

# SUITES GEOMETRIQUES

## I. Rappels

Exemple :

Considérons une suite numérique  $(u_n)$  où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5,$$

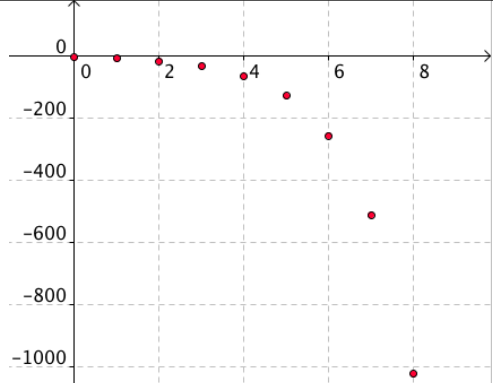
$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite introduite plus haut est définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

|                          | $(u_n)$ une <b>suite géométrique</b><br>de <b>raison</b> $q$<br>de premier terme $u_0$ .                                                                                                                             | <b>Exemple :</b><br>$q = 2$ et $u_0 = -4$                                            |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Définition               | $u_{n+1} = q \times u_n$                                                                                                                                                                                             | $u_{n+1} = 2 \times u_n$<br>Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété                | $u_n = u_0 \times q^n$                                                                                                                                                                                               | $u_n = -4 \times 2^n$                                                                |
| Variations               | Pour $u_0 > 0$ :<br>Si $q > 1$ : $(u_n)$ est croissante.<br>Si $0 < q < 1$ : $(u_n)$ est décroissante.<br><br>Pour $u_0 < 0$ :<br>Si $q > 1$ : $(u_n)$ est décroissante.<br>Si $0 < q < 1$ : $(u_n)$ est croissante. | $u_0 = -4 < 0$<br>$q = 2 > 1$<br>La suite $(u_n)$ est décroissante.                  |
| Représentation graphique | Remarque :<br>Si $q < 0$ : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.                                                                                                                                 |  |

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.  
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.  
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On note  $u_n$  le capital après  $n$  années.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520 \quad u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80 \quad u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale :  $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$  avec  $u_0 = 500$

On peut également exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = 500 \times 1,04^n$

II. Somme de termes consécutifs

Propriété :  $n$  est un entier naturel non nul et  $q$  un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme 1.

Méthode :

Calculer la somme  $S$  suivante :  $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13} = \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} = 2391484$$

Démonstration de la propriété :

On pose :  $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

On veut montrer que :  $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

On veut donc montrer que :  $S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$

$$\begin{aligned} S \times (1 - q) &= S - q \times S \\ &= (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - q(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q - q^2 - q^3 - \dots - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

### Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.  
Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

On note  $(u_n)$  le capital injecté au  $n$ -ième mois alors  $u_{n+1} = 0,7u_n$ .

$(u_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 0,7$  et de premier terme  $u_0 = 20000$ .

Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{11} \\ &= 20000 + 20000 \times 0,7 + 20000 \times 0,7^2 + \dots + 20000 \times 0,7^{11} \\ &= 20000 \times (1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{11}) \\ &= 20000 \times \frac{1 - 0,7^{12}}{1 - 0,7} \approx 65744 \end{aligned}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.  
[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)