

Classe 12^{ème} TSEco

Durée : 6H

Chapitre : 5 discipline : Mathématiques

ANALYSE

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologiques

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Contenu :

- Limites, Continuité, Dérivée d'une fonction numérique
- Primitives, Intégrale d'une fonction numérique
- Exemples d'étude d'une fonction numérique

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Chiffon, craie, règle, équerre, compas

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Séquence 1: Rappels

1.1. Résolution de l'équation du second degré :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, on peut calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution $S = \emptyset$

- si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$S = \{x_1; x_2\}$

- si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ $S = \{\frac{-b}{2a}\}$

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $3x^2-5x+1=0$

b) $x^2+x+2=0$

c) $-4x^2+36x-81=0$

1.2. Signe du binôme et du trinôme

a) Signe du binôme

Soit $f(x) = ax+b = 0$, a non nul. Pour étudier les signes d'un binôme, on étudie les signes de tableau suivant :

X	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax + b	Signe de (-a)	0	signe de a

b) Signe du trinôme

Soit $P(x) = ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$)

Pour étudier les signes d'une équation du second degré, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$ on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x)$

-si $\Delta = 0$ on a le tableau de signe suivant

X	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P(x)	Signe de a	0	signe de a

x_0 est le zéro de $P(x)$

-si $\Delta < 0$ on a le tableau de signe suivant

X	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	Signe de a	

Evaluation :

Etudier les signes des fonctions suivantes

- a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
- b) $g(x) = x^2 + x + 2$
- c) $k(x) = -4x^2 + 36x - 81$

Activité 3 : ensemble de définition d'une fonction numérique

Définition : Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. On appelle ensemble de définition D_f de f , l'ensemble des éléments x de A qui ont une image dans B .

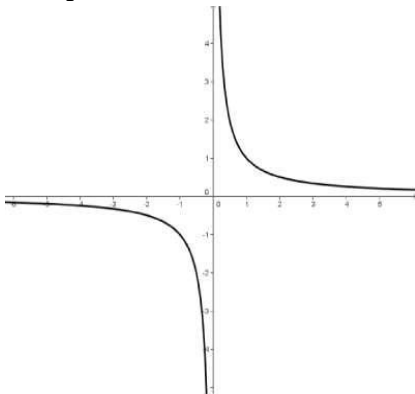
Evaluation : Déterminer l'ensemble de définition D_f de chacune des fonctions définies par :

- a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$
- c) $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$
- b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-7x+6}$
- d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

Activité 4 : Limites d'une fonction

Consigne 1 : Approche graphique

La fonction f est donnée par sa courbe représentative ci-dessous.



- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Consigne 2 : Calcul de limites :

Limites obtenues directement ou par transformation de l'expression :

1) Fonctions Polynômes :

Théorème 1 : À l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemples : Calculer les limites suivantes

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 5x + 9)$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 - 3x^2 + x + 4)$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 8x + 1)$

2) Fonctions Rationnelles :

Théorème 2 : À l'infini toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{4x^2 - 5x + 2} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 7x - 8}{x^2 + 9x - 7}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}$$

3) Fonctions Irrationnelles :

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions puis calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2})$$

Activité 4 : Continuité d'une fonction f

Consigne 1 Continuité en un point d'abscisse

x_0

- a) **Définition :** Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition D_f . On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de D_f si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- b) **Exemple :**

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en $x_0 = 1$? ; $x_0 = 0$?

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
 f est-elle continue en $x_0 = 2$

consigne 2 :

Prolongement par continuité en un point :

a) **Définition :** f est prolongeable par continuité au point x_0 si et seulement, si $x_0 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$

Son prolongement est la fonction g définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = g(x) & x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

b) Exemple et contre exemple

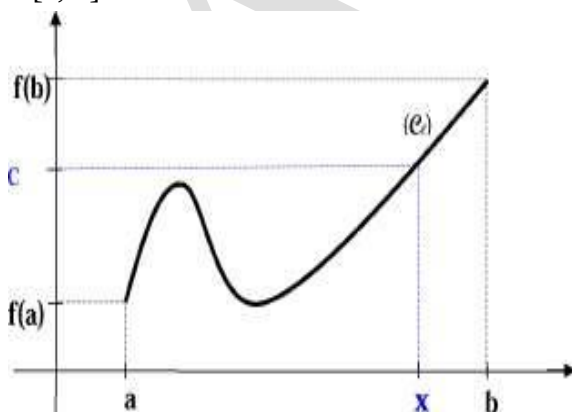
Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$;
 f est elle prolongeable par continuité au point $x_0 = 1$? si oui, déterminer son prolongement g

Soit f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Consigne 3 : continuité sur un intervalle $I = [a, b]$

Une fonction f est continue sur $I = [a, b]$, si elle est continue en tout point de I

Exemple : f est elle continue sur l'intervalle $I = [a, b]$



Théorème 3:

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Conséquence du Théorème de valeurs intermédiaire :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution a dans $[a, b]$ tel que $f(a) = 0$. (exemple graphique)

Consigne 4 : Théorème de la bijection :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a, b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a, b]$ sur $f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle.

De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $[a, b]$ tel que $f(a) = 0$.

(courbe dans le cours)

Consigne 5 ; Représentation graphique d'une bijection réciproque :

Pour représenter la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe (C_f) de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. (exemple graphique)

Activité 5 : Dérivée d'une fonction numérique :-

Consigne 1 : Fonction dérivable en un point

Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A; (A \in \mathbb{R}). A \text{ est noté } f'(x_0)$$

et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants :

$$1) f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \text{pour } x_0 = 2$$

$$2) f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour } x_0 = -1$$

Consigne 2 : Équation de la tangente à la courbe en un point x_0 :

L'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse x_0 est (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ de courbe représentative (Cf). déterminer l'équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse 5

Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0 .

Consigne 3 : Techniques de dérivation

Formules de dérivation :

Soient f ; u et v des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I

Fonction f définie	Fonction dérivée f' définie
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = an x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u' = (f^n)' = nx f^{n-1} x f'$
$f = U + V$	$f' = (u+v)' = u' + v'$
$f = UX \cdot V$	$f' = (u \cdot v)' = u'v + v'u$
$f(x) = u(ax + b)$	$f'(x) = axu'(ax + b)$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Calculer la dérivée de f sur Df

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
- $f(x) = -5x^3$
- $f(x) = (2x+3)(-7x^2+x+8)$
- $f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$

$$5) (3x^2 - 5x + 2)^7$$

Consigne 4: Dérivabilité et continuité :

Théorème 4: (admis)

Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point. Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

Activité 6 : Primitives d'une fonction numérique :

Consigne 1 : Soit la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$

Calculer la dérivée de chacune des fonctions F ; G ; H définies par :

$$F(x) = x^2 + 3x + 10; G(x) = x^2 + 3x - 17; H(x) = (x + \frac{3}{2})^2 + 11. \text{ Que remarque-t-on ?}$$

Pour tout x de Df, $F'(x) = f(x)$; $G'(x) = f(x)$; $H'(x) = f(x)$. On dit que F ; G ; H sont des primitives de f sur Df.

Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie non vide $[a ; b]$ de $\mathbb{R}$. On appelle fonction primitive de f sur $[a ; b]$, toute fonction F telle que : $\forall x \in [a ; b], F'(x) = f(x)$.

Remarque :

- Si f est continue sur $[a ; b]$ alors sa primitive F est continue sur $[a ; b]$ (car F est dérivable sur $[a ; b]$).
- Les fonctions qui à $x \mapsto F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) sont appelées les primitives de f sur $[a ; b]$

Consigne 2 : Calcul de Primitives :

Primitives de fonctions usuelles: Soient f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
$f(x) = 0$	$F(x) = C$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$

$f(x) = ax^n$	$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = (x-a)^m ; m \neq -1$	$F(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + C$
$f(x) = (ax+b)^n ; n \neq -1$	$F(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$
$f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$	$F(x) = \ln U(x) + C, U(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$	$F(x) = \sqrt{U(x)} + C ; U(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{U'(x)V(x) - V'(x)U(x)}{(V(x))^2}$	$F(x) = \frac{U(x)}{V(x)} + C ; V(x) \neq 0$
$f(x) = U'(x)U^n(x) ; n \neq -1$	$F(x) = \frac{U^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{U'(x)}{(U(x))^n}$	$F(x) = \frac{-1}{n-1(U(x))^{n-1}} + C ; n \neq 1$

Activité 7: Calcul Intégral :

Consigne 1 :

Définition : Soit F une primitive d'une fonction f sur [a ; b]. On appelle **intégrale définie** de f sur [a ; b] le réel noté :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorèmes : on admettra les théorèmes suivants :

- Théorème 1 : Toute fonction continue sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].
- Théorème 2: Toute fonction monotone et bornée sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].

Propriétés :

$$a) \int_b^a f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_c^a f(t)dt$$

$$b) \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$c) \int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$$

$$d) \int_a^b (f + g)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$e) \int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

$$f) \text{ Si } f \geq 0 \text{ sur } [a ; b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dt \geq 0$$

$$g) \text{ Si } f \geq g \text{ sur } [a ; b] \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

$$h) \int_a^b f'(x)dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Consigne 2 :

Définition :

On appelle **moyenne de l'intégrale sur [a ; b]** le nombre

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Consigne 3 :

La formule de l'intégration par partie

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx$$

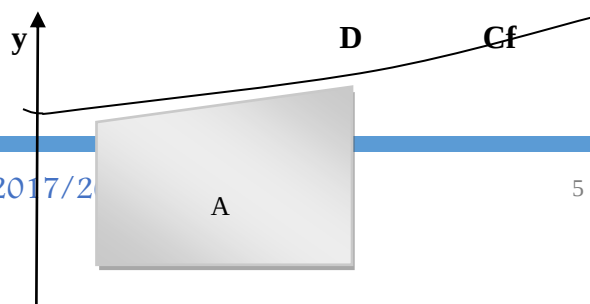
Consigne 4: Applications du Calcul

Intégral

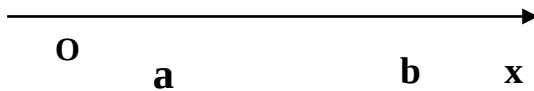
Calcul d'aires :

Si f est intégrable et positive sur [a ; b]

$\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire A du domaine compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$; $x = b$ et la courbe (Cf) de f sur [a ; b].

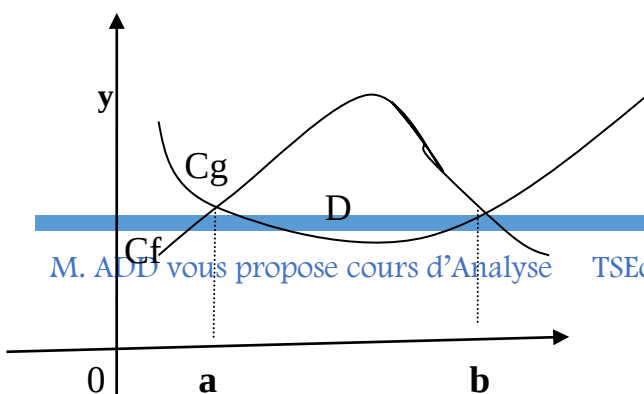
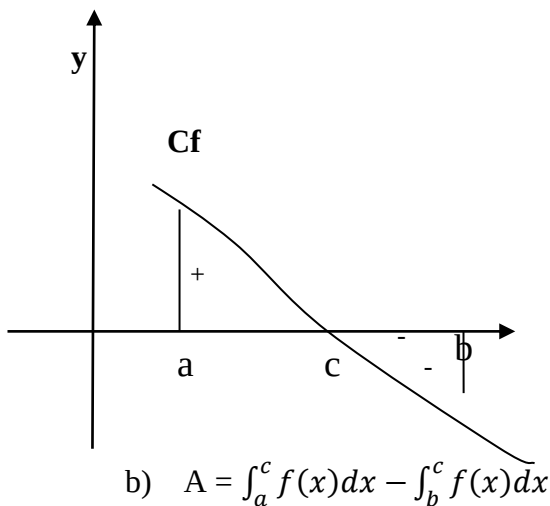
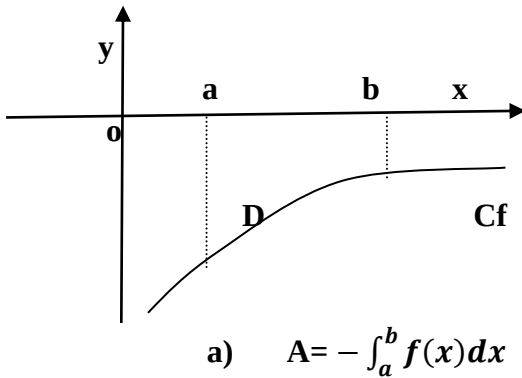


$$A = \int_a^b f(x) dx$$



Conséquences :

Les configurations ci-dessous nous donnent les aires des domaines D



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Soit la fonction f définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. Déterminer l'aire A du domaine limité par l'axe des abscisses les droites d'équations $x = -4$; $x = 2$ et par la courbe (C_f) de f .

Activité 8 : Etude d'une Fonction Numérique

Consigne 1 Quelques propriétés géométriques

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite paire si, et seulement si $\forall x \in D_f$ et $\forall (-x) \in D_f$, $f(-x) = f(x)$. La courbe (C_f) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in D_f$, $\forall (-x) \in D_f$ $f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation $x = a$, ($a \in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe (C_f) de f , si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point I (a ; b) est un centre de symétrie pour la courbe (C_f) de f si et seulement si, $f(2a-x)+f(x)=2b$.

5. Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable en un point a et de courbe représentative (C_f). Le point A(a,f(a)) est un point d'inflexion si, et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

6. Extremums relatifs :

Théorème 1: Si f admet un extremum relatif d'abscisse x₀, alors f'(x₀) = 0 ou f n'est pas dérivable en x₀.

Théorème 2: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert]a ; b[. Si f'(x) s'annule en x₀ de]a ; b[en changeant de signe, alors f admet un extremum en x₀.

7. Asymptotes :

a) asymptote verticale :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe (C_f) de f.

b) Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ (réel, alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe (C_f) de .

c. Asymptote oblique :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$

Si $f(x) = ax+b+c(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x) = 0$;

alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

d. Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe (C_f) de / par rapport à son asymptote oblique (D) d'équation : $y = ax + b$; on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ dans D_f.

1^{er} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] < 0$; alors la courbe (C_f) est en dessous de (D).

2^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] > 0$; alors la courbe (C_f) est au dessus de (D).

3^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] = 0$; alors la courbe (C_f) coupe (D) en un point x₀.

Consigne 2 : Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

1. Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
2. Etudier éventuellement la parité.
Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
3. Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
4. Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation. (si f'(x) > 0 la fonction f est strictement croissant ; si f'(x) < 0 la fonction f est strictement décroissante et si f'(x) = 0 alors f est constante.)
5. Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
6. Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
7. Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
8. Points d'inflexion etc.