: $R-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OR'$

$(R-COOR'$ *ou* $R-CO_2R')$

R et R' sont des chaînes carbonées.



Le nom d'un ester $R-COOR'$ comporte deux termes:

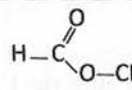
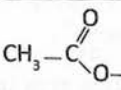
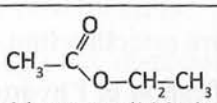
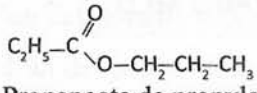
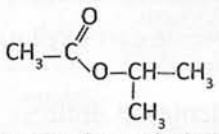
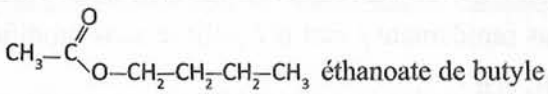
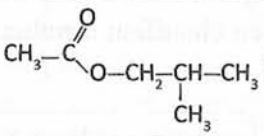
- Le premier terme désigne la chaîne carbonée $R-C$ contenant le carbone fonctionnel. Il dérive du nom de l'acide carboxydique correspondant.

La terminaison «-oïque» est remplacée par -oate:

- Le second terme désigne la chaîne carbonée R' liée à l'atome d'oxygène. S'il s'agit d'un groupe alkyle, il prend la terminaison -yle.

Dans le cas de chaînes carbonées ramifiées, la chaîne $R-C$ est numérotée à partir du carbone fonctionnel, la chaîne R' à partir du carbone lié à l'atome d'oxygène.

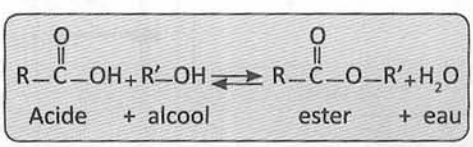
Exemples:

<table>
<tr><td> 
méthanoate de méthyle</td><td> 
Ethanoate de méthyle</td><td> 
éthanoate d'éthyle</td></tr>
<tr><td> 
Propanoate de propyle</td><td colspan="2"> 
éthanoate de methyléthyle</td></tr>
<tr><td colspan="3">  éthanoate de butyle</td></tr>
<tr><td colspan="3">  éthanoate de 2- méthyl propyle</td></tr>
</table>

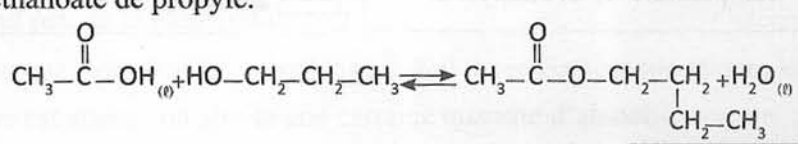
3 L'estérification et l'hydrolyse:

L'estérification:

L'estérification est la réaction entre un acide carboxylique et un alcool. Cette réaction conduit à un ester et à de l'eau

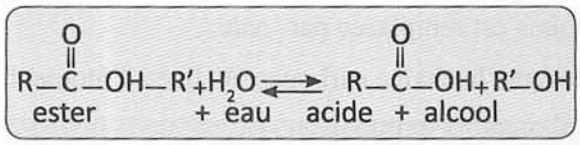


Exemple: La réaction entre l'acide éthanoïque et le propan $-1-ol$ conduit à la formation de l'éthanoate de propyle.

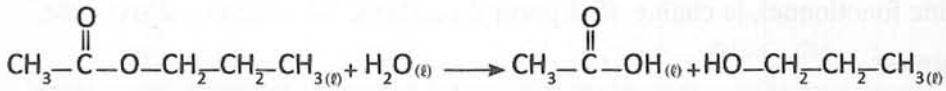


■ **L'hydrolyse:**

L'hydrolyse d'un ester est la réaction inverse de l'estérification. La réaction entre un ester et l'eau conduit à la formation d'un acide carboxylique et d'un alcool.

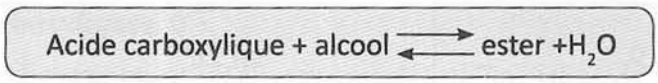


Exemple: Ecrivons l'équation de la réaction d'hydrolyse de l'éthanoate de propyle:



■ **Equilibre estérification - hydrolyse:**

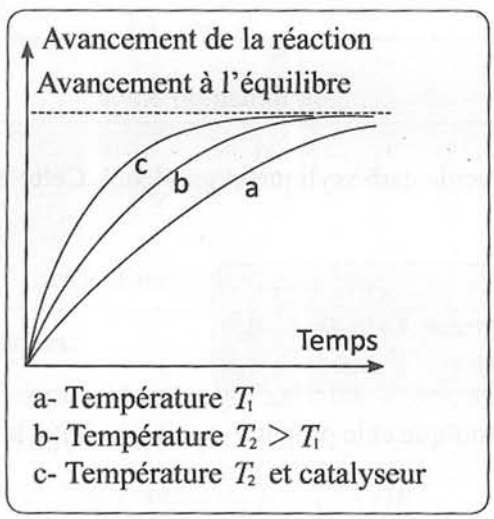
• L'estérification et l'hydrolyse sont des réactions inverses l'une de l'autre, décrites par l'équilibre suivant:

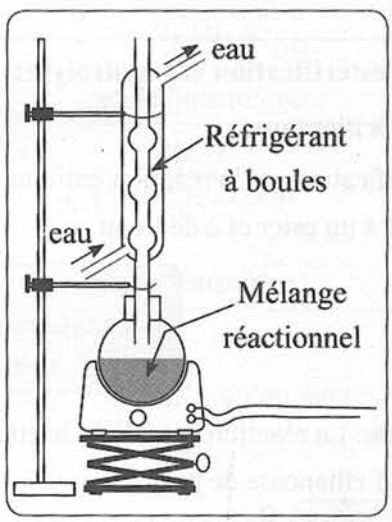


• Ces réactions sont lentes et limitées.

4 Contrôle de la vitesse de réaction sans modifier l'état initial et l'état final:

On peut atteindre plus rapidement l'état d'équilibre sans modifier sa composition en utilisant un catalyseur; ((H_3O^+),
qui catalyse l'estérification et l'hydrolyse) ou en chauffant à reflux le mélange réactionnel.





5 Rendement d'estrification:

Le rendement r d'une réaction est égal au rapport:	
$r = \frac{n_{exp}}{n_{max}}$	n_{exp} est la quantité de matière obtenue du produit synthétisé n_{max} est la quantité de matière attendue du même produit si la réaction est totale.

Si la réaction se fait sans perte: $r = \tau$: taux d'avancement final

6 Contrôle de l'état final: amélioration du rendement:

▮ Méthodes permettant d'augmenter le rendement de l'estérification:

Pour augmenter le rendement d'une transformation associée à une réaction d'estérification, il existe trois possibilités:

- utiliser l'un des réactifs en excès dans l'état initial (doc suivant).
- ajouter l'un des réactifs lorsque l'état d'équilibre est atteint;
- éliminer l'un des produits au cours de la transformation.

$n(CH_3COOH)_i\ (mol)$	$n(C_2H_5OH)_i\ (mol)$	Rendement
1	1	67%
1	2	85%
1	5	95%

L'élimination d'un produit (ester ou l'eau) s'effectue à l'aide d'une distillation fractionnée

▮ Interprétation:

L'équation d'une réaction d'estérification peut s'écrire schématiquement:

$Acide + alcool \rightleftharpoons ester + eau$

A l'équilibre, on a la relation:

$$Q_{r,éq} = \frac{n(ester)_{éq}.n(eau)_{éq}}{n(acide)_{éq}.n(alcool)_{éq}} = K$$

La constante d'équilibre K de la réaction dépend de la nature de l'acide et de l'alcool; elle dépend peu de la température.

Supposons que l'on parte d'un mélange initial stoechiométrique et que, lorsque l'état d'équilibre est atteint, on ajoute une certaine quantité d'alcool.

Dans ce cas, on obtient alors un nouveau quotient de réaction Q_r, plus petit que $Q_{r,éq}$.

On a donc: $Q_r < K$.

Le système chimique évolue alors spontanément dans le sens de l'estérification. Tant que de l'alcool est ajouté, le système évolue dans le sens direct, jusqu'à épuisement du réactif limitant (l'acide carboxylique).

Supposons que l'on élimine l'un des produits au fur et à mesure, l'ester par exemple.

Le numérateur de Q_r reste alors petit, de telle sorte qu'on a toujours la relation: $Q_r < K$

De cette manière, on empêche le système d'atteindre l'état d'équilibre.

Il continuera d'évoluer dans le sens direct, jusqu'à épuisement du réactif limitant.

■ **Conclusion**

Opérer en ajoutant un réacitf ou en éliminant un produit consiste à se placer dans une situation où le quotient de réaction Q_r est systématiquement inférieur à K. On dit alors qu'on déplace l'équilibre du système dans le sens direct.

6 Contrôle de l'état final par changement de réactif:

■ **Utilisation d'un alcool primaire:**

La classe de l'alcool modifie le rendement d'une estérification.

Pour un mélange initial équimolaire formé de n_0 *mol* d'acide carboxylique et n_0 *mol* d'alcool, le rendement est:

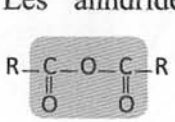
$r = 66\%$ si l'alcool est primaire

$r = 50\%$ l'alcool est secondaire

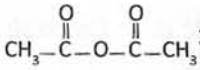
$r = 5\%$ si l'alcool est tertiaire.

■ **Utilisation de l'anhydride d'acide:**

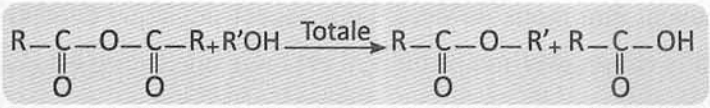
Les anhdrides d'acide ont pour formule semi-développée $(R-CO)_2O$ ou



Le nom d'un anhydride d'acide est déduit de celui de l'acide correspondant en remplaçant le terme «acide» par le terme anhydride.


: anhydrique éthanoïque

Anhydrique d'acide + alcool ⟶ ester + acide carboxylique



Cette estérification est totale et relativement plus rapide que l'estérification réalisée à l'aide du même alcool et de l'acide correspondant à l'anhydride d'acide.

7 Saponification des esters:

▮ Equation chimique:

L'hydrolyse d'un ester en milieu basique est appelée saponification.

Elle consiste à faire réagir à chaud un ester avec des ions hydroxyde $HO^-(aq)$.

Les produits formés sont un anion carboxylate et un alcool.

L'équation chimique de la réaction associée est:

$$R-COO-R'+HO^- \longrightarrow R-COO^- + R'-OH$$

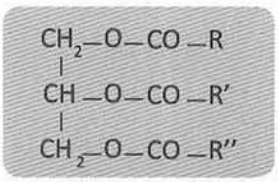
Cette transformation est totale ($\tau = 1$) et rapide.

Les ions hydroxyde peuvent provenir d'une solution aqueuse de soude, $Na^+(aq)+HO^-(aq)$ ou de potasse $K^+(aq)+HO^-(aq)$.

▮ Application de la saponification: synthèse des savons:

a- Les triesters:

Les corps gras sont des triesters. On les appelle également triglycérides.



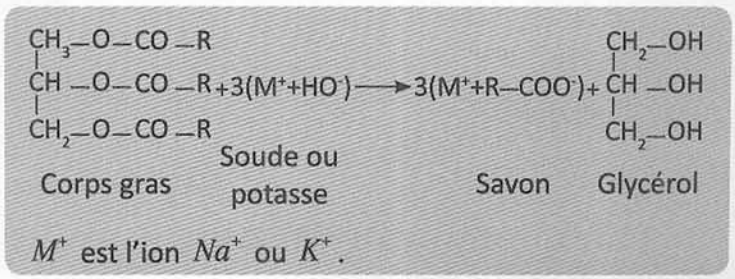
Corps gras

Leur hydrolyse basique à chaud (saponification) permet de récupérer du glycérol et, après précipitation adéquate, un solide de formule $RCOONa$ qui forme le savon.

b- Les savons:

Les savons sont des mélanges de carboxylates de sodium (ou de potassium) dérivés d'acides gras à longues chaînes (entre 10 et 20 atomes de carbone).

Ils sont préparés par saponification de corps gras selon l'équation chimique.



M^+ est l'ion Na^+ ou K^+.

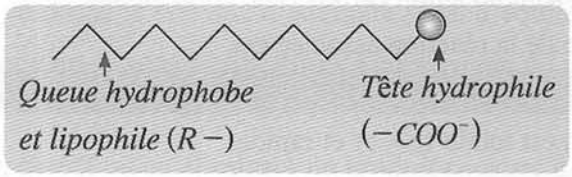
Les savons peuvent être mous ou durs. Leur aspect physique dépend du cation. Un savon est dur si le cation est l'ion sodium; il est mou si le cation est l'ion potassium.

Les anions carboxylate sont des bases. Ils appartiennent aux couples acide/base $RCOOH/RCOO^-$.

c- Propriétés des savons:

Les molécules constituant le savon comportent deux parties:

- une tête hydrophile, le groupe caractéristique carboxylate $-COO^-$;
- une queue hydrophobe et lipophile, la longue chaîne carbonée.



Cette structure explique la solubilité dans l'eau du savon et ses propriétés détergentes: les têtes hydrophiles ont de l'affinité pour l'eau et les queues lipophiles pour les graisses.

1 **1-** Mots manquants :

a- Un ester possède le groupe caractéristique ....., c'est-à-dire l'enchainement ..... où R est soit un groupe alkyle, soit un ..... d'..... et R' est exclusivement un groupe .....

b- L'estérification est la réaction d'un acide avec un ..... Elle conduit à un ester et à de .....

c- L'hydrolyse est la réaction ..... de l'estérification.

d- L'estérification, tout comme ....., est une réaction ..... et .....

e- Un ..... permet d'atteindre l'équilibre plus rapidement: il n' ..... pas dans l'équation de réaction. Une augmentation de ..... permet également d'accélérer l'estérification.

Solution

a- ester - RCOOR' - atome d'hydrogène - alkyle.

b- alcool - l'eau

c- inverse.

d- l'hydrolyse - limitée et lente.

e- catalyseur - n'apparaît - température.

2 **Q.C.M:**

a- L'estérification est une réaction:

☐ rapide

☐ lente

☐ limitée

b- A la fin d'une estérification d'un mélange d'acide carboxylique et d'alcool primaire, que contient le ballon du chauffage à reflux?

☐ l'acide carboxylique, l'alcool primaire, l'eau et l'ester.

☐ l'eau et l'ester.

☐ l'acide carboxylique, l'alcool primaire.

☐ l'eau et l'acide carboxylique.

c- On peut accroître le rendement d'une estérification:

☐ en utilisant de l'acide sulfurique.

☐ en augmentant la température.

☐ en distillsant l'ester au cours de sa formation.

Solution

a- lente et limitée.

b- l'acide, l'alcool, l'ester et l'eau.

c- en distillant l'ester.

3 Vrai ou faux?

a- L'ester

$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$ est l'éthanoate de propyle.

b- L'hydrolyse d'un ester est une réaction lente et totale.

c- Le rendement r d'une transformation chimique est égal au rapport : $r = \frac{n_{max}}{n_{éq}}$

d- L'estérification est la réaction entre un ester et l'eau.

e- L'acide sulfurique peut être utilisé comme catalyseur de la réaction d'estérification.

f- L'eau n'intervient pas dans l'expression de la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction d'estérification.

Solution

a- V ; **b-** F ; **c-** F ; **d-** F ; **e-** V ; **f-** F.

4 1- Ecrire en formule semi-développée tous les esters de formule brute $C_4H_8O_2$. Nommer chacun de ces esters.

2- Parmi ces esters, écrire l'équation de synthèse de celui qui est obtenu à partir d'un acide et d'un alcool ayant atome de carbone de moins.

Solution

1-

$H - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_2 - CH_2 - CH_3$

méthanoate de propyle

$H - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - \overset{\overset{CH_3}{|}}{CH} - CH_3$

méthanoate de méthyléthyle

$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_2 - CH_3$

éthanoate d'éthyle

$CH_3 - CH_2 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_3$

propanoate de méthyle

2-

$CH_3 - CH_2 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - OH_{(l)} + CH_3 - OH_{(l)} \rightleftharpoons CH_3 - CH_2 - C - \overset{\overset{O}{\|}}{O} - CH_{3(l)} + H_2O_{(l)}$

acide propanoïque méthaol propanoate de méthyle

5 Ecrire les formules semi-développées de l'acide carboxylique et de l'alcool qui permettent d'obtenir les esters suivants, en précisant le nom de ces réactifs.

1- $CH_3-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-CH_2-CH_3$

2- $CH_3-(CH_2)_2-COO-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$

3- $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{\|}}{CH}-COO-\underset{\underset{CH_3}{\|}}{CH}-C_2H_5$

Solution

1- $CH_3-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ acide propanoïque	$HO-CH_2-CH_2-CH_3$ propan-1-ol
2- $CH_3-CH_2-CH_2-COOH$ acide butanoïque	$HO-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$ 2-méthyle propan-1-ol
3- $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-COOH$ acide 2-méthyle propanoïque	$CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3$ butan 2-ol

6 Différents montages peuvent être utilisés lors de la synthèse de produits organiques, de leur séparation ou de leur identification.

I- Montage (a):

1- Compléter les légendes (1 à 5) de ce schéma.

2- Préciser l'utilité de ce montage.

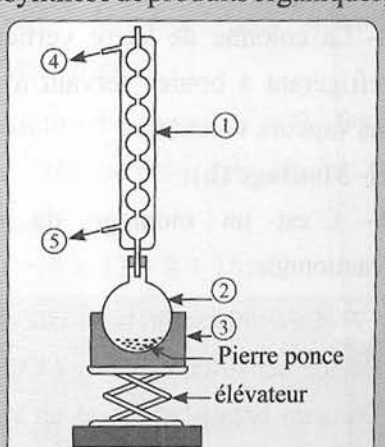
3- A quoi sert la colonne de verre verticale?

II- Montage (b):

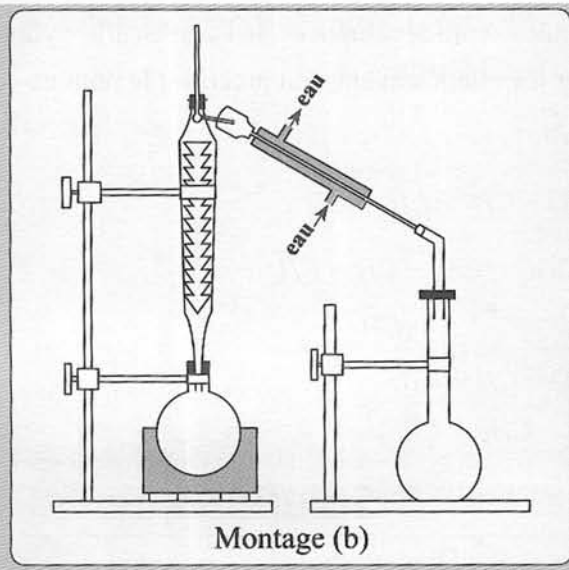
1- Préciser l'intérêt de ce montage.

2- Pourquoi n'utilise-t-on pas d'eau dans la colonne de verre verticale, mais de celle qui est inclinée?

3- Que récupère-t-on dans le flacon de droite?



Montage (a)



Montage (b)

Solution

I- Montage (a):

1- (1)=réfrigérant à eau ; (2)=ballon (réactionnel) ; (3)=chauffe-ballon ; (4)=sortie d'eau ;
(5)=arrivée d'eau froide.

2- Ce montage permet de porter à ébullition douce un mélange tout en liquéfiant les vapeurs volatiles qui risqueraient sinon de s'échapper du ballon. C'est un montage de chauffage à reflux.

3- La colonne de verre verticale est un réfrigérant à boules servant à reliquéfier les vapeurs volatiles.

II- Montage (b):

1- C'est un montage de distillation fractionnée: il permet de séparer les composants liquides d'un même mélange homogène, grâce à leurs différentes températures d'ébullition.

2- Il ne faut pas refroidir les vapeurs verticales, car le but du montage est précisément de faire s'élever les gaz jusqu'à la dérivation vers le réfrigérant à eau. Une fois le composé volatil parvenu en haut, il faut le liquéfier pour le récupérer sous la forme d'un filtrat pur : il faut refroidir le réfrigérant oblique.

3- Le filtrat contient le liquide pur dont la température d'ébullition est la plus basse, c'est-à-dire le plus volatil.

7 La synthèse du benzoate de méthyle peut être menée, à partir du méthanol et de l'acide benzoïque $C_6H_5 - COOH$

Dans un ballon, on verse un volume $v = 27,4mL$ de méthanol glacial (c'est-à-dire pur), puis une masse $m = 19,5g$ d'acide benzoïque lui-même pur. On complète

par quelques gouttes d'acide sulfurique concentré et des grains de pierre ponce. Le ballon est surmonté d'un réfrigérant, et on chauffe à reflux pendant plus d'une heure. En fin de transformation, le contenu du ballon est refroidi par ajout d'eau glacée, et l'ensemble est versé dans une ampoule à décanter. Après un moment, il se forme deux phases bien séparées. L'une d'elles contient une masse $m' = 8,54g$ de benzoate de méthyle.

Données : masse volumique du méthanol : $320,80g.L^{-1}$.

masse molaire atomique (en $g.mol^{-1}$): $C = 12$; $O = 16$; $H = 1$.

1- Rappeler les caractéristiques de la réaction exploitée ici.

2- Sur quels facteurs cinétiques s'appuie-t-on pour accélérer la synthèse?

3- Donner l'équation de la réaction de la synthèse.

4- Calculer les quantités de matière initiales en réactifs, et dire lequel est limitant.

5- Préciser la quantité maximale d'ester récupérable lors de cette synthèse si elle était totale.

6- Déterminer le rendement de la synthèse.

7- préciser deux raisons expliquant que ce rendement est inférieur à 100%.

Solution

1- On étudie une estérification. C'est une transformation lente, limitée, qui est catalysée par l'acide sulfurique.

2- Les deux facteurs cinétiques utilisés sont le catalyseur et le chauffage (à reflux).

3-

$$CH_3 - OH + C_6H_5 - COOH \rightarrow C_6H_5 - COO - CH_3 + H_2O$$

4- Au volume $v = 27,4mL$ de méthanol correspond une masse: $m = \rho.v = 320,80 \times 27,4.10^{-3}g = 8,8g$

À cette masse m correspond une quantité de matière $n = \frac{m}{M}$, avec $M = 12 + 4 + 16 = 32g.mol^{-1}$.

Donc: $n = \frac{8,8}{32} = 0,27mol$.

À la masse $m = 17,3g$ d'acide benzoïque correspond une quantité $n' = \frac{m}{M'}$,

$n' = \frac{9,5}{122} = 0,16mol$

L'acide benzoïque est le réactif limitant, sa quantité de matière initiale est inférieure à celle de l'alcool.

5- Si la synthèse était totale, alors on pourrait récupérer une quantité $n' = 0,16mol$ d'ester.

6- Si la quantité d'ester est $n' = 0,16mol$ la masse récupérable maximale est $m'' = n'M_{ester}$,

avec $M_{ester} = 8 \times 12 + 8 + 16 \times 2$

$= 96 + 8 + 32 = 136g.mol^{-1}$

$m'' = 0,16 \times 136 = 21,4g$.

En réalité, on n'en récupère que $8,54g$,

soit un rendement global de $\frac{8,54}{21,4} = 40\%$.

7- Le rendement est inférieur à 100% car toute estérification mène à un état d'équilibre; la transformation n'est pas totale. D'autre part, le rendement est tributaire du soin apporté à la récupération de l'ester. Il est possible que l'expérimentateur n'ait pas exactement récupéré tout le produit (même pour une réaction totale).

8 On réalise le chauffage à reflux d'un mélange de $18,4g$ d'acide méthanoïque et de $24g$ de propan-2-ol. On ajoute à ce mélange quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Au bout d'une heure, on arrête la réaction et l'on détermine par titrage acido-basique la quantité restante d'acide méthanoïque, soit $n = 0,18mol$.

Données:

Composé	acide méthanoïque	propan-2-ol
masse molaire (g/mol)	46	60

1- Ecrire l'équation de cette réaction. Quel ester obtient-on?

2- Déterminer les quantités de matière des réactifs, à l'état initial.

3- Etablir le tableau d'évolution de la réaction étudiée.

4.1- Quelle est la valeur de l'avancement à l'équilibre $x_{éq}$?

4.2- Exprimer la constante d'équilibre K en fonction de $x_{éq}$ et la calculer.

5- Calculer le rendement de cette estérification.

Solution

1-

$$H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH + CH_3-\overset{\overset{OH}{|}}{CH}-CH_3 \rightleftharpoons H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3 + H_2O$$

L'ester est le méthanoate de méthyléthyle.

2- $n_0(ac) = \frac{m(ac)}{M(ac)} = \frac{18,4}{46} = 0,4mol$

$n_0(al) = \frac{m(al)}{M(al)} = \frac{24}{60} = 0,4mol$

3-

Equation	$H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH_{(\ell)} + CH_3-\overset{\overset{OH}{|}}{CH}-CH_{3(\ell)} \rightleftharpoons H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_{3(\ell)} + H_2O_{(\ell)}$				
état	avancement $x(mol)$	quantités de matière (mol)			
initial	0	$n_{ac,i} = 0,40$	$n_{al,i} = 0,40$	0	0
équilibre	$x_{éq}$	$n_{ac,i} - x_{éq}$	$n_{al,i} - x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

4.1- A l'état final, il reste $n = 0,18mol$ d'acide méthanoïque. D'après le tableau d'évolution, on a $0,40 - x_{éq} = 0,18$. Soit $x_{éq} = 0,22mol$.

4.2- La constante d'équilibre d'une estérification s'exprime par :

$K = \dfrac{[ester]_{éq} \times [eau]_{éq}}{[acide]_{éq} \times [alcool]_{éq}} = \dfrac{n_{ester} \times n_{eau}}{n_{acide} \times n_{alcool}}$

Soit, en utilisant le tableau d'évolution, $K = \dfrac{x_{éq}^2}{(0,40 - x_{éq})^2}$.

L'application numérique donne : $K = 1,5$.

5- On détermine la quantité de matière maximale d'ester attendue en supposant la réaction totale. On obtient : $n_{max} = 0,40mol$.

La quantité de matière d'ester obtenu à l'équilibre est : $n_{éq} = 0,22mol$.

Le rendement d'une réaction est donné par la relation : $r = \dfrac{n_{éq}}{n_{max}} = 0,55$ soit 55%.

9 On désire préparer de l'éthanoate d'éthyle. Pour cela, on fait chauffer à reflux un mélange de $0,20mol$ d'acide carboxylique, $0,20mol$ d'alcool et $0,5mL$ d'acide sulfurique concentré, de concentration $2mol.L^{-1}$.

Après refroidissement du système, on titre la quantité d'acide carboxylique restant, en tenant compte de l'ajout d'acide sulfurique. Le titrage montre qu'il reste dans le ballon $0,080mol$ d'acide carboxylique.

1- Ecrire l'équation chimique de la réaction d'estérification.

2- A quoi servent le chauffage à reflux et l'acide sulfurique?

3.1- En dressant un tableau descriptif de l'évolution du système, déterminer l'avancement à l'équilibre $x_{éq}$ de cette réaction et le comparer à l'avancement maximal x_{max}.

3.2- En déduire le rendement ρ de la transformation.

4- Comment aurait-on pu augmenter l'avancement à l'équilibre? On donnera deux méthodes.

Solution

1- $CH_3 - COOH + C_2H_5OH \rightleftharpoons COOC_2H_5 + H_2O$.

2- La température est un facteur cinétique. Les ions H^+ de l'acide sulfurique catalysent la réaction d'estérification. Ils augmentent la vitesse de la réaction.

3.1-

Equation chimique		$CH_3 - COOH + C_2H_5OH \rightleftharpoons COOC_2H_5 + H_2O$			
Etat du système	$x(mol)$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	0,20	0,20	0	0
En cours de transformation	x	$0,20 - x$	$0,20 - x$	x	x
Etat final	$x_{éq}$	$0,20 - x_{éq}$	$0,20 - x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

Il reste dans le ballon $0,080mol$ d'acide éthanoïque; cela signifie que : $0,20 - x_{éq} = 0,080$, soit: $x_{éq} = 0,12mol$.

L'avancement maximal est obtenu pour

$0,20 - x_{max} = 0$, soit : $x_{max} = 0,20mol$.

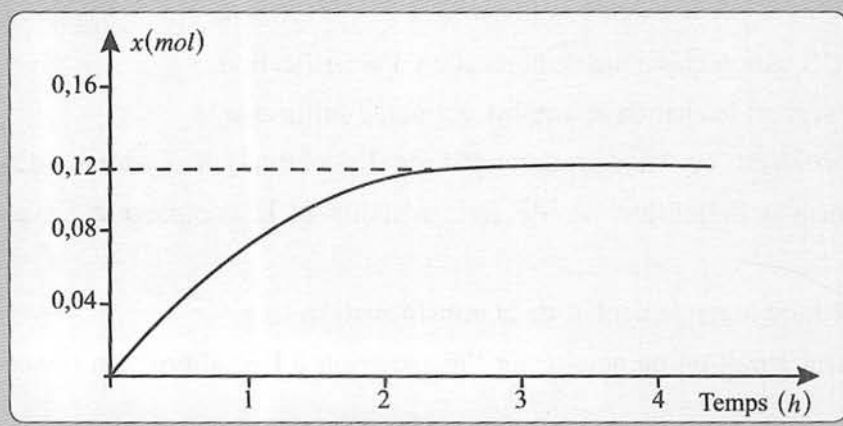
L'avancement maximal est supérieur à l'avancement à l'équilibre, car la transformation est limitée.

3.2- $\rho = \frac{x_{éq}}{x_{max}} \times 100 = \frac{0,12}{0,20} \times 100$ soit : $\rho = 60\%$.

4- On peut augmenter l'avancement à l'équilibre en travaillant avec un grand excès d'alcool moins cher , par exemple, ou en éliminant l'ester par distillation au cours de sa formation.

10 On désire étudier la cinétique de la réaction d'estérification conduisant au propanoate d'éthyle. Pour ce faire, on chauffe à reflux durant 4 heures $0,20mol$ d'acide et $0,20mol$ d'alcool sans éliminer aucun produit. Le volume du mélange réactionnel est de $40mL$.

La courbe ci-dessous donne l'évolution de l'avancement de la réaction en fonction du temps.



1.1- Ecrire la formule semi-développée de l'ester synthétisé.

1.2- Ecrire l'équation de la réaction d'estérification.

2- Peut-on considérer que l'état d'équilibre est atteint après 4 heures? Justifier.

3.1- En utilisant les données de la courbe, déterminer l'avancement à l'équilibre de la réaction d'estérification.

3.2- L'avancement à l'équilibre est-il égal à l'avancement maximal? Justifier.

4- Calculer le rendement de cette réaction.

5- On désire obtenir cet ester par une réaction totale, à l'aide du même alcool et d'un autre composé.

5.1- Quel est le nom de ce composé?

5.2- Ecrire l'équation de cette synthèse.

Solution

1.1- $CH_3-CH_2-C(=O)-O-CH_2-CH_3$

1.2- $CH_3-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH + HO-CH_2-CH_3 \rightleftharpoons CH_3-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_3 + H_2O$

2- Oui, car l'avancement devient constant.

3.1- $x_e = 0,12mol$

3.2- $x_e < x_{max} = 0,20mol$

4- $r = \dfrac{x_e}{x_{max}} = \dfrac{0,12}{0,20} = 0,6 = 60\%$

5.1- C'est l'anhydride propanoïque.

5.2- $CH_3-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_2-CH_3 + CH_3-CH_2-OH \rightarrow CH_3-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_3 + CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$

11 On réalise la réaction d'estérification en mélangent $n_0(mol)$ d'un acide carboxylique $RCOOH$ et $n_0(mol)$ d'un alcool primaire ROH.

Le suivi de cette transformation a montré que la quantité de matière de l'acide à l'état final vaut $\frac{1}{3}n_0$.

1- Ecrire l'équation de cette réaction. Quelles sont ses propriétés?

2- Calculer la constante d'équilibre qui lui est associée.

3- Calculer le rendement r de la transformation.

Solution

1- $RCOOH + R'OH \rightarrow RCOOR' + H_2O$

Cette réaction est lente et limitée.

2- $K = \dfrac{[ester]_e.[eau]_e}{[acide]_e.[alcool]_e}$

$= \dfrac{x_e^2}{(n_0 - x_e)(n_0 - x_e)} = \left(\dfrac{x_e}{n_0 - x_e}\right)^2$

$n_e(acide) = n_0 - x_e$

$\dfrac{1}{3}n_0 = n_0 - x_e$

$x_e = \dfrac{2}{3}n_0$

$K = \left(\dfrac{\frac{2}{3}n_0}{n_0 - \frac{2}{3}n_0}\right)^2 = \left(\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4$

3- $r = \dfrac{x_e}{x_{max}} = \dfrac{\frac{2}{3}n_0}{n_0} = \dfrac{2}{3} = 66,6\%$

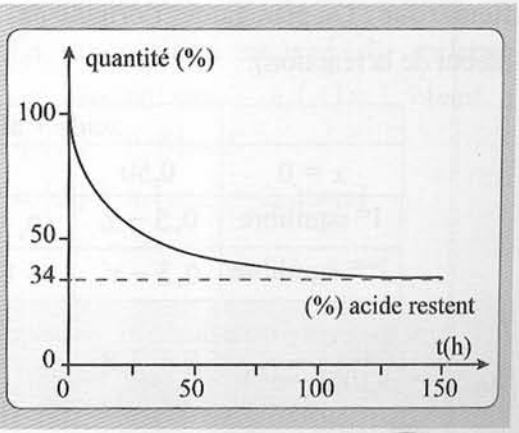
12 On fait réagir $0,50mol$ d'acide éthanoïque avec $0,50mol$ de propan-1-ol.

Expérimentalement, on a tracé le % d'acide restant.

1- Ecrire l'équation de cette réaction.

2- Déterminer dans l'état final au bout de 150h, la composition molaire du mélange.

3- Calculer la constante d'équilibre de



cette transformation.

4- Lorsque l'équilibre précédent est réalisé, on ajoute 10 moles d'alcool.

a- Dans quel sens l'équilibre va-t-il être déplacé?

b- Calculer la quantité de matière au nouvel état d'équilibre.

Solution

1-

$CH_3COOH + C_2H_5 - CH_2OH \rightleftharpoons CH_3COOCH_2C_2H_5 + H_2O$

2- Il reste 34% d'acide, donc :

$n_{acide} = 0,34 \times 0,50 = 0,17mol$.

Le tableau d'avancement permet d'écrire:

$n_{acide} = 0,50 - x_e$

d'où :

$x_e = 0,50 - n_{acide} = 0,50 - 0,17 = 0,33mol$

Produits formés :

$n(ester) = n(H_2O) = x_e = 0,33mol$

Réactifs restants :

$n(acide) = n(alcool) = 0,17mol$

3- $K = \dfrac{[ester]_e.[H_2O]_e}{[acide]_e.[H_2O]_e} = \dfrac{n_{ester}.n_{eau}}{n_{acide}.n_{alcool}}$

$= \dfrac{0,33 \times 0,33}{0,17 \times 0,17} = 3,8$

4.a- Calculons le quotient de réaction:

$Q_r = \dfrac{n_{ester}.n_{eau}}{n_{acide}.n_{alcool}} = \dfrac{0,33 \times 0,33}{0,17 \times 10,17} = 0,06$

$Q_r < K_E$: le système va évoluer spontanément dans le sens direct avec formation de l'ester.

b- Soit x_f le nouvel avancement dans l'état final compté à partir de l'état du 1er équilibre:

$K_E = \dfrac{n_{ester}.n_{eau}}{n_{acide}.n_{alcool}} = \dfrac{(0,33+x_f) \times (0,33+x_f)}{(0,17-x_f) \times (0,17-x_f)} = 3,8$

La résolution de cette équation donne :

$2,8x_f^2 - 39,35x_f + 6,46 = 0$.

On obtient : $x_{f1} = 14,1mol$ et $x_{f2} = 0,164mol$

La première solution est à rejeter :

$x_{f2} = 0,16mol$.

L'état final est donc :

$n_{ester} = 0,49mol = n_{eau}$; $n_{acide} = 0,01mol$; $n_{alcool} = 10,01mol$.

L'un des réactifs a presque disparu.

Remarque : On peut garder l'origine de l'avancement x confondu avec l'état initial (début de la réaction).

	acide + alcool ⟶ ester + eau			
$x = 0$	0,50	0,50	0	0
1er équilibre	$0,5 - x_e$	$(0,5 - x_e) + \boxed{10}$	x_e	x_e
2ème équilibre	$0,5 - x'_e$	$10,5 - x'_e$	x'_e	x'_e

$$\frac{x'^2_e}{(0,5 - x'_e)(10,5 - x'_e)} = K = 3,8$$

La solution de cette équation donne: $x'_e = 0,49mol$.

13 Considérons l'estérification modélisée par l'équation: $A + B \rightleftarrows E + H_2O$

On prépare à la date $t = 0$, un mélange équimolaire contenant $n_0 = 3mol$ de l'acide A et $n_0 = 3mol$ de l'alcool (B).

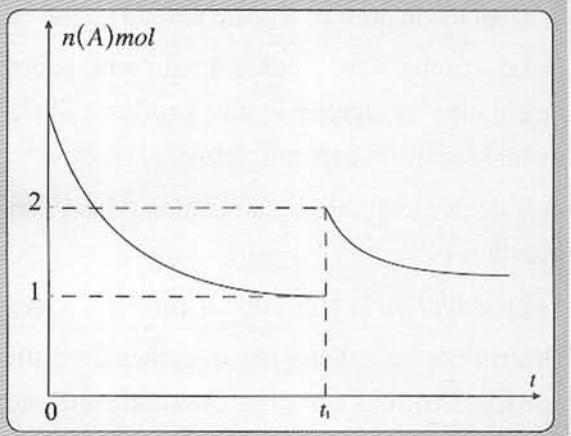
Lorsque le système atteint l'état d'équilibre, on introduit à l'instant t_1, une quantité de matière n_1 de l'acide A.

La courbe ci-contre représente les variations de la quantité de matière de A dans le mélange en fonction du temps.

1- Calculer la constante d'équilibre K associée à cette équation.

2- Calculer n_1.

3- Trouver la composition molaire du mélange final.



Solution

1- Lorsque le mélange initial atteint son état d'équilibre, on a d'après la courbe (1) : $n_f(A) = 1mol$.

Un tableau d'avancement permet d'avoir:

$x_e = 3 - 1 = 2mol$.

$$K = \frac{[E].[H_2O]}{[A].[B]} = \left(\frac{x_e}{n_0 - x_e}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

2-A la date t_1, d'après la figure : $1 + n = 2$; $n = 1mol$.

3- La constante K s'exprime à l'état final comme suit : $K = \dfrac{x'^2_e}{(n_0 + 1 - x'_e)(n_0 - x'_e)}$

$$4 = \frac{x'^2_e}{(4 - x'_e)(3 - x'_e)}$$

		$A + B \rightleftarrows E + H_2O$			
$t = 0$	$x = 0$	n_0	n_0	0	0
$t = t_1$	x_e			x_e	x_e
	x'_e		$n_0 - x'_e$	x'_e	x'_e

Ceci donne : $3x'^2_e - 28x'_e + 48 = 0$, avec : $x'_e < 3mol$

On obtient solution : $x'_e = 2,26mol$

La composition molaire du mélange est comme suit : $n_f(A) = 1,74mol$; $n_f(B) = 0,74mol$

$n_f(E) = n_f(eau) = 2,26mol$

14 Connue depuis l'Antiquité pour ses propriétés, la menthe poivrée peut être utilisée comme un calmant des maux de tête ou des coups de soleil, mais aussi

comme un stimulant digestif, un antispasmodique et un antiseptique. Elle peut aussi être exploitée en parfumerie, on réalise la synthèse de l'éthanoate de menthyle, à partir du menthol.

Le menthol est un alcool à chaîne carbonée cyclique. On le notera pour simplifier ROH.

1- Donner l'équation d'estérification permettant de synthétiser simplement l'éthanoate de menthyle.

2- Quel est le nom de l'autre réactif utilisé dans cette synthèse?

3- Les réactifs sont stockés à température ambiante $(20°C)$ dans le laboratoire de chimie. On chauffe le tout à reflux à $70°C$ pendant une heure. A priori, quelle quantité peut-on espérer récupérer en ester?

4- Calculer le quotient de réaction dans l'état initial, associé à l'équation de la question 1.

5- La valeur de la constante d'équilibre associée à cette équilibre vaut $K = 2$.

Déterminer les valeurs des quantités de matière en chacun des réactifs ou produits une fois l'équilibre atteint. On s'aidera d'un tableau d'avancement.

6- Calculer le rendement de cette synthèse.

Solution

1- $CH_3COOH + ROH \leftrightharpoons CH_3 - COOR + H_2O$

2- l'acide utilisé est l'acide éthanoïque.

3- A partir d'un mélange équimolaire en réactifs $(1mol, 1mol)$ on ne peut pas espérer obtenir $1mol$ d'ester car la réaction d'estérification est limitée.

4- On a: $[ester]_i = [H_2O]_i = 0$ donc:

$$Q_{r,i} = \frac{[ester][H_2O]}{[acide]_i.[alcool]_i} = 0$$

5-

Etat	$R-OH$	CH_3COOH	H_2O	$CH_3-COO-R$
initial	1	1	0	0
intermédiaire	$1-x$	$1-x$	x	x

Une fois l'équilibre atteint, le quotient de réaction est égal à K:

$$K = 2 = \frac{[H_2O].[CH_3-COO-R]}{[CH_3-COOH].[ROH]}.$$

Donc: $K = 2 = \frac{x^2}{(1-x)^2}$

Il faut résoudre: $\frac{x}{(1-x)} = \sqrt{2}$ soit:

$x = \sqrt{2} - x\sqrt{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})} = \frac{2}{(2+\sqrt{2})} = 0,58mol.$$

On a donc produit $0,58mol$ d'eau, $0,58mol$ d'ester, et il reste $0,42mol$ d'alcool ou d'acide.

6- $r = \frac{n_f(ester)}{n_{max}} = \frac{0,58}{1} = 58\%$

15 Pour obtenir un ester E, on prépare un mélange constitué de $n_1 = 0,35mol$ d'acide éthanoïque et de $n_2 = 0,20mol$ d'alcool benzylique de formule $C_6H_5 - CH_2 - OH$.

On ajoute au mélange quelques gouttes d'acide sulfurique concentré et on chauffe à reflux pendant 20 minutes. La masse d'ester formé à la fin de l'expérience est : $m = 21,6g$.

On donne en $g.mol^{-1}$: $M(H) = 1$; $M(C) = 12$ et $M(O) = 16$.

1- Quel est le rôle:

a- de l'acide sulfurique.

b- du chauffage à reflux.

2- écrire l'équation de la réaction.

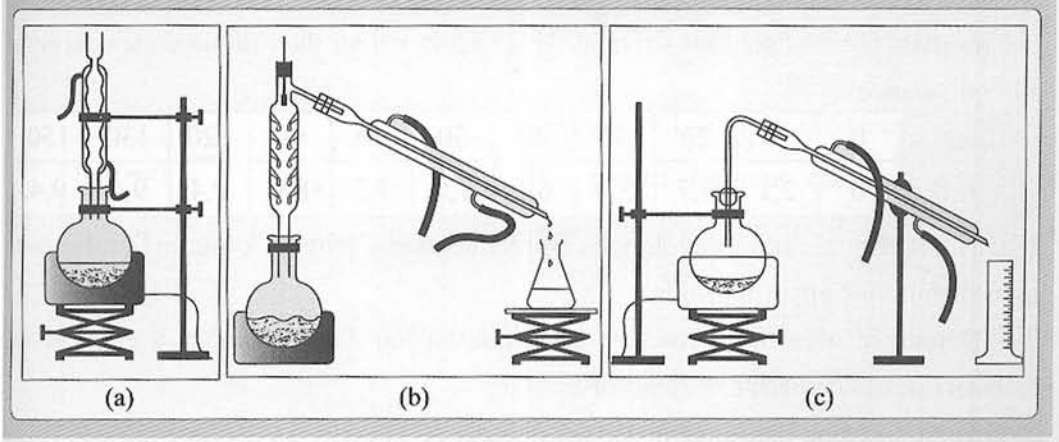
3- Déterminer son rendement.

4- Quels sont les moyens permettant d'améliorer ce rendement?

5- En exploitant les données figurant dans le tableau suivant, proposer une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la réaction étudiée.

Composé	acide éthanoïque	alcoo benzylique	l'ester (E)	l'eau
Température d'ébullition	$118°C$	$205°C$	$215°C$	$100°C$

6- Lequel des montages suivants convient à cette manipulation?



(a) (b) (c)

Solution

1.a- Catalyseur.

1.b- Augmenter la vitesse de réaction et éviter les pertes de matière volatile.

2-

$$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - OH_{(\ell)} + C_6H_5 - CH_2 - OH_{(\ell)} \rightleftarrows CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_2 - C_6H_{5(\ell)} + H_2O_{(\ell)}$$

3- $r = \frac{n_f(E)}{nx_{max}} = \frac{m(E)}{M(E)x_{max}} = \frac{21,6}{150.0,2} = 72\%$.

4- Les moyens permettant d'améliorer cette réaction sans changement de réactif sont:

- L'ajout d'un des réactifs au mélange réactionnel.
- Le retrait d'un des produits du mélange.

5- Les données de ce tableau nous permettent de penser à la distillation fractionnée, pour retirer le produit le plus volatil.

En effet. Lorsqu'on règle la température du mélange dans l'intervalle: $100°C < \theta < 118°C$. C'est l'eau qui s'évapore.

Alors Q_r devient constamment inférieur à K. Et, l'équilibre se déplace donc dans le sens de l'estérification jusqu'à épuisement du réactif limitant.

6- Montage de la figure (b).

16 Dans un laboratoire de chimie on dispose de 8 tubes à essai, surmontés d'un réfrigérant à air, et contenant chacun $5,9.10^{-3}mol$ de méthanoate d'éthyle et $10mL$ d'eau.

Les tubes sont placés dans un bain-marie thermostaté à $40°C$. Toutes les 10 minutes, les élèves placent un des tubes à essai dans un bain d'eau glacée, puis titrent l'acide formé par une solution aqueuse de soude de concentration $c_b = 0,50mol.L^{-1}$, en présence de phénolphtaléine.

Les résultats obtenus sont les suivants ($V_{équiv}$ est la valeur du volume de soude versé à l'équivalence).

t(min)	0	10	20	30	40	50	60	90	120	130	150
$V_{équiv}(mL)$	0	2,1	3,7	5,0	6,1	7,0	7,7	8,9	9,4	9,4	9,4

1- Ecrire la formule semi-développée du méthanoate d'éthyle. À quelle famille cette espèce chimique appartient-elle?

2.a- Donner le nom de la réaction chimique en jeu dans les tubes à essai et les caractéristiques de la transformation associée.

b- Ecrire l'équation chimique correspondante.

3.a- A l'aide d'un tableau descriptif, déterminer la quantité de matière n_a d'acide présent à l'instant t, en fonction de $V_{équiv}$.

b- En déduire la valeur de l'avancement x de la réaction dhydrolyse à chaque instant t.

4.a- Tracer le graphe de la fonction $x = f(t)$, sans souci d'échelle.

4.b- Quelle est la valeur du rendement de la transformation et pourquoi est-il si élevé?

Données: Masse volumique de l'eau: $\rho(H_2O) = 1,0 g.mL^{-1}$;
masse molaire de l'eau: $M(H_2O) = 18,0 g.mol^{-1}$.

Solution

1- $H-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-OC_2H_5$; le méthanoate d'éthyle appartient à la famille des esters.

2.a- La réaction chimique mise en jeu est une hydrolyse. La transformation associée est lente et limitée.

b-

$H-COOC_2H_5 + H_2O \rightleftharpoons H-COOH + C_2H_5OH$

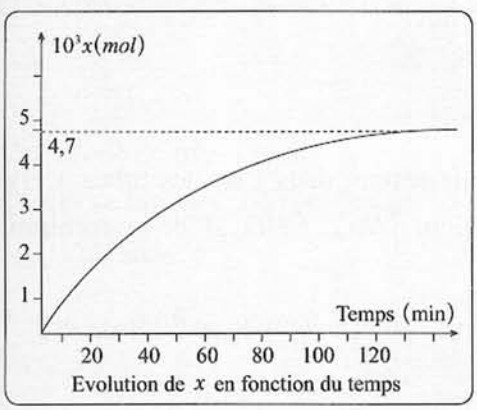
3.a- Soit x' l'avancement de la réaction de titrage. A l'équivalence:

Equation chimique		$H-COOH + HO^- \rightarrow H-COO^- + H_2O$			
Etat du système	$x(mol)$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	n_a	$c_b.V_{équiv}$	0	0
En cours de transformation	x	$n_a - x'$	$c_b.V_{équiv} - x'$	x'	x'
Etat final	x_{max}	$n_a - x'_{max}$	$c_b.V_{équiv} - x'_{max}$	x'_{max}	x'_{max}

Al'équivalence, $n_a - x'_{max} = c_b.V_{équiv} - x'_{max} = 0$ | Soit: $n_a = c_b.V_{équiv}$

$t(\text{min})$	0	10	20	30	40	50	60	90	120
$x(mol)$	0	$1,0.10^{-3}$	$1,8.10^{-3}$	$2,5.10^{-3}$	$3,0.10^{-3}$	$3,5.10^{-3}$	$3,8.10^{-3}$	$4,4.10^{-3}$	$4,7.10^{-3}$

4.a- voir courbe ci-contre.



Evolution de x en fonction du temps

b- Les quantités de matières initiales d'ester et d'eau dans chaque tube sont respectivement:

$n(ester)_i = 5,9.10^{-3}$;

$n(eau)_i = 1,0.\frac{10}{18} = 0,56 mol$.

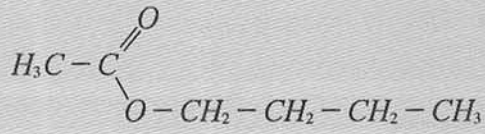
Le réactif limitant est donc l'ester et l'avancement maximal sera égal à $5,9.10^{-3} mol$.

La courbe de la question précédente montre que l'avancement à l'équilibre est égal à $4,7.10^{-3} mol$.

Le rendement de la transformation est donc égal à $\frac{4,7.10^{-3}}{5,9.10^{-3}} \times 100$, soit 80%.

Ce rendement est élevé parce que l'eau est fortement en excès par rapport à l'ester.

17 La saveur de banane est due au composé E dont la formule est la suivante :



1- Etude préliminaire.

1.1- Donner la nomenclature du composé E.

1.2- Le composé E peut être obtenu à partir de la réaction $A + B \rightleftarrows E + H_2O$.

Donner la formule semi-développée et la nomenclature des composés A et B.

2- Synthèse de l'arôme de banane:

Pour préparer le composé E, on mélange un volume $V_A = 5,8mL$ de l'acide A, contenant une quantité de matière $n_0(A)$ de ce composé, et un volume V_B de l'alcool B contenant une quantité de matière $n_0(B = 0,10mol)$.

Le bécher contenant le mélange réactionnel est rapidement introduit dans une cuve contenant de l'eau glacée.

On répartit le mélange réactionnel sur dix tubes à essai et on met ces tubes, en même temps, à $t = 0$, dans une étuve où la température est réglée à $80°C$.

	$M(g.mol^{-1})$	$\rho(g.mL^{-1})$
A	60	1,05
B	74	0,81
E	116	0,87
eau	18	1,00

2.1- Pourquoi le mélange a été introduit dans de l'eau glacée?

2.2- Calculer la quantité de matière n_A de l'acide.

2.3- Calculer le volume V_B.

3- Suivi temporel de la transformation.

On dose après chaque durée de $5mn$, l'acide restant dans l'un des tubes à essai, à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ de concentration molaire $C = 1mol.L^{-1}$.

Le tableau suivant donne les valeurs du volume d'hydroxyde de sodium versé à chaque dosage:

t(min)	0	5	10	15	20	30	45	60	75	90
$V_{éq}(mL)$	0	6,3	5,0	4,4	4,0	3,7	3,4	3,3	3,3	3,3

3.1- Ecrire l'équation de la réaction du dosage effectué.

3.2- Exprimer la quantité de matière restant dans chaque tube à essai à l'instant t en

fonction de C et V_E.

3.3- Montrer que l'avancement de la synthèse, relative au mélange, à l'instant t s'écrit: $x = 0,10 - 10C.V_E$.

3.4- Déterminer l'avancement final de la synthèse étudiée.

3.5- En déduire son rendement r.

Solution

1.1- Ethanoate de butyle, c'est un ester.

1.2- A: $CH_3 - COOH$;

B: $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - OH$

A: acide éthanoïque

B: (butanol) ou (butane1-ol)

2.1- L'eau glacée sert à arrêter la réaction d'estérification, qui démarre à l'instant $t = 0$, une fois le mélange est introduit dans l'étuve.

2.2-

$$n_0(A) = \frac{m(A)}{M(A)} = \frac{\rho_A.V_A}{M(A)} = \frac{1,05.5,8}{60} = 0,10mol$$

2.3- $n_0(B) = \frac{\rho_B.V_B}{M(B)}$;

$$V_B = \frac{n_B.M(B)}{\rho_B} = \frac{0,10.74}{0,81} = 9,1mL$$

3.1-

	$CH_3COOH + HO^-_{(aq)} \rightarrow CH_3COO^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$			
A un instant t	$n(A)$	C_BV_{BE}	0	Excès
	$n(A) - x'_{max} = 0$	$C_BV_{BE} - x'_{max} = 0$	$x'_{max} = n(A)$	Excès

3.2- La réaction du dosage est totale et instantanée; alors la quantité de matière de l'acide restant dans le tube à la date est: $n(A) = C.V_E$.

3.3- La quantité de matière d'acide restant dans un tube représente le $\frac{1}{10}$ de celle qui se trouve dans le mélange.

Dans le mélange :

$n(A) = 10n(A)_{tube} = 10CV_E$

3.4- Retour à la réaction d'estérification:

$n(A) = n_0(A) - x$;

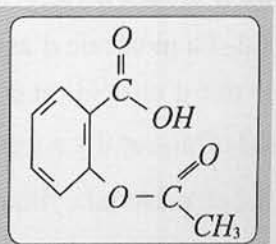
$x = n_0(A) - n(A) = 0,10 - 10CV_E$

A l'état final : $V_E = 3,3.10^{-3}L$;

$x_f = 0,10 - 10.1.3,3.10^{-3} = 6,7.10^{-2}mol$

3.5- $r = \tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{6,7.10^{-2}}{0,1} = 67\%$.

18 1- On donne ci-contre la formule de la molécule d'aspirine: dont le nom officiel est: l'acide acétylsalicylique.

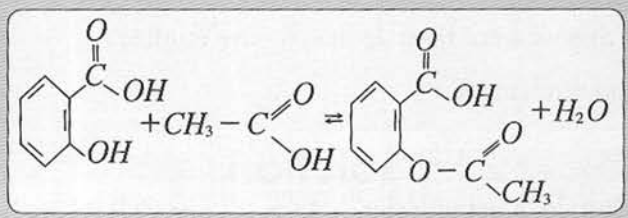


1.1- Quel(s) groupement(s) fonctionnels se trouve(nt) dans cette molécule?

1.2- Quel(s) rôle(s), cette molécule peut-elle jouer?

2- Système de l'aspirine:

L'aspirine a été synthétisée pour la première fois, par le chimiste allemand Gerhardt, en 1853. Selon un protocole de plusieurs étapes, dont la dernière est, modélisée par l'équation ci-après et fait intervenir l'acide éthanoïque et l'acide salicylique:



2.1- S'agit-il d'une estérification? Justifiez.

2.2- Quel rôle a joué l'acide salicylique dans cette réaction?

2.3- Quelles sont les caractéristiques de cette réaction?

3- En 1897, le chimiste allemand Hoffman, arriva à obtenir l'aspirine à l'aide d'une réaction totale, en changeant l'acide éthanoïque par l'anhydrique correspondant.

3.1- Ecrire l'équation de cette synthèse.

3.2- Quelle masse d'aspirine peut-on obtenir à partir de $250kg$ d'acide salicylique et de l'anhydride éthanoïque en excès, dans des conditions expérimentales où le rendement de la synthèse est estimé à 90%.

On donne les masses molaires:

- acide salicylique: $M_1 = 138g.mol^{-1}$.
- aspirine: $M_2 = 180g.mol^{-1}$.

Solution

1- La molécule d'aspirine porte deux groupements fonctionnels qui sont:

- Le groupement carboxyl $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$, caractérisant les acides carboxyliques, et
- Le groupement ester $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-R'$ caractérisant les esters.

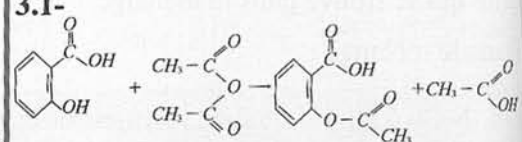
1.2- La molécule d'aspirine joue à la fois, le rôle d'un acide et d'un ester.

2.1- Oui, car il y a formation d'un ester.

2.2- L'acide salicylique a réagi à l'aide du groupement hydroxyl caractéristique des alcools. L'autre groupement qu'il porte $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ est inactif.

2.3- L'estérification par un acide et un alcool est limitée et lente.

3.1-



3.2- L'anhydride est en excès, donc l'acide salicylique limite la réaction:

$x_{max} = n_0(sal)$

$$r = \frac{n_{esp}(asp)}{n_0(sal)} = \frac{m(asp)}{M(asp)} \cdot \frac{M(sal)}{m(sal)} = \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{M_1}{m_1}$$

Alors: $m_2 = \frac{r.M_2.m_1}{M_1} = \frac{0,9.180.250}{138} = 293,5kg$

19 La formule semi-développée d'un ester est: $R-C(=O)-O-R'$ dont le groupement R peut être une chaîne carbonée ou un atome d'hydrogène, par contre le groupement R' est forcément une chaîne carbonée.

Pour étudier la réaction d'estérification, on réalise dans une fiole jaugée un mélange formé de $0,500mol$ d'acide éthanoïque CH_3COOH et $0,500mol$ de butan-2-ol $CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_3$ et quelques gouttes d'acide sulfurique.

Le volume total du mélange est $V=100mL$.

Après avoir agité le mélange, on le partage en quantités égales dans 10 tubes à essai numérotés de 1 à 10 et on les scelle puis on les met à $t=0$ dans un bain-marie de température constante $60°C$.

Données:

- Densité de l'alcool de l'eau : $d=0,79$;
- La masse volumique: de l'eau $\rho e=1,0g.cm^{-3}$;
- La masse molaire de l'alcool: $M(al)=74,0g.mol^{-1}$;
- La masse molaire de l'acide: $M(ac)=60,0g.mol^{-1}$;
- La constante pK_A du couple CH_3COOH/CH_3COO^- à $25°C$: $pK_A=4,8$;
- Le produit ionique de l'eau à $25°C$: $pK_e=14$.

1- Réaction d'estérification.

1.1- En utilisant les formules semi-développées, écrire l'équation de la réaction d'estérification qui se produit dans un tube à essai et donner le nom de l'ester formé.

1.2- Calculer le volume de l'alcool et la masse de l'acide qui ont été mélangés dans la fiole jaugée.

1.3- Dresser le tableau d'avancement de la réaction qui a lieu dans chaque tube à essai et exprimer la quantité de matière de l'ester formé $n(ester)_t$ à un instant donné t en fonction de la quantité de matière d'acide restant $n(ac)_t$.

2- Dosage de l'acide restant.

Pour doser l'acide restant à un instant t, dans le tube à essai numéro 1 on le verse dans un erlenmeyer jaugé puis on le dilue en ajoutant de l'eau distillée froide jusqu'à obtenir un mélange (S) de volume $100mL$.

On prend $10mL$ du mélange (S) et on le verse dans un bécher et on le dose avec une

solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_b = 1,0 mol.L^{-1}$. (On ne tient pas compte, lors du dosage, des ions H_3O^+ provenant de l'acide sulfurique).

2.1- Ecrire l'équation de la réaction du dosage.

2.2- Donner l'expression de la constante d'acidité K_A du couple CH_3COOH/CH_3COO^- en fonction des concentrations.

2.3- Déduire la constante d'équilibre K associée à l'équation de la réaction du dosage et calculer sa valeur à $25°C$.

2.4- Le volume de la solution d'hydroxyde de sodium pour obtenir l'équivalence est $V_b = 4,0mL$.

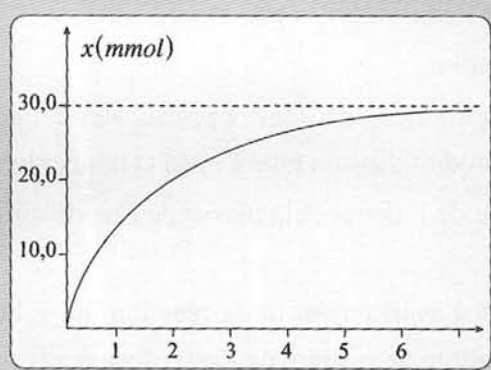
Déduire la quantité de matière d'ester formé dans le tube à essai numéro 1.

3- Sens d'évolution du système chimique:

Le dosage de l'acide restant dans les tubes précédents, à différents instants, a permis de tracer la courbe $x = f(t)$, dont x est l'avancement de la réaction d'estérification, à un instant t, dans un tube à essai. (figure).

3.1- Calculer la constante d'équilibre K' associée à la réaction d'estérification.

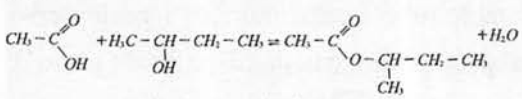
3.2- Calculer la quantité de matière d'acide éthanoïque n_a qu'il faut ajouter à un tube à essai dans les mêmes conditions expérimentales précédentes, pour que le rendement final de la synthèse de l'ester à la fin de la réaction soit $r = 90\%$.



BAC SM, Ratt 2011

Solution

1.1-



1.2- $v = \dfrac{m(al)}{\rho} = \dfrac{n(al).M(al)}{\rho eau.d}$

$v = \dfrac{0,500 \times 74}{1,0.10^3 \times 0,79} = 46,83.10^{-3} L \simeq 47mL$

$n(ac) = \dfrac{m(ac)}{M(ac)}$

$m(ac) = n(ac).M(ac) = 0,500 \times 60,0 = 30,0g$

1.3-

	acide + alcool ⟶ ester + eau			
x				
$x=0$	$n_i(ac)$	$n_i(al)$	0	0
$x=x_f$	$n_i(ac)=n_i(ac)-x_f$	$n_f(ac)=n_i(al)-x_f$	$n_f(est)=x_f$	$n_f(H_2O)=x_f$

$n_f(ester)=x_f=n_i(ac)-n_f(ac)$

$n_i(ac)=\dfrac{0,5}{10}=0,05mol$

$n_f(ester)=0,05-n_f(ac)$

$n(ester)_t=0,05-n(ac)_t$

2.1- $CH_3COOH+HO^-\rightarrow CH_3COO^-+H_2O$

2.2-

$K_A=\dfrac{[CH_3COO^-][H_3O^+]}{[CH_3COOH]}$

$K=\dfrac{[CH_3COO^-][H_2O]}{[CH_3COOH].[HO^-]}=\dfrac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH].[H_3O^+]}$

$K=\dfrac{K_A}{K_e}=10^{pK_e-pK_A}=10^{14-4,8}=10^{9,2}=1,6.10^9$

2.4-

$n(ester)_t=0,05-n(ac)_t$

$n(ester)=0,05-C_b.v_b$

$=0,05-1,0.4.10^{-3}=4,6.10^{-2}mol$

3.1- A l'état d'équilibre:

$x_f=x_{éq}=3.10^{-2}mol$

$K'=\dfrac{[ester]_e.[H_2O]_e}{[acide]_e.[alcool]_e}$

$=\dfrac{\left(\frac{x_f}{V}\right)^2}{\left(\frac{n_i(ac)-x_f}{V}\right)\left(\frac{n_i(al)-x_f}{V}\right)}$

$K'=\dfrac{x_f^2}{(n_i(ac)-x_f)(n_i(al)-x_f)}$

$K'=\dfrac{(3.10^{-2})^2}{(0,05-3.10^{-2})(0,05-3.10^{-2})}$

$=2,25$

3.2- Au nouvel état d'équilibre, l'avancement est :

$x'_f=r.x_{max}=0,90\times 0,05=4,5.10^{-2}mol$

$K'=\dfrac{x'^2_f}{(n_a+0,05-x'_f)(0,05-x'_f)}$

$n_a(0,05-x'_f)+(0,05-x'_f)^2=\dfrac{x_f^2}{K}$

$=\dfrac{(4,5.10^{-2})}{2,25}$

$=9.10^{-4}$

$5.10^{-3}.n_a=9.10^{-4}-0,25.10^{-4}$

$n_a=0,175mol$

20 Le butanoate d'éthyle est un ester à saveur d'ananas. Sa formule semi-développée est:

$$CH_3-CH_2-CH_2-C(=O)-O-CH_2-CH_3$$

On synthétise cet ester par la réaction entre un acide carboxylique A et un alcool B selon l'équation:

$$A_{(\ell)}+B_{(\ell)}\leftrightharpoons CH_3-CH_2-CH_2-C(=O)-O-CH_2-CH_{3(\ell)}+H_2O_{(\ell)}$$

Données:

$$M(H)=1g.mol^{-1}\ ;\ M(C)=12g.mol^{-1}\ ;\ M(O)=16g.mol^{-1}$$

1.1- Rappeler les caractéristiques de cette réaction.

1.2- Déterminer la formule semi-développée de (A) et celle de (B).

2- On chauffe à reflux, en présence de l'acide sulfurique, un mélange équimolaire formé de $n_0 = 0,30mol$ de l'acide A et $n_0 = 0,30mol$ de l'alcool B.

La masse de butanoate d'éthyle obtenue à l'état d'équilibre est $23,2g$.

2.1- En utilisant un tableau d'avancement, trouver :

a- La valeur de la constante d'équilibre K associée à l'équation de la transformation étudiée.

b- La valeur du rendement r de la réaction.

2.2- On réalise la même transformation en utilisant n moles de l'acide A et $n_0 = 0,30mol$ de l'alcool B.

Déterminer la quantité de matière n, pour obtenir un rendement $r' = 80\%$.

D'après BAC.SM-Juin **2010**

Solution

1.1- L'estérification réalisée à l'aide d'un alcool et un acide carboxylique est une transformation limitée et lente.

1.2- $A : CH_3 - CH_2 - CH_2 - C(=O)-OH$

$B : CH_3 - CH_2 - OH$

2.1-

$$x_e = n_e(ester) = \frac{m_e}{M(E)}$$

$$= \frac{m_e}{M(C_2H_5 - CH_2 - COOC_2H_5)}$$

$$= \frac{23,2}{116} = 0,2mol$$

$$K = \frac{[E]_e.[H_2O]}{[A]_e.[B]_e} = \frac{\frac{x_e}{V}\cdot\frac{x_e}{V}}{\frac{n_0 - x_e}{V}\cdot\frac{n_0 - x_e}{V}} = \frac{x_e^2}{(n_0 - x_e)}$$

$$K = \frac{0,2^2}{(0,3-0,2)^2} = 4$$

2.2- $r = \frac{x_e}{x_{max}} = \frac{x_e}{n_0} = \frac{0,2}{0,3} = 0,66 = 66,6\%$

2.3- On a : $r' > r$.

Et, on sait que le rendement augmente, lorsque la quantité de matière de l'un des réactifs augmente, donc :

$n > n_0$, alors: $x'_{max} = n_0$, alors: $x'_{max} = n_0$

$$r' = \frac{x'_e}{n_0}$$

$$x'_e = r'.n_0$$

$$n_e(A) = n - x'_e$$

$$K = \frac{(x'_e)^2}{(n - x'_e)(n_0 - x'_e)} = \frac{(r'n_0)^2}{(n - r'n_0)(n_0 - r'n_0)}$$

$$n - r'n_0 = \frac{(r'.n_0)^2}{K.n_0(1-r')}$$

$$n = \frac{r'^2.n_0}{K(1-r')} + r'.n_0$$

$$= \frac{0,64.0,3}{4(1-0,8)} + 0,8.0,3$$

$$n = 0,48mol$$

21 On réalise l'estérification en faisant réagir $1mol$ d'acide méthanoïque (A), avec $1mol$ d'un alcool secondaire (B) de formule brute C_3H_8O.

On obtient à l'état final $53g$ d'un ester E.

On donne en $g.mol^{-1}$: H:1 ; C:12 ; O:16.

1- Ecrire en utilisant les formules semi-développées, l'équation de cette réaction.

Donner les noms de l'alcool B et de l'ester E.

2- Calculer le rendement de la réaction.

3- A l'état d'équilibre précédent, la quantité d'ester formé a été entièrement retirée du mélange.

Suite à cette opération:

3.1- Dans quel état évolue le système?

3.2- Quelle est la composition du mélange dans le nouvel état final?

3.3- Calculer la nouvelle valeur du rendement de la réaction.

Solution

1- Formule de l'alcool secondaire B :

$$H_3C-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

$$HCOOH + H_3C-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \rightleftarrows H-\overset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-O-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3 + H_2O$$

(B): propan-2-ol; (E): méthanoate de méthyléthyle

2-

$$r=\frac{n_f(E)}{n_m(E)}=\frac{m(E)}{M(M).n_m(E)}=\frac{m(E)}{M(E).x_{max}}=\frac{53}{88.1}=0,6$$

3.1- Calculons d'abord, la constante d'équilibre :

$$K=\frac{n_e(E).n_e(H_2O)}{n_e(A).n_e(B)}=\frac{0,6.0,6}{(1-0,6)(1-0,6)}=2,25$$

Lorsque l'ester est retiré du mélange final, le quotient de réaction est nul, car $n(E)=0$.

L'équilibre est donc déplacé dans le sens direct, pour former une autre quantité d'ester.

3.2- Soit x'_e l'avancement au nouvel état d'équilibre.

	$A+B \rightleftarrows E+H_2O$				
Etat initial	$x=0$	1	1	0	0
1er équilibre	$x=x_e=0,6mol$	$1-x_e$	$1-x_e$	$\underbrace{x_e-0,6}_{=0}$	x_e
2ème équilibre	$x=x'_e=?$	$1-x'_e$	$1-x'_e$	$x'_e-0,6$	x'_e

D'après le tableau d'avancement, on peut écrire, à l'état final,

$$K=\frac{x'_e.(x'_e-0,6)}{(1-x'_e)}\text{; avec : } x'_e<1$$

Soit: $2,25(1-x'_e)^2=x'^2_e-0,6x'_e$

On obtient:

$1,25x'^2_e-3,9x'_e+2,25x'_e=0\text{; } x'_e<1$

Cette équation admet pour solution: $x'_e=0,76mol$.

Le nouveau rendement de la réaction est :

$$r'=\frac{n'_f(E)}{x_{max}}=\frac{0,76}{1}=0,76>r=0,6$$

L'élimination de l'ester au cours de la réaction améliore le rendement.

22 On réalise l'hydroxyle d'un ester (E) de formule brute $C_xH_{2x}O_2$, en utilisant le montage du chauffage à reflux. Il se forme un acide carboxylique (A) de formule brute $C_yH_{2y}O_2$ et l'éthanol.

La réaction est modélisée par l'équation:

$C_xH_{2x}O_2 + H_2O \rightleftarrows C_yH_{2y}O_2 + C_2H_5OH$

Le mélange initial est formé d'une masse $m_0 = 5,5g$ de l'ester (E) et de l'eau en excès.

- Une première expérience a permis de séparer les constituants du mélange à la fin de réaction. La masse de l'acide (A) formé vaut $3,69g$.

- Une deuxième expérience a été reprise dans les mêmes conditions. Et, le dosage de l'acide (A) dans le mélange à l'état final a montré qu'un échantillon dont le volume représente $\frac{1}{20}$ ème du volume du mélange, nécessite à l'équivalence, un volume $V_{BE} = 19,5mL$ d'une solution de soude de concentration $C_B = 0,125mol.L^{-1}$.

Données $(en\ g/L)$: $M(O) = 16$; $M(C) = 12$ et $M(H) = 1$.

1- Vérifier que l'acide (A) est l'acide propanoïque.

2- En déduire la formule semi-developpée de l'ester E.

3- Calculer le rendement de la réaction.

BAC SM, 2012

Solution

1- $n(A) = \dfrac{m(A)}{M(A)}$, d'où: $M(A) = \dfrac{m(A)}{n(A)}$

$n(A) = 20n'(A)$

$n'(A)$: quantité de matière de (A) dans l'échantillon dosé: $n'(A) = C_BV_{BE}$

alors :

$$M(A) = \frac{m(A)}{20C_BV_{BE}} = \frac{3,7}{20.0,125.19,5.10^{-3}} \approx 76g.mol^{-1}$$

or

$M(A) = M(C_yH_{2y}O_2) = 12y + 2y + 32 = 14y + 32$

d'où : $y = \dfrac{M(A) - 32}{14} = 3,13$

Le nombre y étant un entier, on doit prendre $y = 3$.

L'acide (A) a pour formule : $C_3H_6O_2$; ou bien : $CH_3 - CH_2 - C(=O)-OH$

Il s'agit bien de l'acide propanoïque.

2- La connaissance de formules semi-développée des (A) et (B) donne:

(E): $CH_3 - CH_2 - C(=O)-O-C_2H_5$

3-

$$r = \frac{n_f(A)}{n_{th}(A)} = \frac{n_f(A)}{x_{max}} = \frac{n_f(A)}{n_0(E)} = \frac{m(A)}{M(A)} \cdot \frac{M(E)}{m_0}$$

$$r \approx \frac{3,7}{74} \cdot \frac{102}{5,5} \approx 0,86$$

23 On considère la réaction d'estérification entre un acide A et un alcool B, dont l'équation est modélisée par :

$A + B \rightleftarrows E + H_2O$

La constante d'équilibre qui lui est associée est : $K = 4$.

On s'intéresse à étudier son rendement en modifiant la quantité initiale de l'un des deux réactifs (A).

1- Le mélange initial est formé de n_0 moles de A et n_0 moles de B.

a- Montrer que le rendement de l'estérification s'écrit dans ce cas : $r = \dfrac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}$. Que remarquez-vous?

b- Calculer sa valeur.

2- Le mélange initial est formé de n_0 moles de A et n moles de B, avec $n > n_0$.

En posant $\alpha = \dfrac{n}{n_0}$ (α entier); trouver la condition sur le nombre α pour que le rendement de l'estérification dépasse 90%.

Solution

1.a- En utilisant le tableau d'avancement de la réaction, la constante d'équilibre s'écrit:

$$K = \frac{[E][H_2O]}{[A][B]} = \frac{\left(\frac{x_e}{V}\right)^2}{\left(\frac{n_0 - x_e}{V}\right)^2} = \left(\frac{x_0}{n_0 - x_e}\right)^2$$

alors: $\dfrac{x_e}{n_0 - x_e} = \sqrt{K}$; $x_e = n_0\sqrt{K} - x_e\sqrt{K}$

d'où: $x_e = \dfrac{n_0.\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}$

$$r = \frac{x_e}{x_{max}} = \frac{x_e}{n_0} = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}$$

- La valeur du rendement est indépendante de celle de n_0.

1.b- $r = \dfrac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}} = \dfrac{2}{3} = 66,7\%$

2- L'expression de K est:

$$K = \frac{x_e^2}{(n - x_e)(n_0 - x_e)} = \frac{x_e^2}{(\alpha n - x_e)(n_0 - x_e)}$$

Celle du rendement est : $r = \dfrac{x_e}{n_0}$, donc :

$x_e = rn_0$,

alors:

$$K = \frac{(r.n_0)^2}{(\alpha n_0 - rn_0)(n_0 - rn_0)} = \frac{r^2}{(\alpha - r)(1 - r)}$$

avec: $K = 4$, on obtient en développant :

$r^2 = 4(\alpha - r - \alpha r + r^2)$;

soit : $3r^2 - 4(1+\alpha)r + 4\alpha = 0$

$\Delta = 16(1+\alpha)^2 - 48\alpha$; et

$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{\alpha^2 + 1 - \alpha}$

$$r = \frac{4(1+\alpha) \pm \sqrt{\Delta}}{6} = \frac{2}{3}(1 + \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \alpha})$$

L'autre solution est à rejeter car elle donne une valeur : $r > 1$.

La condition $r \geq 90\%$ donne :

$\dfrac{2}{3}(1 + \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \alpha}) \geq 0,9$;

soit : $1+\alpha-\sqrt{\alpha^2+1-\alpha}\geq 1,35$;

ou encore : $\alpha-0,35\geq\sqrt{\alpha^2+1-\alpha}$

il vient : $(\alpha-0,35)^2\geq\alpha^2+1-\alpha$

soit donc :

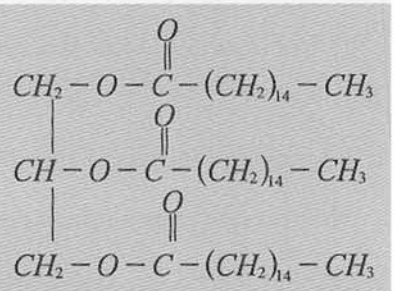
$\alpha^2-0,7\alpha+1,1225\geq\alpha^2+1-\alpha$

c'est-à-dire : $0,3\alpha\geq 0,8775$

d'où : $\alpha\geq 2,925$

avec : $\alpha\in\mathbb{N}^*$, il vient : $\alpha\geq\alpha_{min}=3$

24 On peut fabriquer un savon à partir du triester, le palmitate de glycéryle, dont la formule est donnée ci-contre.



1- Donner le nom et la formule de ce savon.

2- indiquer les caractéristiques de cette transformation.

3- Indiquer, dans la molécule de savon, les parties lipophile, hydrophile, lipophobe et hydrophobe.

4- On fabrique le savon à partir de 10 tonnes de palmitate de glycéryle et la soude en excès. Le rendement de l'opération est de 85%.

4.1- Ecrire l'équation de saponification.

4.2- Calculer la masse de savon obtenu.

Données : Masses molaires

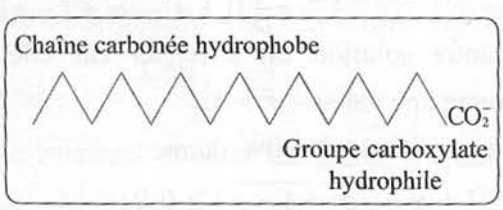
$M_{(savon)}=278g.mol^{-1}$; $M_{(ester)}=806g.mol^{-1}$.

Solution

1- La réaction de saponification produit du palmitate de sodium: $(CH_3-(CH_2)_{14}-COO^-,Na^+)$ constituant le savon.

2- Cette transformation est rapide à chaud et totale.

3- On peut représenter le savon par:



Le groupe carboxylate COO^- est hydrophile (aime l'eau), mais n'a pas d'affinité pour les lipides (lipophobe). La chaîne carbonée ne présente pas d'affinité pour l'eau: elle est hydrophobe; elle présente par contre une affinité pour les lipides, elle est dite lipophile.

4.1-

$$CH_2-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-(CH_2)_{14}-CH_3$$
$$CH-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-(CH_2)_{14}-CH_3 + 3(Na^+ + OH^-) \rightarrow CH-OH + 3(CH_3-(CH_2)_{14}-COO^- + Na^+)$$
$$CH_2-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-(CH_2)_{14}-CH_3$$

$$CH_2-OH$$
$$CH-OH$$
$$CH_2-OH$$

4.2- Un tableau d'avancement de cette réaction permet d'écrire:

$n(savon) = 3.x_f$

Or, le rendement de la réaction s'écrit:

$$r = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{x_f}{n_0(ester)}$$

$x_f = r.n_0(ester)$

Le réactif limitant est l'ester.

$$n(savon) = 3.x_f = 3.r.n_0(ester)$$
$$\frac{m(savon)}{M(savon)} = 3.r.\frac{m_0(ester)}{M(ester)}$$
$$m(savon) = 3.r.m_0(ester).\frac{M(savon)}{M(ester)}$$

A.N.:

$$m(savon) = 3.0,85.10.10^3.\frac{278}{806}$$
$$m(savon) = 8,8.10^3 kg = 8,8 tonnes$$

25 De la transformation chimique non totale à la transformation totale

Les transformations chimiques peuvent être totales ou non totales. Les chimistes utilisent plusieurs méthodes pour suivre quantitativement les transformations chimiques au cours du temps et les contrôler pour augmenter leur rendement ou diminuer leur vitesse pour limiter leurs effets.

Parfois chimiste change l'un des réactifs pour obtenir le même produit avec plus d'efficacité.

Données :

Le composé organique	Masse molaire ($g.mol^{-1}$)	Masse volumique ($g.mL^{-1}$)
L'acide (A)	$M(A) = 88,0$	$\rho(A) = 0,956$
L'acide (B)	$M(B) = 88,0$	$\rho(B) = 0,810$
Anhydride butanoïque (AN)	$M(AN) = 158,0$	$\rho(AN) = 0,966$

1. Suivi temporel d'une transformation chimique :

On mélange dans un erlenmeyer un volume $V_A = 11mL$ de l'acide (A) de formule:

$$CH_3-CH_2-CH_2-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$$

Et $0,12mol$ de l'alcool (B) de formule:

$$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-CH_2-OH$$

On ajoute au mélange quelques gouttes d'acide sulfurique concentré et quelques pierres ponces.

Après chauffage, il se forme un composé (E) de masse molaire $M(E) = 158g.mol^{-1}$.

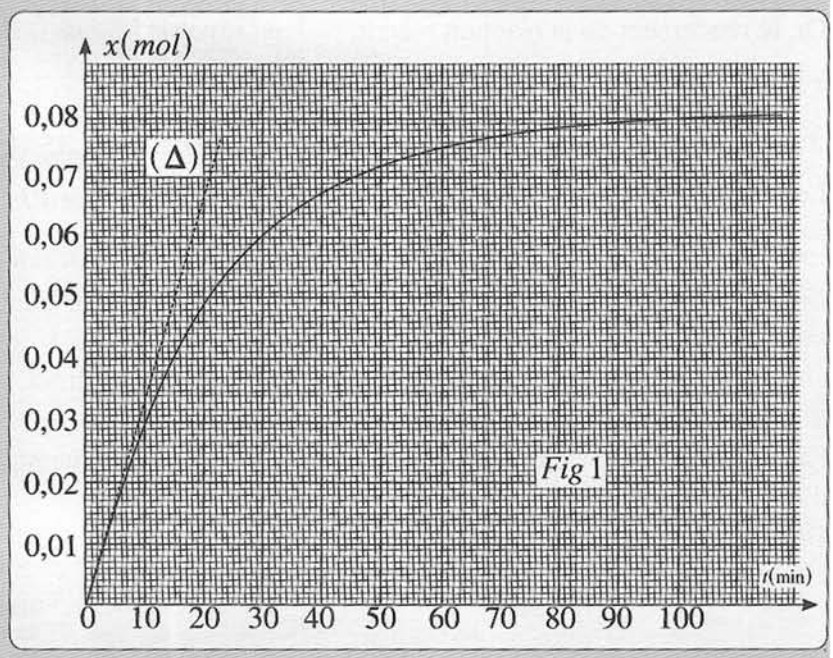
Le graphe $x = f(t)$ donne l'évolution de l'avancement x de la réaction en fonction du temps t, (fig 1) la droite (Δ) représente la tangente à la courbe $x = f(t)$ à l'instant $t = 0$.

1.1- Donner la définition du temps de demi-réaction et déterminer sa valeur.

1.2- Calculer graphiquement la valeur de la vitesse volumique $v(0)$ à l'instant $t = 0$.

2.Rendement de la réaction :

2.1- Ecrire, en utilisant les formules semi-développées, l'équation de la synthèse du composé (E) à partir de l'acide (A) et l'alcool (B) et donner le nom du composé (E) suivant la nomenclature officielle.



2.2- Calculer la quantité de matière initiale de l'acide (A).

2.3- Calculer la valeur de la constante d'équilibre K associée à l'équation de synthèse du composé (E).

2.4- On mélange $0,12mol$ de l'acide (A) et $0,24mol$ de l'alcool (B):

a- Calculer l'avancement finale de la réaction qui a lieu.

b- Calculer le rendement de la réaction.

3- Contrôle de l'évolution du synthèse chimique :

On peut améliorer également le rendement de la réaction précédente en remplaçant l'acide (A) par l'anhydride butanoïque (AN).

On mélange un volume $V_B = 13mL$ de l'alcool (B) et un volume $V_{AN} = 14mL$ de l'anhydride butanoïque, on obtient une masse $m(E)$ du composé (E).

3.1- Ecrire l'équation de la réaction dans ce cas en utilisant les formules semi-développées.

3.2- Calculer la masse $m(E)$.

(BAC SM, 2013, session noramale)

Solution

1.1- Le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement de la réaction prend la moitié de sa valeur finale.

$x(t = t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x_f$

Le graphe fournit : $t_{\frac{1}{2}} = 15\,\text{min}$

1.2- La vitesse volumique de la réaction s'exprime à un instant t par :

$v(t) = \frac{1}{V}.\left(\frac{dx}{dt}\right)_t$; à $t = 0$;

$$v(0) = \frac{1}{V}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$$

$$V = V_A + V_B = V_A + \frac{m(B)}{\rho(B)}$$

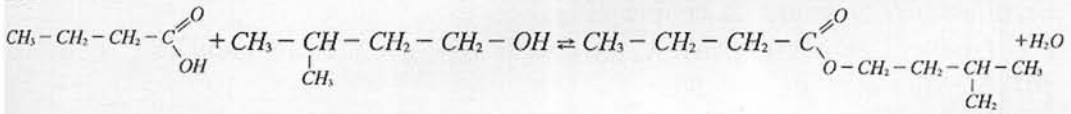
$$V = V_A + \frac{n(B).M(B)}{\rho(B)}$$

$$= 11 + \frac{0,12 \times 88}{0,810} = 24mL$$

$$v(0) = \frac{1}{24 \times 10^{-3}}\left(\frac{0,08 - 0}{25 - 0}\right)$$

$$v(0) = 0,13mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

2.1-



L'ester (E) est l'éthanoate de 3-méthylbutyle.

2.2-

$$n_i(A) = \frac{m_i(A)}{M(A)}$$

$$n_i(A) = \frac{\rho(A).V(A)}{M(A)}$$

$$n_i(A) = \frac{0,956 \times 11}{88} = 0,12mol$$

2.3- $K = \frac{[E]_{eq}.[H_2O]_{eq}}{[A]_{eq}.[B]_{eq}} = \left(\frac{x_f}{0,12 - x_{eq}}\right)^2$

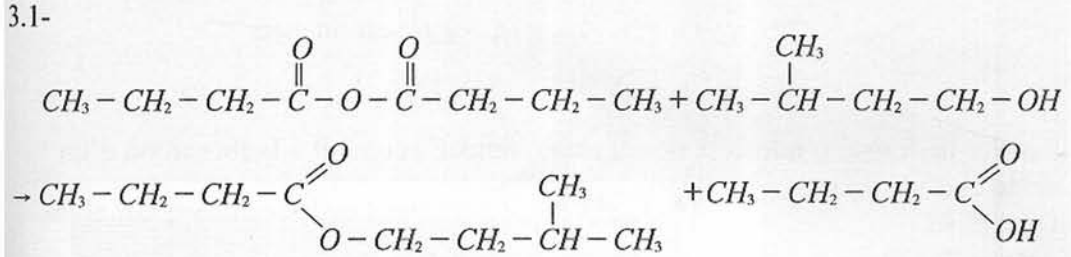
2.4.a- $K = \frac{\left(\frac{0,08}{0,12 - 0,08}\right)^2}{(0,12 - x_e)(0,24 - x_e)} = 4$

$3x_e^2 - 1,44x_e + 0,1152 = 0$

On obtient : $x'_e = 0,10mol$

2.4.b- $r = \frac{x'_e}{x_{\max}} = \frac{0,10}{0,12} = 0,83$

3.1-



3.2- $n_i(B) = \frac{\rho(B).V(B)}{M(B)} = 0,12mol$

$n_i(AN) = \frac{\rho(AN).V(AN)}{M(AN)} = 0,086mol$

$n_f(E) = x_{\max}$ (réaction totale)

$m(E) = x_{\max}.M(E) = 13,6g$

26 L'eau est une espèce chimique dont le rôle est primordial en chimie des solutions aqueuses. Dans cet exercice on étudiera:
- une solution aqueuse d'un acide,
- l'hydrolyse d'un ester ,
- l'électrolyse de l'eau.

1- Etude d'une aqueuse aqueuse d'un acide HA :

On prépare une solution aqueuse S_A d'acide 2- méthylpropanoique, noté HA, de volume V et de concentration molaire $C = 10^{-2} mol.L^{-1}$. On désigne par A^- la base conjuguée de HA.

La mesure du pH de S_A donne $pH = 3,44$.

1.1- Ecrire l'équation chimique modélisant la réaction de l'acide HA avec l'eau.

1.2- Calculer le taux d'avancement final de la réaction et déduire l'espèce chimique prédominante du couple $HA_{(aq)}/A^-_{(aq)}$.

1.3- Trouver l'expression du pK_A du couple $HA_{(aq)}/A^-_{(aq)}$ en fonction de C et de pH. Vérifier que: $pK \approx 4,86$.

1.4- On prend un volume $V_A = 20mL$ de la solution aqueuse S_A auquel on ajoute progressivement un volume V_B d'une solution aqueuse (S_B) d'hydroxyde de sodium $Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$ de concentration molaire $C_B = C$ avec $V_B < 20mL$.

1.4.1- Ecrire l'équation modélisant la réaction chimique qui se produit (cette réaction est considérée totale).

1.4.2- Trouve la valeur du volume V_B de la solution (S_B) ajouté lorsque le pH du mélange réactionnel prend la valeur $pH = 5,50$.

2- Hydrolyse d'un ester:

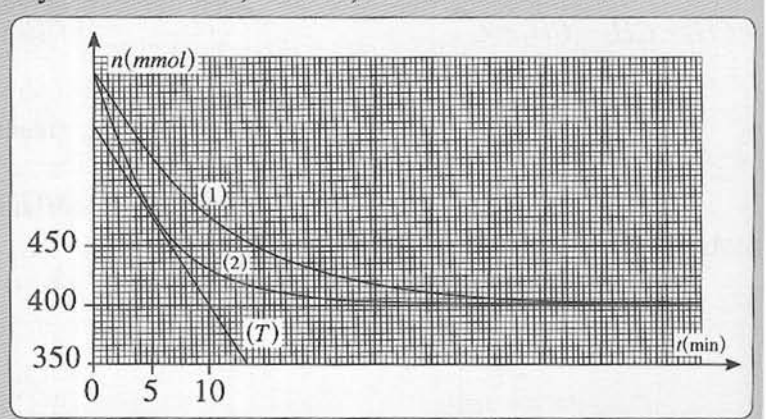
Le 2 méthylpropanoate d'éthyle de formule semi-développée

$$CH - \underset{\underset{CH_3}{|}}{CH} - \overset{\overset{O}{|}}{C} - O - CH_2 - CH_3$$ est un ester

à odeur de fraise. L'hdrolyse de cet ester , noté E, conduit à la formation d'un acide et d'un alcool.

On réalise deux mélanges équimolaires de l'ester E et d'eau. Le volume de chaque mélange est V_0.

Les courbes (1) et (2) de la figure ci-contre représentent l'évolution au cours



du temps, de la quantité de matière de l'ester E à une même température θ.
L'une des deux courbes est obtenue en réalisant cette hydrolyse sans catalyseur.
2.1- Ecrire, en utilisant les formules semi-développées, l'équation modélisant la réaction qui se produit.
2.2- Déterminer graphiquement le temps de demi-réaction dans le cas de la transformation correspondant à la courbe (1).
2.3- Indique, en justifiant la réponse, la courbe correspondant à la réaction d'hydrolyse sans catalyseur.
2.4- En utilisant la courbe (2), déterminer en $mol.L^{-1}.min^{-1}$ la vitesse volumique de réaction à l'instant $t_1 = 5\,min$ ((T) représente la tangente à la courbe (2) au point d'abscisse t_1). On prend le volume du mélange réactionnel $V_0 = 71mL$.

Solution

1- Etude d'une solution d'un acide HA.

1.1- $HA_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

1.2- $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \dfrac{nf(H_3O^+)}{x_{max}}$

$$\tau = \frac{[H_3O^+]V}{CV} = \frac{10^{-pH}}{C} = 3,63.10^{-2}$$

$$[AH] = \frac{n(AH)}{V} = \frac{CV - x_f}{V}$$

$$[AH] = c - \frac{x_{min}\tau}{V} = c\frac{CV.\tau}{V}$$

$$[AH] = C(1-\tau)$$

$$[A^-] = \frac{x_f}{V} = \frac{x_{max}.\tau}{V} = C.\tau$$

$$\frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{C(1-\tau)}{C\tau} = \frac{1}{6} - 1 \approx 26,5 > 1$$

L'acide AH prédomine dans la solution S_A.

1.3-

$$K_A = \frac{[A^-]_{eq}.[H_3O^+]_{eq}}{[AH]_{eq}} = \frac{[H_3O^+]^2_{eq}}{C - [H_3O^+]_{eq}}$$

$$K_A = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}}$$

$$pK_A = -\log K_A = -\log\left(\frac{10^{-2^{pH}}}{C - 10^{-pH}}\right)$$

$$pK_A \approx 4,86$$

1.4.1- $AH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow A^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$

1.4.2- Comparons les quantités initiales $n_i(AH)$ et $n_i(HO^-)$

$$n_i(AH) = CV_A \;;\; n_i(HO^-) = C_BV_B$$

Comme $C_B = C$ et $V_B < V_A$ on déduit que HO^- est le réactif limitant, alors $x_{max} = CV_B$

La réaction étant totale: $x_f = x_{max} = CV_B$

$$[AH] = \frac{CV_A - x_f}{V_T}$$

$$[AH] = \frac{CV_A - CV_B}{V_T} = \frac{C(V_A - V_B)}{V_T}$$

$$[A^-] = \frac{x_{max}}{V_T} = \frac{C_BV_B}{V_T} = \frac{C.V_B}{V_T}$$

d'où: $\dfrac{[AH]}{[A^-]} = \dfrac{C(V_A - V_B)}{C.V_B} = \dfrac{V_A}{V_B} - 1$ (1)

$$K_A = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{[H_3O^+]}{K_A} = 10^{pK_A - pH}$$

En identifiant (1) et (2) on obtient:

$$\frac{V_A}{V_B} - 1 = 10^{pK_A - pH}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = 1 + 10^{pK_A - pH}$$

$$V_B = V_A\frac{1}{1 + 10^{pK_A - pH}} = 20\frac{1}{1 + 10^{4,86} - 5,5}$$

$$V_B \approx 16,3mL$$

2- Hydrolyse d'un ester

2.1-

$$CH_3-CH(CH_3)-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-CH_2-CH_3+H_2O \rightleftarrows CH_3-CH(CH_3)-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH+HO-CH_2-CH_3$$

2.2- Le tableau d'avancement de cette réaction permet d'exprimer la quantité de matière n de l'ester:

A l'instant t: $n(t)=n_0-x$

A l'instant $t_{\frac{1}{2}}$ où $x=\frac{1}{2}x_f$ on a:
$n(t_{\frac{1}{2}})=n_0-\frac{1}{2}x_f$

A l'état final on a: pour l'ester:

$n_f=n_0-x_f$, d'où $x_f=n_0-n_f$

En revenant à (1) on écrit:

$$n(t_{\frac{1}{2}})=n_0-\frac{1}{2}(n_0-n_f)=\frac{n_0+n_f}{2}$$

On utilisant la figure
$$n(t_{\frac{1}{2}})=\frac{600+400}{2}=500mmol$$

L'instant correspondant à cette valeur est: $t_{\frac{1}{2}}\approx 7\,\text{min}$

2.3- En présence d'un catalyseur la vitesse de réaction augmenté et l'état final du système plus vite atteint (courbe 2).

En revanche, en absence de catalyseur la réaction atteint son état final au bout d'une durée plus grande (courbe 1).

2.4- D'après la définition de la vitesse volumique d'une transformation chimique on écrit:

$$v(t)=\frac{1}{V_0}\cdot\frac{dx}{dt}$$

L'avancement est lié à la quantité n d'ester par:

$n=n_0-x$ alors $\frac{dx}{dt}=-\frac{dn}{dt}$

d'où: $v(t)=-\frac{1}{V_0}\frac{dn}{dt}$

$$v(t_1)=-\frac{1}{V_0}\left(\frac{dn}{dt}\right)t_1$$

Graphiquement:

$$v(t_1)=-\frac{1}{71.10^{-3}}\frac{(400-550).10^{-3}}{(10-0)}$$
$$\approx 0,2mol.L^{-1}.\text{min}^{-1}$$

Tous droits réservés

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

MAXI SCIENCES PHYSIQUES

Cours & exercices corrigés

2ème année baccalauréat

Sciences Mathématiques (tome 2)

3ème édition: 2021

Dépôt légal: 2017MO3468

ISBN: 978-9954-682-44-9

ISSN: 2508-9838

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) Casablanca



مكتبة السلام الجديدة

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca
Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11
Fax: 05-22-44-10-47
E-mail: lib.essalam@menara.ma
lib.essalam@hotmail.fr - lib.essalam@gmail.com
www.librairieessalam.com

Dépôt Légal : 2017MO3468
ISBN 978- 9954- 682- 44-9

Prix de vente public:

80,00 DH

9 789954 682449