

CONTINUITÉ

I. Rappels sur la dérivation

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

b) $g(x) = (x^2 + x)(5x - 1)$

On pose : $g(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 + x \rightarrow u'(x) = 2x + 1$
 $v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$

Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x+1)(5x-1) + (x^2+x) \times 5 \\ &= 10x^2 - 2x + 5x - 1 + 5x^2 + 5x \\ &= 15x^2 + 8x - 1 \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{6x-5}{x^2-1}$

On pose : $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$
 $v(x) = x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 2x$

Donc :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{6(x^2-1) - (6x-5)2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 6 - 12x^2 + 10x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-6x^2 + 10x - 6}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Réolvons l'équation $f'(x) \leq 0$

$$2x - 4 \leq 0$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Méthode : Etudier les variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7$

Etudier les variations de la fonction f .

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$.

Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x - 3$ est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

On en déduit le tableau de variations de f :

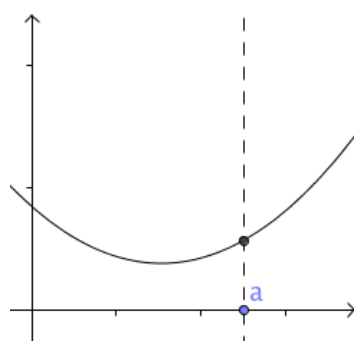
x	0	1	10
$f'(x)$		-	+
f	17	$\frac{16}{3}$	$\frac{1231}{3}$



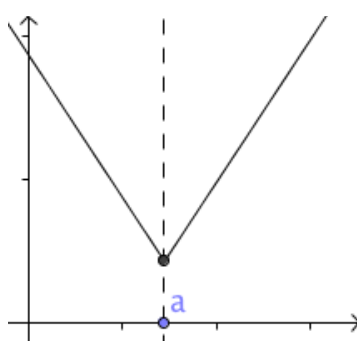
Continuité sur un intervalle

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

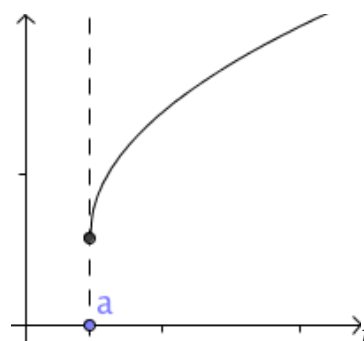
Exemples et contre-exemples :



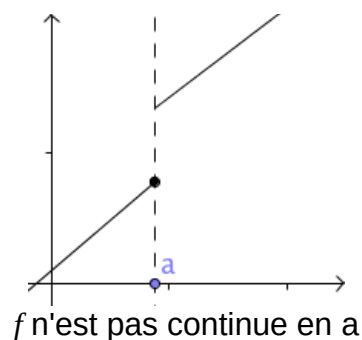
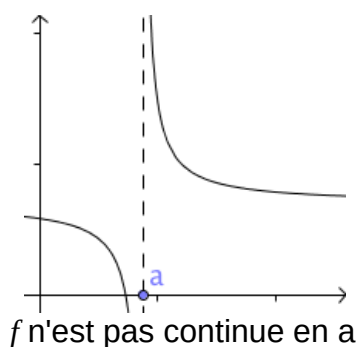
f est continue en a



f est continue en a



f est continue en a



Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I "sans lever le crayon".

Propriétés :

- 1) Les fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- 2) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- 3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- 4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

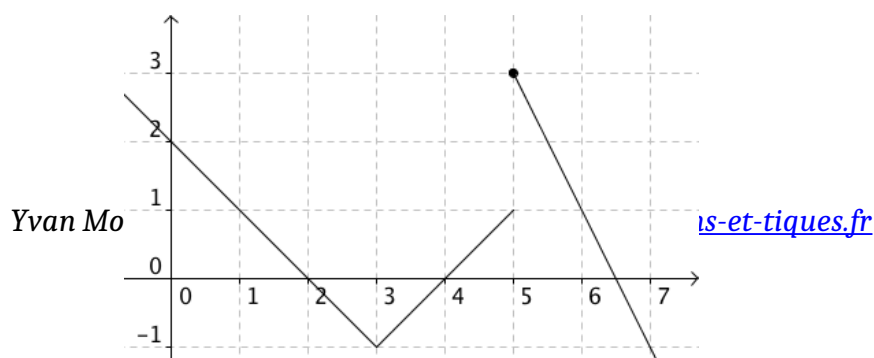
- Admis -

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty; 3[$, sur $[3; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

On peut tracer la fonction f sur $]-\infty; 5[$ sans lever le crayon, elle est donc continue sur cet intervalle. Il en est de même sur l'intervalle $[5; +\infty[$.

Par contre, il n'est pas possible de franchir ces deux intervalles sans lever le crayon. La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

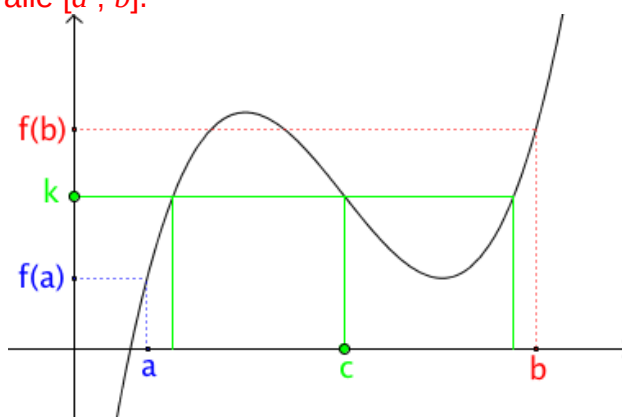
La fonction f est ainsi continue sur $]-\infty; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.



Ci-contre, $f(x) = k$ admet par exemple c comme solution.

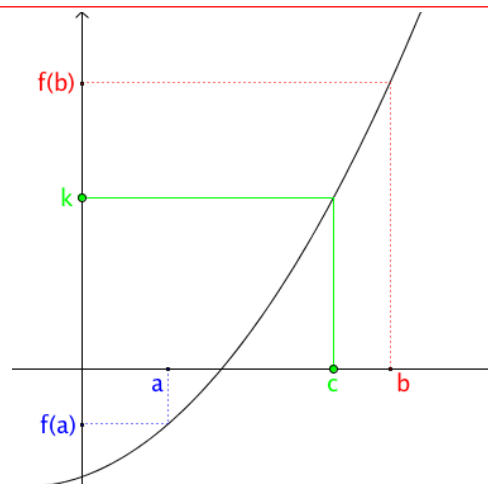
- Admis -

Remarque :

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Corollaire :

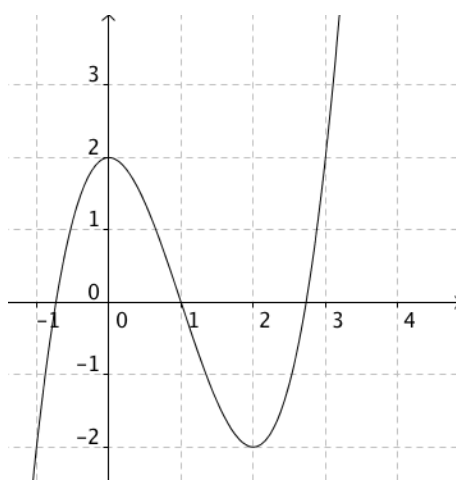
On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
 l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

**Méthode : Résolution approchée d'une équation****EXEMPLE 1**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- 1) Démontrer que $f'(x) = 3x(x - 2)$.
- 2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[2; 3]$.
- 3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2; 3]$.
- 4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α .
- 5) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[2; 3]$.

On commence par tracer la fonction à l'aide de la calculatrice :



- 1) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
- 2) Pour tout x de $[2; 3]$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$.

$$3) f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 = -2 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 2 = 2 > 0$$

La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur

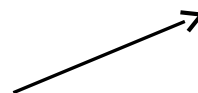
l'intervalle $[2;3]$ et elle **change de signe**.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $f(x) = 0$.

x^2

$3f$
2

-2



2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y_1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y_1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y_1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y_1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est α telle que : $2,73 < \alpha < 2,74$.

5)

x	2	α	3
f	-	0	+

EXEMPLE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1 ; 4]$.

- f est continue sur $[-1 ; 4]$ car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

$$- f(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + 6 = 1$$

$$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$$

Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1 ; 4]$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales