

INTERETS COMPOSES**DEFINITIONS ET FORMULES :**

Définitions	Formules
La valeur acquise : En intérêts composés la valeur acquise se calcule d'année en année et les valeurs acquises ou intérêts successivement calculés jusqu'à la fin de la durée forment une progression géométrique de raison $(1 + i)$ C_n est notée la valeur acquise ; C_0 est le capital initialement placé ; i est le taux d'intérêt pour 1 f (c'est-à-dire $\frac{t}{100}$) n est le nombre de période (année, semestre, trimestre...).	au bout de 1 an $C_1 = C_0 + C_0 i$ $C_1 = C_0(1 + i)^1$ au bout de 2 ans $C_2 = C_0(1 + i)^1 + C_0(1 + i)$ $C_2 = C_0(1 + i)^2$ au bout de 3 ans $C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)$ $C_3 = C_0(1 + i)^3$ au bout de n années de placements $C_n = C_0(1 + i)^n$
L'intérêt produit au bout de n années : Il représente l'intérêt total produit à la fin du placement ou des n premières années de placement. L'intérêt produit au cours de la $n^{\text{ième}}$ année : Il représente l'intérêt produit d'une seule année. A ne pas confondre avec la formule précédente qui calcule l'intérêt de plusieurs années. L'intérêt produit entre k et p périodes : Il représente l'intérêt total produit entre deux années données ou des n dernières années de placement.	$I_n = C_n - C_0 \Leftrightarrow \mathbf{I_n = C_0[(1 + i)^n - 1]}$ $I_{n^{\text{ième}}} = C_n - C_{n-1} \Rightarrow \mathbf{I_{n^{\text{ième}}} = C_0 i (1 + i)^{n-1}}$ $I_{k \text{ à } p} = C_p - C_k \Rightarrow \mathbf{I_{k \text{ à } p} = C_0(1 + i)^p - C_0(1 + i)^k}$
Taux équivalent : On appelle taux équivalent le taux correspondant à des périodes de capitalisations différents, mais produisant le même intérêt total ou la même valeur acquise pour un capital C_0 pendant une durée bien déterminée.	1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois = 360 jours $(1 + ia)^1 = (1 + is)^2 = (1 + it)^4 = (1 + im)^{12} = (1 + iq)^{360}$
Taux proportionnel : On dit que deux taux sont proportionnels quand leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes de capitalisation respectives.	1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois = 360 jours $ia = 2 \times iap = 4 \times itp = 12 \times imp = 360 \times iqp$
La valeur acquise selon la méthode commerciale : Pour cette méthode, il faut convertir la durée de placement conformément à la période de capitalisation. La valeur acquise selon la méthode logarithmique : Elle est appliquée à partir de la formule fondamentale	$C_{n+\frac{p}{q}} = C_0(1 + i)^{n+\frac{p}{q}}$ $\log C_{n+\frac{p}{q}} = \log C_0 + \left(n + \frac{p}{q}\right) \log(1 + i)$

**La valeur acquise selon la méthode****rationnelle :**

Elle consiste à calculer d'abord la valeur acquise par le capital à intérêt composé au bout de n périodes (la partie entière), puis considérer cette valeur acquise comme un nouveau capital et placer celle-ci à intérêt simple pendant le reste du temps (partie décimale). Tout se passerait comme si la durée n est à intérêts composés et $\frac{p}{q}$ à intérêts simples

La valeur acquise selon la méthode**d'interpolation linéaire :**

Elle consiste à écarter la durée $n + \frac{p}{q}$ par les nombres entiers n et $n + 1$ après avoir calculé les valeurs acquises correspondantes à ces durées, on procède par extrapolation linéaire pour calculer le $C_{n+\frac{p}{q}}$

Les procédés commercial et logarithmique donnent le même résultat et les procédés rationnel et interpolation donnent le même résultat.

$$C_{n+\frac{p}{q}} = C_n + C_n \times i \times \frac{p}{q}$$

$$C_{n+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^n + C_0(1+i)^n \times i \times \frac{p}{q}$$

$$n < n + \frac{p}{q} < n + 1$$

$$C_n < C_{n+\frac{p}{q}} < C_{n+1}$$

$$C_{n+\frac{p}{q}} = C_n + \frac{p}{q} [C_{n+1} - C_n] \quad \text{ou encore}$$

$$C_{n+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^n + \frac{n}{p} [C_0(1+i)^{n+1} - C_0(1+i)^n]$$

EXERCICES D'APPLICATIONS :**EXERCICE 1 :**

Soit un capital de 2 000 000 F CFA placé à intérêts composés à 6 % de la 1^{ère} à la 5^{ème} année et de 8% de la 6^{ème} à la 12^{ème} année ; capitalisation annuelle.

1. Calculer la valeur acquise par le capital à la fin de 12 ans de placement ;
2. Calculer l'intérêt du capital ;
 - a) Pendant les 7 premières années ;
 - b) Au cours de la 9^{ème} année ;
 - c) Pendant les 4 dernières années.

SOLUTION :

$C_0 = 2\,000\,000$; taux variables = 6% et 8% ; $n_1 = 5$ ans ; $n_2 = 7$ ans

1. Calculons la valeur acquise au bout de 12 ans placement

$$C_n = C_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \Leftrightarrow C_{12} = 2\,000\,000(1+0,06)^5(1+0,08)^7$$

$$C_{12} = 4\,586\,966,67 \text{ F CFA}$$

2. Calculons l'intérêt du capital

a) Pendant les 7 premières années :

$$I_7 = 2\,000\,000[(1,06)^5(1,08)^2 - 1] \Rightarrow I_7 = 1\,121\,812,627 \text{ FCFA}$$

b) Au cours de la 9^{ème} année

Ne pas confondre avec l'intérêt de 9 ans, ici il s'agit de calculer produit au cours de la 9^{ème} seulement et non l'intérêt produit pendant les 9 années de placement.

$$I_{n^{\text{ième}}} = C_n - C_{n-1} \Leftrightarrow I_{9^{\text{ième}}} = C_9 - C_8$$

$$C_9 = 2\,000\,000(1,06)^5(1,08)^4 \Rightarrow C_9 = 3\,641\,282,249$$

$$C_8 = 2\,000\,000(1,06)^5(1,08)^3 \Rightarrow C_8 = 3\,371\,557,638$$

$$I_{9^{\text{ième}}} = 3\,641\,282,249 - 3\,371\,557,638 \Rightarrow I_{9^{\text{ième}}} = 269\,724,611 \text{ F CFA}$$

c) Pendant les 4 dernières années ($I_{12} - I_9$)

$$I_{4 \text{ dernières}} = 2\,000\,000[(1,06)^5(1,08)^7 - 1] - 2\,000\,000[(1,06)^5(1,08)^3 - 1]$$

$$I_{4 \text{ dernières}} = 1\,215\,410 \text{ F CFA}$$

EXERCICE 2 :

Un capital de 100 000 est placé pendant 12 ans. Calculer la valeur acquise sachant que le taux est variable à 5 % pour les 4 premières années, 6,5% les 5 années suivantes, 6% le reste du temps

SOLUTION :

$$C_0 = 100\,000 ; i_1 = 0,05 \quad n_1 = 4 \text{ ans ;}$$

$$i_2 = 0,065 \quad n_2 = 5 \text{ ans ;}$$

$$i_3 = 0,06 \quad n_3 = 3 \text{ ans.}$$

$$C_{12} = 100\,000(1,05)^4(1,065)^5(1,06)^3 \Rightarrow C_{12} = 198\,346$$

EXERCICE 3 :

M. Bréhima place à l'intérêt composé un capital C à un certain taux i. Le rapport entre les deux valeurs acquises à la fin de la 10^{ème} année et la valeur acquise à la fin de la 5^{ème} année est de 1,538624. La valeur acquise à la fin de la première année s'élève à 3 270 000 F.

Calculer :

1. Le taux annuel et le taux semestriel équivalent ;
2. Le capital placé ;
3. L'intérêt produit au cours de 6 derniers mois.

SOLUTION :

$$C_0 = ? ; \frac{C_{10}}{C_5} = 1,538624 ; C_1 = 3\,270\,000$$

1. Le taux annuel de capitalisation et le taux semestriel

$$\frac{C_{10}}{C_5} = 1,538624 \Leftrightarrow \frac{C_0(1+i)^{10}}{C_0(1+i)^5} = 1,538624 \Leftrightarrow \frac{C_0(1+i)^5(1+i)^5}{C_0(1+i)^5} = 1,538624$$

$$(1+i)^5 = 1,538624 \Leftrightarrow i = (1,538624)^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow i = 0,09$$

Taux semestriel équivalent

$$(1+ia)^1 = (1+is)^2 \Leftrightarrow is = (1+ia)^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow is = (1,09)^{\frac{1}{2}} - 1 \text{ soit } 0,04403$$

2. Le capital placé

$$C_1 = C_0(1+i) \Leftrightarrow C_0 = \frac{C_1}{1+i} \Leftrightarrow C_0 = \frac{3\,270\,000}{1+0,09} \Rightarrow C_0 = 3\,000\,000$$

3. L'intérêt produit au cours de 6 derniers mois.La durée totale est de 10 ans soit $(10 \times 2 = 20)$ semestresAlors l'intérêt de 6 derniers mois est $C_{20} - C_{19}$ avec $i = 0,04403$

$$I_{6 \text{ derniers mois}} = 3\,000\,000(1,04403)^{20} - 3\,000\,000(1,04403)^{19}$$

$$I_{6 \text{ derniers mois}} = 299\,514$$

EXERCICE 4 :

Compléter le tableau suivant :

C_n	C_0	i	I_n	n
?	400 000 F	10% l'an	?	60 mois
749 406,3235 F	?	? le semestre	189 406,3235 F	2 ans 6 mois
?	1 000 000 F	? l'an	967 151,3570 F	40 trimestres

NB : Les calculs doivent être justifiés.**SOLUTION :****A CHERCHER****EXERCICE 5 :**Un capital est placé à intérêts composés. Les valeurs acquises à la fin de la 8^{ème} année et celle de la 3^{ème} année sont dans le rapport 1,276282.1. Calculer le taux i ;

2. Quel est le capital placé si à la fin de la 8^{ème} année il est devenu 1 181 964 F ;
3. Calculer l'intérêt produit la 1^{ère} année, la 8^{ème} année ;
4. Calculer l'intérêt total produit à la fin du placement.

SOLUTION :

A CHERCHER

ESERCICE 6 :

Un capital de 1 000 000 F est placé à intérêts composés. On appelle C_n la valeur acquise après une année de placement. C_1 , C_2 , C_5 vérifient les relations suivantes :

$$C_1 + C_5 = 2\,398\,226 \quad \text{et} \quad C_2 + C_5 = 2\,461\,826$$

- 1) Calculer le taux i .
- 2) Calculer l'intérêt produit la 7^{ème} année, sachant que l'intérêt produit la dernière année est de 101 368,74 ; calculer la durée du placement.

SOLUTION :

A CHERCHER



Seydou DIALLO

