

Rappel des cours :

Nature de la suite	1 ^{er} terme	Terme général	Somme des termes	Sens de variation
Arithmétique	<i>est u_0</i>	$u_n = u_0 + nr$	$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$r > 0, u_n$ est croissante
	<i>est u_p</i>	$u_n = u_p + (n-p)r$	$S_n = \frac{n+1-p}{2}(u_p + u_n)$	$r < 0, u_n$ est décroissante
Géométrie	<i>est v_0</i>	$v_n = v_0 * q^n$	$S_n = v_0 * \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	$r = 0, u_n$ est constante
	<i>est v_p</i>	$v_n = v_p * q^{n-p}$	$S_n = v_p * \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}$	$q > 1, v_n$ est croissante
				$q < 1, v_n$ est décroissante
				$q = 1, v_n$ est constante

Sujets de suites numériques au baccalauréat TSéco**Exercice 1 [Bac 2014] : 5 points**

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

Pour tout entier naturel n , on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$

1- a-/ Calculer r_1 et r_2 . (0,5pt)

b-/ Justifier que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$. (0,5pt)

2-/ Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$. (0,5 pt)

a-/ Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)

b-/ Pour tout entier naturel n , exprimer (S_n) en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $r_n = 36\,000 * 0,95^n + 4\,000$. (1 pt)

c-/ La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier. (1 pt)

d-/ Déterminer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini. (1 pt)

e-/ Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011. (0,5pt)

Corrigé

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.

Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.

On note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$. On a alors $r_0 = 40\,000$

L'entreprise réduit chaque année de 5% la quantité de déchets qu'elle rejette par rapport à la quantité rejetée l'année précédente on a alors la raison $q = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$

1)

a) Calculons r_1 et r_2

$r_1 = r_0 * q + 200$ (On ajoute 200 par ce que l'entreprise produit 200 tonnes de nouveaux déchets par an)

$$r_1 = 40\,000 * 0,95 + 200 = \mathbf{38\,200. \text{ Soit environ } 38\,200 \text{ tonnes}}$$

$$r_2 = r_0 * q^2 + 200 \text{ ou } r_1 * q + 200 = 40\,000 * 0,95^2 + 200 = \mathbf{36\,300.}$$

Soit environ 36 300 tonnes

b) Justifions que pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = 0,95r_n + 200$

$$r_n = r_0 * q^n + 200 = 40\,000 * 0,95^n + 200$$

$$\text{Donc } r_{n+1} = 40\,000(0,95)^{n+1} + 200 = \underbrace{40\,000(0,95)^n}_{r_n}(0,95)^1 + 200$$

Remplaçons $40\,000(0,95)^n$ par r_n dans r_{n+1}

D'où pour tout entier naturel n , on a : $r_{n+1} = \mathbf{0,95r_n + 200}$

2) Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = r_n - 4\,000$

a) Démontrons que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Une suite est géométrique si et seulement si $\frac{S_{n+1}}{S_n} = q$

$$S_{n+1} = r_{n+1} - 4\,000 \Rightarrow S_{n+1} = 0,95r_n + 200 - 4\,000$$

$$S_{n+1} = 0,95r_n - 3\,800$$

$$\frac{0,95r_n - 3\,800}{S_n} = \frac{0,95\left(r_n - \frac{3\,800}{0,95}\right)}{r_n - 4\,000} = \frac{0,95(r_n - 4\,000)}{r_n - 4\,000} = 0,95$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 0,95 = q$$

Deuxième méthode

$$S_n = r_n - 4\,000 \Leftrightarrow r_n = S_n + 4\,000$$

$$S_{n+1} = 0,95r_n - 3\,800, \text{ remplaçons } r_n \text{ par sa valeur dans } S_{n+1}$$

$$\text{Donc } S_{n+1} = 0,95(S_n + 4\,000) - 3\,800 = \mathbf{0,95S_n + 3\,800 - 3\,800}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = \mathbf{0,95S_n} \text{ alors } S_n \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,95$$

Déterminons le premier terme

$$S_n = r_n - 4\,000 \text{ remplaçons } n \text{ par } 0$$

$$\text{Alors } S_0 = r_0 - 4\,000 = 40\,000 - 4\,000 = 36\,000$$

La suite S_n est une géométrique de raison $q = \mathbf{0,95}$ et de premier terme $S_0 = \mathbf{36\,000}$

b) Pour tout entier naturel n , exprimons (S_n) en fonction de n .

S_n étant une suite géométrique alors $S_n = S_0 * q^n$

$$S_n = \mathbf{36\,000 * 0,95^n}$$

En déduisons que, pour tout entier naturel n on a : $r_n = 36\,000 * 0,95^n + 4\,000$

$$S_n = r_n - 4\,000 \Leftrightarrow r_n = S_n + 4\,000$$

Remplaçons S_n par sa valeur dans r_n

$$\text{On obtient } r_n = \mathbf{36\,000 * 0,95^n + 4\,000}$$

c) Vérifions que la quantité de déchets rejetée diminue d'une année sur l'autre

D'après la question 1) a) on a :

- En 2007, la quantité d'ordure était de $r_0 = 40\,000$
 - En 2008, la quantité d'ordure était de $r_1 = 38\,200$
 - En 2009, la quantité d'ordure était de $r_2 = 36\,300$
- Donc d'après les calculs faites ci-dessus, on remarque que la quantité d'ordure détruite diminue d'une année sur l'autre.

Ainsi de manière générale : on sait que $r_{n+1} - r_n = 0,95 < 1$ alors la suite r_n est strictement décroissante, donc la quantité d'ordure rejetée diminue d'année sur l'autre.

- d) Déterminons la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 36\,000(0,95)^n + 4\,000, \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0 \text{ car } 0,95 < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 36\,000 * 0 + 4\,000 = 4\,000$$

- e) Calculons une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011. Cette estimation revient à calculer la quantité d'ordure qui sera détruite au bout de 4 ans ($2011 - 2007 = 4$), c'est-à-dire à calculer r_4 .
- $$r_4 = 36\,000 * 0,95^4 + 4\,000 = 33\,322,22 \approx 33\,322$$
- Donc la quantité de rejets en 2011 est estimée à 33 322 tonnes.

Exercice 2 [Bac 2018] : 4 points

Un concurrent sur le marché des calculatrices estime que, chaque année, ses efforts lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2015, il en a vendu 600 000.

On note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année $2015 + n$. On a donc $u_0 = 600$.

1. Montre, que pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$.
2. On pose $V_n = u_n - 200$.
 - a. Montre que la suite V_n est géométrique. Donne sa raison et son premier terme V_0 .
 - b. Exprime V_n en fonction de n . En déduis l'expression de V_n en fonction de n .
 - c. D'après ce modèle, combien de calculatrices cette entreprise vendra-t-elle en 2025 ?

Corrigé

Un concurrent sur le marché des calculatrices estime que, chaque année, ses efforts lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2015, il en a vendu 600 000.

On note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année $2015 + n$. On a donc $u_0 = 600$.

- 1) Montrons que pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$.

Chaque année les efforts du concurrent lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente, c'est qui veut dire que la raison $q = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

$$u_n = u_0 * q^n = 600(1,05)^n$$

Comment chaque la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes, donc

$$u_n = 600(1,05)^n - 10$$

$$u_{n+1} = 600(1,05)^{n+1} - 10 = \underbrace{600(1,05)^n}_{u_n} (1,05) - 10$$

Comme $u_n = 600(1,05)^n$ alors $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$.

- 2) On pose $V_n = u_n - 200$.

- a) Montrons que la suite V_n est géométrique.

V_n est une suite géométrique si et seulement si $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$

$$V_{n+1} = u_{n+1} - 200 \text{ en remplaçant } u_{n+1} \text{ on obtient } V_{n+1} = 1,05u_n - 10 - 200 \\ \Leftrightarrow 1,05u_n - 210$$

Donc $\frac{1,05u_n - 210}{u_n - 200} = \frac{1,05(u_n - \frac{210}{1,05})}{u_n - 200} = \frac{1,05(u_n - 200)}{u_n - 200} = 1,05$. Alors la suite V_n est une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $V_0 = u_0 - 200 = 600 - 200$
 $\Rightarrow V_0 = 400$

b) Exprimons V_n en fonction de n . En déduisons l'expression de V_n en fonction de n .

$$V_n = V_0 * q^n = 400(1,05)^n \Leftrightarrow V_n = 400(1,05)^n$$

$$V_n = u_n - 200 \Leftrightarrow u_n = V_n + 200, \text{ en remplaçant } V_n \text{ par sa valeur dans } u_n$$

$$\text{Donc } u_n = 400(1,05)^n + 200$$

c) D'après ce modèle, Déterminons le nombre de calculatrices que cette entreprise vendra en 2025.

$$n = 2025 - 2015 = 10 \text{ ans}, \text{ dans ce cas il s'agit de calculer } u_{10}.$$

$$u_{10} = 400(1,05)^{10} + 200 = 851,5578$$

u_{10} représente le nombre de milliers de calculatrices que l'entreprise vendra en 2025, on a donc $u_{10} = 851,5578 * 1\,000 \approx 851\,558$ calculatrices.

Exercice [Bac 2019] : 5 points

Un article paru dans le quotidien « Le Monde » en Novembre 2014 indique que le Brésil est parvenu à réduire la déforestation de l'Amazonie. Elle était de $27\,000 \text{ km}^2$ en 2004 et d'environ $4\,600 \text{ km}^2$ en 2011.

- 1) La ministre brésilienne de l'environnement déclarait que la déforestation avait baissé de 83% sur cette période. Est-ce vrai ?
- 2) Soit t le taux de diminution moyen annuel, exprimé en pourcentage, de la déforestation entre 2004 et 2011.

a) Montre que $\left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 = \frac{23}{135}$.

b) Détermine t . Interprète le résultat obtenu.

c) Estime la surface de déforestation en 2018 si cette évolution se poursuit à l'identique.

Corrigé

Un article paru dans le quotidien « Le Monde » en Novembre 2014 indique que le Brésil est parvenu à réduire la déforestation de l'Amazonie. Elle était de $27\,000 \text{ km}^2$ en 2004 et d'environ $4\,600 \text{ km}^2$ en 2011.

- 1) La ministre brésilienne de l'environnement déclarait que la déforestation avait baissé de 83% sur cette période. Est-ce vrai ?

Soit t le taux de diminution de la déforestation

1^{ère} Méthode :

$$4\,600 = 27\,000 \left(1 - \frac{t}{100}\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{4600}{27000} \text{ en simplifiant par 200 on obtient}$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{23}{135} \Rightarrow -t = \left(\frac{23}{135} - 1\right) * 100 = -82,96 \Rightarrow t = 82,96 \cong 83\%$$

2^{ème} Méthode :

$$t = \frac{\text{Valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} * 100 = \frac{4\,600 - 27\,000}{27\,000} * 100 = -82,96 \cong -83\% \text{ (une baisse de 83\%)}$$

3^{ème} Méthode :

$$\text{Coefficient multiplicateur } (C_M) = \frac{\text{Valeur finale}}{\text{Valeur initiale}} = \frac{4600}{27000} = \frac{23}{135}$$

$$t = (C_M - 1) * 100 = \left(\frac{23}{135} - 1\right) * 100 = -82,96 \cong 83\% \text{ (une baisse de 83\%)}$$

$t = 83\%$ donc la déclaration de la Ministre brésilienne de l'environnement est vraie.

- 2) Soit t le taux de diminution moyen annuel, exprimé en pourcentage, de la déforestation entre 2004 et 2011.

a) Montrons que $\left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 = \frac{23}{135}$.

Entre 2004 et 2011 il y a 7 ans donc on a :

$$4\,600 = 27\,000 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 = \frac{4\,600}{27\,000} \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 = \frac{23}{135}$$

b) Déterminons t .

$$\left(1 - \frac{t}{100}\right)^7 = \frac{23}{135} \Rightarrow t = \left(\sqrt[7]{\frac{23}{135}} - 1\right) * 100 = -22,34\% \Rightarrow t = -22,34\%$$

Interprétation :

-22,34% : signifie qu'entre 2004-2011, la déforestation de l'Amazonie a diminué de 22,34% en moyen chaque année.

Autrement dit, le taux de diminution annuel de déforestation de l'Amazonie entre 2004 et 2011 est de 22,34%.

c) Estimons la surface de déforestation en 2018 si cette évolution se poursuit à l'identique.

Soit U_0 la surface de déforestation de l'Amazonie en 2004 et U_n , la surface de déforestation en $(2004 + n)$.

$$U_0 = 27\,000$$

$$\text{La raison de la suite } q = 1 - \frac{t}{100} = 1 - \frac{22,34}{100} = 0,7766$$

$$U_n = U_0 * q^n = 27\,000(0,7766)^n$$

De 2004 à 2018 il y a 14 ans donc on a : $n = 14 \text{ ans}$

Pour estimer la surface de déforestation en 2018, nous devons calculer U_{14} .

$$U_{14} = U_0 * q^{14} = 27000(0,7766)^{14} = 783,6590 \approx \mathbf{784 \text{ km}^2}$$

La surface de déforestation si cette évolution se poursuit à l'identique est estimé à **784 km²**.

Exercice 2 [Bac 2020] : 6 points

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{6} \end{cases}$$

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 5u_n + 3$.

1) Démontre que (V_n) est une suite géométrique. En déduis une expression de u_n en fonction de n

2) Démontre que (U_n) est une suite décroissante.

3)

a) Calcule $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

b) Détermine les limites de S_n et S'_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} U_0 = \frac{3}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{6} \end{cases} \text{ et } (V_n)_{n \in \mathbb{N}} : V_n = 5u_n + 3.$$

1) Démontrons que V_n est une suite géométrique.

$$V_n = 5u_n + 3 \Rightarrow V_{n+1} = 5u_{n+1} + 3$$

Remplaçons U_{n+1} dans V_{n+1}

$$\Rightarrow V_{n+1} = 5 \left(\frac{U_n - 3}{6} \right) + 3 = \frac{5U_n - 15}{6} + 3 = \frac{5U_n - 15 + 18}{6} = \frac{5U_n + 3}{6}, \text{ comme } V_n = 5u_n + 3 \text{ donc } V_{n+1} =$$

$$\frac{V_n}{6} = \frac{1}{6}V_n$$

Alors la suite V_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ parce que $V_{n+1} = qV_n$

Déterminons le premier terme de la suite V_n

$$\text{Posons } n = 0 \Rightarrow V_0 = 5U_0 + 3 = \left(5 * \frac{3}{5}\right) + 3 = 3 + 3 = 6 \Rightarrow V_0 = 6$$

En déduisons une expression de u_n en fonction de n .

$$V_n = 5u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{V_n - 3}{5}$$

$$V_n = V_0 * q^n = 6 * \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\text{Remplaçons } V_n \text{ dans } u_n \text{ on obtient : } u_n = \frac{6 * \left(\frac{1}{6}\right)^n - 3}{5} = \frac{1}{5} \left(6 * \left(\frac{1}{6}\right)^n - 3\right) = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5}$$

2) Démontrons que (u_n) est une suite décroissante

$$u_n = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{1}{6}\right) - \frac{3}{5} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{1}{6}\right) - \frac{3}{5}$$

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{1}{6}\right) - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^n}\right) \left(\frac{1}{6}\right) - \frac{3}{5} - \left(\frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^n}\right) - \frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^{n+1}}\right) - \frac{3}{5} - \left(\frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^n}\right) - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^{n+1}}\right) - \frac{3}{5} - \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^n}\right) + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{6^n}\right)$$

$$= \frac{1}{5} * \frac{1}{6^{n+1-1}} - \frac{6}{5} * \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5} * \frac{1}{6^n} - \frac{6}{5} * \frac{1}{6^n} = \frac{1}{6^n} \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{5}\right) = -\frac{1}{6^n} < 0$$

$$U_{n+1} - U_n = r = -\frac{1}{6^n} < 0 \text{ donc la suite } U_n \text{ est une suite décroissante.}$$

3)

a) Calculons

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} = V_0 * \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 6 * \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1-1}}{1 - \frac{1}{6}} = 6 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\frac{5}{6}}\right) =$$

$$6 * \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\frac{5}{6}} \Rightarrow S_n = \frac{36}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \text{ avec } U_n = \frac{V_n - 3}{5}$$

$$\text{Donc } S'_n = \frac{V_0 - 3}{5} + \frac{V_1 - 3}{5} + \frac{V_2 - 3}{5} + \dots + \frac{V_{n-1} - 3}{5} = \frac{1}{5} [V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} - 3n]$$

$$\Rightarrow S'_n = \frac{S_n - 3n}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{36}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - 3n\right) \Rightarrow S'_n = \frac{1}{5} \left(\frac{36 \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - 15n}{5}\right)$$

$$\Rightarrow S'_n = \frac{36 \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - 15n}{25}$$

Déterminons les limites de S_n et S'_n quand $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{36}{5} \left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right] = \frac{36}{5} \left(1 - \frac{1}{6^{+\infty}}\right) = \frac{36}{5} (1 - 0) = \frac{36}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{36 \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - 15n}{25} = -\infty$$

Exercice 2 [Bac 2023] : 6 points

Amadou et Moussa sont deux amis, chacun à son niveau décide de placer la somme de

100 000F au taux annuel de 10%. Ainsi Amadou choisit de placer son capital à intérêt simple tandis que Moussa choisit de placer à intérêt composé avec capitalisation annuelle des intérêts. On note respectivement par U_n et V_n les valeurs acquises respectives des placements de ces deux amis, après n années.

- 1) Précise la différence entre un placement à intérêt simple et un placement à intérêt composé ;
- 2) Calcule U_1, U_2 et U_3 puis déduis-en la nature de la suite (U_n) ;
- 3) Calcule V_1, V_2 et V_3 puis déduis-en la nature de la suite (V_n) ;
- 4) Exprime U_n et V_n en fonction de n ;
- 5) En cinq (5) ans, chacun obtiendra combien ? Qui a effectué le meilleur placement ?

Corrigé

- 1) Différence entre un placement à intérêts simples et un placement à intérêts composés :

Dans un placement à intérêts simples, l'intérêt est constant tandis que dans un placement à intérêts composés, les intérêts de chaque période s'ajoutent au capital précédent pour produire à leur tour des intérêts pendant la période suivante et ainsi de suite.

- 2) Calculons U_1 , U_2 et U_3 , puis déduisons la nature de la suite (U_n)

$$U_0 = V_0 = 100\,000$$

Amadou choisit de placer son capital à intérêt simple donc chaque année le capital augmente de l'intérêt. Donc l'intérêt est la raison

$$r = I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100} \text{ avec } C = U_0 = 100\,000; t = 10\% \text{ et } n = 1 \text{ an}$$

$$I = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 10\,000 \Rightarrow r = 10\,000$$

$$U_1 = U_0 + r = 100\,000 + 10\,000 = 110\,000 \Rightarrow U_1 = \mathbf{110\,000};$$

$$U_2 = U_1 + r \text{ ou } U_0 + 2r = 110\,000 + 10\,000 = 120\,000 \Rightarrow U_2 = \mathbf{120\,000};$$

$$U_3 = U_2 + r \text{ ou } U_0 + 3r = 120\,000 + 10\,000 = 130\,000 \Rightarrow U_3 = \mathbf{130\,000};$$

$$\mathbf{U_1 = 110\,000; U_2 = 120\,000 \text{ et } U_3 = 130\,000}$$

Nature de la suite (U_n)

$$U_1 = U_0 + 10\,000$$

$$U_2 = U_1 + 10\,000$$

$$U_3 = U_2 + 10\,000$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U_{n+1} = U_n + 10\,000;$$

Alors (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 10\,000$ et de premier terme

$$U_0 = 100\,000.$$

Autre méthode

U_n est une suite arithmétique si et seulement si $U_{n+1} - U_n = r$

$$U_n = U_0 + nr = 100\,000 + 10\,000n \text{ et } U_{n+1} = U_0 + (n+1)r = U_0 + nr + r$$

$$U_{n+1} = 100\,000 + 10\,000n + 10\,000$$

$$\Rightarrow 100\,000 + 10\,000n + 10\,000 - (100\,000 + 10\,000n)$$

$$\Rightarrow \cancel{100\,000} + \cancel{10\,000n} + 10\,000 - \cancel{100\,000} - \cancel{10\,000n} = 10\,000 \text{ donc } U_n \text{ est une suite arithmétique de raison } r = 10\,000 \text{ et de premier terme } U_0 = 100\,000$$

Autrement U_n est une suite arithmétique si $U_3 - U_2 = U_2 - U_1 = U_1 - U_0 = r$

$$\Rightarrow \mathbf{130\,000 - 120\,000 = 120\,000 - 110\,000 = 110\,000 - 100\,000 = 10\,000}$$

Alors U_n est une suite arithmétique.

- 3) Calculons V_1 , V_2 et V_3 , puis déduisons la nature de la suite (V_n)

Chaque année le capital augmente de 10% $\Rightarrow$ que la raison $q = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{10}{100}$

$$\Rightarrow \mathbf{q = 1,1}$$

$$V_1 = V_0 \cdot 1,1 = 100\,000 \cdot 1,1 = 110\,000;$$

$$V_2 = V_1 \cdot 1,1 = 110\,000 \cdot 1,1 = 121\,000;$$

$$V_3 = V_2 \cdot 1,1 = 121\,000 \cdot 1,1 = 133\,100;$$

$$\mathbf{V_1 = 110\,000; V_2 = 121\,000 \text{ et } V_3 = 133\,100}$$

La nature la suite (V_n)

$$V_1 = V_0 \cdot 1,1$$

$$V_2 = V_1 \cdot 1,1$$

$$V_3 = V_2 \cdot 1,1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$V_{n+1} = V_n \cdot 1,1$$

Alors la (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme

$$V_0 = 100\,000$$

Autre méthode :

(V_n) est une suite géométrique si et seulement si $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$

$$V_n = V_0 * q^n = 100\,000(1,1)^n \Rightarrow V_{n+1} = 100\,000(1,1)^{n+1} = 100\,000(1,1)^n(1,1)$$

$$\Rightarrow \frac{100\,000(1,1)^{n+1}}{100\,000(1,1)^n} = 1,1. \text{ Alors } (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 1,1$$

4) Exprimons U_n et V_n en fonction de n

a) $U_n = U_0 + nr = 100\,000 + 10\,000n \Rightarrow U_n = 100\,000 + 10\,000n$

b) $V_n = V_0 * q^n = 100\,000(1,1)^n \Rightarrow V_n = 100\,000(1,1)^n$

5) Calculons le montant que chacun d'eux obtiendra et déterminons celui qui à effectuer le meilleur placement

c) **Valeur acquise du placement d'Amadou au bout de 5 ans :**

$$U_5 = 100\,000 + 10\,000 * 5 = 150\,000 \Rightarrow U_5 = 150\,000$$

d) **Valeur acquise du placement de Moussa au bout de 5 ans :**

$$V_5 = 100\,000(1,1)^5 = 161\,051 \Rightarrow V_5 = 161\,051$$

Le placement est le plus avantageux est celui de Moussa.

Exercice 2 [Bac 2024] : 6 points

Au niveau de l'entreprise GOURMA-SA, les employés ont le choix entre deux propositions : le salaire initial est toujours de 100 000 F par mois, puis une augmentation de 1 000 F tous les mois pour la proposition A, et une augmentation de 0,5% tous les mois pour la proposition B. On appelle a_n , le salaire mensuel d'un employé au bout de n mois avec la proposition A et b_n le salaire mensuel d'un employé au bout de n mois avec la proposition B.

- Calcule les salaires des trois premiers mois pour chaque proposition.
- Précise la nature de chaque suite. Exprime alors chacune des suites en fonction de n .
- Calcule le salaire avec chacune des deux propositions au bout de 40 ans dans l'entreprise.
- M.TOURE et M.HAIDARA ont passé 40 ans dans l'entreprise, M.TOURE avait opté pour la proposition A alors que M.HAIDARA avait opté pour la proposition B. Quelle est la somme d'argent gagné par chacun des deux employés ?

Corrigé

$$a_1 = b_1 = 100\,000; r = 1\,000; q = 1 + \frac{0,5}{100} = 1,005$$

a) Calculons les salaires des trois premiers mois pour chaque proposition.

- **Proposition A**

→ 1^{er} Mois : $a_1 = 100\,000$

→ 2^{ème} Mois : $a_2 = a_1 + 1\,000 = 100\,000 + 1\,000 = 101\,000$

→ 3^{ème} Mois : $a_3 = a_2 + 1\,000 = 101\,000 + 1\,000 = 102\,000$

- **Proposition B**

→ 1^{er} Mois : $b_1 = 100\,000$

→ 2^{ème} Mois : $b_2 = b_1 * 1,005 = 100\,000(1,005) = 100\,500$

→ 3^{ème} Mois : $b_3 = b_2 * 1,005 = 100\,500(1,005) = 101\,002,5$

b) Précisons la nature de chaque suite.

- **La suite a_n**

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + 1\,000$$

$$a_3 = a_2 + 1\,000$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a_{n+1} = a_n + 1\,000$$

Alors la suite a_n est une suite arithmétique parce que $a_{n+1} - a_n = r = 1\,000$

donc $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 100\,000 + 1\,000n - 1\,000$.

Autrement : Dans la proposition A, le salaire initial est de 100 000 F puis une augmentation de 1 000 F tous les mois. Alors a_n est une suite arithmétique de raison $r = 1\,000$ et de 1^{er} terme $a_1 = 100\,000$.

Sciences et Technologies de Gestion

Exercice 1[Bac 2014]

Pour limiter la hausse des températures moyennes de la planète, une diminution des émissions de gaz à effet de serre s'avère nécessaire. Dans ce but les plus hautes autorités d'un pays se sont donnés comme objectif de diviser par quatre les émissions de gaz à effet de serre dans ce pays de 2006 à 2050.

En 2006, les émissions de gaz à effet de serre

- La suite b_n :

$$b_1 = b_1$$

$$b_2 = b_1(1,005)$$

$$b_3 = b_2(1,005)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$b_{n+1} = b_n(1,005)$$

Alors la suite b_n est une suite géométrique de raison $q = 1,005$ parce que $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q = 1,005$

$$\text{Donc } b_n = b_1 * q^{n-1} \Rightarrow b_n = (100\ 000)(1,005)^{n-1}$$

Autrement : Dans la proposition B : le salaire initial est de 100 000 puis une augmentation de 0,5% tous les mois donc la suite b_n est géométrique de raison $q = 1 + \frac{0,5}{100} = 1,005$ et de 1^{er} terme $b_1 = 100\ 000$.

c) Calculons le salaire avec chacune des deux propositions au bout de 40 ans dans l'entreprise.

- La proposition A : comme le salaire est mensuel donc $n = 40 * 12 = 480$ mensuels
 $a_{480} = 100\ 000 + 1\ 000(480) - 1\ 000 = 579\ 000$
- La proposition B : $b_{480} = 100\ 000(1,005)^{480-1} = 1\ 090\ 293,89\ 768 \cong 1\ 090\ 294$

d) Calculons la somme d'argent gagné par chacun des deux employés.

- M.TOURE :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{480} = \frac{480}{2}(100\ 000 + 579\ 000) = 162\ 960\ 000\ F$$

M.TOURE a gagné 162 960 000 F

- M.HAIDARA :

$$S_n = b_1 * \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{480} = 100\ 000 * \frac{1-(1,005)^{480}}{1-1,005} = 199\ 149\ 073,434 \cong 199\ 149\ 073$$

M.HAIDARA a gagné 199 149 073 F.