

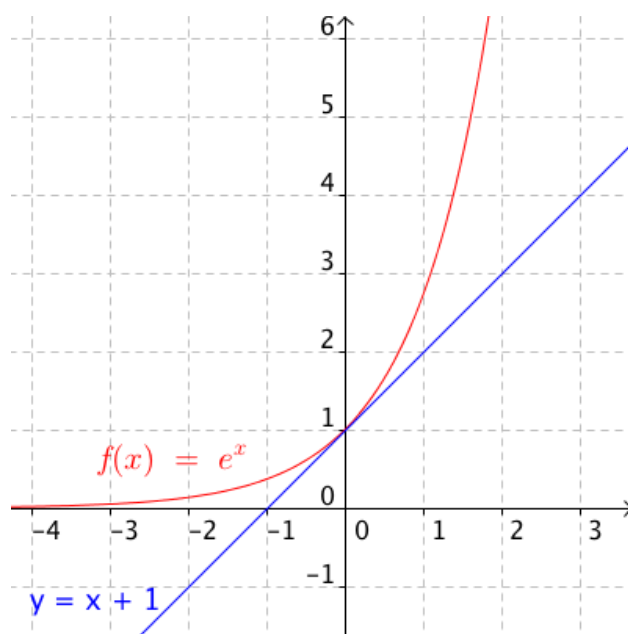
FONCTIONS EXPONENTIELLES (Partie 2)

I. Fonction exponentielle de base e

1) Définition

Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \mapsto q^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point $(0 ; 1)$ a pour coefficient directeur 1.

- Admis -



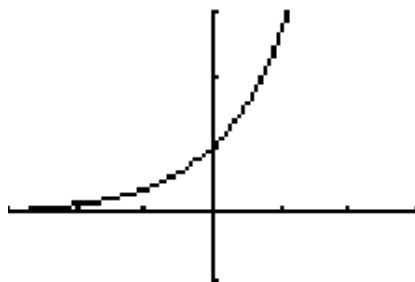
Définition : Cette fonction est la fonction exponentielle de base e , notée **exp**, telle que pour tout réel x , on a $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e .

$$e^1$$

2.718281828

Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi $\exp(21)$ dépasse le milliard.



Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont :

$e \approx 2,7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 47093699959574966967\ 6277240766\ 3035354759\ 4571382178\ 5251664274...$

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre.

Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e .

2) Propriétés

Propriétés : Pour tout réel x et y , on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

e) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

f) $(e^x)^n = e^{nx}$ avec n un entier relatif.

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\
 \\
 A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\
 = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} & = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} & = \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} \\
 = \frac{e^3}{e^{-5}} & = e^{-30} \times e^{-3} & = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\
 = e^{3-(-5)} & = e^{-30-3} & = e^6 + 1 \\
 = e^8 & = e^{-33} &
 \end{array}$$

3) Dérivabilité

Propriété : Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est égal à 1.

Démonstration : Par définition, la tangente à la courbe représentative en 0 a pour coefficient directeur 1.

Propriété : La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = e^x$

- Admis -

Méthode : Dériver une fonction

Dériver les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = 4x - 3e^x & \text{b) } g(x) = (x-1)e^x & \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x}
 \end{array}$$

$$\text{a) } f'(x) = 4 - 3e^x$$

$$\text{b) } g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

$$\text{c) } h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

4) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $(\exp x)' = \exp x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

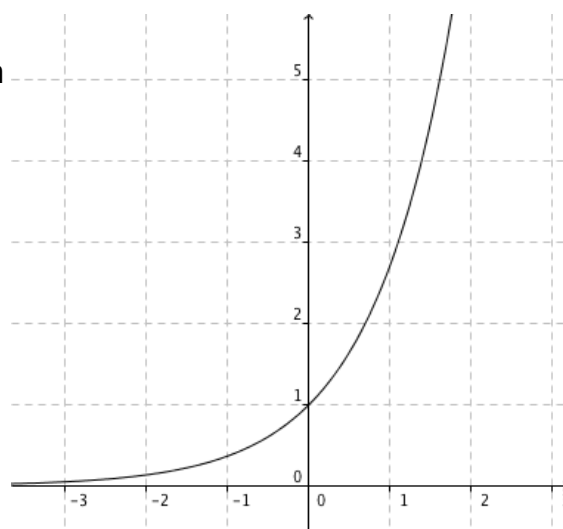
5) Limites en l'infini

Propriété : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0	$+\infty$



Méthode : Etudier une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

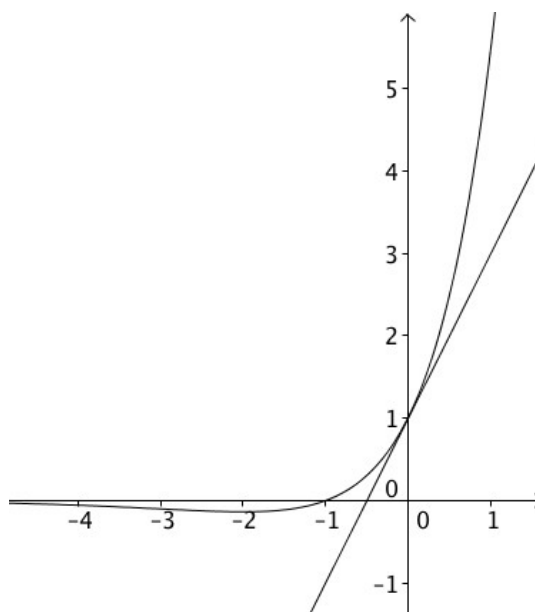
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-e^{-2}$	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit :

$$y = 2x + 1$$

d)



7) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés : Pour tout réel a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1$$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$.

II. Fonctions de la forme e^u

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^u$ est dérivable sur I . Sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

- Admis -

Exemple :

Soit $f(x) = e^{4x+3}$ alors $f'(x) = 4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a $(e^u)' = u'e^u$

Comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ donc la fonction

$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Méthode : Etudier une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice graphique.
- Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e) Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1 \right) e^{-\frac{x}{2}}$.

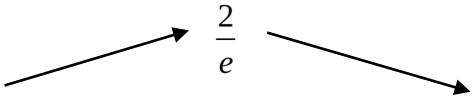
f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

a) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}}$

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

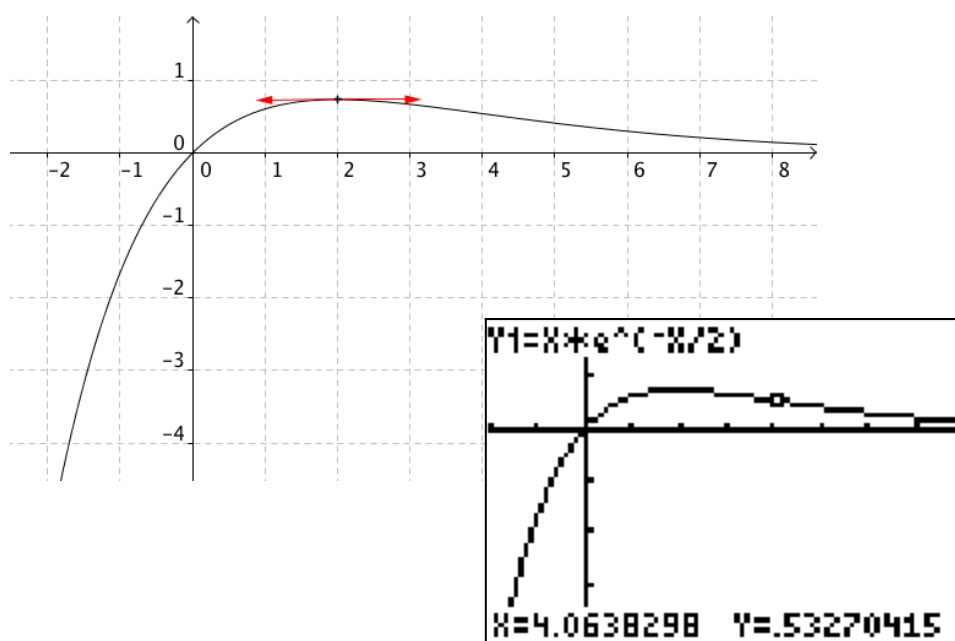
f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = 2 \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

c)



d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

$$\begin{aligned}
 \text{e) } f''(x) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $\frac{x}{4} - 1$.

Donc $f''(x) \geq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \geq 0$ soit $x \geq 4$.

$f''(x) \leq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \leq 0$ soit $x \leq 4$.

Ainsi f' est croissante sur $[4; +\infty[$ et donc f est convexe sur cet intervalle.

f' est décroissante sur $] -\infty; 4]$ et donc f est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de f possède un point d'inflexion d'abscisse 4.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales