

Lis attentivement

- Le sujet est composé de deux exercices et un problème, tous obligatoires.
- L'élève traitera le sujet dans l'ordre qu'il veut. Aucun brouillon ne sera corrigé.
- Les ratures et les abréviations valent moins un point.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : (4 points)

On considère le polynôme p de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ défini par : $p(x) = -5x^3 + 27x^2 + 60x - 28$.

1°) a°) Calcule $p(-2)$. Que conclure ? (0,50 point)

b°) Ecris $p(x)$ sous forme de produit de binômes du premier degré. (0,50 point)

c°) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $p(x) = 0$. (0,75 point)

2°) En utilisant les résultats de 1°), résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations et inéquations suivantes :

a°) $-5 \ln^3 x + 27 \ln^2 x + 60 \ln x - 28 = 0$; (0,75 point)

b°) $-5e^{3x} + 27e^{2x} + 60e^x - 28 = 0$; (0,50 point)

c°) $-5 \ln^3 x + 27 \ln^2 x + 60 \ln x - 28 \leq 0$; (0,50 point)

d°) $-5e^{3x} + 27e^{2x} + 60e^x - 28 \geq 0$. (0,50 point)

Exercice 2 : (7 points) (Les parties I, II et III sont indépendantes).

I°) Après avoir précisé l'ensemble de définition, détermine la dérivée de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes : (4,50 points)

1°) $f: x \mapsto \ln(2x - 1) - \ln(x + 3)$;

4°) $f: x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right|$;

2°) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$;

5°) $f: x \mapsto (27 + 5 \ln x)(17 - 4 \ln x)$;

3°) $f: x \mapsto x^2 - 1 - 2x \ln x$;

6°) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

II°) Détermine une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes : (2 points)

1°) $g: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ et $I =]-1; +\infty[$;

3°) $g: x \mapsto \frac{1}{x} (\ln x)^3$ et $I =]0; +\infty[$;

2°) $g: x \mapsto x + \frac{x}{x^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$;

4°) $g: x \mapsto \ln(7x + 3)$ et $I = \left]-\frac{3}{7}; +\infty\right[$.

III°) Résous dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} 5 \ln x + 2 \ln y = 26 \\ 2 \ln x - 3 \ln y = -1 \end{cases}$. (0,50 point)

Problème : (9 points)

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité.

Elle produit chaque mois entre 50 et 2 500.

On considère la fonction f définie sur $[0, 5; 25]$ par : $f(x) = 18 \ln x - x^2 + 16x - 15$; $f(x)$ est le bénéfice mensuel de l'entreprise en millions de francs, obtenu par la vente de x centaines de panneaux solaires fabriqués.

On admet que : f est dérivable sur $[0, 5; 25]$ et on note f' , sa fonction dérivée.

Partie A :

1°) Calcule $f'(x)$ puis vérifie que : pour tout $x \in [0, 5; 25]$; on a :

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}. \text{ (1 point)}$$

2°) Etudie le signe de $f'(x)$ sur $[0, 5; 25]$. (0,50 point)

3°) Déduis-en le sens de variation de f sur $[0, 5; 25]$. (0,50 point)

4°) Dresse le tableau de variation de f sur $[0, 5; 25]$. (0,50 point)

5°) a°) Quelle est la quantité de panneaux solaires à produire et vendre par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? (0,50 point)

b°) Donne ce bénéfice au franc près. (0,50 point)

6°) a°) Calcule $f(1)$. (0,50 point)

b°) Montre que : l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[18; 19]$, une solution unique α .

(0,50 point)

c°) Détermine la valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près. (0,50 point)

d°) En-déduis le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [0, 5; 25]$. (0,50 point)

7°) Détermine les quantités de panneaux solaires que l'entreprise doit fabriquer et vendre par mois pour être bénéficiaire. (0,50 point)

8°) L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 francs ? (0,25 point)

Justifie la réponse. (0,25 point)

Partie B :

1°) On considère la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par : $G(x) = x \ln x - x$.

a°) Prouve que : G est une primitive de la fonction $g: x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$. (0,50 point)

b°) En-déduis une primitive F de f sur $[0, 5; 25]$. (1 point)

2°) Calcule la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise à la centaine de francs, lorsque celle-ci produit et vend par mois entre 100 et 1 800 panneaux solaires. (1 point)

« Fais parler ta logique, les mathématiques récompensent la patience et la réflexion. »