

NOTION D'INTERETS SIMPLES

REVISION :

Exercice 1 : Une personne décide de placer un capital de 100 000 FCFA qui apporte 8% d'intérêt composés par an. Le premier dépôt est effectué le 1^{er} janvier 2011. Les intérêts sont versés le 31 décembre de l'année en cours (les premiers intérêts seront le 31 décembre 2011). On appelle (C_n) le capital disponible au 1^{er} janvier de l'année (2011+n). Ainsi, $C_0 = 100\,000$.

- Calcule C_1, C_2 .
- Quelle est l'expression de C_{n+1} en fonction C_n .
- En déduire que la suite (C_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
- Donner l'expression de (C_n) en fonction de n et C_0 .
- Quel sera le capital disponible au 1^{er} janvier 2022 ? (résultat arrondi aux centaines plus proche).

Exercice 1 : Un immeuble est composé de quatre appartements, de deux à cinq pièces, pour lesquels on a les renseignements suivants :

Nombre de pièces	2	3	4	5
Superficie (en m^2)	25	45	70	90
Loyer mensuel (en francs)	75 000	135 000	210 000	270 000

- Le loyer est-il proportionnel : au nombre de pièces ? A la superficie ?
- Les dépenses annuelles de l'électricité pour l'immeuble s'élèvent à 1 820 000 FCFA. Cette somme est répartie proportionnellement au nombre de pièces. Calculer la part de chaque appartement.

II. GENERALITES

1. Vocabulaire de l'intérêt simple

Un emprunt ou prêt : est une dette contractée sur le marché des capitaux par une personne à des conditions fixées d'avance (durée, taux d'intérêt, ...)

Un emprunteur ou débiteur : une personne qui contracte un emprunt.

Un prêteur ou créancier : une personne dont le métier est le commerce de l'argent. Personne qui consent un prêt.

Un intérêt : est une somme d'argent que le débiteur paie au créancier en rémunération de l'usage de l'argent prêté.

Une année commerciale : est une année dans laquelle chaque mois compte 30 jrs soit $12 \times 30 = 360$ jrs.

Une année civile : est une année dans laquelle tous les mois sont comptés à leur juste valeur soit 365 ou 366 jrs ;

Une année bissextile : est une année qui compte 366 jours et donc dans laquelle le mois de février compte 29 jours.

2. Facteurs d'intérêts

Les trois facteurs essentiels déterminant le coût de l'intérêt sont :

- la somme prêtée ou capital C (en F CFA) ;
- le temps mis ou la durée du prêt n (en jours, mois ou années) ;
- et le taux auquel cette somme est prêtée t (en %).

3. Formule fondamentale de l'intérêt simple

L'intérêt simple est calculé comme étant proportionnel au capital placé C , au taux d'intérêt t et la durée du prêt n . L'intérêt global produit I est donné par la relation : $I = Ctn$ ou $I = \frac{Ctn}{100}$, avec n en années et t en pourcentage.

Remarque :

- S'il est donné en mois la durée on aura : $I = \frac{Ctn}{1200}$.
- Si la durée de placement est exprimée en jours (en prenant en considération une année commerciale de 360 jours). Dans ce cas l'intérêt est : $I = \frac{Ctn}{36000}$

Application : Soit un capital de 25 000 F placé au taux de 12% :

- Pour une période de 150 jours ;
- Pour une période de 5 mois ;
- Pour une période de 2 ans. Quel est l'intérêt produit selon les 3 cas ?

4. Formules de calculs

La formule générale de calcul de l'intérêt simple met en jeu les quatre quantités I , C , t , n , qui supposent donc la résolution de quatre problèmes différents. Trois de ces quatre quantités sont connues, le problème consiste à calculer le 4^{ème}. Ainsi, on a : $I = \frac{Ctn}{100}$; $C = \frac{100I}{tn}$; $t = \frac{100I}{Cn}$; $n = \frac{100I}{Ct}$.

5. Valeur acquise

On appelle valeur acquise par un capital placé pendant un certain temps, la valeur du capital augmentée des intérêts à la fin de la période de placement. Soit V la valeur acquise, on écrit :

$$V = C + I = C + \frac{Ctn}{100} = c(1 + \frac{tn}{100})$$

Application₁ : calcule la valeur acquise par un capital de 450 000 F, placé à 10% pendant 80 jours.

Application₂ : Quel est le capital placé à 12 % pendant 25 mois acquière la valeur de 150 000 F?

Application₃ : Complète le tableau suivant en justifiant les calculs

Capital	Taux d'intérêt	Durée de placement	Intérêts	Valeur acquise
30 000 F	8%	2 mois	 F	 F
..... F	6%	90 jours	3 600 F	 F
..... F		5 quinzaines	5 850 F	455 850 F
250 000 F	3%	 ans	... F	263 750 F
80 000 F	10%	5 trimestres	 F	 F

III. REPRESENTATION GRAPHIQUE

1. Représentation de l'intérêt

L'intérêt simple est une fonction linéaire croissante du capital placé, ainsi que du taux, et aussi que la durée de placement.

Exemple 1 : représente graphiquement la variation, en fonction de la durée de placement n exprimée en mois, de l'intérêt produit par le placement d'un capital de 30 000 F, à 8%.

Exemple 2 : un capital de 270 000F est placé, au taux 10%, pendant n jours. Exprime l'intérêt Y en fonction de la durée n .

Interprétation graphique

La fonction de l'intérêt est $I(n) = \frac{30000 \cdot 8 \cdot n}{1200} = 200n$

Le tableau des valeurs

n	0	1	5	10	20
I	0	200	1000	2000	4000

2. Représentation de la valeur acquise

La valeur acquise par un capital est fonction affine croissante du capital placé, ainsi que du taux, et aussi que la durée de placement, quel que soit l'unité.

Exemple : représente graphiquement la variation, en fonction de la durée de placement n exprimée en mois, de l'intérêt produit par le placement d'un capital de 2 000 F, à 10%.

Synthèse partielle : Interprétation graphique

On écrit : $2000 + \frac{2000 \cdot 10 \cdot n}{1200} = 2000 + 200n$

n	0	5	10	20
V	2000	3000	4000	8000

IV. DETERMINATION DES TAUX DE PLACEMENT

1. Taux moyen de placement de plusieurs capitaux

Le taux moyen de placement est le taux unique t qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leur durée respective conduirait au même intérêt total.

L'intérêt total de ces placements est égal à $I = \frac{C_1 t_1 n_1}{36000} + \frac{C_2 t_2 n_2}{36000} + \frac{C_3 t_3 n_3}{36000} = \frac{C_1 t_1 n_1 + C_2 t_2 n_2 + C_3 t_3 n_3}{36000}$.

Avec le taux moyen l'intérêt est $I = \frac{C_1 t n_1}{36000} + \frac{C_2 t n_2}{36000} + \frac{C_3 t n_3}{36000} = \frac{C_1 t n_1 + C_2 t n_2 + C_3 t n_3}{36000}$.

La relation d'équivalence est la suivante : $\frac{C_1 t n_1 + C_2 t n_2 + C_3 t n_3}{36000} = \frac{C_1 t_1 n_1 + C_2 t_2 n_2 + C_3 t_3 n_3}{36000}$

Déduction de t : $\frac{C_1 t_1 n_1 + C_2 t_2 n_2 + C_3 t_3 n_3}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3}$ où de façon générale on a : $t = \frac{\sum_{i=1}^n C_i t_i n_i}{\sum_{i=1}^n C_i n_i}$.

Nb : les n_i doivent être exprimées de la même période.

Application :

1. calcule le taux moyen des placements suivants :

- $C_1=50\ 000$, $t_1=6\%$ et $n_1=75$ jours ;
- $C_2=90\ 000$, $t_2=7\%$ et $n_2=2$ mois ;
- $C_3=105\ 000$, $t_3=7,2\%$ et $n_3=100$ jours.

2. calcule le taux moyen des placements suivants :

- $C_1=75\ 000$, $t_1=4\%$ et $n_1=3$ mois ;
- $C_2=40\ 000$, $t_2=6\%$ et $n_2=4$ mois ;
- $C_3=25\ 000$, $t_3=8\%$ et $n_3=6$ mois.

2. Taux effectif de placement ou intérêt précompté

L'intérêt est précompté lorsqu'il est payé en avance (ou le jour du placement).

Il est appelé capital effectivement engagé (**Ce**) la différence entre le capital initial et les intérêts produits. On peut écrire que : **Ce = C - I**.

On appelle taux effectif de placement, le **taux t_e** qu'il faut appliquer au capital effectivement engagé pendant sa durée réelle de placement pour obtenir le même intérêt I qu'avec le taux réel appliqué au capital initial.

On peut écrire que : $I = \frac{C_e t_e n}{100} \Rightarrow t_e = \frac{100I}{C_e n}$.

En utilisant la relation d'équivalence on obtient une autre expression de t_e : avec

$$\frac{C_e t_e n}{100} = \frac{C t n}{100} \Leftrightarrow \left(C - \frac{C t n}{100} \right) \cdot t_e \cdot n = C t n \Rightarrow t_e = \frac{100 t}{100 - t n}$$

☞ $t_e = \frac{100 t}{100 - t n}$ si la durée est exprimée en années ;

☞ $t_e = \frac{1200 t}{1200 - t n}$ si la durée est exprimée en mois ;

☞ $t_e = \frac{36000 t}{36000 - t n}$ si la durée est exprimée en jours.

Application : une personne place à l'intérêt précompté 500 000 F pour dix mois au taux de 12%. Calcule de deux façons différentes le taux effectif de placement.

3. Taux proportionnel

Considérons une période divisée en P sous périodes. Si t est le taux intérêt appliqué à la période alors t_p serait le taux pour les sous périodes. L'expression de t_p est le taux proportionnel au taux de la période p . on peut écrire que : $\frac{t}{t_p} = \frac{12}{P} \Rightarrow t_p = \frac{t}{P}$.

En d'autre terme si nous prenons t annuel on aura : 2 pour le semestre, 4 pour le trimestre, 12 pour le mois, 24 pour les quinzaines, 6 pour les bimestres ou 4 pour les quadrimestres.

Périodes	Taux semestriel	Taux trimestriel	Taux mensuel	Taux bimestriel
Taux annuel	$T_p = \frac{t}{2}$	$T_p = \frac{t}{4}$	$T_p = \frac{t}{12}$	$T_p = \frac{t}{6}$

Application

- Quel est le taux trimestriel proportionnel à 10% ?
- Quel taux annuel avec le taux semestriel de 3,75% ?
- Trouve le taux mensuel proportionnel du taux annuel de 14,4%.

V. COMPARAISON DE L'INTERET COMMERCIAL ET DE L'INTERET CIVIL

☞ L'intérêt commercial I est l'intérêt calculé en comptant l'année à 360 jours, $I = \frac{C t n}{36000}$.

☞ L'intérêt civil I' est l'intérêt calculé en comptant l'année à 365 jours, $I' = \frac{C t n}{36500}$.

Pour les comparer, on calcule leur la différence. On a : $I - I' = \frac{C t n}{36000} - \frac{C t n}{36500} = \frac{500 C t n}{36000 \times 36500} = \frac{I'}{72}$. En conclusion on a : $I - I' = \frac{I'}{72} \Rightarrow I = \frac{73 I'}{72}$ ou $I' = \frac{72 I}{73}$.

Application 1 :

La différence entre l'intérêt commercial et l'intérêt civil d'un capital placé à 9% pendant 73 jrs est égale à 750 F. Calcule ce capital. 54 750.

Application 2 : reprend cet exemple si la différence est 300 F, $n = 146$ jours et $t = 12\%$.

VI. METHODE DES NOMBRES ET DES DIVISEURS FIXES

Principe : on part de la formule $\frac{Ctn}{36000}$, divisons par t les deux membres, on obtient : $\frac{\frac{Ctn}{t}}{36000} = \frac{Cn}{\frac{36000}{t}}$. Posons $\frac{36000}{t} = D$ (*diviseur fixe*) et $Cn = N$ (*nombres*), la formule devient $I = \frac{N}{D}$.

Exemple 1 : calcule l'intérêt de 915460 F, placé à 8% pendant 31 jours

Exemple 2 : Quel est l'intérêt global des capitaux suivants placés à 12% : 60 000 pendant 45 jours, 40 000 pendant 69 jrs, 20 000 pendant 126 jrs, 15 000 pendant 263 jrs et 36 000 pendant 36 jrs ?

Complète le tableau ci-dessous.

C	n	N	$I = \frac{N}{D} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots}$ $I = \dots\dots\dots$
60 000	45		
40 000	69		
20 000	126		
15 000	263		
<i>Totaux</i>			

VI. Méthode du soixante ou méthode du Banquier

Première méthode : cette méthode consiste à calculer l'intérêt avec la durée $n = 60$ jrs et au taux de 6% puis à ramener l'intérêt à la durée donnée et au taux de demandé par la règle de trois successives.

Deuxième méthode : cette méthode consiste à calculer l'intérêt au taux 6% puis à ramener l'intérêt au taux demandé par la règle de trois successives.

Application 1 : calcule par la méthode de soixante, l'intérêt produit par un capital de 200 000 F pendant 45 jours au taux de 11%.

Solution

Méthode 1

$$I_1 = \frac{200\,000 \cdot 6 \cdot 60}{36\,000} = 2\,000;$$

60 jours $\rightarrow$ 2000

$$45 \text{ jours} \rightarrow I_2 \quad \text{Donc } I_2 = \frac{45 \times 2000}{60} = 1500$$

6% $\rightarrow$ 1500

$$11\% \rightarrow I \quad \text{Donc } I = \frac{11 \times 1500}{6} = 2\,750$$

$$\text{Vérification : } I = \frac{200\,000 \times 11 \times 45}{36\,000} = 2\,750.$$

Méthode 2

$$I_1 = \frac{200\,000 \cdot 6 \cdot 45}{36\,000} = 1500$$

6% $\rightarrow$ 1500

$$11\% \rightarrow I \quad \text{donc } I = \frac{1500 \times 11}{6} = 2\,750$$

Application 2 : Du 10/10/12 au 18/01/13, M. DELTA place un capital de 330 000 F au taux de 12%. Calcule l'intérêt produit par la méthode de soixante.