

FONCTIONS EXPONENTIELLES (Partie 1)

I. Fonction exponentielle de base q

1) Définition

On considère la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.

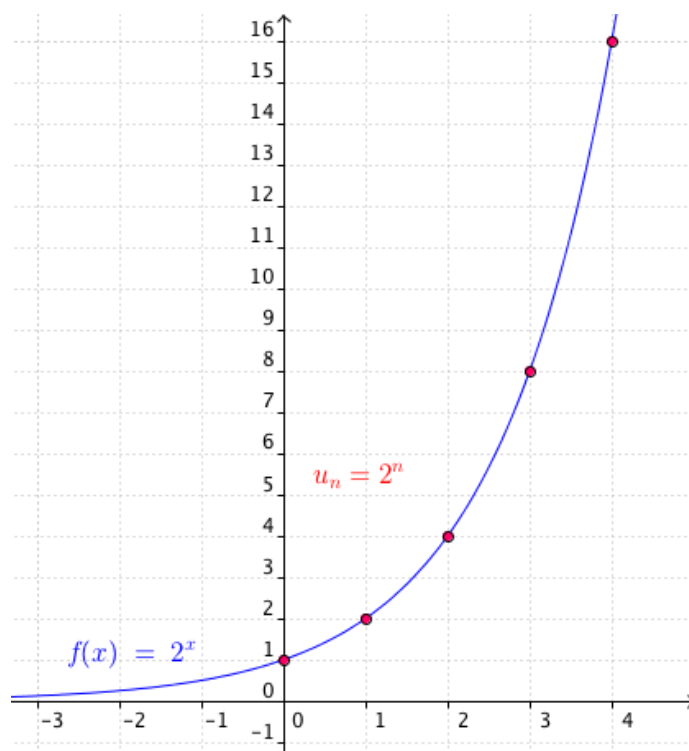
Elle est définie pour tout entier naturel n . En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base q .

Ainsi par exemple :

Pour une suite, on a $u_4 = 2^4$

Pour une fonction, on a $f(4) = 2^4$ mais on

a aussi $f(1,3) = 2^{1,3}$



Définition : La fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$, s'appelle fonction exponentielle de base q .

Exemple :

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1,2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base q .

```

1.2^5
2.48832
1.2^-2
.6944444444
1.2^2.3
1.520936753

```

A noter : $x^{0,5} = \sqrt{x}$

Propriété : La fonction exponentielle de base q est définie, strictement positive, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Admis -

2) Propriétés

Relation fonctionnelle : Pour tout réel x et y , on a $q^{x+y} = q^x \times q^y$

- Admis -

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriétés : Pour tout réel x et y , on a :

a) $q^0 = 1$ et $q^1 = q$

b) $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$

c) $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$

d) $(q^x)^n = q^{nx}$ avec n un entier relatif.

Démonstration de b et c :

b) $q^x q^{-x} = q^{x-x} = q^0 = 1$ donc $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

c) $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = q^x \frac{1}{q^y} = \frac{q^x}{q^y}$

Méthode : Simplifier une expression

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$$

$$B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$$

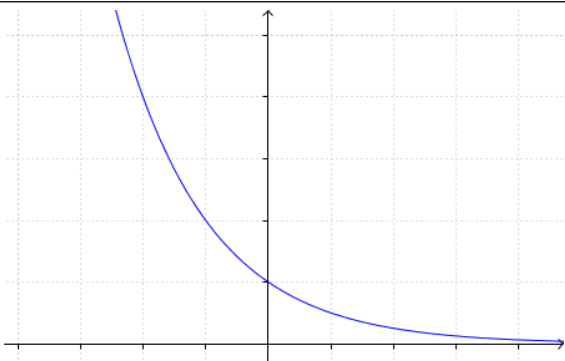
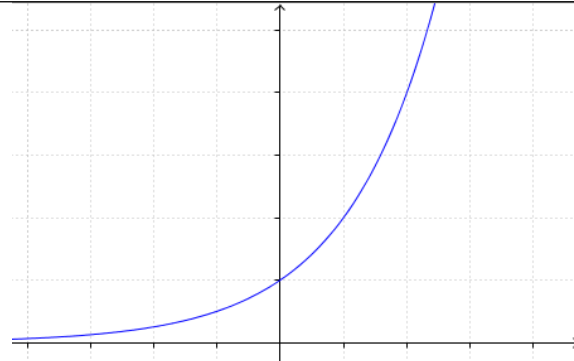
$$C = (4,8^3)^{-2,1} \times 4,8^{6,2}$$

$$\begin{aligned} A &= 4^{-3} \times 4^{-5} \\ &= 4^{-3+(-5)} \\ &= 4^{-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} \\ &= \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5} \\ &= \frac{3^{3-2,5}}{3^{2 \times 5}} \\ &= \frac{3^{0,5}}{3^{10}} \\ &= 3^{0,5-10} = 3^{-9,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (4,8^3)^{-2,1} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{3 \times (-2,1)} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-6,3+6,2} \\ &= 4,8^{-0,1} \end{aligned}$$

II. Variations de la fonction exponentielle de base q

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty$
	

- Admis -

Remarques :

- Si $q = 1$ alors la fonction exponentielle de base q est constante. En effet, dans ce cas, $q^x = 1^x = 1$
- Quel que soit q , la fonction exponentielle de base q passe par le point $(0 ; 1)$. En effet, $q^0 = 1$.
- La fonction exponentielle de base q est convexe.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle de base q

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par : $f(x) = 50000 \times 1,15^x$.

- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
- Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

a) $f(3) = 50000 \times 1,15^3 \approx 76000$
 $f(5,5) = 50000 \times 1,15^{5,5} \approx 108000$

$$\begin{array}{r} 50000 \times 1.15^3 \\ 76043.75 \\ 50000 \times 1.15^{5.5} \\ 107847.0143 \end{array}$$

b) $1,15 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 1,15^x$ est strictement croissante sur $[0 ; 10]$. Il en est de même pour la fonction f .

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales