

INTEGRATION (Partie 2)

I. Calcul d'intégrales

1) Définition

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ la différence $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x) dx$.

Remarque :

La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.

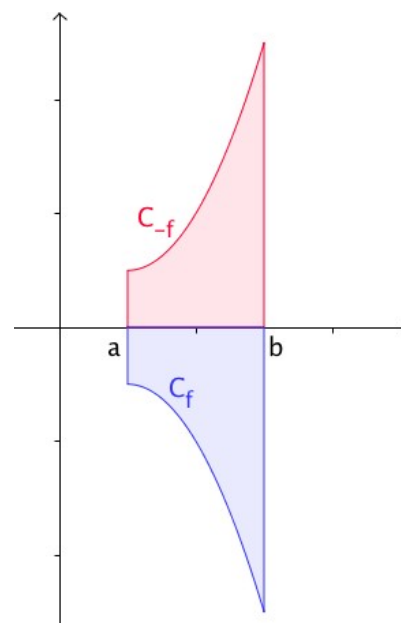
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a ; b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$= - (G(b) - G(a)) \quad \text{où } G \text{ est une primitive de la fonction } -f.$$

$$= - \int_a^b (-f(x)) dx$$

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a ; b]$.



Notations :

On écrit : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer : $A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$

$$B = \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx$$

$$C = \int_1^1 e^{-2x} dx$$

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$= \left[3 \times \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^4$$

$$= \left[-\frac{3}{x} \right]_1^4$$

$$= -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1} \right)$$

$$= -\frac{3}{4} + 3$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$B = \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx$$

$$= \left[x^3 + 2x^2 - 5x \right]_2^5$$

$$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2)$$

$$= 125 + 50 - 25 - (8 + 8 - 10)$$

$$= 144$$

$$C = \int_1^1 e^{-2x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{-2} e^{-2 \times 1} - \frac{1}{-2} e^{-2 \times (-1)}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^2$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}$$

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

a) $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$

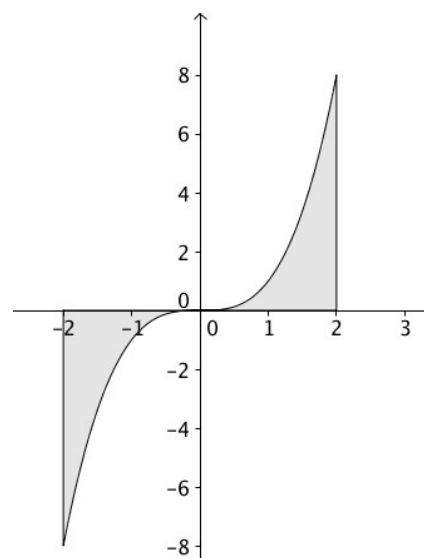
b) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$

Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4 - 4 = 0.$$



Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

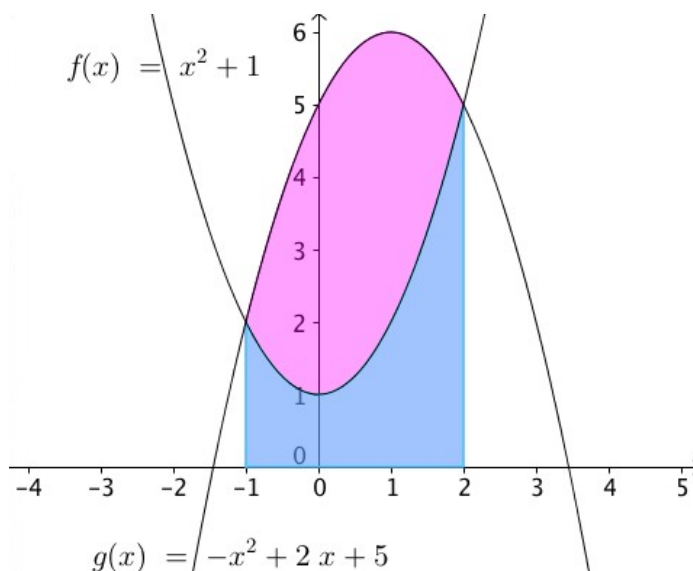
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1; 2]$.

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f .

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 g(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \\
 &= \int_1^2 (-x^2 + 2x + 5) dx - \int_1^2 (x^2 + 1) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2 - \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\
 &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) - \left[\left(\frac{1}{3}2^3 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \right] \\
 &= -\frac{8}{3} + 4 + 10 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 5 \right) - \left[\frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 \right] \\
 &= -\frac{8}{3} + 14 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 3 - \frac{1}{3} \\
 &= -\frac{18}{3} + 15 = 9 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$



2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a , b et c trois réels de I .

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\
 &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\
 &= F(b) - F(a) \\
 &= \int_a^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

3) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

b) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Appliquer la linéarité

Calculer : $\int_1^e \left(e^x - \frac{5}{x} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^e \left(e^x - \frac{5}{x} \right) dx \\
 &= \int_1^e e^x dx - 5 \int_1^e \frac{1}{x} dx \\
 &= \left[e^x \right]_1^e - 5 \left[\ln x \right]_1^e \\
 &= e^e - e^1 - 5(\ln e - \ln 1) \\
 &= e^e - e - 5
 \end{aligned}$$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$.

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

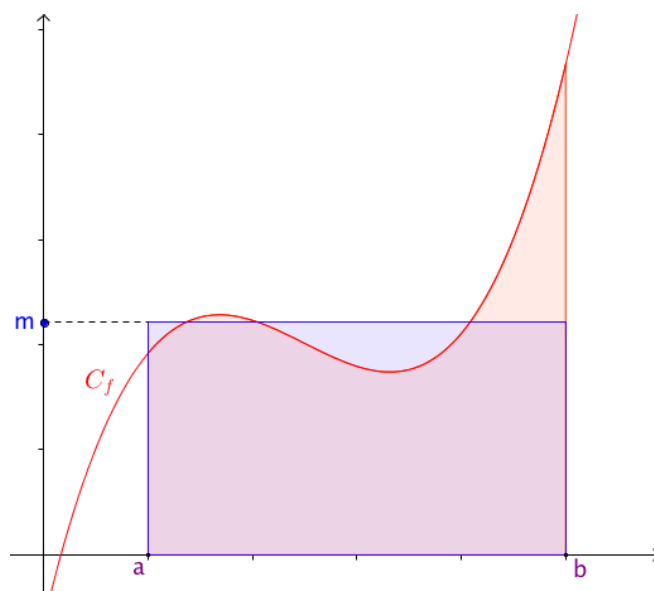
II. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

$$m = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx$$

$$= \frac{1}{10} [x^3 - 2x^2 + 5x]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50)$$

$$= 85$$

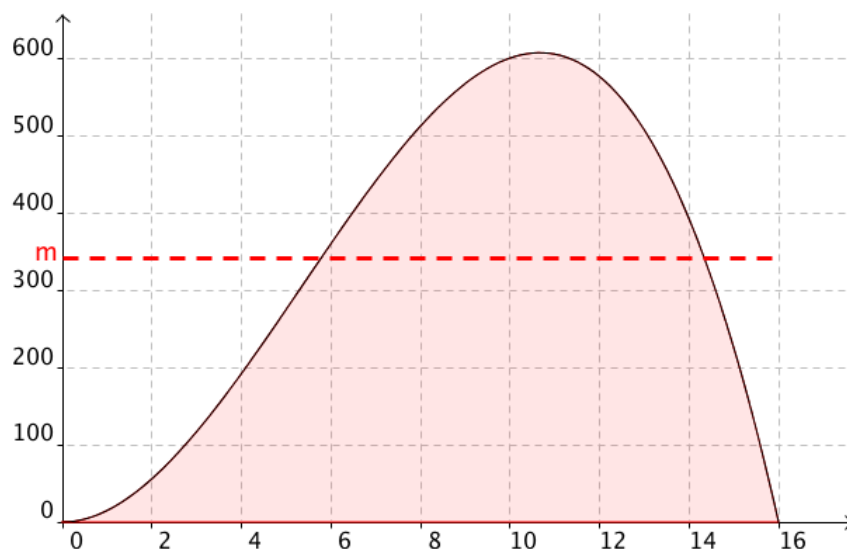
Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{16 - 0} \int_0^{16} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{16} (16x^2 - x^3) dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
 &= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4} \\
 &= \frac{16^3}{12} \\
 &= \frac{1024}{3} \approx 341
 \end{aligned}$$



Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales