

CONTINUITÉ - LIMITES

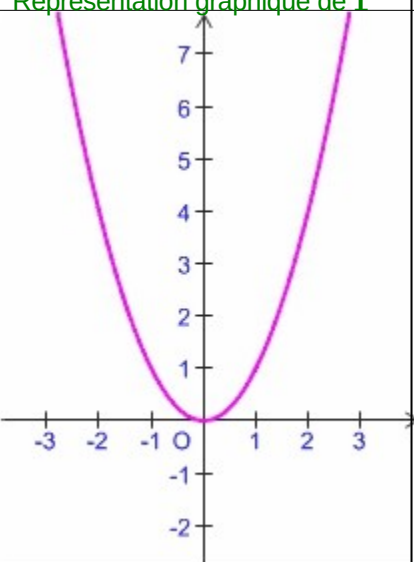
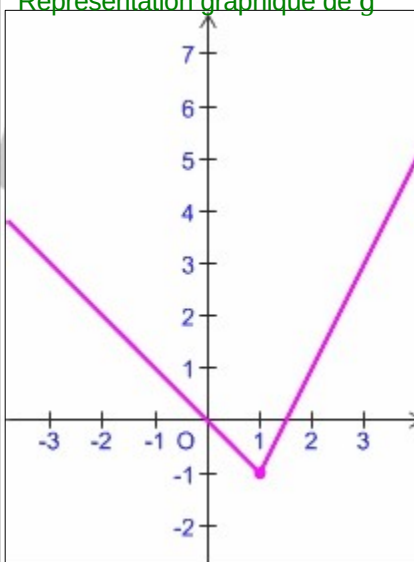
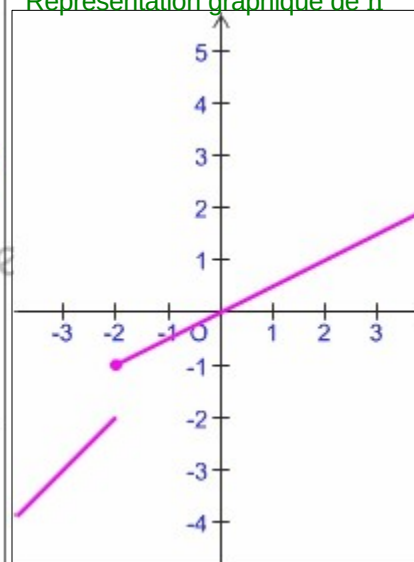
I Continuité - Théorème des valeurs intermédiaires

Notion de continuité

On peut définir mathématiquement la notion de continuité d'une fonction mais cette définition relativement compliquée n'est pas au programme.

Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f pour $x \in I$ peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

Exemple

$f(x) = \frac{x^2}{2}$	$g(x) = -x$ si $x \leq 1$ et $g(x) = 2x - 3$ si $x > 1$	$h(x) = x$ si $x < -2$ et $h(x) = \frac{1}{2}x$ si $x \geq -2$
Représentation graphique de f	Représentation graphique de g	Représentation graphique de h
		
f est continue sur $\mathbb{R}$	g est continue sur $\mathbb{R}$	h est continue sur $]-\infty ; -2[$ h est continue sur $[-2 ; +\infty[$ mais h n'est pas continue en -2 On dit que h est continue par intervalles

Exemple

Considérons la fonction $x \mapsto E(x)$ appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Ainsi $E(2,5)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $2,5$, donc $E(2,5) = 2$

De même $E(-2,4) = -3$; $E(1,9999) = 1$ et $E(2) = 2$

La représentation graphique de la fonction "Partie entière" est donnée ci-contre.

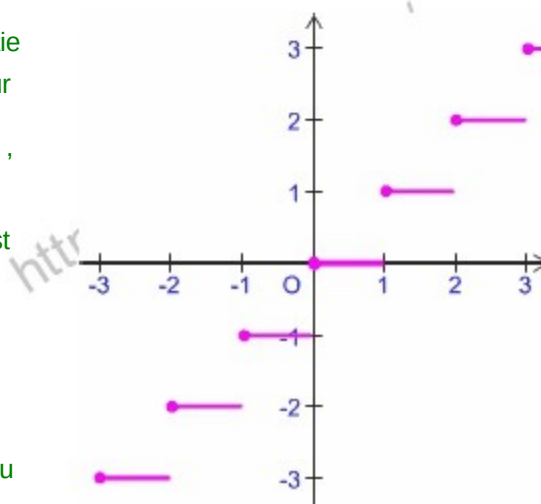
La fonction "Partie entière" n'est pas continue en n ($n \in \mathbb{Z}$).

Elle est continue sur chaque intervalle $[n ; n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$).

"Partie entière" est une fonction dite "en escalier".

La courbe fait "un saut" pour chaque valeur entière de x .

Avec une calculatrice ou un tableur, $E(x)$ est notée $\text{int}(x)$ ou $\text{ent}(x)$ ou $\text{floor}(x)$ ou $\text{partEnt}(x)$



(admise)

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

Exemple

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ est une fonction polynôme. Elle est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction g définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle.

Elle est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Remarque

Toutes les fonctions qui seront utilisées sont des fonctions continues par intervalles.

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Représenter graphiquement la fonction f dans chacun des cas suivants.

À partir du graphique, étudier la continuité de f .

$$1^{\circ}) f(x) = -2x - 5 \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ si } x \geq 0$$

$$2^\circ) f(x) = x^2 \text{ si } x \leq 1 \text{ et } f(x) = x \text{ si } x > 1$$

3°) $f(x) = 2$ si $x \in]-\infty ; -2]$; $f(x) = -x$ si $x \in]-2 ; 2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [2 ; +\infty[$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Extrait de la "Fiche de calculs facultatifs". Impôt sur les revenus de 2005.

4 – Calculez le quotient familial correspondant à votre nombre de parts

Ce quotient « QF » est égal à : $\frac{R \text{ (revenu imposable)}}{N \text{ (nombre de parts)}}$ = Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 – Calculez votre impôt « I » à l'aide du barème suivant :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$	n'excède pas	4 412 €	votre impôt sera égal à :	0
	est supérieur à	4 412 € et inférieur ou égal à	8 677 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,0683) - (301,34 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	8 677 € et inférieur ou égal à	15 274 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,1914) - (1\,369,48 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	15 274 € et inférieur ou égal à	24 731 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,2826) - (2\,762,47 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	24 731 € et inférieur ou égal à	40 241 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,3738) - (5\,017,93 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	40 241 € et inférieur ou égal à	49 624 €	votre impôt sera égal à : $(R \times 0,4262) - (7\,126,56 \text{ €} \times N)$
	est supérieur à	49 624 €	votre impôt sera égal à :	$(R \times 0,4809) - (9\,841,00 \text{ €} \times N)$

Dans votre cas, la formule de calcul est la suivante : $\left[\dots (R) \times 0, \dots \right] - \left[\dots \text{€} \times \dots (N) \right] = | \dots$

Exemple : revenu imposable R = 23 026 € ; nombre de parts N = 2,5. Le quotient familial QF est égal à $23\,026 : 2,5 = 9\,210,40$ €. Ce montant est compris dans la tranche « supérieur à 8 677 € et inférieur ou égal à 15 274 € ». L'impôt I est égal à : $(23\,026 \times 0,1914) - (1\,369,48 \times 2,5) = 983,48$ € arrondi à 983 €.

Dans tout l'exercice on considèrera le revenu d'un célibataire (le nombre N de parts est alors égal à 1).

1°) Un célibataire a un revenu imposable annuel $R = 18\,000\text{ €}$. Calculer son impôt I .

2°) Même question pour un revenu imposable annuel $R = 6\,000\text{ €}$.

3°) On note f la fonction donnant l'impôt I en fonction de R : $I = f(R)$.
Reproduire et compléter le tableau suivant :

[illegible]

4) Représenter graphiquement la fonction f . (On choisira comme unité 1cm pour 2 500 euros)

En utilisant le graphique, étudier la continuité et le sens de variation de f .

5°) Une personne a un revenu R de 10 000 €.

Peut-on dire que son impôt se décompose de la façon suivante :

Rien sur les 4 412 premiers euros ; 6,83% sur les 4265 euros suivants ; 19,14% sur le reste

6°) Une personne célibataire dont le revenu R est 15 250 € tient le raisonnement suivant :

Heureusement que je n'ai pas fait d'heures supplémentaires, car alors j'aurais changé de « tranche », mon impôt aurait été beaucoup plus élevé et finalement j'aurais perdu de l'argent dans l'opération.

Qu'en pensez-vous ?

<http://xmaths.free.fr/>

TES – Continuité - Limites

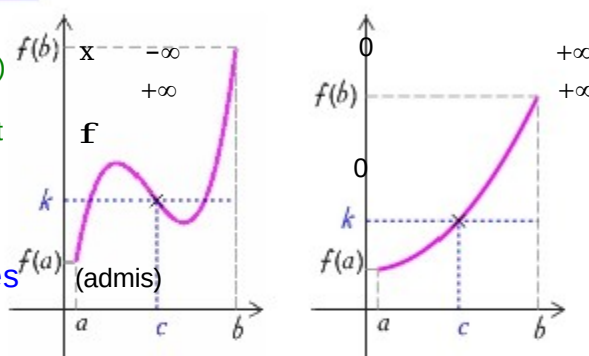
page 2

Convention

Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Exemple

Le tableau de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) signifie que la fonction carré est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et qu'elle est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.



Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

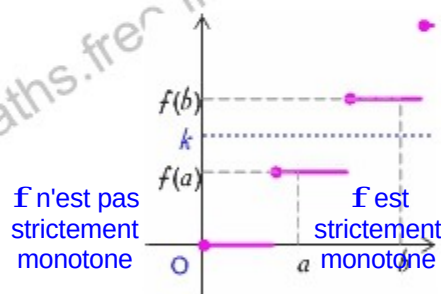
Soient $a \in I$ et $b \in I$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b .

Si de plus la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle I , alors le réel c est unique.



Remarque

La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème.

Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Exemple solution approchée d'une équation

On peut démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$. Son tableau de variation est :

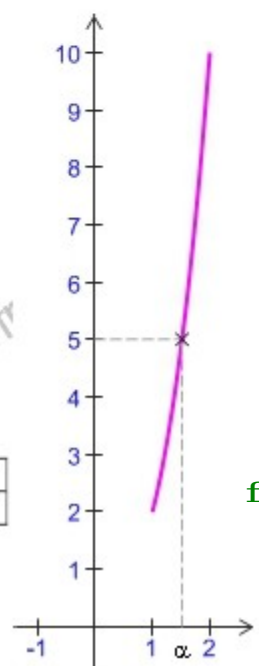
x											
	1						2				
							10				
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	2	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696	6,613	7,632	8,759	10

2

Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

Donc pour tout $k \in [2 ; 10]$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[1 ; 2]$.

En particulier l'équation $f(x) = 5$ a une solution unique α dans $[1 ; 2]$.



On a $f(1,5) < 5 < f(1,6)$

On en déduit que la solution α de l'équation $f(x) = 5$ est telle que $1,5 < \alpha < 1,6$



<http://xmaths.free.fr/>

TES – Continuité - Limites

page 3

Remarque

La propriété des valeurs intermédiaires pourra être étendue à un intervalle non borné.

Exemple

Soit f la fonction dont le tableau de variations est donné ci-contre.

Pour résoudre les équations $f(x) = -5$ et $f(x) = 8$, on pourra écrire :

D'après le tableau de variations, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
 $-5 \in]-\infty; 3]$, donc l'équation $f(x) = -5$ a une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$.
 $8 \notin]-\infty; 3]$, donc l'équation $f(x) = 8$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
f	3	$-\infty$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f		0		5
	$-\infty$		-2	

Donner dans chaque cas le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

- $f(x) = 7$
- $f(x) = -5$
- $f(x) = -\frac{1}{2}$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

On donne ci-contre le tableau de variations de f .

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
 (On justifiera le résultat)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$	-3	0

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

On donne ci-contre le tableau de variations de f .

1°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

2°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -5$?

(On justifiera les résultats.)
 On trouve une valeur approchée de α en faisant un tableau de valeurs de f .
 Avec une calculatrice on obtient :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f		2	-1	

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ pour $x \in [0; 5]$.

Calculer la dérivée de f et étudier son signe.

Donner le tableau de variations de f .

En déduire que l'équation $f(x) = 8$ a une solution unique α dans $[0; 5]$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

Trouver la valeur exacte de α .

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

1°) Étudier et représenter graphiquement la fonction g .

(On pourra admettre que $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et que $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$)

2°) En utilisant le graphique, discuter suivant les valeurs du réel k le nombre et le signe des solutions de l'équation $g(x) = k$.

3°) Justifier que l'équation $2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 = 0$ a une solution unique et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

<http://xmaths.free.fr/>

TES – Continuité - Limites

page 4

II Limites

Rappel

Lorsque x est "très grand" x^2 , x^3 , x sont aussi très grands, aussi grands que l'on veut.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Lorsque x est "très grand" $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ sont très petits, aussi proches de zéro que l'on veut.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

$x \rightarrow +\infty$
 x^2

Lorsque x est "très grand" $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ sont très petits, aussi proches de zéro que l'on veut.

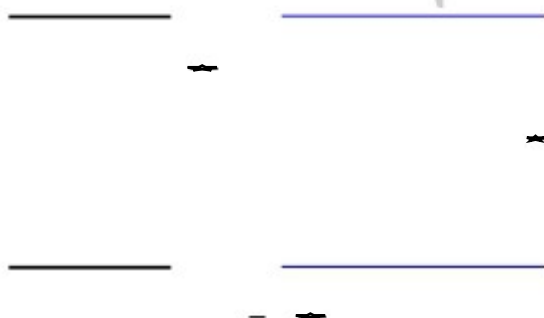
Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

On note $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions f et g , lorsqu'on connaît la limite des deux fonctions.

La plupart des résultats se comprennent et peuvent être retrouvés de façon intuitive.

l et l' désignent des nombres réels. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en a .



1°) Déterminer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 5 \quad ; \quad f(x) = x^3 + x + 1 \quad ; \quad f(x) = x + 2 \quad ; \quad f(x) = x^3 - 3 + \frac{1}{x}$$

2°) Déterminer la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 5 \quad ; \quad f(x) = x^3 + x + 1 \quad ; \quad f(x) = x + 2 \quad ; \quad f(x) = x^2 - 3 + \frac{1}{x}$$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + x - 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + x + 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(x+1) ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1)(x^2-5) ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 + \frac{1}{x} (2x-3)$$

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \frac{3}{x^2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x - 2$

En utilisant une méthode similaire déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.

<http://xmaths.free.fr/>

TES – Continuité - Limites

page 5

Merci d'évaluer Wondershare PDF Converter 4.0.5.

Avec la version d'essai, vous pouvez seulement convertir 5 pages au maximum.

Pour obtenir la version complète, veuillez commander le programme depuis :

<http://cbs.wondershare.com/go.php?pid=1431&m=db>

→ -

→ +

→ +

X

→ -

X

→ -

→ +

X

→ -

→ +

→ +

v

→ -