

Primitives-Intégrales-Calculs d'aires

Classe : TS Eco

Durée : 4H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Thème : **Primitives et Intégrales**

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager des savoirs ou des résultats scientifiques, technologiques et mathématiques.
- Produire des messages à caractère scientifique, technologique et mathématique.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Objectifs

Ce chapitre vise à :

- mettre en place la notion de primitive
- initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Définition d'une primitive. • Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle (admis). • Ensemble des primitives d'une fonction continue • Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné • primitives des fonctions de référence. • Primitive de $u + v$, λu ($\lambda \in \mathbb{R}$), $v' \times (u'ov)$, $u' \times u^n$ ($n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$)	• Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence. • Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné. • Déterminer les primitives d'une fonction du type : - $\alpha u + \beta v$, $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; - $v' \times (u'ov)$; - $u' \times u^n$ ($n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$)

I) Primitives :

Situation problème :

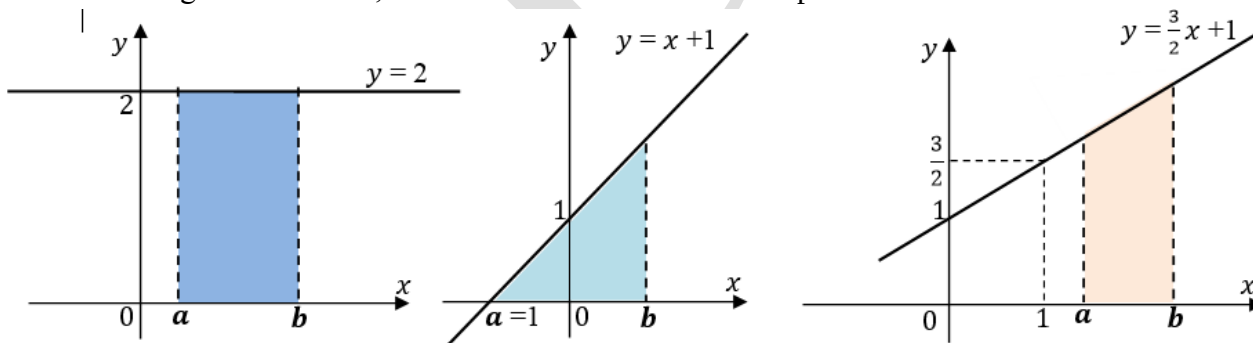
- 1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 5$
 - a- Détermine une fonction telle que $F'(x) = f(x)$
 - b- Même question pour $f(x) = x^2 + 2$
 - c- Peux-tu en donner d'autres ?
- 2) f est le polynôme défini par $f(x) = x + 1$
 - a- Trouver une fonction F dont la dérivée est f
 - b- Montrer que pour tout réel c la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est telle que $G'(x) = f(x)$

Activité 1 (Recherche de primitive)

Soit f la fonction définie par $f(x) : 3x^2 - 2x + 1$
Détermine une fonction F du 3^{ième} degré telle que ; $F'(x) = f(x)$

Activité 2 (Calculs d'aire et de primitive)

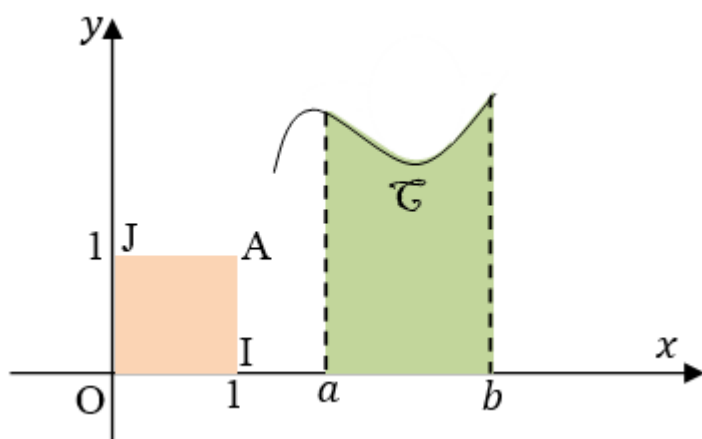
L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm² et les repères utilisés sont orthonormaux.



Dans chacun des cas ci-dessus :

- a) Calculez l'aire du domaine colorié ;
- b) Trouvez une primitive F de la fonction f représentée, puis calculez : $F(b) - F(a)$.
- c) Que constatez-vous ?

Conclusion : de façon générale, nous admettons que lorsque f est une fonction **continue** sur intervalle $[a; b]$, alors **l'aire du domaine** colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ si F est une **primitive de f** sur $[a; b]$ (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle **OIAJ**).



1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I ; F'(x) = f(x)$

1. a) f est le polynôme défini par $f(x) = x + 1$.

Trouvez une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction F dont la dérivée soit f .

b) Montrez que pour tout réel c , la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Trouvez une primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(2) = -3$.

Existe-t-il d'autres primitives de f qui prennent la valeur -3 en 2 ?

2. Dans chaque cas, trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

a) $f(x) = 2x^2 + x + 1$. b) $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$. c) $f(x) = 2 + \cos x$.

2) Propriétés

P₁ : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

P₂ : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \rightarrow F(x) + k$ où k est un nombre réel.

3) Recherche de la primitive d'une fonction :

La fonction $x \rightarrow x^4$ a pour dérivée $x \rightarrow 4x^3$

Donc la fonction $x \rightarrow \frac{1}{4}x^4$ a pour dérivée $x \rightarrow x^3$

Alors d'une manière générale, n étant un nombre entier naturel non nul, la fonction :

$x \rightarrow x^{n+1}$ a pour dérivée $x \rightarrow (n+1)x^n$

donc $x \rightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive de x^n .

Ainsi par lecture inverse des tableaux de dérivation, on établit le tableau des primitives :

a) **Primitives des fonctions usuelles**

Fonctions	Primitives	Intervalles
$a \ (a \in \mathbb{R})$	$ax + k$	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
ax^n	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \\ \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \neq 1)$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \neq 1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$

b) **Opérations sur les Primitives :**

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + K$
	$u \cdot v + K$

$u'v + v'u$	
$au' \ (a \in \mathbb{R})$	$au + K$
$u' \bullet u^n$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\sin(u)$	$-\frac{1}{u'} \cos(u) + k$
$\cos(u)$	$\frac{1}{u'} \sin(u) + k$

NB : $(u)^n \sqrt{u} = (u)^{\frac{2n+1}{2}}$

Exemple

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$; b) $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1}$

c) $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5}$; d) $f(x) = (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}$

e) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$; f) $f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}}$

Solution :

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + K$

b) $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1} \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + K$

c) $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2x+3)^5}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4(2x+3)^4} + K$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{8(2x+3)^4} + K$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2} \Leftrightarrow f(x) = (x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{4}(x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(4x^3 + 4x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}+1} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} \right] + K \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2) \sqrt{x^4 + 2x^2} + K$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= (x+1)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} (x+1)^{\frac{5}{2}} + K \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{5}{2} (x+1)^2 \sqrt{x+1} + K \end{aligned}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Rightarrow$$

$$F(x) = 3(2\sqrt{3x^2-5x+1}) + K \Rightarrow F(x) = 6\sqrt{3x^2-5x+1} + K$$

II) Intégrale d'une fonction

Ce thème vise à :

- Calculer des intégrales à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par partie, changement de variable affine) ;
- Réinvestir dans les calculsaires les techniques du calcul intégral ;
- Elargir le champ des fonctions étudiées à des fonctions définies par une intégrale.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
---------	--------------

• Définition de l'intégrale d'une fonction continue f : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. • La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. • Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive. • Propriétés : - Linéarité ; - Relation de Chasles ; - Positivité ; - Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$; - Inégalité de la moyenne : - Si $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$; - Si $f \leq M$, alors $\left \int_a^b f(t)dt \right \leq M b-a$. • Valeur moyenne d'une fonction ; • Intégration par parties ; • Changement de variable affine. • application au calcul d'aire. • La fonction du type $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$	• Calculer une intégrale : - En utilisant les primitives des fonctions usuelles ; - En utilisant une intégration par partie ; - En utilisant un changement de variable affine • Utiliser la relation de Chasles pour effectuer un calcul intégral. • Connaissant un encadrement d'une fonction f sur $[a ; b]$, trouver un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$. • Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par : - La courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. - Les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. • Etant donné la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: - à partir d'une majoration et d'une minoration donnée, déduire l'existence ou non de la limite de F aux bornes de son ensemble de définition ; - étudier les variations de F ; - donner une allure de la présentation graphique de F.
---	--

Situation problème :

Construis dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ du plan affine la droite $\Delta : y = x + 2$ et

La droite d'équation $x = 3$; on désigne par le point d'intersection de Δ et l'axe des ordonnées

Par B et C les points d'intersections de Δ et de $x = 3$ et de l'axe des abscisses avec $x = 3$

- a- Calcule l'aire du quadrilatère OABC
- b- Calcule une primitive de F de f tel que $f(x) = x + 2$
- c- Calcule $F(3) - F(0)$ puis compare-le à l'aire du trapèze OABC

1) Définition :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2) Propriétés :

Propriété 1 : (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a ; b]$, on a :

- $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R} ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall k \in \mathbb{R} ; \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- Si $f \geq 0$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $|f|$ est continue sur I , alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|dx$

Propriété 2 : (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soient trois réels a, b, c éléments de l'intervalle I

D'après Chasles $\int_a^c g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Conséquences :

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 3 : (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) Inégalité de la moyenne :

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

b) Valeur moyenne :

On appelle valeur moyenne de f , le réel $\bar{M}$ tel que :

$\bar{M} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. et il existe un réel $C \in [a, b]$ tel que :

$$f(C) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

III) Intégration par parties

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle $I = [a, b]$, alors on appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx$$

Exemple

1) En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x dx ; B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx ; C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x+1) dx$$

IV) Calcul d'aires :

Situation problème

L'unité de longueur est le cm ; l'unité d'aire est le cm^2 et les repères utilisés sont orthonormaux

fig₁

fig₁

fig

Dans chacun des cas ci-dessus :

- Calcule l'aire du domaine colorié ;
- Trouve une primitive F de la fonction f représentée puis calcule $F(b)-F(a)$
- Que constates-tu ?

Synthèse :

De

façon générale nous admettrons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b)-F(a)$ ou F est une primitive de f sur $[a; b]$ (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle OIAJ).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque x va de a vers b ($a < b$)

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (unité d'aire)}$$

$$\text{Ou } S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ (unité d'aire)}$$

NB : Dans cette intégration, les portions de surface au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.

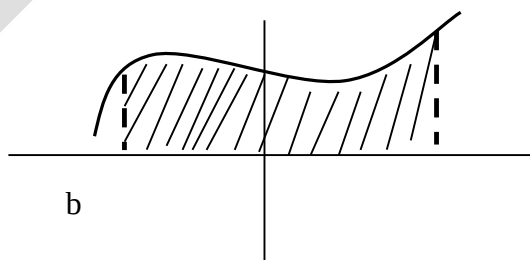
Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

1^{er} Cas :

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan D_a

$$\text{est } A(D) = \int_a^b f(x)dx \text{ (unité d'aire)}$$

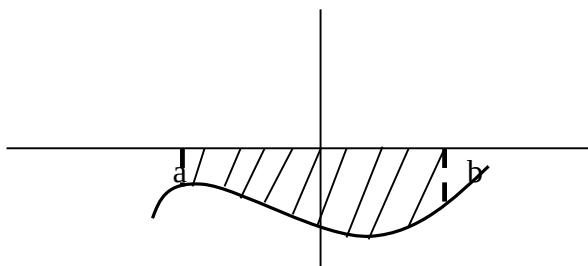


2^{ème} Cas :

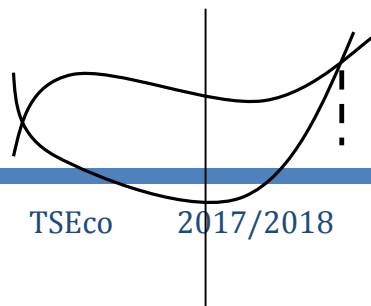
$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan

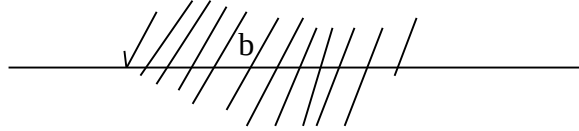
$$D \text{ est } A(D) = - \int_a^b f(x)dx \text{ (unité d'aire)}$$



3^{ème} Cas :



$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad a$$



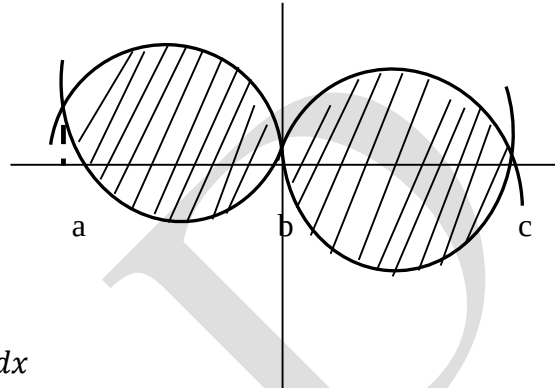
Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

(car (Cf) est au dessus de (Cg)).

4^{ème} Cas :

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \text{ et } b \leq x \leq c \\ g(x) \leq y \leq f(x) \text{ et} \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$



Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$$

Exemple

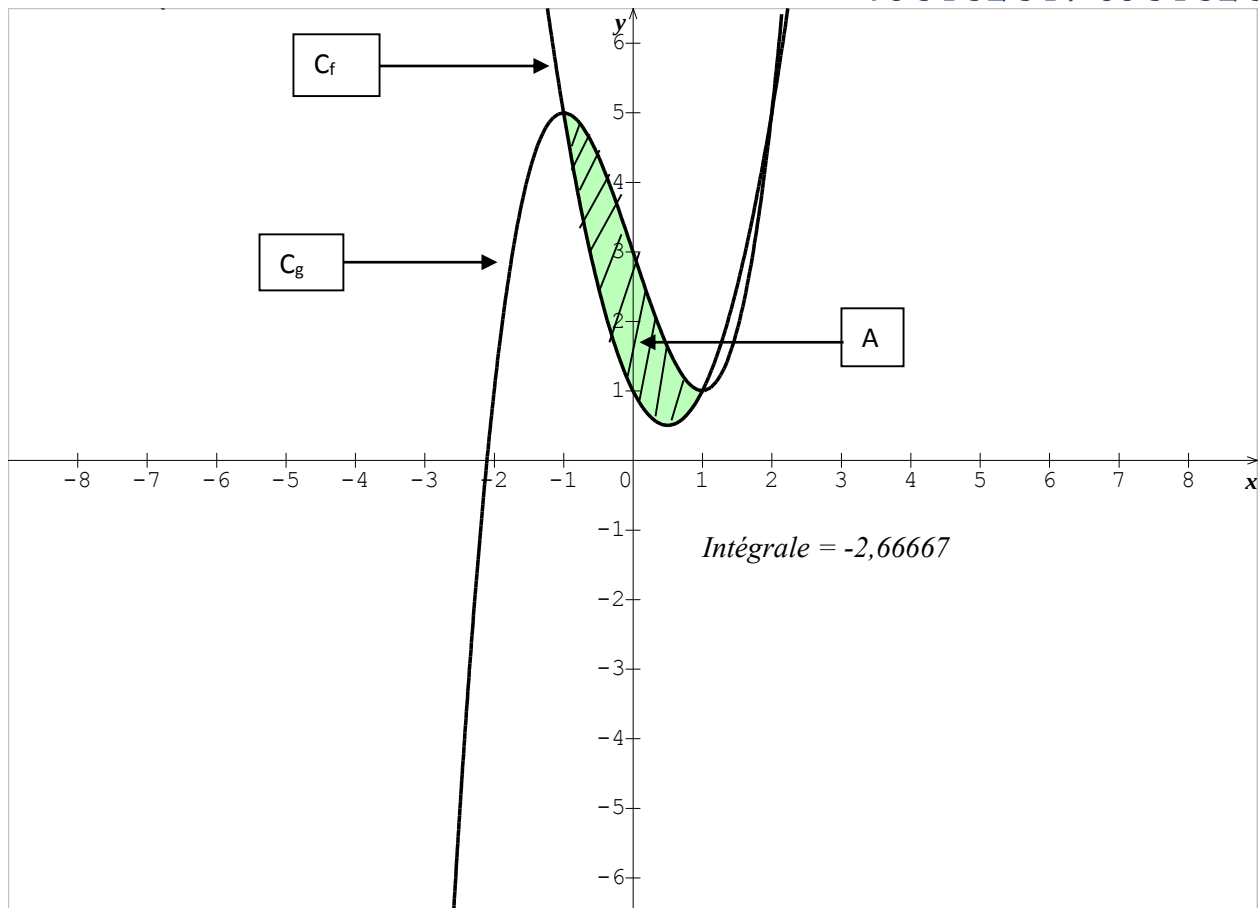
1) Calculer puis représenter l'aire A de l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

2) Calculer puis représenter l'aire de la portion du plan limité par la courbe (Cf) de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Solution

1) Calculons puis représentons l'aire A de l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$

La représentation des courbes (Cf) et (Cg) dans le repère donne :



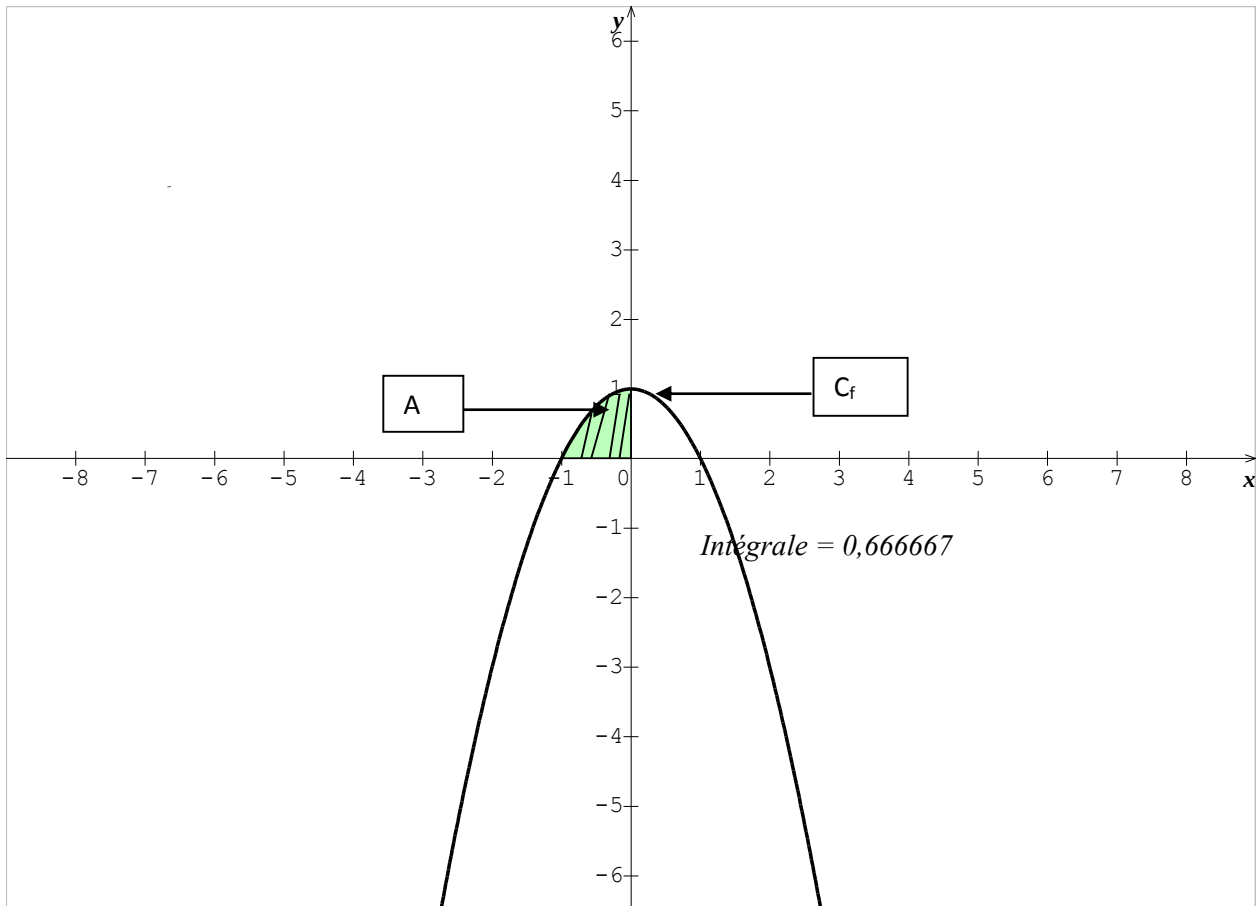
$$A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 ((2x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 3x + 3)) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^1 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^1$$

$$\Rightarrow A = \left[-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] - \left[-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right] = -\frac{8}{3} \text{ (u.A) }$$

2) Calculons puis représentons l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (Cf) de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

La représentation de la fonction f dans le repère donne :



$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow A = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow A = [0] - \left[-1 + \frac{1}{3} \right] = -\frac{2}{3} \text{ (u.A.)}$$