

SUITES ARITHMÉTICO- GÉOMÉTRIQUES

I. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$

La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

- 1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10^{ème} année.
- 2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire u_n en fonction de n . Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.
- 5) Etudier les variations de (u_n) .
- 6) Calculer la limite de (u_n) .

1) Avec le tableur, on obtient :

B2		÷ × ✓ ↺	fx	=1,03*B1+300
	A	B	C	D
1	Année 0	5000		
2	Année 1	5450		
3	Année 2	5913,5		
4	Année 3	6390,905		
5	Année 4	6882,6322		
6	Année 5	7389,1111		
7	Année 6	7910,7844		
8	Année 7	8448,108		
9	Année 8	9001,5512		
10	Année 9	9571,5978		
11	Année 10	10158,746		

La somme totale épargnée à la 10^{ème} année est égale à environ 10158,75 €.

2)

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + 10000 \\
&= 1,03u_n + 300 + 10000 \\
&= 1,03u_n + 10300 \\
&= 1,03(u_n + 10000) \\
&= 1,03v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n , $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n , $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$.

On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

5) Pour tout n ,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000) \\
&= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n) \\
&= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1) \\
&= 450 \times 1,03^n > 0
\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme $1,03 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,03^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (15000 \times 1,03^n) = +\infty$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (15000 \times 1,03^n - 10000) = +\infty$, soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

II. Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives

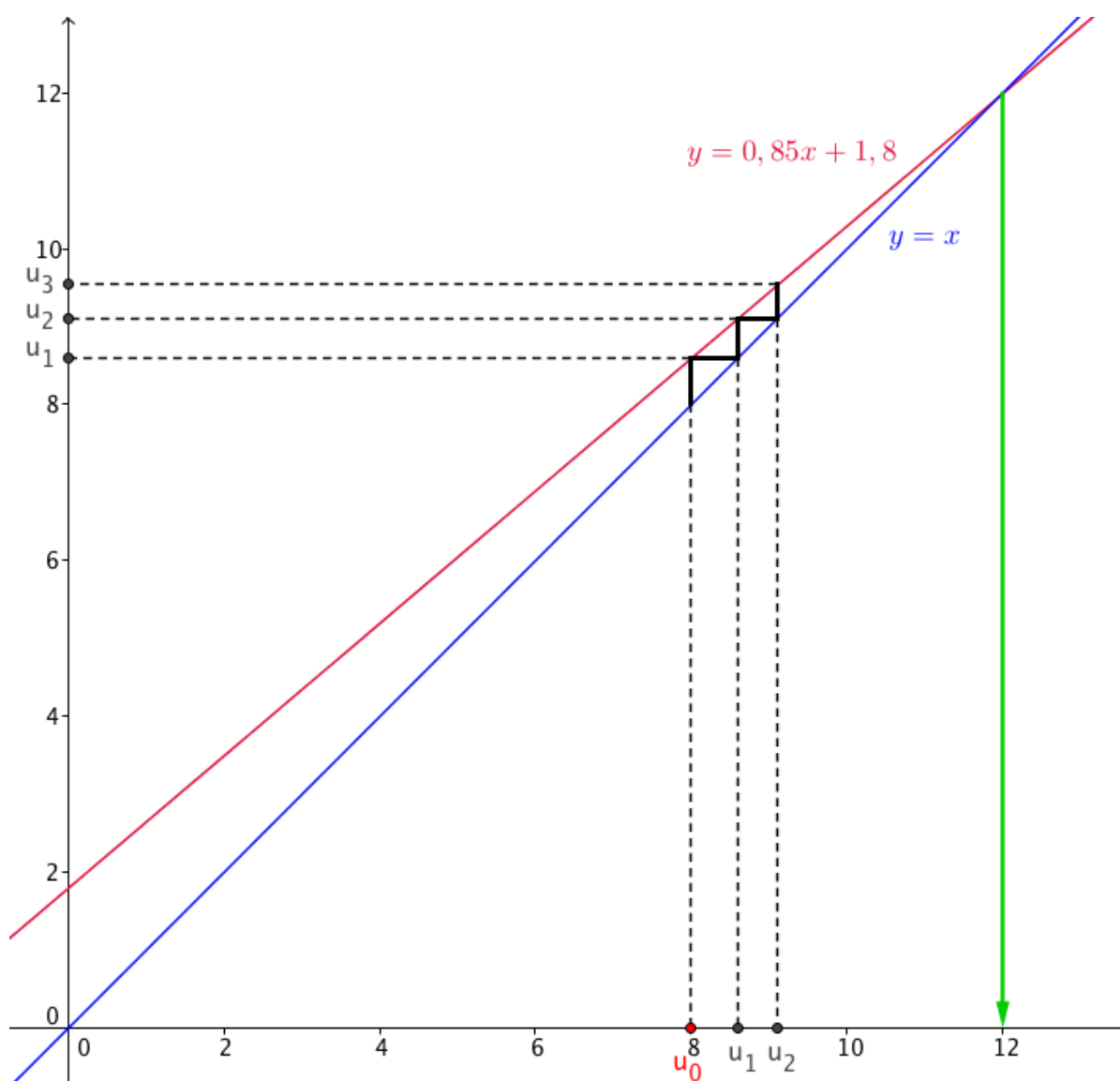
$y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.

2) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparent les traits de construction.

3) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

D'après Bac ES Polynésie 2009

1) 2)



3) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales