

LIMITES DE SUITES

I. Limite d'une suite géométrique

1) Suite (q_n)

q	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$	0	1	$+\infty$

Exemples :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4^n + 3) ?$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4^n + 3) = +\infty$

2) Suite géométrique positive

Propriété : (u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme non nul u_0 .

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme positif non nul u_0 donc $u_n = u_0 \times q^n$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

a) $\frac{2^n}{3}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ de raison 2 et $2 > 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) = 0$ car $3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 3 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) = 1$.

3) Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite (q^n) est inférieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel
Entrée Saisir le réel A
Initialisation Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Traitement des données Tant que u > A Faire Affecter à n la valeur n + 1 Affecter à u la valeur u/4
Sortie Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 0,1, on obtient en sortie n = 3.

A partir du terme u_3 , la suite est inférieure à 0,1.

En langage « calculatrice », cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL	=====SEUIL
:Input A	"A="?→A↵
:0→N	0→N↵
:2→U	2→U↵
:While U>A	While U>A↵
:N+1→N	N+1→N↵
:U/4→U	U÷4→U↵
:End	WhileEnd↵
:Disp N	N

II. Limite de la somme de termes consécutifs

Méthode : Calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 4$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n) .

$$\begin{aligned}
 S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\
 &= 4 + 4 \times 0,5 + 4 \times 0,5^2 + \dots + 4 \times 0,5^n \\
 &= 4(1 + 0,5 + 0,5^2 + \dots + 0,5^n) \\
 &= 4 \times \frac{1 - 0,5^{n+1}}{1 - 0,5} \\
 &= 8(1 - 0,5^{n+1}) \\
 &= 8 - 8 \times 0,5^{n+1}
 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n+1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 8 \times 0,5^{n+1}) = 8$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 8$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales