

Formation continue

BEMBUS – MALI

Au Service de la Nation

Support de cours

Mathématique financières

TS éco

Sommaire

1.- Intérêts simples

2.- Escompte à intérêts simples

3.- intérêts composés : capitalisation

Module 1 : Calcul des intérêts simples

Objectif : à la fin du module les élèves doivent être capables de résoudre tout problème relatif aux calculs des intérêts simples.

Section 1 : Formules générales des intérêts simples

L'intérêt est le loyer de l'argent prêté. Il est dit simple lorsqu'il est calculé proportionnellement au capital, à la durée et au taux.

$$\text{Intérêt } I = \frac{\text{Capital} * \text{taux} * \text{durée}}{36.000}$$

Le capital C est le montant placé exprimé en unité monétaire.

La durée du placement « n » est le temps qui sépare entre la date de placement du capital et la date de remboursement (échéance). Elle peut être exprimée en jour, mois ou l'année.

La durée exprimée en jours : compter les mois suivant leur durée réelle. C'est le nombre de jours qui séparent le jour de placement (qui n'est pas compté) et le jour de remboursement ou l'échéance (qui est compté). Le mois de février est compté 28 jours sauf le cas de l'année bissextile (où il est compté 29 jours).

Exemple : effectuez les décomptes de jours :

	Date de placement	Date d'échéance	Durée du placement (Nombre de jour)
1	Le 05 mars	Le 22 mars	N(du 20/3 au 22/03) = 22 – 5 = 17 jours
2	Le 16 janvier 2000	26 avril 2000	N = (31 – 16) + 29 + 31 + 26 = 101 jours
3	Le 24 janvier 2001	03 mai 2001	N = (31 – 24) + 28 + 31 + 30 + 3 = 99 jours
4	Le 08 nov 2007	03 mars 2008	N = (30 – 8) + 31 + 31 + 29 + 3 = 116 jours
5	Le 07 février	09 juin	N = (28 - 7) + 31 + 30 + 31 + 9 = 122 jours
6	14 mai	20 septembre	N = (31 – 14) + 30 + 31 + 31 + 20 = 129 jours

La durée exprimée en mois : on considère tous les mois comme 30 jours. Par exemple 5 mois = 150 jours.

La durée exprimée en années : on considère l'année comme 12 mois de 30 jours. Par exemple 2 ans 3 mois 20 jours = 360 + 90 + 20 = 470 jours.

Le taux de placement : est exprimé en année pour 100F de capital. Par exemple pour un taux de 5%, on utilise dans la formule 5 au lieu de 0,05. Si le taux n'est pas exprimé en année, nous passons par le taux proportionnel. Par exemple pour calcul l'intérêt d'un capital de 120 000F placé au taux de 2% par trimestre pendant 105 jours.

L'intérêt = 120 000*(2x4)*105/36000 = 2 800F.

Attention : porter l'attention des candidats sur les décomptes de jours en comptabilité. C'est-à-dire en amortissement linéaire, tous les mois sont pris comme 30 jours même le mois de février. Par contre en mathématique financière les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Exemple 1 : Un capital de 810 000F est placé au taux de 7,2%. Calculez l'intérêt simple dans les cas suivants :

a/ Durée = 45 jours → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 45}{36.000} = \dots\dots\dots$

b/ Durée = 2 mois → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 2}{1200} = \dots\dots\dots$

c/ Durée = 3 ans → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 3}{100} = \dots\dots\dots$

d/ Durée = 1 an et 2 mois → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 14}{1200} = \dots\dots\dots$

e/ Du 20 février au 07 juin → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 107}{36.000} = \dots\dots\dots$

f/ Du 14 mai au 26 sept → $I = \frac{810.000 * 7,2 * 135}{36.000} = \dots\dots\dots$

Exemple 2 : Un capital de 90 000F est placé le 22 mai au taux t%. L'intérêt produit au 26 août est de 1 680 F. Calculez le taux.

Solution : décompte de jours (du 22 mai au 26 août) = 96 jours

$$\text{taux} = \frac{36.000 * \text{Intérêt}}{\text{Capital} * \text{Durée}} = \frac{36.000 * 1\ 680}{90.000 * 96} = 7\%$$

Exemple 3 : Un capital est placé le 04 janvier au taux 8%. L'intérêt produit au 31 mars est de 4 128 F. Calculez le capital .

Solution : décompte de jours (du 04 janvier au 31 mars) = 86 jours

$$\text{Capital} = \frac{36.000 * \text{Intérêt}}{\text{taux} * \text{Durée}} = \frac{36.000 * 4\ 128}{8 * 86} = 216\ 000\ \text{F}$$

Exemple 4 : Un capital de 72 000F est placé le 9 février 2012 au taux 4%. L'intérêt produit est de 600 F. Déterminer la date d'échéance.

Solution :

$$\text{Durée} = \frac{36.000 * \text{Intérêt}}{\text{Capital} * \text{taux}} = \frac{36.000 * 600}{4 * 72000} = 75\ \text{jours après le 9 février, la date d'échéance : le 24 avril 2012.}$$

Exemple 5 : Un capital de 120 000F est placé au taux 5,4%. L'intérêt produit au 25 juin est de 1.440 F. Déterminer la date de placement.

Solution :

$$\text{Durée} = \frac{36.000 * \text{Intérêt}}{\text{Capital} * \text{taux}} = \frac{36.000 * 1\ 440}{5,4 * 120\ 000} = 80\ \text{jours avant le 25 juin, la date de placement : le 6 avril.}$$

Exemple 6 : Le revenu annuel d'un capital de 81 000F est de 4 050F. Calculer le taux.

Solution : revenu = intérêt = 4 050 F ; annuel = 1 an ; C = 81 000F

$$\text{Taux} = \frac{100 * \text{Intérêt}}{\text{Capital} * \text{durée}} = \frac{100 * 4\ 050}{81.000 * 1} = 5\%$$

Section 2 : Valeur acquise par un capital

La valeur acquise est la valeur définitive obtenue par le capital. Elle est égale au capital C augmenté des intérêts produits.

$$\text{Valeur acquise} = \text{Capital} + \text{intérêt} \Rightarrow VA = C + \frac{C * t * n}{36.000}$$

Exemple 1 : Un capital de 270 000F placé le 24 mai est devenu 274 770F le 07 septembre. Calculez le taux.

Solution : décompte de jour (du 24 mai au 07 sept) = 106 jours

$$VA = C + \frac{C * t * n}{36.000} \Rightarrow 274\ 770 = 270.000 + \frac{270.000 * t * 106}{36.000} \Rightarrow \text{on trouve taux} = 6\%$$

$$\text{Intérêt} = VA - C = 4\ 770 \Rightarrow \text{taux} = 36.000 * 4770 / 270.000 * 106 = 6\%$$

Exemple 2 : Un capital placé le 16 juin a acquis une valeur de 607 920F le 21 août au taux de 7,2%. Calculez le capital.

Solution : décompte de jour (du 16 juin au 21 août) = 66 jours

$$VA = C + \frac{C * t * n}{36.000} \Rightarrow 607\ 920 = C + \frac{C * 7,2 * 66}{36.000} \Rightarrow \text{on trouve Capital } C = 600\ 000\text{F.}$$

Section 3 : Intérêts civil (I') et commercial (I)

L'intérêt est dit commercial lorsqu'il est calculé sur la base de 360 jours $I = \frac{C * t * n}{36.000}$

L'intérêt est dit civil lorsqu'il est calculé sur la base de 365 jours $I' = \frac{C * t * n}{36.500}$

$$I > I' \Rightarrow I - I' = \frac{I}{73} = \frac{I'}{72}$$

Exemple 1 : Un opérateur chargé de calculer l'intérêt d'un capital au taux de 6% pendant 45 jours s'est trompé de calculer sur la base de 365 jours. La différence dégagée est de 27F. Calculer le capital.

Solution :

$$I - I' = \frac{I}{73} = \frac{I'}{72} = \frac{I-I'}{73-72} = 27 \rightarrow \text{l'intérêt } I = 73 \times 27 = 1\,971 \text{ F}$$

Le capital $C = 36.000 \times 1971 / 6 \times 45 = 262\,800 \text{ F}$.

Exemple 2 : Un opérateur chargé de calculer l'intérêt d'un capital de 657 000F au taux de 7,2% pendant 75 jours s'est trompé de calculer sur la base de 365 jours. La différence dégagée est de 27F. Calculer le capital.

Solution :

$$I - I' = \frac{I}{73} = \frac{I'}{72} = \frac{I-I'}{73-72} = 135 \rightarrow \text{l'intérêt } I = 73 \times 135 = 9\,720 \text{ F}$$

Le taux = $36.000 \times 9\,720 / 657\,000 \times 75 = 7,2\%$.

Exemple 3 :

a. Le produit de l'intérêt civil et commercial égal à 27 247 104 F. Calculer l'intérêt commercial

b. Cet intérêt a été produit par un capital de 394 200F pendant 80 jours. Calculer le taux.

Solution :

$$\text{a. } I - I' = \frac{I}{73} = \frac{I'}{72} = k \rightarrow I = 73 \times k \text{ et } I' = 72k$$

Le produit des deux intérêts: $I \times I' = 27\,247\,104$

$$\rightarrow (73k) \times (72k) = 27\,247\,104 \rightarrow k^2 = 5\,184 \rightarrow k = 72 \text{ ce qui donne}$$

$$I = 73 \times k = 73 \times 72 = 5\,256$$

$$\text{b. le taux} = 36.000 \times 5\,256 / 394\,200 \times 80 = 6\%$$

Exemple 4 : Complétez le tableau suivant :

Capital	Taux	Durée	Intérêt ccial I	Intérêt civil I'	I-I'	I+I'	I×I'
131 400	4,5%	70 jours					
197 100	6%				40,5		
591 300		100 jours				23 490	
.....	10%	60 jours					3 831 624
236 520		105 jours			75,6		
328 500	5%						3 285 000

Section 4 : Taux moyen de placement

Le taux moyen de placement des capitaux est le taux unique T auquel il faut placer les capitaux pour produire un même intérêt total. Par exemple :

- 15 000 F placé à 6% pendant 30 jours ;
- 20 000 F placé à 7% pendant 45 jours
- 40 000 F placé à 9% pendant 40 jours.

$$\text{L'intérêt total produit } IT = \frac{15.000 \times 6 \times 30 + 20.000 \times 7 \times 45 + 40.000 \times 9 \times 40}{36.000} = 650$$

Soit T le taux unique auquel on doit placer les capitaux pour avoir un intérêt total de 650.

$$\text{L'intérêt total produit } IT = \frac{15.000 \times T \times 30 + 20.000 \times T \times 45 + 40.000 \times T \times 40}{36.000} = 650 \rightarrow$$

$$450.000T + 900.000T + 1.600.000T = 23.400.000$$

$$\rightarrow \text{taux } T = 23.400.000 / 2.950.000 = 7,93\%$$

$$\frac{C_1 \times t_1 \times n_1}{36.000} + \frac{C_2 \times t_2 \times n_2}{36.000} + \frac{C_3 \times t_3 \times n_3}{36.000} = \frac{C_1 \times T \times n_1}{36.000} + \frac{C_2 \times T \times n_2}{36.000} + \frac{C_3 \times T \times n_3}{36.000} \text{ on tire } T ?$$

$$T = \frac{C_1 * t_1 * n_1 + C_2 * t_2 * n_2 + C_3 * t_3 * n_3}{C_1 * n_1 + C_2 * n_2 + C_3 * n_3} = \frac{\sum C_i * t_i * n_i}{\sum C_i * n_i}$$

Les n_i doivent être exprimés de la même période et le taux en année pour 100F.

Exemple 1 : Calculez le taux moyen des capitaux :

- 400 000 F placé à 5% pendant 1 mois et 5 jours ;
- 350 000 F placé à 6% pendant 2 mois
- 380 000 F placé à 7% pendant 2 mois et 15 jours.

Solution :

Capital	Taux	Durée jours	C*t*n	C*n
400 000	5	35	70 000 000	14 000 000
350 000	6	60	126 000 000	21 000 000
380 000	7	75	199 500 000	28 500 000
			395 500 000	63 500 000

Taux moyen = 395 500 000 / 63 500 000 = 6,23%.

Exemple 2 : Trois capitaux sont placés :

- C placé à 4,5% pendant 15 jours ;
- 75 000 F placé à 6,3% pendant 30 jours
- 90 000 F placé à 7,2% pendant 45 jours.

Le taux moyen de placement de ces capitaux est de 6,58125%. Calculez le montant du 1^{er} capital.

Solution :

Capital	Taux	Durée jours	C*t*n	C*n
C	4,5	15	67,5 * C	15*C
75 000	6,3	30	14 175 000	2 250 000
90 000	7,2	45	29 160 000	4 050 000

Taux moyen = $\frac{67,5*C + 14\,175\,000 + 29\,160\,000}{15*C + 2\,250\,000 + 4\,050\,000} = 6,58125 \rightarrow$ on trouve C = 60 000F

Exemple 3 : Mr X détient trois capitaux dont les montants sont en progression arithmétique et de somme 81 000F. ils sont placés, le 1^{er} à 6% pendant 90 jours, le 2^{ème} à 4,5% pendant 60 jours, le 3^{ème} à 7,2% pendant 30 jours. Le taux moyen de ces placements est de 5,7375%.

Déterminez les trois capitaux

Solution :

Soient C_1 ; C_2 ; C_3 les trois capitaux en PA de raison r de somme 81 000 alors $C_2 = 81000/3$:

$C_1 + C_2 + C_3 = 81\,000$ alors $C_2 = 81\,000 / 3 = 27\,000$ et $C_1 = 27\,000 - r$ et $C_3 = 27\,000 + r$

Rappelons que : A, B, C en Pa de somme M alors $B = M / 3$ et $A = B - r$; $C = B + r$

- $C_1 = 27\,000 - r$; à 6% durée 90 jours ;
- $C_2 = 27\,000$; à 4,5% durée 60 jours ;
- et $C_3 = 27\,000 + r$; à 7,2% durée 30 jours

Taux moyen TM : $TM = \frac{C_1 * 6 * 90 + C_2 * 4,5 * 60 + C_3 * 7,2 * 30}{C_1 * 6 + C_2 * 4,5 + C_3 * 7,2}$

$$TM = \frac{(27.000 - r) * 6 * 90 + 27.000 * 4,5 * 60 + (27.000 + r) * 7,2 * 30}{(27.000 - r) * 90 + 27.000 * 60 + (27.000 + r) * 30} = 5,7375$$

On trouve la raison $r = 9\,000$ F

Les trois capitaux sont : 18 000 F ; 27 000F et 36 000 F

Section 5 : l'intérêt précompté et taux effectif de placement

Un Capital « C » est placé aux taux « t » pendant « n » jours :

- l'intérêt est dit précompté lorsqu'il payé le jour du placement du capital, dans ce cas le capital effectivement placé serait de $C' = C - I$;
- le taux auquel ce capital effectif est placé est appelé taux effectif « tep ».

Par exemple : un capital de 90 000F est placé à intérêt précompté au taux de 6% pendant 75 jours. Calculez le taux effectif de placement.

Solution :

L'intérêt $I = 90\,000 \times 6\% \times 75 / 36\,000 = 1\,125$ F cet intérêt est payé le jour du prêt ce qui veut dire le capital effectivement placé = $90\,000 - 1\,125 = 88\,875$ F. En fait le prêteur a prêté 88 875F au lieu de 90 000F alors que l'intérêt 1 125F a été calculé sur la base de 90 000F.

$$\text{Le taux effectif tep} = \frac{36.000 \times 1\,125}{88\,875 \times 75} = 6,076\%$$

Formule du taux effectif :

$$Tep = \frac{36.000 \times I}{(C-I) \times \text{jours}} \quad Tep = \frac{1200 \times I}{(C-I) \times \text{mois}} \quad Tep = \frac{100 \times I}{(C-I) \times \text{années}}$$

Le taux effectif est indépendant du capital C :

$$Tep = \frac{36.000 \times \text{taux}}{36.000 - \text{taux} \times \text{jours}} \quad Tep = \frac{1200 \times \text{taux}}{1200 - \text{taux} \times \text{mois}} \quad Tep = \frac{100 \times \text{taux}}{100 - \text{taux} \times \text{ans}}$$

Exemple 1 : Un capital est placé à intérêt précompté au taux de 7% pendant 5 mois. Calculez le taux effectif de placement.

$$\text{Solution : } Tep = \frac{1200 \times \text{taux}}{1200 - \text{taux} \times \text{mois}} = \frac{1200 \times 7}{1200 - 7 \times 5} = 7,21\%$$

Section 6 : Méthodes commerciales de calculs de l'intérêt simple : méthodes des nombres et diviseurs fixes

Cette méthode est utilisée lorsque la durée est jour. On pose $D = 36\,000 / \text{taux}$ le diviseur fixe et $N = C \times n$ le nombre.

$$I = \frac{C \times t \times n}{36.000} = \frac{\frac{C \times t \times n}{t}}{\frac{36.000}{t}} = \frac{C \times n}{\frac{36.000}{t}} = \frac{\text{Nombre } N}{\text{Diviseur } D}$$

Exemple 1: Calculez le diviseur fixe

$$\text{Taux} = 5\% \rightarrow D = 36\,000 / 5 = 7\,200$$

$$\text{taux } 7,2\% \rightarrow D = 36\,000 / 7,2 = 5\,000$$

$$\text{Taux} = 6\% \rightarrow D = 36\,000 / 6 = 6\,000$$

$$\text{taux } 10\% \rightarrow D = 36\,000 / 10 = 3\,600$$

Exemple 2: calculez l'intérêt total des capitaux placé au taux 7,2% : 75 000 F pendant 80 jours ; 90 000 F pendant 90 jours et 150 000F pendant 60 jours.

Solution : le diviseur D = 36 000 / 7,2 = 5 000

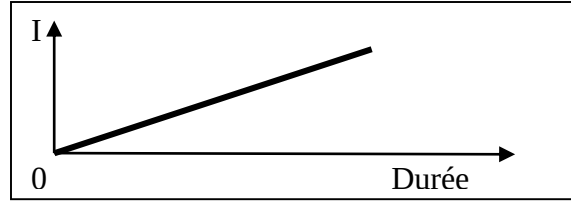
$$\text{Intérêt total} = \frac{\sum C \times n}{D} = \frac{75.000 \times 80 + 90\,000 \times 90 + 150\,000 \times 60}{5\,000} = 4\,620$$

Section 7 : Représentation graphique de l'intérêt et de la valeur acquise

L'intérêt produit (ou la valeur acquise) par un capital est une fonction du temps ou de la durée.

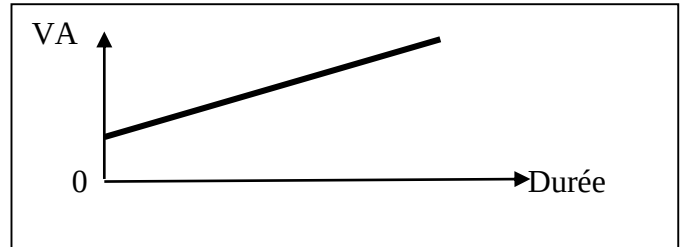
$$\text{Intérêt } I = \frac{C*t*n}{36.000} = a * n$$

$$\text{Intérêt } I = \frac{C*t*n}{36.000} = a * t$$



$$\text{Valeur acquise } VA = C + \frac{C*t*n}{36.000} = b + a * n$$

$$\text{Valeur acquise } VA = C + \frac{C*t*n}{36.000} = b + a * t$$

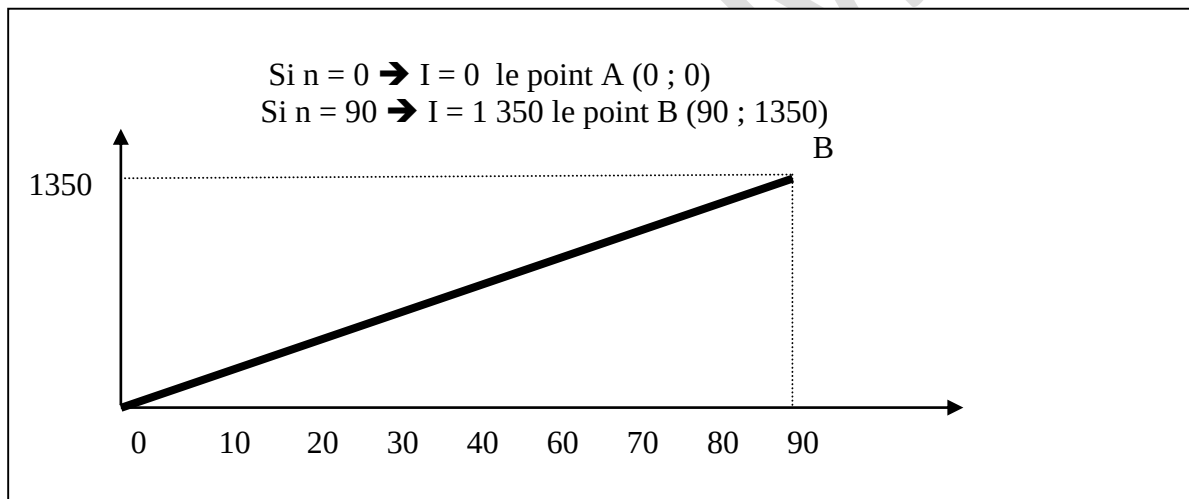


Exemple : un capital de 90 000 F est placé au taux 6% pendant n jours.

a. Calculez l'intérêt produit en fonction de n ($0 < n < 90$ jours)

b. Représentez graphiquement en fonction de n

Solution : Intérêt $I = \frac{90.000*6*n}{36.000} = 15n$



Les points essentiels / les intérêts simples

Formules générales

Si la durée n est en année	Si la durée est en mois	Si la durée est en jour
$I = \frac{C*t*n(ans)}{100}$	$I = \frac{C*t*n(mois)}{1200}$	$I = \frac{C*t*n(jour)}{36000}$

Comment traiter un exercice ?

- Un capital **C** est divisé en trois parts : $C = C_1 + C_2 + C_3$
- Trois capitaux sont en progression arithmétique de raison **r** : alors $C_1 = C$; $C_2 = C + r$; $C_3 = C + 2r$
- Trois capitaux sont en progression géométrique de raison **q** : alors $C_1 = C$; $C_2 = C*q$; $C_3 = C*q^2$

- Trois capitaux sont proportionnels aux nombres x, y z : alors $\frac{C_1}{x} = \frac{C_2}{y} = \frac{C_3}{z} = k$ ainsi $C_1 = x \cdot k$; $C_2 = y \cdot k$; $C_3 = z \cdot k$
- Somme des intérêts $\sum I = \frac{C_1 \cdot t_1 \cdot n_1}{36000} + \frac{C_2 \cdot t_2 \cdot n_2}{36000} + \frac{C_3 \cdot t_3 \cdot n_3}{36000}$
- Somme des valeurs acquises

$$\sum VA = \left(C_1 + \frac{C_1 \cdot t_1 \cdot n_1}{36000} \right) + \left(C_2 + \frac{C_2 \cdot t_2 \cdot n_2}{36000} \right) + \left(C_3 + \frac{C_3 \cdot t_3 \cdot n_3}{36000} \right)$$

BEMBUS-MALI

Exercices de réchauffement sur les intérêts simples

Exercice 1 :

Une somme de 690 000 est divisée en trois capitaux en progression arithmétique de raison 15 000F.

1/ Calculez les trois capitaux

2/ Une personne place ces trois capitaux, le 1^{er} mars, à intérêts simples au taux 5%. Calculer la somme totale recueillie le 30 avril.

Solution :

1/ Soient C_1 ; C_2 et C_3 les trois capitaux en Prog arith de raison $r = 15\ 000$. Ainsi : $C_1 = C$; $C_2 = C + 15\ 000$; $C_3 = C + 30\ 000$

Une somme de 690 000 est divisée en trois parts :

$$C_1 + C_2 + C_3 = 690\ 000$$

$C + (C + 15\ 000) + (C + 30\ 000) = 690\ 000$ on trouve les capitaux 215 000 ; 230 000 et 245 000

2/ décompte de jours (du 1^{er} mars au 30 avril) = 60 jours

La somme totale recueillie le 30 avril = Σ valeur acquise

$$215.000 + \frac{215.000 * 6 * 60}{36.000} + 230.000 + \frac{230.000 * 6 * 90}{36.000} + 245.000 + \frac{245.000 * 6 * 90}{36.000} = \dots$$

Exercice 2 :

Deux capitaux dans le rapport 2/3 sont tels que le triple du 2^{ème} dépasse le double du 1^{er} de 25 000F.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés au même taux, ont rapporté en 75 jours 375F. Calculer le taux.

Réponse : a. 10 000F et 15 000F **b.** 7,2%

a. Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 2/3 tels :

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = k \text{ et } 3B - 2A = 25\ 000 \rightarrow A = 2k ; B = 3k \text{ remplaçons dans } 3B - 2A = 25\ 000 \rightarrow 3(3k) - 2(2k) = 25\ 000 \text{ on a } k = 5000$$

On trouve $A = 2 \times 5000 = 10\ 000$ et $B = 3 \times 5\ 000 = 15\ 000$.

$$b. \Sigma I = \frac{10.000 * t * 75}{36000} + \frac{15.000 * t * 75}{36000} = 375 \text{ on trouve } t = 7,2\%$$

Exercice 3 :

Deux capitaux dans le rapport 7/5 sont tels que le double du 1^{er} dépasse le triple du 2^{ème} de - 8 000.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés le 15 mars, ont rapporté 1 056F, au taux de 6%. Déterminer l'échéance commune des deux capitaux.

Réponse : a. 56 000F et 40 000F **b.** le 20 mai.

a. Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 7/5 tels :

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{5} = k \text{ et } 2A - 3B = -8000 \rightarrow A = 7k ; B = 5k \text{ remplaçons dans } 2A - 3B = -8000 \rightarrow 2(7k) - 3(5k) = -8000 \text{ on a } k = 8000$$

On trouve $A = 7 \times 8000 = 56\ 000$ et $B = 5 \times 8\ 000 = 40\ 000$.

$$b. \Sigma I = \frac{56.000 * 6 * n}{36000} + \frac{40.000 * 6 * n}{36000} = 1\ 056 \text{ on trouve } n = 66 \text{ jours après le 15 mars : l'échéance le 20 mai.}$$

Exercice 4:

Deux capitaux dans le rapport 5/7, sont tels qu'ils diffèrent de 6 000F.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés ensemble au taux de 8,1%, ont rapporté 5 265F au 24 juin. Déterminer la date de placement des deux capitaux.

Réponse : a. 15 000F et 21 000F b. le 20 mai

a. Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 5/7 tels que :

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = k \text{ et } B - A = 6\,000 \rightarrow A = 5k ; B = 7k \text{ remplaçons dans}$$

$$B - A = 6\,000 \rightarrow 7k - 5k = 6\,000 \text{ on a } k = 3\,000$$

$$\text{On trouve } A = 5 \times 3\,000 = 15\,000 \text{ et } B = 7 \times 3\,000 = 21\,000.$$

$$\text{b. } \sum I = \frac{15.000 \times 8,1\% \times n}{36000} + \frac{21.000 \times 8,1\% \times n}{36000} = 5\,265 \text{ on trouve } n = 35 \text{ jours avant le 24 juin : la date de placement le 20 mai.}$$

Exercice 5 :

Deux capitaux dans le rapport 4/7, sont tels que leur produit est 100 800F. Calculer les 2 capitaux.

Réponse : 240 F et 420 F.

Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 4/7 tels que :

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{7} = k \text{ et } A \times B = 87\,500 \rightarrow A = 4k ; B = 7k \text{ remplaçons dans}$$

$$B \times A = 87\,500 \rightarrow (4k) \times (7k) = 100\,800 \text{ on a } k = 60$$

$$\text{On trouve } A = 4 \times 60 = 240 \text{ et } B = 7 \times 60 = 420.$$

Exercice 6 :

Deux capitaux dans le rapport 11/7, sont tels que leur produit est 492 800F. Calculer les 2 capitaux.

Réponse : 880 F et 560 F.

Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 11/7 tels que :

$$\frac{A}{11} = \frac{B}{7} = k \text{ et } A \times B = 492\,800 \rightarrow A = 11k ; B = 7k \text{ remplaçons dans}$$

$$B \times A = 492\,800 \rightarrow (11k) \times (7k) = 492\,800 \text{ on a } k = 80$$

$$\text{On trouve } A = 11 \times 80 = 880 \text{ et } B = 7 \times 80 = 560.$$

Exercice 7 :

On fait un capital C en trois capitaux proportionnels aux 2/3 ; 3/7 ; 4/5. Les trois capitaux, placés le 15 avril au taux 9%, ont rapporté ensemble 945,25F au 19 juillet.

Calculer les trois capitaux.

Réponse : 14 000F ; 9 000F et 16 800F.

$C_1 ; C_2 ; C_3$ proportionnels $(\frac{2}{3} ; \frac{3}{7} ; \frac{4}{5})$ on réduit au même dénominateur

$C_1 ; C_2 ; C_3$ proportionnels (70 ; 45 ; 84)

$$\frac{C_1}{70} = \frac{C_2}{45} = \frac{C_3}{84} = k \text{ on a } C_1 = 70k ; C_2 = 45k ; C_3 = 84k$$

$$\sum I = \frac{70.k \times 9\% \times 95}{36000} + \frac{45.k \times 9\% \times 95}{36000} + \frac{84.k \times 9\% \times 95}{36.000} = 945,25 \text{ on trouve } k = 200$$

$$C_1 = 70k = 14\,000 ; C_2 = 45k = 9\,000 ; C_3 = 84k = 16\,800$$

Chapitre 2 : Escompte commercial et escompte rationnel

L'opération d'escompte consiste à vendre un effet de commerce avant son échéance. Le banquier retient l'escompte et les commissions qu'on appelle agio. La somme remise au bénéficiaire de l'effet est la valeur nette escomptée.

L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale calculé sur la durée qui sépare le jour de l'escompte (non compté) au jour d'échéance (compté).

Les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Appelons :

V « valeur nominale de l'effet en Franc »

n « la durée qui sépare le jour de mise au jour d'échéance »

t « le taux d'escompte » le diviser D = 36 000 / taux

e « l'escompte commercial »

a « la valeur actuelle commerciale » $a = V - e$

$$\text{Escompte } e = \frac{V * t * n}{36000}$$

$$\text{ou escompte } e = \frac{V * n}{D} \quad \text{avec } D = 36000/t$$

$$\text{Valeur actuelle } a = V - e = V - \frac{V * t * n}{36.000} = V - \frac{V * n}{D}$$

Note : n « c'est le nombre de jours qui séparent le jour de remise à l'escompte au jour d'échéance de l'effet » les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Exercice 1: Un effet de valeur nominale 120 000F est escompté à n jours avant son échéance au taux 9%. Si l'effet avait été escompté 20 jours plutôt au taux 7,2%, l'escompte aurait augmenté de 960 F. Calculer n ?

Solution : On utilisera la formule :

$$120\,000 * 9 * (n + 20) - 120\,000 * 7,2 * n / 36\,000 = 960, \text{ on trouve } n = 60\text{jrs}$$

Exercice 2: Un effet de valeur nominale 180 000F est escompté à n jours avant son échéance au taux 7,2%. Si l'effet avait été escompté 20 jours plus tard, au taux 9%, l'escompte aurait diminué de 270 F. Calculer n ?

Solution : On utilisera la formule :

$$180\,000 * 7,2 * n - 180\,000 * 9 * (n - 20) / 36\,000 = 270, \text{ on trouve } n = 70 \text{ jours};$$

Exercice 3: Un effet de valeur nominale 210 000F est escompté à 90 jours avant son échéance au taux t. Si l'effet avait été escompté 30 jours plutôt, au taux (t+1), l'escompte aurait augmenté de 1 050F. Calculer t ?

Solution : On utilisera la formule :

$$210\,000 * t * (90 + 30) - 210\,000 * (t + 1) * 90 / 36\,000 = 1\,050, \text{ on trouve } t = 6\%.$$

Exercice 4: Un commerçant fait escompter un effet de 90 000F payable dans n jours. L'escompte supporté est égal à 1 312,5 F. S'il avait escompté le billet 10 jours plus tôt avec un taux supérieur au premier de 2%, l'escompte aurait été 1912,5F. Calculer la première durée et le premier taux. **Réponse :** 75 jours et 7%

II. Escompte rationnel : e'

C'est l'intérêt de la valeur actuelle rationnelle (a') calculé sur la durée qui sépare le jour de l'escompte (non compté) au jour d'échéance (compté).

Les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Appelons :

V « valeur nominale de l'effet en F »

n « la durée qui sépare le jour de mise au jour d'échéance »

t « le taux d'escompte » le diviser **D = 36 000 / taux**

e' « l'escompte rationnel »

a' « la valeur actuelle rationnelle » **a' = V - e'**

$$\text{Escompte rationnel } e' = \frac{a' * t * n}{36000}$$

Valeur actuelle rationnelle **a' = V - e'**

$$\text{Note : escompte rationnel } e' = \frac{V * t * n}{36000 + t * n} = \frac{V * n}{D + n}$$

Note : n « c'est le nombre de jours qui séparent le jour de remise à l'escompte au jour d'échéance de l'effet » les mois sont pris suivant leur durée réelle.

Comparaison des deux escomptes

$$e - e' = \frac{V \cdot n^2}{D \cdot (D + n)} = \frac{e' \cdot n}{D} = \frac{e \cdot n}{D + n} \quad \frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{e}{e'} = \frac{D + n}{D} \quad \text{si le rapport est } > 1.$$

$$\frac{e'}{e} = \frac{D}{D + n} \quad \text{si le rapport est } < 1.$$

Exercice 1: Un effet de nominal 9 000 000F à échéance le 30 avril est escompté le 01^{er} mars au taux de 7,2%. Calculer la valeur actuelle commerciale et la valeur actuelle rationnelle.

Réponse :

Valeur actuelle commerciale a

$$a = 9\,000\,000 - 9\,000\,000 * 90 * 7,2 / 36000 = 8\,838\,000F$$

Valeur actuelle rationnelle a'

$$a' = 9\,000\,000 - 9\,000\,000 * 90 * 7,2 / (36000 + 90 * 7,2) = 8\,840\,864F$$

Exercice 2: Un effet de valeur nominale V est escompté à n jours avant son échéance. Son escompte commercial est 228 F et son escompte rationnel est 225F. Calculer V ?

Solution : On utilisera la formule $1/e' - 1/e = 1/V$ et on trouve $V = 17\,100F$.

Exercice 3: Un effet de valeur nominale V est escompté à 60 jours avant son échéance. Le rapport des deux escomptes (commercial et rationnel) est 1,012. Calculer le taux t ?

Solution : On utilisera la formule : $e / e' = (D + n) / D = 1,012$ avec $D = 36000/t$ on trouve $D = 5000$ on a $t = 36000/5000 = 7,2\%$.

Chapitre 3 : Bordereau d'escompte BE

Le bordereau d'escompte un document qui récapitule l'ensemble des effets remis à l'escompte.

1- calcul de la valeur nette escomptée d'un effet :

La valeur nette escomptée est la somme remise par le banquier au client qui a remis l'effet à l'escompte. C'est la différence entre la valeur nominale et les agios toute taxe comprise.

Agio HT = Escompte + les commissions

Taxe = agio HT x taux

Agio TTC = Agio HT + Taxe

Valeur nette escomptée = Valeur nominale – Agio TTC

$$\text{Escompte} = \frac{V * \text{taux d'escompte} * t * nj}{36.000}$$

$$\text{Endos} = \frac{V * \text{taux d'endos} * t * nj}{36.000}$$

Commission proportionnelle = $V \times \text{taux} / 100$

Commission fixe = C

2- Présentation du bordereau d'escompte :

N°	Valeur nominale V	Echéance	Nombre de jour nj	Escompte	Commissions		
					Endos	Proport.	Fixes
1							
2							
3							
4							
5							
Totaux		XXXXXX	XXXXXX	Total 1	Total 2	Total 3	Total 4
Agio HT = A. HT Taxe = Agio HT*15% Agio TTC = Agio HT + Taxe = Agio HT*1,15 Valeur nette escomptée = total valeur nominale – agio TTC							

Remarque : le nombre de jour de chaque effet est déterminé entre le jour de remise (non compté) et le jour d'échéance (compté). On doit tenir des minimums de jour et des jours supplémentaires de banque.

Exercices et réponses : le bordereau d'escompte

Exercice 1 : Un effet de valeur nominale 2 700 000F à échéance le 21 mai est escompté le 12 avril aux conditions suivantes : escompte 6% ; endos 2,4% ; commission de bordereau 0,5% ; commission fixe 3 930 F la taxe 15%.

Calculer la valeur nette escomptée.

Solution :

Le nombre de jour : du 12 avril au 21 mai soit **39 jours**

Escompte = $2\,700\,000 \times 6 \times 39 / 36\,000 = 17\,550F$

Endos = $2\,700\,000 \times 2,4 \times 39 / 36\,000 = 7\,020 F$

Com Prop = $2\,700\,000 \times 0,5 \% = 13\,500F$

Com fixe = 2 000 F

Agio hors taxe = $17\,550 + 7\,020 + 13\,500 + 3\,930 = 42\,000$

Agio TTC = $42\,000 \times 1,15 = 48\,300F$

La valeur nette escomptée = $2\,700\,000 - 48\,300 = 2\,651\,700 F$

Exercice 2 : Un effet à échéance le 07 juin est escompté le 17 avril aux conditions suivantes : escompte 7,2% ; endos 3% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 3 810 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 4 113 750 F. Calculer la valeur nominale de l'effet.

Solution :

Le nombre de jour : du 17 avril au 07 juin soit **51 jours**

Escompte = $V \times 7,2 \times 51 / 36\,000 = 0,0102 V$

Endos = $V \times 3 \times 51 / 36\,000 = 0,00425 V$

Com Prop = $V \times 0,25 \% = 0,0025 V$

Com fixe = 3 810

Agio hors taxe = $0,0102 V + 0,00425V + 0,0025 V + 3\,810$

Agio HT = $0,01695 V + 3\,810$

Agio TTC = $(0,01695 V + 3\,810) \times 1,15 = 0,0194925 V + 4\,381,5$

La valeur nette escomptée = $V - \text{Agio TTC} = 4\,113\,750$

$V - 0,0194925 V - 4\,381,5 = 4\,113\,750$ on trouve **$V = 4\,200\,000F$**

Exercice 3 : Un effet de 9 000 000F est escompté le 01^{er} mars, à n jours avant son échéance aux conditions suivantes : escompte 7,2% ; endos 3% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 2 750 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 8 839 000 F. Déterminer la date d'échéance de l'effet.

Réponse : on trouve $n = 45$ jours après le 01^{er} mars soit **le 15 avril**.

Exercice 4 : Un effet de 7 200 000F est escompté à 60 jours avant son échéance aux conditions suivantes : escompte $t\%$; endos 2,1% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 4 800 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 7 075 800 F. Calculer le taux d'escompte.

Réponse : on trouve **$t = 5\%$** .

Exercice 5 : Un effet de 1 800 000F à échéance le 30 avril est remis à l'escompte le 01^{er} mars aux conditions suivantes : escompte 6% ; endos 0,3% ; commission de bordereau $\frac{1}{4}\%$ commissions fixes 100F. Taxe 15%.

Calculer la valeur nette escomptée

Réponse : agio HT = 19 450F ; Agio TTC = 22 367,5F ; net 1 777 632,5F ;

Exercice 6 : Un effet de 900 000F échéant dans 60 jours est remis à l'escompte aux conditions suivantes : escompte $t\%$; endos 2,1% ; commission proportionnelle $\frac{1}{4}\%$ commission fixe 1000F taxe 15%. La somme remise au commerçant est 880 220F. Calculer le taux t .

Réponse : 7,2%

Exercice 7: Mr TOURE remet le 01^{er} mars 4 effets à l'escompte :

270 000F au 05 mars ; 180 000F au 10 mars ; 420 000F au 30 mars ; 600 000F au 29 avril.

Conditions : escompte 6% endos 1,2% commission proportionnelle $\frac{1}{2}\%$ commissions fixes 100F par effet taxe 15%.

Note : minimum de jours est 15 jours et ajouter un jour supplémentaire aux effets dépassant le minimum de jour.

Etablir le bordereau d'escompte et calculer la valeur nette escomptée.

Solution : Bordereau d'escompte des effets remis le 01^{er} mars

N°	Valeur nominale V	Echéance	Nombre de jour nj	Escompte 6%	Commissions		
					Endos	Proport.	Fixes
1	270 000	05 mars	15	675	135	135	100
2	180 000	10 mars	15	450	90	90	100
3	420 000	30 mars	30	2 100	420	210	100
4	600 000	29 avril	60	6 000	1 200	300	100
Totaux	1 470 000	XXXXXX	XXXXXX	9 225	1 845	735	400
Agio HT = 12 205 Taxe = 12 205 x 15% = 1 830,75 Agio TTC = 12 205 + 1 830,75 = 14 035,75 Valeur nette escomptée = 1 470 000 - 14 035,75 = 1 455 964,25F.							

Exercice 8 : Mr CISSE remet le 01^{er} mars trois effets à l'escompte : 720 000F au 10 mars ; 900 000F au 15 avril ; 480 000F au 10 juin.

Conditions : escompte 6% minimum d'escompte 2 000F ; endos 3,3% endos minimum 1000F ; commission proportionnelle $\frac{1}{5}\%$ minimum 980F maximum 1 700F ; commission fixe 1500F sur l'ensemble des effets. Taxe 15%.

Note : minimum de jours est 15 jours.

Etablir le bordereau d'escompte et calculer la valeur nette escomptée.

Solution : Bordereau d'escompte des effets remis le 01^{er} mars

N°	Valeur nominale V	Echéance	Nombre de jour nj	Escompte 6%	Commissions		
					Endos	Proport.	Fixes
1	720 000	10 mars	15	2 000	1 000	1 440	
2	900 000	15 avril	45	6 750	3 712,5	1 700	
3	480 000	10 juin	101	8 080	4 444	980	
Totaux	2 100 000	XXXXXX	XXXXXX	16 830	9 156,5	4 120	1 500
Agio HT = 31 606,5 Taxe = 31 606,5 x 15% = 4 740,975 Agio TTC = 31 606,5 + 4 740,975 = 36 347,475 Valeur nette escomptée = 2 100 000 - 36 347,475 = 2 063 652,525 F.							

Chapitre 4 : Equivalence d'effets

1. Equivalence de 2 effets :

Un effet est équivalent à un autre effet, lorsqu'escomptés au même taux à la même date (date d'équivalence), ils présentent la même valeur actuelle commerciale.

E₁ équivalent à E₂ : l'équation d'équivalence s'écrit

$$V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36.000} = V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36.000}$$

$$V_1 (36.000 - t * n_1) = V_2 (36.000 - t * n_2)$$

$$V_1 (D - n_1) = V_2 (D - n_2)$$

Note : La date d'équivalence si elle existe est toujours antérieure aux échéances aux échéances des deux effets.

Note : ni (de la date d'équivalence à l'échéance)

Exemple : un effet de 90 000F payable dans 30 jours est remplacé un nouvel effet payable dans 60 jours. Au taux de 7,2% calculer la valeur nominale du nouvel effet.

Solution : taux 7,2% le diviseur fixe $D = 36000/7,2 = 5\ 000$

$$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2) \Rightarrow 90.000 (5.000 - 30) = V (5000-60) \Rightarrow V = 90\ 545F$$

2. Equivalence de 2 groupes d'effets

Un groupe d'effets est équivalent à un autre groupe d'effets, lorsqu'escomptés au même taux à la même date (date d'équivalence), la somme des valeurs actuelle du premier groupe est égale à la somme des valeurs actuelles du deuxième groupe.

E₁, E₂ équivalents aux E₃, E₄ : l'équation d'équivalence s'écrit.

$$\left(V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36.000} \right) + \left(V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36.000} \right) = \left(V_3 - \frac{V_3 * t * n_3}{36.000} \right) + \left(V_4 - \frac{V_4 * t * n_4}{36.000} \right)$$

$$V_1 (D - n_1) + V_2 (D - n_2) = V_3 (D - n_3) + V_4 (D - n_4)$$

Exemple : trois paiements de 120.000F dans 100 jours ; 150.000F dans 180 jours et 210.000F dans 240 jours sont remplacés par deux nouveaux paiements de même valeur nominale payable respectivement dans 30 jours et 45 jours. Au taux de 6% calculer la valeur nominale commune.

Solution : taux 6% le diviseur fixe $D = 36000/6 = 6\ 000$

$$V_1(D - n_1) + V_2(D - n_2) + V_3(D - n_3) = V(D - n_1) + V(D - n_2)$$

$$120.000(6.000 - 100) + 150.000(6.000-180) + 210.000(6.000-240) = V(6000-30) + V(6000-45) \Rightarrow \text{on trouve } V = \dots\dots\dots$$

3. Equivalence d'un effet et d'un groupe d'effets :

Un effet est équivalent à plusieurs effets, lorsqu'ils sont escomptés au même taux à la même date (date d'équivalence), la valeur actuelle de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés. C'est un problème d'échéance commune.

Echéance commune

L'échéance commune est l'échéance de l'effet unique.

E remplace E₁, E₂, E₃

$$\left(V - \frac{V * t * n}{36.000} \right) = \left(V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36.000} \right) + \left(V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36.000} \right) + \left(V_3 - \frac{V_3 * t * n_3}{36.000} \right)$$

$$V(D - n) = V_1(D - n_1) + V_2(D - n_2) + V_3(D - n_3)$$

n est l'échéance commune.

Echéance moyenne

L'échéance moyenne est l'échéance commune dans le cas où la valeur de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

E remplace E_1, E_2, E_3 avec $V = V_1 + V_2 + V_3$

$$\left(V - \frac{V * t * n}{36.000} \right) = \left(V_1 - \frac{V_1 * t * n_1}{36.000} \right) + \left(V_2 - \frac{V_2 * t * n_2}{36.000} \right) + \left(V_3 - \frac{V_3 * t * n_3}{36.000} \right)$$

n est l'échéance moyenne $V = V_1 + V_2 + V_3$

n est l'échéance moyenne $n = \frac{V_1 * n_1 + V_2 * n_2 + V_3 * n_3}{V_1 + V_2 + V_3}$

Remarque :

Rmq 1 : l'échéance moyenne est indépendante du taux ;

Rmq 2 : Pour déterminer l'échéance moyenne, on peut choisir n'importe quelle date comme date d'équivalence. Mais de préférence on doit choisir la date la plus ancienne.

Rmq 3 : les échéances $n_1, n_2, n_3, \dots$ Sont calculées de la date d'équivalence aux échéances respectives. Souvent les échéances n peuvent être négatives, dans ce cas on parle d'intérêt de retard.

Rmq 4 : les décomptes de jours se font suivant le calendrier.

Exercices et réponses sur les équivalences d'effets

Exercice 1 : Un commerçant doit les effets suivants :

20 000 f au 15 mars 2000

25 000F au 30 mars 2000

35 000 F au 30 avril 2000

- 1) déterminer l'échéance moyenne des 3 effets dans.
- 2) il convient avec son créancier de remplacer le 01^{er} mars les 3 effets par un effet unique au 10 avril 2000. Au taux 9%, calculer la valeur nominale unique.
- 3) il convient avec son créancier de remplacer les 3 effets par un effet unique payable au 05 avril 2000. Au taux 8%, calculer la valeur nominale unique.

Solution :

1) échéance moyenne ? Prenons la date la plus ancienne le 15 mars comme **date d'équivalence**

n_1 (15 mars au 15 mars) = 0 jour ; n_2 (15 mars au 30 mars) = 30 jours

n_1 (15 mars au 30 avril) = 46 jours

Échéance moyenne $n = \frac{20000*0+25000*15+35000*46}{80000} = 25 \text{ jours après le 15 mars ;}$

l'échéance moyenne est le : 09 avril 2000.

Note : Quelque soit la date d'équivalence choisie l'échéance moyenne ne change pas.

2) date d'équivalence : le 01^{er} mars 2000 ; taux 9% alors $D = 4\,000$

n_1 (1^{er} mars au 15 mars) = 14 jours ; n_2 (1^{er} mars au 30 mars) = 29 jours

n_3 (1^{er} mars au 30 avril) = 45 jours ; n (1^{er} mars au 10 avril) = 40 jours

$V(4000-40) = 20000(4000-14) + 25\,000(4\,000-29) + 35\,000(4\,000-45)$

On trouve $V = \dots\dots\dots$

3) date d'équivalence le 05 avril : taux 8% alors $D = 4\,500$

n_1 (05 avril au 15 mars) = -21 jours ; n_2 (05 avril au 30 mars) = -6 jours

n_3 (05 avril au 30 avril) = 25 jours ; n (05 avril au 05 avril) = 0 jours

$V(4500-0) = 20\,000(4500+21) + 25\,000(4\,000+6) + 35\,000(4\,500-25)$

On trouve $V = \dots\dots\dots$

Exercice 2 : le 01^{er} mars un effet de 120 000F à échéance le 31 mars est remplacé par un effet à échéance le 30 avril au taux de 7,2%. Quelle est la valeur nominale du nouvel effet ?

Réponse : $120.000(5.000 - 30) = V(5.000 - 60) \Rightarrow V = 120\,729\text{F}$

Exercice 3 : le 01^{er} mars un effet de 420 000F à échéance le 15 avril est remplacé par un effet de 421 060,61F à échéance le 30 avril. Calculer la taux d'escompte.

Réponse : $420.000(D - 45) = 421.060,61(D - 60) \Rightarrow D=6.000 \Rightarrow t = 6\%$

Exercice 4 : le 01^{er} mai un effet de 540 000F à échéance le 31 mai est remplacé par un effet de 543 066,25F au taux de 4,5%. Quelle est l'échéance du dernier effet ?

Réponse : $540.000(8.000 - 30) = 543.066,25(8.000 - x) \Rightarrow x=75$ jours après le 1^{er} mai soit le 15 juillet.

Exercice 5 : un effet de 210 000F à échéance le 20 juin est remplacé par un effet de 210 589F à échéance le 10 juillet au taux 5%. Quelle est la date d'équivalence ?

Réponse : 210.000F $\Rightarrow n_1$ (date d'éq au 20 juin) = x jours

210.589 F $\Rightarrow n_2$ (date d'éq au 10 juillet) = x + 20

$210.000(7200 - x) = 210.589(7200 - x - 20) \Rightarrow x=36$ jours avant le 20 juin

Date d'équivalence : le 15 mai.

Exercice 6 : le 01^{er} mai on remplace trois effets 50 000F au 31 mai ; 60 000F au 30 juin et 75000F au 30 juillet par un effet unique au 20 juillet, au taux 9%. Quelle est la valeur nominale de l'effet unique? Quelle l'échéance moyenne des trois effets ?

Réponse : date d'équivalence le 1^{er} mai

n_1 (1^{er} mai au 31 mai) = 30 jours ; n_2 (1^{er} mai au 30 juin) = 60 jours

n_3 (1^{er} mai au 30 juillet) = 90 jours ; n (1^{er} mai au 20 juillet) = 80 jours

$V(4000-80)=50000(4000-30)+60000(4000-60)+75000(4000-90)$

On trouve V =.....

Exercice 7 : Un commerçant doit les 5 effets suivants :

$V_1 = 150\,000\text{F}$ au 20 juin ;

$V_2 = 250\,000\text{F}$ au 06 juillet ;

$V_3 = 100\,000\text{F}$ au 10 juillet ;

$V_4 = 180\,000\text{F}$ au 20 juillet et

$V_5 = 210\,000\text{F}$ au 12 août.

Il convient avec créancier :

a) de remplacer les trois premiers effets par un effet unique de 500 000F. Quelle doit être l'échéance de ce nouvel effet ?

b) De remplacer les deux derniers par un effet unique au 01^{er} août. Quel sera le nominal de cet effet ; taux 8% ?

Réponses :

1/ prenons la date la plus ancienne le **20 juin** comme date d'équivalence :

$n_1 = 0$ jours ; $n_2 = 16$ jours ; $n_3 = 20$ jours

$$n = \frac{150.000 * 0 + 250.000 * 16 + 100.000 * 20}{150.000 + 250.000 + 100.000} = 12 \text{ jours} \text{ Après le 20 juin.}$$

L'échéance moyenne : le 2 juillet

2/ date d'équivalence le 1^{er} août ; $D = 36000/8 = 4\,500$

n_1 (1^{er} août au 20 juillet) = - 12 jours ; n_2 (1^{er} août au 12 août) = 11 jours

n (1^{er} août au 1^{er} août) = 0 jours

$V(4500-0) = 180.000(4500+12) + 210.000(4500-11)$

On trouve $V = \dots\dots\dots$

Exercice 8 : le 01^{er} mars un commerçant doit les 3 effets suivants : 20 000F au 31 mars; 30 000F au 30 avril et 50 000F. L'échéance moyenne a lieu le 09 mai. Déterminer l'échéance du troisième effet.

Réponse : le 30 mai.

Date d'équivalence : le 01^{er} mars ; $n_1 = 30$ jours ; $n_2 = 60$ jours ; $n_3 = 69$ jours

$$n = \frac{20.000 * 30 + 30.000 * 60 + 50.000 * n_3}{20.000 + 30.000 + 50.000} = 69 \text{ jours} \rightarrow n_3 = \dots\dots\dots$$

Exercice 9 : le 01^{er} avril un commerçant doit les 3 effets suivants : A au 16 mai; 80 000F au 31 mai; 70 000F au 25 juin. L'échéance moyenne a lieu le 05 juin. Déterminer la valeur nominale du 01^{er} effet.

Réponse : on trouve A = 50 000 F.

Exercice 10 : le 05 mars un commerçant doit les 3 effets suivants : A au 04 avril; B au 04 mai et C au 03 juin. L'échéance moyenne a lieu le 13 mai. Déterminer les valeurs nominales. Les valeurs nominales font ensemble 100 000F et la différence de la 3^{ème} à la 01^{ère} est 30.000F.

Réponse : 20 000F; 30 000F et 50 000F.

Exercice 11 : le 01^{er} avril, on remplace les 3 effets 50 000F au 16 mai; A au 31 mai; 70 000F au 25 juin par un effet unique de 200 610F au taux 7,2%. L'échéance commune a lieu le 20 juin. Déterminer la valeur nominale du 02^{ème} effet.

Réponse : 80 000 F.

Chapitre 4 : Intérêts composés

I. Intérêts composés

1.- Définitions :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Par exemple un capital de 2 000 000F est placé au taux de 5% pendant 3 ans.

A intérêt simple : l'intérêt = 2 000 000*5% = 100 000F chaque année.

A intérêt composé :

L'intérêt de la 1^{ère} année = 2 000 000*5% = 100 000 F

L'intérêt de la 2^{ème} année = (2 000 000 + 100 000) *5% = 105 000F

L'intérêt de la 3^{ème} année = (2 000 000 + 100 000 + 105 000) *5% = 110 250F

2) Formules :

Appelons :

C_n « Valeur acquise du capital au bout de n période »

i « le taux d'intérêt pour 1F et pour une période de 1 an »

n « la durée de placement »

I « intérêt composé au bout de n »

I_n « intérêt produit pendant la n ième période »

a) calcul de la valeur acquise au bout de n avec taux constant :

$$C_n = C(1+i)^n$$

b) calcul de la valeur acquise au bout de n avec taux variable :

$$C_n = C(1+i_1)^{n_1} (1+i_2)^{n_2} (1+i_3)^{n_3}$$

c) Calcul des intérêts produits au bout de n périodes :

$$I = C(1+i)^n - C$$

d) Calcul des intérêts produits au cours de la «n » ième période :

$$I_n = C.i.(1+i)^{n-1}$$

e) Calcul des intérêts produits entre k et p périodes :

$$I_n = C(1+i)^p - C(1+i)^k$$

Exemple : Un capital de 2 000 000 F est placé à intérêt composé pendant 10 ans, au taux de 8% l'an.

Calculer :

- la valeur acquise au bout de 10 ans,
- l'intérêt produit au bout de 10 ans ;
- l'intérêt produit pendant la 3^{ème} année ;
- l'intérêt produit pendant les 3 premières années ;
- l'intérêt produit pendant les 3 dernières années ;
- l'intérêt des 4 dernières années.

Solution :

a) $C_n = C(1+i)^n = 2000000 (1,08)^{10} = 4\,317\,850F$

b) $I = C(1+i)^n - C = 2000000 (1,08)^{10} - 2000\,000 = 2\,317\,850F.$

c) $I_n = C i (1+i)^{n-1} = 2\,000\,000 * 0,08 * (1,08)^2 = 186\,624 F.$

d) $I = C(1+i)^3 - C(1+i)^0 = 2\,000\,000 * (1,08)^3 - 2\,000\,000 * (1+i)^0 = 519\,424 F.$

e) $I = C(1+i)^{10} - C(1+i)^7 = 2\,000\,000 * (1,08)^{10} - 2\,000\,000 * (1+i)^7 = 890\,201F$

f) $I = C(1+i)^{10} - C(1+i)^6 = 2\,000\,000 * (1,08)^{10} - 2\,000\,000 * (1+i)^6 =$

2.- Capitalisation :

$C_n = C(1 + i)^n$ est la formule de capitalisation

Il doit y avoir une concordance entre le taux i et la durée n . C'est-à-dire :

- lorsque le taux i et la durée n sont exprimées en année : **capitalisation annuelle des intérêts** ;
- lorsque le taux i et la durée n sont exprimées en semestre : **capitalisation semestrielle des intérêts** ;
- lorsque le taux i et la durée n sont exprimées en trimestre : **capitalisation trimestrielle des intérêts** ;
- lorsque le taux i et la durée n sont exprimées en mois : **capitalisation mensuelle des intérêts** ; etc.

Dans le cas où le taux et la durée sont différents, on convertit soit le taux ou la durée.

Comment convertir la durée n ?

Pour la conversion de la durée, nous retenons que :

1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois

1 semestre = $\frac{1}{2}$ an = 2 trimestres = 6 mois

1 trimestre = $\frac{1}{2}$ semestre = $\frac{1}{4}$ an = 3 mois

1 mois = $\frac{1}{6}$ semestre = $\frac{1}{3}$ trimestre = $\frac{1}{12}$ an.

1 bi-an = 2 ans = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois

Par exemple :

→ 5 ans = 60 mois = 20 trimestres = 10 semestres

→ 40 trimestres = 10 ans = 20 semestres = 120 mois

Comment convertir le taux i ?

Pour la conversion du taux, on passe par le taux équivalent ou par le taux proportionnel.

3.- Taux équivalents α taux proportionnels

a) Taux équivalents

On appelle taux équivalent, des taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, produisant le même intérêt pour un capital donné, pendant une durée déterminée.

i équivalent à i' ssi : $(1+i)^k = (1+i')^p$ alors $i = (1+i')^{p/k} - 1$

Appelons

i_a = le taux annuel équivalent ; i_s = le taux semestriel équivalent

i_t = le taux trimestriel équivalent ;

i_m = le taux mensuel équivalent

$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12}$

Problème :

Calculer le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%

Calculer le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%

Calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9%

Calculer le taux mensuel équivalent au taux semestriel de 6%

Calculer le taux annuel équivalent au taux mensuel de 1,5%

Calculer le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 2%

Calculer le taux bimestriel équivalent au taux trimestriel de 8%

Calculer le taux bi-annuel équivalent au taux triennal de 25%

Solution

- a) $i_s = 1,10^{1/2} - 1 = 0,0488$
- b) $i_t = 1,08^{1/4} - 1 = 0,01943$
- c) $i_m = 1,09^{1/12} - 1 = 0,007207$
- d) $i_m = 1,06^{1/6} - 1 = 0,00976$
- e) $i_a = 1,015^{12} - 1 = 0,1956$
- f) $i_t = 1,02^3 - 1 = 0,0612$
- g) $i_{2m} = 1,08^{2/3} - 1 = 0,05265$
- h) $i_{2a} = 1,25^{2/5} - 1 = 0,66667$

Problème : Calculer la valeur acquise par un capital de 800.000 F pendant 8 ans au taux annuel de 6%. Capitalisation semestrielle des intérêts.

Solution :

$n = 8 \text{ ans} = 16 \text{ semestres}$

$$i_a = 0,06 \quad i_s = 1,06^{1/2} - 1 = 0,02956$$

$$C_{16} = 800.000(1,02956)^{16} = 1.275.019F$$

N.B.: On peut remplacer à ic le taux fixé par un taux équivalent.

b) Taux proportionnels

On dit que deux ou plusieurs taux sont proportionnels quand leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisations respectives.

$$\frac{i_1}{i_2} = K$$

i proportionnels à i' ssi : $i/p = i'/k$ alors $i = (p/k) \cdot i'$

Appelons

i_{ap} : taux annuel proportionnel

i_{sp} : taux semestriel proportionnel

i_{tp} : taux trimestriel proportionnel

i_{mp} : taux mensuel proportionnel

$$i_{ap} = 2 \times i_{sp} = 4 i_{tp} = 12 i_{mp}$$

Problème :

Calculer le taux semestriel proportionnel au taux annuel de 10%

Calculer le taux trimestriel proportionnel au taux semestriel de 5%

Calculer le taux mensuel proportionnel au taux bi-annuel de 21%

Solution :

- a) $i_{sp} = 0,10/2 = 0,05$
- b) $i_{tp} = 0,05/2 = 0,025$
- c) $i_{mp} = 0,21/24 = 0,00875$

N.B.: On peut remplacer à intérêt simple le taux fixé par un taux proportionnel.

Exercice 1 : Un capital de 5 000 000F est placé pendant 10 ans. Le taux d'intérêt est variable 5% l'an jusqu'à la date 5 et 7% l'an de la date 5 à la date 10. Calculer la valeur acquise au bout de 10 ans.

Solution : $5\,000\,000 (1,05)^5(1,07)^5 = 8\,950\,255\text{ F.}$

Exercice 2 : Un capital de 8 000 000F est placé pendant 10 ans. La capitalisation est semestrielle les 5 premières années au taux 4% le semestre et trimestrielle les 5 dernière années au taux 2,5% le trimestre. Calculer la valeur acquise au bout de 10 ans.

Solution : $8\,000\,000 (1,04)^{10}(1,025)^{20} = 19\,404\,421\text{ F.}$

Exercice 3 : Un capital de 2 000 000F est placé pendant 10 ans. La capitalisation est semestrielle les 5 premières années au taux 6% l'an et trimestrielle les 5 dernière années au taux 7% l'an. Calculer la valeur acquise au bout de 10 ans.

Solution :

taux semestriel équivalent $= 1,06^{1/2} - 1 = 0,02956$

taux trimestriel équivalent $= 1,07^{1/4} - 1 = 0,017058$

$2\,000\,000 (1,02956)^{10}(1,01759)^{20} = 3\,793\,178\text{ F.}$

Exercice 4 : Un capital de 2 000 000F est placé au taux 10%. La capitalisation annuelle des intérêts. Calculer la valeur acquise au bout de 11 ans 5 mois.

Solution :

$2\,000\,000 (1,10)^{11}(1,10)^{5/12} = 5\,937\,402\text{ F.}$

Exercice 5 : Calculer le capital qui, au taux semestriel de 4%, et au bout de 5 ans, est devenu 7 401 221F.

Solution :

$5\,937\,402 = C * (1,04)^{10}$ on trouve $C = 5\,000\,000\text{F.}$

Exercice 6 : Au bout de combien de temps un capital triple au taux 9% l'an ?

Solution : $C_n = C(1+i)^n = 3C$ on simplifie par C et on a : $(1,09)^n = 3$ on trouve $n = \log 3 / \log 1,09 = 12,74\text{ ans} = 12\text{ ans } 9\text{ mois.}$

Exercice 7 : Au bout de combien de temps un capital double au taux 4% le trimestre ?

Solution : $C_n = C(1+i)^n = 2C$ on simplifie par C et on a : $(1,04)^n = 2$ on trouve $n = \log 2 / \log 1,04 = 17,7\text{ trimestres} = 4\text{ ans } 5\text{ mois.}$

Exercice 8 : On dépose 2 000 000F dans un compte bancaire productif d'intérêt composé. 2 ans après ce dépôt on retire 2 000 000F. 2 ans après ce retrait on dispose en compte 277 754 F compte tenu des intérêts. Calculer le taux de capitalisation annuelle.

Solution : $2\,000\,000(1+i)^4 - 2\,000\,000(1+i)^2 = 277\,754$

On trouve $i = 0,06$

Exercice 9 : On dépose 500 000F dans un compte bancaire productif d'intérêt composé. 10 mois après ce dépôt on dépose à nouveau 500 000F. 10 mois après ce retrait on dispose en compte 1 352 471 F compte tenu des intérêts. Calculer le taux de capitalisation annuelle.

Solution : $500\,000(1+i)^{20} + 500\,000(1+i)^{10} = 1\,352\,471$

On trouve $i = 0,02.$

Sujet d'examen sur les intérêts simples

Exercice 1 : Trois capitaux sont placés :

- C placé à 4,5% pendant 15 jours ;
- 75 000 F placé à 6,3% pendant 30 jours
- 90 000 F placé à 7,2% pendant 45 jours.

Le taux moyen de placement de ces capitaux est de 6,58125%. Calculez le montant du 1^{er} capital.

Solution :

Capital	Taux	Durée jours	C*t*n	C*n
C	4,5	15	67,5 * C	15*C
75 000	6,3	30	14 175 000	2 250 000
90 000	7,2	45	29 160 000	4 050 000

$$\text{Taux moyen} = \frac{67,5 \cdot C + 14\,175\,000 + 29\,160\,000}{15 \cdot C + 2\,250\,000 + 4\,050\,000} = 6,58125 \rightarrow \text{on trouve } C = 60\,000 \text{ F}$$

Exercice 2 : Mr X détient trois capitaux dont les montants sont en progression arithmétique et de somme 81 000F. ils sont placés, le 1^{er} à 6% pendant 90 jours, le 2^{ème} à 4,5% pendant 60 jours, le 3^{ème} à 7,2% pendant 30 jours. Le taux moyen de ces placements est de 5,7375%.

Déterminez les trois capitaux

Solution :

Soient C_1 ; C_2 ; C_3 les trois capitaux en PA de raison r de somme 81 000 alors

$$C_2 = 81\,000 / 3 :$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 81\,000 \text{ alors } C_2 = 81\,000 / 3 = 27\,000 \text{ et } C_1 = 27\,000 - r \text{ et } C_3 = 27\,000 + r$$

Rappelons que : A, B, C en Pa de somme M $\rightarrow$ alors B = M / 3 et A = B - r ; C = B + r

- $C_1 = 27\,000 - r$; à 6% durée 90 jours ;
- $C_2 = 27\,000$; à 4,5% durée 60 jours ;
- et $C_3 = 27\,000$; à 7,2% durée 30 jours

$$\text{Taux moyen TM : } TM = \frac{C_1 * 6 * 90 + C_2 * 4,5 * 60 + C_3 * 7,2 * 30}{C_1 * 6 + C_2 * 4,5 + C_3 * 7,2}$$

$$TM = \frac{(27\,000 - r) * 6 * 90 + 27\,000 * 4,5 * 60 + (27\,000 + r) * 7,2 * 30}{(27\,000 - r) * 90 + 27\,000 * 60 + (27\,000 + r) * 30} = 5,7375$$

On trouve la raison $r = 9\,000$ F

Les trois capitaux sont : 18 000 F ; 27 000F et 36 000 F

Exercice 3: calculez l'intérêt total des capitaux placé au taux 7,2% : 75 000 F pendant 80 jours ; 90 000 F pendant 90 jours et 150 000F pendant 60 jours.

Solution : le diviseur D = 36 000 / 7,2 = 5 000

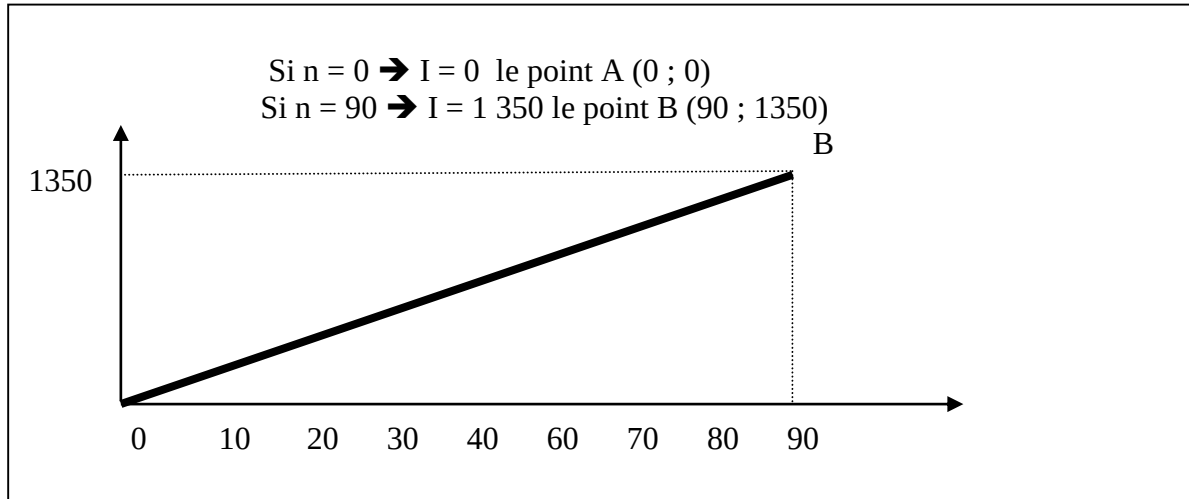
$$\text{Intérêt total} = \frac{\sum C * n}{D} = \frac{75\,000 * 80 + 90\,000 * 90 + 150\,000 * 60}{5\,000} = 4\,620$$

Exercice 4 : un capital de 90 000 F est placé au taux 6% pendant n jours.

a. Calculez l'intérêt produit en fonction de n ($0 < n < 90$ jours)

b. Représentez graphiquement en fonction de n

Solution : Intérêt $I = \frac{90.000 \cdot 6 \cdot n}{36.000} = 15n$



Exercice 5 :

Une somme de 690 000 est divisée en trois capitaux en progression arithmétique de raison 15 000F.

1/ Calculez les trois capitaux

2/ Une personne place ces trois capitaux, le 1^{er} mars, à intérêts simples au taux 6%. Calculer la somme totale recueillie le 30 avril.

Solution :

1/ Soient C_1 ; C_2 et C_3 les trois capitaux en Prog arith de raison $r = 15\,000$.

Ainsi : $C_1 = C$; $C_2 = C + 15\,000$; $C_3 = C + 30\,000$

Une somme de 690 000 est divisée en trois parts :

$$C_1 + C_2 + C_3 = 690\,000$$

$$C + (C + 15\,000) + (C + 30\,000) = 690\,000 \text{ on trouve les capitaux}$$

215 000 ; 230 000 et 245 000

2/ décompte de jours (du 1^{er} mars au 30 avril) = 60 jours

La somme totale recueillie le 30 avril = Σ valeur acquise

$$215.000 + \frac{215.000 \cdot 6 \cdot 60}{36.000} + 230.000 + \frac{230.000 \cdot 6 \cdot 60}{36.000} + 245.000 + \frac{245.000 \cdot 6 \cdot 60}{36.000}$$

Exercice 6 :

Deux capitaux dans le rapport 2/3 sont tels que le triple du 2^{ième} dépasse le double du 1^{er} de 25 000F.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés au même taux, ont rapporté en 75 jours 375F. Calculer le taux.

Réponse : a. 10 000F et 15 000F b. 7,2%

Exercice 7 :

Deux capitaux dans le rapport 7 / 5 sont tels que le triple du 2^{ième} dépasse le 1^{er} dépasse de 8.000.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés le 15 mars, ont rapporté 1 056F, au taux de 6%. Déterminer l'échéance commune des deux capitaux.

Réponse : a. 56 000F et 40 000F b. le 20 mai.

a. Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 7/5 tels :

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{5} = k \text{ et } 2A - 3B = -8000 \rightarrow A = 7k ; B = 5k \text{ remplaçons dans } 2A - 3B = -8000$$

$$\rightarrow 2(7k) - 3(5k) = -8000 \text{ on a } k = 8000$$

On trouve $A = 7 \times 8000 = 56\ 000$ et $B = 5 \times 8\ 000 = 40\ 000$.

b. $\sum I = \frac{56.000 \times 6\% \times n}{36000} + \frac{40.000 \times 6\% \times n}{36000} = 1\ 0565$ on trouve $n = 66$ jours après le 15 mars : l'échéance le 20 mai.

Exercice 8:

Deux capitaux dans le rapport 5/7, sont tels qu'ils diffèrent de 6 000F.

a. Calculer les 2 capitaux.

b. Les deux capitaux, placés ensemble au taux de 8,1%, ont rapporté 283,5F au 24 juin. Déterminer la date de placement des deux capitaux.

Réponse : a. 15 000F et 21 000F b. le 20 mai

a. Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 5/7 tels que :

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = k \text{ et } B - A = 6\ 000 \rightarrow A = 5k ; B = 7k \text{ remplaçons dans } B - A = 6\ 000$$

$$\rightarrow 7k - 5k = 6\ 000 \text{ on a } k = 3\ 000$$

On trouve $A = 5 \times 3000 = 15\ 000$ et $B = 7 \times 3\ 000 = 21\ 000$.

b. $\sum I = \frac{15.000 \times 8,1\% \times n}{36000} + \frac{21.000 \times 8,1\% \times n}{36000} = 283,5$ on trouve $n = 35$ jours avant le 24 juin : la date de placement le 20 mai.

Exercice 9 :

Deux capitaux dans le rapport 4/7, sont tels que leur produit est 100 800F. Calculer les 2 capitaux.

Réponse : 240 F et 420 F.

Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 4/7 tels que :

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{7} = k \text{ et } A \times B = 87\ 500 \rightarrow A = 4k ; B = 7k \text{ remplaçons dans } B \times A = 87\ 500$$

$$\rightarrow (4k) \times (7k) = 100\ 800 \text{ on a } k = 60$$

On trouve $A = 4 \times 60 = 240$ et $B = 7 \times 60 = 420$.

Exercice 10 :

Deux capitaux dans le rapport 11/7, sont tels que leur produit est 492 800F. Calculer les 2 capitaux.

Réponse : 880 F et 560 F.

Soient A et B les deux capitaux dans le rapport 11/7 tels que :

$$\frac{A}{11} = \frac{B}{7} = k \text{ et } A \times B = 492\ 800 \rightarrow A = 11k ; B = 7k \text{ remplaçons dans } B \times A = 492\ 800$$

$$\rightarrow (11k) \times (7k) = 492\ 800 \text{ on a } k = 80$$

On trouve $A = 11 \times 80 = 880$ et $B = 7 \times 80 = 560$.

Exercice 11 :

On fait un capital C en trois capitaux proportionnels aux $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{5}$. Les trois capitaux, placés le 15 avril au taux 9%, ont rapporté ensemble 945,25F au 19 juillet. Calculer les trois capitaux.

Réponse : 14 000F ; 9 000F et 16 800F.

C_1 ; C_2 ; C_3 proportionnels $(\frac{2}{3}; \frac{3}{7}; \frac{4}{5})$ on réduit au même dénominateur

C_1 ; C_2 ; C_3 proportionnels (70 ; 45 ; 84)

$$\frac{C_1}{70} = \frac{C_2}{45} = \frac{C_3}{84} = k \text{ on a } C_1 = 70k ; C_2 = 45k ; C_3 = 84k$$

$$\sum I = \frac{70.k*9*95}{36000} + \frac{45.k*9*95}{36000} + \frac{84.k*9*95}{36.000} = 945,25 \text{ on trouve } k = 200$$

$$C_1 = 70k = 14\,000 ; C_2 = 45k = 9\,000 ; C_3 = 84k = 16\,800$$

Exercice 12 :

On fait un capital C en trois capitaux inversement proportionnels aux $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{5}$. Les trois capitaux, placés le 10 février au taux 9%, ont acquis ensemble 224 321,4F au 07 mai. Calculer les trois capitaux.

Réponse : 64 800F ; 100 800F et 54 000F.

C_1 ; C_2 ; C_3 inv prop $(\frac{2}{3}; \frac{3}{7}; \frac{4}{5})$ alors proportionnels aux inverses

C_1 ; C_2 ; C_3 prop $(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}; \frac{5}{4})$ on réduit au même dénominateur

C_1 ; C_2 ; C_3 proportionnels (36 ; 56 ; 30)

$$\frac{C_1}{36} = \frac{C_2}{56} = \frac{C_3}{30} = k \text{ on a } C_1 = 36k ; C_2 = 56k ; C_3 = 30k$$

$$\sum \left(36k + \frac{36.k*9*86}{36000} \right) + \left(56k + \frac{56.k*9*86}{36000} \right) + \left(30k + \frac{30.k*9*86}{36.000} \right) = 224\,321,4$$

On trouve $k = 1\,800$ alors les capitaux : 64800 ; 100 800 ; 54 000

Exercice 13 :

Trois capitaux proportionnels aux 2 ; $\frac{1}{3}$; 4 sont tels que le double du 1^{er} augmenté du triple du 2^{ième} dépasse le 3^{ième} de 6 300F. Les trois capitaux, placés le 22 janvier au taux t, ont rapporté ensemble 5 20,695F au 19 avril.

Calculer les trois capitaux

Calculer le taux t

Réponse : a. 12 600F ; 2 100F et 25 200F b. taux = 5,4%

C_1 ; C_2 ; C_3 prop $(2; \frac{1}{3}; 4)$ on réduit au même dénominateur

C_1 ; C_2 ; C_3 proportionnels (6 ; 1 ; 12)

$$\frac{C_1}{6} = \frac{C_2}{1} = \frac{C_3}{12} = k \text{ tels que } 2C_1 + 3C_2 - C_3 = 6\,300$$

on a $C_1 = 6k$; $C_2 = k$; $C_3 = 12k$ on remplace dans :

$$2C_1 + 3C_2 - C_3 = 6\,300 \rightarrow 2(6k) + 3(k) - 12k = 6\,300 \rightarrow k = 2100$$

Les capitaux sont : **12 600 ; 2 100F ; 25 200F.**

Durée de placement = 87 jours

$$\sum I = \frac{12.600*t*87}{36000} + \frac{2.100*t*87}{36000} + \frac{25.200.k*t*87}{36.000} = 520,695 \rightarrow t = 5,4\%$$

Sujets d'examen sur les escomptes à intérêts simples

Exercice 1: Un effet de valeur nominale 120 000F est escompté à n jours avant son échéance au taux 9%. Si l'effet avait été escompté 20 jours plutôt au taux 7,2%, l'escompte aurait augmenté de 120 F. Calculer n ?

Solution :
$$\frac{120\,000 \times 7,2 \times (n+20)}{36\,000} - \frac{120\,000 \times 9 \times n}{36\,000} = 120 \text{ on trouve } n = 60 \text{ jrs}$$

Exercice 2: Un effet de valeur nominale 180 000F est escompté à n jours avant son échéance au taux 7,2%. Si l'effet avait été escompté 20 jours plus tard, au taux 9%, l'escompte aurait diminué de 270 F. Calculer n ?

Solution :
$$\frac{180\,000 \times 7,2 \times n}{36\,000} - \frac{180\,000 \times 9 \times (n-20)}{36\,000} = 270 \text{ on trouve } n = 70 \text{ jrs}$$

Exercice 3: Un effet de valeur nominale 210 000F est escompté à 90 jours avant son échéance au taux t. Si l'effet avait été escompté 30 jours plutôt, au taux (t+1), l'escompte aurait augmenté de 525 F. Calculer t ?

Solution :
$$\frac{210\,000 \times t \times (90+30)}{36\,000} - \frac{210\,000 \times (t+1) \times 90}{36\,000} = 525 \text{ on trouve } t = 6 \%$$

Exercice 4: Un effet de commerce à 40 jours à courir. La somme $e + e' = 90,50$ et le produit $e \times e' = 2\,047,50$.

Déterminer la valeur nominale puis le taux de l'escompte.

Réponse : $e + e' = 90,50$ et $e \times e' = 2\,047,50$

Connaissant la somme S et le produit P

$\Rightarrow X^2 - SX + P = 0 \Rightarrow X^2 - 90,50 X + 2\,047,50 = 0 \Rightarrow \Delta = 0,25 \Rightarrow e = 45,5 \text{ et } e' = 45$

$\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{V} \Rightarrow \frac{1}{45} - \frac{1}{45,5} = \frac{1}{V} \Rightarrow \text{on trouve } V = 4\,095 \text{ F}$

Le taux $t = \frac{36\,000 \times e}{V \times n} = \frac{36\,000 \times 45,5}{4\,095 \times 40} = 10\%$

Exercice 5:

Les escomptes commercial et rationnel s'élèvent respectivement à 10,68 F et 10,58F. Quel est le taux qui a été utilisé pour les déterminer sachant que l'effet a encore 50 jours ?

Réponse : $\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{V} \Rightarrow \frac{1}{10,58} - \frac{1}{10,68} = \frac{1}{V} \Rightarrow \text{on trouve } V = 1\,129,944 \text{ F}$

Le taux $t = \frac{36\,000 \times e}{V \times n} = \frac{36\,000 \times 10,68}{1\,129,944 \times 50} = 6,81\%$

Exercice 6 : Trois effets dont les valeurs nominales sont proportionnels aux 3, 7 et 9 sont escomptés aux taux 9% ; 7,2% et 6%. Les échéances sont 90 jours, 12 jours et 150 jours. La somme des valeurs actuelles est 482 027F. Calculer les 3 valeurs nominales.

Réponse : 78 000F ; 182 000F et 234 000F.

Exercice 7 : Un effet à 30 jours est escompté au taux de 5%. S'il avait été négocié 15 jours avant au taux de 4,5% l'escompte aurait augmenté de 3,50F. Quelle est la valeur nominale de cet effet ? **Réponse : 2 400 F.**

Sujets d'examen sur le Bordereau d'escomptes

Exercice 1 : Un effet de valeur nominale 2 700 000F à échéance le 21 mai est escompté le 12 avril aux conditions suivantes : escompte 6% ; endos 2,4% ; commission de bordereau 0,5% ; commission fixe 3 930 F la taxe 15%.

Calculer la valeur nette escomptée.

Solution :

Le nombre de jour : du 12 avril au 21 mai soit **39 jours**

Escompte = $2\,700\,000 \times 6 \times 39 / 36\,000 = 17\,550F$

Endos = $2\,700\,000 \times 2,4 \times 39 / 36\,000 = 7\,020 F$

Com Prop = $2\,700\,000 \times 0,5 \% = 13\,500F$

Com fixe = 2 000 F

Agio hors taxe = $17\,550 + 7\,020 + 13\,500 + 3\,930 = 42\,000$

Agio TTC = $42\,000 \times 1,15 = 48\,300F$

La valeur nette escomptée = $2\,700\,000 - 48\,300 = 2\,651\,700 F$

Exercice 2 : Un effet à échéance le 07 juin est escompté le 17 avril aux conditions suivantes : escompte 7,2% ; endos 3% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 3 810 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 4 113 750 F. Calculer la valeur nominale de l'effet.

Solution :

Le nombre de jour : du 17 avril au 07 juin soit **51 jours**

Escompte = $V \times 7,2 \times 51 / 36\,000 = 0,0102 V$

Endos = $V \times 3 \times 51 / 36\,000 = 0,00425 V$

Com Prop = $V \times 0,25 \% = 0,0025 V$

Com fixe = 3 810

Agio hors taxe = $0,0102 V + 0,00425V + 0,0025 V + 3\,810$

Agio HT = $0,01695 V + 3\,810$

Agio TTC = $(0,01695 V + 3\,810) \times 1,15 = 0,0194925 V + 4\,381,5$

La valeur nette escomptée = $V - \text{Agio TTC} = 4\,113\,750$

$V - 0,0194925 V - 4\,381,5 = 4\,113\,750$ on trouve **$V = 4\,200\,000F$**

Exercice 3 : Un effet de 9 000 000F est escompté le 01^{er} mars, à n jours avant son échéance aux conditions suivantes : escompte 7,2% ; endos 3% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 2 750 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 8 839 000 F. Déterminer la date d'échéance de l'effet.

Réponse : on trouve $n = 45$ jours après le 01^{er} mars soit **le 15 avril**.

Exercice 4 : Un effet de 7 200 000F est escompté à 60 jours avant son échéance aux conditions suivantes : escompte $t\%$; endos 2,1% ; commission proportionnelle 0,25%, commission fixe 4 800 F ; taxe 15%.

La valeur nette escomptée est de 7 075 800 F. Calculer le taux d'escompte.

Réponse : on trouve **$t = 5\%$** .

Sujets d'examen sur les équivalences

Exercice 1 : un effet de 90 000F payable dans 30 jours est remplacé un nouvel effet payable dans 60 jours. Au taux de 7,2% calculer la valeur nominale du nouvel effet.

Solution : $90\,000 - \frac{90\,000 \cdot 7,2 \cdot 30}{36\,000} = V - \frac{V \cdot 7,2 \cdot 60}{36\,000} \rightarrow V = 90\,545\,F$

Exercice 2 : un effet de 180 000F échéant le 30 avril est remplacé par un effet 180 685,28 F à échéance le 15 mai. Au taux de 9% déterminer la date d'équivalence.

Solution :

$180\,000 - \frac{180\,000 \cdot 9 \cdot n}{36\,000} = 180\,685,28 - \frac{180\,685,28 \cdot 9 \cdot (n+15)}{36\,000} \rightarrow n = 45 \text{ jours avant le } 30 \text{ avril. Date d'équivalence : } 16 \text{ mars.}$

Exercice 3 :

Trois paiements de 120.000F dans 100 jours ; 150.000F dans 180 jours et 210.000F dans 240 jours sont remplacés par deux nouveaux paiements de même valeur nominale payable respectivement dans 30 jours et 45 jours. Au taux de 6% calculer la valeur nominale commune.

Exercice 4 :

Pour remplacer un effet nominal égal à 260 000F revenu impayé, le créancier tire un nouvel effet 60 jours d'échéance.

Quelle devrait être la valeur nominale du nouvel effet, sachant que le produit net de la négociation permet de recouvrir le montant de l'effet impayé ? (3pts)

Conditions de négociation :

- Taux 12% - commission d'endos 0,60% - frais fixe 450F

Corrigés :

Soit V la valeur nominale du nouvel effet

Le produit net de la négociation PNN = V – Escompte – endos – frais fixes

$$PNN = V - \left(\frac{V \cdot 12 \cdot 60}{36\,000} \right) - \left(\frac{V \cdot 0,60 \cdot 60}{36\,000} \right) - 450 = 0,979 V - 450$$

On pose PNN = 260 000 $\rightarrow 0,979 V - 450 = 260\,000 \rightarrow V = 266\,037\,F$

Exercice 5 : Mr X commerçant se rend compte que l'effet de 242 800F est un effet impayé. Il propose alors à l'acheteur qui l'accepte, de créer une nouvelle traite de valeur nominale 250.000F, ayant n jour à couvrir et qui, négociée à la banque dans les conditions ci-dessous procure une valeur nette escomptée permettant de recouvrir : le nominal de l'effet impayé 242 800F et des frais et intérêts de retard s'élevant à 2 025F.

Conditions : escompte 7,2% ; endos 0,72% commission fixe 1200F ; TAF 15%.

Quelle est l'échéance de cette nouvelle traite ?

Solution :

$$\text{Agio HT} = \frac{250\,000 \cdot 7,2 \cdot n}{36\,000} + \frac{250\,000 \cdot 0,72 \cdot n}{36\,000} + 1\,200 = 55n + 1\,200$$

$$\text{Agio TTc} = \text{Agio HT} \cdot 1,15 = 63,25 n + 1\,380$$

$$V1 + \text{frais} = V2 - \text{Agio TTC}$$

$$242\,800 + 2\,025 = 250\,000 - 63,25 - 1\,380$$

Module : Maths financières au BAC – 2018

Exercice 1 : BAC – juin 2017

Un capital est partagé entre trois personnes :

- La première personne a reçu le tiers du capital ;
- La deuxième personne a reçu le quart du capital ;
- La troisième a reçu le cinquième du capital.

Après il est resté une somme de 26 000F.

1.-) Détermine le capital ;

2.-) Quelle est la part de chacune des trois personnes ?

3.-) Le 31/03/2017, on place la part de la première personne à 6,5% échéant le 15/05/2017, la part de la deuxième personne à 7,2% échéant le 20/06/2017 et la part de la troisième à 8% échéant le 29/06/2017.

a.-) Calcule l'intérêt total produit.

b.-) Calcule la valeur acquise totale produite

Exercice 2 : BAC – 2016 / Mathématiques / TS éco 4 points

Le 1^{er} janvier 2010 Mamadou a placé 120 000F à intérêts composés, au taux de 9%.

On note C_n le capital au 1^{er} janvier (2010 +n)

1°/ Calculer C_1 puis établissez la relation entre C_n et C_{n+1} . Déduisez en C_n en fonction de n

2°/ Au 1^{er} janvier 2017 Mamadou aura besoin de 400 000F pour acheter une moto. Le capital qu'il possèdera sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ? Sinon combien devra-t-il emprunter ?

3°/ A quel taux aurait-il dû placer son capital le 01^{er} janvier 2010 pour disposer des 400 000F au 01^{er} janvier 2017 ?

Exercice 3 : BAC – 2016 / Mathématiques / TS éco

Le 15 juin trois effets :

- 87 000 F à échéance du 21 juillet ;
- 99 000 F à échéance du 04 août ;
- 109 000F à échéance du 03 juillet,

Sont remplacés par un effet à échéance du 13 juillet ; taux 9%

Quelle est la valeur nominale de l'effet unique ?

Exercice 4 : BAC – 2015

Une somme de 3 000 000 F est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1-/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ? (2pts)

2-/ Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 7 247 295 F, quelle somme doit-on placer aujourd'hui, au taux de 10% ? (1pt)

3-/ La somme d'aujourd'hui, 3 000 000 F au taux de 10%, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 7 781 227 F ? (1pt)

4-/ Si au bout de 3 ans la valeur acquise du placement est de 3 149 280 F à quel taux le placement a été effectué ? (2pts)

Exercice 5 : BAC – 2014

Mme Touré place 2 500 000 Fcfa en 2010 dans une banque au taux d'intérêt composé annuel de 10%.

1-/ Déterminer l'avoir de Mme Touré dans son compte en 2011 (au bout d'une année) ; en 2012 (au bout de deux ans); en 2013 (au bout de trois ans).

2-/ Soit U_n le montant que Mme Touré aura au bout de n (n est le nombre d'années écoulées après 2010). Exprimer U_n en fonction de n .

Exercice 6 :

Un débiteur a accepté trois traites :

6 800 F au 31 mai

4 700 F au 30 juin

8 400 F au 31 juillet

Le 12 mai, il demande à son créancier de les remplacer par un effet unique payable le 15 juillet. De commun accord, le créancier et le débiteur fixent la date au 15 juin.

1.-) Procéder au décompte des jours

2.-) Déterminer les valeurs acquises ou actuelles des traites par rapport à la date d'équivalence.

3.-) Ecrire l'équation d'équivalence

4.-) Déterminer la valeur nominale de l'effet unique de remplacement.

Taux d'intérêt annuel 12%.

Exercice 7 :

1.-) Calculer la valeur acquise A par un capital C de 10000 FCFA, placé à intérêt composé au taux $i = 10\%$ au bout de 10 ans.

2.-) Calculer la valeur acquise B dans les mêmes conditions mais à intérêt simple.

3.-)) Au bout de combien de temps la valeur acquise à intérêt simple serait-elle égale à A ?

Exercice 8 :

1.-) Veuillez expliciter la différence entre intérêt simple et intérêt composé.

2.-) Définir le concept d'équivalence à intérêts simples de deux portefeuilles de capitaux.

3.-) Le 1^{er} février d'une année non bissextile, la société Performance se voit proposer par un de ses plus importants clients, le remplacement par un effet unique des cinq effets retracés dans le tableau ci-après :

Valeur nominale	Echéance
800 000 F	31 mars de la même année
600 000 F	24 avril de la même année
350 000 F	15 mai de la même année
450 000 F	25 juin de la même année
400 000 F	20 juillet de la même année

Déterminez la valeur nominale de l'effet de remplacement, sachant qu'il échoit le 5 juillet de la même année. Le taux d'intérêt annuel est de 13%. L'année est comptée pour 360 jours.

Exercice 9 :

Un commerçant emprunte le 2 janvier 2006 une somme au taux d'intérêt annuel composé de 10%, qu'il s'engage à rembourser au bout de trois ans suivant le schéma ci-après :

2 janvier 2007 : 5 000 000

2 janvier 2008 : 5 600 000

2 janvier 2009 : 1 100 000

Travail à faire

1.-) Veuillez déterminer la somme empruntée par le commerçant le 2 janvier 2006.

2.-) Veuillez calculer de deux façons différentes, le montant de la dette restant dû immédiatement après le paiement de l'annuité effectuée le 2 janvier 2007 par l'emprunteur.

Exercice 10 :

1.-) Un artisan dépose en banque la somme de 500 000 FCFA à l'occasion de ses vingt-six (26) ans. Deux ans plus tard, il retire 320 000 FCFA du compte.

Le jour de ses 30 ans, il y verse la somme de 10 000 FCFA ce qui porte le solde du compte à 320 000 FCFA. Quel est le taux d'intérêt annuel ? (intérêts composés).

2.-) Un emprunteur a la possibilité de rembourser la somme de 2 500 000

FCFA le 1er Avril 2007 ou de verser une série de cinq annuités constantes espacées d'un an. Sachant que le premier versement intervient le 1er Janvier

2006 et que le taux d'intérêt annuel est de 8 %, quelle est la valeur de l'annuité qui rend ces deux modes de remboursement équivalents?

Exercice 11 :

Une banque propose, pour un placement de 100.000 FCFA, un taux d'intérêt annuel de 4 % auquel s'ajoute une prime constante de 5.000 FCFA versée à la fin de chaque année. On note C_0 le capital initial et C_n le capital obtenu à la fin de la nième année.

1- Calculer C_1 et C_2 . Etablir la relation entre C_n et C_{n+1} . Exprimer C_n en fonction de n .

2- Calculer C_{10} et C_{20} . A partir de quelle année C_n sera-t-il supérieur au triple du capital initial C_0 ?

Exercice 12 :

A.-)

Ella souhaiterait avoir 5 millions d'économies sur son compte au bout de 3 ans. Si le Compte d'épargne paie 9% d'intérêts composés sur une base mensuelle, combien devra-t-elle déposer aujourd'hui afin d'atteindre son objectif d'épargne au bout des 3 ans ?

B.-)

Un organisme A achète un titre à durée perpétuelle de coupon 4,5%, pour un nominal de 100. Avec un taux de rendement de 8%, quelle serait la valeur de ce titre aujourd'hui?

C.-)

Pour un achat, on vous propose les deux modes de paiement suivants :

- 15 mensualités à terme échu de 800 UM chacune ;
- 12 mensualités de début de période de 1 000 UM chacune.

Quel mode de paiement doit-on choisir pour un taux d'intérêt annuel équivalent de 12%?

NB : UM = Unité Monétaire

Exercice 13 :

Trois effets de commerce ont des valeurs nominales en progression arithmétique. Les échéances sont respectivement le 01-09 ; le 01-10 et le 31-10.

La somme des valeurs nominales des trois traites est 270 000F et leur échéance moyenne est le 11-10. Calculer les valeurs nominales des trois effets.

Exercice 14 :

Un effet de commerce a été escompté à 30 jours de son échéance au taux de 12%. L'escompte commercial et l'escompte rationnel ont une différence de 10,8F.

1/ Calculer l'escompte commercial et l'escompte rationnel ;

2/ calculer le capital placé.

Exercice 15 :

Le 1^{er} mars le commerçant présente les effets suivants à l'escompte :

506 250 F à échéance le 31 mars ;

337 500 F à échéance le 15 avril ;

225 000 F à échéance le 30 avril ;

150 000 F à échéance le 15 mai.

Conditions :

Escompte $t\%$; Endos 3% ; Commission proportionnelle : 0,2% ; pas de taxe.

1/ Présenter le bordereau d'escompte, tout en faisant ressortir le net en fonction de t .

2/ Calculer le taux d'escompte t sachant que le commerçant a reçu un net de 1 199 468,75F ;

Exercice 16 :

Trois capitaux en progression géométrique ont pour somme 910 000F.

1.-) Calcule ces trois capitaux sachant que le 3^{ème} capital dépasse le 1^{er} capitaux de 110 000F.

2.-) On place ces même capitaux à des taux respectifs T_1 , T_2 , T_3 proportionnels aux nombres 1 ; 1,5 ; 2,5 pendant les durées respectives 63 jours, 75 jours et 90 jours. La somme des intérêts est 14 500F. Calcule les 3 taux.

3.-) Le 1^{er} capital placé à n_1 donne une valeur acquise de 253 000F. Calcule la durée n_1 ;

4.-) La 3^{ème} valeur acquise dépasse la 2^{ème} acquise de 66 000F. Calcule la durée commune.

Exercice 17 :

Pour constituer un capital, un commerçant fait n versements réguliers de montant x chacun au taux i pour 1F par an.

a) Etablir la formule donnant la valeur acquise A_n en fonction de x , n et i .

b) Calculer la valeur acquise A_n sachant qu'on fait 20 versements annuels de 50 000F chacun au taux de 3% le semestre.

c) Pour constituer le capital de 16 500 000F ce commerçant fait des versements annuels de 2 420 000F chacun au taux de 9% l'an.

- Comment choisir le nombre d'annuités nécessaires pour constituer ce capital ?

- Déterminer le taux qu'il faut pour constituer exactement ce capital en 6 versements.

Exercice 18 :

Un Capital C est placé à intérêts composés pendant n années au taux i .

- L'intérêt produit la 3^{ème} année est 1 511 654,4F

- L'intérêt de la 7^{ème} année est 2 056 589,13F

- La dernière valeur acquise est 27 979 670F.

Calculer : a.-) i ; C et n b.-) l'intérêt produit au bout de 10 ans.