

I. Résolution d'équations avec des puissances

Pour résoudre une équation contenant une puissance, on se ramène à $a^n=b$ et :

✚ Si c'est l'exposant (n) qui est inconnue, on utilise la fonction log ou ln pour faire « tomber » l'exposant. On obtient $\log(a^n) = \log(b)$. On utilise la propriété : $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$. Ainsi $n \cdot \log(a) = \log(b)$, on tire n : $n = \log(b) / \log(a)$

✚ Si c'est la base (a) qui est inconnue, on utilise la fonction $\sqrt[n]{}$. On obtient $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b}$. On utilise la propriété : $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ainsi $a = \sqrt[n]{b}$

Exemple 1 : Considérons une ville de 1 200 000 habitants dont la population croît de 10 % chaque année. On aimerait savoir après combien d'années il compterait 1 932 612 habitants.

Synthèse partielle

Soit n le nombre d'années alors $1\,200\,000 \times (1,1)^n = 1\,932\,612$ donc $(1,1)^n = 1,61051$ d'où $n = \frac{\log 1,61051}{\log 1,1}$; $n = 5$ ans

Exemple 2 : Une personne reçoit un salaire de 100 000 francs. Six années plus tard, elle a 158 690 francs. De quel taux son salaire a-t-il augmenté chaque année ? (on suppose que ce taux est constant).

Synthèse partielle

Soit i le taux d'augmentation du salaire, alors $100\,000 \cdot (1 + i)^6 = 158\,690$; $i = \sqrt[6]{1,5869} - 1 = 0,08$ donc $i = 8\%$.

Exemple 3 : Résoudre les équations suivantes :

- a) $2525 = 10 + 22 \cdot 5^x$ b) $2525 = 10 + 22 \cdot x^{2,2}$
 a) $10^x = 1\,000$; $10^x = 1\,500$; $x^4 = 256$; $(x+1)^2 = 121$

Synthèse partielle

a) $2525 = 10 + 22 \cdot 5^x$; $x = \frac{\log[(2 \cdot 525 - 10) : 22]}{\log 5}$; $x = 2,94$; donc $x = 3$

b) $2525 = 10 + 22x^{2,2}$; $x = \sqrt[2,2]{\frac{2515}{22}}$; $x = 8.6199938989589$; $x = 9$

II. CAPITALISATION & FORMULE

1. CAPITALISATION

Un capital est placé à intérêts composés, lorsqu'à la fin de chaque période, les intérêts rapportés s'ajoutent au capital pour produire des intérêts pendant les périodes qui suivent. La somme constituée par le capital placé et ses intérêts cumulés s'appelle la valeur acquise par ce capital.

2. FORMULE D'INTERETS COMPOSES

Consigne 1 : On place 150 000 F à intérêts composés à un taux annuel de 4%. La capitalisation des intérêts est, dans cet exemple, annuelle, cela signifie que le capital augmente de 4% par an. On désigne par C_1 le montant du capital après un an, C_2 le montant du capital après deux ans, et ainsi de suite on définit C_n le montant du capital après n années de placement.

- a) Calculer C_1 ; Calculer C_2 ; Calculer C_3 .
 b) Quelle est la nature de cette suite? Précise sa la raison le premier terme.
 c) En déduire l'expression de C_n en fonction de n .
 d) Lorsqu'on place un capital C_0 à un taux t pendant n périodes, obtient le capital C_n . exprime C_n en fonction de C_0 , i et n avec $i = \frac{t}{100}$.

Synthèse partielle

Le coefficient multiplicateur est : $m = \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1,04$. Donc,

- a) $C_1 = 150000 \times 1,04 = 15600$; $C_2 = 15600 \times 1,04 = 16\,224$; $C_3 : 16\,224 \times 1,04 = 168\,729,6$
- b) $C_1, C_2, \dots, C_n$ est une suite géométrique car chaque capital est égal au précédent multiplié par 1,04.
La raison $q = 1,04$ et le premier terme $C_0 = 150\,000$.
- c) $C_n = 150\,000 \times 1,04^n$.
- d) Dans ce cas, on a : $C_n = C_0 (1 + i)^n$; C_n : Capital acquis ; C_0 : Capital initial, n : la période et i : taux

NB : $\begin{cases} t : \text{Taux Annuel, Semestriel, Trimestriel, Mensuel ou Journalier;} \\ n : \text{Nombre d' Années, Semestres, Trimestres, Mois ou Jours.} \end{cases}$

Consigne 2 : Calculer le capital acquis si on place à intérêts composés pendant 5 ans une somme de 150 000 F à un taux de 4%. En déduire le montant des intérêts.

Synthèse partielle

$$C_n = C_0 (1 + t)^n ; C_5 = 150\,000 \times (1 + 0,04)^5 ; C_5 = 150\,000 \times (1,04)^5 ; C_5 = 182\,500 \text{ F}$$

Avec ce placement, on obtiendra un capital de 182 500 F, les intérêts seront donc de:

$$I = C_5 - C_0 = 182\,500 - 150\,000 = \mathbf{32\,500 \text{ F.}}$$

Consigne 3 : Calculer le capital acquis si on place 100 000 F à intérêts composés pendant 8 mois à un taux annuel de 9%. En déduire le montant des intérêts.

Synthèse partielle

$$\text{Calcul du taux mensuel: Taux mensuel} = (0,09/12) = 0,0075$$

$$C_n = C_0 (1 + t)^n ; C_8 = 100\,000 \times (1 + 0,0075)^8 ; C_8 = 100\,000 \times (1,0075)^8 ; C_8 = 106\,159,88.$$

Avec ce placement, on obtiendra un capital de 106 159,88 F, les intérêts seront donc de:

$$106\,159,88 - 100\,000 = \mathbf{6\,159,88 \text{ F.}}$$

III. CALCUL DU TAUX (t) & CALCUL DU TEMPS (n)

Consigne 1 : Dans la formule : $C_n = C_0 (1 + i)^n$.

- a) Déterminer la valeur de « i » en fonction de C_n , C_0 , et n .
- b) Déterminer la valeur de « n » en fonction de C_n , C_0 , et i .

Synthèse partielle

a) A partir de $C_n = C_0 (1 + i)^n$ on peut déterminer la valeur de « i » : $i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$

b) A partir de $C_n = C_0 (1 + i)^n$ on peut déterminer la valeur de « n ».

$$\text{On a: } (1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0} ; n \log(1 + i) = \log(C_n) - \log(C_0) \text{ et } n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1 + i)}.$$

Consigne 2: Après avoir placé à intérêts composés pendant 4 ans un capital de 400 000 F, notre banquier nous informe que le montant des intérêts est de 86 202,5 F. Déterminer le taux de placement.

Synthèse partielle

$$\text{Capital acquis après 4 années: } C_4 = 400\,000 + 86\,202,5 = 486\,202,5$$

$$C_n = C_0(1+i)^n; 486\,202,5 = 400\,000 \times (1+i)^4; (1+i)^4 = \frac{486\,202,5}{400\,000} = 1,21550625$$

$$1+i = \sqrt[4]{1,21550625}; 1+i = 1,05; i = 0,05 \text{ le taux du placement est donc de } t = 5 \%$$

Consigne 3: Un capital de 90 000 F a produit, capital et intérêts composés, une somme de 126 680 F, le taux étant de 5 % l'an. Combien d'années est-il resté placé ?

Synthèse partielle

On aura, d'après la formule : $126\,680 = 90\,000(1 + 0,05)^n$ et en appliquant le calcul logarithmique :

$$n = \frac{\log 12\,680 - \log 9\,000}{\log(1+0,05)} = 7,006628429; \text{ soit } n = 8 \text{ ans.}$$

Consigne 4: Au bout de combien de temps un capital placé à 5% d'intérêts composés doublera – t-il de valeur ?

IV. ACTUALISATION & FORMULE

Consigne 1 : A partir de la formule de départ,

- Déterminer le capital initial C_0 en fonction des autres facteurs.
- Déterminer le taux i en fonction des autres éléments. Déterminer le nombre de périodes n en fonction des autres éléments.

Solution

L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée *valeur actuelle*.

La valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_n disponible dans n années et placée au taux t , est donnée par la formule suivante : $C_n = C_0(1+i)^n$; $C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$; $C_0 = C_n(1+i)^{-n}$

Consigne 2: on place C_0 à un taux de 4 % par an. Au bout de 5 années on récupère intérêts et capital une somme de 243 330,6F. Quelle est la valeur du capital placé ?

Réponse : $C_0 = 200\,000$ F

Consigne 3: On reçoit 100 000 F en début 2012 puis 100 000 F en début 2015. Le taux d'intérêt est de 3 % par an. De quelle somme d'argent dispose-t-on en fin 2015?

Réponse : $C_{2015} = 215\,550,9$ F

Consigne 4: Un investisseur souhaite acheter une action cotée pour 55 000 F. Il estime qu'il pourra revendre à 62 000 F dans 5 ans. Que penser de cette opération, sachant que le « taux sans risque » est de 2 % par an ?

Actualiser, c'est ramener des flux financiers à une même date afin de pouvoir les comparer, les additionner, etc. C'est une opération indispensable et essentielle !

Réponse : $C_5 = 62\,000$ F alors $C_0 = 56\,155,322 > 55\,000$, donc l'opération est favorable

V. TAUX EQUIVALENT

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour.

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents lorsqu'ils produisent la même valeur acquise quand ils sont appliqués au même capital.

Soit, i le taux annuel ; p le nombre de périodes de l'année ; i_p le taux équivalent par la période, on a alors: C_0

$$(1 + i)^1 = C_0 (1 + i_p)^p ; i_p = \sqrt[p]{(1 + i)} - 1 \text{ ou } i_p = (1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Application :

- Le taux mensuel que nous propose une banque est de 1%. Quel est le taux annuel équivalent ?
- Exprimer le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10,25%.
- Trouver le taux trimestriel équivalent au taux de annuel de 10,25%

Réponse :

- Le taux annuel équivalent est : $i = (1 + i_m)^{12} - 1 = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,127$
- Le taux semestriel équivalent est : $i_s = (1 + i)^{\frac{1}{2}} - 1 ; i_s = (1 + 0,1025)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,05$.
- Le taux trimestriel équivalent est : $i_t = (1 + i)^{\frac{1}{4}} - 1 ; i_t = (1 + 0,1025)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,025$.

Exercice 1 : Une somme de 120 000 F est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

- Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?
- Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 200 000 F, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ? arrondis à l'unité de 100 la plus proche.
- Si la somme placée aujourd'hui est de 120 000 F, après combien d'années disposera-t-on d'une somme égale à 235 800 F ?
- Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 213 852 F à quel taux le placement a été effectué ? arrondis au millième près.

Solution

- Valeur acquise : $C_n = C_0 (1 + i)^n ; C_5 = 120000 (1 + 0,1)^5 = 193\,261,2 \text{ F}$
- Valeur actuelle correspondante à une valeur acquise de 200 000 F : $C_n = C_0 (1 + i)^n ; C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$;
 $C_0 = 200\,000 (1 + 0,1)^{-5} = 124\,200 \text{ F}.$
- Durée de placement : $C_n = C_0 (1 + i)^n ; \log C_n = \log C_0 + n \cdot \log(1+i) ; n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 235800 - \log 120\,000}{\log(1+0,1)} ; n = 7 \text{ ans}$
- Taux de placement : $C_n = C_0 (1 + i)^n ; (1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0} ; i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 ; i = \left(\frac{213\,852}{120\,000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,1225$
ou $t = 12,25\%$.

Exercice 2 :

On place un capital de 5'000 F, à un taux annuel i de 6%. On voudrait savoir à quel taux mensuel m il faut placer ce capital pour obtenir la même valeur acquise.

- Quelle est la valeur acquise après une année ?
- Notons m le taux mensuel, écrire une équation donnant m puis la résoudre.
- Que se passe-t-il avec un taux mensuel de 0,5% après une année ? Expliquer.
- Ce calcul dépend-il de la valeur de C_0 ? Expliquer.

1. Résoudre les équations suivantes pour $x > 0$:
 - b) $x^4 = 256$; $(x+1)^2 = 121$
 - c) $(x-2)^5 = 1\,111$; $124 = 100 \cdot (1+x)^4$
 - d) $(x+4)^3 + 5 = 130$; $12 = 14 \cdot (1-x)^5 - 21$
2. Résoudre les équations suivantes dans IR
 - b) $10^x = 1\,000$; $10^x = 1\,500$
 - c) $5^x = 625$; $20^x = 334$
 - d) $62^x = 1\,000$; $6^x = 6$
3. Résoudre les équations suivantes dans IR
 - a) $80 = 10 \cdot 2^x$; $1\,000 = 10 \cdot 10^x$
 - b) $445 = 120 \cdot 1,25^x$; $61\,000 = 10\,000 \cdot 1,05^x$
 - c) $125\,000 = 100\,000 \cdot 1,03^x$
4. Déterminer la valeur actuelle d'une dette de 8 395 exigible dans 4 ans et 6 mois, le taux annuel d'intérêt étant de 5,5%. Pierre place un capital de CHF 1'000.- sur un compte au taux annuel de 2,5%. De quelle somme disposa-t-il dans 5 ans si les intérêts sont capitalisés ?
5. Déterminer la valeur acquise par un capital de :
 - a) 17'000 frs placé à intérêts composés au taux annuel de 7% pendant 13 ans.
 - b) 1'500 frs placé à intérêts composés au taux trimestriel de 4,5% pendant 3 ans.
6. Quel capital faut-il déposer sur un compte offrant un taux semestriel de 1% à intérêts composés pour que la valeur acquise au bout de 5 ans soit de 4'418,49 Frs ?
7. A quel taux d'intérêt annuel faut-il placer 25'000 Frs pour obtenir un capital de 30'000 en 2 ans ?
8. Pendant combien d'années faut-il placer un capital de 3'000 Frs à intérêts composés au taux annuel de 3% pour que sa valeur acquise soit de 3'477,80 Frs ?
9. Déterminer le taux d'intérêt semestriel équivalent à un taux annuel de 2 %. Réponse arrondie à 3 chiffres significatifs.
10. Un taux d'intérêt annuel de 24% est-il équivalent à un taux mensuel de 2% ? Si non, quel est le taux annuel équivalent au taux mensuel de 2% ? Quel capital doit-on placer à intérêts composés pour disposer dans 10 ans de 30'000 frs, si le taux annuel est de 2,5% les 4 premières années, puis de 3% ?
11. Deux capitaux dont la somme vaut 6'000 frs sont placés respectivement à 1,5% trimestriel pendant 3 ans et demi et à 2% semestriel pendant 2 ans. Que valent ces deux capitaux s'ils ont produit les mêmes valeurs acquises au moment de leur retrait ?
12. Pierre désire vendre sa propriété, il a reçu les trois offres suivantes :
 - X offre 100 000 francs payables immédiatement
 - Y offre 117 000 francs payables dans 3 ans
 - Z offre 134 000 francs payables dans 6 ans.

Quelle offre devrait choisir pierre, sachant que le taux annuel de l'intérêt composé est de 5% ?
13. Une personne dispose d'un capital de 24'000 francs. Elle place durant deux ans les deux tiers de son capital à 5%, le cinquième de son capital à 3,5% et le reste à 2,75% (les taux sont annuels).
A quel taux annuel unique aurait-elle pu placer son capital pour obtenir les mêmes intérêts ?
15. Un particulier place 12'000 francs dans une banque. Le taux d'intérêt annuel est de 4,25% pendant les six premiers mois, puis de 3,75%.
 - a) De quelle somme disposera-t-il neuf mois après son placement ?

- b) Quel capital faut-il placer à 2% par an pour obtenir 5'000 F
- c) D'intérêts après 4ans ?

ADD