

Chapitre3 : LES INTERETS COMPOSES

1°) Définition : Un placement est fait à intérêt composé lorsque à la fin de chaque période choisie comme unité de temps, les intérêts produits pendant la période sont ajoutés au capital pour constituer un nouveau capital qui à son tour produira des intérêts dans la période suivante. On dit que les intérêts sont capitalisés.

2°) Formule fondamentale :

Appelons : **C** : le montant du capital placé exprimé en francs

n : la durée du placement exprimée en année

i : le taux d'intérêt pour 1F de capital et pour une durée de 1an. $i = \frac{t}{100}$

L'intérêt en un an du capital C placé au taux annuel i pour 1F est : **I = C*i**

Ainsi, la valeur acquise par le capital C après n années de placement, donc après n capitalisations de l'intérêt est donnée par la formule : **$C_n = C (1+i)^n$**

3°) Taux équivalents – taux proportionnels

a) Taux équivalents

Deux taux sont équivalents si pour un même placement à intérêts composés, ils conduisent pour un même capital et pendant une même durée à des valeurs acquises égales.

Appelons : i_a : le taux annuel équivalent ; i_s : le taux semestriel équivalent ; i_t : le taux trimestriel équivalent ; i_m : le taux mensuel équivalent

Alors on a $(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_m)^{12}$

b) Taux proportionnels

On dit que deux ou plusieurs taux sont proportionnels quand leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives

Appelons : i_{ap} : le taux annuel proportionnel ; i_{sp} : le taux semestriel proportionnel ; i_{tp} : le taux trimestriel proportionnel ; i_{mp} : le taux mensuel proportionnel :

Alors : $i_{ap} = 2i_{sp} = 4i_{tp} = i_{mp} = 12i_{imp}$

4°) Calcul de la valeur acquise, dans le cas de n non entier

a) Procédé commercial

$$C_{n+p/q} = C (1+i)^{n+p/q} \text{ ou } C(1+i)^n(1+i)^{p/q}$$

Application: Calculer la valeur acquise par un capital de 5000 000F, placé au taux de 6% par an pendant 8ans 11 mois

$$C_{8+11/12} = 5000000(1,06)^{8+11/12} = 5000000(1,06)^8(1,06)^{11/12} = \mathbf{8406475F}$$

b) Procédé rationnel

$$C_{n+p/q} = C_n + C_n * i * p/q$$

Même application: $C_{8+11/12} = C_8 + C_8 * 0,06 * 11/12 = 7969240 + 7969240 * 0,06 * 11/12 = \mathbf{8407548,2F}$

c) Procédé par interpolation

$$C_{n+p/q} = C_n + (C_{n+1} - C_n) * p/q$$

Même application:

$$C_{8+11/12} = C_8 + (C_9 - C_8) * 11/12; C_8 = 5000000(1,06)^8 = \mathbf{7969240F}; C_9 = 5000000(1,06)^9 = \mathbf{8447395F}$$

$$C_{8+11/12} = 7969240 + (8447395 - 7969240) * \frac{11}{12} = \mathbf{8407548,75F}$$

d) Procédé de logarithme

$$\text{Log } C_{n+p/q} = \text{Log } C (1+i)^{n+p/q} \text{ or } \text{Log } A = B \rightarrow A = 10^B$$

Même application:

$$\text{Log } C_{8+11/12} = \text{Log } C + (8+11/12) \text{Log}(1,06) =$$

$$\text{Log } 5000000 + (8+11/12) \text{Log}(1,06) = 6,69897 + (8+11/12)(0,02531) = 6,69897 + 0,22568$$

$$\text{Log } C_{8+11/12} = 6,92465 \rightarrow C_{8+11/12} = 10^{6,92465} = \mathbf{8407173,30F}$$

$$\mathbf{NB: \text{Log } a*b = \text{Log } a + \text{Log } b; \text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b; \text{Log } a^n = n \text{Log } a}$$

5°) Calcul de la valeur acquise à taux variable

Lorsque le taux est variable $i_1 ; i_2 ; i_3$ pendant les durées respectives $n_1 ; n_2 ; n_3$

$$C_n = C (1+i_1)^{n_1} (1+i_2)^{n_2} (1+i_3)^{n_3}$$

Application: Un capital de 100000F est placé à intérêts composés pendant 10 ans

- Au taux 6% l'an les 5 premières années
- Au taux 7% l'an les 3 années suivantes
- Au taux 8% l'an les deux dernières années.

- Calculer la valeur acquise

Solution

$$C_{10} = 100000(1,06)^5(1,07)^3(1,08)^2 = 100000 * 1,338226 * 1,225043 * 1,1664 = \mathbf{191218F}$$

6°) Calcul de l'intérêt composés

L'intérêt composé produit est égal à la différence des valeurs acquises

- L'intérêt produit **au bout** d'une période n est égal à $I_t = C_n - C$
- L'intérêt produit **au cours** d'une période ou **pendant** une période est :

$$I = C_n - C_{n-1} = C_{n-1} * i = C (1+i)^{n-1} * i$$

- L'intérêt produit au cours des p dernières années

$$I = C_n - C_{n-p}$$