

A- Progression arithmétiques :**a- Définition :**

Les termes $U_1 ; U_2 ; U_3 ; \dots ; U_{n-1} ; U_n$ sont en progression arithmétique de raison r lorsque : $U_1 ; U_2=U_1+r ; U_3=U_2+r ; U_n=U_{n-1}+r$ alors $r=U_n-U_{n-1}$.

La raison r est la différence entre deux termes consécutifs c'est-à-dire $r=U_2-U_1=U_3-U_2=U_n-U_{n-1}$.

Remarque :

- Si $r>0$ la progression arithmétique est croissante
- Si $r<0$ la progression est décroissante
- Si $r=0$ la progression est constante ou stationnaire

L'expression générale $U_n=U_p+(n-p) \cdot r$

Note : trois réels a, b, c dans cet ordre en progression arithmétique ssi $2b=a+c$

Note : les capitaux $C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 \dots$ sont en progression arithmétique ssi $C_1=C_1 ; C_2=C_1+r ; C_3=C_1+2r ; C_4=C_1+3r \dots$

b- La somme :

La somme d'une progression de 1^{er} terme U_p , dernier terme U_n de raison r :

L'expression générale : $S_n = \frac{n-p+1}{2} \cdot (U_p + U_n)$

c- Insertion K moyens arithmétique entre deux réels a et b :

On calcule la raison $r=(b-a) / (k+1)$

Exemple : insérer quatre capitaux en progression arithmétique entre deux capitaux 20000 et 100 000

Solution : $r = (100000 - 20000) / (4+1) = 16000$

Les capitaux sont : 20000 ; 36000 ; 52000 ; 68000 ; 84000 ; 100000.

B- Progression géométrique :**a- Définition :**

On appelle progression géométrique de raison q la suite de nombre $U_1 ; U_2 ; U_3 ; \dots ; U_n$ tels que : $U_2=U_1q ; U_3=U_2q ; U_4=U_3q \dots$

Remarque :

- Si $q>1$ la progression géométrique est croissante

- Si $0 < q < 1$ la progression est décroissante
- Si $q = 1$ la progression géométrique est constante ou stationnaire

Note : trois termes a, b et c dans cet ordre sont en progression géométrique ssi $b^2 = a.c$

Note : les capitaux $C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; \dots ; C_n$ sont en progression géométrique ssi $C_1 = C_1 ; C_2 = C_1 q ; C_3 = C_1 q^2 ; C_4 = C_1 q^3 ; \dots ; C_n = C_1 q^{n-1}$

Expression générale : $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$

b- la somme : $S_n = U_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$

c- Insertion de K moyens géométrique entre a et b :

La raison $q = \sqrt[K+1]{b/a}$

C- Rapports et proportions :

Rapport de deux nombres :

Le rapport entre a et b est $\frac{a}{b}$; a et b sont entre eux comme x et y ssi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

- Proportions :

La proportion est l'égalité de deux rapports : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Quatre nombres a ; b ; c ; d forment une proportion ssi : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- Grandeurs directement proportionnelles :

(a,b,c) proportionnels à (x,y,z) tous non nuls ssi : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$ ou $\frac{a+b+c}{x+y+z} = k$

Alors $a = x \cdot k ; b = y \cdot k ; c = z \cdot k$

- Grandeurs inversement proportionnelles

(a, b,c) inversement proportionnels à (x,y,z) tous non nuls ssi : $\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} =$

$\frac{c}{\frac{1}{z}}$ on a $\frac{a}{y \cdot z} = \frac{b}{x \cdot z} = \frac{c}{x \cdot y} = K$.

2^{ème} partie : Mathématiques financières**Les intérêts simples :****I- Définition :**

L'intérêt est la rémunération d'un prêt d'argent. Il est dit simple lorsqu'il est calculé proportionnellement au capital, à la durée et au taux.

$$I = \frac{ctn}{100} \text{ Si } n \text{ est en année}$$

$$I = \frac{ctn}{1200} \text{ Si } n \text{ est en mois}$$

$$I = \frac{ctn}{36000} \text{ Si } n \text{ est en jours}$$

$$I = \frac{ctn}{100k} \text{ Plus généralement s'il y a } k \text{ sous période (semestre, trimestre, mois, quinzaine, jours).}$$

$$\text{Si } K=2 \quad I = \frac{ctn}{200} \text{ n en semestres}$$

$$\text{Si } K=4 \quad I = \frac{ctn}{400} \text{ n en trimestres}$$

$$\text{Si } K = 24 \quad I = \frac{ctn}{2400} \text{ n en quinzaines}$$

NB: seules les quinzaines entières sont retenues

Exemple pour la décomptes de jours :

$$\text{Le } 05/03 \text{ au } 22/03 = 22 - 5 = 17 \text{ jrs}$$

$$\text{Le } 16/01/2000 \text{ au } 26/04/2000 = (31-16) + 29 + 31 + 26 = 101 \text{ jrs}$$

$$\text{Le } 07/02 \text{ au } 09/05 = (28-7) + 31 + 30 + 31 + 9 = 122 \text{ jrs}$$

La durée exprimée en mois : on considère tous les mois comme 30jrs. Par exemple 5mois=30*5=150jrs.

On considère l'année comme 12 mois de 30jrs. Par exemple 2ans 3mois 20jrs=360+90+20=470jrs.

II- La valeur acquise par un capital :

La valeur acquise est la valeur définitive obtenue par le capital.

$$V_a = \text{Capital} + \text{intérêt}$$

III- Intérêt civil et commercial :

L'intérêt est dit commercial lorsqu'il est calculé sur la base de 360jrs $I=(C*t*n)/36000$

L'intérêt est dit civil lorsqu'il est calculé sur la base de 365jrs $I'=(C*t*n)/36500$

$$I - I' = \frac{I}{73} \text{ et } I - I' = \frac{I'}{72}$$

$$\text{Alors } \frac{I}{73} = \frac{I'}{72}$$

IV- Le taux moyen de placement :

DEFINITION : On appelle taux moyen de placement, le taux unique (T) auquel il fallut placer les différents capitaux pour leurs durées respectives, pour obtenir le même intérêt.

FORMULE :

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k$$

$$I_T = \frac{c_1 t_1 n_1}{36000} + \frac{c_2 t_2 n_2}{36000} + \frac{c_3 t_3 n_3}{36000} + \dots + \frac{c_k t_k n_k}{36000}$$

D'après la définition :

$$I_T = \frac{c_1 T n_1}{36000} + \frac{c_2 T n_2}{36000} + \frac{c_3 T n_3}{36000} + \dots + \frac{c_k T n_k}{36000}$$

Posons $I_T = I_T$ on aura :

$$T = \frac{c_1 t_1 n_1 + c_2 t_2 n_2 + c_3 t_3 n_3 + \dots + c_k t_k n_k}{c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 + \dots + c_k n_k}$$

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{C_i t_i n_i}{C_i n_i}$$

$$\text{Ou } T = \sum_{i=1}^k \frac{N_i t_i}{N_i}$$

Par méthode des nombres et des diviseurs fixes.

V- L'intérêt précompté et taux effectif de placement :

- Intérêts post-comptés : lorsque les intérêts sont payés en fin de période on dit qu'ils sont post-comptés.
- Précomptés : lorsque les intérêts sont payés en début de période on dit qu'ils sont précomptés.

FORMULE :

Le taux d'intérêt effectif et celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté pour donner le même intérêt.

Désignons par : C' le capital effectivement engagé ou placé ou prêté ou emprunté

T_{eff} : le taux effectivement de placement.

$$I = \frac{ctn}{36000}; I = c' \frac{T_{eff}n}{36000}$$

Posons : $l = I$

On aura $T_{eff} = \frac{36000t}{36000 - tn}$ si n est en jours ; $T_{eff} = \frac{1200t}{1200 - tn}$ Si n est en mois

$T_{eff} = \frac{100t}{100 - tn}$ Si n est en année

VI- Méthodes des nombres et des diviseurs fixes :

- Principe : Divisions les numérateurs et les dénominateurs par (t) de la formule

$$I = \frac{ctn}{36000}$$

$$\frac{\frac{ctn}{t}}{\frac{36000}{t}} \text{ on aura : } \frac{cn}{t}$$

Posons que : $N = c \times n$ le nombre

$$D = \frac{36000}{t} \text{ Le diviseur fixe}$$

$$\text{Alors : } I = \frac{N}{D}$$

VII- La représentation graphique des intérêts et valeur acquise :

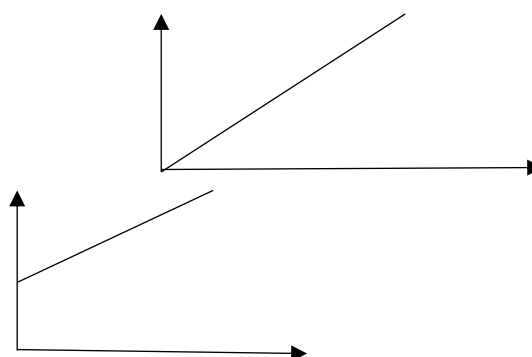
$$I = (c \cdot t \cdot n) / 36000 = a \cdot n$$

$$I = c \cdot t \cdot n / 36000 = a \cdot t$$

Avec a un réel

$$V_a = C + I = b + a \cdot n$$

$$V_a = C + I = b + a \cdot t$$



Escomptes à L'INTERETS SIMPLES ET EQUIVALENCE DES EFFETS :**Introduction :**

L'opération d'escompte consiste à vendre un effet de commerce avant son échéance. Le banquier retient l'escompte et les commissions qu'on appelle agio. La somme remise au bénéficiaire de l'effet est la valeur nette escomptée.

I- Définition de l'escompte commercial :**Escompte commercial :**

L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale calculé sur la durée qui sépare le jour de l'escompte (non compté) au jour d'échéance (compté). Les mois sont pris suivant leur durée réelle. Appelons :

V « valeur nominale de l'effet en Franc »

n « la durée qui sépare le jour de mise au jour d'échéance »

t « le taux d'escompte » le diviser $D = \frac{36\,000}{t}$

e « l'escompte commercial »

a « la valeur actuelle commerciale » $a = V - e$

Escompte commercial $e = \frac{(V * t * n)}{36000}$

Valeur actuelle commerciale $a = V - e = V - \frac{V * t * n}{36000}$

II- Définition de l'escompte rationnel :**Escompte rationnel : e'**

C'est l'intérêt de la valeur actuelle rationnelle (a') calculé sur la durée qui sépare le jour de l'escompte (non compté) au jour d'échéance (compté). Les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Appelons :

V « valeur nominale de l'effet en F »

n « la durée qui sépare le jour de mise au jour d'échéance »

t « le taux d'escompte » le diviseur $D = 36\,000 / \text{taux}$

e' « l'escompte rationnel »

a' « la valeur actuelle rationnelle » $a' = V - e'$

$$\text{Escompte rationnel } e' = \frac{(V * t * n)}{36000 + t * n} \quad \text{ou} \quad e' = \frac{a' * t * n}{36000}$$

Valeur actuelle rationnelle $a' = V - e'$

Note : n « c'est le nombre de jours qui séparent le jour de remise à l'escompte au jour d'échéance de l'effet » les mois sont pris suivant leur durée réelle.

$$e = \frac{V * t * n}{36000} = \frac{V * n}{D} \quad e' = \frac{(V * n)}{D + n}$$

$$\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{v} \quad \text{alors } v = \frac{e * e'}{e - e'}$$

III- Le Bordereau d'escompte :

Le bordereau d'escompte est un document qui récapitule l'ensemble des effets remis à l'escompte.

- Présentation du bordereau d'escompte :

N°	Valeur nominale V	Echéance	Nombre de jours	Escompte	commission		
					endos	Proport.	Fixes
1							
2							
3							
Totaux	somme	XXXXXX	XXXXX	Total1	Total2	Total3	Total4
Agio TTC=Agio HT+ Taxe= Agio HT*1,17 avec taxe=17% Valeur nette escomptées=total valeur nominale – Agio TTC							

Agio HT= Escompte + somme des commissions

$$\text{Escompte} = \frac{V * t * n}{36000}; \text{endos} = \frac{V * t * n}{36000}; \text{com propo} = \frac{V * K}{100}.$$

- Formule de calcul des taux :

Taux réel d'escompte : $T = \frac{36000 * Agio HT}{V * n} = t + t' + \frac{360k}{n}$ avec t « taux d'escompte » ; t' « taux d'endos » ; K « taux de commission proportionnelle ».

Taux de placement du banquier $Tp = \frac{36000 * Agio HT}{(V - Agio HT) * n}$

Taux de revient $Tr = \frac{36000 * Agio TTC}{(V - Agio TTC) * n}$

IV- Equivalence d'effets ou de capitaux :

- Equivalence de deux effets

Deux effets sont équivalents lorsqu'escomptés au même taux ils présentent la même valeur actuelle commerciale. La date d'équivalence est antérieure aux échéances. E1 est équivalent à E2 alors :

$$a1 = a2$$

$$V1 - \frac{V1 * t * n1}{36000} = V2 - \frac{V2 * t * n2}{36000} \quad \text{ou} \quad V1 (D - n1) = V2 (D - n2) \quad \text{avec}$$

$$D = 36000/t$$

n_i (date d'équivalence à l'échéance de l'effet E_i)

- L'équation d'équivalence de 2 groupes d'effets :

Deux groupes d'effets sont équivalents lorsqu'escomptés au même taux, la somme des valeurs actuelles du 1er groupe est égale à la somme des valeurs actuelles du 2ème groupe.

E1, E2 équivalents aux E3, E4 : l'équation d'équivalence s'écrit. $a1 + a2 = a3 + a4$ alors $V1 - \frac{V1 * t * n1}{36000} + V2 - \frac{V2 * t * n2}{36000} = V3 - \frac{V3 * t * n3}{36000} + V4 - \frac{V4 * t * n4}{36000}$

$$V1 (D - n1) + V2 (D - n2) = V3 (D - n3) + V4 (D - n4) \quad \text{avec} \quad D = 36000/t$$

- Remplacement d'un groupes d'effet par un effet unique (échéance commune et échéance moyenne)

Echéance commune

E remplace E1, E2, E3 : l'échéance commune est l'échéance de l'effet unique.

$$(V - \frac{V * t * n}{36000}) = (V1 - \frac{V1 * t * n1}{36000}) + (V2 - \frac{V2 * t * n2}{36000}) + (V3 - \frac{V3 * t * n3}{36000})$$

$$V (D - n) = V1 (D - n1) + V2 (D - n2) + V3 (D - n3) \quad \text{avec} \quad D = 36000/t$$

n (date d'équivalence à l'échéance de l'effet unique) : échéance commune n_i (date d'équivalence à l'échéance de l'effet E_i)

Echéance moyenne

L'échéance moyenne est l'échéance commune dans le cas où la valeur de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

E remplace E_1, E_2, E_3 avec $V = V_1 + V_2 + V_3$

$$n = \frac{(V_1 * n_1 + V_2 * n_2 + V_3 * n_3)}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

• Problème de crédit :

Le problème de crédit se pose lorsque l'acheteur n'est pas en mesure de payer au comptant le prix proposé par le vendeur. Il peut payer une partie au comptant et le reste sous forme de traite mensuelle (de mois en mois). Il y a équivalence lorsque : Prix comptant = somme avancée + somme des valeurs actuelles des traites
Formule : Prix comptant = somme avancée + somme des valeurs actuelles des traites

$$PA = SA + (V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{1200}) + (V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{1200}) + \dots (V_n - \frac{V_n * t * n_n}{1200})$$

Cas de traite mensuelle de même V dont la 1ère un mois après : Pour le cas des traites mensuelles, de même V , dont la 1ère est payée un mois après :

$$PA = SA + V * n - \frac{(V * t)}{1200} * \frac{n(n+1)}{2}$$

n « nombre de traite mensuelle » ; t « taux de crédit » ; SA ou S « somme avancée » V « valeur nominale commune ».

Cas de traite mensuelle de même V dont les 1ers deux mois après Pour le cas des traites mensuelles, de même V , dont la 1ère est payée 2 mois après :

$$PA = SA + V * n - \frac{V * t}{1200} * [\frac{n(n+1)}{2} + n].$$